materia

Matemáticas I

unidade didáctica 2

# Vectores e xeometría no espazo

**Miguel A. Vilar Rivas**
Área de Matemática Aplicada
Departamento de Matemática Aplicada
Escola Politécnica Superior

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

VICERREITORÍA DE ESTUDANTES, CULTURA E FORMACIÓN CONTINUA

titulación

Grao en Enxeñaría Agrícola e do Medio Rural

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

unidade **didáctica** 2

# Vectores e xeometría no espazo

**Miguel A. Vilar Rivas**
Área de Matemática Aplicada
Departamento de Matemática Aplicada
Escola Politécnica Superior

unidadedidáctica
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Deseño
Unidixital
Servizo de Edición Dixital
da Universidade de Santiago de Compostela

Edita
Vicerreitoría de Estudantes,
Cultura e Formación Continua
da Universidade de Santiago de Compostela
Servizo de Publicacións
da Universidade de Santiago de Compostela

Imprime
Unidixital

Dep. Legal: C 332-2013
ISBN 978-84-9887-998-8

**MATERIA: Matemáticas I**
**TITULACIÓN: Grao en Enxeñaría Agrícola e do Medio Rural**
PROGRAMA XERAL DO CURSO
Localización da presente unidade didáctica

## BLOQUE I. ALGÚNS ASPECTOS DE ÁLXEBRA LINEAR

### Unidade I. Matrices e sistemas de ecuacións lineares

Definición e exemplos de matrices
Tranformacións elementais en matrices. Rango dunha matriz.
Operacións con matrices.
Determinante dunha matriz. Matriz trasposta e matriz inversa
Sistemas de ecuacións lineares. Solución e forma matricial dun sistema
Teorema de Rouché-Frobenius
Sistemas equivalentes. Método de Gauss

### Unidade II.Vectores e xeometría do espazo

Definición e exemplos de espazo vectorial
Dependencia linear
Sistema de xeradores. Base dun espazo vectorial. Coordenadas
Dimensión dun espazo vectorial
Subespazos vectoriais
Produto escalar
Ortogonalidade. Norma dun vecto. Distancias e ángulos
Produto vectorial en $\mathbb{R}^3$
Ecuación da recta en $\mathbb{R}^2$
Ecuacións de recta e plano en $\mathbb{R}^3$

## BLOQUE II. CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL. INTRODUCIÓN

### Unidade III. Conceptos básicos de funcións reais de unha e varias variables

Nocións topolóxicas en $\mathbb{R}^n$
Funcións reais de varias variables. Dominio e gráfica
Funcións elementais
Límites e continuidade dunha función: definición e propiedades

### Unidade IV. Cálculo diferencial de funcións reais dunha e varias variables. Aplicacións

Derivadas parciais e direccionais. Concepto de gradiente
Funcións derivadas. Regras de derivación
Concepto de diferencial. Regra da cadea. Recta e plano tanxente
Teorema de Rolle. Teorema do valor medio. Regra de L'Hopital
Cálculo de extremos. Estudo local dunha función

**Unidade V. Cálculo Integral de funcións reais dunha e varias variables. Aplicacións**

Integral de Riemann
Primitiva dunha función
Teoremas fundamentais do cálculo integral
Integrais impropias
Integración numérica: regla dos trapecios
Aspectos xeométricos da integral dobre
Integración dobre sobre rectángulos. Teorema de Fubini
Integración dobre sobre rexións máis xerais
Integración triple sobre paralelepípedos

## ÍNDICE

## PRESENTACIÓN

Esta segunda unidade didáctica constitúe unha magnífica introdución para comprender a precisión dun argumento matemático e para iniciarse na construción de demostracións, pois combina de xeito moi satisfactorio dous dos elementos da matemática: abstracción e aplicación.

A unidade anterior de *Matrices e sistemas lineais* tiña, entre outros obxetivos, observar unha serie de propiedades e cuestións comúns ós diferentes contidos presentados que agora, nesta unidade didáctica, pretendemos abstraer e xeneralizar.

O término **espazo vectorial** provén do estudo dos vectores libres do espazo euclídeo. Aínda que a primeira definición aparece no século XIX cun carácter xeométrico, enseguida víuse que outros moitos conxuntos podían dotarse da estrutura de espazo vectorial. Con todo, a definición axiomática non aparece ata o século XX dada por Peano.

É por esta motivación histórica que presentamos a definición axiomática de espazo vectorial, apoiándonos no modelo de espazo vectorial máis intuitivo que coñecemos: o que deriva das nocións físicas de forza e velocidade, para posteriormente introducir axiomáticamente os espazos vectoriales sobre $\mathbb{R}$.

Trala introdución clara e suficientemente exemplificada do concepto de subespazo vectorial, continuamos coas definicións de dependencia e independencia linear dun sistema de vectores, que caracterizará o subespazo xenerado por un conxunto de vectores.

Posteriormente presentamos os espazos vectoriales de tipo finito como aqueles que posúen un conxunto finito de xeneradores. A partir desta idea, xunto coa de independenza linear, aparece o concepto de base, cuxa existencia está garantida neste marco. Introdúcense as coordenadas dun vector respecto dunha base asociándolle, de xeito único, unha n-upla de elementos de $\mathbb{R}$; para chegar, á definición de dimensión dun espazo vectorial de tipo finito.

A partires de aquí, pretendemos centrarnos nos espazos vectoriais $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ coas operacións habituáis, pero poñendo de manifesto sempre a xeneralidade dos conceptos presentados. Así comezamos polo concepto abstracto de **produto escalar** que da lugar ó de **espazo vectorial euclídeo** e**norma dun vector**. Das propiedades da definición abstracta de norma xustificamos a idea de **ángulo**.

Por último, en $\mathbb{R}^3$, presentamos o concepto de **produto vectorial**, para rematar a unidade co recordatorio dos diferentes tipos de ecuacións de rectas en $\mathbb{R}^2$ e rectas e planos en $\mathbb{R}^3$.

## OS OBXECTIVOS

Os obxectivos a conseguir nesta unidade son:

- Entender os conceptos básicos: espazo vectorial e subespazos.
- Comprender e manexar os conceptos de dependencia e independencia linear.
- Comprender e manexar a definición alxebraica de base e dimensión dun espazo ou subespazo vectorial.
- Calcular o rango de sistemas vectoriais.
- Relacionar estas xeneralizacións e abstraccións co estudiado no tema anterior de matrices e sistemas lineares.
- Coñecer as propiedades básicas dun produto escalar en xeral.
- Entender a estructura alxebraica de espazo vectorial euclídeo.
- Comprender e manexar os conceptos de ortogonalidade, norma dun vector, ángulos e distancia.
- Manexar as propiedades do produto vectorial en $\mathbb{R}^3$.
- Manexar os diferentes tipos de ecuacións tanto de rectas en $\mathbb{R}^2$, como de rectas e planos en $\mathbb{R}^3$.
- Manexar o cálculo vectorial para o estudio das posicións relativas tanto de rectas en $\mathbb{R}^2$, como de rectas e planos en $\mathbb{R}^3$.
- Resolver problemas xeométricos utilizando métodos alxebraicos.
- Introducir o uso de ecuacións paramétricas, co fin de comprender de forma máis dinámica o estudio de curvas e superficies no espacio.
- Facer razoamentos matemáticos sinxelos.

## OS PRINCIPIOS METODOLÓXICOS

Seguiranse as indicacións metodolóxicas xerais establecidas na Memoria dos Títulos de Grao en Enxeñería Agrícola e do Medio Rural. Desde xeito, a docencia dividirase en:

- **docencia expositiva**:(6 h) clases nas que o profesor presentará coa axuda da pizarra e dos medios audovisuais, os contidos detallados da unidade. O obxectivo destas clases é proporcionar ó alumnado os coñecementos básicos que lle permitan abordar o estudo da materia de xeito autónomo, con axuda da bibliografía e dos exercicios que realice ó longo do curso. Ademáis, nestas clases introducirase ao alumnado no manexo de software matemático axeitado, en coordinación coa materia de informática que se atopa cursando simultáneamente, para que poida profundizar no seu manexo de xeito autónomo. De tódolos xeitos, evitaranse as demostracións non constructivas dos resultados en favor da obtención da maior información no tempo dispoñible. Hai definicións formais e outras xurdirán. Demostraciós precisas e outras non tanto. Pero tentaremos que a teoría fundamental sexa motivada e reforzada mediante exemplos;
- **seminarios**: (3 h) clases para grupos de 20 persoas como moito, nas que co diálogo co alumnado resolveranse algúns dos exercicios

do boletín proposto (ver anexo), para unha mellor comprensión dos contidos da unidade didáctica. Estas clases servirán tamén para mostrar o emprego do software matemático na resolución de problemas;

— **titorías**: sesións persoais ou en grupos reducidos e duración variable, nas que se atenderá ao alumnado que desexe asistir para discutir, comentar, clarexar ou resolver calquera dúbida relacionada co desenvolvemento da materia. O horario destas sesións (6 horas semanais) será fixado polo profesor ao comenzo do curso académico.

O alumnado disporá do complemento docente que supón o curso asociado á materia na USC-Virtual, donde atoparán o material utilizado na aula relacionado cos contidos teóricos desenvoltos nas clases expositivas, o boletín de exercicios propostos que serán resoltos, en parte, nos seminarios, e terán ademáis acceso a outro material complementario (videos, textos, enlaces …) que amplíe e motive os contidos da unidade didáctica.

## OS CONTIDOS BÁSICOS

# 1 Espazos vectoriais

Para definir esta estrutura alxebraica traballaremos con dous conxuntos:

— O ben coñecido conxunto dos números reáis: $\mathbb{R}$, cuios elementos denotaremos por letras do alfabeto grego: $\alpha, \beta, \lambda \dots$

— Un conxunto xenérico $V$ cuios elementos denotaremos por letras do alfabeto latino ás que poremos unha frecha por riba: $\vec{a}, \vec{x}, \vec{u} \dots$

É innegable que esta notación para os elementos de $V$ é herdeira da que utilizan os físicos e enxeñeiros, principalmente, cando se refiren os vectores libres cos que representan forzas, velocidades .... E esto é así porque como veremos nos exemplos e no boletín (ver anexo), o conxunto dos vectores libres do plano ou do espazo tridimensional, costitúen os primeiros exemplos de esta estrutura. Pero isto non debe facernos esquecer que $V$ é un conxunto xenérico de obxetos (matrices, polinomios, funcións ...) e, polo tanto, os seus elementos tamén.

O primeiro que faremos será defnir unha relación entre os elementos de $V$, chamada **operación interna**. Esta operación non é outra cousa que a cada parella de elementos de $V$, $(\vec{x}, \vec{y})$ asociamoslle de xeito único un novo elemento tamén de $V$, $\vec{a}$ que denotaremos por $\vec{a} = \vec{x} + \vec{y}$. Utilizamos, como no caso anterior, a notación $(+)$ para a operación interna porque se denota así a operación interna no caso do conxunto de vectores libres.

En segundo lugar, definimos unha relación entre os elementos de $\mathbb{R}$ e os elementos de $V$, chamada **operación externa**. Neste caso, relacionaremos de xeito único, un elemento de $\mathbb{R}$ e un de $V$ $(\lambda, \vec{x})$, asociándolles un único elemento de $V$, $\vec{a}$ que, ó igual que nas notacións usadas anteriormente, denotaremos por $\vec{a} = \lambda\vec{x}$.

**Definición 1.** *Dise que o conxunto $V$ ten estrutura de* ***espazo vectorial (e.v.)*** *sobre $\mathbb{R}$ (que $V$ é un $\mathbb{R}$-espazo vectorial ou que $V$ é un espazo vectorial real) se as operacións anteriormente definidas satisfán as seguintes propiedades:*

1. *Para a op. interna sobre $V$, $+$ chamada suma vectorial:*
   (a) *Prop.* ***asociativa****: $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z}),\ \forall \vec{x},\vec{y},\vec{z}\in V$*
   (b) *Ten* ***elemento neutro*** *(que denotamos por $\vec{0}$): $\exists \vec{0}\in V$ verificando que $\vec{x}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{x}=\vec{x},\ \forall \vec{x}\in V$*
   (c) *Cada elemento de $V$ ten un* ***elemento oposto*** *tamén de $V$: Dado $\vec{x}\in V$, $\exists -\vec{x}\in V$ tal que $\vec{x}+(-\vec{x})=-\vec{x}+\vec{x}=\vec{0}$*
   (d) *Prop.* ***conmutativa****: $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x},\ \forall \vec{x},\vec{y}\in V$*
2. *Para a op. externa de $V$ sobre $\mathbb{R}$, ($\cdot$), chamada produto por escalares:*
   (a) $\lambda\cdot(\vec{x}+\vec{y})=\lambda\cdot\vec{x}+\lambda\cdot\vec{y},\qquad \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall\vec{x},\vec{y}\in V,$
   (b) $(\lambda+\mu)\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}+\mu\cdot\vec{x},\qquad \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \forall\vec{x}\in V,$
   (c) $(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{x}=\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{x}),\qquad \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \forall\vec{x}\in V,$
   (d) $1\cdot\vec{x}=\vec{x},\qquad \forall\vec{x}\in V,$

*Ao espazo vectorial, denotarémolo de xeito abreviado como $(V,+,\cdot\mathbb{R})$, e os elementos de $V$ denomínanse vectores.*

**Exemplo 1.** *Consideremos o conxunto de números reáis, pero pensados na súa expresión mediante potencias do número $e$: $V=\{e^a\ /\ a\in\mathbb{R}\}$ coa operación interna: $e^a\cdot e^b=e^{a+b}$. Cal é o elemento neutro de esta operación? Cal é o elemento oposto?.*

**Teorema 1.** *(propiedades dos espazos vectoriais) Sexa $V$ un e.v. sobre $\mathbb{R}$. Para calquera $\vec{u},\vec{v}\in V$ e $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ verifícase que:*

1. $\lambda\cdot\vec{0}=\vec{0}$,
2. $0\cdot\vec{u}=\vec{0}$,
3. $\lambda\cdot\vec{u}=\vec{0}\Rightarrow\left[\lambda=0 \text{ ou } \vec{u}=\vec{0}\right]$,
4. $(\lambda-\mu)\cdot\vec{u}=\lambda\cdot\vec{u}-\mu\cdot\vec{u}$,
5. $\lambda\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\lambda\cdot\vec{u}-\lambda\cdot\vec{v}$.

**Demostración 1.** *Demostramos algunha das propiedades enunciadas no teorema, deixando o resto como exercicio para o alumnado.*
*1. En virtude das propiedades que verifica a operación externa e da existencia de elemento neutro para á operación interna, podemos escribir:*

$$\lambda\cdot\vec{0}=\lambda\cdot(\vec{0}+\vec{0})=\lambda\cdot\vec{0}+\lambda\cdot\vec{0}\Longrightarrow\lambda\cdot\vec{0}=\vec{0}$$

*3. Se fose $\lambda\neq 0$ existiría $\lambda^{-1}$ e podremos escribir: $\lambda^{-1}(\lambda\cdot\vec{u})=\lambda^{-1}\vec{0}=\vec{0}$; é decir, $\vec{0}=(\lambda^{-1}\lambda)\cdot\vec{u}=1\cdot\vec{u}=\vec{u}$.* □

**Definición 2.** *Dado un e.v. $V$ sobre $\mathbb{R}$, chamamos* ***combinación linear (c.l.)*** *dos vectores $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\in V$ a calquer vector obtido mediante a expresión*

$$\lambda_1\cdot\vec{v}_1+\lambda_2\cdot\vec{v}_2+\ldots+\lambda_n\cdot\vec{v}_n=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\cdot\vec{v}_k$$

*sendo $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$*

## 2 Subespazo vectorial

**Definición 3.** *Sexa* $(V, +, \cdot\mathbb{R})$ *un e.v. real. Sexa* $F \subset V, F \neq \emptyset$ *un subconxunto de* $V$*. Diremos que* $(F, +, \cdot\mathbb{R})$ *é un* ***subespazo vectorial (s.v.) de*** $V$ *se:*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \vec{x}, \vec{y} \in F \Longrightarrow \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y} \in F$$

**Observación 1.** $F$*, coas operacións heredadas de* $V$*, é el mesmo un e.v. real.*

É sinxelo, según nos indica o teorema seguinte, crear subespazos vectoriais a partir de calquera espazo vectorial real:

**Teorema 2.** *Dado* $(V, +, \cdot\mathbb{R})$ *e.v., e dados* $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$*; o conxunto de todas as combinacións lineares de* $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ *é un subespazo vectorial de* $V$*.*

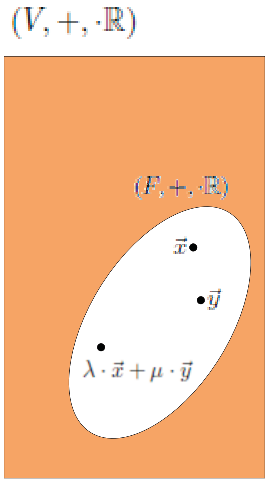


Figura 1: Subespazo vectorial

**Demostración 2.** *Para probar este teorema consideremos o conxunto de tódalas combinacións lineares posibles da familia dada:*

$$\{\vec{v} \in V; /; \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i \text{ para } \lambda_i \in \mathbb{R},\ \forall i = 1, \ldots, n\}$$

*Atendendo á definición de subespazo vectorial, elixamos dous vectores calquera de ese conxunto*

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i \text{ con } \lambda_i \in \mathbb{R},\ \forall i = 1, \ldots, n\}$$

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \vec{v}_i \text{ con } \delta_i \in \mathbb{R},\ \forall i = 1, \ldots, n\}$$

*e comprobemos que calquera combinación linear deles, está no conxunto.*
*En efecto:* $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha \vec{v} + \beta \vec{u} = \alpha \left( \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i \right) + \beta \left( \sum_{i=1}^{n} \delta_i \vec{v}_i \right) =$$

$$= \left( \sum_{i=1}^{n} \alpha\ \lambda_i \vec{v}_i \right) + \left( \sum_{i=1}^{n} \beta\ \delta_i \vec{v}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha\ \lambda_i \vec{v}_i + \beta\ \delta_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\ \lambda_i + \beta\ \delta_i) \vec{v}_i$$

*que é o que queriamos obter, unha combinación linear da familia de vectores* $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$*.* $\square$

**Definición 4.** *Sexa* $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\} \subset V$*;* $V$ *e.v. sobre* $\mathbb{R}$*. Ao subespazo de todas as posibles combinacións lineares dos vectores de* $S$ *denotarémolo por* $< \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\} >$ *e diremos que:*

— $S$ *é un* ***sistema de xeradores*** *de* $< \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\} >$,

— $< \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\} >$ *é o* ***subespazo xerado por*** $S$,

— *e se* $< \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\} >= V$*, entón dise que* $S$ *é un* ***sistema de xeradores*** *de* $V$ *ou que* $V$ ***está xerado*** *por* $S$*. É dicir, calquera vector de* $V$ *se pode poñer como combinación linear dos vectores de* $S$*.*

**Definición 5.** *Un e.v.* $V$ *sobre* $\mathbb{R}$ *dise de* ***tipo finito*** *se está xerado por un número finito de vectores,é dicir, se* $V$ *posúe algún sistema de xeradores finito.*

**Exemplo 2.** — $\mathbb{R}$ *coas operacións habituais de suma e produto de números reais, é un espazo vectorial de tipo finito, xa que por exemplo*

$$\mathbb{R} =< \{1\} >$$

— $\mathbb{R}^2$ *coas operacións habituais de suma e produto de vectores, é un espazo vectorial de tipo finito, xa que por exemplo*

$$\mathbb{R}^2 =< \{(1,0),(0,1)\} >$$

A idea que ímos a presentar a continuación, entre outras cousas, xeraliza a familias de máis de dous vectores a idea intuitiva que temos en $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ de vectores non múltiplo un do outro,

**Definición 6.** *Sexa* $(V, +, \cdot\mathbb{R})$ *e.v. Dados* $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$ *diremos que* $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$*, son* ***linearmente independentes*** *se a única combinación linear deles igualada a cero é aquela na que todos os escalares son cero, é decir*

$$\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

*Se esta implicación non é certa diremos que os vectores son* ***linearmente dependentes.***[1]

A anterior clasificación dos conxuntos de vectores en linearmente dependentes ou independentes, utilizarémola para asociar, a cada familia, un número

**Definición 7.** *Sexa* $V$ *un e.v. e* $F = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\} \subset V$ *un conxunto de vectores. Chamamos* ***rango de*** $F$ *ao maior número de vectores linearmente independentes de* $F$*.*

**Propiedades 1.** *(propiedades da dependencia e da independencia linear) Sexa* $(V, +, \cdot\mathbb{R})$ *e.v.*

*a) O conxunto de vectores* $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ *é un conxunto de vectores linearmente dependente se e só se algún dos vectores se pode escribir*

[1]Propoñémoslle ó alumnado que demostre que se dous vectores son linearmente dependentes, entón son múltiplo un do outro.

*como combinación linear dos restantes.*

*En efecto, si $S$ é unha familia de vectores linearmente dependentes entón, dacordo coa definición, calquera combinación linear dos seus elementos igualada ó vector $\vec{0}$ ten algún escalar non nulo*

$$\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0} \Rightarrow \lambda_i \neq 0$$

*para algún índice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Xa que $\lambda_i \in \mathbb{R}$ e $\lambda_i \neq 0$, entón existe $\lambda_i^{-1} \in \mathbb{R}$. Se multiplicamos a combinación linear anterior por este factor*

$$\lambda_i^{-1} \left( \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \ldots + \lambda_i \cdot \vec{v}_i + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{v}_n \right) = \vec{0}$$

*obtemos*

$$\alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \ldots + 1 \cdot \vec{v}_i + \ldots + \alpha_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$$

*donde $\alpha_j = \lambda_i^{-1} \lambda_j$ para $j \neq i, \ j = 1, \ldots, n$.*
*E xa podemos escribir o vector $\vec{v}_i$ como unha combinación linear dos restantes,*

$$\vec{v}_i = (-\alpha_1) \cdot \vec{v}_1 + \ldots + (-\alpha_n) \cdot \vec{v}_n$$

*A demostración en sentido inverso queda como exercicio do alumnado.*

$\square$

*b)* *Se $\vec{w} \in V$ se pode escribir como combinación linear de $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ e estes á súa vez se poden escribir como combinación linear doutro conxunto de vectores $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p$, entón $\vec{w}$ pode expresarse como combinación linear do conxunto de vectores $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p$.*

*Neste caso sabemos que*

$$\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{v}_i$$

*e que, para cada $i = 1, \ldots, n$*

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{p} \beta_{ij} \cdot \vec{u}_j$$

*entón temos*

$$\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \left( \sum_{j=1}^{p} \beta_{ij} \cdot \vec{u}_j \right) = \sum_{j=1}^{p} \left( \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_{ij} \right) \cdot \vec{u}_j$$

*polo que*

$$\vec{w} = \sum_{j=1}^{p} \mu_j \cdot \vec{u}_j \text{ con } \mu_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_{ij}$$

$\square$

c) *Se $S$ é un conxunto de vectores linearmente iindependentes e $\vec{v}$ non se pode escribir como combinación linear dos vectores de $S$, entón $S \cup \{\vec{v}\}$ é un conxunto de vectores linearmente independentes.*[2] $\square$

Agora que xa sabemos que un espacio vectorial real de tipo finito está xerado por un conxunto finito de vectores e estamos familiarizados coas ideas de dependencia e independencia linear, veremos que é moi útil minimizar o número de vectores de ese conxunto xerador. Esta minimización do número de vectores necesarios para xerar o espazo (ou subespazo) vectorial ten moito que ver coa idea de independencia linear dos vectores e co concepto de base dun espazo (ou subespazo) vectorial.

**Definición 8.** *Sexa $V$ un e.v. real de tipo finito, diremos que $B = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ é unha **base** de $V$ se e só se*

— *$B$ é un conxunto de vectores linearmente independentes*

— *$B$ é un sistema de xeradores de $V$*

**Observación 2.** [3]

— *As bases dun espazo vectorial real de tipo finito son un conxunto minimal de sistema de xeradores.*

— *As bases dun espazo vectorial real de tipo finito son un conxunto maximal de vectores linearmente independentes.*

— *Todo espazo vectorial real non nulo de tipo finito posúe algunha base.*

— *Todas as bases dun espazo vectorial rea $V \neq \{\vec{0}\}$ de tipo finito teñen igual número de vectores. A ese número chámase dimensión do espazo vectorial $V$. Por convenio, dise que o espazo vectorial $V = \{\vec{0}\}$ ten dimensión 0.*

— *Sexa $V$ un espazo vectorial de $\dim V = n$, e sexa $\widetilde{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \subset V$ un conxunto de vectores linearmente independentes, entón $\widetilde{B}$ é unha base de $V$.*

— *Sexa $V$ un espazo vectorial de $\dim V = n$, e sexa $\widetilde{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \subset V$ un conxunto de vectores sistema xerador de $V$ entón, $\widetilde{B}$ é unha base de $V$.*

— *Sexa $V$ un espazo vectorial de $\dim V = n$. Sexa $F \subset V$ un subespazo vectorial de $V$. Entón, $\dim F \leq n$ e no caso de que $\dim F = n$, entón $F = V$.*

A primeira consecuencia: si temos unha base dun espazo vectorial real de tipo finito, temos un sistema de vectores ó que referenciar todos os vectores do espazo vectorial de xeito único.

**Teorema 3.** *Se $B = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\} \subset V$ é unha base de $V$, calquera vector pode expresarse de xeito único como combinación linear dos vectores de $B$, isto é; para cada $\vec{v} \in V$ existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ únicos, tales que*

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{v}_i.$$

[2] A proba de esta propiedade queda como exercicio para o alumnado

[3] As demostracións destes resultados poden verse en (POOLE, D. 2005), por exemplo.

**Demostración 3.** *Suporemos que esa unicidade dos escalares non é certa; isto é:*

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{v}_i \text{ e } \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{v}_i \text{ con algún } \lambda_r \neq \alpha_r$$

*Pois ben, sumándolle ó primeiro o oposto do segundo*

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{v}_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \alpha_i) \cdot \vec{v}_i$$

*e temos unha combinación linear dos vectores da base $B$ igualada ó vector $\vec{0}$ con algún escalar non nulo, pois $\lambda_r \neq \alpha_r$. Isto implica que $B$ é un conxunto de vectores linearmente dependentes, o cal entra en contradición coa nosa hipótese de que $B$ é unha base do espazo vectorial. Polo tanto,*

$$\lambda_i = \alpha_i \; \forall i = 1, \ldots, n$$

$\square$

Unha vez elexida unha base, ista unicidade dos escalares que permiten escribir calquer vector do espazo vectorial como combinación lineal dos vectores de dita base, da lugar ó concepto de coordenadas dun vector respecto dunha base.

**Definición 9.** *Se $B = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ é unha base de $V$ e $\vec{v} \in V$ é $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{v}_i$, os escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ reciben o nome de coordenadas de $\vec{v}$ na base $B$, e soe escribirse $\vec{v} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)_B$.*

# 3 Xeometría Euclidiana

Nesta sección, continuamos co noso proceso de abstracción de conceptos que son ben coñecidos no caso dos vectores xeométricos, para poder aplicarllos ós espazos vectoriais en xeral. A abstración de espazo vectorial tan so partíu das propiedades da suma de vectores e de produto por un escalar. Agora queremos poder medir os vectores e mirar o ángulo que forman. Dotaremos á estructura abstracta de espazo vectorial destes dous conceptos utilizando o concepto de produto escalar ou produto interior definido no espazo vectorial real $V$.

## 3.1 Produto escalar. Espazo euclidiano

**Definición 10.** *Dado un espazo vectorial real $V$, chamaremos* ***produto escalar*** *sobre el a calquera aplicación*

$$\begin{array}{rcl} \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V & \to & \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \rightsquigarrow & \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \end{array}$$

*que lle asocie un número real a calquer parella de vectores de $V$, satisfacendo os seguintes axiomas:*

$$\begin{array}{ll}
\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle & \forall \vec{u}, \vec{v} \in V \\
\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle & \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V \\
\langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle & \forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\
\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0 & \forall \vec{u} \in V \\
\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} &
\end{array}$$

**Propiedades 2.** *Da axiomática anterior dedúcense, entre outras, as seguintes propiedades:* [4]

1. $\langle \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle \;\; \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$
2. $\langle \vec{u}, \lambda \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \;\; \forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
3. $\langle \vec{u}, \vec{0} \rangle = 0 \;\; \forall \vec{u} \in V$
   *Trivialmente:*

   $$\langle \vec{u}, \vec{0} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{0} + \vec{0} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{0} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{0} \rangle = 2 \langle \vec{u}, \vec{0} \rangle$$

   *e polo tanto* $\langle \vec{u}, \vec{0} \rangle = 0.$ $\square$
4. *Se* $\forall \vec{v} \in V, \;\; \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}.$
   *Como a hipótese é certa para todo $\vec{v} \in V$, tomemos $\vec{v} = \vec{u}$. Neste caso teremos $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$, que polo último axioma da definición de produto escalar implica $\vec{u} = 0$.* $\square$

**Definición 11.** *O espazo vectorial $V$ dotado dun produto escalar recibe o nome de **espazo vectorial euclideo**.*

Consideremos algúns exemplos nos que deberemos comprobar que realmente se verifican os axiomas da definición de produto escalar.

**Exemplo 3.** *No espazo vectorial $\mathbb{R}^n$ coas operacións suma e produto por un escalar habituais, podemos definir o produto escalar usual:*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

*sendo* $\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *e* $\vec{v} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

**Exemplo 4.** *No espazo vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ coas operacións suma e produto por un escalar habituais, podemos definir o produto escalar:*

$$\langle A, B \rangle = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{12} + a_{21} b_{21} + a_{22} b_{22}$$

*sendo*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

[4] Proponse como exercicio a demostración das propiedades 1 e 2.

## 3.2 Norma dun vector

Agora xa estamos en condicións de definir os conceptos de lonxitude dun vector e, a partires deste, o concepto de distancia.

**Definición 12.** *Chamamos **norma** asociada a un produto escalar en $V$ á aplicación:*

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\|: V & \to & \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ \vec{u} & \rightsquigarrow & \|\vec{u}\| = +\sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \end{array}$$

Debemos notar que a definición de norma está intrínsecamente relacionada coa de produto escalar. Cada produto escalar definido en $V$ ten unha norma asociada.

**Propiedades 3.** [5] *Dados $\vec{u}, \vec{v} \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$*

1. $\|\vec{u}\| \geq 0 \;\; \forall \vec{u} \in V$
2. $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$
3. $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha|\|\vec{u}\|$
4. $\|\vec{u}\|^2 = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle$
5. $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$ *(desigualdade de Schwartz)*
6. *4.* $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ *(desigualdade triangular)*

**Observación 3.** *Se consideramos $\mathbb{R}^n$ coas operacións e produto escalar habituais e consideramos $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, a **expresión analítica** da norma é, neste caso:*

$$\|\vec{u}\| = +\sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2}.$$

*Que tamén é coñecida como **módulo** do vector $\vec{u}$ e denotado $|\vec{u}|$ en moitas ocasións.*

## 3.3 Ángulo entre dous vectores. Ortogonalidade.

**Definición 13.** *Dados os vectores $\vec{u}, \vec{v} \in V$ non nulos, chámamos **ángulo** determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ao único número real $\alpha$, $0 \leq \alpha \leq \pi$ tal que:*

$$\cos\alpha = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

*onde o ángulo $\alpha$ non é un ángulo orientado, xa que $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$.*

**Observación 4.** *En $\mathbb{R}^n$ coas operacións e produto escalar habituais, coñecidos os vectores $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ e $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ o ángulo entre os dous vectores ven dado por*

$$\cos\alpha = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{u_1v_1 + \ldots + u_nv_n}{\sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2}\sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}}$$

**Definición 14.** *Sexa $V$ un espazo vectorial no que temos definido un produto escalar e a súa norma asociada.*

1. *Dise que dous vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son ortogonais ($\vec{x} \perp \vec{y}$) se $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$.*

---

[5] As demostracións das propiedades 1, 2, 3 e 4, o alumnado debe tentar facelas. As de 5 e 6 poden consultarse, por exemplo, no libro de *Poole* (2005).

2. *Un vector $\vec{x}$ é ortogonal a un subespazo $\mathcal{U}$ de $V$ $(\vec{x} \perp \mathcal{U})$ se $\vec{x}$ é ortogonal a todos os vectores de $\mathcal{U}$.*
3. *Un conxunto de vectores $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ de $V$ é ortogonal se $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0,\ \forall i \neq j$.*
4. *Un conxunto de vectores $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ de $V$ é ortonormal se é ortogonal e $\|\vec{v}_i\| = 1,\ \forall i = 1, 2, \ldots, k$.*

**Observación 5.** *Os vectores de norma $1$ chámanse vectores unitarios. De cada vector $\vec{v} \neq 0$ pode obterese un vector unitario $\vec{w}$ coa súa mesma dirección e sentido sen máis que multiplicar $\vec{v}$ polo escalar inverso da súa norma*

$$\vec{w} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$$

Non é complicado probar que para que un vector sexa ortogonal a un subespazo de dimensión finita, é necesario e suficiente que sexa ortogonal a calquera das súas bases; tal e como se enuncia na seguinte proposición:

**Propiedades 4.** [6] *Sexa $\mathcal{U}$ un subespazo dun espazo vectorial $V$ e sexa $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$ unha base de $\mathcal{U}$. Un vector $\vec{x} \in V$ é ortogonal a $\mathcal{U}$ se e só se $\langle \vec{x}, \vec{u}_i \rangle = 0,\ \forall i = 1, 2, \ldots, p$.*

### 3.4 Produto vectorial

Restrinxíndonos ao espazo tridimensional $\mathbb{R}^3$, definimos agora unha ferramenta moi utilizada na física: o produto vectorial.

**Definición 15.** *No espazo vectorial $\mathbb{R}^3$, definimos produto vectorial como a aplicación $\times$:*

$$\begin{array}{rcl} \times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \rightsquigarrow & \vec{u} \times \vec{v} \end{array}$$

*onde o vector $\vec{u} \times \vec{v}$ é tal que:*

1. *$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|\ sen(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$, donde $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ denota o ángulo que forman os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$*
2. *$\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$*
3. *A orientación de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$ segue a «regra da man dereita»*

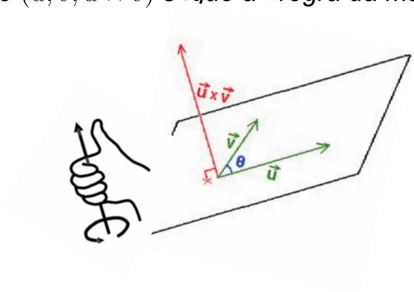



Figura 2: Regra da man dereita

[6] O alumnado debe demostrar esta proposición como exercicio

**Proposición 1.** *Se en $\mathbb{R}^3$ consideramos a base canónica $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ respecto á que $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, entón:*

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3$$

Co dito ata agora, non é dificultoso probar as seguintes

**Propiedades 5.** *Para calquera vector $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos:*

— $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

— $(\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u} \times \vec{v})$

— $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

— *$\vec{u}$ e $\vec{v}$ son l.d. $\Leftrightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$*

— *Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ son l.i. entón $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$ son unha base de $\mathbb{R}^3$*

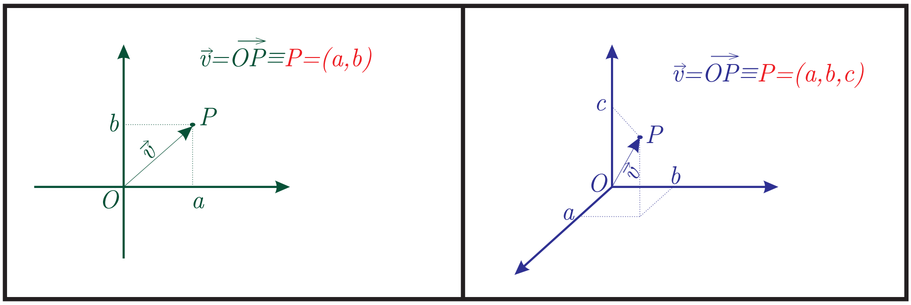
— $\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2$

— *O valor $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ representa a área do paralelogramo de lados non paralelos $\vec{u}$ e $\vec{v}$*

## 4 $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ como espazos afíns

En todo o que resta de unidade, consideraremos en $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ os vectores referidos á base canónica correspondente.

**Definición 16.** *Dados dous puntos $P$ e $Q$ defínese o vector $\vec{PQ} := \vec{OQ} - \vec{OP}$.*




**Definición 17.** — *Recta en $\mathbb{R}^2$. A recta $r$ que pasa por $P = (p_1, p_2)$ e ten como vector director $\vec{v} = (v_1, v_2)$ é:*

$$\begin{aligned} r &= \{Q \in \mathbb{R}^2 \ / \ \vec{OQ} = \vec{OP} + \lambda \cdot \vec{v} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x, y) = (p_1, p_2) + \lambda \cdot (v_1, v_2)\} \end{aligned}$$

— *Recta en $\mathbb{R}^3$. A recta $r$ que pasa por $P = (p_1, p_2, p_3)$ e ten como vector director $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ é:*

$$\begin{aligned} r &= \{Q \in \mathbb{R}^3 \ / \ \vec{OQ} = \vec{OP} + \lambda \cdot \vec{v} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \lambda \cdot (v_1, v_2, v_3)\} \end{aligned}$$

— *Plano en $\mathbb{R}^3$. O plano $\pi$ que pasa por $P=(p_1,p_2,p_3)$ e ten como vectores directores $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ e $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$ é:*

$$\begin{aligned}\pi &= \{Q\in\mathbb{R}^3 \ / \ \vec{OQ}=\vec{OP}+\lambda_1\cdot\vec{v}+\lambda_2\cdot\vec{w} \ / \ \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\}\\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ (x,y,z)=(p_1,p_2,p_3)+\lambda_1\cdot(v_1,v_2,v_3)+\lambda_2\cdot(w_1,w_2,w_3)\}\end{aligned}$$

**Observación 6.** *A contunuación resumimos os diferentes tipos de ecuacións ás que dan lugar as definicións vectoriais anteriores.*

— *Ecuacións da recta en $\mathbb{R}^2$:*

| ***Paramétricas*** | ***Continua*** | ***Reducida*** |
|---|---|---|
| $\begin{aligned} x &= p_1+\lambda v_1\\ y &= p_2+\lambda v_2\end{aligned}$ | $\dfrac{x-p_1}{v_1}=\dfrac{y-p_2}{v_2}$ | $y = ax+b$ |

*Neste último caso, a ecuación reducida dunha recta en $\mathbb{R}^2$ o parámetro $a$ recibe o nome de pendente da recta pois correspondese co valor da tanxente do ángulo que forma o vector director da recta coa dirección positiva do eixo horizontal. Así fálase da ecuación punto-pendente da recta: a ecuación da recta que pasa polo punto $(x_0,y_0)$ e ten por pendente $a$ é*

$$y-y_0=a(x-x_0)\Longrightarrow y=ax+(y_0-ax_0)$$

*escrita en forma reducida.*

— *Ecuacións da recta en $\mathbb{R}^3$:*

| ***Paramétricas*** | ***Continua*** | ***Reducidas*** |
|---|---|---|
| $\begin{aligned} x &= p_1+\lambda v_1\\ y &= p_2+\lambda v_2\\ z &= p_3+\lambda v_3\end{aligned}$ | $\dfrac{x-p_1}{v_1}=\dfrac{y-p_2}{v_2}=\dfrac{z-p_3}{v_3}$ | $\begin{aligned} x &= az+b\\ y &= cz+d\end{aligned}$ |

— *Ecuacións do plano en $\mathbb{R}^3$:*

| ***Paramétricas*** | ***Reducida*** |
|---|---|
| $\begin{aligned} x &= p_1+\lambda_1 v_1+\lambda_2 w_1\\ y &= p_2+\lambda_1 v_2+\lambda_2 w_2\\ z &= p_3+\lambda_1 v_3+\lambda_2 w_3\end{aligned}$ | $ax+by+cz=d$ |

## 4.1 Distancia entre dous puntos

**Definición 18.** *Sexan $A$ e $B$ dous puntos do espazo afín $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Defínese a **distancia** entre $A$ e $B$ como*

$$d(A,B)=\|\vec{AB}\|$$

**Observación 7.** — *Se $A\in\mathbb{R}^2$ e $B\in\mathbb{R}^2$ teñen coordenadas, $A=(a_1,a_2)$ e $B=(b_1,b_2)$ entón*

$$d(A,B)=+\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

— *Se $A \in \mathbb{R}^3$ e $B \in \mathbb{R}^3$ teñen coordenadas, $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$ entón*

$$d(A,B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Partindo das nocións de norma e produto escalar vistas con anterioridade, próbanse fácilmente as seguintes

**Propiedades 6.** *Dados $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$*

1. $d(A,B) \geq 0$
2. $d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
3. $d(A,B) = d(B,A)$
4. $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$ *(desig. triangular)*

## ANEXOS

### Boletín de exercicios

1. No conxunto $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ defínense as seguintes operacións:

$$\begin{aligned} \text{Suma} \quad + : (x,y) + (x',y') &= (x + x', y + y') \\ \text{Produto} \quad \cdot \mathbb{R} : \alpha(x,y) &= (\alpha x, \alpha y) \end{aligned}$$

   Estudar se a terna $(\mathbb{R}^2, +, \cdot\mathbb{R})$ é un espazo vectorial.

2. Idem coas operacións:

$$\begin{aligned} \text{Suma} \quad + : (x,y) + (x',y') &= (x + x', y + y') \\ \text{Produto} \quad \cdot \mathbb{R} : \alpha(x,y) &= (\alpha x, 0) \end{aligned}$$

3. Sexa $\mathbb{R}_2[x] = \{a + bx + cx^2 / a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Demostrar que coas seguintes operacións é un espazo vectorial sobre $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Suma} \quad : (a + bx + cx^2) + (a' + b'x + c'x^2) &= (a + a') + (b + b')x + (c + c')x^2 \\ \text{Produto} \quad : \alpha \cdot (a + bx + cx^2) &= \alpha a + \alpha bx + \alpha cx^2 \quad \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

4. Estudar se os seguintes conxuntos son subespazos de $\mathbb{R}^3$:

   a) $W = \{(a,b,0)/a,b \in \mathbb{R}\}$
   b) $W = \{(a,b,2)/a,b \in \mathbb{R}\}$
   c) $W = \{(a,b,c)/a+b+c = 0; a,b,c \in \mathbb{R}\}$
   d) $W = \{(a,b,c)/a+b+c = 4; a,b,c \in \mathbb{R}\}$
   e) $W = \{(a,0,0)/a \in \mathbb{R}\}$
   f) $W = \{(a,3,3)/a \in \mathbb{R}\}$
   g) $W = \{(a,b,c)/a = b+c; a,b,c \in \mathbb{R}\}$
   h) $W = \{(a,b,c)/a^2+b^2+c^2 \geq 1; a,b,c \in \mathbb{R}\}$
   i) $W = \{(a,b,c)/a+b+c \geq 0; a,b,c \in \mathbb{R}\}$
   k) $W = \{(a,b,c)/a+b = 0 \;, c = 2b;\; a,b,c \in \mathbb{R}\}$

5. Pon un exemplo dun subespazo ($W$) vectorial de $\mathbb{R}^4$ de dimensión 2 cumplindo alomenos a seguinte restrición: a segunda coordenada é o triplo da terceira. Dá unha base dese subespazo
6. Estudar se o seguinte conxunto é subespazo de $\mathbb{R}_2[x]$:

$$\mathbb{R}_1[x] = \{a + bx / a, b \in \mathbb{R}\}$$

7. Estudar a dependencia ou independencia linear dos vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{ll} a) & \vec{u}=(1,1,-1);\vec{v}=(2,2,0);\vec{w}=(-1,-1,-1) \\ b) & \vec{u}=(2,1,-3);\vec{v}=(4,2,0);\vec{w}=(2,-1,2) \end{array}$$

8. Estudar a independencia linear dos vectores de $\mathbb{R}_3[x]$:

$$\begin{array}{ll} a) & \{1,x,x^2,x^3\} \\ b) & \{1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3\} \\ c) & \{1+x,1-x+x^2,4+2x^2\} \end{array}$$

9. No espazo vectorial $\mathbb{R}^4$ considérase o conxunto

$$M=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)/x_1+x_2+x_3+x_4=0\}$$

   a) Demostrar que $M$ é un subespazo vectorial de $\mathbb{R}^4$ .
   b) Achar en $M$ tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ que sexan linearmente independentes, e demostrar que todo vector de $M$ se pode escribir como combinación linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.
10. Se $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z} \in V$ son vectores linearmente dependentes:
    a) Pódese asegurar que $\vec{x}$ depende linearmente dos outros dous?
    b) Pódese asegurar que un dos tres vectores é combinación linear dos outros dous?
11. Obter unha base e determinar a dimensión dos subespazos do exercicio 4.
12. Demostrar que o subespazo $W=\{(a,b,0)/a,b\in\mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^3$ está xerado polos vectores $\vec{u}=(1,1,0)$ e $\vec{v}=(1,0,0)$. Construír unha base de $\mathbb{R}^3$ que conteña á base de $W$ formada por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
13. Sexa $V$ un espazo vectorial sobre $\mathbb{R}$. Sexa $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_n$ un conxunto de vectores linearmente independentes. Demostrar:
    a) $\{\alpha_1\vec{u}_1,\alpha_2\vec{u}_2,...,\alpha_n\vec{u}_n/\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\neq 0\}$ é un conxunto de vectores linearmente independentes.
    b) $\{\vec{u}_1,\vec{u}_1+\vec{u}_2,...,\vec{u}_1+...+\vec{u}_n\}$ é un conxunto de vectores linearmente independentes.
14. Dá un conxunto de 3 vectores non nulos de $\mathbb{R}^3$ ($A$) linearmente dependentes e un exemplo dun conxunto de 3 vectores de $\mathbb{R}^3$ ($B$) que non sexan sistema de xeradores:
15. Nunha certa base $B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4\}$ do espazo vectorial real $E$, un vector $\vec{w}$ tén por coordenadas $(3,1,2,6)_B$. Calcúlense as coordenadas de $\vec{w}$ noutra base $\widetilde{B}=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\vec{u}_4\}$ na que os vectores verifican:

$$\vec{u}_1=\vec{e}_1+\vec{e}_2, \quad \vec{u}_2=2\vec{e}_4-\vec{e}_1, \quad \vec{u}_3=\vec{e}_2-\vec{e}_3, \quad \vec{u}_4=2\vec{e}_1-\vec{e}_2$$

16. Sexa $V$ un e.v. sobre $\mathbb{R}$ no que se verifica que $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$, sendo $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}\in V$, e $a$, $b$, $c\in\mathbb{R}/a,b\neq 0$. Demostrar que $\langle\{\vec{u},\vec{w}\}\rangle=\langle\{\vec{v},\vec{w}\}\rangle$.
17. Sexan $U$ e $W$ os seguintes subespazos de $\mathbb{R}^4$:

$$U=\{(a,b,c,d);\ b+c+d=0\}, \quad W=\{(a,b,c,d);\ a+b=0,\ c=2d\}.$$

    Achar unha base e a dimensión de $U$ e $W$.

18. Dados os vectores $\vec{u} = (-1, 2)$, $\vec{v} = (4, 6)$, $\vec{w} = (3, -1, -5)$ e $\vec{x} = (6, -2, 3)$, calcula as seguintes cantidades:
    a) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ e $\dfrac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$,
    b) $\left( \dfrac{\langle \vec{x}, \vec{w} \rangle}{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} \right) \vec{x}$,
    c) $\|\vec{x}\|$ e $\|\vec{v}\|$.
19. Determina se o seguinte conxunto de vectores é un conxunto ortogonal $\{(3, 1, 1)\ (-1, 2, 1)\ (-1/2, 2, 7/2)\}$.
20. Determina o ángulo que forman os vectores $\vec{u} = (2, -1, 1)$ e $\vec{v} = (1, 1, 2)$.
21. Determina o valor de $m$ para que:
    a) os vectores $(1, 4)$ e $(-1, m)$ sexan perpendiculares,
    b) os vectores $(m, -2)$ e $(3, 2)$ sexan paralelos.
22. Dados os vectores $\vec{u} = (2, -1, 2)$, $\vec{v} = (0, 1, 7)$ e $\vec{w} = (1, 4, 5)$ calcula as seguintes cantidades:
    a) $\vec{v} \times \vec{w}$,
    b) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{v} \times \vec{w})$,
    c) $(\vec{u} \times \vec{v}) - 2\vec{w}$,
    d) $\vec{u} \times (\vec{v} - 2\vec{w})$.
23. A área dun triángulo de vértices $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ e $C(c_1, c_2, c_3)$ vén dada por

$$Area(T) = \frac{1}{2}\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|.$$

    Calcula a área do triángulo que ten como vértices $P(2, 0, -3),\ Q(1, 4, 5),\ R(7, 2, 9)$.
24. Dados $P = (1, 0)$, $Q = (-1, 2)$, $\vec{u} = (1, -1)$ e $\vec{v} = (3, -2)$, atopar as ecuacións paramétricas e cartesianas das seguintes rectas e debuxalas:
    i) recta que pasa por $P$ e ten como vector directo $2\vec{u}$,
    ii) recta que pasa por $P$ e ten como vector directo $\vec{u} + \vec{v}$,
    ii) recta que pasa por $Q$ e ten como vector directo $\vec{u} - 2\vec{v}$.
    *Sol: i) Param $x = 1 + 2t$, $y = -2t$, Cartes $x + y - 1 = 0$. ii) Param $x = 1 + 4t$, $y = -3t$, Cartes $3x + 4y - 3 = 0$. iii) Param $x = -1 - 5t$, $y = 2 + 3t$, Cartes $3x + 5y - 7 = 0$.*
25. Determinar a posición relativa dos seguintes pares de rectas e atopar o punto de intersección se é que se cortan
    a) $(x, y) = (2, 1) + t(1, 1)$ e $(x, y) = (1, 0) + s(-5, -5)$,
    b) $x + y = 1$ e $2x - y = 2$,
    c) $2x - y = 4$ e $(x, y) = (2, 0) + t(-2, -4)$,
    d) $(x, y) = t(-1, 2)$ e $(x, y) = (1, 0) + s(2, 3)$.
    *Sol: a) coinciden, b) córtanse en (1,0), c) coinciden, d) córtanse en ($\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}$).*
26. Atopar as ecuacións paramétricas e cartesianas das seguintes rectas, comprobando o resultado se se cree posible
    a) paralela á $(x, y) = (3, 3) + t(2, 1)$ que pasa por $(1, 0)$,
    b) paralela á $2x - y = 5$ que pasa por $(1, -2)$,
    c) pasa polo punto $(-2, -3)$, e é paralela á recta que cruza ós puntos $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

*Sol: a) Param* $x = 1+2t$, $y = t$, *Cartes* $x-2y-1 = 0$. *b) Param* $x = 2+t$, $y = 2t$, *Cartes* $2x - y - 4 = 0$. *c) Param* $x = -2 + t$, $y = -3 - t$, *Cartes* $x + y + 5 = 0$.

27. Dados $P = (1, 1, -1)$, $Q = (0, 1, 2)$, $\vec{u} = (-1, 2, 0)$ e $\vec{v} = (1, -1, -1)$, achar as ecuacións paramétricas e cartesianas das seguintes rectas en $\mathbb{R}^3$, e debuxalas:
    a) recta que pasa por $P$ con vector director $\vec{u} - \vec{v}$,
    b) recta que pasa por $P$ e $Q$,
    c) recta que pasa por $Q$ é vector director $3\vec{v}$.

    *Sol: a)* $x = 1-2t$, $y = 1+3t$, $z = -1+t$, *b)* $x = 1+t$, $y = 1$, $z = -1-3t$, *c)* $x = t$, $y = 1 - t$, $z = 2 - t$.

28. Dadas as seguintes rectas de $\mathbb{R}^3$, determinar a súa posición relativa e, se se cortan, o punto de intersección:
    a) $(x, y, z) = (-1, 2, 1) + t(4, 3, 2)$ e $(x, y, z) = (0, 1, 0) + s(1, 3, 2)$,
    b) $(x, y, z) = (0, 1, 5) + t(1, 3, -2)$ e $(x, y, z) = (5, 5, 3) + s(4, 1, 0)$,
    c) $2x + 3y - z = 3$, $x - 3z = 4$ e $x + y = 2$, $y - z = -1$.

    *Sol: a) crúzanse, b) córtanse en (1,4,3), c) córtanse en (13/4,-5/4,-1/4).*

29. Achar a ecuación da recta paralela á de ecuacións $3x - y + z = 1$, $x + y - 3z = 0$ que pasa polo punto $(1, 1, 1)$.

    *Sol:* $x = 1 + \frac{t}{2}$, $y = 1 + \frac{5t}{2}$, $z = 1 + t$.

30. Dados $P = (1, 2, 3)$, $Q = (-1, -2, -3)$, $R = (0, 1, -1)$, $\vec{u} = (0, 1, -1)$ e $\vec{v} = (5, 1, 2)$, achar as ecuacións paramétricas e cartesianas dos seguintes planos:
    a) plano que pasa por $P$, $Q$ e $R$,
    b) plano que pasa por $P$ e $R$ e é paralelo á recta que pasa por $Q$ e ten a $\vec{u} - \vec{v}$ como vector director,
    c) plano que contén a $R$ na dirección de $\vec{u} + 2\vec{v}$ e $2\vec{u} + \vec{v}$.

    *Sol:* *a)* $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t - s \\ y & = & 1 + t - 3s \\ z & = & -1 + 4t - 2s \end{array}\right.$, $5x - y - z = 0$. *b)* $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 - t + 5s \\ y & = & 2 - t \\ z & = & 3 - 4t + 3s \end{array}\right.$, $3x + 17y - 5z - 22 = 0$. *c)* $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 10t + 5s \\ y & = & 1 + 3t + 3s \\ z & = & -1 + 3t \end{array}\right.$, $3x - 5y - 5z = 0$.

31. Determinar, se é posible, a seguinte intersección de pares de planos en $\mathbb{R}^3$:
    a) $x - y + z = 1$ e $2x + 2y - 3z = 4$,
    b) $(x, y, z) = t(1, 1, -1) + s(0, 1, -2)$ e $(x, y, z) = (0, 1, 0) + l(0, 1, -1) + m(2, 3, 5)$,
    c) $(x, y, z) = (2, 3, 1) + t(0, 1, 2) + s(3, 1, -5)$ e $x - 6y + 3z + 1 = 0$.

*Sol:* *a)* $\begin{cases} x = \frac{2}{3}+\frac{t}{2} \\ y = -\frac{1}{3}+\frac{3t}{2} \\ z = t \end{cases}$, *b)* $\begin{cases} x = t \\ y = 1-3t \\ z = -2+7t \end{cases}$, *c)* $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = -\frac{1}{3}+2t \end{cases}$.

32. Consideremos os puntos de $\mathbb{R}^3$: $A=(a_1,a_2,a_3)$, $B=(b_1,b_2,b_3)$ e $C=(c_1,c_2,c_3)$. Demostrar que, se $A,\ B$, e $C$ non están alineados,
a) a ecuación do plano cos contén é:

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix} = 0$$

b) a ecuación do plano cos contén pode escribirse:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

33. Demostrar que a condición de que catro puntos de $\mathbb{R}^3$ dados por $P_1=(x_1,y_1,z_1)$, $P_2=(x_2,y_2,z_2)$,$P_3=(x_3,y_3,z_3)$ e $P_4=(x_4,y_4,z_4)$ sexan coplanarios é que $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$
34. Dado o triángulo de vértices $P_1=(x_1,y_1)$, $P_2=(x_2,y_2)$, $P_3=(x_3,y_3)$ demostrar que a súa área vén dada pola fórmula $A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$.
35. Pon un exemplo de tres rectas perpendiculares entre si en $\mathbb{R}^3$
36. En $\mathbb{R}^3$, dados os puntos $A=(1,3,5)$ e $B=(-2,4,1)$, Achar as coordenadas dun punto $C$, pertenecente ó plano $OX-OY$, de tal xeito que os tres puntos estean alineados.
*Sol: C=*$(-\frac{11}{4},\frac{17}{4},0)$.
37. Estudar as posicións relativas dos seguintes planos en $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}x+y+z &= 1 \\ x+\mathbf{a}y+z &= 1 \\ x+y+\mathbf{a}z &= 1. \end{aligned}$$

*Sol: Se* $\mathbf{a}=1$ *os tres planos son coincidentes, se* $\mathbf{a}=-2$ *Os planos non se cortan nunca (os tres á vez) e non son paralelos, se* $\mathbf{a}\neq 1$ *e* $\neq -2$ *córtanse nun só punto.*
38. Considéranse as rectas $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=z+4$ $\qquad \frac{x+2}{\alpha}=\frac{y}{-2}=z+3$
    (a) Discutir segundo os valores de $\alpha$ cando as rectas son paralelas, cando se cruzan ou cortan.
    (b) No caso de que se corten dar a ecuación do plano que determinan.

*Sol: Se* $\alpha = -23$ *córtanse no punto* $P = (\frac{13}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{16}{5})$*, se* $\alpha \neq -23$ *as rectas crúzanse.*

39. En $\mathbb{R}^3$ considéranse os catro planos seguintes:

$$x + 3y + z + 4 = 0 \qquad x + 6y + 2z + 8 = 0$$
$$x + 4y + 6 = 0 \qquad x + 8y + 2z + 10 = 0$$

Achar os vértices do tetraedro no que as caras son os planos dados.

*Sol:* $A = (-2, -1, 0)$*,* $B = (0, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$*,* $C = (-\frac{2}{3}, -\frac{-4}{3}, \frac{2}{3})$ *e* $D = (0, -1, -1)$ *.*

## AVALIACIÓN

Aínda que non se fará unha avaliación diferenciada de esta unidade didáctica, o alumnado conta, no curso virtual asociado, con cuestionarios específicos xerados aleatoriamente a partir de unha base de preguntas tipo test que abarcan todos os contidos da unidade didáctica. Con isto buscamos que o alumnado obteña información sobre o seu nivel de coñecementos adquiridos da unidade e localice os contidos sobre os que necesita seguir traballando.

O alumnado será evaluado polo profesor dun xeito global pero continuado, mediante un calendario de probas escritas detallado na programación da materia completa, nas que as cuestións/problemas relacionados cos contidos desta unidade procurarán avaliar os obxetivos sinalados na sección correspondente desta unidade.

## BIBLIOGRAFÍA


BARRIOS GARCÍA, J. A. (2006): *Álgebra matricial para economía y empresa*, Delta Publicaciones.

LAY, David C. (2001): *Algebra lineal y sus aplicaciones*, Prentice Hall.

MERINO, L. e E. SANTOS (2006): *Álgebra lineal con métodos elementales*, Thomson Editores.

POOLE, D. (2005): *Álgebra Lineal. Una introducción moderna*, Thomson Editores.

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade

Impreso en papel 100% reciclado e libre de cloro

USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

SERVIZO DE NORMALIZACIÓN LINGÜÍSTICA

9 788498 879988