materia

Matemáticas para Bioloxía

unidade didáctica 4

Ecuacións diferenciais: resolución e aplicacións a problemas en Bioloxía

Rosana Rodríguez López
Departamento de Análise Matemática
Facultade de Matemáticas

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

VICERREITORÍA DE EXTENSIÓN UNIVERSITARIA, CULTURA E SOCIEDADE

titulación

Grao en Bioloxía

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

unidade didáctica 4

Ecuacións diferenciais: resolución e aplicacións a problemas en Bioloxía

Rosana Rodríguez López
Departamento de Análise Matemática
Facultade de Matemáticas

unidadedidáctica
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Deseño
Unidixital

Edita
Vicerreitoría de Extensión Universitaria,
Cultura e Sociedade da
Universidade de Santiago de Compostela
Servizo de Publicacións
da Universidade de Santiago de Compostela

Imprime
Unidixital
Servizo de Edición Dixital da
Universidade de Santiago de Compostela
Dep. Legal: C 271-2011
ISBN 978-84-9887-566-9

MATERIA: Matemáticas para Bioloxía
TITULACIÓN: Grao en Bioloxía
PROGRAMA XERAL DO CURSO
Localización da presente unidade didáctica

Unidade I. Funcións reais dunha e varias variables reais
- Xeneralidades
- Límites
- Continuidade

Unidade II. Cálculo diferencial
- Derivada dunha función real de variable real
  - Interpretación xeométrica: recta tanxente
- Derivadas de orde superior
- Derivadas parciais dunha función real de varias variables reais.

Unidade III. Cálculo integral
- Cálculo de primitivas dunha función real de variable real
  - Integración de funcións racionais
  - Cambio de variable
  - Integración por partes
- A integral definida
  - Regra de Barrow

Unidade IV. Ecuacións diferenciais: resolución e aplicación a problemas en Bioloxía
- Ecuacións diferenciais
  - Definicións e conceptos básicos
  - Problemas de valor inicial
- Integración de ecuacións diferenciais ordinarias de primeira orde
  - Ecuacións de variables separadas
  - Ecuacións lineares
- Aplicacións
  - Modelo de Malthus
  - Ecuación loxística
  - Modelo de desintegración radioactiva
  - Lei do arrefriamento de Newton
  - Ecuación de von Bertalanffy

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

A unidade didáctica enmárcase dentro dos contidos relativos á materia de Formación Básica *Matemáticas para Bioloxía*, de 6 créditos ECTS impartida no primeiro semestre do primeiro curso do Grao en Bioloxía. Esta materia, como parte da Formación Básica da Rama de Ciencias que a titulación oferta en primeiro curso, pretende, por unha banda, que o alumnado afiance ou desenvolva as destrezas fundamentais en relación ao cálculo infinitesimal básico. Ademais, propicia unha toma de contacto co modelado de certos problemas de interese no ámbito da Bioloxía por medio de ecuacións diferenciais ordinarias, proporcionando algunhas técnicas sinxelas de resolución dos modelos formulados para a obtención de conclusións sobre os fenómenos concretos de estudo.

Na unidade didáctica que se desenvolve, preséntanse os diferentes conceptos e técnicas relativos a unha introdución ao estudo das ecuacións diferenciais ordinarias de xeito detallado e apoiándose no estudo desenvolvido con carácter previo en relación aos conceptos básicos das funcións reais dunha e varias variables reais, e do cálculo diferencial e integral traballados nas unidades precedentes, nas que se afondará dada a diversidade nos coñecementos previos do alumnado.

A formación proporcionada pola unidade en concreto (e pola materia en xeral) resulta fundamental na formación dos graduados en Bioloxía independentemente da súa orientación profesional posterior, pola súa contribución ao desenvolvemento da capacidade de razoamento e da capacidade de interpretar datos e obter conclusións, e está relacionada coas seguintes competencias xerais (RD 1393/2007 de 29 de outubro):

- Reunir e interpretar datos, información e resultados relevantes, obter conclusións e emitir informes razoados en problemas relacionados coa Bioloxía.
- Aplicar tanto os coñecementos teórico-prácticos adquiridos como a capacidade de análise e de abstracción na definición e formulación de problemas e na busca das súas solucións tanto en contextos académicos como profesionais.

Os contidos da materia corresponden co ámbito de competencias *Coñecementos instrumentais, destrezas e habilidades*, que inclúe outras competencias específicas encamiñadas a acadar as competencias xerais: Matemáticas e estatística aplicadas á bioloxía, Principios físicos e químicos da bioloxía, Técnicas básicas en bioloxía, Informática aplicada á bioloxía, Dirixir, redactar e executar informes e proxectos en bioloxía, Bases de lexislación, economía e xestión e Realizar servizos e procesos. Dentro da competencia específica de Matemáticas e Estatística aplicadas á Bioloxía, atopamos as dúas materias Matemáticas para Bioloxía e Bioestatística (materia Básica de 6 créditos impartida no segundo semestre do primeiro curso).

Para o estudo da materia non se esixe ningunha formación previa específica, aínda que é recomendable posuír os coñecementos de matemáticas correspondentes ao segundo curso de Bacharelato.

Moitos fenómenos, non só no ámbito da bioloxía, senón tamén na física, nas ciencias da saúde, nas ciencias sociais, etc, poden ser

modelizados a través de ecuacións diferenciais, tipo de ecuacións que xorde co descubrimento do Cálculo por Newton e Leibniz de xeito independente.
Os alumnos da materia terán a oportunidade de descubrir a utilidade do cálculo para expresar problemas do ámbito da Bioloxía de xeito formal e para resolvelos e así determinar o comportamento de fenómenos biolóxicos de interese.

OS OBXECTIVOS

Entre os obxectivos da unidade, sinalamos:

- Interpretar a información transmitida por unha ecuación diferencial sinxela.
- Recoñecer diferentes tipos de ecuacións diferenciais, distinguindo as ecuacións diferenciais ordinarias (EDO) das ecuacións en derivadas parciais (EDP), identificando a orde da ecuación e a linearidade en ecuacións diferenciais ordinarias.
- Comprobar se unha función é solución dunha ecuación diferencial ou dun problema de valor inicial asociado a unha EDO.
- Calcular o dominio de existencia e unicidade de solución dunha ecuación diferencial ordinaria a través da aplicación do Teorema de Picard.
- Empregar algunhas técnicas para resolver ecuacións diferenciais ordinarias de primeira orde sinxelas, e aplicalas á resolución de problemas concretos de interese biolóxico. En particular, calcular a solución xeral das ecuacións diferenciais ordinarias en variables separadas, e das ecuacións diferencias ordinarias lineares homoxéneas ou completas (para estas últimas, por adición da solución xeral da ecuación homoxénea e unha solución particular da ecuación completa).
- Expresar matematicamente problemas sinxelos do ámbito da Bioloxía por medio de ecuacións diferenciais ordinarias de primeira orde e resolvelos polos métodos descritos facendo uso das ferramentas proporcionadas polo cálculo diferencial e integral.
- Utilizar modelos diferenciais para predicir a evolución de poboacións (modelo de Malthus, ecuación loxística), o modelo de desintegración radioactiva para describir a diminución dunha certa sustancia radioactiva, aplicándoo á datación de restos fósiles polo método do carbono 14, a lei de Newton para o estudo da variación de temperatura de corpos, así como a ecuación de von Bertalanffy para estudar o crecemento restrinxido dunha especie, recoñecendo a utilidade de todos estes modelos para a resolución de problemas de interese no eido da Bioloxía e calculando as diferentes constantes implicadas nos modelos e outras incógnitas a partires das medicións ou datos axeitados.

- Manexar un programa de cálculo simbólico para visualizar o comportamento das solucións dos modelos e comprobar os cálculos realizados, beneficiándose das súas vantaxes.
- Consultar referencias bibliográficas de relevancia para a materia.
- Desenvolver o espírito crítico e o rigor propio do traballo científico.

OS PRINCIPIOS METODOLÓXICOS

O desenvolvemento da unidade estruturase en clases maxistrais e prácticas de encerado/seminarios en grupo grande, onde se expoñen os conceptos e técnicas básicas das ecuacións diferenciais ordinarias e se propoñen exemplos e resolven exercicios relacionados especialmente co ámbito da bioloxía, na procura dunha aprendizaxe significativa dos contidos da materia e o desenvolvemento das destrezas e habilidades básicas, fomentando a participación activa do alumnado. A exposición de contidos irá acompañada de exemplos e da realización de actividades relacionadas para unha mellor asimilación dos conceptos e técnicas.

As clases maxistrais e práctica de encerado en grupo grande complementaranse con prácticas de ordenador en grupo reducido, onde se empregará un programa de cálculo simbólico que permita a visualización do comportamento dos fenómenos descritos e a comprobación dos cálculos realizados, podendo apreciar as vantaxes da utilización das novas tecnoloxías na aprendizaxe dos conceptos relativos ás ecuacións diferenciais ordinarias. A aplicación utilizada será Maxima, un potente programa de cálculo simbólico (e numérico), coa interface wxMaxima, que actúa como contorno gráfico, permitindo executar Maxima de modo indirecto e máis visual, o que facilita o seu uso para principiantes. Trátase de aplicacións dotadas de licenza libre e que se poden instalar en calquera sistema operativo, sexa GNU-Linux, MS-Windows ou MAC OS X. Esta interface integra elementos específicos para a navegación da axuda, como pode ser a creación de gráficas, o cálculo de límites, derivadas, integrais ou a resolución de ecuacións diferenciais, o que supón un apoio importante para o desenvolvemento da unidade.

Por outra banda, as titorías en grupo reducido permitirán realizar un mellor seguimento do proceso de ensino-aprendizaxe e discutir sobre os aspectos fundamentais da materia, orientando e fomentando o traballo persoal do alumno. Os alumnos contarán con material complementario como notas de contidos, boletíns de exercicios e prácticas, debendo manexar as referencias bibliográficas axeitadas que lle permitan afondar no estudo da materia.

As horas de traballo presencial na aula deberán ir unidas de xeito ineludible a un traballo persoal axeitado por parte do alumnado, que consiste en horas de estudo individual, elaboración de exercicios, lecturas ou outras actividades recomendadas, traballo persoal relacionado coas prácticas de ordenador, así como a realización de exames.

OS CONTIDOS BÁSICOS

As ecuacións diferenciais serven como modelo de grande cantidade de fenómenos reais cuxa evolución pode predicirse coa súa axuda. Os problemas concretos que estudaremos nesta unidade como aplicación dos métodos proporcionados pola teoría das ecuacións diferenciais ordinarias abranguen modelos de poboacións (Malthus e loxístico), modelos que rexen o crecemento de seres vivos, leis que serven para describir o proceso de desintegración dunha sustancia radioactiva (que se aplican, por exemplo, na datación de restos fósiles), ou a evolución da temperatura dun corpo que se atopa nun medio a temperatura constante (lei do arrefriamento de Newton). Os modelos amosados son unha pequena mostra do potencial de aplicación das ecuacións diferenciais, que son de utilidade en multitude de campos: física, bioloxía, medicina, economía, etc.

Os primeiros apartados da unidade teñen como finalidade afianzar os contidos necesarios para o estudo dos modelos diferenciais de interese. O primeiro apartado persegue manexar os conceptos básicos das ecuacións diferenciais como son a súa definición, a súa clasificación atendendo a diversos criterios, os conceptos de solución e problema de valor inicial, proporcionando tamén resultados que garanten a existencia de tal solución.

No segundo apartado, preséntanse algunhas técnicas de resolución de ecuacións diferenciais ordinarias de primeira orde sinxelas, en concreto analízanse as ecuacións de variables separadas e as ecuacións lineares, técnicas que serán de utilidade no estudo do último apartado, onde se formulan e resolven os diferentes modelos especificados, obtendo conclusións sobre a súa evolución en situacións concretas, que nos permiten inferir información de interese en diversos problemas reais no ámbito da Bioloxía.

1. Ecuacións diferenciais

Unha ecuación diferencial é simplemente *“unha ecuación que contén derivadas”* e, dado que a derivada representa a razón de cambio dunha variable con respecto a outra, resulta natural modelizar por medio dunha ecuación deste tipo un fenómeno no que estea implicada a taxa de variación dunha magnitude con respecto a outra. Como exemplo, e aínda que estudaremos posteriormente esta situación con maior detalle, se estamos interesados en obter un modelo que sirva para predicir o crecemento do número de individuos dunha poboación en función do tempo, podemos ter en conta, de xeito simplificado, que a velocidade de crecemento en cada instante é proporcional ao número de individuos nese instante, o que dá lugar á ecuación diferencial $p'(t)=r\,p(t)$, onde $p(t)$ denota a cantidade de individuos presentes na poboación en cada instante e $r>0$ é unha constante de proporcionalidade.

1.1. Definicións e conceptos previos

Concepto de ecuación diferencial - Unha ecuación diferencial é unha ecuación que involucra as derivadas de unha ou varias variables (chamadas dependentes) con respecto a unha ou máis variables (independentes). Se unicamente aparecen derivadas con respecto a unha variable, a ecuación chámase ecuación diferencial ordinaria (EDO), mentres que se existen derivadas con respecto a varias variables (como mínimo dúas), trátase dunha ecuación en derivadas parciais (EDP).

Atopamos, polo tanto, unha primeira clasificación das ecuacións diferenciais en ecuacións diferenciais ordinarias e ecuacións en derivadas parciais. Por exemplo, a ecuación $\dfrac{dp}{dt} = rp$ é unha ecuación diferencial ordinaria, mentres que $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \dfrac{\partial y}{\partial x} = 0$ é unha ecuación en derivadas parciais. Outro criterio de clasificación das ecuacións diferenciais corresponde á orde da ecuación, que é a maior das ordes das derivadas (ordinarias ou parciais) que figuran na ecuación. Así, a primeira ecuación é de primeira orde e a segunda é de segunda orde. Unha ecuación diferencial ordinaria de orde *n* denótase habitualmente $F(x, y, y', ..., y^{n)}) = 0$.

Para as ecuacións diferenciais ordinarias, estudaremos así mesmo o seu carácter linear ou non linear. Diremos que unha ecuación diferencial ordinaria é linear se admite unha expresión da forma

$$a_n(x)y^{n)} + a_{n-1}(x)y^{n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x).$$

Nótese que os coeficientes da ecuación só son función da variable independente e que a variable dependente e as súas diferentes derivadas que aparecen, non están afectadas por expoñentes maiores a *1* ou outros termos non lineares. Por exemplo, a ecuación diferencial $x^3 y' + \cos(x) = 0$ é linear, pero $x(y')^3 + y = 0$ ou $x^3 y' + \cos(y) = 0$ son non lineares.

Se a función b é identicamente nula, a ecuación linear anterior chámase homoxénea.

Outro concepto importante é o de solución dunha ecuación diferencial.

Solución dunha ecuación diferencial – Dada a ecuación diferencial $F(x, y, y', ..., y^{n)}) = 0$, chamamos solución a unha función $\varphi : I \to \mathbf{R}$ definida nun intervalo aberto da recta real, *n* veces derivable en I e que satisfai a ecuación, é dicir, $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{n)}(x)) = 0$, entendendo que a función F está definida en todo $\mathbf{R}^{n+2}$.

É sinxelo comprobar que as funcións da forma $\varphi(x) = x + C$, onde C é unha constante arbitraria, son solución da ecuación $y' = 1$ e que, por outra banda, as funcións $\varphi(x) = C_1 e^{-x} + C_2$ son solucións de $y'' + y' = 0$, independentemente dos valores de C_1 e C_2.

As ecuacións anteriores presentan, respectivamente, unha familia uniparamétrica e biparamétrica de solucións, o que está relacionado coa orde da ecuación. En xeral, os métodos para resolver ecuacións diferenciais de orde *n* dan lugar a *n* constantes arbitrarias, que poderán ser determinadas se se coñecen os valores da variable dependente e as correspondentes derivadas para un certo valor fixado da variable independente. Non obstante, unha ecuación diferencial podería posuír unha única solución, ou ningunha.

1.2. Problema de valor inicial

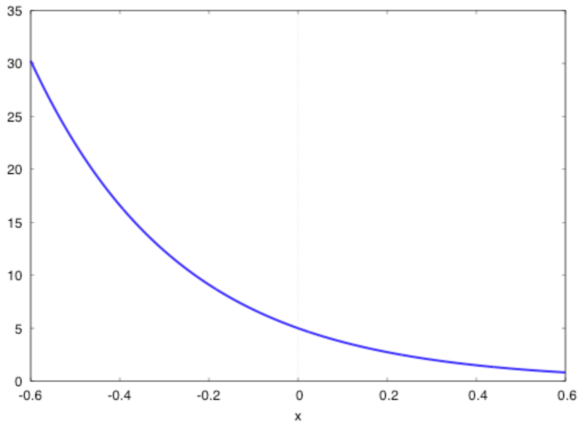
Definición - Chámase problema de valor inicial ou problema de Cauchy ao problema de resolver unha ecuación diferencial ordinaria que satisfaga unhas certas condicións iniciais. É dicir, para *n=1*, dada (x_0, y_0), consiste en atopar unha solución φ de $F(x,y,y')=0$ definida nun intervalo *I* que contén a x_0 e cumprindo que $\varphi(x_0)=y_0$. Por outra banda, no caso *n* arbitrario, dada $(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$, consiste en atopar unha solución φ de $F(x,y,y',\ldots,y^{n)})=0$, definida nun intervalo *I* que contén a x_0 e cumprindo que $\varphi(x_0)=y_0$, $\varphi'(x_0)=y_1$, …, $\varphi^{n-1)}(x_0)=y_{n-1}$.
A continuación, estudamos a existencia e unicidade de solución para o problema de valor inicial relativo a unha ecuación diferencial de primeira orde escrita en forma normal $y'=F(x,y)$, onde F é unha función real definida nun aberto Ω do plano.

Teorema de Picard Consideremos o problema de valor inicial $y'=F(x,y)$, $y(x_0)=y_0$. Supoñamos que tanto F como $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ son continuas nun rectángulo $(a,b)\times(c,d)$ que contén a (x_0,y_0). Entón o problema de valor inicial ten unha única solución definida nun certo intervalo (x_0-h, x_0+h) con $h>0$.

A unicidade da solución enténdese no sentido de que, se existen dúas solucións do problema, ambas coinciden na intersección dos seus dominios.
Exemplo Apliquemos o resultado anterior á ecuación $y'=-3y$, suxeita á condición inicial $(0,5)$. Neste caso, as funcións $F(x,y)=-3y$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)=-3$ son ambas continuas en calquera rectángulo aberto do plano. Polo tanto, podemos aplicar o Teorema de Picard, obténdose a existencia dunha única solución para o problema de valor inicial $\begin{cases} y'=-3y \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$, independentemente dos valores de x_0 e y_0, en particular

para o proposto $x_0 = 0$ e $y_0 = 5$. Non é difícil comprobar que as funcións da familia $y(x) = Ce^{-3x}$, onde C é unha constante arbitraria, son solucións da ecuación diferencial. Para obter a solución buscada, basta impoñer $y(0) = C = 5$, logo $y(x) = 5e^{-3x}$.

Cadro 1. Solución do problema de valor inicial $y' = -3y,\ y(0) = 5$



Exemplo Estudemos a aplicabilidade do Teorema de Picard aos diferentes problemas de valor inicial asociados á ecuación diferencial ordinaria $(y^2 - 1)y' = -x^2$. Nótese que, unha vez escrita a ecuación en forma normal, temos que $F(x,y) = \dfrac{-x^2}{y^2 - 1}$, que está definida no conxunto $\Omega = \{(x,y) : y \neq 1 \text{ e } y \neq -1\}$. É obvio que F e $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2x^2 y}{(y^2 - 1)^2}$ son continuas en Ω. Dado que calquera condición inicial en Ω, pertence a un rectángulo aberto contido en Ω, o Teorema de Picard garante a existencia e unicidade de solución para o problema de Cauchy correspondente a unha condición inicial nalgún dos dominios $\Omega_1 = \{(x,y) : y < -1\}$, $\Omega_2 = \{(x,y) : -1 < y < 1\}$ e $\Omega_3 = \{(x,y) : y > 1\}$.

2. Algúns métodos de integración de ecuacións diferenciais ordinarias de primeira orde

Aínda que os métodos de resolución de ecuacións diferenciais varían en función das propiedades da ecuación que se considere, nesta unidade desenvolvemos unicamente dous métodos para resolver certas ecuacións diferenciais ordinarias de primeira orde como son as ecuacións de variables separadas e as ecuacións lineares.

2.1. Ecuacións en variables separadas

Nesta sección estudamos como resolver un tipo de ecuacións diferenciais sinxelas mediante integración.

Definición Unha ecuación diferencial chámase separable se se pode expresar do seguinte xeito $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$, onde f e g son continuas en respectivos intervalos abertos de definición.

Exemplo A ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{-x^2}{y^2 - 1}$ é unha ecuación en variables separadas ou separable. Non obstante, a ecuación $\frac{dy}{dx} = 1 + x^2 y$ non é separable.

A ecuación diferencial separable definida pode denotarse do seguinte xeito $f(x)dx - \frac{1}{g(y)}dy = 0$, se $g(y) \neq 0$, e cúmprese que as solucións da ecuación separable (salvo ceros do denominador) veñen dadas por $\int f(x)dx - \int \frac{1}{g(y)}dy = C$, onde C é unha constante arbitraria.

Exemplo A solución xeral da ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{-x^2}{y^2 - 1}$ pode obterse mediante o cálculo das primitivas das funcións correspondentes, a partires da expresión $(y^2 - 1)dy = -x^2 dx$, de xeito que $\frac{y^3}{3} - y = \frac{-x^3}{3} + C$, onde C é unha constante real arbitraria. Se estamos interesados en calcular a solución que pasa por $(1,2) \in \Omega_3$, o valor da constante será calculado de xeito que $\frac{2^3}{3} - 1 = \frac{-1}{3} + C$, logo $C = 1$ e a solución buscada vén definida implicitamente (nunha veciñanza de $x = 1$) por $\frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - y = 1$.

Exemplo Calculemos a solución da ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x-2}$ pasando polo punto $(3,0)$. Temos que $\int \frac{1}{y+1}dy = \int \frac{1}{x-2}dx + C$, logo $\ln\left|\frac{y+1}{x-2}\right| = C$, se $x \neq 2$, o que implica que $y = -1 + K(x-2)$, obténdose unha constante $K = 1$ para que a solución pase por $(3,0)$, é dicir, a función buscada é $y = -3 + x$.

Caso particular Se $g \equiv 1$, entón $\frac{dy}{dx} = f(x)$, e as solucións da ecuación veñen dadas por $y = \int f(x)dx + C$, onde C é unha constante arbitraria.

2.2. Ecuacións lineares

Consideremos a ecuación diferencial linear de primeira orde $a_1(x)y'+a_0(x)y=b(x)$, onde todos os coeficientes se consideran funcións continuas nun certo intervalo aberto I. Se a_1 non se anula en ningún punto, podemos reescribir a anterior ecuación no que se denomina a súa forma canónica ou estándar $y'+p(x)y=q(x)$, con p e q continuas no aberto I. Ilustraremos a resolución das ecuacións diferenciais ordinarias lineares de primeira orde mediante un exemplo.

Exemplo Calculemos a solución xeral da ecuación $xy'-2y=x^{-3}$, mediante o seguinte procedemento:

a) En primeiro lugar, escribimos a ecuación na súa forma canónica, como segue $y'-\dfrac{2y}{x}=x^{-4}$.

b) Calculamos a solución xeral da ecuación linear homoxénea asociada, que coincide con $y'-\dfrac{2y}{x}=0$, facilmente resoluble por tratarse dunha ecuación en variables separadas, cuxa solución se obtén como $\displaystyle\int\frac{1}{y}dy=2\int\frac{1}{x}dx+C$, que produce $y=Kx^2$, con K unha constante arbitraria.

c) A continuación, achamos unha solución particular da ecuación completa da forma $y=K(x)x^2$, que corresponde a substituír a constante K pola función $K(x)$ na solución xeral da ecuación homoxénea. Calculemos a expresión da función $K(x)$ para que $y=K(x)x^2$ sexa solución da ecuación completa, obténdose $K'(x)\cdot x^2+K(x)\cdot 2x-\dfrac{2\cdot K(x)\cdot x^2}{x}=x^{-4}$, logo $K'(x)=x^{-6}$, e, por exemplo, $K(x)=-\dfrac{x^{-5}}{5}$, obténdose a solución particular da ecuación completa $y=-\dfrac{x^{-3}}{5}$.

d) Por último, a solución xeral da ecuación linear completa obtense como a suma dunha solución particular da ecuación completa (por exemplo, a obtida no apartado c)) e a solución xeral da ecuación homoxénea (obtida en b)), é dicir, $y=Kx^2-\dfrac{x^{-3}}{5}$.

3. Aplicacións das ecuacións diferenciais ordinarias en Bioloxía

Neste último apartado, estudaremos diferentes ecuacións que serven para modelizar fenómenos de interese no eido da Bioloxía, todas elas da forma

$y' = F(y)$, onde a función F non depende da variable independente x. Este tipo de ecuacións chámanse ecuacións diferenciais autónomas, e as súas solucións teñen propiedades especiais. De xeito intuitivo, e se a variable independente x representa o tempo, a evolución de dúas solucións da ecuación, unha pasando no instante x_0 polo punto y_0 e a outra pasando polo mesmo punto y_0 nun instante diferente x_1, é a mesma. Isto implica que este tipo de ecuacións é útil para predicir o comportamento dun fenómeno que se produce con independencia do momento no que se realiza. Por tanto, as condicións iniciais que manexaremos á hora de calcular as solucións ás diferentes ecuacións formuladas serán da forma $(0, y_0)$.

3.1. Modelo de Malthus

Un dos primeiros modelos matemáticos que tratou de explicar o crecemento demográfico humano foi o proposto en 1798 polo economista inglés Thomas Malthus (1766-1834). Malthus afirmaba que unha poboación medra de xeito exponencial, mentres que os recursos só o fan xeometricamente, escribindo sobre as consecuencias catastróficas do crecemento sen limitacións da poboación humana.

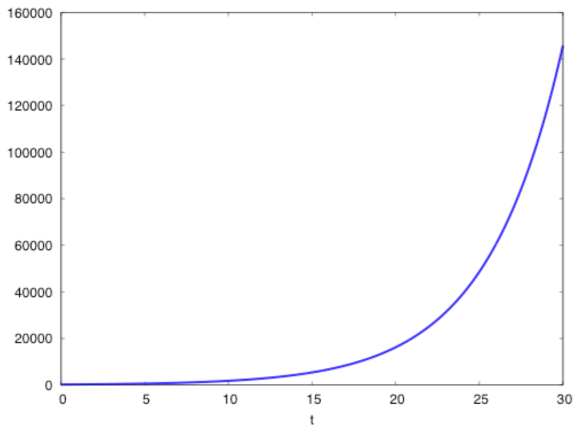
A base do modelo é a hipótese de que a taxa de crecemento dunha poboación en cada instante é proporcional ao número de individuos da poboación nese instante (a un maior número de individuos no instante actual, maior número de individuos haberá no futuro). Esta hipótese é consistente co que sucede no proceso de reprodución de bacterias por división celular simple. Denotaremos por $p(t)$ o número de individuos dunha poboación no instante t. Obviamente, o número de individuos é un número enteiro, mais se a poboación é moi grande, o erro cometido ao considerar $p(t)$ continua é pequeno. Polo tanto, o modelo obtido é $p'(t) = kp(t)$, onde $k > 0$ é unha constante que representa a taxa relativa de crecemento da poboación. A anterior ecuación chámase lei malthusiana ou exponencial, debido ao comportamento das súas solucións. A solución xeral da ecuación anterior é $p(t) = Ce^{kt}$, onde C representa a poboación p_0 no instante inicial $t = 0$, é dicir, $p(t) = p_0 e^{kt}$, e a poboación presenta un crecemento exponencial.

Este modelo é moi simple, dado que despreza factores como poden ser os movementos migratorios que poden facer variar o número de individuos da poboación. Malia esta inconveniencia, resulta útil para estudar colonias bacterianas ou poboacións animais realizando un estudo a curto prazo. Como podemos consultar na referencia [KENT NAGLE e SAFF (1992), páxs. 95-96], o modelo resultou efectivo para realizar unha predición da poboación dos Estados Unidos dende 1790 ata 1860 (tendo en conta que en 1790 a poboación ascendía a 3.93 millóns de habitantes e que en 1800 existían 5.31 millóns de individuos).

Exemplo En 1980, o Departamento de Recursos Naturais introduce nun lago 200 exemplares dunha especie de peixe híbrido. Cinco anos máis

tarde, calculouse que a poboación desta especie no lago era de 600. Supoñendo un crecemento de tipo Malthusiano, calcular a poboación destes peixes no lago en 2000 e en 2010.
Tomando como instante inicial $t=0$ o ano 1980, a poboación inicial é $p_0 = 200$ e a solución ao problema considerado é $p(t) = 200e^{kt}$. Para calcular o valor de k, utilizamos que $p(5) = 200 \cdot e^{5k} = 600$, co que $k = \dfrac{\ln(3)}{5}$ e a solución é $p(t) = 200e^{\frac{\ln(3)}{5}t}$. As poboacións en 2000 e 2010 son, respectivamente, $p(20) = 200e^{\frac{\ln(3)}{5}20} = 200e^{4\cdot\ln(3)} = 16200$ e $p(30) = 200e^{\frac{\ln(3)}{5}30} = 200e^{6\cdot\ln(3)} = 145800$.

Cadro 2. Solución do problema de valor inicial $y' = \dfrac{\ln(3)}{5}y$, $y(0) = 200$

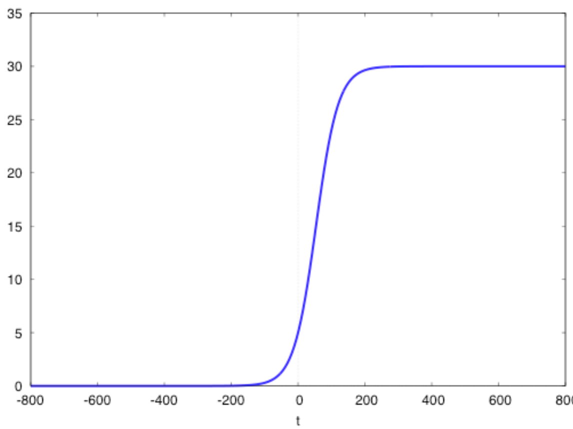


Se consideramos que se produce diminución da poboación por causas naturais, de xeito proporcional ao tamaño da poboación, obtemos o mesmo modelo $p'(t) = kp(t) - \mu p(t) = (k-\mu)p(t)$.

3.2. Ecuación loxística

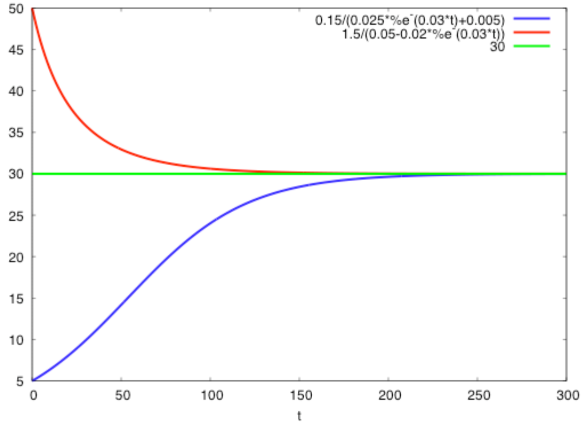
O modelo especificado no apartado 3.1 non ten en conta a diminución da poboación motivada pola falta de alimentos, epidemias, violencia, ou outros factores que sexan consecuencia da competencia entre individuos polos recursos existentes ou o espazo. Como a competencia entre individuos podemos supoñer que produce unha diminución na poboación proporcional ao número de interaccións bipartitas entre individuos, que en cada instante se calcula como $\dfrac{p(t)(p(t)-1)}{2}$, obtemos un novo modelo do tipo $p'(t) = (k-\mu)p(t) - \gamma\dfrac{p(t)(p(t)-1)}{2}$, no que asumiremos $k > \mu$ e $\gamma > 0$, que admite a expresión $p' = ap - bp^2$, onde $a = k - \mu + \frac{\gamma}{2} > 0$ e $b = \frac{\gamma}{2} > 0$ denominada ecuación loxística (desenvolvida por Verhulst sobre 1840). Resolvendo esta ecuación por variables separadas, para o que é preciso realizar a seguinte descomposición en fraccións simples $\frac{1}{p(a-bp)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{p} - \frac{1}{a} \cdot \frac{-b}{a-bp}$, obtemos como solución xeral $p(t) = \frac{C \cdot a}{b \cdot C + e^{-at}}$. Tomando como condición inicial $p(0) = p_0$, é posible calcular o valor da constante C en función de p_0. Se $p_0 \neq \frac{a}{b}$, entón $C = \frac{p_0}{a - p_0 b}$ e a solución é $p(t) = \frac{p_0 \cdot a}{p_0 \cdot b + (a - p_0 \cdot b) \cdot e^{-at}}$, chamada función loxística. Por outra banda, se $p_0 = \frac{a}{b}$, a solución é constante $p(t) = \frac{a}{b}$. As poboacións 0 e $\frac{a}{b}$, por corresponderse con solucións constantes, chámanse poboacións de equilibrio.

Cadro 3. Solución do problema de valor inicial $y' = 0.03y - 0.001y^2,\ y(0) = 5$



É de interese destacar o comportamento límite das solucións que, independentemente do valor inicial $p_0 > 0$, cumpren que $\lim_{t\to\infty} p(t) = \frac{a}{b}$, valor denominado poboación límite, e que pode ser deducido directamente a partir da ecuación, sen necesidade de resolvela. Este valor tamén se denomina capacidade de soporte, é dicir, é o tamaño de poboación que pode ser admitido polo medio, dado que, se $p_0 > 0$, a taxa de crecemento da poboación é positiva (a poboación medra) por debaixo de $\frac{a}{b}$ e é negativa (a poboación decrece) por enriba de $\frac{a}{b}$.

Cadro 4. Solución do problema de valor inicial $y' = 0.03y - 0.001y^2$, coas condicións iniciais $(0,5)$, $(0,30)$ e $(0,50)$, respectivamente



Como se aprecia no Cadro 4 (e se pode comprobar sen dificultade no caso xeral), cando a poboación inicial excede a capacidade de soporte do medio, o número de individuos diminúe cara a $\frac{a}{b}$ e a solución é unha función convexa. Se a poboación inicial é positiva pero inferior a ese valor, entón a solución medra cara a $\frac{a}{b}$. En particular, se $0 < p_0 < \frac{a}{2b}$, entón a gráfica ten forma de S, é convexa ata acadar $\frac{a}{2b}$ e cóncava despois. Este comportamento é consistente cun crecemento dependente da densidade de poboación. Se a densidade de poboación é pequena, a evolución da poboación é similar a un crecemento sen limitacións, mais se a densidade aumenta, o crecemento vaise moderando a medida que a poboación se vai achegando á capacidade de aloxamento.

Véxase [KENT NAGLE e SAFF (1992), páxs. 98-99], para apreciar unha mellor concordancia das predicións do número de habitantes dos EUA obtidas mediante o uso do modelo loxístico cos datos pertencentes ao censo en comparación coas conclusións obtidas mediante o modelo de Malthus.

Existen modelos de poboacións máis complexos que teñen en conta factores non considerados polo modelo loxístico como son os conflitos bélicos, movementos migratorios, as innovacións presentes na sociedade ou a distribución da poboación por sexo e grupos de idade.

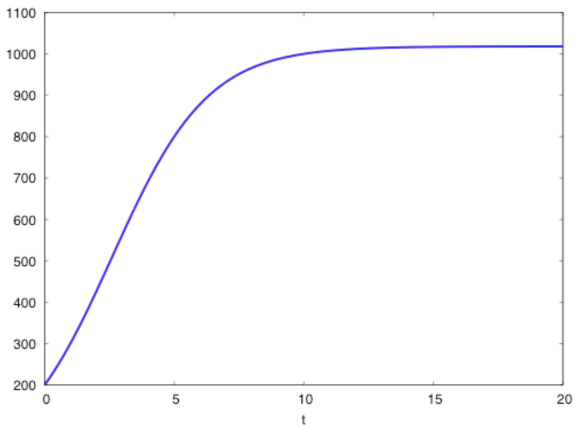
Exemplo En 1998, a poboación de caimáns nunha certa rexión ascendía a 200 exemplares. En 2003, existían 800 exemplares e, en 2008, 1000 exemplares. Utilizando un modelo loxístico, calcular a poboación de caimáns en 2010. ¿Cal é a poboación límite?
De novo, tomamos como instante inicial o ano 1998, e a poboación inicial é $p_0 = 200$. Logo a solución vén dada por $p(t) = \dfrac{200 \cdot a}{200 \cdot b + (a - 200 \cdot b)e^{-at}}$.
Para calcular os valores de a e b, temos en conta que

$$p(5) = \frac{200 \cdot a}{200 \cdot b + (a - 200 \cdot b)e^{-a \cdot 5}} = 800,$$

$$p(10) = \frac{200 \cdot a}{200 \cdot b + (a - 200 \cdot b)e^{-a \cdot 10}} = 1000,$$

que son ecuacións lineares que, neste caso, podemos resolver directamente. Despexando $200 \cdot b$ nas dúas ecuacións, dedúcese que $200 \cdot b = \dfrac{200 \cdot a \cdot (1 - 4e^{-5 \cdot a})}{800 \cdot (1 - e^{-5 \cdot a})}$, $200 \cdot b = \dfrac{200 \cdot a \cdot (1 - 5e^{-10 \cdot a})}{1000 \cdot (1 - e^{-10 \cdot a})}$, e igualando ambos termos, temos unha ecuación de segundo grao en $x = e^{-5 \cdot a}$, isto é, $15x^2 - 16x + 1 = 0$. Isto permite obter $a = \dfrac{\ln(15)}{5} \approx 0.54161$. Polo tanto, $b \approx 0.00053194$. A poboación límite é $\dfrac{a}{b} \approx 1018$. Por outra banda, a solución vén dada por $p(t) = \dfrac{108.32200804}{0.10638769 + 0.43522235 \cdot e^{-0.54161004 \cdot t}}$, cuxa gráfica se inclúe no Cadro 5, e a poboación en 2010 é $p(12) \approx 1012$.

Cadro 5. Solución do modelo loxístico satisfacendo $(0,200)$, $(5,800)$ **e** $(10,1000)$



3.3. Modelo de desintegración radioactiva

Se as moléculas dunha certa sustancia tenden a desintegrarse a un ritmo que non está afectado pola existencia doutras sustancias, podemos supoñer que a velocidade de desintegración é proporcional á cantidade de material restante (número de moléculas que se descompoñen por unidade de tempo en cada instante é proporcional ao número total de moléculas que existen nese instante). Este proceso denomínase reacción de primeira orde. Estudaremos o caso particular da desintegración radioactiva. Se denotamos por $x(t)$ a cantidade de materia presente no instante t, a hipótese asumida pode expresarse como $x'(t) = -kx(t)$, onde $k > 0$ se denomina constante de ritmo, pois o seu valor mide o ritmo ao que ten lugar a desintegración. A constante k tamén pode interpretarse como a diminución relativa da sustancia por unidade de tempo. A solución xeral da ecuación anterior vén dada por $x(t) = Ce^{-k\cdot t}$, onde C é unha constante arbitraria. Se impoñemos a condición inicial $x(0) = x_0$, entón a solución é $x(t) = x_0 e^{-k\cdot t}$, que decrece de xeito exponencial. Unha magnitude de interese é a semivida ou período de semidesintegración do material, que é o período de tempo que tarda unha cantidade calquera de sustancia en reducirse á metade, é dicir, o valor T tal que $x_0 e^{-k\cdot T} = \frac{x_0}{2}$, o que dá lugar á expresión $kT = \ln(2)$, que nos permite calcular unha das constantes, coñecida a outra.

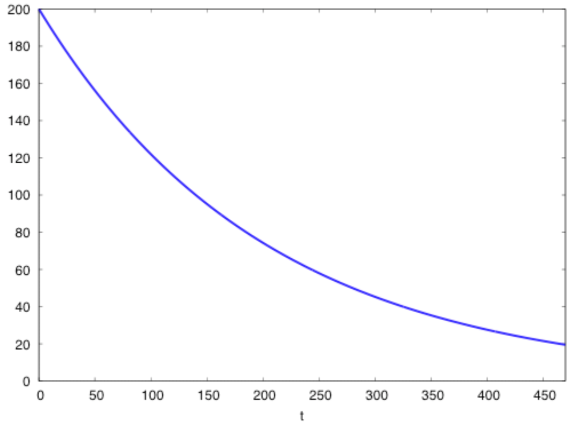
Exemplo Unha sustancia radioactiva tarda 8 anos en desintegrarse ao 29% da cantidade orixinal. Obter a súa semivida.

Dado que $x_0 e^{-k\cdot 8} = 0.29 \cdot x_0$, dedúcese que $k = \frac{\ln(0.29)}{-8} \approx 0.1547343$ e $T = \frac{\ln(2)}{k} \approx 4.48$ anos.

Exemplo O Polonio 210 ten unha semivida de 140 días. Se consideramos unha mostra desta sustancia de masa 200 microgramos, obter a cantidade de sustancia en función do tempo. ¿Canto tempo deberá transcorrer ata que quede o 10% da cantidade inicial?

A constante k calcúlase como $k = \frac{\ln(2)}{140} \approx 0.00495$, logo a solución é $x(t) = 200e^{-\frac{\ln(2)}{140}\cdot t}$, cuxa gráfica se observa no Cadro 6. Finalmente, para calcular o tempo que debe transcorrer ata que queden 20 microgramos, despexamos t na ecuación $200e^{-\frac{\ln(2)}{140}\cdot t} = 20$, obténdose o valor $t = \frac{140 \cdot \ln(10)}{\ln(2)} \approx 465.07$ días.

Cadro 6. Solución de $x' = -\frac{\ln(2)}{140}x$ **pasando por** $(0,200)$



3.1.1. Datación de restos fósiles por medio do carbono 14

O modelo da desintegración radioactiva é a base para a utilización dos elementos radioactivos presentes na natureza para a datación de sucesos moi antigos. Así, por exemplo, é posible estimar a antigüidade de rochas de granito medindo a relación que existe entre uranio e chumbo, aínda que existen outros métodos que analizan a desintegración de potasio en argón ou incluso a do rubidio en estroncio, mais todos estes elementos teñen unha semivida demasiado elevada (millóns de anos), o que non permite a datación de restos máis recentes. O descubrimento do radiocarbono (un isótopo radioactivo do carbono cunha semivida duns 5600 anos) permitiulle a Willard Libby e aos seus colaboradores desenvolver a técnica de datación por carbono para calcular a idade de mostras de orixe orgánica (madeira, carbón, tecidos de procedencia vexetal, ósos, etc), o que o fixo merecente do Premio Nobel de Química en 1960. O proceso é, en liñas xerais, o seguinte: o carbono 14 é producido na atmosfera pola acción da radiación cósmica sobre o nitróxeno e transfórmase en dióxido de carbono debido á oxidación, mesturándose co dióxido de carbono non radioactivo, mestura que é asimilada polas plantas a través da fotosíntese e polos restantes seres vivos, ben por alimentarse de plantas ou outros animais ou pola respiración. A proporción do carbono 14 con respecto ao carbono 12 na atmosfera mantense en equilibrio, o que tamén sucedeu de xeito máis ou menos preciso durante un longo período de tempo. Así mesmo, todos os organismos vivos manteñen a mesma proporción de carbono 14 nos seus tecidos. Unha vez que cesa a absorción de dióxido de carbono, a proporción de carbono 14 en relación ao carbono ordinario diminúe por efecto da desintegración do isótopo radioactivo. Comparando a proporción de carbono 14 presente nun resto de orixe orgánica coa proporción que tería de estar vivo (a constante da atmosfera), obtense unha estimación da súa idade (véxanse as referencias para máis detalles).

Exemplo Supoñamos que, nunha certa escavación arqueolóxica, se atoparon restos de madeira que conteñen o 33% de carbono 14 (en relación ao carbono 12) con respecto ao que conteñen as plantas vivas. ¿Cando se cortou a madeira?
Considerando a semivida do C-14 fixada en 5600 anos, a constante k é igual a $k = \dfrac{\ln(2)}{5600} \approx 1.237763 \cdot 10^{-4}$. Se a proporción existente é do 33%, entón debemos calcular t tal que $x_0 \cdot e^{-\frac{\ln(2)}{5600} \cdot t} = 0.33 \cdot x_0$, logo o tempo transcorrido é $t = \dfrac{-5600 \cdot \ln(0.33)}{\ln(2)} \approx 8957$ anos.

3.4. Lei do arrefriamento de Newton

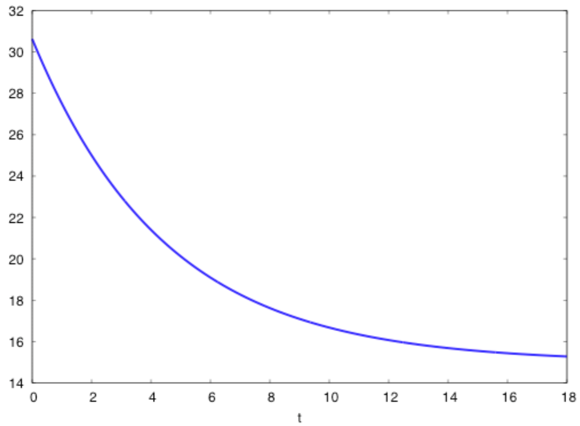
Consideremos que, nunha sala que se mantén a temperatura constante M, se coloca un obxecto que se atopa a temperatura T_0. A lei do arrefriamento de Newton afirma que a velocidade de arrefriamento (ou quecemento, se o medio está máis quente) do obxecto en cada instante é proporcional á diferencia existente nese instante entre a temperatura do citado obxecto e a do medio, é dicir, $T'(t) = -k(T(t) - M)$, onde $T(t)$ representa a temperatura do obxecto no instante t, M é a temperatura do medio e $k > 0$ é unha constante. De acordo co signo de k, se a temperatura inicial do obxecto supera á do medio, o obxecto irá arrefriando pois $T(t)$ é decrecente, mais se o obxecto está inicialmente máis frío có medio, $T(t)$ medra e o obxecto experimenta un aumento de temperatura.

A solución xeral da ecuación diferencial anterior ten a expresión $T(t) = M + Ce^{-k \cdot t}$, onde C é unha constante arbitraria. Se coñecemos a temperatura inicial do obxecto T_0 (temperatura para $t = 0$), podemos achar C, que é igual á diferencia entre a temperatura inicial do obxecto e a temperatura do medio, obténdose a solución $T(t) = M + (T_0 - M)e^{-k \cdot t}$.

Exemplo Sacamos un termómetro dunha sala a unha certa temperatura, para trasladalo a outro recinto onde a temperatura ambiente é de 15ºC. Tras dous minutos, a temperatura que sinala o termómetro é de 25ºC e, despois de tres minutos, sinala 23ºC. ¿Cal é temperatura do recinto de procedencia do termómetro?
A temperatura inicial do termómetro é a magnitude incógnita, e a temperatura do medio é $M = 15$. Polo tanto, a solución buscada terá a forma $T(t) = 15 + (T_0 - 15)e^{-k \cdot t}$, co tempo medido en minutos. En primeiro lugar, utilizaremos a información dispoñible para achar o valor de k. En efecto, como $T(2) = 25 = 15 + (T_0 - 15)e^{-2 \cdot k}$ e $T(3) = 23 = 15 + (T_0 - 15)e^{-3 \cdot k}$,

despexando $(T_0 - 15)$ de ambas expresións e igualando, temos que $k = \ln\frac{5}{4}$. Da expresión $25 = 15 + (T_0 - 15)e^{-2\cdot\ln\frac{5}{4}}$, despéxase a temperatura inicial do termómetro $T_0 = 15 + 10e^{2\cdot\ln\frac{5}{4}} = 30.625$ ºC. A evolución da temperatura do termómetro obsérvase no Cadro 7.

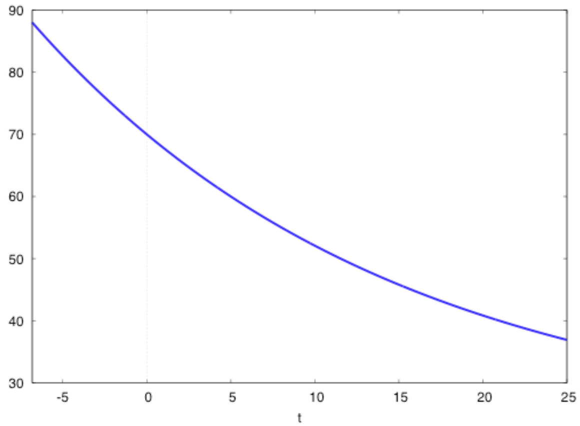
Cadro 7. Solución de $T' = -k(T - 15)$ pasando por $(2,25)$ e $(3,23)$



Exemplo Cando acode a tomar o seu té vespertino, a señora Smith atopa que xa lle foi servida unha cunca no lugar de costume, unha sala que se mantén a 22ºC. Dado que lle gusta tomar o té no seu punto ideal, ao chegar mide a súa temperatura, que é de 70ºC. Cinco minutos máis tarde, a temperatura do té é de 60ºC. Tendo en conta que o té é servido habitualmente á temperatura de 88ºC, ¿canto tempo levaba servido o té cando chegou a señora Smith? ¿Canto tempo esperará en total ata que a temperatura do té sexa de 50ºC?
Consideremos como instante inicial $t = 0$ o momento no que a señora Smith atopa a cunca de té e mide a súa temperatura por primeira vez. Isto quere dicir que $T_0 = 70$ e $M = 22$, polo que $T(t) = 22 + 48 \cdot e^{-k\cdot t}$. O valor de k será deducido a partir da expresión $T(5) = 60 = 22 + 48 \cdot e^{-k\cdot 5}$, obténdose o valor $k = \frac{1}{5}\ln\frac{24}{19} \approx .046723$. A función que explica a evolución da temperatura do corpo é $T(t) = 22 + 48 \cdot e^{-\frac{t}{5}\cdot\ln\frac{24}{19}}$, con t medido en minutos (véxase o Cadro 8). Para obter o tempo que levaba servido o té, cómpre despexar t na ecuación $88 = 22 + 48 \cdot e^{-\frac{t}{5}\cdot\ln\frac{24}{19}}$, o que ofrece o resultado $t = \frac{5\cdot\ln\frac{8}{11}}{\ln\frac{24}{19}} \approx$ -6.8 minutos, logo o té levaba servido case 7

minutos cando chegou a señora Smith (momento que se corresponde con $t=0$). Por outra banda, para calcular o tempo de espera ata que o té acada a temperatura de 50ºC, resolvemos $50 = 22 + 48 \cdot e^{-\frac{t}{5}\cdot\ln\frac{24}{19}}$, obtendo neste caso $t = \dfrac{5\cdot\ln\frac{12}{7}}{\ln\frac{24}{19}} \approx 11.5$ minutos. Obviamente, unha vez alcanzada a temperatura ideal do té, o seguinte gráfico non achega información de interese, a non ser que a señora Smith o deixe seguir arrefriando.

Cadro 8. Solución de $T' = -k(T-22)$ **pasando por** $(0,70)$ **e** $(5,60)$



3.5. Ecuación de von Bertalanffy

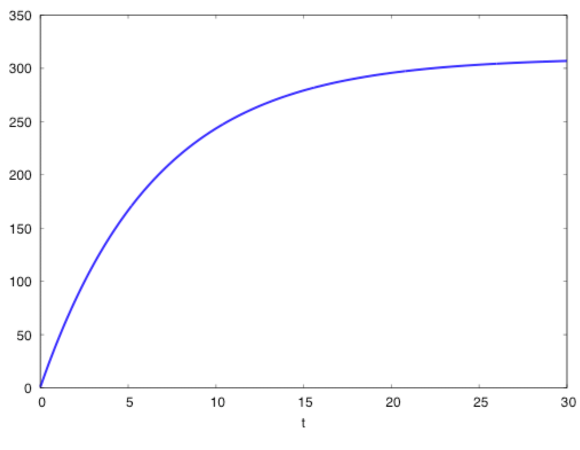
O último modelo que propoñemos describe de xeito moi simple o crecemento limitado dunha especie, e resulta de utilidade, por exemplo, para estimar a lonxitude de peixes en función do tempo. Este modelo está baseado na hipótese de que, aínda que o crecemento se produza ao longo de toda a vida, os individuos máis novos da especie medrarán máis rapidamente que os adultos. Deste xeito, podemos considerar que o crecemento en cada instante se produce de xeito proporcional á diferencia entre a lonxitude nese instante e unha constante A que se denomina lonxitude asintótica (e á que, en circunstancias normais, tenderá a lonxitude do peixe a medida que vai aumentando a idade).

Denotemos por $L(t)$ a lonxitude dun peixe no momento que ten idade t (na unidade correspondente). A lonxitude inicial $L_0 > 0$ será un dato coñecido en función da especie considerada. Con esta notación, a hipótese do modelo tradúcese en $L'(t) = k(A - L(t))$, con $k, A > 0$ constantes positivas. Debido ao significado biolóxico de A, no modelo matemático é conveniente considerar que se trata dunha constante maior cá lonxitude inicial. Canto máis próxima estea a lonxitude do peixe a A, máis lento será o seu crecemento.

A solución xeral da ecuación anterior (obtida por variables separadas) é $L(t) = A - Ce^{-k \cdot t}$ e, impoñendo a condición inicial, temos que $L(t) = A - (A - L_0)e^{-k \cdot t}$. Obviamente, $\lim_{t \to \infty} L(t) = A$, o que reafirma a nosa interpretación da constante A.

Exemplo Un peixe pertencente a unha especie determinada medra de acordo coa ecuación de von Bertalanffy. Un dato coñecido é que a lonxitude asintótica dos exemplares da especie é de 310 centímetros. Supoñendo que a lonxitude do peixe á idade de 1 ano é de 45 centímetros e que a lonxitude inicial é de 1 centímetro, calcular a lonxitude aos 3 anos e o tempo que debe pasar para que o peixe acade o 80% da súa lonxitude asintótica. Representar a evolución da lonxitude do peixe en función da idade.
A solución da ecuación de von Bertalanffy vén dada neste caso por $L(t) = 310 - 309e^{-k \cdot t}$, onde k se obtén a partir de $L(1) = 45 = 310 - 309 \cdot e^{-k}$, de xeito que $k = -\ln \frac{265}{309} \approx 0.154$, logo $L(t) = 310 - 309e^{t \cdot \ln \frac{265}{309}}$, onde a idade t está medida en anos. A lonxitude do peixe aos 3 anos é $L(3) = 310 - 309e^{3 \cdot \ln \frac{265}{309}} \approx 115.1$ cm. Para calcular a idade na que a lonxitude é o 80% da lonxitude asintótica, despexamos t en $0.8 \cdot 310 = 310 - 309e^{t \cdot \ln \frac{265}{309}}$, o que produce $t = \dfrac{\ln \frac{0.2 \cdot 310}{309}}{\ln \frac{265}{309}} \approx 10.5$ anos.

Cadro 9. Evolución da lonxitude do peixe en función da idade



ACTIVIDADES PROPOSTAS

As actividades propostas para unha correcta aprendizaxe dos contidos da materia incluirán boletíns de exercicios que versarán sobre:

- Clasificación dunha lista de ecuacións diferenciais atendendo ao seu tipo, orde e carácter linear ou non linear.
- Comprobación de solucións para diferentes ecuacións.
- Aplicación do Teorema de Picard a diferentes EDO de primeira orde, para deducir a existencia e unicidade de solución para condicións iniciais axeitadas.
- Resolución de ecuacións diferenciais ordinarias en variables separadas e lineares, tanto homoxéneas como completas.
- Tradución de problemas biolóxicos simples a ecuacións diferenciais sinxelas e utilización das técnicas proporcionadas para a súa resolución e obtención de conclusións.
- Resolución dos diferentes modelos diferenciais explicados como aplicación a diversas situacións, nas que terán que interpretar en termos matemáticos os diferentes datos facilitados por un certo enunciado.
- Realización de prácticas de ordenador.
- Consulta de información de interese na bibliografía.

AVALIACIÓN DA UNIDADE DIDÁCTICA

- Con carácter previo ao mecanismo de avaliación proporcionado polo exame final da materia, o traballo realizado polo alumnado nas titorías en grupo reducido e prácticas de ordenador permitirá levar a cabo un seguimento máis directo do proceso de aprendizaxe dos estudantes. Ademais de contribuír parcialmente á cualificación final, permitirá realizar a retroalimentación precisa.

Prácticas con wxMaxima

Neste anexo, incluímos a resolución dalgúns dos exemplos da unidade mediante a utilización do programa de cálculo simbólico Maxima, a través da interface wxMaxima. Con estas prácticas, pretendemos contribuír a unha mellor visualización por parte dos alumnos dos conceptos da materia correspondentes á unidade, así como ofrecer un modo sinxelo de comprobar os resultados obtidos e simplificar os cálculos. Aínda que sinalamos tamén os comandos de Maxima, a interface wxMaxima facilitará aos alumnos o primeiro contacto coa aplicación, de xeito que a utilización de menús resultará moi cómoda e axudará aos estudantes a centrarse na comprensión da unidade, evitando a dificultade que para eles poida supoñer a utilización dun programa de cálculo simbólico por primeira vez.

Ecuacións diferenciais ordinarias

En primeiro lugar, definiremos unha ecuación diferencial ordinaria, por exemplo, $xy' - 2y = x$, mediante a instrución x*'diff(y,x) -2*y = x; que produce

(%i1) x*'diff(y,x) -2*y = x;

(%o1) $x\left(\frac{d}{dx}y\right) - 2y = x$

Para resolver a ecuación anterior, prememos no menú "Ecuaciones" → "Resolver EDO", abríndose unha ventá de diálogo (chamada Resolver EDO) na que se nos pregunta cales son a ecuación e as variables para as que queremos resolver, se indicamos a saída anterior e prememos en "Aceptar", obtemos

(%i2) ode2(%, y, x);

(%o2) $y = \left(\%c - \frac{1}{x}\right) \cdot x^2$

Se agora queremos resolver a ecuación diferencial para a condición inicial $(1,0)$, prememos no menú "Ecuaciones" → "Problema de valor inicial (1)", abríndose unha ventá de diálogo (chamada IC1), na que podemos introducir a solución xeral da ecuación (%o2), é dicir, o resultado anterior, e as compoñentes da condición inicial $x = 1$ e $y = 0$, aparecendo ao aceptar o comando (que sempre podemos introducir directamente sen o menú) e a saída seguintes

(%i3) ic1(%, x=1, y=0);

(%o3) $y = x^2 - x$

Se a ecuación diferencial ordinaria é de segunda orde, por exemplo, 'diff(y,x,2) -2*y*'diff(y,x)^3 = 0; temos

(%i4) 'diff(y,x,2) -2*y*'diff(y,x)^3 = 0;

(%o4) $\frac{d^2}{dx^2}y - 2y\cdot\left(\frac{d}{dx}y\right)^3 = 0$

e podémola resolver do mesmo xeito cá anterior

(%i5) ode2(%, y, x);

(%o5) $-\frac{y^3 + 6\cdot\%k1\cdot y}{3} = x + \%k2$

mais, dado que existe unha familia biparamétrica de solucións, resolver un problema de valor inicial supón indicar a posición e a velocidade nun determinado instante, por exemplo, $x = 0$, $y = 0$ e $\frac{dy}{dx} = 1$. Premendo no menú "Ecuaciones" → "Problema de valor inicial (2)", ábrese unha ventá de diálogo (chamada IC2), na que podemos introducir a solución xeral da ecuación (%o5) (ou simplemente %) e o valor de y e a súa derivada para un valor de x axeitado. Introducindo os datos mencionados, temos, ao aceptar,

(%i6) ic2(%, x=0, y=0, 'diff(y,x)=1);

(%o6) $-\frac{y^3 - 3\cdot y\cdot(y^2+1)}{3} = x$

Simplificando a expresión mediante "Simplificar" → "Simplificar expresión", obtemos

(%i7) ratsimp(ic2(%o5, x=0, y=0, 'diff(y,x)=1));

(%o7) $\frac{2y^3 + 3y}{3} = x$

Vexamos algúns dos exemplos simples incluídos na unidade, para os que indicamos os comandos e execucións. Por exemplo, o problema de valor inicial $y' = -3y$, $(0{,}5)$

(%i8) 'diff(y,x) =-3*y;

(%o8) $\frac{d}{dx}y = -3y$

(%i9) ode2(%, y, x);

(%o9) $y = \%c\cdot\%e^{-3x}$

(%i10) ic1(%, x=0, y=5);

(%o10) $y = 5\cdot\%e^{-3x}$

Para a ecuación $(y^2 - 1)y' = -x^2$, a solución por $(1{,}2)$ obtense como

(%i11) (y^2-1)*'diff(y,x) =-x^2;

(%o11) $(y^2-1)\left(\frac{d}{dx}y\right) = -x^2$

(%i12) ode2(%, y, x);

(%o12) $-\frac{y^3-3y}{3}=\frac{x^3}{3}+\%c$

(%i13) ic1(%, x=1, y=2);

(%o13) $-\frac{y^3-3y}{3}=\frac{x^3-3}{3}$

Por tratarse dun programa de cálculo simbólico, é posible resolver ecuacións xenéricas do tipo

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$$

(%i14) 'diff(y,x) =f(x)*g(y);

(%o14) $\frac{d}{dx}y=f(x)g(y)$

(%i15) ode2(%, y, x);

(%o15) $\int\frac{1}{g(y)}dy=\int f(x)dx+\%c$

Como caso particular, para obter a solución do problema de valor inicial $\frac{dy}{dx}=\frac{y+1}{x-2}$, $(3,0)$, calculamos

(%i16) 'diff(y,x) =(y+1)/(x-2);

(%o16) $\frac{d}{dx}y=\frac{y+1}{x-2}$

(%i17) ode2(%, y, x);

(%o17) $y=\left(\%c-\frac{1}{x-2}\right)\cdot(x-2)$

(%i18) ic1(%, x=3, y=0);

(%o18) $y=x-3$

Para a ecuación inmediata $\frac{dy}{dx}=f(x)$, temos

(%i19) 'diff(y,x) =f(x);

(%o19) $\frac{d}{dx}y=f(x)$

(%i20) ode2(%, y, x);

(%o20) $y=\int f(x)dx+\%c$

O procedemento seguido é o mesmo independentemente do tipo de ecuación. Por exemplo, para a ecuación linear $xy'-2y=x^{-3}$,

(%i21) x*'diff(y,x)-2*y =x^(-3);

(%o21) $x\left(\frac{d}{dx}y\right)-2y=\frac{1}{x^3}$

(%i22) ode2(%, y, x);

(%o22) $y=\left(\%c-\frac{1}{5\cdot x^5}\right)\cdot x^2$

Se prememos o menú "Simplificar" → "Expandir expresión", obtense

(%i23) expand(%);

(%o23) $y=\%c\cdot x^2-\frac{1}{5\cdot x^3}$

Modelos de poboación

A solución do modelo de Malthus $p'(t)=kp(t)$ obtense como

(%i24) 'diff(p,t)=k*p;

(%o24) $\frac{d}{dt}p=k\cdot p$

(%i25) ode2(%, p, t);

(%o25) $p=\%c\cdot \%e^{k\cdot t}$

Resolvamos agora o seguinte

Exemplo En 1980, o Departamento de Recursos Naturais introduce nun lago 200 exemplares dunha especie de peixe híbrido. Cinco anos máis tarde, calculouse que a poboación desta especie no lago era de 600. Supoñendo un crecemento de tipo Malthusiano, calcular a poboación desta especie no lago en 2000 e en 2010.

Utilizando os datos anteriores,

(%i26) ic1(%, t=0, p=200);

(%o26) $p=200\cdot \%e^{k\cdot t}$

Agora calculemos k, mediante a condición $p(5)=600$, utilizando o menú "Simplificar" → "Sustituir", indicando a ecuación, a variable que queremos substituír e o seu novo valor. En primeiro lugar substituiremos a variable t polo valor 5 e logo a variable p por 600,

(%i27) subst(5, t, %);

(%o27) $p=200\cdot \%e^{5\cdot k}$

(%i28) subst(600, p, %);

(%o28) $600=200\cdot \%e^{5\cdot k}$

e finalmente resolveremos a ecuación para obter o valor de k

(%i29) solve(%);

De todos os valores obtidos para k, seleccionamos o valor real $k=\frac{\log(3)}{5}$ (nótese que Maxima utiliza a notación $\log$ para a función logaritmo neperiano). Substituímos o valor de k polo obtido

(%i30) subst(log(3)/5, k, %o26);

(%o30) $p = 200 \cdot \%e^{\frac{\log(3)\cdot t}{5}}$

Por último, calculemos a poboación para os instantes 20 e 30

(%i31) subst(20, t, %);

(%o31) 16200

(%i32) subst(30, t, %o30);

(%o32) 145800

Outro xeito máis sinxelo de resolver este problema é o seguinte: despois de executar (%i24)-(%i26), realizanse os pasos

(%i33) p(t):=200*exp(k*t);

(%o33) $p = 200 \cdot \%e^{k\cdot t}$

(%i34) solve(p(5)=600);

(%i35) k : log(3)/5;

(%o35) $\frac{\log(3)}{5}$

(%i36) p(20);

(%o36) 16200

(%i37) p(30);

(%o37) 145800

Por outra banda, para a ecuación loxística $p' = ap - bp^2$, a solución obtense como

(%i38) 'diff(p,t)=a*p-b*p^2;

(%o38) $\frac{d}{dt} p = a \cdot p - b \cdot p^2$

(%i39) ode2(%, p, t);

(%o39) $-\frac{\log(b\cdot p - a) - \log(p)}{a} = t + \%c$

Resolvamos o seguinte

Exemplo En 1998, a poboación de caimáns nunha certa rexión ascendía a 200 exemplares. En 2003, existían 800 exemplares e, en 2008, 1000 exemplares. Utilizando un modelo loxístico, calcular a poboación de caimáns en 2010. ¿Cal é a poboación límite?

Tomando como instante inicial o ano 1998, e tras executar os dous comandos previos, realizamos o seguinte

(%i40) ic1(%, t=0, p=200);

(%o40) $-\frac{\log(b\cdot p - a) - \log(p)}{a} = \frac{a\cdot t - \log(200\cdot b - a) + \log(200)}{a}$

(%i41) logcontract(%);

(%o41) $\dfrac{\log\left(\dfrac{p}{b\cdot p-a}\right)}{a}=\dfrac{a\cdot t+\log\left(\dfrac{200}{200\cdot b-a}\right)}{a}$

(%i42) solve(%,p);

(%o42) $p=\dfrac{200\cdot a\cdot \%e^{a\cdot t}}{200\cdot b\cdot \%e^{a\cdot t}-200\cdot b+a}$

Definamos a función *p* de acordo coa expresión anterior

(%i43) p(t):=(200*a*%e^(a*t))/(200*b*%e^(a*t)-200*b+a);

(%o43) $p(t)=\dfrac{200\cdot a\cdot \%e^{a\cdot t}}{200\cdot b\cdot \%e^{a\cdot t}-200\cdot b+a}$

As ecuacións que debemos resolver para obter os valores de a e b son

(%i44) ec1 : p(5)=800;

(%o44) $\dfrac{200\cdot a\cdot \%e^{5\cdot a}}{200\cdot \%e^{5\cdot a}\cdot b-200\cdot b+a}=800$

(%i45) ec2 : p(10)=1000;

(%o45) $\dfrac{200\cdot a\cdot \%e^{10\cdot a}}{200\cdot \%e^{10\cdot a}\cdot b-200\cdot b+a}=1000$

As anteriores ecuacións forman un sistema facilmente resoluble substituíndo $200\cdot b$ pola variable y, como segue:

(%i46) solve((200*a*%e^(5*a))/(y*%e^(5*a)-y+a)=800,y);

(%o46) $[y=\dfrac{a\cdot \%e^{5\cdot a}-4\cdot a}{4\cdot \%e^{5\cdot a}-4}]$

(%i47) solve((200*a*%e^(10*a))/(y*%e^(10*a)-y+a)=1000,y);

(%o47) $[y=\dfrac{a\cdot \%e^{10\cdot a}-5\cdot a}{5\cdot \%e^{10\cdot a}-5}]$

Igualemos ambas expresións e resolvamos a correspondente ecuación

(%i48) solve([(a*%e^(5*a)-4*a)/(4*%e^(5*a)-4)=(a*%e^(10*a)-5*a)/(5*%e^(10*a)-5)],[a]);

o que nos permite escoller a solución real positiva

(%i49) a : log(15)/5;

(%o49) $\dfrac{\log(15)}{5}$

e, utilizando a expresión de y, por exemplo, de (%o46), temos

(%i50) y : (a*%e^(5*a)-4*a)/(4*%e^(5*a)-4);

(%o50) $\dfrac{11\cdot\log(15)}{280}$

(%i51) b : y/200;

(%o51) $\dfrac{11\cdot\log(15)}{5600}$

e a función *p* vén definida por
(%i52) p(t);

(%o52) $$p(t)=\frac{40\cdot\log(15)\cdot\%\mathrm{e}^{\frac{\log(15)\cdot t}{5}}}{\frac{11\cdot\log(15)\cdot\%\mathrm{e}^{\frac{\log(15)\cdot t}{5}}}{280}+\frac{9\cdot\log(15)}{56}}$$

A poboación de caimáns en 2010 é, polo tanto, igual a
(%i53) p(12);
(%i54) float(%);
(%o54) 1011.953634370192
e a poboación límite coincide con
(%i55) limit(p(t), t, inf);

(%o55) $$\frac{11200}{11}$$

(%i56) float(%);
(%o56) 1018.181818181818

Modelo de desintegración radioactiva

A solución do modelo $x'(t)=-kx(t)$ calcúlase do seguinte xeito
(%i57) 'diff(x,t)=-k*x;

(%o57) $$\frac{d}{dt}x=-k\cdot x$$

(%i58) ode2(%, x, t);
(%o58) $x=\%c\cdot\%e^{-k\cdot t}$

Resolvamos o exemplo
Exemplo Unha sustancia radioactiva tarda 8 anos en desintegrarse ao 29% da cantidade orixinal. Obter a súa semivida.
O proceso é o seguinte,
(%i59) subst(8, t, %);
(%o59) $x=\%c\cdot\%e^{-8\cdot k}$
(%i60) subst(0.29*%c, x, %);
(%o60) $0.29\cdot\%c=\%c\cdot\%e^{-8\cdot k}$
(%i61) solve(%,k);

o que produce unha única solución real $k=\log\left(\frac{2^{1/4}\cdot5^{1/4}}{29^{178}}\right)\approx0.1547$

(%i62) log(2)/ log((2^(1/4)*5^(1/4))/29^(1/8));
(%i63) float(%);
(%o63) 4.479596348041899
que se corresponde coa semivida da sustancia.

Exemplo O Polonio 210 ten unha semivida de 140 días. Se consideramos unha mostra desta sustancia de masa 200 microgramos, obter a cantidade de sustancia en función do tempo. ¿Canto tempo deberá transcorrer ata que quede o 10% da cantidade inicial?

```
(%i64) k : log(2)/140;
(%i65) 'diff(x,t)=-k*x;
```

(%o65) $$\frac{d}{dt}x=-\frac{\log(2)}{140}\cdot x$$

```
(%i66) ode2(%, x, t);
```

(%o66) $$x=\%c\cdot\%e^{-\frac{\log(2)}{140}\cdot t}$$

```
(%i67) ic1(%, t=0, p=200);
```

(%o67) $$x=200\cdot\%e^{-\frac{\log(2)}{140}\cdot t}$$

A gráfica obtense como segue

```
(%i68) wxplot2d(200*%e^(-(log(2)*t)/140), [t,0,470]);
```

e o tempo transcorrido ata que quede o 10% da cantidade inicial se calcula como

```
(%i69) solve(200*%e^(-(log(2)*t)/140)=20,t);
```

(%o69) $$\left[t=\frac{140\cdot\log(10)}{\log(2)}\right]$$

```
(%i70) float(%);
```

(%o70) $[t = 465.0699332842308]$

Exemplo Supoñamos que, nunha certa escavación arqueolóxica, se atoparon restos de madeira que conteñen o 33% de carbono 14 (en relación ao carbono 12) con respecto ao que conteñen as plantas vivas. ¿Cando se cortou a madeira?

```
(%i71) k : log(2)/5600;
(%i72) 'diff(x,t)=-k*x;
```

(%o72) $$\frac{d}{dt}x=-\frac{\log(2)}{5600}\cdot x$$

```
(%i73) ode2(%, x, t);
```

(%o73) $$x=\%c\cdot\%e^{-\frac{\log(2)}{5600}\cdot t}$$

```
(%i74) solve(%c*%e^(-log(2)*t/5600)=0.33*%c,t);
```

(%o74) $$\left[t=\frac{5600\cdot\log\left(\frac{100}{33}\right)}{\log(2)}\right]$$

```
(%i75) float(%);
```

(%o75) $[t = 8956.987594331118]$

Lei de arrefriamento de Newton

A solución do modelo $T'(t) = -k(T(t) - M)$ calcúlase do seguinte xeito

(%i76) 'diff(T,t)=-k*(T-M);

(%o76) $\frac{d}{dt}T = -k \cdot (T - M)$

(%i77) ode2(%, T, t);

(%o77) $T = \%e^{-k \cdot t}(\%e^{k \cdot t} \cdot M + \%c)$

ou sexa

(%i78) expand(%);

(%o78) $T = M + \%c \cdot \%e^{-k \cdot t}$

Resolvamos o exemplo

Exemplo Sacamos un termómetro dunha sala a unha certa temperatura, para trasladalo a outro recinto onde a temperatura ambiente é de 15ºC. Tras dous minutos, a temperatura que sinala o termómetro é de 25ºC e, despois de tres minutos, sinala 23ºC. ¿Cal é temperatura do recinto de procedencia do termómetro?

Procedamos como se indica a continuación

(%i79) T(t):=15+%c*%e^(-k*t);

(%o79) $T = 15 + \%c \cdot \%e^{-k \cdot t}$

(%i80) ec1 : T(2)=25;

(%o80) $\%c \cdot \%e^{-2 \cdot k} + 15 = 25$

(%i81) ec2 : T(3)=23;

(%o81) $\%c \cdot \%e^{-3 \cdot k} + 15 = 23$

Se, nas ecuacións (%o80) e (%o81), substituímos a expresión $\%e^{-k}$ por y, entón podemos calcular facilmente $\%c$ e y do xeito seguinte

(%i82) solve([%c*y^2+15=25,%c*y^3+15=23],[y,%c]);

(%o82) $[[y = \frac{4}{5}, \%c = \frac{125}{8}]]$

logo a expresión da función temperatura vén dada por

(%i83) T(t):=15+125/8*(4/5)^t;

(%o83) $T(t) := 15 + \frac{125}{8}\left(\frac{4}{5}\right)^t$

e a temperatura do recinto de procedencia do termómetro calcúlase como

(%i84) T(0);

(%o84) $\frac{245}{8}$

(%i85) float(%);

(%o85) 30.625

Exemplo Cando acode a tomar o seu té vespertino, a señora Smith atopa que xa lle foi servida unha cunca no lugar de costume, unha sala que se mantén a 22ºC. Dado que lle gusta tomar o té no seu punto ideal, ao chegar mide a súa temperatura, que é de 70ºC. Cinco minutos máis tarde, a temperatura do té é de 60ºC. Tendo en conta que o té é servido habitualmente á temperatura de 88ºC, ¿canto tempo levaba servido o té cando chegou a señora Smith? ¿Canto tempo esperará en total ata que a temperatura do té sexa de 50ºC?

Se o instante inicial $t=0$ é o momento no que a señora Smith atopa a cunca de té e mide a súa temperatura por primeira vez, entón

(%i86) 'diff(T,t)=-k*(T-22);

(%o86) $\frac{d}{dt}T=-k\cdot(T-22)$

(%i87) ode2(%, T, t);

(%o87) $T=\%e^{-k\cdot t}(22\cdot\%e^{k\cdot t}+\%c)$

(%i88) ic1(%, t=0, T=70);

(%o88) $T=\%e^{-k\cdot t}(22\cdot\%e^{k\cdot t}+48)$

(%i89) expand(%);

(%o89) $T=48\cdot\%e^{-k\cdot t}+22$

(%i90) T(t):=48*%e^(-k*t)+22;

(%o90) $T(t):=48\cdot\%e^{(-k)\cdot t}+22$

(%i91) solve(T(5)=60);

Seleccionemos, de entre todas as obtidas, a raíz real $k=\log\left(\frac{24^{1/5}}{19^{1/5}}\right)$, é dicir,

(%i92) k : log(24^(1/5)/19^(1/5));

(%o92) $\log\left(\frac{24^{1/5}}{19^{1/5}}\right)$

(%i93) %, logexpand=super;

(%o93) $\frac{\log(24)}{5}-\frac{\log(19)}{5}$

(%i94) k : %;

(%o94) $\frac{\log(24)}{5}-\frac{\log(19)}{5}$

(%i95) solve(T(t)=88,t);

(%o95) $[t=-\frac{5\log\left(\frac{11}{8}\right)}{\log(24)-\log(19)}]$

(%i96) float(%);

(%o96) $t=-6.815785244558662$

Por tanto, o té levaba servido 6 minutos e 49 segundos cando chegou a señora Smith. Para calcular o tempo que debe agardar en total ata que a temperatura do té sexa de 50ºC, procedemos da seguinte maneira

(%i97) solve(T(t)=50,t);

(%o97) $[t=-\dfrac{5\log\left(\frac{7}{12}\right)}{\log(24)-\log(19)}]$

(%i98) float(%);

(%o98) $t=11.53600676512464$

logo debe agardar aproximadamente 11 minutos e medio en total.

Modelo de von Bertalanffy

Resolvamos a ecuación diferencial $L'(t)=k(A-L(t))$,

(%i99) 'diff(L,t)=k*(A-L);

(%o99) $\dfrac{d}{dt}L=k\cdot(A-L)$

(%i100) ode2(%, L, t);

(%o100) $L=\%e^{-k\cdot t}(\%e^{k\cdot t}\cdot A+\%c)$

(%i101) expand(%);

(%o101) $L=A+\%c\cdot\%e^{-k\cdot t}$

É fácil comprobar que a lonxitude límite do peixe é *A*, é dicir, $\lim_{t\to\infty} L(t)=A$, dado que a constante *k* é positiva. En efecto,

(%i102) assume(k>0);

(%o102) $[k>0]$

(%i103) limit(%o101, t, inf);

(%o103) $L=A$

Exemplo Un peixe pertencente a unha especie determinada medra de acordo coa ecuación de von Bertalanffy. Un dato coñecido é que a lonxitude asintótica dos exemplares da especie é de 310 centímetros. Supoñendo que a lonxitude do peixe á idade de 1 ano é de 45 centímetros e que a lonxitude inicial é de 1 centímetro, calcular a lonxitude aos 3 anos e o tempo que debe pasar para que o peixe acade o 80% da súa lonxitude asintótica. Representar a evolución da lonxitude do peixe en función da idade.

(%i104) A : 310;

(%o104) 310

(%i105) 'diff(L,t)=k*(A-L);

(%o105) $\dfrac{d}{dt}L=k\cdot(310-L)$

(%i106) ode2(%, L, t);

(%o106) $L=\%e^{-k\cdot t}(310\cdot\%e^{k\cdot t}+\%c)$

(%i107) ic1(%, t=0, L=1);

(%o107) $L=\%e^{-k\cdot t}(310\cdot\%e^{k\cdot t}-309)$

(%i108) expand(%);

(%o108) $L=310-309\cdot\%e^{-k\cdot t}$

(%i109) L(t):= 310-309*%e^(-k*t);

(%o109) $L(t) := 310 - 309 \cdot \%e^{(-k)\cdot t}$

(%i110) solve(L(1)=45);

(%o110) $[k = \log\left(\frac{309}{265}\right)]$

(%i111) k : log(309/265);

(%o111) $\log\left(\frac{309}{265}\right)$

(%i112) float(%);

(%o112) $[k = .1536114509115232]$

(%i113) L(t):=310-309*%e^(-log(309/265)*t);

(%o113) $L(t) = 310 - 309 \cdot \%e^{\left(-\log\left(\frac{309}{265}\right)\right)t}$

(%i114) logcontract(%);

(%o114) $L(t) = 310 - 309 \cdot \%e^{\log\left(\frac{265}{309}\right)t}$

Para calcular a lonxitude aos 3 anos, simplemente tomamos

(%i115) L(3);

(%o115) $\frac{10989485}{95481}$

(%i116) float(%);

(%o116) 115.0960400498528

e para calcular o tempo que debe transcorrer para que o peixe acade o 80% da súa lonxitude asintótica, resolvemos

(%i117) solve(L(t)=0.8*310,t);

(%o117) $[t = \frac{\log\left(\frac{309}{62}\right)}{\log\left(\frac{309}{265}\right)}]$

(%i118) float(%);

(%o118) $[t = 10.45629659977493]$

A representación gráfica da lonxitude en función do tempo, obtense mediante

(%i119) wxplot2d([310-309*%e^(-.1536114509115232*t)],[t,0,30]);

BIBLIOGRAFÍA

BRADLEY, G. L. and SMITH, K. J. (1998): *Cálculo*, Prentice-Hall.

BRAUN, M. (1990): *Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamericana.

COQUILLAT, F. (1997): *Cálculo Integral: Metodología y Problemas*. Tebar Flores.

DERRICK, W. R. and GROSSMAN, S. I. (1997): *Elementary Differential Equations*. Addison-Wesley.

EDWARDS, C. H. and PENNEY, D. E. (1994): *Ecuaciones Diferenciales Elementales y Problemas con Condiciones en la Frontera.* Prentice-Hall Hispanoamericana.

KENT NAGLE, R. and SAFF, E. B. (1992): *Fundamentos de Ecuaciones Diferenciales.* Addison-Wesley Iberoamericana.

LARSON, R. E., HOSTETLER, R. P. and EDWARDS, B. H. (1999): *Cálculo y Geometría Analítica.* McGraw-Hill.

NEUHAUSER, C. (2004): *Matemáticas para Ciencias*. Madrid: Pearson Prentice Hall.

SIMMONS, G. F. (1999): *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas.* McGraw-Hill.

STEIN, S. K. and BARCELLOS, A. (1995): *Cálculo y Geometría Analítica.* McGraw-Hill.

THOMAS, G. B. and FINNEY, R. L. (1987): *Cálculo con Geometría Analítica.* Addison-Wesley Iberoamericana.

ZILL, D. (1997): *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado.* International Thomson Editores.

Citas de recursos en internet

Maxima, un sistema de álgebra computacional: http://maxima.sourceforge.net/es/ [citado 1 set 2010]

wxMaxima: http://wxmaxima.sourceforge.net/wiki/index.php/Main_Page [citado 1 set 2010]

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo de profesores e alumnos de todas as materias e titulacións da universidade

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

SERVIZO DE NORMALIZACIÓN LINGÜÍSTICA

ISBN 978-84-9887-566-9