BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

Apostol, T. M., (1990) Análisis Matemático, Reverté.
Bartle, R. G. e Sherbert, D. R., (1999) Introducción al Análisis Matemático de una Variable (2ª Ed.), Limusa Wiley.
Linés, E., (1991) Principios de Análisis Matemático, Reverté.
Larson. R., Hostetler, R.P., Edwards, B.H., (2006) Cálculo (8ª Ed.), McGraw-Hill.

Recoméndase consultar a páxina web:

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

unidade **didáctica** 3

SUCESIÓNS E SERIES DE FUNCIÓNS REAIS

M. Victoria Otero Espinar
Departamento de Análise Matemática
Facultade de Matemática

unidades**didácticas**
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Deseño
Unidixital

Edita
Vicerreitoría de Cultura
da Universidade de Santiago de Compostela
Servizo de Publicacións
da Universidade de Santiago de Compostela

Imprime
Unidixital
Servizo de Edición Dixital da
Universidade de Santiago de Compostela

Dep. Legal: C 869-2008
ISBN 978-84-9750-998-5

Como obter a función suma dalgunhas series de potencias.

1.- As series xeométricas $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ converxen puntual e absolutamente en $(-1,1)$ a

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

Destes desenvolvementos dedúcese por integración, tendo en conta que a converxencia é uniforme en compactos contidos en $(-1,1)$, que

$$\log(1-x) = -\int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n dt = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Restando, para $x \in (-1,1)$, podemos escribir

$$\log(\frac{1+x}{1-x}) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

2.- A serie xeométrica $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ é converxente puntual e absolutamente en $(-1,1)$ á función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (¿que acontece nos extremos do intervalo?). Por integración obtense que

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Con isto simplificamos moito a determinación da serie de Taylor da función $\arctan(x)$ no punto 0 (pódese ver para comparar como se calcula a serie de forma directa).

Podemos utilizar a igualdade anterior, tendo en conta que $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, para aproximar o número π, non obstante esta serie non proporciona unha maneira práctica de aproximar π, pois a converxencia é tan lenta que necesitaríanse demasiados termos para obter unha aproximación razoable. Vexamos como temos unha aproximación moi boa de π usando dúas series de potencias (ver pag. 673 de Larson et al). Pódese demostrar que se $xy \neq 1$

$$\arctan(x) - \arctan(y) = \arctan(\frac{x+y}{1-xy})$$

cando o primeiro termo da igualdade está entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, polo que

$$4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239}) = \frac{\pi}{4}$$

Con 5 termos de cada unha das series obtemos o valor exacto de π cun erro menor que 10^{-6}.

```
order=4,output=polyinomial);
```

Para obter polinomios de distintos graos, por exemplo dende o grao 4 ao 10, podemos poñer

```
>TaylorApproximation(cos(x),0,view[-10..10,-10..10],
 order=4..10,output= polyinomial);
```

Se o que pretendemos é ver gráficamente a aproximación da función polos seus polinomios de Taylor

```
>TaylorApproximation(cos(x),0,view[-10..10, -10..10],
 order=4..10, output=plot);
```

Para ver unha animación do anterior

```
>TaylorApproximation(cos(x),0,view[-10..10, -15..15],
 order=4..10, output=animation);
```

Podedes facer desenvolvementos de Taylor doutras funcións, como a función seno, a exponencial e o arcotanxente. Buscade intervalos adecuados. Explicade que ocorre coas aproximacións do arcotanxente.

Exemplo 4

Cálculo do raio de converxencia dalgunha serie de potencias

1.- Consideramos a serie de potencias con centro a orixe $\sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n$. O raio de converxencia da serie pódese calcular facendo

```
>a:=n->n^2:
>limit(abs(a(n+1)/a(n)),n=infinity):
>Limit(abs(a(n+1)/a(n)),n=infinity)=limit(abs(a(n+1)/a(n
),n=infinity);
```

A saída é o raio de converxencia da serie, é dicir $R = 1$. Por tanto o intervalo de converxencia da serie é $(-1, 1)$. Como as series $\sum_{n=0}^{\infty} n^2$ e $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n^2$ son diverxentes, o campo de converxencia coincide co intervalo de converxencia.

2.- Cálculo do raio de converxencia da serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n^2}{n!}x^n$

```
>a:=n->(1+n^2)/n!:
>limit(abs(a(n+1)/a(n)),n=infinity):
>Limit(abs(a(n+1)/a(n)),n=infinity)=limit(abs(a(n+1)/
a(n)),n=infinity);
```

o raio de converxencia da serie é 0 e o seu intervalo de converxencia é $\mathbb{R}$.

MATERIA: CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL
TITULACIÓN: LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
PROGRAMA XERAL DO CURSO
Localización da presente unidade didáctica

Exemplo 3

Nesta práctica obtemos a serie de Taylor dunha función, por exemplo da función coseno. Ademais, realizamos unha animación que mostra como os polinomios de Taylor se aproximan á gráfica da función.

```
> with(Student):
```

Definimos a función

```
> f1:=cos(x);
```

Para calcular a serie de Taylor da función no punto x=0 temos o comando

```
> t_1:=taylor(f1,x=0,8);
```

que dá a expresión da serie de $f(x) = \cos(x)$ en $x = 0$ con oito termos, os sete primeiros corresponden ao polinomio de Taylor de orde 7 de f no punto $x = 0$ e o último, $O(x^8)$, significa que os termos que faltan da serie, é dicir os termos do error, son todos de grao maior ou igual a 8.

O resultado obtido convertémolo en polinomio truncando a serie mediante o comando

```
>pol_1:=convert(t_1,polynom);
```

e transformamos a expresión en unha función

```
>p1:=unapply(pol_1,x);
```

Podemos agora debuxar a gráfica do polinomio no intervalo $[-4, 4]$.

```
>plot2:=plot(p1(x),x=-4..4, style=point,color= red):
```

e a gráfica do polinomio xunto coa gráfica da función para ter unha idea da aproximación

```
>plot1:=plot(f1,x=-4..4,style=line,color=black):
> with(plots):
> display({plot1,plot2});
```

Facemos outro desenvolvemento de Taylor da función cambiando o número de termos que queiramos coñecer, por exemplo n=12

```
>t_2:=taylor(f1,x=0,12);
>pol_2:=convert(t_2,polynom);
>p2:=unapply(pol_2,x);
>plot3:=plot(p2(x),x=-4..4,style=point,color=green):
```

e as tres gráficas xuntas.

```
> display({plot1,plot2, plot3});
```

Outra forma máis sinxela de obter os polinomios de Taylor de distinto grao dunha función é mediante o comando TaylorApproximation que está dispoñible no paquete Student[Calculus1]

```
>with(Student[Calculus1]):
```

Se o que queremos é calcular o polinomio de Taylor da función coseno de grao 4 (restrinximos a gráfica aos valores de x entre -10 e 10 e os de y entre -10 e 10)

```
>TaylorApproximation(cos(x),0,view[-10..10,-10..10],
```

```
> C:=[n*(1-x)*x^n$n=0..8]:
> plot(C,x=0..1);
```

Temos as gráficas dos oito primeiros termos da sucesión. Xa se pode adiviñar que a converxencia da sucesión é puntual a función límite $f=0$, pero non vai ser uniforme no intervalo $[0,1]$. Para verificalo, calculamos os puntos críticos das funcións f_n en $(0,1)$. Primeiro derivamos a función

```
> de:=diff(fn(x),x);
```

transformamos a expresión en función

```
> der:=unapply(%,x);
```

e obtemos os puntos nos que se anula a derivada

```
> solve({der(x)},{x});
```

a saída da última sentenza é $\frac{n}{1+n}$. A forma da derivada permite deducir facilmente que f_n é crecente en $(0,\frac{n}{1+n}]$ e decrecente en $[\frac{n}{1+n},1]$, polo que

$$\max\{f_n(x):\ x\in[0,1]\}=f_n(\tfrac{n}{1+n})=\left(\tfrac{n}{1+n}\right)^{n+1}.$$

Tomando límites

```
> c:=n->(n/(n+1))^(n+1):
> lim(c(n),n=infinity);
```

obtemos e^{-1}. Queda probado que a sucesión non converxe uniformemente en $[0,1]$.

Outra forma máis directa de analizar os extremos relativos das funcións da sucesión e usando o paquete

```
>with(Student[Calculus1]):
>assume(n,nonnegint):
>CriticalPoints(fn(x),0..1);
>ExtremePoints(fn(x),0..1);
```

Fagamos agora unha animación coas gráficas das 100 primeiras funcións (Intentade variar algúns dos parámetros que aparecen a ver que ocorre).

```
>animate(plot,[n*(1-x)*x^n,x=0..1,thickness=2],
n=1..100);
```

Se en lugar das gráficas en $[0,1]$ considéranse no intervalo $[0,1/2]$ e cun número menor de gráficas, por exemplo 10, a animación

```
>animate(plot,[n*(1-x)*x^n,x=0..1/2,thickness=2],
n=1..10);
```

mostra claramente que a converxencia é uniforme en $[0,1/2]$, ¿sabedes explicalo? Podedes experimentar facendo a gráfica de $f+e$ e $f-e$ para distintos valores de e, e ver cal é o índice N a partir do cal as gráficas das funcións f_n están entre elas, como se fixo na práctica anterior.

ÍNDICE

```
>display([plot1,plot2]);
```

Observando as gráficas dámonos conta que canto máis próximo está x a 1 máis lenta é a converxencia, é dicir, necesitamos un N maior para conseguir a mesma aproximación a 0. Para facernos a idea da rapidez con que a sucesión numérica $\{f_n(x)\}$ se aproxima a 0 para $x \neq 1$, podemos facer o seguinte:

Queremos calcular o índice N a partir do que os termos da sucesión numérica $\{f_n(x)\}$, para x fixado, aproxímanse a 0 cun erro menor que e=10^{-4} (podedes experimentar ao variar e). É dicir, o natural N tal que $|f_n(x) - f(x)| = x^n < 10^{-4}$, para todo $n > N$, o que é o mesmo, tal que $n\ln(x) < \ln(10^{-4})$, ou $n > \frac{\ln(10^{-4})}{\ln(x)}$. Se $N = E[\frac{\ln(10^{-4})}{\ln(x)}] + 1$, onde $E[x]$ é a función parte enteira, é dicir o maior enteiro menor que x, xa serviría.

```
>e:=10^(-4);
```

dámoslle un valor a x=0.9 (denotámolo por A, e podedes ir variando para ver os cambios)

```
>A:=0.9;
>N:=floor(ln(e)/ln(A))+1;
```

Vemos que canto máis próximo está $A = x$ a 1 este N farase máis grande, polo que hai que tomar valores de n maiores para lograr a mesma aproximación, e así a converxencia nestes puntos será máis lenta.

Por último, pintamos as gráficas de $f + e$ e $f - e$ para distintos valores de e,

```
>plot3:=plot(f(x)+e,x=0..1.,discont=true,style=point):
>plot4:=plot(f(x)-e,x=0..1.,discont=true,style=point):
>display([plot1,plot2,plot3,plot4]);
```

Vemos que ningunha gráfica das funcións da sucesión están entre as gráficas de $f + e$ e $f - e$, calquera que sexa e, o que indica que a converxencia non é uniforme.

Para comprobar o rápido que poderiamos visualizar a converxencia puntual e non uniforme da sucesión facemos a seguinte animación

```
>with(plots,animate):
>animate( plot, [x^n, x=0..1, thickness=2], n=1..50 );
```

Podedes experimentar variando o intervalo, é dicir, os valores de x na sentencia anterior ¿que ocorre?

Se tomades $x \in [0, 1/2]$, calculade o índice N a partir do que as funcións da sucesión están entre $f + e$ e $f - e$ para distintos valores de e, ¿é a converxencia uniforme en $[0, 1/2]$?

Exemplo 2

Estudamos a converxencia puntual e uniforme da sucesión de funcións definidas no intervalo $[0, 1]$ por $f_n(x) = n(1 - x)x^n$.

Primeiro abrimos os paquetes para facer animacións

```
> with(plots,animate):
```

Definimos a función

```
> fn:=x->n*(1-x)*x^n;
```

Algunhas prácticas de ordenador

O obxectivo destas prácticas é o de ilustrar mediante gráficas e animacións gráficas os conceptos de converxencia puntual e uniforme dunha sucesión de funcións. Ademais, calcularemos a serie e os polinomios de Taylor dunha función, valorando as aproximacións obtidas.

Utilizaremos as posibilidades que nos ofrece Maple para representar gráficas de moitas funcións xuntas, avaliar funcións, calcular derivadas,…

Exemplo 1

Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, as funcións $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dadas por $f_n(x) = x^n$.

Representaremos as gráficas das oito primeiras funcións. Para isto creamos unha lista e utilizamos o comando `plot` para debuxar as gráficas das funcións da lista no intervalo $[0,1]$

```
>C:=[x^n$n=0..8]:
>plot(C,x=0..1);
>plot1:=plot(C,x=0..1):
```

A última sentencia servirá para representar posteriormente esta gráfica xunto a outras.

Observando as gráficas podemos intuír que para cada $x \in [0,1)$, a sucesión numérica $\{x^n\}$ converxe a 0, e para $x = 1$, converxe a 1. Se queremos calcular o límite da sucesión numérica para algúns valores de x, podemos dar valores (neste exemplo $x = 0.9$) e ir variando,

```
>b:=0.9
>assume(n,integer):
>a:=n->b^n:
>limit(a(n), n=infinity);
```

o límite está calculado e é igual a 0. Podedes dar a b calquera outro valor entre 0 e 1, e comprobar o que pasa. Neste caso, resulta trivial calcular $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 0$ para todo $x \in [0,1)$, e $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = f(1) = 1$.

A sucesión converxe a función límite

```
>f:=piecewise(x<1,0,x=1,1):
```

que ten por gráfica

```
>plot(f(x),x=0..1.,discont=true,thickness=2);
>plot2:=plot(f(x),x=0..1.,discont=true,thickness=2,color
=black):
```

Representamos xuntas as gráficas dos primeiros termos da sucesión e da función f sucesión. Para iso descargamos o paquete `plots`

```
>with(plots):
```


Esta unidade didáctica forma parte do curso de Cálculo Diferencial e Integral, e está destinada a estudantes que inician o estudo da análise matemática. A súa finalidade é presentar de maneira gradual os conceptos fundamentais e as técnicas básicas das sucesións e series funcionais.

As sucesións e series de funcións, que xa foron motivadas en temas anteriores do curso, posúen unha importancia e interese intrínsecos. Por un lado, con elas pódense definir novas funcións, polo outro, permiten aproximar funcións por outras máis sinxelas, de xeito que das propiedades destas se poidan inferir as da función orixinal, idea esta última que subxace en moitos dos métodos da análise.

A representación de funcións mediante series de potencias xogou un importante papel no desenvolvemento da análise. Moito do traballo de Newton con derivación e integración foi realizado no contexto das series de potencias. Gregory (un dos primeiros matemáticos que traballaron con elas), Euler, Lagrange, Leibniz e Joham e Jacob Bernoulli usaron amplamente as series de potencias no cálculo. Os traballos de Fourier neste campo obrigaron a cuestionar o concepto de función existente na época, e motivaron a outros matemáticos, como a Cauchy e Dirichlet.

Dende o punto de vista histórico o uso das series de potencias precede e motiva o estudo de sucesións e series funcionais. Disposición que podería ser mellor dende o punto de vista didáctico. Non obstante, para facilitar a presentación formal da unidade didáctica escollemos outra orde, que coincide coa formulación usual en manuais sobre o tema.

Pretendemos desenvolver os temas coa motivación real que propiciou a súa orixe de modo que os estudantes sexan participantes activos da evolución das ideas e non queden como meros observadores pasivos dos resultados. Os conceptos e resultados da unidade con frecuencia irán precedidos dunha discusión xeométrica ou intuitiva para dar unha idea máis profunda dos resultados. Aínda que nos contidos da unidade non se inclúen as demostracións dos teoremas, estas serán feitas nas aulas; as demostracións dos resultados máis importantes considéranse parte esencial no desenvolvemento das ideas matemáticas.

OS OBXECTIVOS

- Definir a converxencia puntual e uniforme das sucesións e series de funcións. Distinguir ambos os conceptos.
- Relacionar as propiedades da función límite uniforme dunha sucesión e da función suma dunha serie de funcións uniformemente converxente coas propiedades dos termos da sucesión e da serie correspondente.
- Dominar algúns métodos para a análise da converxencia puntual e uniforme de series funcionais.
- Definir unha serie de potencias e determinar o seu raio e o seu intervalo de converxencia.
- Analizar o campo de converxencia dunha serie de potencias.
- Construír a serie de Taylor dunha función.
- Diferenciar entre a función coa que se constrúe a serie de Taylor e a función que representa a serie.
- Demostrar con precisión e rigor algúns dos resultados máis importantes da unidade e relacionar conceptos, propiedades e técnicas que se estudan no desenvolvemento do programa.
- Dar a coñecer algúns dos problemas que influíron no desenvolvemento histórico das sucesións e series de funcións.
- Conxecturar, formular e resolver algúns problemas sinxelos que se presentan noutros campos científicos e técnicos (bioloxía, economía, enxeñaría, física, etc.).
- Conseguir unha boa intuición gráfica e "visualizar" os conceptos tratados por medio de exemplos.
- Habituarse ao manexo de distintas referencias bibliográficas.
- Comprobar as vantaxes do uso de software matemático.
- Fomentar o espírito reflexivo, rigoroso, intuitivo, crítico...
- Adquirir a capacidade de aprendizaxe autónoma e desenvolver a capacidade do traballo en grupo.

OS PRINCIPIOS METODOLÓXICOS

- Nas clases teóricas presentaremos e desenvolveremos os contidos esenciais da unidade, poñendo máis énfase en dotar ós estudantes de ferramentas para a construción da súa propia aprendizaxe que na simple acumulación de contidos.
- As clases prácticas dedicarémolas á resolución de problemas (tanto teóricos como do ámbito das aplicacións) que desenvolvan os diferentes aspectos dos contidos que deban aprenderse e as habilidades que deban adquirirse. Procurarase unha activa participación do alumnado.
- Como as cuestións teóricas e a resolución de problemas e exercicios están relacionadas, e unhas serven de complemento das outras, procuraremos mesturalas, agás aquelas que teñen un compoñente simplemente práctico.
- Nas clases de seminario, ao estar programadas en grupos reducidos, poderán ter cabida diversos enfoques que axuden a asentar os conceptos esenciais (construción de exemplos, resolución de problemas sinxelos, exposicións por parte dos estudantes de traballos previamente propostos, discusión de aspectos fundamentais da materia, lecturas matemáticas adecuadas, etc.).

Teorema.- Unha condición necesaria para que f sexa analítica en x_0 é que exista $r > 0$ tal que f é de clase infinito en $(x_0 - r, x_0 + r)$.

As series de potencias poden usarse para obter táboas de valores de funcións transcendentes. Tamén son útiles para estimar valores de integrais definidas para as que non se poden encontrar as primitivas. (Ver anexo)

Actividades propostas

- Calcular raios e intervalos de converxencia de series de potencias.
- Práctica de ordenador para o cálculo do raio de converxencia dalgunha serie de potencias.
- Integrar e derivar funcións que veñan definidas a partir de series de potencias.
- Construír series de potencias aplicando operacións a outras series.
- Obter series xeométricas de potencias que representen certas funcións.
- Debate sobre as vantaxes de aproximar unha función polos seus polinomios de Taylor.
- Determinar a serie de Taylor para algunhas funcións.
- Discutir cando unha función é analítica.
- Buscar algún problema na historia das matemáticas que teña relación coas series de potencias.

Facilitarase o material preciso para o desenvolvemento das actividades que irán sendo propostos na aula segundo o ritmo de traballo do grupo.

AVALIACIÓN DA UNIDADE

A realización de todas as actividades programadas da unidade terán influencia na avaliación da unidade.

- Os estudantes deberán entregar por escrito algunhas das actividades programadas.
- Tamén deberán facer unha exposición oral dalgún dos traballos realizados.
- Terase en conta a participación activas nas clases, seminarios e titorías.
- Terase en conta a continuidade no traballo, a actitude e o aproveitamento que demostre.
- En calquera caso, realizarase un exame final escrito que permita ao estudante mostrar o grao de coñecemento adquirido, no que se refire á comprensión dos conceptos e técnicas propias da materia, a madurez no seu manexo e a capacidade de relacionalos diversos aspectos involucrados nos distintos temas de estudo.

Unha das cuestións á que se facía referencia anteriormente era a de cando unha función era representada por unha serie de potencias. Da propiedade de derivación resulta que é condición necesaria para a representatividade dunha función en serie de potencias nun dominio que sexa infinitamente derivable no mesmo. Non obstante esta condición non é suficiente, se existen as derivadas de calquera orde dunha función pódese construír formalmente unha serie de potencias, a serie de Taylor da función, pero esta ¡non ten por que representar a función! é dicir, pode ocorrer que

$$f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

calquera que sexa $x \neq x_0$. Isto ocorre coa serie de Taylor da función de Cauchy

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } \; x \neq 0 \\ 0 & \text{se } \; x = 0 \end{cases}$$

que é 0, e non representa a función no intervalo de converxencia.

Para comprender que a serie de Taylor dunha función poida converxer a outra función distinta, débese observar que os coeficientes da serie veñen dados polas derivadas da función nun só punto e que poden existir moitas funcións distintas nas que coincidan as derivadas de todas as ordes nun punto. Por exemplo, toda función que teña derivadas de toda orde nunha veciñanza do punto 0 e tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ verifique $f^{(n)}(0) = 0$, ten a mesma serie de Taylor en 0 que a función do exemplo anterior.

¿Cando se pode dicir que a serie de Taylor dunha función f con derivadas de toda orde nunha veciñanza de x_0 representa a función f nun intervalo? Pódese conseguir unha condición como consecuencia da fórmula de Taylor para a función, isto é

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \mathcal{R}_n(x)$$

sendo $\mathcal{R}_n(x)$ o resto de f de orde n en torno a x_0.

Teorema.- Unha condición necesaria e suficiente para que a sucesión de sumas parciais da serie de Taylor de f converxa a f nun intervalo $I = (x_0 - r, x_0 + r)$ no que ten derivadas de todas as ordes, é que o resto $\mathcal{R}_n(x)$ converxa a cero cando $n \to \infty$, para cada $x \in I$.

As funcións que verifican esta propiedade son as chamadas funcións analíticas. Máis concretamente:

Se f é unha función real definida nun conxunto aberto $E \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in E$, entón f é analítica en x_0 se existen $r > 0$ e unha serie de potencias con centro x_0 tal que para cada $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ verifícase

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

- Estableceremos grupos de traballo, máis ou menos numerosos en función do número de estudantes do grupo, os que se lles asignarán traballos que entregarán por escrito e exporán na aula. Esta asignación irá acompañada de diversas propostas de traballos individuais (para facer na aula ou nas horas non presenciais). Todos eles serán corrixidos e comentados con cada grupo ou, no seu caso, con cada alumno.
- As titorías activas estarán especialmente deseñadas para estimular a actividade fóra da clase e orientar o estudante no seu progreso, a fin de que quen estea interesado poida examinar en cada momento o seu proceso de aprendizaxe.
- Programaranse, se fose necesario, algunhas actividades de reforzo sobre os contidos básicos da tema. Farase coincidir o horario de estas actividades con algunha das titoría activas.
- Utilizaranse programas informáticos que resolvan, simplifique ou axuden a asentar certos aspectos relativos á materia (cálculos formais, interpretacións xeométricas…). Concretamente usaremos o programa Maple, polo seu sinxelo manexo.

OS CONTIDOS BÁSICOS

1. SUCESIÓNS DE FUNCIÓNS

As sucesións de funcións, é dicir sucesións nas que os termos son funcións reais con dominio o mesmo conxunto de números reais, xorden de forma natural na análise real. Son particularmente útiles, por un lado para construír novas funcións como límite de funcións coñecidas, polo outro para substituír nalgúns problemas unha función dada por funcións que a aproximan e que poden ter un comportamento mellor controlado respecto á situación que interesa. A razón de ser da definición formal de sucesión de funcións é o problema da converxencia da sucesión a outra función.

En calquera caso, no estudo de sucesións converxentes ten especial interese cales son as propiedades dos termos da sucesión que se conservan na función límite, e en que condicións ten lugar tal transferencia. É dicir, supoñendo que todas as funcións da sucesión teñen unha propiedade (continuidade, derivabilidade, integrabilidade e outras), trátase de precisar condicións que ten que cumprir a converxencia para que a propiedade considerada se manteña na función límite. A condición máis natural e simple é que a converxencia sexa uniforme, o que equivale a que as gráficas das funcións da sucesión se aproximen globalmente á gráfica da función límite.

Unha gran parte do tema estará ilustrado por numerosos exemplos de sucesións que mostren as distintas posibilidades que poden aparecer na súa converxencia.

1.1. Converxencias puntual e uniforme dunha sucesión funcional

Sexa Ω o conxunto de todas as funcións definidas nun conxunto $E \subset \mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{R}$. Unha sucesión de funcións definidas sobre E é unha aplicación

$$f : n \in \mathbb{N} \to f(n) = f_n \in \Omega.$$

A función f_n é o termo n-ésimo da sucesión de funcións que se representa por $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ou, simplificando se non leva a confusión, por $\{f_n\}$.

Converxencia puntual.- A sucesión de funcións $\{f_n\}$ converxe puntualmente en E se para todo $x \in E$, a sucesión de números reais $\{f_n(x)\}$ é converxente. A función límite puntual da sucesión $\{f_n\}$ en E é a función $f : E \to \mathbb{R}$ definida para cada $x \in E$ por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Aínda que a sucesión de funcións non sexa puntualmente converxente en todo o conxunto E, pódese definir o campo de converxencia da sucesión como o conxunto C de puntos $x \in E$ nos que $\{f_n(x)\}$ é converxente. Neste caso o conxunto no que está definida a función límite é C.

Nos seguintes exemplos móstranse algunhas sucesións de funcións e as súas funcións límite.

Exemplo.- Sexa a sucesión de funcións $\{f_n\}$, onde $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a función dada por $f_n(x) = \frac{x}{n}$.

É claro que fixado $x \in \mathbb{R}$ arbitrario,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$$

(recordar que para o cálculo do límite x é fixo e o que varía é n). A sucesión $\{f_n\}$ converxe puntualmente en $\mathbb{R}$ á función límite puntual $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 0$.

Exemplo.- Para determinar a converxencia puntual da sucesión de funcións $\{f_n\}$ en $[0, 1]$, definida por

$$f_n(x) = n^2(1 - x)x^n$$

analízanse as sucesión numéricas $\{f_n(x)\}$ con $x \in [0, 1]$. Se $x = 0$ ou $x = 1$, as sucesións $\{f_n(0)\} = \{f_n(1)\} = \{0\}$ converxen a 0. Ademais, fixado $x \in (0, 1)$, verifícase $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, pois é unha sucesións de números reais da forma $\{n^2\, r^n(1 - r)\}$ con $|r| < 1$. Por tanto a sucesión de funcións converxe puntualmente en $[0, 1]$ á función límite $f \equiv 0$.

.

Teorema.- Unha serie de potencias pódese derivar termo a termo no seu intervalo de converxencia. De feito, se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, entón f é derivable no intervalo de converxencia, e $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}$. Ademais, ambas as dúas series de potencias teñen o mesmo raio de converxencia.

Non se pode asegurar o que ocorre nos extremos do intervalo de converxencia da serie. Por exemplo, a serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ converxe puntualmente no intervalo $[-1, 1]$, porén, a serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ que se obtén derivando termo a termo a serie anterior só converxe puntualmente en $[-1, 1)$.

Mediante a aplicación repetida do resultado anterior, próbase que se k é un número natural arbitrario a serie de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, pódese derivar termo a termo k veces no intervalo de converxencia, e a serie resultante converxe absolutamente en $(x_0 - R, x_0 + R)$ e uniformemente en todo compacto contido en $(x_0 - R, x_0 + R)$. É dicir

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n(x - x_0)^{n-k}$$

Substituíndo $x = x_0$ na expresión anterior, obtense a importante fórmula

$$f^{(k)}(x_0) = k!\, a_k$$

o que implica que a función f vén dada en $(x_0 - R, x_0 + R)$ por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

A igualdade anterior demostra que se unha función vén definida por unha serie de potencias centrada en x_0, a sucesión de sumas parciais da serie é a formada polos polinomios de Taylor da función con centro x_0. É dicir, se unha función está representada por unha serie de potencias centrada nun punto, os polinomios de Taylor da función ao redor do punto converxen á función puntualmente no intervalo de converxencia da serie e uniformemente en compactos contidos no intervalo.

Teorema de unicidade.- Dúas series de potencias que representan á mesma función nun intervalo común teñen igual os seus coeficientes.

Serie de Taylor.- Son un tipo particular de series de potencias. Se f é unha función real nun intervalo I de $\mathbb{R}$ que ten derivadas de todas as ordes nunha veciñanza do punto $x_0 \in I$, a serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

é a serie de Taylor de f en x_0. Débese observar que a sucesión de sumas parciais da serie é a sucesión formada polos polinomios de Taylor da función en x_0. Ademais, tendo en conta o explicado anteriormente, toda serie de potencias con raio de converxencia non nulo é unha serie de Taylor.

O criterios maiorante de Weierstrass establecido para a converxencia uniforme das series aplícase directamente ás de potencias.

Teorema.- Unha serie de potencias converxe uniformemente en todo compacto contido no intervalo de converxencia.

Non obstante, a converxencia da serie de potencias non ten que ser uniforme en todo o intervalo de converxencia. Por exemplo, a serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converxe uniformemente en cada compacto contido en $(-1,1)$ pero non converxe uniformemente en $(-1,1)$, xa que, ao ser $\sup_{x\in(-1,1)} |x^n| = 1$, a sucesión de funcións dada por $f_n(x) = x^n$ non converxe uniformemente en $(-1,1)$ á función $f \equiv 0$.

O seguinte resultado asegura en certos casos a converxencia uniforme en todo o intervalo de converxencia.

Teorema.- Sexa R o raio de converxencia da serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Se a serie converxe absolutamente en $x_0 - R$ ou en $x_0 + R$ entón converxe uniformemente en $[x_0 - R, x_0 + R]$.

Cada serie de potencias define unha función suma que vén dada para cada x do intervalo de converxencia $(x_0 - R, x_0 + R)$ por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

Esta serie de potencias que representa á función f no intervalo de converxencia denomínase desenvolvemento en serie de f con centro x_0.

Interesan dous problemas básicos sobre as series de potencias:

- Dada a serie, cales son as propiedades da función suma.
- Dada a función, ver se pode ser representada por unha serie.

As propiedades das funcións representadas por series de potencias concrétanse no seguinte resultado.

Teorema.- O límite dunha serie de potencias é continuo no intervalo de converxencia. Unha serie de potencias pódese integrar termo a termo nun intervalo compacto contido no intervalo de converxencia.

Ademais, se $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ verifícase

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{x_0}^{x} (t-x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1},$$

o que resulta de utilidade para determinar a función suma de certas series de potencias (Ver anexo).

A diferenza da situación xeral, para poder derivar termo a termo unha serie de potencias non é necesario supoñer a converxencia uniforme da serie derivada. En consecuencia este resultado é máis sólido ca o análogo para series funcionais.

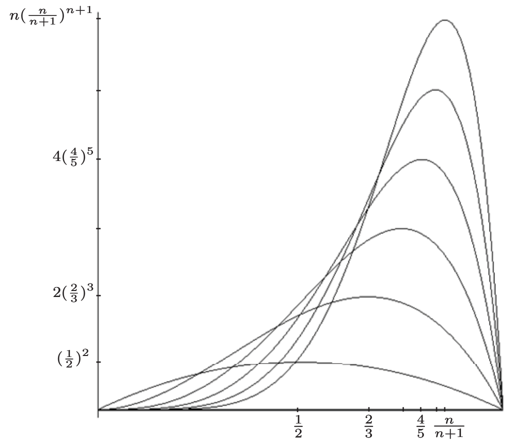

Figura 1.- Primeiros termos da sucesión $\{f_n\}$

Observando as gráficas dos primeiros termos da sucesión pódese ver que o comportamento da sucesión $\{f_n(x)\}$ non é o mesmo ao considerar x próximo a 0 ou x próximo a 1; aínda que $\{f_n(x)\}$ converxe a 0 en todos os casos, a converxencia é máis rápida canto máis preto está x a 0. Ademais, a medida que n aumenta a gráfica da función f_n sepárase cada vez máis da gráfica da función límite $f \equiv 0$ (polo extremo esquerdo do intervalo as gráficas se aproximan á gráfica de f pero o seu comportamento é moi diferente no extremo dereito) (Ver anexo, para exemplos similares)

Exemplo.- Sexa $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$

Para o estudo das sucesións numéricas $\{f_n(x)\}$ terase en conta os distintos valores de x:

1. se $|x| < 1$, verifícase $\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} = 0$,
2. se $|x| > 1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} = 1$,
3. por último, se $|x| = 1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} = \frac{1}{2}$.

Por tanto, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ a función límite puntual está definida en todo $\mathbb{R}$ e vén dada, para cada $x \in \mathbb{R}$, por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se} \quad |x| = 1 \\ 1 & \text{se} \quad |x| > 1 \end{cases}$$

Na figura 2 represéntanse algúns termos da sucesión $\{f_n\}$, así como a función f.

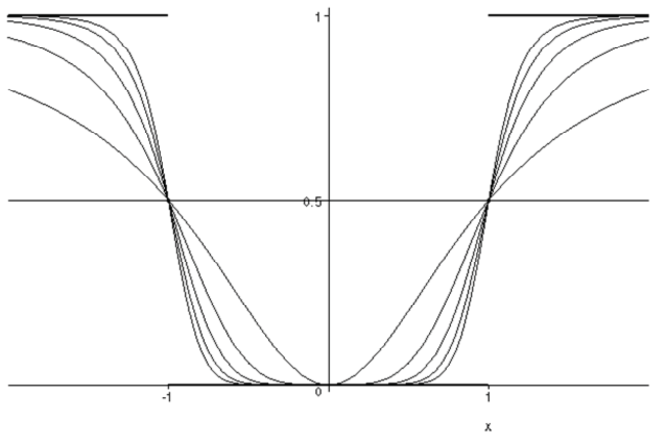

Figura 2.- Algúns termos da sucesión $\{f_n\}$ e a función límite puntual f.

Pódese observar que todas as funcións da sucesión son continuas pero a función límite é descontinua.

Algúns dos exemplos anteriores poñen de manifesto que a converxencia puntual dunha sucesión de funcións non sempre proporciona unha boa "aproximación" da súa función límite, e, ademais, non transmite as propiedades dos termos da sucesión á función límite. Cómpre, daquela, definir un novo tipo de converxencia que mellore neste senso a converxencia puntual.

Converxencia uniforme.- A sucesión de funcións $\{f_n\}$ converxe uniformemente en E á función $f \in \Omega$ se para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$ verifícase $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, para todo $x \in E$. A función f é o límite uniforme da sucesión.

Unha forma máis útil na práctica de expresar a converxencia uniforme da sucesión $\{f_n\}$ a f en E é que se verifique a seguinte condición

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

A interpretación xeométrica da converxencia uniforme pódese ver na figura 3, a sucesión converxe uniformemente á función límite f se a partir dun índice todas as

A converxencia puntual dunha serie de potencias vén determinada no seguinte resultado.

Teorema de Cauchy-Hadamard.- Se R é o raio de converxencia dunha serie de potencias centrada en x_0, entón a serie é absolutamente converxente se $|x - x_0| < R$ e diverxente se $|x - x_0| > R$.

Se unha serie de potencias ten raio de converxencia un número real R, o resultado anterior non asegura a converxencia da serie nos extremos do intervalo de converxencia, nestes puntos ten que analizarse separadamente a converxencia ou diverxencia da serie. O resultado é que o campo de converxencia puntual dunha serie de potencias pode ser un dos seguintes conxuntos:

$$\mathbb{R},\ \{x_0\},\ (x_0 - R, x_0 - R),\ [x_0 - R, x_0 - R),\ (x_0 - R, x_0 - R],\ [x_0 - R, x_0 - R].$$

Algunha destas situacións pódense ver nos seguintes exemplos que mostran ademais que o campo de converxencia e o intervalo de converxencia dunha serie de potencias non teñen por que coincidir.

Exemplos.- Considéranse as series de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ \sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n,\ \sum_{n=0}^{\infty} x^n,\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Son series de potencias todas elas centradas no punto 0 e nas que os raios de converxencia pódense calcular a partir do límite $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

- A serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converxe puntual e absolutamente en $\mathbb{R}$ pois

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$$

- Como, $R = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, a serie $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ converxe no conxunto $\{0\}$.
- O intervalo de converxencia das series $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ é $(-1, 1)$ xa que nos tres casos $R = 1$.
- A serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converxe puntual e absolutamente en $(-1, 1)$, pois as serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n$ son diverxentes;
- A serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ converxe puntualmente en $[-1, 1)$ e absolutamente en $(-1, 1)$, pois a serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é converxente e $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ é diverxente;
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ converxe puntual e absolutamente en $[-1, 1]$, pois $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Actividades propostas

- Determinar o campo de converxencia puntual e absoluta de series de funcións aplicando os criterios de converxencia de series numéricas.
- Aplicar o criterio maiorante de Weierstrass para estudar a converxencia uniforme de series funcionais.
- Dar exemplos de series de funcións que non converxan puntualmente.
- Dar exemplos de series de funcións que converxan puntualmente pero non absolutamente.
- Dar exemplos de series de funcións que converxan puntualmente pero non uniformemente.
- Dar exemplos de series de funcións que converxan uniformemente.

Facilitarase o material preciso para o desenvolvemento das actividades que irán sendo propostos na aula segundo o ritmo de traballo do grupo.

2.2. Series de potencias

Por último, un dos exemplos máis sinxelos e tamén interesantes de series de funcións son as chamadas series de potencias. O seu uso foi anterior ao estudo sistemático das series funcionais e están relacionadas con situacións xa coñecidas, como a aproximación de certas funcións por polinomios.

Unha serie de potencias con centro x_0 é unha serie funcional $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, onde as funcións $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ veñen dadas por $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$, $a_n \in \mathbb{R}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, e $f_0(x) = a_0$. A serie de potencias centrada en x_0 con coeficientes a_n, $n \geq 0$ vén representada por $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$.

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ é unha serie de potencias, considérase $\rho = \limsup |a_n|^{1/n}$. O raio de converxencia da serie de potencias é

$$R = \begin{cases} 0 & \text{se } \rho = +\infty, \\ \frac{1}{\rho} & \text{se } 0 < \rho < +\infty \\ +\infty & \text{se } \rho = 0 \end{cases}$$

O intervalo de converxencia da serie de potencias é o intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Nunha parte das series de potencias, o raio de converxencia pódese determinar polo límite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

se o límite existe ou é $+\infty$, o que na práctica resulta máis doado.

gráficas das funcións f_n están situada nunha veciñanza da gráfica de f, isto é entre as gráficas das funcións $f - \epsilon$ e $f + \epsilon$. É dicir, as gráficas das funcións da sucesión aproxímanse globalmente á gráfica da función límite.

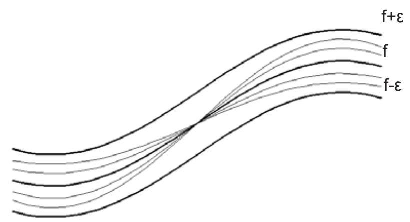

Figura 3.- Converxencia uniforme

Teorema.- Se a sucesión $\{f_n\}$ converxe uniformemente a f en E entón $\{f_n\}$ converxe puntualmente a f en E.

É importante comprender que o recíproco do resultado non é certo. Por exemplo, a sucesión de funcións dada por $f_n(x) = x^n$, se $x \in [0,1]$, converxe puntualmente en $[0,1]$ á función definida por $f(x) = 0$, se $x \in [0,1)$ e $f(1) = 1$, porén,

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \to \infty} \sup_{x \in [0,1)} x^n = 1$$

polo que a converxencia non é uniforme.

Diferenza entre converxencia puntual e uniforme.- Que a sucesión $\{f_n\}$ converxa puntualmente a f en E significa que:

- Fixado un $x \in E$, a correspondente sucesión de números reais $\{f_n(x)\}$ converxe a $f(x)$, é dicir, para todo $\epsilon > 0$ existe un número natural $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ verifícase $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. O número N dependerá do ϵ e de x, ao cambiar x por outro $y \in E$ a sucesión $\{f_n(y)\}$ é distinta a $\{f_n(x)\}$ e o índice N que vale para unha non ten por que valer para a outra. Para cada $x \in E$, a sucesión numérica $\{f_n(x)\}$ converxe ao número real $f(x)$ pero a rapidez da converxencia depende do punto x.

Que $\{f_n\}$ converxa uniformemente a f en E significa que:

- Fixado un $\epsilon > 0$, existe un número natural $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ verifícase $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $x \in E$. É dicir, na converxencia uniforme hai un mesmo número N que é válido para todos os $x \in E$ e a partir del todos os $f_n(x)$ distan de $f(x)$ menos que ϵ. A rapidez da converxencia das $\{f_n(x)\}$ a $f(x)$ é a mesma para todos os $x \in E$.

A seguinte condición pode ser útil para estudar a converxencia uniforme dunha sucesión de funcións da que non se coñece a súa función límite puntual.

Condición de Cauchy para a converxencia uniforme.- A condición necesaria e suficiente para que a sucesión $\{f_n\}$ converxa uniformemente en E é que para todo $\epsilon > 0$ exista $N \in \mathbb{N}$ tal que se $p, q \geq N$ se verifique $|f_p(x) - f_q(x)| < \epsilon$, para todo $x \in E$.

1.2. Converxencia uniforme de sucesións de funcións continuas, derivables ou integrables

Os seguintes resultados mostran que a converxencia uniforme transmite a continuidade e a integrabilidade dos termos da sucesión á función límite.

Teorema.- Se $\{f_n\}$ é unha sucesión de funcións continuas en E que converxe uniformemente a unha función f en E entón f é continua en E.

Teorema.- Se $\{f_n\}$ é unha sucesión de funcións Riemann integrables no intervalo $[a,b]$ que converxe uniformemente a unha función f en $[a,b]$ entón f é Riemann integrable en $[a,b]$, é

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Exemplo.- As funcións $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{se } 0 \le x < 1/n \\ -n^2\left(x - \frac{2}{n}\right) & \text{se } x \in [1/n, 2/n] \\ 0 & \text{se } 2/n < x \le 1 \end{cases}$$

son Riemann integrables en $[0,1]$ e converxen puntualmente en $[0,1]$ á función $f = 0$.

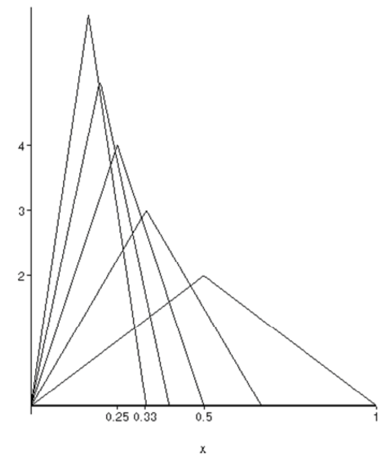

Figura 4.- Algúns termos da sucesión $\{f_n\}$ e a función límite puntual f.

Teorema.- Se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converxe uniformemente a f en E, verifícase:

1. Se cada función f_n é continua en E entón f é continua en E, e

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

2. Se cada función f_n é Riemann integrable en $E = [a,b]$ entón f é Riemann integrable en $[a,b]$, e

$$\int_a^b f = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n.$$

Teorema.- Sexa $\{f_n\}$ unha sucesión de funcións derivables en (a,b) para as que existe un punto $x_0 \in (a,b)$ no que a serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ é converxente. Se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ converxe uniformemente a g en (a,b) entón $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converxe uniformemente a unha función derivable f en (a,b) que verifica $f'(x) = g(x)$ para cada $x \in (a,b)$.

Aplicando a condición de Cauchy para a converxencia uniforme de sucesións á sucesión de sumas parciais da serie, próbase a seguinte condición

Condición de Cauchy para a converxencia uniforme dunha serie de funcións.- A condición necesaria e suficiente para que a serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converxa uniformemente en E é que para todo $\epsilon > 0$ exista $N \in \mathbb{N}$ tal que se $p \ge q \ge N$ se verifique para todo $x \in E$

$$|f_q(x) + \ldots + f_p(x)| < \epsilon.$$

O seguinte criterio dá unha condición suficiente para deducir facilmente cando unha serie de funcións converxe uniformemente.

Criterio maiorante de Weierstrass.- Sexa $\{M_n\}$ unha sucesión de números reais positivos tal que $|f_n(x)| \le M_n$ para todo $x \in E$ e $n \in \mathbb{N}$. Se a serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ é converxente, entón $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converxe uniformemente en E.

Exemplo.- A serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ é uniformemente converxente en todo $\mathbb{R}$, pois

$$|\frac{\sin nx}{n^2}| \le \frac{1}{n^2}$$

e a serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é converxente.

Analogamente, a serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n-1)(x+n)}$ é uniformemente converxente en $[0,1]$ ao estar maiorada no intervalo pola serie numérica converxente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$.

2.1. Series de funcións

Se $\{f_n\}$ é unha sucesión de funcións definidas en E pódese construír unha nova sucesión de funcións $\{s_n\}$ na que os termos veñen dados pola suma dos n primeiros termos da sucesión $\{f_n\}$, é dicir

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f_i.$$

Unha serie de funcións de termo xeral f_n, que se representa por $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, é o par formado polas sucesións $(\{f_n\}, \{s_n\})$. A sucesión $\{s_n\}$ é a sucesión de sumas parciais da serie.

Converxencia puntual.- A serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converxe puntualmente a f en E se a sucesión de sumas parciais $\{s_n\}$ converxe puntualmente a f en E.

A definición de converxencia puntual de sucesión de funcións e a definición de converxencia de series numéricas permiten demostrar que unha serie de función converxe puntualmente a f en E se e só se para cada $x \in E$, a serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converxe ao número real $f(x)$. Por tanto, no estudo da converxencia puntual das series pódese utilizar os criterios xa coñecidos de converxencia de series numéricas.

Á función suma da serie de funcións é a función límite puntual da sucesión $\{s_n\}$, e vén dada para cada $x \in E$ por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Converxencia absoluta.- A serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é absolutamente converxente en E se a serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ converxe puntualmente en E.

Tendo en conta esta definición e os resultados sobre converxencia absoluta de series numéricas, demóstrase que se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é absolutamente converxente en E entón tamén é puntualmente converxente en E.

Converxencia uniforme.- A serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converxe uniformemente a f en E se a sucesión de sumas parciais $\{s_n\}$ converxe uniformemente a f en E.

Teorema.- A condición necesaria para que a serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$

1. converxa puntualmente en E é que a sucesión $\{f_n\}$ converxa puntualmente a $f = 0$ en E.
2. converxa uniformemente en E é que a sucesión $\{f_n\}$ converxa uniformemente a $f = 0$ en E.

A definición de converxencia dunha serie de funcións a partir da converxencia da sucesión de sumas parciais e as propiedades que verifican as sucesións funcionais, permiten trasladar todos os resultados que se verifican para sucesión de funcións e obter os seguintes

Non obstante, a converxencia non é uniforme xa que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^{1/n} n^2 x dx - \int_{1/n}^{2/n} n^2 (x - \frac{2}{n}) dx \right) = 1 \neq 0 = \int_0^1 f.$$

Para poder intercambiar o límite coa integral, a hipótese de converxencia uniforme é moi forte cando é coñecida a priori a integrabilidade da función límite. O seguinte teorema permite o intercambio se a sucesión de funcións é uniformemente limitada.

Teorema da converxencia limitada.- Sexa $\{f_n\}$ unha sucesión de funcións Riemann integrables en $[a, b]$ que converxe puntualmente a unha función f Riemann integrable en $[a, b]$. Se $\{f_n\}$ é unha sucesión uniformemente limitada, é dicir, existe unha constante B tal que $|f_n(x)| \leq B$ para todo $x \in [a, b]$ e $n \in \mathbb{N}$, entón

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Exemplo.- Trátase de calcular o límite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 e^{-nx^2} dx$$

Como é sabido as integrais definidas que aparecen no límite son descoñecidas pois non se pode obter as expresión das primitivas das funcións involucradas. Para resolver o problema inténtase intercambiar o límite pola integral. A sucesión de termo xeral $f_n(x) = e^{-nx^2}$ é unha sucesión de funcións continuas en $[0, 1]$ que converxe puntualmente no intervalo á función

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x = 0 \\ 0 & \text{se} \quad x \in (0, 1] \end{cases}$$

que non é continua. Por tanto a converxencia non é uniforme e, en principio, non se pode facer o intercambio. Non obstante, a sucesión é uniformemente limitada pois $|e^{-nx^2}| \leq 1$, para todo $x \in [0, 1]$ e $n \in \mathbb{N}$, e converxe a unha función que é Riemann integrable en $[0, 1]$. Aplicando o teorema da converxencia limitada

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 e^{-nx^2} dx = \int_0^1 (\lim_{n\to\infty} e^{-nx^2}) dx = 0.$$

A converxencia uniforme dunha sucesión de funcións é suficiente para transmitir a continuidade e integrabilidade dos termos da sucesión á función límite. Porén a función límite uniforme dunha sucesión de funcións derivables non ten que ser derivable, e aínda que o fose, a sucesión das funcións derivadas non ten por que converxer puntualmente á derivada da función límite (é dicir, non é posible nesas circunstancias intercambiar o símbolo de límite polo de derivación). Os seguintes exemplos mostran cada unha destas posibilidades:

Exemplo.- A sucesión de funcións derivables $f_n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{n}}$$

converxe uniformemente á función $f \equiv 0$ en $\mathbb{R}$, pois $|f_n(x)| \le \frac{1}{\sqrt{n}},\ n\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R}$,

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}, = 0.$$

Como $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$, a sucesión $\{f_n'\}$ non converxe puntualmente en $\mathbb{R}$.

Exemplo.- A sucesión de funcións derivables de termo xeral $f_n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} -x & \text{se} \quad x < -1/n \\ \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n} & \text{se} \quad x \in [-1/n, 1/n] \\ x & \text{se} \quad x > 1/n \end{cases}$$

converxe uniformemente á función $f(x) = |x|,\ x\in\mathbb{R}$, que non é derivable en $\mathbb{R}$. En efecto, se $x_0 < 0$, existe un natural N tal que $x_0 < -\frac{1}{n}$ e por tanto, $f_n(x_0) = -x_0$, se $n > N$, o que implica que $f(x_0) = \lim_{x\to\infty} f(x_0) = -x_0$. Analogamente, se $x_0 > 0$, existe un natural N tal que $f_n(x_0) = x_0$ se $n > N$, e $f(x_0) = \lim_{x\to\infty} f_n(x_0) = x_0$. A converxencia uniforme é consecuencia de

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)-f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-1/n,1/n]} |f_n(x)-f(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$$

Na figura 5 pódense ver as gráficas dalgúns termos da sucesión.

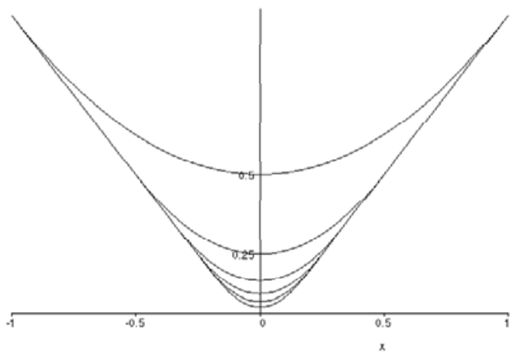

Figura 5.- Algúns termos da sucesión $\{f_n\}$.

Cómpre aumentar as hipóteses para que a derivabilidade se transmita por converxencia á función límite.

Teorema.- Se $\{f_n\}$ é unha sucesión de funcións derivables no intervalo (a,b) de $\mathbb{R}$ que verifica

1. Existe $x_0 \in (a,b)$ no que a sucesión numérica $\{f_n(x_0)\}$ é converxente.
2. $\{f_n'\}$ converxe uniformemente a unha función g en (a,b).

Entón $\{f_n\}$ converxe uniformemente a unha función f que é derivable en (a,b), e $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in (a,b)$.

Actividades propostas

- Preparación e exposición das demostracións dalgún dos resultados máis relevantes.
- Construción de sucesión de funcións que converxan puntualmente e non uniformemente.
- Analizar a converxencia puntual e uniforme de varias sucesión.
- Obter a función límite de sucesións, e estudar a súa continuidade, derivabilidade e integrabilidade.
- Prácticas de ordenador.

Facilitarase o material preciso para o desenvolvemento das actividades que irán sendo propostos na aula segundo o ritmo de traballo do grupo. Con todo iso cada alumno poderá compoñer o seu propio cartafol de prácticas, complementaria do presente texto teórico.

2. SERIES DE FUNCIÓNS

Relacionadas coas sucesións de funcións están as series funcionais. Deixando á parte outros aspectos formais, as cuestións que interesan en análise son as relacionadas coa converxencia. Por un lado, as series funcionais converxentes permiten definir novas funcións por medio da súa suma. Polo outro, é de gran interese o proceso inverso, representar unha función dada como suma dunha serie funcional dun tipo determinado, por exemplo, dunha serie de potencias. Estas representacións permiten unha análise sistemática e profunda das funcións representadas.

Unha vez introducido o concepto de serie de funcións reais a partir da sucesión funcional de sumas parciais, defínense as converxencias puntual e uniforme da serie de funcións como a converxencia puntual e uniforme desta sucesión de sumas parciais. Deste xeito todas as cuestións referentes a series de funcións respóndense examinando as cuestións correspondentes relativas a sucesión de funcións. De feito, todos os resultados obtidos para sucesións de funcións poderán ser traducidos a este caso.

Non obstante, moitas veces resulta máis cómodo o estudo de series funcionais de forma directa que a partir da súa sucesión de sumas parciais. Xa que a converxencia puntual dunha serie de funcións equivale a converxencia de series numéricas, pódense utilizar para o seu estudo os criterios de converxencia de series numéricas. Ademais, o criterio maiorante de Weierstrass facilita a análise da converxencia uniforme dunha serie de funcións.

A representación de funcións mediante series de potencias tivo un importante papel no desenvolvemento do cálculo. Esta é unha clase importante de series de funcións que posúen propiedades que non son válidas para outras series de funcións en xeral. Todas as series de potencias teñen en común a converxencia absoluta, e por tanto puntual nun intervalo, o intervalo de converxencia da serie de potencias, que se pode obter a partir do cálculo do raio de converxencia da serie, e a diverxencia no exterior do intervalo de converxencia. Analizaranse as propiedades das funcións definidas mediante series de potencias e a serie de Taylor dunha función de clase infinito.