UNIVERSIDADE DE SANTIAGO

FACULTADE DE ADMINISTRACIÓN E DIRECCIÓN DE EMPRESAS

ELABORACIÓN E ANÁLISE DE MODELOS ECONÓMICOS BASEADOS NO MARCO INPUT-OUTPUT.

Xesús Pereira López

Lugo, 2006

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO

Índice Xeral

Introdución

A pesar que somos conscientes da notábel explotación da metodoloxía input-output na análise económica, tanto a nivel teórico como a nivel aplicado, presentamos este documento de investigación co ánimo e a firmeza de que esta metodoloxía aínda resulte de maior utilidade dentro deste campo.

O modelo input-output e as aportacións de Leontief caracterízanse pola persistencia en compaxinar, sempre e de forma absoluta, o refinamento dos conceptos abstractos co uso do material empírico, ou sexa, de facer a confrontación permanente das ideas e modelos teóricos cos feitos –a realidade fáctica entendida como material bruto que no fondo debe ser o auténtico obxecto de atención do teórico, máis aló da súa pasión pola beleza formal dos modelos abstractos. Como profesor de matemáticas para a economía estou totalmente de acordo con Leontief ao criticar e denunciar a todos aqueles economistas matemáticos que seguen facendo da economía un campo cada vez máis reducido a puro formalismo abstraído dos problemas reais que lle importan á humanidade[1]. Esta idea está sempre presente ao longo de toda a investigación, que de feito foi a orixe da mesma tras a nosa incorporación nun grupo de investigación de carácter interdisciplinar: *Grupo de Análise e Modelización en Economía* (GAME).

Neste sentido, dentro das equipas de investigación das que formamos parte, nomeadamente *Os complexos produtivos clave da economía galega e a súa evolución no período 1980-1998. Análise a partir das Táboas Input-Output*[2] e *Un modelo multisectorial da economía galega*[3]; estudamos, entre outros aspectos, a economía galega a través das táboas input-output e as

[1] A crítica de Leontief á Economía académica e estéril chegou tan lonxe como para escribir: "¿Cando deixarán os investigadores (...) de preocuparse polo estado dos equilibrios estábeis e estacionarios e o espléndido aillamento no que se atopa agora a economía académica? Esta situación manterase probabelmente mentras os membros permanentes dos departamentos importantes de Economía continúen exercendo un estreito control da formación, a promoción e as actividades de investigación dos seus compañeiros máis xóvenes (...). Os métodos empregados para manter a disciplina intelectual nos departamentos de Economía máis influíntes de este país poden lembrar en ocasións aos que empregan para manter a disciplina na illa de Parris". (Carta á revista *Science*, xullo de 1982).

[2] Proxecto financiado pola Fundación Caixa Galicia - Claudio San Martín.

[3] Programa de Promoción Xeral da Investigación do Plan Galego de IDT (PGIDT 03PXIA20102PR).

ferramentas asociadas ás mesmas. E así na medida en que íamos analizando a información dispoñíbel nas táboas fóronse formulando distintas preguntas, ás que lles debíamos dar respostas adecuadas.

Dentro do marco input-output, decidimos fuxir daquelas situacións máis convencionais e quixemos centrarnos noutras onde xurdisen distintos atrancos; e a partir de aí esforzámonos en atopar posíbeis saídas. Dende un primeiro momento, debemos explicitar que aquí tan só procuramos dotarnos dun maior instrumental matemático para aplicar logo en futuras investigacións, dito doutro xeito, o noso obxectivo primordial xira na búsqueda de solucións teóricas para atallar posíbeis problemas dentro da análise a partir de modelos.

Optamos por estruturar este traballo en seis capítulos. No Capítulo 1 faremos un breve repaso dos aspectos máis esenciais do anterior marco input-output e do actual; SEC-95. No mesmo lembraremos as cuestións máis básicas relacionadas coas táboas de orixe e destino e coa táboa simétrica. Tamén destacaremos os principais problemas na estimación de táboas rexionais.

No Capítulo 2 recordaremos as identidades contábeis básicas e as definicións dos distintos coeficientes obtidos a partir destas táboas, así como certos aspectos colaterais; despois introduciremos aqueles modelos xa tradicionais obtidos directamente das táboas de orixe e destino. No Capítulo 3 abordaremos un obstáculo significativo que nos encontramos en determinados casos á hora de explicar a produción (por produtos ou por ramas produtivas), ese obstáculo correspóndese coa necesidade de calcular "inversas" de matrices rectangulares para poder explicar vectores de produción por produtos ou por ramas de actividade. Así, unha vía empregada a miúdo consiste en recurrir a agregacións para obter matrices cadradas, aínda que esa saída conleve unha pérdida da información que nos aportan este tipo de táboas. Nós optaremos por escoller outra alternativa con vistas a obter as "inversas" de matrices rectangulares, en concreto, apoiarémonos na inversa xeralizada de Moore-Penrose. De acordo ao emprego desta ferramenta, veremos como é posíbel construír outro tipo de modelos que mostran unha maior simpleza, onde non será necesario multiplicar matrices de coeficientes. Tamén nos esforzaremos na búsqueda das interpretacións económicas desas matrices que nos irán xurdindo nos distintos modelos de análise.

No Capítulo 4 abordaremos unha das limitacións que veñen a darse no marco input-output, en concreto analizaremos a posíbel estabilidade dunha determinada economía con ramas produtivas en desequilibrio. Un dos nosos propósitos consistirá en xustificar a hipotética existencia de compoñentes negativas no vector de inputs primarios sen que ese feito supoña ningún erro de confección das táboas, nin implique o "retoque" das mesmas. Sendo máis explícitos, se acudimos a un escenario onde traballemos con táboas en termos de valor onde esas compoñentes sexan negativas (o que implicaría que as ramas de actividade vinculadas aos mesmos consumisen unha maior cantidade de inputs intermedios que os seus propios niveis de produción), observaríamos como a condicón suficiente que se utiliza frecuentemente para detectar matrices produtivas xa non nos sería válida. Así, sen necesidade de acudir á condición necesaria e suficiente de Hawkins-Simon, fixarémonos en que circunstancias somos capaces de atopar solucións positivas, ou sexa, veremos ata que punto eses desequilibrios sectoriais non desestabilizan o sistema obxecto de estudo. Nesa liña, introduciremos algunhas condicións suficientes con vistas a lograr inversas de Leontief positivas, que con toda probabilidade se axustarían a posíbeis casos reais onde xurdan eses valores negativos. Tamén procuraremos sinalar as interpretacións económicas relativas aos elementos de certas matrices que empregaremos como instrumentos de apoio.

No Capítulo 5, enfrontarémonos a outro problema, o que nos ven dado habitualmente no entorno da táboa simétrica á hora de realizar distintas estimacións de variábeis para eses períodos nos que non foron publicadas as TIO. O noso obxectivo fundamental será logo o de introducir unha técnica de axuste biproporcional que sexa manexábel. Desa forma, veremos como ese método pode actuar ben sobre a matriz de Leontief dun ano base ou ben sobre a súa inversa para estimar esas matrices descoñecidas, aínda que "próximas" ás reais; para despois cuantificar esas magnitudes vectoriais relativas a eses períodos que non coincidan coa publicación de táboas e para os que poseemos certa información. Observaremos como ese procedemento alternativo nos evitará a aplicación doutro tipo de métodos máis sofisticados e para os que precisaríamos unha maior información, sendo ademais moi probábel encontrarnos con casos onde non se dispoña de dita información e como consecuencia non se poderían usar as técnicas xa coñecidas. Tamén indicaremos como é posíbel aplicar este método aos modelos obtidos a partir das táboas de orixe e destino, incluso cando xurden matrices rectangulares. Na búsqueda de semellanzas co método RAS, expoñeremos unha variante desta técnica que actúa de forma directa sobre a matriz de coeficientes técnicos cunha información mínima; onde se descoñeza unha das marxes, en concreto, a suma por columnas dos consumos intermedios.

E xa por último, con vistas a xustificar este documento de investigación retomaremos aquelas conclusións máis importantes ás que iremos chegando ao longo do mesmo e que dalgunha maneira entendemos que supoñen un avance dentro do marco input-output.

Capítulo 1

As táboas input-output como ferramenta da análise económica

1.1 Introdución

As Táboas Input-Output (TIO) vendéronse como instrumento complexo e casi perfecto da análise do presente e proxección do futuro dunha economía. O seu principal atributo –a capacidade para integrar nun esquema contábel, relativamente simple, o conxunto de relacións que definen a estrutura produtiva– permitiulles aos economistas do mundo enteiro ao longo de varias xeracións facer fronte con máis rigor ás tarefas de planeamento, avaliación e reordenamento territorial. Pero tamén houbo algúns momentos nos que chegaron a padecer un certo desprezo, dende logo tan inmerecido como as honras anteriores. Actualmente as mesmas considéranse como un instrumento teórico-práctico onde a súa validez e utilidade dependen fundamentalmente da calidade das informacións coas que se elaboran e do acerto das hipóteses que inevitabelmente encerran.

Independentemente das súas orixes históricas[1] e dos seus antecedentes máis inmediatos, a análise input-output iníciase hai máis de 65 anos coas primeiras achegas de Leontief (1936 e 1941)[2] sobre a economía americana de 1919 e 1929. En realidade, as TIO son herdeiras

[1] Como se comentou reiteradamente na literatura, en realidade a achega de Leontief é debedora dunha corrente da teoría económica que arranca da idea do *Tableau économique* de Quesnay, retomada despois por Marx e, baixo unha perspectiva diferente, por Walras e Pareto.

[2] Avances dos seus traballos foron publicados en 1936 e 1937, culminando a súa investigación en 1941 coa publicación da súa obra máis coñecida: *The Structure of American Industry*.

dunha tradición analítica[3] de douscentos anos que intenta dar conta da complexidade da economía, onde interactúan, nun sistema coherente e integrado, un gran número de empresas, consumidores e outros axentes. Porén, a motivación de Leontief era esencialmente pragmática; os datos agregados a nivel nacional (como o produto interior bruto, a inversión agregada, o consumo privado, etc.) non son suficientes para servir como unha guía para a acción. Tamén é preciso considerar as interrelacións entre as empresas, entre estas e os consumidores, entre o consumo e a xeración dos ingresos (vía salarios, ganancias e diversas rendas), e entre eses ingresos e a produción. Noutras verbas, se recoñecemos a economía como un sistema complexo, entón a política económica non podía basearse unicamente en datos globais, senón que precisa dun recoñecemento completo da estrutura interna do aparato produtivo. Esa é precisamente a principal propiedade das TIO: proporcionan información acerca da estrutura do tecido industrial e das relacións de complementariedade entre as empresas. O que permite analizar con maior exactitude os resultados da política económica e, en xeral, de calquera suceso de importancia acaecido fóra do sistema (como a redución brusca das exportacións debida á contracción dos mercados internacionais), xa que tomamos explicitamente en consideración os efectos globais das influencias mutuas dunhas empresas sobre as outras.

Ademais das dúas primeiras táboas da economía americana citadas (moi simplificadas), na segunda edición de *The Structure of the American Economy* publicada en 1951, engadeuse a táboa de 1939 e nese mesmo ano empezou a xurdir documentación da primeira táboa oficial dese país, elaborada polo Bureau of Labor Stadistics, referida a 1947. O feito de que as primeiras estimacións fosen realizadas pola primeira potencia económica en expansión neses momentos (EE. UU.), implicou que o seu uso se espallase rapidamente polo mundo. Os traballos orixinais de Leontief foron obxecto de enorme interese por parte da comunidade académica e dos encargados da política económica nos países desenvolvidos xa que por primeira vez se formulaba a posibilidade de achegarse a unha representación global e integrada do sistema económico pero partindo dunha perspectiva empírica, é dicir, apoiada en datos (aínda que, por suposto, necesitada de hipóteses simplificadoras sobre as relacións entre os parámetros, sobre todo na función de produción). Para principios dos anos cincuenta, as experiencias de estimacións de matrices nacionais xa se multiplicaban: Dinamarca (táboas de 1930-39 publicadas en 1948), Italia (1953),

[3] O propio Leontief definía o método como un intento de construir, en base ao material estatístico, un "Tableau économique", sendo unha adaptación da teoría neoclásica do equilibrio xeral ao estudio empírico da independencia cuantitativa entre actividades económicas interrelacionadas. Aínda que é verdade que Leontief consideraba o seu modelo como unha especie de equilibrio xeral -e neste sentido poderíase consideralo neoclásico, a pesar de que el prefería falar de interdependencia xeral-, tamén é certo que os críticos do neoclasicismo mostraron como dende os seus anos mozos insistían en ideas que están na tradición de *Surplus Approach*, que de Quesnay a Sraffa e Pasinetti, concibe a economía como un fluxo circular máis que coma unha avenida unidireccional.

Holanda (táboas de 1938 e 1946-48 presentadas en 1946 e 1951) e Gran Bretaña (táboas de 1935 divulgadas en 1952). Na seguinte década, moitos países en desenvolvemento fixeron, co apoio da Organización das Nacións Unidas, os esforzos necesarios para estimar TIO. A partir de aí, o modelo input-output xeralizouse pola maioría dos estados occidentais e do bloque comunista, ampliando enfoques e combinándose con outras técnicas.

A incorporación de España á análise input-output[4] tivo lugar en 1958 coa publicación da primeira táboa nacional referida a 1954, que se fixo coincidir coa visita a España do profesor Leontief, patrocinada polo Instituto de Estudios Políticos. Posteriormente a Organización Sindical Española financiou as táboas referidas a 1958[5], 1962, 1966 e 1970, e o Fondo para la Investigación Económica y Social (FIES) de las Cajas de Ahorros Confederadas financiou as de 1975, ata que finalmente o Instituto Nacional de Estadística (INE) as incorporou á Contabilidade Nacional en 1985 cando publicou a primeira táboa, correspondente a 1980 (TIOE-80), integrada no Sistema de Cuentas Nacionales (INE, 1985). A táboa inclúe 85 ramas e elaborouse seguindo, na medida do posíbel, a metodoloxía SEC-79, a mesma empregada para artellar as táboas de 1985 e 1990, aínda que estas inclúen unicamente 57 ramas. A importancia da táboa de 1980 no que respecta á contabilidade nacional en España é crucial, xa que por primeira vez se formula a TIO como un elemento central da mesma[6]. O último paso na historia da técnica Input-Output en España son as táboas recentemente elaboradas de acordo co SEC-95 (Sistema Europeu de Contas Nacionais e Rexionais 1995), versión europea do SCN-93. O INE publicou ata o momento, dentro desta nova formulación, o sistema completo para 1995 (táboas de orixe e destino, e táboa simétrica input-output) e as táboas de orixe e destino para o período 1996-1999. Recentemente publicouse o sistema completo para o ano 2000[7] onde se incorporan unha serie de modificacións respecto aos métodos de medición dos agregados contábeis vixentes ata agora. Entre as novidades cabe destacar a incorporación dun novo método de axuste de prezos; a introdución dos Servizos de Intermediación Financeira Medidos Indirectamente (SIFMI), que supón

[4] Cañada e Toledo (2000) ofrecen un minucioso repaso á achega de Leontief á economía en xeral e en España en particular. Neste artigo coméntanse as principais investigacións input-output realizadas en España, partindo da táboa pioneira de 1954, ata as últimas táboas elaboradas coa metodoloxía SEC-95.

[5] Como paso previo á elaboración da táboa de 1958, e en tanto se completaban os traballos de recompilación estatística, decidírase elaborar unhas táboas para 1955, 1956 e 1957 obtidas de acordo á proxección das táboas do ano 1954.

[6] O INE divulgou ademais estimacións de táboas para os anos intermedios. A táboa de 1986 ten un significado especial dado que se incorpora por primeira vez o imposto sobre o valor engadido introducido no sistema impositivo ao producirse a entrada do Estado Español na Comunidade Europea o 1 de xaneiro dese mesmo ano.

[7] No ano 2000 o INE abordou un novo cambio de base (base 2000) co obxectivo fundamental de mellorar a exhaustividade, fiabilidade e comparabilidade das estimacións das contas nacionais, mediante a utilización de novas fontes de información estatística, a incorporación de novos conceptos e convenios contábeis e o emprego de novos procedementos e métodos de cálculo.

un importante cambio metodolóxico na elaboración das contas anuais e trimestrais; e a incorporación de novas fontes de información procedentes de distintas enquisas, entre as que resaltan as de Poboación (Censo de 2001), Emprego (EPA 2005), Servizos, Industria e Administracións Públicas. Trátanse de táboas con un maior nivel de desagregación que as do anterior sistema (107 produtos e 71 ramas referidas a 1995 que agora, co cambio de base, se incrementaron ata 118 produtos e 75 ramas) que incorporan un gran número de novidades contidas no SEC-95. Dende o punto de vista das aplicacións input-output, os modelos SEC-95 son tamén moito máis ricos e permiten un maior número de posibilidades analíticas que serán de obxecto de estudo nesta investigación.

As primeiras experiencias rexionais en España foron tardías e non se iniciaron ata finais da década dos sesenta. Pero a partir de entón, desenvolvéronse rapidamente, sendo na actualidade un dos países que dispón de máis TIO rexionais confeccionadas mediante información directa, ás que lle hai que engadir ensaios provinciais e incluso comarcais. Sen dúbida, a recorrente utilización do esquema input-output no ámbito específico dos estudos rexionais non responde á casualidade senón máis ben a que o modelo demostrou a súa idoneidade na análise dos aspectos estruturais dunha economía rexional. As táboas e modelos rexionais elaborados en España presentan relativamente unha ampla heteroxeneidade metodolóxica e de clasificacións, xa que se foi optando por unha elaboración adaptada ás necesidades e características da economía que se trataba de describir, deixando nun segundo plano o obxectivo da comparabilidade con outras táboas. Galiza non foi unha excepción e ata o momento contamos con tres TIO con anos de referencia 1980, 1990 e 1998. Nestas táboas, como acontece coas demais experiencias rexionais, ao resto de problemas comúns de toda TIO engadénselle outros novos como a asignación de operacións económicas realizadas por institucións de localización suprarrexional e a determinación dos fluxos exteriores á rexión e, ao mesmo tempo, interiores á "nación". Respecto a primeira cuestión, e sen entrar aquí en profundidade, quixeramos puntualizar a convenencia de adoptar criterios nítidos e explícitos que permitan, tanto aos elaboradores das táboas como aos usuarios, coñecer con precisión os datos que se manexan. De feito, o maior problema non é se nas tres táboas realizadas en Galiza (ou noutras economías) se seguiron uns criterios ou outros. Moito máis preocupante é que se puideran adoptar decisións metodolóxicas distintas en cada caso e incluso, como acontece ás veces, sen abordar o problema. Probabelmente o maior reto das TIO rexionais é a estimación do comercio co "resto do mundo", sobre todo se se pretende diferenciar, dentro deste, a parte que se realiza con outras rexións. A inexistencia de barreiras e/ou controis administrativos no fluxo interrexional de mercadorías e servizos dificulta o coñecemento destes e supón a necesidade ben de adicar un volume notábel de recursos á elaboración estatística dunha táboa rexional, ou ben de adoptar modelos e hipóteses simplificadoras.

Efectivamente existen moitas dificultades para a obtención de táboas completas, actualizadas e fiábeis, que admitan todo tipo de desenvolvementos metodolóxicos como os que imos formular nesta investigación. Sen esquecerse das limitacións dos datos que en parte comentaremos a continuación ao referirnos á información proporcionada polo marco input-output tanto no SEC-79 como no SEC-95, a nosa formulación é ofrecer unha investigación a nivel metodolóxico onde construiremos modelos sen entrar en profundidade nos problemas dos sesgos, interpretación, actualización ou revisión de datos.

Paralelamente ao desenvolvemento das TIO fóronse multiplicando as aplicacións que se coñecen como análise Input-Output[8]. Cunha longa tradición, esta análise é unha etiqueta que comprende numerosos e distintos estudos que estiveron sometidos a un constante debate dende as primeiras aplicacións levadas a cabo por Chenery e Watanabe (1958), Rasmussen (1956) e Hirschman (1958). Así, estas primeiras aplicacións partían de que a estrutura produtiva de cada sector se pode representar por unha tecnoloxía de coeficientes técnicos (fixos) e rendementos constantes a escala, coñecida tamén como a función de produción de Leontief. Esta hipótese e o concepto de que os produtores minimizan o custo de produción permiten especificar os coeficientes fixos de cada sector empregando a información sobre fluxos entre ramas e pagos aos factores primarios que proporciona unha TIO simétrica[9]. En concreto, con fin de achegar o marco input-output aos principios de Leontief, trátase de que a táboa responda a un esquema de "produción simple", ou sexa, que as columnas das matrices de consumos intermedios e inputs primarios mostran as funcións de "produción" dun (tipo de) produto(s) determinado. Para

[8]Non debemos esquecer que as TIO naceron e desenvolvéronse impulsadas polo dobre desexo de mellorar o coñecemento da estrutura produtiva dun país nun momento determinado e detectar os cambios estruturais acaecidos na mencionada estrutura co transcurso do tempo. Aínda que efectivamente as TIO son o marco axeitado para comprobar a consistencia da información estatística sobre bens e servizos obtidos de moi diferentes fontes estatísticas e considérase o elemento base para a elaboración dos agregados macroeconómicos, xa que proporciona unha visión desagregada da identidade básica entre recursos e empregos que rexistra a conta de bens e servizos para o conxunto da economía; a súa incorporación ao sistema de contas nacionais non se produce ata 1968 da man de R. Stone. No SEC-95 recoñécese o Marco Input-Output como un elemento básico do sistema de contas, adicándolle unha especial atención dende o primeiro capítulo.

Aínda que non imos profundizar dentro deste documento en aplicacións prácticas, si debemos recordar que hoxe en día, xa ao marxe das aplicacións usuais da análise input-output, existen outro tipo de estudos onde tamén se recorre á metodoloxía input-output. Así en España podemos mencionar, a modo de exemplo, diversos estudos de índole colateral: traballos que analizan as relacións entre a economía e o medio ambiente (Alcántara, 1995), análises sectoriais onde se identifica o papel de cada rama produtiva como demandante e contaminadora de auga (Bielsa, Sánchez-Chóliz e Duarte, 2001); e incluso tamén se acude a esta metodoloxía para analizar outro tipo de fluxos, como poden ser os demográficos (Cabrer e Pavía, 2003). De aí que cando falemos da análise input-output, esta debe ser endentida en sentido amplo.

[9]Como veremos no Capítulo 2 pódense obter modelos de aplicación baseados nas propias táboas de orixe e destino, que implicitamente incorporan funcións de produción (custos) conxuntas e que poden ofrecer información moi relevante sobre a estrutura produtiva da economía baixo análise.

eso defínense unhas ramas de actividade que son "conceptuais" –no sentido de que son criadas polos contábeis nacionais– e que se denominan "ramas de actividade homoxéneas". Cada rama de actividade homoxénea representa a estrutura de produción (custos) dun tipo exclusivo de produto no sistema económico (obviamente de acordo co nivel de desagregación elixido). Os coeficientes técnicos así estimados poden empregarse para analizar interdependencias sectoriais, cuantificar o efecto de variacións no vector de demandas netas de bens e servizos sobre os niveis de produción sectorial e calcular o impacto de alteracións nos prezos dos factores ou nos prezos das importacións sobre os prezos dos bens e servizos producidos.

De feito, as primeiras investigacións centráronse en medir os efectos de estímulos esóxenos da demanda final sobre o conxunto da economía a partir do cálculo dos que se denominaron multiplicadores. Chenery e Watanabe propuxeron como medida dos encadeamentos cara atrás (*backward linkages, BL*) as sumas das columnas da matriz de coeficientes técnicos, mentras que plantexaron como medida dos encadeamentos cara adiante (*forward linkages, FL*) as sumas das filas da matriz de coeficientes de distribución. Estes primeiros multiplicadores denomináronse *directos,* xa que só recollían as relacións de produción e distribución entre as ramas en primeira instancia, sen ter en conta as sucesivas rondas de compras intermedias que debían darse para abastecer, no modelo máis clásico de Leontief, un estímulo esóxeno da demanda final. Rasmussen (1956), para ampliar o concepto de multiplicador, suxeriu as sumas das columnas e filas da matriz inversa de Leontief, que presentaba como vantaxe o feito de recoller tanto os efectos directos coma os indirectos. Os novos multiplicadores cara atrás mostrarían así o output total que debería producir unha economía para abastecer un incremento unitario da demanda final dunha rama j. Pola súa parte, os multiplicadores cara adiante revelarían o output que ten que producir unha rama j no caso de que a demanda final de tódalas ramas se expandise nunha unidade[10].

Porén, xa nos mesmos anos cincuenta comezaron a xurdir no mundo económico voces críticas a respecto destes modelos, as mesmas estaban baseadas nos supostos excesivamente simplistas dos modelos input-output, como os referentes á función de produción implícita na táboa (lineal homoxénea), o carácter estático do modelo e as cuestionábeis hipóteses de "estabilidade tem-

[10] Case dende a primeira aplicación os multiplicadores cara adiante estimados coa inversa de Leontief, foron moi criticados ao sustentarse nunha hipótese moi irreal –crecemento idéntico da demanda final de cada unha das ramas. Estas críticas fomentaron un intenso debate acerca de como medir os encadeamentos cara adiante. Jones (1976) ofreceu como alternativa a suma das filas da inversa da matriz de distribución. A interpretación do multiplicador sería o output total que ten que realizar un país para abastecer un incremento unitario do input primario dunha rama j. Esta alternativa formulou unha nova discusión sobre a estabilidade dos coeficientes técnicos e de distribución [*joint stability*, Giarratani (1980), Oosterhaven (1981,1988 e 1989), Cella (1984)] que parece quedar cerrada coas achegas de Dietzenbacher (1977, 2001 e 2002) unha vez que se reinterpreta o modelo de Ghosh como un modelo prezos.

poral" dos coeficientes técnicos (necesaria para realizar simulacións) e en problemas de falla de significado económico nos multiplicadores obtidos das táboas, como a aparición de elementos negativos na inversa de Leontief. Ao longo desta investigación trataremos con certo detalle parte destas críticas, pero antes imos realizar unha pequena aproximación aos criterios de elaboración das TIO e como estes evolucionaron ao longo do tempo.

1.2 As táboas input-output no SEC-79

Como xa avanzamos, as TIO son unha ferramenta de medida da actividade económica na que se representan as operacións de produción e distribución acontecidas nunha economía ao longo dun período determinado. Obviamente, para facilitar a comparabilidade das economías a metodoloxía utilizada ten que ser homoxénea, fixando para a mesma definicións e conceptos aceptados mutuamente.

A metodoloxía ata agora usada, tanto polo INE coma polo resto de institutos de estatística rexionais, estaba baseada no *Sistema Europeu de Contas Económicas Integradas* (SEC-79)[11], pero despois da publicación do novo *Système Européen des Comptes. SEC 1995* (SEC-95)[12], de forma progresiva tódolos organismos estatísticos fóronse adaptando ao mesmo. Nunha época na que a estatística económica está adquirindo unha relevancia especial (unión económica e monetaria, adopción do euro, criterios de converxencia, límites de déficit público, etc.), a publicación do SEC-95 como Regulamento do Consello da Unión Europea veu fixar uns cauces nos que é preciso expresar homoxeneamente unha descrición sistemática e detallada da economía no seu conxunto. Dentro dos obxectivos descritos no Regulamento cítanse, como os máis significativos, aqueles destinados a establecer a metodoloxía relativa a definicións xunto a nomenclaturas e normas contábeis homoxéneas, que permitan constituír uns criterios de comparabilidade entre os diferentes estados e comunidades autónomas. Aínda así, a súa introdución supón tamén unha ruptura metodolóxica que, ademais de dificultar considerablemente a análise dos cambios acaecidos na economía, presenta atrancos á análise tradicional input-output aos que ata agora se lles deron respostas insatisfactorias.

Antes de pasar a describir de forma minuciosa o novo Marco Input-Output repasaremos brevemente as principais características do sistema anterior xa que ata o momento aínda son

[11] *Sistema Europeo de Cuentas Económicas Integradas. SEC.* (2^a Edición). Madrid; INE.

[12] *Système Européen des Comptes. SEC 1995.* Luxemburg; Eurostat. No Apéndice 1.B. resúmense os principais cambios que introduce o novo sistema de contas económicas.

poucas as TIO elaboradas de acordo ao novo marco[13].

Na metodoloxía SEC-79 presentábase a TIO como un conxunto de tres matrices (matriz de demanda intermedia, de demanda final e inputs primarios) que representaban todo o fluxo económico acontecido nunha economía nun período de referencia. A característica básica da matriz intermedia era a súa forma cadrada (é dicir, dispoñía do mesmo número de filas que de columnas), sendo o requisito de cadrada necesario para poder invertir a matriz de Leontief e aplicar así o correspondente modelo. No Cadro 1 aparece un esquema dunha TIO elaborada seguindo as directrices do SEC-79.

A matriz de consumos intermedios (MCI) rexistra os fluxos de bens e servizos entre as ramas de actividade (RA) nas que se desagrega a economía. As RA son, en principio, agrupacións das unidades de actividade económica (UAE) que producen bens e servizos cercanos[14]. Nas táboas da economía española, as ramas obtéñense a partir da información estatística de establecementos que poden realizar unha actividade principal e varias secundarias. Por esta razón e porque as ramas das táboas se definen, en ocasións, para agregados de grupos de 3 díxitos, as RA poden realizar producións principais e secundarias[15]. A MCI é unha matriz cadrada que nos indica os fluxos interiores e importados entre as ramas. Os fluxos intermedios de orixe interior están valorados a prezos de saída de fábrica e non inclúen, polo tanto, nin as marxes atribuíbeis ás ramas de distribución (comercio e transporte), nin tampouco o correspondente IVA deducíbel. De modo análogo, os fluxos intermedios de orixe importada están valorados a prezos saída de aduana e non inclúen neste caso ningún imposto que grava os produtos[16].

[13] Por exemplo, das tres TIO dispoñíbeis para a economía galega (1980, 1990 e 1998) só a última (TIOGA-98) se elaborou seguindo en parte as directrices do SEC-95.

[14] No SEC-79, as UAE son desgloses de Unidades Institucionais que producen bens e servizos incluídos no mesmo grupo de 3 díxitos da clasificación de actividades NACE-CLIO, cuxa adaptación a España se denomina CNAE. O SEC-95 impón dous requisitos para que se poida falar de UAE: que sexa capaz de subministrar un mínimo de información e que se poida indentificar a súa actividade principal coa subdivisión a catro díxitos da CNAE-93.

[15] A elección do nivel de agregación é un asunto máis importante do que puidera parecer a primeira vista. Loxicamente, canto maior sexa a desagregación das ramas, máis próximos serán os bens e servizos producidos por algunhas ramas e, polo tanto, maior grao de substituibilidade entre eles, unha circunstancia que encaixa mal coa hipótese de non substituibilidade característica da tecnoloxía input-output. Polo contrario, cando o número de ramas é pequeno, os bens e servizos producidos serán moi distintos, pero cada rama producirá unha amalgama de bens e servizos moi ampla, polo que a estrutura de fluxos verase afectada por cambios na composición das ramas, incluso se a tecnoloxía input-output fose axeitada para describir a tecnoloxía das subramas incluídas en cada rama.

[16] A valoración dos consumos intermedios a prezos de saída de fábrica é unha tarefa que presenta notábeis dificultades, xa que os consumos intermedios se obteñen a prezos de adquisición e, polo tanto, é preciso eliminar o IVA e as marxes de distribución. Por outra parte convén destacar que, se ben os consumos intermedios están valorados a prezos de saída de fábrica ou a saída de aduana, o valor total dos consumos intermedios de cada rama está valorado a prezos de adquisición, excluído o IVA correspondente, dado que as entradas das filas relativas ás ramas de distribución (comercio e transporte), aumentan o valor dos consumos intermedios da rama na cuantía correspondente ás marxes mencionadas.

CADRO 1: ESTRUTURA TIO SEC-79

Matriz de Consumos Intermedios -Matriz Cadrada -Valorada a *prezos de saída de fábrica*	**Matriz de Demanda Final**
Matriz de Factores Primarios	

A matriz de factores primarios (MFP) é unha matriz rectangular con tantas columnas como ramas e un número de filas variábel. En primeiro lugar, a MFP proporciona o valor engadido de cada rama ou diferencia entre o valor da produción a prezos de saída de fábrica –que inclúe os impostos sobre os produtos (excepto o IVA) e outros impostos ligados á produción– e o valor das compras intermedias da rama a prezos de adquisición –excluído o IVA deducíbel–. En segundo lugar, o valor engadido desglósase en remuneración de asalariados (RAS)[17], impostos ligados á produción (TP), subvencións de explotación (SB) e desgravacións á exportación (DX) e un saldo ou excedente bruto de explotación (EBE).

Ao sumarlle ao valor total das compras intermedias valoradas a prezos de adquisición o valor engadido bruto a prezos de mercado –que inclúe os impostos netos que gravan os produtos–, obtense o valor da produción efectiva (PE) da rama a prezos de saída de fábrica, dado que esta produción non inclúe as marxes de distribución correspondentes á produción da rama.

Adicionalmente, a MFP contén algunhas filas que rexistran as transferencias de produtos (PS) existentes entre ramas. A orixe destas transferencias é a presenza de producións de bens e servizos distintas á produción principal da rama. A terminoloxía input-output refírese a elas como "producións secundarias, próximas e fatais" e contabilízanse con signo negativo nas ramas que as xeneran e con signo positivo nas ramas onde a produción principal coincide cos produtos en cuestión. O valor de cada elemento é o valor neto, ou sexa, a diferencia entre o valor da produción doutras ramas do ben obxecto da actividade principal da rama menos o valor das producións secundarias realizadas polas ramas. Tamén hai nas táboas unha fila denominada "Vendas Residuais das Administracións Públicas" (VR AAPP) onde as entradas positivas

[17] A RAS subdivídese a súa vez en soldos e salarios brutos (SSB) e cotizacións sociais a cargo dos empregadores (CS).

indican a produción realizada polas administracións coincidente coa actividade principal das ramas onde figuran; a suma destas entradas positivas é igual á suma das entradas negativas que aparecen nas ramas correspondentes ás AAPP. Aínda que tanto no caso das PS coma das VR AAPP a suma das filas é cero, a súa inclusión permite calcular o valor da produción homoxénea realizada por cada rama ou produción distribuída (PD) a prezos de saída de fábrica. Por último, na MFP aparecen filas onde figuran as importacións de bens e servizos equivalentes aos producidos por cada rama e os correspondentes impostos ligados ás importacións.

A matriz de demanda final (MDF) indícanos o uso final ao que se destina a produción. Normalmente nesta matriz incorpórase desagregadamente o gasto do consumo das familias e as institucións privadas sin fin de lucro ou consumo privado; o gasto das compras netas de produtos realizadas polas AAPP, denominado consumo público ou colectivo; a parte da produción de cada rama que se destina á formación bruta de capital (xeralmente distínguese entre formación bruta de capital fixo e variación de existencias); os bens e servizos adquiridos por unidades non residentes ou exportacións ás dúas áreas de comercio e por último, inclúense as columnas co total de demanda final e o total de empregos das ramas.

1.3 O novo marco input-output

A introdución do SEC-95 supuxo cambios moi importantes na elaboración das TIO. A diferenza máis interesante estriba, sen dúbida, na visión máis desagregada do proceso produtivo que vén proporcionada tanto polo lado da oferta coma da demanda. Este maior detalle ten a súa concreción visíbel no feito de que a familiar TIO foi rebautizada como **marco input-output** para subraiar a pluralidade de matrices necesarias para describir axeitadamente a mecánica do sistema económico. Quizais a novidade máis chamativa do SEC-95 sexa, polo tanto, a substitución da TIO convencional por un conxunto de táboas interrelacionadas que, atendendo á literalidade do novo sistema contábel, se agruparían en tres bloques:

a) táboas de orixe e destino.

b) táboas que relacionan as táboas de orixe e destino coas contas dos sectores.

c) táboas input-output simétricas.

Comezamos a nosa análise polas táboas do apartado b). A información das táboas de orixe e destino debe relacionarse coa das contas dos sectores, para asegurarse de que son coherentes entre si. Por iso se introduce unha táboa na que se cruzan as variábeis clasificadas por ramas de actividade e por sectores. Esta táboa permite combinar as dúas visións alternativas, produtiva e institucional, ao mostrar nas filas para cada sector institucional as compoñentes da Conta de Produción e Explotación, así como a Formación Bruta de Capital Fixo, mentres que por columnas aparecen as distintas ramas produtivas. A súa construción supón un importante esforzo sobre todo para aquelas economías (como as rexións) que non contan con información completa para o total das contas dos sectores institucionais. De feito, na maior parte dos casos estas táboas non son incluídas nos Marcos Input-Output rexionais[18].

Centrándonos agora nas táboas dos apartados a) e c). A **táboa de orixe** indícanos a procedencia dos distintos produtos e a **táboa de destino** o uso intermedio ou final ao que se adican os mesmos[19]. As táboas de orixe e destino, principal novidade formal no marco input-output, rompen coa tradicional visión da TIO como un documento único e, ao ser matrices por ramas de actividade e produtos –que de acordo ao espíritu do SEC-95, os produtos superan as ramas–; tamén rompen coa idea dun núcleo central formado por unha matriz cadrada de consumos intermedios, primordial para a elaboración de modelos de análise económica. A oferta (produción e importacións) e demanda (empregos intermedios e finais) de produtos quedan agora separadas nas táboas de orixe e destino, de forma respectiva. Loxicamente, os totais de ambas táboas por filas (produtos) terán que coincidir reflectindo así o equilibrio contábel entre recursos e empregos. A táboa simétrica constrúese a partir das táboas de orixe e destino, empregando certas hipóteses, e intenta cuantificar os fluxos produtivos entre unhas ramas hipotéticas que producen bens e servizos homoxéneos ou Ramas de Actividade Homoxéneas; estas poden, polo tanto, interpretarse como agregacións das tamén hipotéticas Unidades de Produción Homoxénea (UPH)[20]. En puridade, o que está propoñendo o novo sistema contábel é a elaboración dun dobre marco input-output:

1) O que relaciona produtos e ramas de actividade, construidas estas por agregación dos datos de tódalas unidades de produción cuxa actividade principal é a que dá nome á rama de referencia. Xa que, con frecuencia, ditas unidades realizan tamén actividades secundarias, as

[18] Aínda que estas táboas son moi importantes, as mesmas non son prioritarias nas estimacións rexionais xa que requiren un esforzo considerábel ao ser necesario diferenciar por ramas a produción realizada polos fogares, ou sexa, a realizada polos traballadores autónomos, especialmente concentrados no sector primario e na construción da produción realizada polas ISFLSH e as empresas financeiras e non financeiras. No propio SEC-95 (13.03) recoñécense estas dificultades conceptuais que explican a razón pola que as contas rexionais se limitan ao rexistro das actividades de produción por ramas de actividade e ás contas dalgúns sectores institucionais, como o correspondente aos fogares.

[19] Ademais existen as táboas de distribución (marxes comerciais e de transporte) e impostos que permiten relacionar a valoración a prezos básicos e a prezos de adquisición. Estas táboas, imprescindíbeis para obter as valoracións a prezos básicos, non foron publicadas.

[20] En contraste, o SEC-79 efectuaba esa homoxenización calculando, cunha información, presumibelmente semellante á que se detalla na táboa de orixe, os vectores TR e VR que, como indicamos, permiten pasar de produción efectiva dunha rama (heteroxénea) á produción distribuída pola rama (homoxénea).

ramas resultan ser non homoxéneas, no sentido de que producen máis dunha clase de ben ou servizo. Este primeiro sistema correspóndese coas táboas de orixe e destino do SEC-95.

2) O que relaciona produtos e ramas de actividade homoxéneas, definidas estas como agrupacións de unidades de produción que unicamente producen unha clase de ben ou servizo. Trátase de unidades teóricas ou conceptuais o e mesmo acontece coa orde superior de agregación. Este segundo sistema correspóndese coas táboas simétricas do SEC-95.

O primeiro é o resultado das operacións estatísticas propiamente ditas, mentres que o segundo é consecuencia da transformación dos dados orixinais. Pero, en ambos casos, o sistema de táboas interrelacionadas sería o mesmo; orixe (oferta de produtos), destino (empregos de produtos) e táboas auxiliares, que permiten relacionar os distintos criterios de valoración previstos no SEC-95. Estas últimas, por moito que se veñan denominando auxiliares, adquiren unha importancia crucial no Marco Input-Output.

1.3.1 A táboa de orixe

O marco input-output do SEC-95 inclúe unha primeira táboa denominada de orixe (TO) que nos indica a orixe local ou importada dos bens e servizos dispoñíbeis na economía para satisfascer a demanda. O núcleo da táboa é unha matriz rectangular (de orde $m \times n$) na que figuran os rexistros correspondentes á produción interior dos m bens e servizos[21] realizada polas n ramas[22] nas que se divide a economía total. Naturalmente, algunhas das entradas da matriz son nulas, indicando que a rama non produce o ben ou servizo correspondente. Ademais da oferta interior, nunha TO tamén se engaden as importacións de bens e servizos equivalentes, que inclúen bens e servizos adquiridos por unidades residentes a unidades non residentes do resto dos países da Unión Europea e do resto do mundo[23] para chegar ao total de recursos dispoñíbeis no sistema económico. Estas importacións valóranse a prezos CIF, un concepto asimilábel ao prezo básico, xa que non recolle os impostos ligados ás importacións. A suma da produción interior a prezos básicos e as importacións CIF proporciona a oferta total a prezos básicos.

Polo xeral, na táboa de orixe aparecen unhas columnas adicionais onde se rexistran as marxes comerciais, marxes de transporte e impostos netos sobre os produtos[24]. Ao sumar por filas as

[21] Os bens e servizos que aparecen na fila son grupos de produtos para un nivel de desagregación da CNPA-96.

[22] A clasificación por ramas obtense agregando os fluxos de tódalas UAE para un nivel de desagregación da CNAE-93 e a clasificación por produtos elixindo un nivel de agregación da CNPA-96.

[23] O SEC-95 recomenda separar as importacións de bens e servizos e distinguir as que teñen a súa orixe noutros países da U.E. das procedentes doutros países.

[24] Os impostos sobre os produtos inclúen os seguintes conceptos: impostos sobre o valor engadido, impostos e dereitos sobre as importacións e o resto de impostos sobre os produtos.

entradas de tódalas columnas (oferta total a prezos básicos, marxes de distribución e impostos netos sobre os produtos) obtemos a oferta total de bens e servizos a prezos de adquisición. A táboa engloba tamén dúas filas denominadas axuste CIF/FOB e consumo de residentes fóra do territorio económico. A primeira introdúcese co dobre propósito de, por unha parte, satisfacer o criterio SEC de valorar CIF as importacións por produtos e valorar FOB o total de importacións e, por outra, para ter en conta que no prezo CIF das importacións se inclúen marxes de transporte que figuran na columna das marxes de transporte, e orixinan unha dobre contabilización da produción de servizos de transporte. Por outra parte, a inserción do consumo de residentes de fóra do territorio económico sirve para engadir estes recursos exteriores á oferta dispoñíbel para abastecer a demanda dos residentes.

Deixando a un lado as diferenzas de valoración cuxa análise se realiza no Apéndice A deste capítulo, a información da táboa de orixe pode servir para estimar as transferencias netas dunha rama, un concepto empregado nas táboas elaboradas seguindo o SEC-79. Para iso, abondaría con deducir das producións realizadas por outras ramas do ben ou servizo obxecto da actividade principal dunha rama o valor das producións secundarias efectuadas polo rama[25].

A continuación presentamos unha táboa de orixe simplificada;

OFERTA	RAMAS DE ACTIVIDADE	RESTO DO MUNDO	TOTAL
PRODUTOS	Produción por produto e por rama de actividade	Importacións por produto	Oferta total por produto
TOTAL	Produción total por rama de actividade	Importacións totais	Oferta total

T.1 Táboa de orixe simplificada

E por último, indicamos as notacións que empregaremos posteriormente cando nos remitamos á matriz e aos vectores que engloba dita táboa;

[25] En realidade trátanse de dous vectores: transferencias netas de produtos fatais, veciños ou producións secundarias e vendas residuais das administracións públicas. As entradas negativas (positivas) nestas filas indican o valor de tódalas producións desa rama (outras ramas) distintas (semellantes) á produción característica da súa actividade. Loxicamente, ao sumarlle á produción efectiva de cada rama as entradas desas dúas filas óbtense o valor da produción total do ben ou servizo obxecto da actividade principal de cada rama, denominado produción distribuída.

OFERTA	RAMAS DE ACTIVIDADE	RESTO DO MUNDO	TOTAL
PRODUTOS	Z	m	r
TOTAL	$\acute{g}$		

1.3.2 A táboa de destino

Na táboa de Destino (TD) recóllense os diferentes empregos dos recursos dispoñíbeis dunha determinada economía ata esgotar o total de cada produto en cada fila. Ao mesmo tempo, a táboa mostra o valor engadido bruto e as súas compoñentes, os denominados inputs primarios, para cada rama de actividade, de forma que as columnas correspondentes conteñan a súa estrutura de custos ou función de produción. De feito, hai dous tipos de táboas de destino segundo que o criterio de valoración sexa a prezos de adquisición ou a prezos básicos. A relación entre ambos tipos de táboa é complexa e está mediatizada pola utilización dunhas táboas auxiliares ou matrices que permiten pasar da primeira á segunda. Os nomes destas táboas auxiliares indican os elementos diferenciadores dos dous conceptos de prezo e son: matriz de IVA que grava os produtos, matriz de impostos netos, matriz doutros impostos sobre os produtos, matriz doutras subvencións sobre os produtos, matriz de marxes de comercio e matriz de marxes de transporte[26].

A táboa de destino presenta unha notábel similitude formal coas táboas elaboradas seguindo os criterios SEC-79, xa que tamén están presentes aquí as tres matrices clásicas: demanda intermedia, demanda final e factores primarios, pero tras esa similitude escóndense diferenzas conceptuais moi importantes entre ambas (ver Cadro 2).

[26] Desafortunadamente estas táboas non habitúan a estar dispoñíbeis.

CADRO 2: TÁBOA DESTINO

Matriz de Consumos Intermedios
-Matriz Rectangular
-Valorada a prezos básicos e no agregado a prezos de adquisición

Matriz de Demanda Final

Matriz de Axuste (Rectangular)

Matriz de Factores Primarios
-Non inclúe transferencias
-Non inclúe importacións

En primeiro lugar, hai que indicar que a matriz de consumos intermedios da TD é unha matriz rectangular de orde $m \times n$, e o seu elemento xenérico, x_{ij}, indícanos *o valor a prezos de produtor das compras do produto i realizadas pola rama j*. En segundo lugar, tamén variou o concepto de intraconsumo[27]. Unha terceira diferenza radica nos cambios que experimentaron algunhas convencións contábeis en relación coa delimitación dos fluxos intermedios e finais. O SEC-95 amplía a definición da noción de formación bruta de capital fixo, que agora inclúe tanto adquisición de certos activos inmateriais (software informático, prospeccións mineiras e petroleiras e orixinais das obras recreativas e artísticas) como os obxectos valiosos (xoias, obras de arte, etc.). En casi tódolos supostos, trátase dun desprazamento da fronteira entre a demanda intermedia e a demanda final, é dicir, que a mesma operación antes se anotaba como consumo intermedio da unidade de produción compradora agora pasa a rexistrarse como parte da súa formación bruta de capital. O caso contrario é o gasto en I+D, anteriormente clasificado como formación bruta de capital e hoxe como consumo intermedio. Finalmente, a TD inclúe ademais das tres matrices mencionadas, unha "matriz de axuste", situada entre a MCI e MFP, que non ten precedente nas anteriores táboas. Trátase dunha matriz rectangular con catro filas e tantas columnas como ramas e operacións de demanda final. As denominacións das filas desta matriz son:

- Impostos netos sobre os produtos.

- Axuste CIF/FOB.

[27] Lembremos que no SEC-79 os intraconsumos de orixe interior se eliminaban a partir dunha desagregación de 3 díxitos da CNAE. En contraste, o SEC-95 elimina os reempregos dentro dunha UAE local, agora definida en relación á clasificación a 4 díxitos da CNAE-93, pero esixe que se contabilicen os intercambios entre distintas UAE, aínda cando ambas sexan parte da mesma empresa.

- Consumo de non residentes no territorio.

- Consumos de residentes fóra do territorio.

A finalidade principal da matriz de axuste é permitir pasar da valoración de empregos totais a prezos básicos á valoración a prezos de adquisición. Obsérvese, por exemplo, que ao sumarlle ao total de consumos intermedios a prezos básicos os impostos netos sobre os produtos que gravan as compras intermedias de cada rama, obtemos o total de consumos intermedios a prezos de produtor. E ao sumarlles estes impostos ás compoñentes da demanda final obtemos os conceptos de demanda final valorados a prezos de adquisición.

O dobre axuste realizado co consumo dos non residentes no territorio económico ten como finalidade eliminar o consumo dos non residentes do gasto de consumo final dos fogares e calcular as exportacións totais de bens e servizos. De acordo ao SEC-95, a noción de importacións e exportacións deixa de basearse nos movementos físicos a través das fronteiras. Neste contexto unha operación de comercio exterior defínese polo cambio de propiedade de bens e servizos entre residentes e non residentes. Tal definición implica que as exportacións teñen que incluír o gasto interior en consumo final dos residentes no resto do mundo[28].

A adecuación do valor das importacións e exportacións ás definicións do SEC-95 vén practicándose mediante unha partida global de axuste na táboa de Orixe, engadindo o consumo dos non residentes no exterior ás columnas de importacións, e outra na de destino, sumando o consumo interior dos non residentes á correspondente columna de exportacións. Se ademais, como é frecuente, o consumo das familias está estimado na táboa de destino baixo criterios interiores, haberá que restarlle a partida de axuste engadida ás exportacións e agregarlle tamén o aumento rexistrado nas importacións, para manter o equilibrio entre recursos e empregos. Tal e como recomenda de forma explícita o SEC-95, o total da columna do consumo das familias será entón consumo nacional, o consumo das familias residentes sexa cal sexa o territorio onde teñan lugar as operacións de consumo, e non interior.

Deseguido preséntase un exemplo simplificado da táboa de destino;

[28] En ambos casos, o gasto turístico entendido en sentido amplo é a partida máis importante, pero non a única.

EMPREGOS	RAMAS DE ACTIVIDADE	DEMANDA FINAL	TOTAL
PRODUTOS	Consumos intermedios por produto e por rama de actividade	Exportacións + Gasto en consumo final + Formación bruta de capital	Empregos totais por produto
COMPOÑENTES DO VALOR ENGADIDO	Valor engadido por compoñente e por rama de actividade		
TOTAL	Inputs totais por rama de actividade		

T.2 Táboa de destino simplificada

Por último, ao igual que procedemos en relación á táboa de orixe, destacamos as notacións a utilizar de aquí en diante á hora de simbolizar a matriz (consumos intermedios) e os vectores[29] desta táboa;

EMPREGOS	RAMAS DE ACTIVIDADE	DEMANDA FINAL	TOTAL
PRODUTOS	X	y	e
COMPOÑENTES DO VALOR ENGADIDO	v'		
TOTAL	g'		

1.3.3 A táboa simétrica

A táboa simétrica (TIOS) obtense a partir das táboas de orixe e destino e o seu obxectivo é dispoñer dunha táboa input-output definida sobre ramas de actividade homoxéneas ou, o que é o mesmo, ramas que producen exclusivamente o produto que dá o nome á rama. A idea da TIOS é logo un segundo sistema orixe-destino adaptado ao concepto de ramas de actividade homoxéneas, ou sexa, as que producen de forma única e exclusiva unha clase de bens ou servizos. Porén, as UAE locais, ben sexa por razóns técnicas ou ben sexa por circunstancias económicas

[29] Por comodidade, nesta investigación optamos por traballar coa demanda final e as compoñentes do valor engadido agregadas de acordo a vectores, pero naqueles casos onde interese poden presentarse como matrices.

e/ou organizativas, acostuman producir simultaneamente máis dunha clase de bens e servizos, o que impide unha correspondencia biunívoca perfecta entre as ramas de actividade, cuxos datos se obteñen por agregación dos correspondentes ás UAE locais, e os produtos. En consecuencia, infrínxese o suposto básico do modelo input-output de que cada produto se obtén mediante unha tecnoloxía determinada, é dicir, mediante o emprego de certas cantidades, e non outras, de inputs. O sistema contábel así construído mostrará unha función de produción ou estrutura de custos para cada rama de actividade, pero a información ofrecida non permitirá asignar os custos aos diferentes bens e servizos producidos pola rama en cuestión, polo que tal estrutura única non poderá atribuírse a un produto específico. O concepto de Unidade de Produción Homoxénea (UPH) intenta restablecer a coherencia do modelo. Este tipo de unidades caracterízase por desenvolver unha soa actividade, sen que poidan darse actividades secundarias[30]. A agregación das UPH locais conduce ás ramas de actividade homoxéneas e agora si que, ineludibelmente, a súa estrutura de custos será representativa do particular ben ou servizo que producen.

A elaboración da TIOS esixe resolver o asunto das producións secundarias, que no anterior sistema contábel se redirixían (o output, pero non os inputs empregados na súa produción) por medio dunha fila de transferencias á rama de actividade na que eran produtos característicos, dando lugar ao dobre concepto de produción efectiva e produción distribuída. O que propón agora o SEC-95 é a aplicación dunha metodoloxía de transferencia de inputs e outputs. No caso destes últimos, abonda con trasladalos horizontalmente na TO dende a rama en que realmente se producen á rama da que son característicos de acordo ás clasificacións oficiais (CNAE-93 e CNPA-96). Obtense así unha TO onde a oferta interior de produtos na súa totalidade aparece na diagonal principal, enténdese unha vez xa formalizadas as agregacións convenientes. No caso dos inputs debemos descontar en cada rama os consumos intermedios empregados e o valor engadido xerado nas producións secundarias e pasalos a rexistrar na nova rama de destino. É dicir, debemos modificar na TD as estruturas de custos das ramas de actividade para que os inputs empregados na produción dos outputs transferidos os acompañen. Deste modo, homoxenízanse as producións das ramas e pódese, tamén realizando as agregacións convenientes, obter unha MCI cadrada, con tantas filas como columnas.

Para formalizar o axuste dos consumos intermedios e do valor engadido é necesario coñecer de forma exhaustiva a estrutura de custos para as distintas producións secundarias realizadas por cada UAE local, cando estas producen máis dun ben ou servizo. Trátase dunha tarefa imposíbel,

[30] Por suposto, estamos falando de unidades analíticas non observábeis directamente no mundo real. Dalgunha maneira son idea ou esencia do establecemento produtivo, o que debería ser este para satisfacer a ambición da teoría. Co crecente fenómeno da diversificación produtiva a realidade afástase cada vez máis do ideal teórico.

xa que en moitas ocasións os produtos non son resultado dunha actividade específica, senón un subproduto obrigado, resultando imposíbel asignar os custos incurridos ás diversas producións. O SEC-95 contempla dúas hipóteses extremas para facer o reparto. A hipótese de tecnoloxía do produto supón que a produción (construción dunha vivenda, a modo de exemplo) se realiza coa mesma tecnoloxía sen importar cal sexa a rama produtora (agricultura ou construción, por exemplo). A hipótese de tecnoloxía da industria, en troques, non dá importancia ao produto do que se trate (produtos agrícolas ou construción), pois todo o que produce unha rama (agricultura, por exemplo) faino sempre coa mesma tecnoloxía.

Na práctica, é posíbel combinar ambas hipóteses e iso é o que xeralmente se aplica. O INE na súa Nota sobre a elaboración da táboa simétrica da economía española 1995, sinala que o único procedemento óptimo para cometer tales transferencias de inputs sería obviamente que as unidades informantes proporcionasen o valor real dos mesmos. Pero, en realidade as empresas non habitúan dispoñer deses datos, polo que se recorre a un procedemento mixto: a obtención de información complementaria combinada con opinións cualitativas de expertos e a aplicación no seu caso dalgunha das hipóteses tradicionais neste campo (tecnoloxía do produto *vs.* tecnoloxía da industria). Sobre este punto voltaremos ao longo desta investigación, xa que a construción de matrices simétricas remata sendo na meirande parte dos casos un problema matemático como recoñece o propio INE na súa nota: ª construción das columnas das ramas homoxéneas non pode considerarse un exercicio de carácter estatístico, senón como unha aproximación metodolóxica". A existencia de ramas que producen máis dunha trintena de bens e servizos diferentes, e que o número total de producións secundarias transferidas pode estar doadamente por enriba do millar impide un tratamento individualizado de cada unha delas esixindo a utilización dalgún mecanismo de axuste óptimo.

A aparencia da táboa simétrica é semellante á táboa de destino, pero con dúas diferenzas destacábeis. En primeiro lugar, a MCI é unha matriz cadrada. En segundo lugar, ao final da táboa inclúese un vector de importacións, co que a táboa queda "cadrada" (no sentido de que os totais por filas e columnas coinciden). Aínda que a táboa simétrica poida resultar moi atractiva para a análise económica futura, hai dúas cuestións importantes. A primeira, a TIOS é unha elaboración asentada en hipóteses cuestionábeis e, na práctica, aplicadas seguindo as intuicións dos elaboradores da táboa e información *ad hoc*. E a segunda, a TIOS artéllase en torno ás ramas de actividade homoxéneas, que son meramente conceptuais e veñen a representar a estrutura de custos dun tipo exclusivo de produto.

Agora, de forma simplificada, acompañamos unha táboa input-output simétrica;

	PRODUTOS	DEMANDA FINAL	TOTAL
PRODUTOS	Consumos intermedios	Exportacións + Gasto en consumo final + Formación bruta de capital	Empregos totais por produtos
COMPOÑENTES DO VALOR ENGADIDO	Valor engadido	-	-
RESTO DO MUNDO	Importacións	-	-
TOTAL	Oferta total por produto	-	OFERTA TOTAL = EMPREGOS TOTAIS

T. 4 Táboa input-output simétrica simplificada (produto por produto)

Por último, indicamos as notacións escollidas para facer mención aos elementos desta táboa[31]

	PRODUTOS	DEMANDA FINAL	TOTAL
PRODUTOS	X	y	e
COMPOÑENTES DO VALOR ENGADIDO	v'		
RESTO DO MUNDO	m'		
TOTAL	r'		

1.4 Problemas adicionais na estimación de táboas rexionais

A preocupación por parte dos dirixentes da Unión Europea de garantir a comparabilidade das estatísticas rexionais a escala europea non foi acompañada dun interese parello por mellorar a fiabilidade dos datos que se publican para cada rexión. Isto levou a moitas rexións, non só en España, a emprender accións unilaterais para mellorar a información no seu ámbito de actuación

[31] Na medida do posíbel procuramos seguir a simboloxía máis usual. Neste caso somos conscientes de que retomamos algunhas notacións empregadas na táboa de destino, pero entendemos que non conducen a ningunha confusión porque van ser empregadas en contextos diferentes.

con un resultado non apetecíbel: a duplicidade de estatísticas oficiais, que na meirande parte dos casos só serviu para confundir aos usuarios.

Un claro exemplo deste problema atopámolo na elaboración de táboas input-output rexionais, que como elemento base das contas económicas se enfronta directamente a estes problemas. Existe actualmente un importante número de TIO rexionais e incluso de ámbito menor que aínda que seguen unha metodoloxía común (SEC-79 e SEC-95) non son directamente comparábeis.

Moitas son as razóns que hai detrás da falla de comparabilidade, pero seguramente que un dos motivos esenciais é a existencia de enormes atrancos para rexistrar con fidelidade a actividade das unidades multirrexionais, o que dificulta a estimación das contas económicas rexionais. Estas dificultades xa veñen de vello e non deben atribuirse en exclusiva á implantación do SEC-95. Son numerosas as actividades produtivas que presentan problemas de rexionalización: Industrias extractivas, Produción e distribución de enerxía eléctrica, gas e auga, Construción, Transporte, almacenamento e comunicacións, Intermediación financieira, etc. Aínda que este non é o momento indicado para tratar con detalle os problemas de rexionalización nas contas económicas, ilustraremos con un exemplo cal é a traba básica. A cuestión que imos a formular é sinxela de enunciar: ¿como debe contabilizarse a produción das denominadas sedes centrais cando estas só realizan actividades auxiliares?

Cando a produción dunha empresa ten lugar en dous ou máis establecementos diferentes, certas actividades auxiliares poden centralizarse. Estamos ante unidades de produción que subministran servizos, normalmente sen contrapartida económica directa, á xeralidade dos establementos que forman parte dunha organización, independentemente da localización xeográfica. Acostuman ser, polo tanto, centros de custos que non xeran ingresos certos. En tal caso, de acordo co SEC-95 tódolos custos das actividades auxiliares centralizadas deben distribuírse entre os establecementos aos que serven, por exemplo de modo proporcional ás súas producións ou aos seus custos, e sumarllos aos propios custos de ditos establecementos[32]. Este criterio non plantexa contradicións no ámbito das contas nacionais, pero si no da contabilidade rexional, ao imputarlles a determinadas rexións consumos ou rendas ficticias, que previamente se segregaron do sitio onde se xeraron e teñen lugar os seus efectos económicos[33]. Entón, ¿cal é a solución?

[32] SEC-95 3.13. As actividades auxiliares considéranse parte integrante das actividades principais ou secundarias ás que están asociadas. Polo tanto: a) A produción das actividades auxiliares non se recoñece explicitamente nin se rexistra por separado. Tampouco se rexistra, polo tanto, o uso de dita produción. b) Tódolos inputs consumidos polas actividades auxiliares (materias primas, factor traballo, consumo de capital fixo, etc.) considéranse inputs das actividades principais ou secundarias correspondentes.

[33] Se unha economía rexional só ten sedes centrais que ofrecen servizos auxiliares, a súa produción en base a

Entre as solucións propostas, merece considerar a de asignar unha produción ficticia ás sedes centrais e *vendela* aos centros de produción. Deste xeito, habería logo un comercio exterior de servizos de sedes centrais entre rexións e países de evidente perfil económico, aínda que de difícil cuantificación nos sucesivos escalóns de empresas multinacionais. Polo tanto, a idea é considerar como importacións os servizos da sede central cando esta se atopa fóra de rexión pero existen unidades de actividade económica locais na mesma; e como exportacións os servizos da sede central cando esta se atopa dentro da rexión, pero existen unidades de actividade económica no exterior. Debemos ter en conta que ao marxe dos inconvenientes prácticos, tal proposta contravén abertamente os criterios xerais do SEC-95 (SEC-95, 3.13). Aínda así, a opción xeralmente seguida, imputar os custos da sede central exclusivamente ao territorio onde se sitúa, tamén incumpre as normas xerais do SEC-95 e non consigue transmitir unha imaxe real da economía rexional: terá lugar unha infravaloración do excedente das rexións onde se concentran as sedes centrais (o excedente de cada unha destas actividades é cero xa que o valor da produción é igual ao valor dos custos), compensada por unha sobrevaloración equivalente do excedente das rexións que acollen os centros de produción (non se consideran tódolos custos no seu proceso de produción).

Na Contabilidade Rexional de España (CRE-95) empréganse preferentemente métodos de rexionalización descendentes, que consisten en distribuír a estimación nacional mediante un indicador de referencia que aproxime da mellor maneira posíbel a variábel a estimar. A utilización de métodos descendentes en vez de métodos ascendentes, que teñen capacidade para proporcionar estimacións rexionais individualizadas a partir da medición directa das variábeis, elimina completamente o problema formulado nos parágrafos anteriores asegurando a comparabilidade e a consistencia dos datos ofrecidos pero reducindo claramente a súa fiabilidade[34]. Porén, a nota metodolóxica da CRE-95 ao facer referencia ás unidades auxiliares afástase do criterio do SEC considerándoas entidades separadas ao contrario do que acontece na óptica nacional. O criterio aplicado, acorde co de residencia, é atribuír as citadas unidades á actividade principal á que sirven e á rexión na que se localizan, o que mantén o VAB pero incrementa o valor da produción como suma de producións rexionais (as actividades auxiliares dende a óptica nacional non son produción). Para aclarar este criterio inclúese o seguinte exemplo: "A sede central dunha empresa de transporte marítimo situada en Madrid asignaráselle rexionalmente a Madrid na activi-

este criterio sería nula (polo tanto tamén a súa renda).

[34]SEC-95 (13.16). *En principio, a vantaxe do método ascendente é que utiliza directamente as fontes pertinentes a escala rexional. Por outra parte, os métodos descendentes teñen vantaxe de garantir a coherencia dos datos numéricos entre as contas nacionais e rexionais. Non obstante, o seu maior inconveniente reside en que as estimacións non se obteñen a partir dos datos directos, senón utilizando unha clave de distribución supostamente relacionada co fenómeno que ten que medirse.*

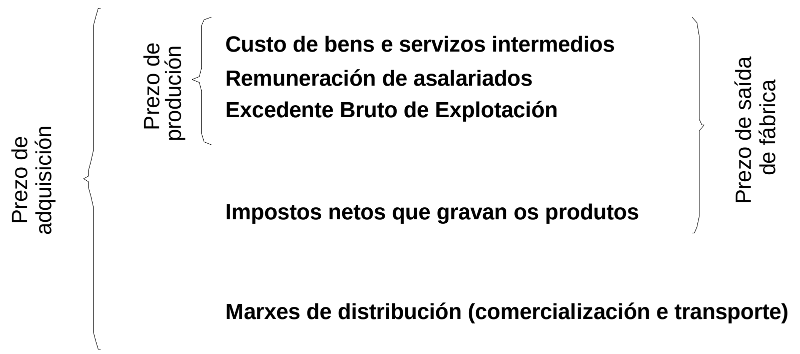
dade de transporte marítimo; en canto á súa produción, medirase a través dos seus custos e será consumida intermediariamente polas unidades ás que serve a mencionada sede central (CRE-95, p. 10)".

1.A Criterios de valoración SEC-79 *vs.* SEC-95

Deixouse premeditadamente para o final deste capítulo os criterios de valoración, coa intención de que a novidade formal do novo esquema de táboas interrelacionadas non eclipsara o que posibelmente sexa a súa maior innovación e o seu máis claro punto de ruptura coa tradición dos sistemas contábeis precedentes. Tanto o SEC-79 como SEC-95 combinan diversos criterios de valoración para unha mesma variábel ou operación co obxectivo de reflectir o mundo real, ou sexa, a diferente percepción do prezo que ten cada un dos axentes económicos que interveñen na clase de transaccións que se trate. A presenza de marxes de comercialización e transporte, así como os impostos que gravan os produtos e o imposto sobre o valor engadido (IVA), crían unha brecha entre os prezos pagados polo adquirinte e os prezos percibidos polo vendedor.

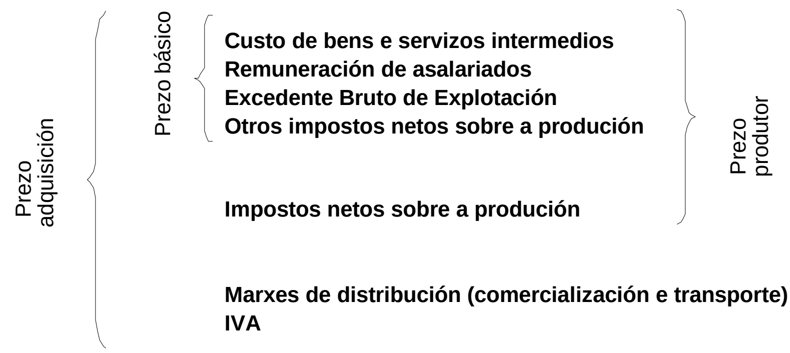
O SEC-79 distingue entre prezo de produción, prezo de saída de fábrica e prezo de adquisición. O prezo de produción expresa o prezo percibido polo produtor dun ben ou servizo e exclúe os impostos netos de subvencións que gravan os produtos. Ao incluír estes impostos netos obtense o prezo de saída de fábrica; cando estes impostos netos son positivos (negativos), o prezo de saída de fábrica é maior (menor) có prezo de produción. O prezo pagado polo adquirinte recolle, adicionalmente, as marxes de comercialización e transporte. A Figura 1 mostra de modo gráfico os elementos do custe incluídos en cada caso.

Figura 1: Tipos de prezos no SEC-79



O SEC-95 dintingue tamén tres tipos de prezos: prezos básicos, prezos de produtor e prezos de adquisición. Os dous primeiros son conceptos adaptados ao punto de vista da unidade de produción, mentres que o terceiro correspóndese co prezo pagado polo comprador. A valoración da produción a prezos básicos inclúe o custo de factores intermedios, o custo dos factores primarios (remuneración aos asalariados mais excedente bruto de explotación) e os impostos netos de subvencións que gravan a actividade produtiva con independencia da escala. A estas dúas últimas figuras o SEC denomínaas "Outros impostos sobre a produción" e "Outras subvencións". A produción valorada a prezos de produtor inclúe, en adición, os impostos sobre os produtos netos das subvencións aos produtos e correspóndese co prezo de saída de fábrica empregado polo SEC-79. Por último, para valorar a produción a prezos de adquisición hai que incluír as marxes das ramas de distribución (comercio e transporte) e o IVA que grava os produtos (Figura 2).

Figura 2: Tipos de prezos no SEC-95



O prezo básico, observábel directamente pola unidade de produción ao derivarse da súa propia estrutura de custos, é o criterio recomendado polo SEC-95 para valorar os recursos[35]. En termos simplistas, corresponderíase co ingreso que o produtor percibe por cada unidade de ben ou servizo producido e, por tanto, inclúe as subvencións aos produtos. O antigo SEC-79 optaba pola valoración dos recursos a prezo do produtor (saída de fábrica). A diferenza co prezo básico estriba na súa inclusión (exclusión) dos impostos (subvencións) sobre os produtos. Por regra xeral, coincidirá co importe que o produtor recibe do comprador e, en consecuencia, o prezo de produtor tamén será observábel pola unidade de produción.

Para o total de empregos dos bens e servizos (demanda intermedia e demanda final), o SEC-95 adopta a valoración a prezos de adquisición que, polo demais, acostuma ser o dato dispoñíbel na realidade económica. O prezo de adquisición unicamente é observábel polo comprador

[35] O prezo básico é o criterio óptimo de valoración dos recursos dende o punto de vista teórico, xa que mostra dunha maneira máis exacta o custo dos elementos que interveñen no proceso produtivo e é en gran medida independente da fiscalidade.

final, xa que se identifica co custo efectivamente soportado.

Do prezo de produtor chégase ao prezo de adquisición engadindo as marxes incorporadas pola distribución e, eventualmente (cando o comprador non pode deducirllo, como acontece coas familias), o IVA. Nótese que este imposto pode recaer tanto sobre o valor do ben a prezo de produtor como sobre a súa marxe de distribución. O paso dos prezos básicos a prezos de adquisición ou viceversa implica a reasignación das marxes comerciais e de transporte, tendo en conta que o total destas marxes por produto debe ser igual á totalidade das marxes obtidas polas ramas de comercio e de transporte, máis os ocasionalmente obtidos como producións secundarias doutras ramas[36].

A plasmación práctica dos criterios de valoración do SEC-95 no marco input-output da Contabilidade Nacional fai xurdir os fluxos de produtos valorados a prezos básicos, se ben se inclúen en cada caso as oportunas partidas de axuste para que o total da oferta por produtos e de cada variábel da demanda (intermedia ou final) siga o criterio do SEC-95 e apareza tamén a prezos de adquisición. Non obstante, hai algúns casos específicos que se apartan desta regra. Ademais da produción de mercado, á que se aplica a norma xeral, o SEC-95 contempla a produción non de mercado e distingue entre "Produción para o uso final propio" e "Outra produción non de mercado"[37].

Enténdese por produción de mercado a que se vende ou cede no mercado ou se destina a ese fin. A súa compoñente fundamental será o conxunto de bens e servizos ofrecidos polos produtores privados. Agora ben, cabe a posibilidade de que os produtores públicos e as institucións sen fin de lucro ao servizo dos fogares (ISFLSH) de carácter privado vendan os seus bens e servizos no mercado. Para este último suposto, o SEC-95 introduce como criterio subsidiario o dos prezos economicamente significativos. Se o prezo dos seus produtos cubre ao menos o cincuenta por cen dos custos de produción, estaremos ante unha produción de mercado.

Respecto á produción de non mercado quedará formada prioritariamente polos bens e servizos producidos polas administracións públicas e ISFLSH e que se subministran gratuitamente ou a un prezo que non é economicamente significativo[38]. Nestes casos, o prezo ou non existe,

[36] A identificación das marxes de distribución dun produto require investigar o prezo de adquisición de cada un dos empregos (intermedios e finais) e, unha vez illado o efecto do IVA, proceder por diferenza co prezo básico ou o prezo de produtor do ben. O asunto das marxes comerciais e de transporte é tratado, entre outros, por Muñoz Cidad (2000, p. 196).

[37] A distinción entre produción de mercado e non de mercado articúlase en torno ao carácter público ou privado da unidade institucional que realiza a produción que, á súa vez, se fundamenta na idea de control efectivo da unidade institucional por parte das administracións públicas.

[38] A produción das AAPP e as ISFLSH de mercado (cando os ingresos cubren máis do cincuenta por cen dos custos) considérase produción de mercado e acumúlase coa produción das sociedades.

ou non reflicte axeitadamente o custo de produción sumándolles aos custos incorridos por compras intermedias e remuneración dos asalariados, unha estimación do consumo de capital fixo. Estes produtos poden ser por tanto de consumo individual (educación, sanidade, etc.) como de carácter colectivo (administración xeral, defensa, etc.) e aparecen no SEC-95 baixo a rúbrica "Outra produción non de mercado". E é que o SEC-95 especifica previamente un segundo tipo de produción de non mercado, a produción para uso final propio, que é utilizada polo produtor como emprego final. Englóbanse nesta categoría o autoconsumo dos fogares (produtos agrícolas, servizo doméstico remunerado, produción imputada de servizos de aluguer de vivenda propia e vivendas construídas polos fogares para o seu uso) e a formación bruta de capital fixo que outros produtores realizan para si mesmos. O SEC-95 aconsella valorar a produción para uso final propio a prezos básicos, empregando prezos de produtos semellantes intercambiados no mercado, excepto no caso da construción que recomenda que se valore polo custo incorrido na produción, sen ter presente o excedente de explotación ou renda mixta.

No tocante á valoración das exportacións e importacións, o SEC-95 combina distintos tipos de prezos co fin de compatibilizar as metodoloxías da Contabilidade Nacional e a Balanza de Pagos. En síntese, as importacións valóranse CIF –prezo dun ben entregado na fronteira do país importador, antes do pago de impostos e dereitos de importación–, dado que é un criterio asimilábel ao prezo básico da produción. E as exportacións rexístranse FOB –valor dos bens a prezos básicos, mais o seu custo de distribución ata a fronteira do país exportador e mais os impostos netos de subvencións sobre os bens exportados–, por ser coherente co criterio do prezo de adquisición utilizando nos totais de empregos intermedios e finais, aínda que no nivel individual de cada produto o valor FOB deberá depurarse das marxes de distribución dentro do territorio rexional e dos eventuais impostos ou subvencións incluídos no prezo FOB, xa que doutra maneira non se alcanzaría o equilibrio cos recursos a prezos básicos. Como as importacións se valoran CIF por produtos e FOB para a economía total, é necesaria a presenza dunha fila axuste CIF/FOB na táboa de orixe.

1.B Resumo dos cambios metodolóxicos SEC-79/SEC-95

O SEC-95 está baseado fundamentalmente no SCN-93, pero hai algunhas diferenzas entre eles. Ademais de variacións na presentación, hai que destacar que os conceptos do SEC-95 son máis específicos e precisos cós do SCN-93. As principais diferenzas que se observan entre o SEC-95 e o SEC-79 apóianse principalmente, aínda que non de forma exclusiva, nas diferenzas existentes entre o SCN-93 e o SCN-68 e resúmense nos seguintes apuntes:

a) A produción total divídese en produción de mercado, produción non de mercado para uso final propio e outra produción non de mercado. É dicir, procédese a unha descomposición da produción non de mercado en produción para uso final propio (produtos agrícolas, servizo doméstico remunerado e alugueres imputados producidos e autoconsumidos polos fogares; bens, servizos e construcións utilizadas como formación de capital polas propias unidades que os producen, etc.), e outra produción non de mercado.

b) Realízase un tratamento moito máis detallado das marxes comerciais e de transporte.

c) A introdución das táboas de orixe e destino, que aínda que figuraban no SCN-68, non se incluíron no SEC-79.

d) Valoración da produción e o valor engadido a prezos básicos (prezos de adquisición menos marxes comerciais e de transporte, e menos impostos netos sobre os produtos) no lugar de prezos a saída de fábrica.

e) Calcúlase o consumo que os non residentes realizan no territorio económico e o consumo que os residentes realizan fóra do territorio económico. Estes cálculos permiten o paso de magnitudes interiores a nacionais. Tanto un como o outro se integrarán no seu momento segundo corresponda a importacións ou a exportacións.

f) Introdución dos conceptos de poboación economicamente activa e desemprego, ademais da utilización de variábeis postos de traballo, postos de traballo equivalentes a tempo completo e número total de horas traballadas como medidas de emprego.

g) Rexistro do consumo de capital de tódalas infraestruturas públicas (estradas, presas, etc.), o que modifica o cálculo da outra produción non de mercado das administracións públicas.

h) Incorpórase unha nova definición do consumo final usando dous conceptos: o gasto en consumo final e consumo final efectivo. O primeiro asóciase máis ao concepto de consumo público que existía no SEC-79, mentres que o segundo divídese no SEC-95 entre o consumo individual e o colectivo. O individual é facilmente asignábel aos individuos e necesita o acordo da persoa que o recibe facendo referencia aos gastos sanitarios, de educación e protección social fundamentalmente; mentres que o colectivo responde ás prestacións que de forma simultánea se realizan a tódolos membros da comunidade, recibíndose pasivamente (seguridade, defensa, servizos públicos xerais, planificación económica, etc.). Outro concepto ligado á diferenza entre o gasto en consumo final e o consumo final efectivo sobre as "transferencias sociais en especie" que comprenden os bens e servizos individuais proporcionados aos fogares como transferencias en especies por unidades das AAPP, e as ISFLSH tanto se se adquiriron no mercado como se proceden da produción non de mercado das unidades mencionadas. En concreto, diferéncianse primordialmente as medicinas, próteses e vehículos para minusválidos, transporte escolar, ensino, sanidade e servizos sociais.

i) Diferenzas na valoración das operacións de comercio exterior.

j) Novas definicións da produción do servizo de seguro non vida e do arrendamento financeiro, ademais de considerar como produción o traballo literario e artístico, os pagos recibidos polo seu uso como polas licenzas para o uso de activos inmateriais non producidos (patentes, marcas, franquicias, etc.).

k) Desaparición da fila de IVA que grava os produtos.

l) Ampliación do concepto de formación bruta de capital fixo coa inclusión do gasto en software informático, o gasto en prospección mineira (xa non se consideran consumos intermedios) e a compra de orixinais de obras recreativas, literarias ou artísticas.

m) Introdución do concepto de renda mixta definida como saldo contábel da conta de explotación das empresas non societarias pertencentes ao sector fogares, substituindo ao excedente de explotación destas mesmas unidades.

n) Considérase que diversos tipos de bens producidos polos fogares, tales como a confección textil ou a fabricación de móbeis, non son significativos e non deben rexistrarse.

o) Desaparece a fila de transferencias. Nas táboas realizadas en base ao SEC-79 aparecía na matriz de inputs primarios o que se denominaba "fila de transferencias" coa que se diferenciaba a produción principal da rama da produción secundaria que era típica doutra rama. Isto daba lugar a dous conceptos de produción: produción efectiva, que engloba a principal e a secundaria, e a produción distribuída que só inclúe a principal.

TÁBOA A1

RESUMO: PRINCIPAIS EFECTOS LIGADOS Á APLICACIÓN DO SEC-95

A) CONTA DE PRODUCIÓN

Operacións	Tipo de modificación	Efecto previsíbel sobre o valor da operación
* *Produción*	– Cambio de valoración: de prezos saída de fábrica a prezos básicos.	(1)
	– Tratamento da produción do seguro.	(+)(2)
	– Reclasificación de certos gastos militares.	(3)
	– Inclusión de todos os activos das AA.PP (estradas, pontes, etc.) no cálculo do Consumo de capital fixo.	(+)
	– Valoración da produción para uso final propio.	(+)
	– Reclasificación *mercado/non mercado*.	(+)
	– Orixinais de obras literarias, artísticas e recreativas.	(+)
	– Servizos ligados á utilización de orixinais de obras literarias, artísticas e recreativas.	(+)
	– Remuneración en especie.	(+)(4)
	– Reempregos UAEL.	(5)
* Consumos intermedios	– Software como FBCF.	(-)
	– Reclasificación de certos gastos militares.	(-)
	– Exploración minera.	(-)
	– Servizos ligados á utilización de orixinais de obras literarias, artísticas e recreativas.	(+)
	– Reclasificación Impostos / transferencias	(+)
	– *Licencias para uso de activos inmateriais.*	(+)
	– Reempregos UAEL.	(5)
* VAB	– Cambios na produción menos cambios en consumos intermedios.	(6)

(1) Como cada axente percibe os prezos de forma distinta, combínanse distintas valoracións: o total dos empregos rexistrarase a prezos de adquisición e a produción a prezos básicos. A matriz de transaccións intermedias estará valorada no seu conxunto a prezos básicos. Efecto (+) ou (-) nas distintas ramas de actividade segundo o peso de impostos e subvencións sobre os produtos da rama.

(2) Esta modificación xa estaba incorporada na anterior base contábel da CRE-86.

(3) Os efectos sobre a produción son de dúas clases: unha minoración da outra produción non de mercado, debido á reclasificación de *consumos intermedios*, a *formación bruta de capital fixo* de aqueles produtos militares susceptíbeis de ser usados civilmente: e un aumento de dita produción, debido ao incremento do pertinente consumo de capital fixo deses mesmos produtos.

(4) Co SEC-95 considéranse soldos e salarios todo aquilo que non é estritamente necesario para o proceso de produción e que é proporcionado polos empregadores gratuitamente ou a un prezo moi baixo.

(5) O tipo de efecto descoñécese pola imposibilidade de comparar o antigo e o novo tratamento dos reempregos dentro das Unidades de Actividade Económica Local (UAEL).

(6) O VAB recolle tódolos cambios correspondentes á produción e os consumos intermedios, dado que é un saldo entre ambas operacións. É importante reseñar que como resultado de ditos cambios (e especialmente dos introducidos nos criterios de valoración) orixínase unha distribución distinta, entre a CRE-86 e a CRE-95, do peso do VAB das diferentes ramas de actividade no total. Amplíase o ámbito dos asalariados: inclúense os propietarios de sociedades ou cuasisociedades que traballan nas empresas. Deste modo incrementarase a importancia relativa da remuneración de asalariados e decaerá a do excedente bruto de explotación.

FONTE: INE, CONTABILIDADE REXIONAL DE ESPAÑA E ELABORACIÓN PROPIA.

TÁBOA A2

RESUMO: PRINCIPAIS EFECTOS LIGADOS Á APLICACIÓN DO SEC-95

B) COMPOÑENTES DA DEMANDA E IMPORTACIÓNS

Operacións	Tipo de modificación	Efecto previsíbel sobre o valor da operación
* Gasto en consumo final (1)	– Tratamento da produción do seguro.	(+)(2)
	– Reclasificación de certos gastos militares.	(-)(3)
	– Inclusión de todos os activos fixos das AA.PP (estradas, pontes, etc.) no cálculo do Consumo de capital fixo.	(+)(4)
	– Valoración da produción para uso final propio.	(+)
	– Reclasificación *mercado/non mercado*.	(+)
	– Remuneración en especie.	(+)
* FBCF	– Software como FBCF.	(+)
	– Reclasificación de certos gastos militares.	(+)
	– Exploración minera.	(+)
	– Valoración da produción para uso final propio.	(+)
	– Orixinais de obras literarias, artísticas e recreativas.	(+)
* Exportación fob	– Servizos ligados á utilización de orixinais de obras literarias, artísticas e recreativas.	(+)
	– Licencias para uso de activos inmateriais.	(+)
	– Cambio de valoración cif/fob.	(-)
* Importación fob	– Servizos ligados á utilización de orixinais de obras literarias, artísticas e recreativas.	(+)
	– Licencias para uso de activos inmateriais.	(+)
	– Cambio de valoración cif/fob.	(-)

(1) Comprende: Gasto en Consumo Final dos Fogares, das ISFLSH e das Administracións Públicas.
(2) Esta modificación xa estaba incorporada na anterior base contábel da CRE-86
(3) Co SEC-95 faise unha distinción: os gastos de capital referentes a instalacións ou bens de uso militar susceptíbeis de uso civil (hospitais, aeroportos, etc.) considéranse FBKF. De aí que o valor dos consumos intermedios diminuirá proporcionalmente.
(4) A produción non de mercado valórase polos custos totais de produción. Ao aumentar o valor do consumo de capital fixo increméntase a produción das AA.PP. nesta mesma cuantía e en consecuencia o consumo colectivo.

FONTE: INE, CONTABILIDADE REXIONAL DE ESPAÑA E ELABORACIÓN PROPIA.

Capítulo 2

A análise input-output no seo do SEC-95

2.1 Introdución

O obxectivo deste capítulo é mostrar a tremenda capacidade de análise económico do novo marco input-output gracias a inclusión das táboas de orixe e destino no seu formato. En primeiro lugar, dentro deste apartado introdutorio, destacaremos algunhas consideracións preliminares –que se recollen no propio SEC-95[1]– acerca da táboas de orixe e destino e da táboa simétrica. Despois presentemos as relacións contábeis básicas que se desprenden do mesmo, para logo enfatizar as posibilidades de análise estrutural a partir das táboas de orixe e destino.

A maior parte da información estatística que pode obterse das unidades de produción indica o tipo de produtos que produciron e, xeralmente con un menor grao de detalle, o tipo de produtos que consumiron. O diseño das táboas de orixe e destino adáptase a este tipo de información estatística, ou sexa, rama de actividade por produto. Polo contrario, non acostuma a estar dispoñíbel a información produto por produto ou rama de actividade por rama de actividade necesaria para as táboas input-output simétricas. Así, as enquisas por ramas de actividade proporcionan habitualmente información sobre o tipo de produtos empregados ou producidos; porén, para cada tipo de ben ou servizo producido non pode recollerse, polo xeral, a información correspondente aos seus inputs en termos de produtos e compoñentes do valor engadido.

Na práctica, a información disposta en forma de táboas de orixe e destino representa un

[1] Ver capítulo 9 do SEC-95; "El marco Input-Output del SEC-95".

punto de partida para elaborar a información máis analítica das táboas input-output simétricas. A información rama de actividade por produto das táboas de orixe e destino pode transformarse en estatísticas produto por produto ou rama de actividade por rama de actividade, engadindo información estatística suplementaria sobre as estruturas dos inputs, ou adoptando a hipótese de que as estruturas dos inputs por produto ou por rama de actividade son constantes.

O SEC-95 indica como as táboas de orixe e destino teñen unha dobre función, sirven tanto para fins estatísticos como para fins analíticos. E entre os fins estatísticos máis importantes, resaltamos aquí algúns deles;

- A detección de lagoas e incoherencias nas fontes de datos básicos.

- A ponderación e cálculo dos índices e as medicións de prezo e volume.

- A obtención de estimacións de maneira residual, estimando unha variábel a partir da estimación previa de tódalas demais variábeis da identidade. A modo de exemplo, temos estimacións por esta vía da produción ou do consumo final de produtos específicos.

- A comprobación e mellora da coherencia, plausibilidade e exhaustividade das cifras das táboas de orixe e destino e das cifras derivadas delas. Nese sentido, o SEC indica como ao tratar de elaborar as táboas input-output simétricas directamente das táboas de orixe e destino poden detectarse incoherencias e puntos débiles nestas últimas. De aí que exista un fluxo de interrelacións entre as táboas input-output simétricas e as táboas de orixe e destino.

As táboas de orixe e destino, ao igual que a táboa input-output simétrica, proporcionan unha visión detallada da composición da orixe e o destino dos bens e servizos, así como do factor traballo e as rendas primarias correspondentes. Tales táboas e as ratios que se poden obter a partir delas, como as cifras de produtividade, constitúen un elemento importante da análise económica.

Ao marxe da finalidade estatística das táboas de orixe e destino, estas táboas e as táboas simétricas empréganse tamén como ferramentas da análise económica; aínda que cada un dos dous tipos de táboas presenta vantaxes diferentes. Así, para calcular os efectos directos e indirectos, é preciso completar as táboas de orixe e destino con hipóteses específicas o con información estatística suplementaria. Estos requisitos de hipóteses específicas e datos suplementarios son especialmente importantes para o cálculo dos efectos acumulativos. De feito, os requisitos para o cálculo destos efectos equivale a elaborar unha táboa input-output simétrica. Polo tanto, para obter ditos efectos acumulativos, é preferíbel recorrer á táboa input-output simétrica. Non obstante, para cuantificar os efectos de primera orde prefírense as táboas de orixe e destino xa que o cálculo depende menos de supostos, as mesmas son máis detalladas que a táboa input-output simétrica e a información destas táboas pode vincularse mellor a outros tipos de datos estatísticos.

Outro aspecto a recalcar é que as táboas de orixe e destino e a táboa input-output simétrica poden empregarse para calcular distintos efectos. Entre eles podemos destacar; os relativos ás variacións dos prezos ou dos tipos impositivos sobre os valores da oferta ou dos empregos, os relativos ás variacións dos prezos da oferta sobre os prezos dos empregos ou os relativos ás variacións do volume da oferta sobre o volume dos empregos.

Os cálculos poden mostrar efectos tanto directos como indirectos. Por exemplo, un aumento importante dos prezos da enerxía afectará non só ás ramas de actividade que consumen enerxía de forma intensiva, senon tamén ás ramas de actividade que utilizan a produción destas últimas. A importancia destes efectos indirectos pode obterse tamén, coa axuda dalgunhas hipóteses, a partir tanto das táboas de orixe e destino como das táboas simétricas. Entre as hipóteses máis usuais podemos enfatizar as seguintes: unha estrutura constante dos inputs en termos de valores, unha composición constante do valor da produción por rama de actividade e por produto, e unha composición constante do valor do gasto en consumo final dos fogares por produto.

Estas hipótesis son bastante ríxidas, xa que significan que os prezos relativos non varían, que non muda a técnica dos procesos de produción e que non ten lugar ningunha substitución entre as diversas categorías de gasto en consumo final dos fogares. Aínda así, estos supostos xerais poden modificarse permitindo, en primeiro lugar, variacións dos prezos relativos recorrendo ao modelo de prezos. Esto pode ampliarse posteriormente con estimacións econométricas ou doutro tipo, da influencia dos prezos relativos e outras variábeis sobre os coeficientes técnicos ou o gasto en consumo final dos fogares. Non é preciso que os cálculos se limiten á orixe e ao destino dos bens e servizos; poden aplicarse tamén á orixe e ao destino do factor traballo e ás compoñentes do valor engadido.

As táboas de orixe e destino e a táboa input-output simétrica poden integrarse en modelos macroeconómicos. Temos distintos tipos de análise que poden realizarse a partir destas táboas como son, a modo de exemplo: a análise da produción, a estrutura dos custos e da produtividade, a análise dos prezos, a análise do emprego, ou a análise do impacto das novas tecnoloxías.

Tamén queremos destacar que o SEC-95 sinala como se constrúen táboas simétricas a partir das táboas de orixe e destino. Así, explica as distintas fases desa elaboración e como se apoian nas hipóteses de tecnoloxía da rama de actividade e de tecnoloxía do produto[2]. En relación co anterior, comenta como a simple aplicación da hipótese de tecnoloxía do produto desem-

[2] Este asunto será tratado máis adiante por nos con maior detalle.

boca, a miúdo, en resultados inaceptábeis, xa que os coeficientes estimados son improbábeis ou, incluso, negativos. Os coeficientes improbábeis poden ter a súa orixe en erros de medición e na heteroxeneidade dos produtos da rama de actividade na que o produto que se transfiere é o produto principal. Estos problemas pódense amañar realizando axustes baseados en información complementaria, ou explotando, ata onde sexa posíbel, informacións cualitativas procedentes de expertos. Naturalmente, que a outra solución consiste en aplicar a hipótese alternativa de tecnoloxía da industria. E recoñece como na práctica a mellor estratexia para artellar táboas simétricas consiste en combinar ambos supostos coa información complementaria dispoñíbel.

En contraste co reputado modelo de Leontief –o baseado na táboa input-output simétrica–, onde cada industria produce un só produto, e cada produto é elaborado por unha soa industria; no modelo orixe-destino do SEC-95 cada industria pode producir máis dun produto[3]. Este modelo ten a súa vez dúas versións: industria por industria e produto por produto. Nestas táboas o uso de produtos como consumos intermedios é distribuído á produción de cada produto específico. Se unha industria produce máis dun produto, os inputs empregados deben de ser distribuídos a cada produto específico.

As aplicacións fundamentadas no marco do SEC-79 optaron por desenvolver o modelo de Leontief xa que a información de base subministrada non permitía outro tipo de análise. No marco do SEC-79 a TIO constitúe un documento único que se compón de tres matrices; unha de consumos intermedios, outra de empregos finais e outra de inputs primarios e recursos. Debemos resaltar que neste contexto a matriz intermedia está encabezada, *teoricamente* (ver epígrafes 602 e 605), nas súas filas e columnas por ramas; ou sexa, trátase dunha táboa simétrica industria por industria. Pero, no epígrafe 605, cando fala da matriz de inputs primarios cita a fila de transferencias "que permite pasar a produción efectiva por rama á produción distribuída por produto". Ou sexa, que na práctica as filas non representan ramas senon produtos, cuxa distribución se fai entre os sectores intermedios e os empregos finais, incluída a exportación. No caso de que as transferencias cedidas ou recibidas por unha rama sexan unha proporción significativa da produción efectiva, a diferencia entre esta e a produción distribuída de produtos típicos desa rama pode ser significativa. Iso implicaría un desaxuste entre os custos de produción da rama e o valor dos produtos que distribúe, o que sen dúbida distorsiona as conclusións extraídas cando se miden ligazóns intersectoriais ou se aplica a análise de Leontief para avaliar efectos multiplicadores.

Por outra parte, ao concebir a TIO como un documento excesivamente sintético, quédanos sen

[3] En realidade este modelo foi introducido en 1968 por Nacións Unidas no seu Sistema de Contas Nacionais (SCN-68).

aflorar unha cantidade de información que non aparece no formato tradicional, aínda sendo froito de operacións intermedias necesarias para a súa elaboración. Este feito non sería trascendente se non fose porque estos documentos internos son de notábel interese para a análise da estrutura económica rexional, probabelmente aínda moito máis valiosos que a propia TIO. En concreto, podemos referirnos ás matrices de marxes de transporte e comerciais, que son necesarias para pasar da valoración a prezos de adquisición á valoración a prezos de saída de fábrica, que foi desta forma como habitualmente se valoraron as TIO artelladas en España baixo o SEC-79. Tamén nos podemos referir á rixidez que plantexa a obriga de dispoñer dunha matriz cadrada de consumos intermedios, con exacta correspondencia entre filas e columnas, como esixencia imprescindíbel para poder invertir a matriz de Leontief e aplicar o modelo[4].

O novo ámbito contábel da Unión Europea (SEC-95) trata de solucionar estos inconvenientes e de ofrecer unha posibilidade de maior aproveitamento da inxente cantidade de información que se manexa na elaboración de TIO. No SEC-95 ofrécense, entre outras, as táboas de orixe e destino, as táboas de marxes (de transporte e comerciais), as táboas de impostos (netos de subvencións) sobre os produtos e, finalmente, as táboas input-output simétricas. Como xa vimos no capítulo anterior pode afirmarse que as táboas de orixe e destino son documentos sobre os que descansa o novo marco input-output. Nelas descríbense os procesos interiores de produción e dos fluxos de bens e servizos con moito detalle. Estas dúas táboas poden reflectir coa fragmentación que se desexe (ou mellor dito, que permita a información dispoñíbel) a realidade da estrutura produtiva obxecto de estudo. Non é preciso que sexan cadradas, pois poden dispoñer do número de ramas e de produtos que se desexen, sen necesidade de que ambos números sexan iguais. Por outra parte, nelas figuran tódolos fluxos das contas de bens e servizos, de produción e explotación.

Polo tanto, a modo de conclusión, as TOD pódense utilizar tanto para fins analíticos como estatísticos. Pero para a estimación dos efectos directos as mesmas son moito máis rentábeis que as TIO simétricas xa que o seu cálculo depende menos de hipóteses adicionais, ofrecen un maior desagregación e poden vincularse mellor a outro tipo de información estatística (p. e. datos sobre mercado laboral ou sobre o medio ambiente). Porén, o cálculo de efectos acumulativos require a elaboración da TIO simétrica. Por outro lado, as táboas de orixe e destino poden integrarse en modelos macroeconómicos de igual modo que as simétricas. En relación aos fins estatísticos, coas táboas de orixe e destino detéctanse mellor as lagoas e incoherencias nos datos básicos, permiten a ponderación e o cálculo de índices e medicións de prezo e volume; en definitiva, a

[4] No Capítulo 3 abordarase a inversibilidade das matrices rectangulares.

comprobación da coherencia das cifras que en ditas táboas se expoñen.

2.2 Relacións contábeis básicas

Existen dous tipos de identidades entre as táboas de orixe e destino, sempre e cando os fluxos estén valorados de acordo ao mesmo criterio.

Se o sistema está en equilibrio, os totais por produtos (filas) nas táboas de orixe e destino deben ser idénticos, xa que nos indican a oferta total e a demanda total por produtos. É dicir, a produción e as importacións deben coincidir coa suma da demanda intermedia e a demanda final (identidade por produto).

Identidade por produto: oferta total por produto (táboa de orixe) = empregos totais por produto (táboa de destino). Polo tanto, para cada produto:

$$\begin{aligned}\text{produción} + \text{importacións} \quad &= \quad \text{consumos intermedios} + \text{exportacións} + \\ &\quad + \text{gasto en consumo final} + \text{formación bruta de capital.}\end{aligned}$$

Agora ben, tamén se produce unha igualdade entre os totais por columnas, que nos indican que a produción de cada rama de actividade (orixe) debe de ser igual á suma dos consumos intermedios e o valor engadido (identidade por rama).

Identidade por ramas de actividade: produción por rama de actividade (táboa de orixe) = inputs totais por rama de actividade (táboa de destino). Polo tanto, para cada rama de actividade:

$$\text{produción} = \text{consumos intermedios} + \text{valor engadido.}$$

A existencia dun conxunto de normas contábeis rigurosas para a valoración das distintas operacións esixe introducir no marco input-output –e especialmente na parte central do mesmo, as táboas de orixe e destino– unha serie de mecanismos de axuste que permiten manter os equilibrios contábeis coas diferentes formas de valoración.

Como xa vimos, na táboa de orixe, a matriz de produción está definida a prezos básicos. Analogamente, as importacións preséntanse clasificadas a prezos CIF, criterio asimilábel ao de prezos básicos. Pero o vector de importacións leva incorporado unhas filas de axustes que teñen dúas finalidades complementarias: homoxenizar a valoración das importacións por produtos (CIF) coa valoración recomendada polo SEC-95 para o total das importacións (FOB); e ao mesmo tempo, engádese outra partida que recolle o consumo que os fogares residentes realizan no Resto do Mundo que permite igualmente homoxenizar a presentación global dos datos de importación.

O SEC indícanos como se pode combinar unha táboa de orixe e unha táboa de destino e como presentalas nunha soa táboa. Aínda que esta presentación non é novidosa, pois as táboas *Use-Make* eran obxecto de estudo antes da entrada en vigor do actual SEC. Para realizar esa combinación é preciso engadir dúas filas e unha columna á táboa de destino, para a produción e as importacións. Obsérvese que nesta nova táboa traspuxéronse as filas e as columnas da táboa de orixe. A súa presentación é a seguinte;

	PRODUTOS	RAMAS DE ACTIVIDADE	DEMANDA FINAL	TOTAL
PRODUTOS	-	Consumos intermedios	Exportacións + Gasto en consumo final + Formación bruta de capital	Empregos totais por produto
RAMAS DE ACTIVIDADE	Produción	-	-	Produción total por rama de actividade
COMPOÑENTES DO VALOR ENGADIDO	-	Valor engadido		
RESTO DO MUNDO	Importacións	-		
TOTAL	Oferta total por produto	Inputs totais por rama de actividade		

T.3 Táboa combinada de orixe e destino simplificada

En base ás notacións escollidas de antemán (no capítulo anterior) e respectando a trasposición comentada, quedaranos simbolizada da seguinte maneira;

	PRODUTOS	RAMAS DE ACTIVIDADE	DEMANDA FINAL	TOTAL
PRODUTOS	-	X	y	e
RAMAS DE ACTIVIDADE	Z'	-	-	g
COMPOÑENTES DO VALOR ENGADIDO	-	v'		
RESTO DO MUNDO	m'	-		
TOTAL	r'	g'		

No referente á táboa de destino existen en realidade dous tipos de táboas conforme aos criterios de valoración:

- Na táboa de destino a prezos de adquisición, cada un dos fluxos da demanda intermedia e demanda final están valorados a prezos de adquisición. É dicir, as filas correspondentes ás marxes de comercio e de transporte de mercancías aparecerán con valores nulos, xa que o valor de adquisición incorporará os impostos (netos de subvencións) que no seu caso lle correspondan aos produtos; IVA, impostos especiais, etc.

- Na táboa a prezos básicos, que é a que normalmente se ven divulgando polos institutos de estatística, faise necesario expresar os fluxos correspondentes a cada categoría de bens e servizos de acordo con dita valoración. Nese caso as filas relativas ás actividades de distribución recollerán o valor das marxes cargadas na adquisición dos diferentes produtos.

Conven ter en conta que os montantes totais dos consumos intermedios e dos relativos ás compoñentes da demanda final serán da mesma contía nunha e noutra táboa, xa que sempre deben vir valorados a *prezos de adquisición,* seguindo os criterios recomendados polo SEC-95. Esto implica que, nas matrices de demanda intermedia e demanda final da táboa a prezos básicos, sexa preciso introducir, ademais do xa sinalizado para marxes de distribución, unhas filas adicionais onde se recollan o valor dos impostos (netos de subvencións), que permiten obter cifras globais a prezos de adquisición.

Deseguido profundizaremos un pouco máis nas relacións contábeis implícitas nas táboas de orixe e destino (TOD) e aproveitamos a ocasión para simbolizalas, xa que estas son fundamentais para construír os distintos modelos de comportamento que imos a estudar nesta investigación, de aí que as debamos ter presentes en todo momento.

Atendendo á hipótese relativa ao equilibrio da conta de bens e servizos por produtos, é dicir, ao cumprimento da igualdade de oferta e demanda; obtemos o seguinte:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

ou na súa forma abreviada;

$$q + m = Xi + y,$$

sendo Xi unha matriz columna, que podemos simbolizar por u, onde os seus elementos son os totais por filas da matriz de consumos intermedios, X. Analiticamente pódense expresar como

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, \qquad i = 1, 2, ..., m.$$

Alternativamente, despexando a produción por produtos temos

$$q = Xi + y - m. \tag{1}$$

Agora ben, se desagregamos os elementos da matriz de consumos intermedios, os x_{ij}, de acordo a súa orixe, interior ou importada, temos

$$x_{ij} = x_{ij}^d + x_{ij}^m, \qquad i = 1, 2, ..., m \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

A matriz X resulta da suma da matriz X^d (matriz de consumos intermedios interiores) e da matriz X^m (matriz de consumos intermedios importados)

$$X = X^d + X^m = \begin{pmatrix} x_{11}^d & x_{12}^d & \cdots & x_{1n}^d \\ x_{21}^d & x_{22}^d & \cdots & x_{2n}^d \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1}^d & x_{m2}^d & \cdots & x_{mn}^d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{11}^m & x_{12}^m & \cdots & x_{1n}^m \\ x_{21}^m & x_{22}^m & \cdots & x_{2n}^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1}^m & x_{m2}^m & \cdots & x_{mn}^m \end{pmatrix}.$$

Ao mesmo tempo, se descompoñemos a demanda final dos distintos produtos en función da súa orixe, ben sexa interior ou importada;

$$y_i = y_i^d + y_i^m, \quad i = 1, 2, ..., m,$$

ou, se quere en notación matricial

$$y = y^d + y^m.$$

Para logo realizar as substitucións pertinentes na relación (1). Obtendo así;

$$q = (X^d i + X^m i) + (y^d + y^m) - m.$$

De aquí en adiante, nalgunhas ocasións simbolizaremos a demanda intermedia de orixe doméstica por u^d e a demanda intermedia importada por u^m. Polo tanto, en base a estas notacións escollidas a anterior igualdade tamén se pode expresar de forma máis abreviada por;

$$q = (u^d + u^m) + (y^d + y^m) - m.$$

Pero como o vector das importacións dos distintos produtos, expresado en matriz columna se corresponde coa suma das importacións destinadas á demanda intermedia, $X^m i$ e as importacións destinadas á demanda final y^m;

$$m = X^m i + y^m \tag{2}$$

Unha vez feita a simplificación xúrdenos a seguinte relación;

$$q = X^d i + y^d, \tag{3}$$

na que se expresa o total de produtos a partir dos datos domésticos.

Se acudimos á táboa de orixe (produto por rama de actividade non homoxénea), podemos definir dúas relacións contábeis na matriz de produción, Z; por unha banda obtemos os totais por filas, produción por produtos;

$$q = Zi. \tag{4}$$

é dicir, os elementos da matriz columna q son da seguinte maneira;

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} z_{ij}, \qquad i = 1, 2, ..., m$$

Por outro lado, podemos obter os totais por columnas da matriz de produción, que se expresarían de acordo a;

$$g' = i'Z, \text{ ou de modo alternativo } \quad g = Z'i, \tag{5}$$

sendo a matriz fila g' a produción por ramas de actividade. Analiticamente;

$$g_j = \sum_{i=1}^{m} z_{ij} \ , \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Da táboa de destino derívase a relación sobre as contas de produción das ramas de actividade, sendo as mesmas a suma de inputs intermedios e de inputs primarios;

$$g' = i'X + v'$$

ou, atendendo á trasposición

$$g = X'i + v. \tag{6}$$

Unha vez máis, se coñecemos a desagregación da matriz de consumos intermedios por fluxos, interiores ou importados, a relación que agora se indica podémola escribir como sigue;

$$g = (X^d)'i + (X^m)'i + v.$$

Nalgunhas ocasións denotaremos abreviadamente $(X^d)'i$ de acordo a t^d e $(X^m)'i$ de acordo a t^m. E como é de esperar, o vector de inputs intermedios $X'i$ simbolizarémolo por t. De aí que esta última igualdade nos xurdirá a veces da seguinte forma;

$$g = t^d + t^m + v.$$

2.3 Os "novos"coeficientes directos

As contas nacionais mostran a orixe e o uso dos produtos polos diferentes sectores da economía a partir das táboas de orixe e destino. Aínda que o seu obxectivo é o anteriormente mencionado, tamén permiten realizar análises sobre o comportamento das ramas de actividade e a oferta de produtos.

A metodoloxía do SEC-95 permítenos obter distintos coeficientes analíticos cando acudimos directamente ás táboas de orixe e destino. Deseguido imos introducir as definicións dalgúns coeficientes cos que máis adiante traballaremos á hora de construir os modelos de análise. Ao mesmo tempo tamén aproveitaremos a ocasión para resaltar aspectos colaterais que requeriremos segundo avancemos nesta investigación[5].

2.3.1 Relacións directas entre ramas e produtos a partir da táboa de orixe

Lembremos que a táboa de orixe ofrece información sobre a oferta por tipos de produtos e por tipo de produtor. Ou sexa, mostra os recursos a disposición da economía, tanto de procedencia interior como importada. Polo tanto, aparecen reflectidas dúas variábeis fundamentais; a produción e as importacións. A produción recóllese clasificada en función de dous parámetros. Por filas, aparece por tipos de produto (de acordo á Clasificación Nacional de Produtos por Actividades, CNPA-96), e por columnas por ramas oferentes (de acordo á Clasificación Nacional de Actividades Económicas, CNAE-93). Efectivamente, aínda que o obxectivo desta táboa é presentar a orixe dos produtos, tamén permite realizar análises sobre o comportamento das ramas de actividade, dado que aparece a produción elaborada por cada actividade por tipos de produtos, permitíndonos estudar en que medida cada rama está especializada na produción duns ou outros outputs. De feito, a partir desta táboas pódense derivar dous tipos de coeficientes (Cañada, 2001), dependendo da consideración da información que se mostra nas filas ou nas columnas.

Coeficientes de mercado

En cada fila da táboa de orixe móstrase para cada produto a contía que se produce en cada rama de actividade. Así, plantexando unha relación entre os elementos da matriz de produción

[5]Sinalamos que nos apoiarnos nos modelos en termos de valor, cuestión que teremos en mente á hora de buscar o significado económico das distintas matrices que imos a considerar.

(produto por rama de actividade non homoxénea) e os totais por filas da matriz (produción por produtos) obteñense os **coeficientes de mercado**. Vexamos logo

$$d_{ij} = \frac{z_{ij}}{q_i}, \qquad i = 1, 2, ..., m \quad \text{e} \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Interpretamos o elemento xenérico, d_{ij}, como *a proporción da rama de actividade non homoxénea j na produción dunha unidade monetaria do produto i*. É dicir, representaría a participación da rama j na produción do produto i.

Se as ramas de actividade fosen homoxéneas, é dicir, $q = g$, os $d_{ii} = 1$, $\forall\ i$ e os restantes elementos serían nulos.

A matriz de coeficientes de mercado ven dada polo seguinte produto matricial;

$$D = \hat{q}^{-1} Z, \tag{7}$$

$\hat{q}^{-1}$ é a inversa da matriz diagonal que ten como elementos da diagonal principal as producións dos distintos produtos. Se lle aplicamos a trasposición á anterior igualdade matricial obtemos;

$$D' = Z' \hat{q}^{-1}. \tag{8}$$

Agora se despexamos a matriz trasposta de Z, ou sexa, multiplicando os membros da anterior igualdade pola dereita por $\hat{q}$,

$$Z' = D' \hat{q}. \tag{9}$$

Acudindo a unha das relacións contábeis (5), na que indicabamos que $g = Z'i$ e substituíndo a anterior igualdade, vemos como a produción das distintas ramas de actividade non homoxéneas resulta do produto da matriz trasposta de D polo vector de produción de produtos;

$$g = D'q. \tag{10}$$

Ou sexa, estamos ante un sistema de n ecuacións;

$$
\begin{aligned}
g_1 &= d_{11}q_1 + d_{21}q_2 + \cdots + d_{m1}q_m \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
g_n &= d_{1n}q_1 + d_{2n}q_2 + \cdots + d_{mn}q_m.
\end{aligned}
$$

En xeral, a produción da rama de actividade non homoxénea j ven dada pola ecuación;

$$g_j = \sum_{i=1}^{m} d_{ij} q_i, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

De acordo á definición dos coeficientes de mercado, indicamos que a suma por filas dos elementos de D é igual a un;

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, ..., m.$$

Coeficientes de especialización

Agora ben, se consideramos a información das columnas, onde se mostran para cada rama de actividade os produtos que elabora, podemos derivar os denominados **coeficientes de especialización**. Calcúlanse como a relación establecida entre os elementos da matriz de produción e a produción por ramas de actividade non homoxéneas (suma das columnas).

En definitiva, podemos construir unha matriz C de orde $m \times n$, definindo os seus elementos da seguinte maneira;

$$c_{ij} = \frac{z_{ij}}{g_j}, \qquad i = 1, 2, ..., m \qquad \text{e} \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Interpretamos o elemento característico, c_{ij}, como *a proporción do produto i sobre a produción dunha unidade monetaria da rama de actividade non homoxénea j.* Cada elemento ven a representar a medida de especialización das distintas ramas de actividade, ou sexa, permítenos analizar en que medida as ramas se especializan na produción de determinados produtos.

Se as ramas de actividade fosen homoxéneas, é dicir, $q = g$, os $c_{ii} = 1$, $\forall\ i$ e os restantes elementos serían nulos, ou sexa, a matriz C corresponderíase coa matriz identidade.

En función da definición dada, vemos como é a matriz de coeficientes de especialización;

$$C = Z\hat{g}^{-1}, \tag{11}$$

polo tanto podemos despexar a matriz de produción;

$$Z = C\hat{g}. \tag{12}$$

Sabemos por (4) que a produción por produtos se corresponde coa suma por filas de Z, $q = Zi$, polo tanto substituíndo a anterior igualdade obtemos;

$$q = Cg. \tag{13}$$

É dicir, xurde un sistema de m ecuacións

$$\begin{aligned} q_1 &= c_{11}g_1 + c_{12}g_2 + \cdots + c_{1n}g_n \\ &\ \ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ q_m &= c_{m1}g_1 + c_{m2}g_2 + \cdots + c_{mn}g_n \end{aligned}$$

En xeral, a produción do produto i podémola expresar de acordo a;

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}g_j, \quad i = 1, 2, ..., m.$$

A partir da definición destes coeficientes e tendo presente o formato da táboa de orixe, é inmediato comprobar que a suma por columnas dos elementos de C é igual a un;

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{14}$$

Relacións entre os coeficientes de especialización e de mercado

Aínda que habitualmente os estudos acerca das táboas input-output xiran en torno á obtención de matrices de consumos intermedios cadradas a partir das TOD[6], nos queremos apuntar aquí como se poden elaborar matrices de produción cadradas que sexan compatíbeis coas sinaladas en primeiro lugar e que no fondo veñen a estar asociadas a elas. De aí que, a partir das definicións dos coeficientes de especialización e mercado, podemos manipular a táboa de orixe para obter unha matriz de coeficientes produto por produto ou rama por rama, táboas que ofrecen información relevante a respecto das relacións directas que se establecen entre produtos ou ramas.

Nese sentido, en primeiro lugar sinalamos como se procede para construir unha **matriz cadrada produto por produto** a partir da matriz de produción da táboa de orixe. Atendendo ás definicións dos coeficientes de especialización e os coeficientes de mercado, é dicir, tendo en conta os sistemas de ecuacións $q = Cg$ e $g = D'q$, é inmediato chegar ao sistema, que a continuación expresamos matricialmente e de forma abreviada;

$$q = CD'q. \tag{15}$$

A matriz CD' é unha matriz cadrada de orde m. Primeiramente centrámonos na interpretación dos seus elementos, que por comodidade os imos a simbolizar por γ_{ik}.

$$(\gamma_{ik}) = (CD')_{m\times m} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & ... & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & ... & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & ... & c_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \cdot \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & ... & d_{m1} \\ d_{12} & d_{22} & ... & d_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{1n} & d_{2n} & ... & d_{mn} \end{pmatrix}_{n\times m}$$

Polo tanto, vemos como o elemento xenérico desta matriz, γ_{ik}, ó situado na fila i e na columna k, equivale ao seguinte sumatorio de n produtos;

$$\forall i,k \in \{1,2,...,m\}, \gamma_{ik} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}d'_{jk} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}d_{kj} = c_{i1}d_{k1} + c_{i2}d_{k2} + ... + c_{in}d_{kn}. \tag{16}$$

A interpretación económica dos γ_{ik} correspóndese coa *proporción do produto i na produción*

[6] Esta cuestión tamén será tratada por nos no seguinte capítulo.

dunha unidade monetaria da produción do produto k de acordo ás n ramas de actividade (non homoxéneas) que nos atopamos nun determinado sistema económico. Por exemplo, o sumando $c_{i1}d_{k1}$ *é a proporción do produto i na produción dunha unidade monetaria da produción do produto k de acordo á rama de actividade non homoxénea 1*, xa que resulta do produto de c_{i1} (*proporción da produción do produto i dentro dunha unidade de produción da rama de actividade non homoxénea 1)* por d_{k1} (*proporción da produción da rama de actividade non homoxénea 1 dentro da produción dunha unidade monetaria da produción do produto k*). De aí, que o significado da suma desas proporcións se axuste ao indicado ao principio deste parágrafo.

Procede lembrar que parte desta proporción vai destinada á demanda intermedia e o resto vai destinada á demanda final. Matización que pode resultar evidente se temos presente que a produción interior, q é a suma da demanda intermedia de procedencia interior e demanda final de orixe interior. Se nos centramos nos elementos da matriz de produción, os $z_{ij,}$ poderíanse desagregar en función dos seus empregos, vía demanda intermedia ou vía demanda final, aínda que esa desagregación non é coñecida por nos

En base ao anterior, no sucesivo imos expresar a matriz abreviadamente de forma abreviada;

$$(\gamma_{ik}) = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1m} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mm} \end{pmatrix}_{m\times m}$$

Entendemos importante indicar o seguinte; en xeral, cúmprese que a suma por columnas dos elementos desta matriz é igual a 1, non acontece o mesmo por filas.

Analiticamente podemos expresar a suma dos elementos da columna k do seguinte xeito;

$$\forall\ k \in \{1, 2, ..., m\},\ \gamma_{1k} + \gamma_{2k} + ... + \gamma_{mk} = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ik}.$$

Nos sabemos que a suma por columnas dos coeficientes de especialización é igual a 1 e que a suma por filas dos coeficientes de mercado tamén é igual a 1. Polo tanto, demóstrase facilmente que se verifica a propiedade anteriormente mencionada:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\gamma_{ik} &= \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}c_{ij}d_{kj}) = \qquad (17)\\
&= \sum_{i=1}^{m}(c_{i1}d_{k1}+c_{i2}d_{k2}+...+c_{in}d_{kn}) =\\
&= (c_{11}d_{k1}+c_{12}d_{k2}+...+c_{1n}d_{kn})+.....+(c_{m1}d_{k1}+c_{m2}d_{k2}+...+c_{mn}d_{kn}) =\\
&= (\sum_{i=1}^{m}c_{i1})d_{k1}+(\sum_{i=1}^{m}c_{i2})d_{k2}+...+(\sum_{i=1}^{m}c_{in})d_{kn} =\\
&= 1d_{k1}+1d_{k2}+...+1d_{kn} =\\
&= d_{k1}+d_{k2}+...+d_{kn} = \sum_{j=1}^{n}d_{kj} = 1.
\end{aligned}
$$

deste modo, a interpretación desta propiedade é que a suma das proporcións das producións dos m produtos necesarios para a produción dunha unidade monetaria do produto k é igual a 1. Cada un dos elementos da columna k, $\gamma_{ik,}$ $(i = 1, 2, , ..., m)$ son tantos por un.

Unha vez aclarado de que forma son os elementos desta matriz produto voltamos ao sistema $q = CD'q$ e vemos como depende cada produción de produtos q_i das m producións de produtos q_1, q_2, ..., q_m;

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \gamma_{11}q_1 + \gamma_{12}q_2 + ... + \gamma_{1m}q_m\\
q_2 &= \gamma_{21}q_1 + \gamma_{22}q_2 + ... + \gamma_{2m}q_m\\
&...............................\\
q_m &= \gamma_{m1}q_1 + \gamma_{m2}q_2 + ... + \gamma_{mm}q_m
\end{aligned}
$$

Polo tanto, en xeral, podemos expresar a produción do produto i, q_i, de acordo á ecuación;

$$
\forall\ i \in \{1, 2, ..., m\},\quad q_i = \sum_{K=1}^{m}\gamma_{ik}q_k = \sum_{K=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}c_{ij}d_{kj})q_k. \qquad (18)
$$

Se temos en conta que toda produción de produtos se pode expresar como

$$\forall k \in \{1,2,...,m\}, \qquad q_k = 1q_k.$$

E por outra banda, xa indicamos antes que a suma por columnas da matriz CD' é igual a 1,

$$\sum_{i=1}^{m} \gamma_{ik} = 1, k = 1,2,...,m.$$

Entón, vemos como a produción do produto k

$$q_k = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ik} q_k = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} c_{ij} d_{kj}) q_k, \quad k = 1,2,...,m. \tag{19}$$

Finalmente, coa meta de resaltar a matriz indicada ao principio, apuntamos que o sistema que estamos a estudar $q = CD'q$ podemos transformalo do seguinte modo;

$$\hat{q} i = CD' \hat{q} i.$$

Agora se nos centramos na matriz produto $CD'\hat{q}$ e sumamos os seus elementos por filas ou por columnas vemos de forma alternativa o que acabamos de sinalar;

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1m} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11}q_1 & \gamma_{12}q_2 & \cdots & \gamma_{1m}q_m \\ \gamma_{21}q_1 & \gamma_{22}q_2 & \cdots & \gamma_{2m}q_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1}q_1 & \gamma_{m2}q_2 & \cdots & \gamma_{mm}q_m \end{pmatrix}$$

En definitiva, obtemos unha matriz cadrada de orde m (produto por produto) na que se fai unha desagregación por filas e columnas das producións dos distintos produtos, vindo a mesma motivada polas producións das distintas ramas. Se as ramas produtivas fosen homoxéneas esta matriz sería unha matriz diagonal, ou sexa, corresponderíase con $\hat{q}$ (observar que nese caso $CD' = II = I$).

En segundo lugar, imos ver de modo análogo ao anterior como se estima a **matriz de produción rama de actividade por rama de actividade**. Así, trátase de transformar a matriz Z (produto por rama) nunha matriz cadrada de orde n (rama por rama).

Polo tanto, substituíndo $q = Cg$ en $g = D'q$ obtemos o sistema que indicamos deseguido na súa forma matricial abreviada;

$$g = D'Cg. \tag{20}$$

A matriz $D'C$ é unha matriz cadrada de orde n. Imos simbolizar aos seus elementos por λ_{jl}. Vexamos;

$$(\lambda_{jl}) = \left(D'C\right)_{n\times n} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & ... & d_{m1} \\ d_{12} & d_{22} & ... & d_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{1n} & d_{2n} & ... & d_{mn} \end{pmatrix}_{n\times m} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & ... & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & ... & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & ... & c_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

O elemento característico, λ_{jl}, será do seguinte xeito

$$\forall j,l \in \{1,2,...,n\}, \quad \lambda_{jl} = \sum_{i=1}^{m} d'_{ji}c_{il} = \sum_{i=1}^{m} d_{ij}c_{il} = d_{1j}c_{1l} + d_{2j}c_{2l} + ... + d_{mj}c_{ml}. \tag{21}$$

A súa interpretación económica correspóndese coa *proporción da rama de actividade non homoxénea j na produción dunha unidade monetaria da rama de actividade non homoxénea l.* Sinalamos, a modo de exemplo, como o primeiro sumando, $d_{1j}c_{1l}$, representa *a proporción da produción da rama de actividade non homoxénea j na produción dunha unidade monetaria da rama de actividade non homoxénea l a través do produto 1.* É dese xeito dado que resulta do produto de d_{1j} (*proporción do sector j na produción do produto 1*) por c_{1l} (*proporción da produción do produto 1 na produción dunha unidade monetaria da rama de actividade non homoxénea l*).

Unha vez que indicamos de que forma son os elementos desta matriz

$$(\lambda_{jl}) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Veremos como a suma dos mesmos por columnas é igual a 1. Así, a suma dos elementos de calquera columna podémola expresar como

$$\forall l \in \{1, 2, ..., n\}, \quad \lambda_{1l} + \lambda_{2l} + ... + \lambda_{nl} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jl}.$$

Se recorremos ás propiedades empregadas no apartado anterior, comprobamos o anteriormente afirmado;

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jl} &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} d_{ij} c_{il} \right) = \qquad (22) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (d_{1j} c_{1l} + d_{2j} c_{2l} + ... + d_{mj} c_{ml}) = \\
&= (d_{11} c_{1l} + d_{21} c_{2l} + ... + d_{m1} c_{ml}) + ... + (d_{1n} c_{1l} + d_{2n} c_{2l} + ... + d_{mn} c_{ml}) = \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} d_{1j} \right) c_{1l} + \left(\sum_{j=1}^{n} d_{2j} \right) c_{2l} + ... + \left(\sum_{j=1}^{n} d_{mj} \right) c_{ml} = \\
&= 1 c_{1l} + 1 c_{2l} + ... + 1 c_{ml} = \\
&= c_{1l} + c_{2l} + ... + c_{ml} = \sum_{i=1}^{m} c_{il} = 1.
\end{aligned}$$

Esta propiedade indícanos que a suma das proporcións das producións das n ramas de actividade non homoxéneas necesarias para producir unha unidade monetaria da produción da rama l é igual a 1.

Situándonos de novo no sistema $g = D'Cg$, vemos como as n ecuacións que constitúen dito sistema representan as n producións por sectores económicos non homoxéneos g_1, g_2, ... e g_n;

$$\begin{aligned}
g_1 &= \lambda_{11}g_1 + \lambda_{12}g_2 + ... + \lambda_{1n}g_n \\
g_2 &= \lambda_{21}g_1 + \lambda_{22}g_2 + ... + \lambda_{2n}g_n \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
g_n &= \lambda_{n1}g_1 + \lambda_{n2}g_2 + ... + \lambda_{nn}g_n
\end{aligned}$$

En xeral, expresamos a ecuación da produción da rama de actividade non homoxénea j como

$$\forall j \in \{1,2,...,n\}, \quad g_j = \sum_{l=1}^{n} \lambda_{jl}g_l = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} d_{ij}c_{il} \right) g_l. \tag{23}$$

Tamén podemos escribir a produción por ramas da seguinte maneira

$$\forall l \in \{1,2,...,n\}, \quad g_l = 1g_l$$

Anteriormente sinalabamos que a suma por columnas de $D'C$ era igual a 1, $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{jl} = 1$, $l = 1,2,...,n$, así que substituíndo 1 por $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{jl}$ en $g_l = 1g_l$ obtemos a produción da rama de actividade l;

$$g_l = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jl}g_l = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} d_{ij}c_{il} \right) g_l, \qquad l = 1,2,...,n. \tag{24}$$

Agora estamos en condicións de presentar unha matriz cadrada de produción (sector por sector). Trátase de modificar o sistema que estamos a estudar, $g = D'Cg$, da seguinte forma;

$$\hat{g}i = D'C\hat{g}i$$

Só nos cabe indicar que matriz que pretendemos resaltar é a matriz $D'C\hat{g}$,

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11}g_1 & \lambda_{12}g_2 & \cdots & \lambda_{1n}g_n \\ \lambda_{21}g_1 & \lambda_{22}g_2 & \cdots & \lambda_{2n}g_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1}g_1 & \lambda_{n2}g_2 & \cdots & \lambda_{nn}g_n \end{pmatrix}$$

A suma por filas e por columnas desta matriz correspóndense coas ecuacións resaltadas anteriormente.

Por último, apuntamos que se as ramas de actividade fosen homoxéneas, ou sexa, se as mesmas elaborasen un único produto, esta matriz sería diagonal e corresponderíase con $\hat{g}$. Nese hipotético caso, tanto C como D virían a ser a matriz identidade.

2.3.2 Relacións directas entre ramas e produtos a partir da táboa de destino

Da mesma maneira que a táboa de orixe, a táboa de destino emprega diferente clasificación nas filas e columnas. Por filas inclúense os produtos e por columnas as ramas de actividade non homoxéneas. Esta táboa aporta información acerca da demanda por tipo de produto, así como do valor engadido en cada rama de actividade non homoxénea. Polo tanto, revela a estrutura da produción por ramas de actividade. A suma de cada columna reflicte o valor da produción de cada rama. Calculado como a suma dos consumos intermedios e a remuneración dos factores produtivos primarios.

Vemos logo como esta táboa mostra simultaneamente os empregos dos produtos no sistema económico (demanda intermedia e final coas súas diferentes compoñentes), e a estrutura de custos de produción correspondente ás diferentes ramas de actividade (consumos intermedios e valor engadido). Ademais, acostúmase artellar usando dous criterios de valoración: prezos básicos e prezos de adquisición.

A partir da táboa de destino tamén se poden derivar unha serie de relacións teóricas, ou se queremos unha serie de coeficientes. Trátanse dos tradicionais coeficientes técnicos e de distribución, pero que fan referencia a ramas de actividade non homoxéneas e produtos[7].

[7] Posto que en xeral, a información ofrecida na táboa de destino nos admite separar os consumos intermedios por orixe interior ou importada e o output por destino (exportación ou consumo doméstico) podemos desagregar os coeficientes técnicos e de distribución por orixe. O seu desenvolvemento formal preséntase no Apéndice 2.A.

Coeficientes técnicos

A matriz de coeficientes técnicos mostra o input utilizado de cada produto en cada rama dividido polo total de produción da rama ou o que poderíamos denominar a matriz de orixe en forma de coeficientes. Notar que se se desexa empregar a información desta táboa para especificar un modelo input-output, resulta innecesario calcular a correspondente táboa física, dado que esta última é exactamente igual á táboa en valor excepto por unha redefinición das unidades[8].

Así que analiticamente os coeficientes técnicos (totais non homoxéneos) son da seguinte maneira;

$$b_{ij} = \frac{x_{ij}}{g_j} = \frac{x_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{m} z_{ij}}, \qquad i = 1, 2, ..., m \quad \text{e} \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Sendo a interpretación económica do elemento xenérico, b_{ij}, *a proporción do input i por unidade monetaria de produción na rama de actividade non homoxénea j*. É preciso admitir que a proporción demandada por cada rama é inicialmente invariábel, dito doutra forma, a hipótese consistiría en supoñer que os inputs intermedios son proporcionais aos niveis de produción obtidos.

Unha vez definidos estes coeficientes, procédenos indicar que se cumpre a seguinte igualdade matricial;

$$B = X\hat{g}^{-1}, \tag{25}$$

onde B é a matriz de coeficientes técnicos totais, que tamén se denomina matriz de estrutura de consumos intermedios; e sendo $\hat{g}^{-1}$ a matriz inversa dunha matriz diagonal –os elementos da súa diagonal principal desta matriz, $\hat{g}$, correspóndense coas producións totais das n ramas de actividade non homoxéneas.

Tendo en conta unha das relacións contábeis básicas, en concreto a (6), sabemos que as producións das distintas ramas son iguais á suma de inputs intermedios e primarios;

[8] Os prezos observados de calquera produto, por exemplo o petróleo, dependen naturalmente da unidade de medida empregada; Tm, Kg, barril, etc.

$$g_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} + v_j, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Así que ten que verificarse;

$$1 = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} + \frac{v_j}{g_j}, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Os coeficientes técnicos totais non homoxéneos, ao igual que o coeficiente relativo aos inputs primarios, son tantos por un da produción total por rama de actividade non homoxénea, analizados a través da columna correspondente.

Podemos supoñer que os valores engadidos por ramas de actividade son positivos[9], $v_j > 0$, polo que é inmediato comprobar que a suma por columnas da matriz de coeficientes técnicos non homoxéneos é estritamente menor que un[10]. No Capítulo 4, aínda que en relación á táboa simétrica deterémonos en casos onde algunha(s) compoñente(s) do vector v_j sexa(n) negativa(s).

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij} < 1, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{26}$$

Anteriormente sinalamos en (25) como se podía expresar a matriz relativa aos coeficientes obxecto de estudo; a partir desa igualdade vemos como a matriz de consumos intermedios resulta do produto da matriz B pola matriz diagonal, onde os seus elementos son as producións totais por ramas de actividade (non homoxéneas);

$$X = B\hat{g}. \tag{27}$$

Tamén sinalamos que os totais por filas da matriz X, ou sexa, a demanda intermedia resulta do produto da matriz B pola matriz columna g;

$$Xi = Bg. \tag{28}$$

[9]Aínda que o excedente bruto de explotación (EBE) pode ser negativo e superior en valor absoluto á remuneración de asalariados (RAS). Neste caso consideramos as distintas compoñentes agregadas nun único vector.

[10]Propiedade que nos será de utilidade á hora de estudar a inversibilidade de certas matrices que nos xurdirán nalgúns modelos de análise.

Coeficientes de distribución

Quizais sexan os coeficientes menos relevantes que se poden obter dentro do novo marco input-output xa que só mostran a distribución dos produtos por ramas (consumo intermedio). Obtéñense dividindo cada elemento da matriz de consumos intermedios polo total do produto dispoñíbel na economía.

Expresamos logo os coeficientes de distribución (totais non homoxéneos) como sigue;

$$h_{ij} = \frac{x_{ij}}{e_i} = \frac{x_{ij}}{q_i + m_i} = \frac{x_{ij}}{\sum\limits_{j=1}^{n} z_{ij} + m_i}, \quad i = 1, 2, ..., m \quad \text{e} \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Observemos que unha das hipóteses de traballo é o cumprimento da igualdade de oferta e demanda, alternativamente recursos igual a empregos;

$$r_i = q_i + m_i = e_i$$

A interpretación do elemento característico, h_{ij}, é *a proporción de recursos do produto i que é utilizada como input na produción dunha unidade monetaria da rama de actividade non homoxénea j.*

De acordo á definición destes coeficientes, vemos como se cumpre a seguinte igualdade matricial;

$$H = \hat{e}^{-1} X. \tag{29}$$

En función da mencionada hipótese, sabemos que se verifica;

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i = e_i = q_i + m_i, \quad i = 1, 2, ..., m$$

ou sexa, ten que cumprirse

$$\sum_{j=1}^{n} h_{ij} + \frac{y_i}{e_i} = 1, \qquad\qquad i = 1, 2, ..., m$$

Asumimos que a demanda final dos distintos produtos é positiva, $y_i > 0$, polo tanto obtemos que a suma por filas dos elementos da matriz H é estritamente menor que un;

$$\sum_{j=1}^{n} h_{ij} < 1, \quad i = 1, 2, ..., m. \tag{30}$$

A partir da igualdade matricial (29) deducimos que a matriz de consumos intermedios é igual ao produto da matriz diagonal $\hat{e}$ pola matriz H;

$$X = \hat{e}H. \tag{31}$$

Aplicándolle a trasposición a esta matriz obtemos

$$X' = H'\hat{e}. \tag{32}$$

Por último, en relación a estes coeficientes sinalamos que a suma por columnas da matriz de consumos intermedios coincide co produto da trasposta da matriz H polo vector de empregos de produtos;

$$t = X'i = H'e. \tag{33}$$

2.4 Modelos obtidos directamente das TOD

Como se verá a continuación, é posíbel plantexar os modelos de multiplicadores directamente a partir das TOD, ou sexa, sen estimar previa e explicitamente unha táboa simétrica. Estos modelos constrúense a partir de hipóteses simplificadoras que permiten transformar funcións de produción conxunta (implícitas nas TOD) en funcións de produción simples, como as establecidas nos modelos de Leontief; ou sexa, o que se fai é construír de forma tácita unhas relacións input-output equivalentes ás que se darían nunha táboa simétrica.

Dado que o marco input-output recomenda a elaboración de táboas simétricas cada cinco anos (de feito, en España actualmente só se dispón da correspondente a 1995 mentres contamos con TOD dende 1995 ata 2000), estos modelos poden construírse en axeitadas aproximacións para a análise económica mentres non se dispoñen das estimacións oficiais das matrices simétricas[11]. Debemos ter en conta que os modelos fundamentados nas estimacións oficiais son teori-

[11] O investigador tamén pode optar por supoñer que os coeficientes técnicos da táboa simétrica son constantes no tempo e ofrecer resultados baseados na TIOS oficial. Porén, traballos recentes (Svensson e Widell, 2004)

camente superiores, xa que como se recoñece na nota metodolóxica da TIOS emprégase para a súa elaboración "información complementaria combinada con opinións cualitativas de expertos e a aplicación dalgunha das hipóteses de traballo (tecnoloxía do produto *vs.* tecnoloxía da industria)", o que permite unha mellor asignación de consumo intermedios e valor engadido ás producións secundarias[12].

Unha vez que xa se definiron os coeficientes de mercado e especialización, estamos en condicións de recordar que nas distintas hipóteses de traballo o que se fai é establecer dous tipos de relacións entre os produtos e as producións por ramas de actividade; apoiándose nun caso nas estruturas por filas e no outro nas estruturas por columnas. Polo tanto, pódese afirmar que dun xeito traballamos coa hipótese relativa á tecnoloxía da industria (da rama de actividade) e do outro traballamos coa hipótese relativa á tecnoloxía do produto.

Dese modo, observamos como na elaboración dos distintos modelos de análise a partir das TOD, en función da hipótese admitida, nos vemos na obriga de recorrer aos sistemas (10) e (13) para realizar as substitucións correspondentes. Recordemos que os mesmos se escriben na súa forma compacta

$$g = D'q \qquad \text{e} \qquad q = Cg.$$

Así, concluímos sinalando que dispoñemos de dous tipos de modelos;

1.- Modelos en base a un suposto de **tecnoloxía do produto**, cada produto é producido cunha tecnoloxía característica, independentemente da relativa ao sector económico que o elabore. Estase a considerar a estabilidade da matriz de coeficientes de especialización, ou sexa, mantéñense estábeis as estruturas das columnas da matriz de produción.

2.- Modelos en base a un suposto de **tecnoloxía da rama de actividade**, cada produto é elaborado segundo a tecnoloxía do sector, enténdese que a elaboración dos produtos secundarios non difire da correspondente aos produtos primordiais producidos polas distintas ramas de actividade. Considérase a estabilidade dos coeficientes de mercado, é dicir, mantéñense estábeis as estruturas das filas da matriz de produción.

A introdución das hipóteses mencionadas, conxuntamente coas correspondentes á estabilidade de coeficientes técnicos non homoxéneos e de coeficientes de distribución (totais, interiores

---

mostran que o suposto de coeficientes constantes é inapropiado.

[12] Por suposto, o único procedemento óptimo para realizar tales transferencias de inputs sería obviamente que as unidades informantes proporcionaran o valor real dos mesmos. Pero, na práctica as empresas non acostuman dispoñer de tal información.

ou importados), implícanos certo alonxamento da realidade económica que se pretende explicar ao longo dun período de tempo máis ou menos curto; estaríamos logo diante dun dos inconvenientes que presentan este tipo de modelos. Pero por outro lado, debemos ter presente que o feito de traballar directamente coas táboas de orixe e destino supón unha vantaxe significativa xa que nos permite unha maior explotación de toda esa información que nos aportan os distintos centros de estatística encargados de artellar TIO. Nese sentido, comentaremos como se pode recorrer a modelos de demanda relativos á hipótese do produto sen necesidade de agregar produtos, a diferencia do que se ven facendo habitualmente.

Outra vantaxe que supón o emprego destes modelos fronte aos construídos sobre as táboas input-output simétricas, é que as táboas de orixe e destino presentan unha maior desagregación, ou sexa, traballan cun maior número de produtos que as táboas simétricas. Asunto de vital importancia sobre todo para estudos sectoriais, nese sentido imaxinémonos, por exemplo, que desexamos estudar o sector agrogandeiro español de acordo a técnica input-output. Podemos comprobar como nas TIO españolas aparece na táboa simétrica un único sector; *Agricultura, gandeiría e caza*; pero nas TOD por produtos xa hai unha maior desagregación, así se destacamos os máis significativos da rama (non homoxénea) correspondente xa temos; P1 *Produtos agrícolas*, P2 *Produtos da gandeiría* e P3 *Servizos agrícolas gandeiros.* Cando menos, o emprego destes modelos será aconsellábel como ferramenta complementaria dado que axuda a profundizar na búsqueda de distintos impactos –tan característicos dentro da análise económica– e outro tipo de conclusións.

Entón, son varias as vantaxes que nos ofrecen as táboas de orixe e destino xa que, en principio, as mesmas son máis doadas de confeccionar e nalgúns casos son publicadas cada anualidade, como é o caso das táboas españolas nos últimos anos. Polo tanto, se dispoñemos para un determinado ano das táboas de orixe e destino e non da táboa simétrica, o feito de traballar cos modelos que imos introducir sálvanos certos atrancos. Un dos atrancos máis habituais cando se traballa cos modelos tradicionais –os obtidos a partir da táboa simétrica– é o descoñecemento da matriz de coeficientes técnicos acompañado da falla desa información necesaria para actualizar dita matriz a partir da correspondente a última TIO publicada. Como non, a propia estabilidade asignada aos coeficientes técnicos (homoxéneos) tamén implica un certo alonxamento da realidade a explicar.

En función das identidades contábeis e das relacións expostas anteriormente pódese derivar todo o conxunto de modelos baseados no novo marco input-output. Tendo en conta que polo xeral, tanto a táboa de orixe como a de destino aparecen avaliadas a prezos básicos, é necesario realizar certos axustes previos xa que os consumos intermedios sempre están avaliados a prezos de adquisición. Logo a primeira tarefa antes da elaboración dos modelos debe ser sempre a compatibilidade da valoración de tódolos elementos de ambas táboas. Estos axustes non son sinxelos de realizar dado que normalmente a táboa de orixe só se presenta valorada a prezos básicos, o que xenera dificultades no axuste (a demanda final está a prezos de adquisición e é preciso pasala a prezos básicos e non se habitúa dispoñer da información necesaria).

Se poseemos a información relativa á matriz de inputs intermedios interiores podemos traballar cos coeficientes técnicos interiores, aínda que haxa que advertir que estes últimos presentan unha maior debilidade que os totais xa que as ramas sempre poden recorrer a substitucións de consumos intermedios interiores por importados, ou sexa, estes son menos estábeis. Máis adiante (no apartado adicado a modelos e oferta e ao igual que no Capítulo 3), introduciremos modelos relativos a fluxos interiores pensando basicamente en aplicacións relacionadas con economías rexionais[13].

Hai distintos traballos onde se resaltan a construción dalgúns dos modelos que xurdirán a continuación. Entre outros, podemos destacar a Mesnard (2004, p. 130 e seguintes), a United Nations (1999, p. 90 e seguintes) e a Cañada (2001).

Polo tanto, unha vez que temos claro que para poder traballar cos modelos obtidos directamente das táboas de orixe e destino, as mesmas deben estar valoradas do mesmo xeito, ben sexa a *prezos de adquisición* ou a *prezos básicos*[14]; xa estamos en condicións de introducir os mesmos.

2.4.1 Modelos clásicos ou de demanda

En base ao exposto anteriormente, hai dous tipos de relacións entre o output das industrias e o dos produtos, segundo se considere que son os produtos proporcionais á produción de distintas ramas de actividade ou que a produción de cada rama é proporcional á produción de diferentes produtos. En cada un dos casos se lle dá prioriedade a un tipo de hipótese que se admite que ten unha estabilidade no tempo e por tanto permite aplicar os correspondentes modelos.

[13] A pesar do carácter que presentan os coeficientes técnicos interiores, en moitos estudos de carácter rexional son moi empregados, eso sí, en relación á táboa simétrica. Así, neste sentido, poden verse os comentarios de índole metodolóxica de distintos institutos de estatística, como en IEA ou IVE.

[14] Naqueles casos onde non sexa así e tampouco se dispoña das táboas auxiliares que o permitan, dende logo que non é aconsellábel aplicar estes modelos. De recorrer aos mesmos, dende logo que nos atoparíamos cuns resultados distantes da realidade económica a explicar.

Modelos en base á tecnoloxía da rama de actividade

En primeiro lugar, imos introducir o modelo de Leontief relativo á estabilidade dos coeficientes de mercado, é dicir, en base á hipótese de tecnoloxía da industria. Ou sexa, neste caso asumimos que a matriz estábel temporalmente é a D, o que equivale, por tanto, a considerar que cada produto se elabora de acordo coa tecnoloxía da industria ou rama de actividade produtora. É dicir, a hipótese de tecnoloxía da rama sempre se aplica unida á hipótese de cuotas de mercado do produto constantes para as distintas ramas. A combinación destas dúas hipóteses supón que o uso do produto i na produción do produto j é unha medida ponderada do uso do produto i polas diferentes ramas de actividade, obtendo precisamente as ponderacións de acordo ás participacións das distintas ramas na oferta total do produto j. Ademais, no que respecta a estes modelos (de demanda), enténdese que tamén se admite a estabilidade dos coeficientes técnicos totais (non homoxéneos).

Polo tanto, tomamos a relación contábel;

$$q = Xi + y - m,$$

e substituíndo (28), ou sexa, consideramos a estabilidade de B, quédanos;

$$q = Bg + y - m. \tag{34}$$

Agora, de acordo a outra hipótese apuntada previamente, é dicir, substituíndo (10), $g = D'q$, na anterior igualdade obtemos;

$$q = BD'q + y - m.$$

A matriz BD', que a podemos simbolizar abreviadamente por A_{tr}, é unha matriz que describe os produtos necesarios para producir outros produtos.

Por último, con vistas a despexar a produción por produtos;

$$q - BD'q = y - m;$$

a partir de aquí

$$(I - BD')q = y - m;$$

e así construímos o modelo de demanda relativo á produción de produtos:

$$q = (I - BD')^{-1}(y - m). \tag{35}$$

A matriz produto por produto, BD', que a podemos denominar matriz de coeficientes baixo tecnoloxía da industria ou rama, A_{tr}, móstranos os produtos necesarios para producir outros produtos baixo a hipótese da rama de actividade. Como vimos, obtense ao multiplicar a estrutura de inputs das diferentes ramas que producen o produto polas súas cuotas de mercado para ese produto. Esto implica que cada rama ten unha estrutura de consumos intermedios independentemente do produto que teña que elaborar. A estrutura de consumos intermedios, segue á rama de actividade e non ao produto.

Agora detémonos na interpretación económica dos elementos desta matriz (BD'). Así, vemos como esta se corresponde cunha matriz cadrada de orde m,

$$BD' = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & \cdots & d_{m1} \\ d_{12} & d_{22} & \cdots & d_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{1n} & d_{2n} & \cdots & d_{mn} \end{pmatrix},$$

optamos por simbolizar o seu elemento xenérico de acordo a π_{ik}, sendo o mesmo do seguinte modo;

$$\pi_{ik} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} d_{kj} = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_{ij}}{g_j} \frac{z_{kj}}{q_k}, \quad i, k = 1, 2, ..., m$$

A interpretación destes coeficientes correspóndese coa *proporción do input i* (total, $x_{ij} = x_{ij}^d + x_{ij}^m$) *na produción dunha unidade monetaria do produto k*, sinalar que consideramos ramas de actividade non homoxéneas. Neste aspecto tamén se deteñen ten Raa e Rueda-Cantuche (2003, p. 445).

Co fin de aclarar esta interpretación, imos expresar o elemento xenérico da seguinte maneira;

$$\pi_{ik} = b_{i1} d_{k1} + b_{i2} d_{k2} + ... + b_{in} d_{kn},$$

vemos como cada sumando se corresponde coa *proporción do input i na produción do produto k a través da rama de actividade j*. Desta forma, entendemos que o coeficiente π_{ik} indica a relevancia do input i na produción do produto k no conxunto do sistema económico, que está composto polas n ramas de actividade .

Cando traballamos con ramas de actividade homoxéneas ($g = q$, polo tanto m é igual a n) como xa se ten apuntado anteriormente a matriz de coeficientes de mercado correspóndese coa matriz identidade, ou sexa, que $d_{kk} = 1$ e os restantes elementos da columna k da matriz D', $d_{k1,}\ d_{k2}, ..., d_{k(k-1)},\ d_{k(k+1)}, ..., d_{kn}$ son nulos (o mesmo acontece cos elementos da fila k de D). Entón, vemos claramente como se simplifica a expresión correspondente a π_{ik};

$$\pi_{ik} = b_{i1}0 + b_{i2}0 + ... + b_{ik}1 + ... + b_{in}0 = b_{ik}$$

Nese hipotético caso, o coeficiente b_{ik} correspóndese co coeficiente técnico total do modelo de Leontief elaborado a partir da táboa simétrica. Vemos logo como se pon de manifesto como este tipo de modelos é máis xeral que o relativo a táboas simétricas, pois o feito de que as ramas de actividade sexan homoxéneas non deixa de ser un caso moi específico.

Tamén podemos reformular o modelo introducido (35), de tal modo que obteñamos a produción por ramas, en vez de lograr o nivel de produtos[15]. Polo tanto, substituíndo a anterior igualdade en (10) obtemos ese outro modelo de demanda, digamos que está asociado ao anterior[16];

$$g = D'(I - BD')^{-1}(y - m). \tag{36}$$

Modelos en base á tecnoloxía do produto

Neste segundo caso apoiámonos no sistema (13), dado que o que se postula é a estabilidade de C; ou sexa, que cada produto elaborase no sistema coa tecnoloxía específica, á marxe da industria que o elabore. É dicir, a estrutura de consumos intermedios é a do produto.

Polo tanto, cando as matrices de consumos intermedios e produción sexan cadradas e de rango completo, ou aínda que non o sexan pero se recurra a agregacións co fín de transformalas en matrices cadradas tamén se poden obter estes modelos alternativos, artificio empregado en

[15] En xeral, considerase máis útil o modelo produto por produto. De feito no SCN-93 descríbese só esta aproximación.

[16] No seguinte capítulo veremos como é posíbel presentar doutro xeito o modelo baseado nestas hipóteses.

moitas ocasións, pero este asunto será tratado posteriormente. Neses hipotéticos casos pode calcularse a inversa de C; ou sexa, a produción por ramas de actividade viría dada por;

$$g = C^{-1}q, \tag{37}$$

Polo tanto, en base á hipótese de tecnoloxía do produto, substituímos a anterior igualdade en (34) e operando obtemos outro modelo de Leontief por produción de produtos;

$$q = (I - BC^{-1})^{-1}(y - m) \tag{38}$$

e o modelo asociado[17] (produción de ramas de actividade) será;

$$g = C^{-1}(I - BC^{-1})^{-1}(y - m). \tag{39}$$

Alternativamente podemos artellar modelos de demanda en relación aos fluxos interiores, pero optamos por introducilos no Capítulo 3 cando tratemos as extensións dos modelos orixe-destino.

Os consumos intermedios que require unha rama de actividade é a suma dos inputs necesarios para producir tódolos seus produtos. Se os produtos, independentemente da rama, necesitan uns consumos idénticos poderíamos representalos por unha matriz A_{tp} (matriz cadrada de orde m). Cando multipliquemos esta matriz polo output de cada produto obtido polas diferentes ramas de actividade, obteríamos os requerimentos de inputs da rama de actividade, B. É dicir, $B = A_{tp}C$. Polo tanto, agora a matriz que mostra os produtos necesarios para producir outros produtos baixo a hipótese de tecnoloxía de produto obtense como $A_{tp} = BC^{-1}$. Esto implica que haxa que invertir a matriz que mostra a estrutura da produción para obter a matriz de coeficientes input-output. De aí que se precise que as matrices sexan cadradas e de rango completo, pero habitualmente as mesmas non son cadradas salvo que se recurra a agregacións para conseguir que sexan desa índole[18].

Noutras verbas, temos que decidir se a tecnoloxía é a do produto ou a da rama de actividade, xa que moitos produtos son elaborados por varias ramas de actividade e moitas ramas producen máis dun produto. Ademais do mencionado anteriormente, existen enormes dificultades teóricas

[17] Máis adiante veremos como este modelo tamén se pode presentar doutro xeito.

[18] Este atranco pode salvarse mediante o uso do concepto da inversa xeralizada, asunto que se abordará no seguinte capítulo.

para soster a hipótese de tecnoloxía da rama, xa que significa mesmo custo de produción para diferentes produtos vendidos a diferentes prezos, o cal non é posíbel en competencia. Aínda así, os problemas prácticos motivados pola imposibilidade de invertir a matriz C e que no caso de que sexa inversíbel poidan xurdir despois coeficientes técnicos negativos supuxo que sexa a tecnoloxía da rama a máis usada, incluso polas institucións oficiais[19]. Porén, debemos ter presente que a utilización de modelos baseados na tecnoloxía de rama de actividade cando transcurriron longos periodos de tempo é moi problemática, xa que supón ademais da estabilidade de coeficientes técnicos, a estabilidade das cuotas de mercado. Mentres que nos modelos de tecnoloxía de produto non é necesaria esta segunda hipótese, aínda que hai que ter presente a estabilidade dos coeficientes de especialización (que se supón que muda en menor medida).

Non entramos na interpretación económica dos elementos da matriz BC^{-1} dada a complexidade dos elementos da inversa de C, pero en todo caso, a interpretación global destes elementos ten que ser semellante á dos elementos de BD'.

Por último, temos que comentar que este tipo de modelos tamén son moi empregados dadas as súas características. Nese sentido, sinalamos como Viet (1994, p. 37), ten Raa e Rueda-Cantuche (2003, p. 448) ou no manual de Uniteds Nations (1999, p. 98 e 99), entre outros, nos indican que estes modelos verifican os catro axiomas "desexábeis", que a continuación recordamos;

1.- Axioma de **equilibrio material**; $q = A(X,Z)q + (y - m)$, a produción por produtos é igual á suma da demanda intermedia e da demanda final (neta de importacións) dos mesmos.

2.- Axioma de **equilibrio financieiro**; $p' = p'A(X,Z) + v'$, o prezo do produto é igual aos seus custos.

3.- Axioma de **prezo invariante**; $A(\hat{p}X, \hat{p}Z) = \hat{p}A(X,Z)\hat{p}^{-1}, \forall\ p > 0$, ante un incremento dos prezos óbtense unha mesma matriz de coeficientes técnicos.

4.- Axioma de **escala invariante**; $A(\hat{s}X, \hat{s}Z) = A(X,Z),\ \forall\ s > 0$, se os elementos das matrices de orixe e destino aumentan na mesma proporción a matriz de coeficientes técnicos non varía.

Sendo $A(X,Z)$ a matriz de coeficientes técnicos totais por produtos obtidos directamente das táboas de orixe e destino. Os axiomas foron introducidos analiticamente de acordo aos fluxos totais, pero tamén se podían expresar de acordo aos fluxos interiores.

Os modelos de demanda que asumen a outra hipótese, a de tecnoloxía da industria, só

[19] En ten Raa *et al* (1984) e Jansen e ten Raa (1990) realizaron diversas discusións formais sobre a elección do suposto tecnolóxico

cumpren o axioma relativo ao equilibrio material, estamos logo diante dun dos inconvenientes máis serios destes modelos.

Un dos problemas máis significativo que apresenta o modelo que asume a hipótese de tecnoloxía do produto é aparición de elementos negativos, aínda que os mesmos veñen a ser moi pequenos. Este feito foi tratado por varios autores, entre eles destacamos a Konijn, así ten Raa e Rueda-Cantuche (2004, p. 2) indican como este autor apunta tres razóns polas veñen aparecendo estes valores negativos: erros de medición, coexistencia de tecnoloxías e/ou problemas de agregación. Indicar que cando traballan con este suposto recorren a matrices cadradas polo que o criterio á hora de agregar pode influír notabelmente nos resultados. Hai distintas técnicas para correxir esas cifras, como pode ser a substitución deses valores negativos pequenos por ceros e a continuación aplicar o método RAS ata alcanzar o equilibrio (Viet, 1994, p. 41). Outra das ferramentas empregadas para subsanar este problema é a aplicación do algoritmo de Gauss-Jacobi, para maior detalle podemos ver Kornelis e Koole (2003. Apéndice A, p. 26) ou Almon (2000, p. 32 e seguintes). Outro aspecto a comentar é que neste contexto ao xurdirnos elementos negativos na matriz de coeficientes técnicos non nos aseguramos unha inversa asociada positiva, a diferencia da matriz $(I - BD)$ que é inversíbel e a súa inversa é positiva[20]. Un documento que aborda este asunto é (Bidard e Erreygers, 1998) no que lle esixen certas características á matriz $(Z - X)^{-1}$ (tamén en relación a matrices cadradas).

2.4.2 Modelos de oferta ou de Ghosh

Tamén é posíbel construir outros modelos de análise da produción. En concreto, estamos a falar de modelos de oferta ou de Ghosh, é dicir, en vez de proceder por filas traballase dende a perspectiva das columnas[21]. Expoñemos deseguido a construción deste tipo de modelos.

Polo tanto, se consideramos a relación contábel (4);

$$X'i + v = g$$

e substituímos (33) na mesma, ou sexa, considerando constantes os coeficientes de distribución totais (non homoxéneos);

$$H'e + v = g,$$

[20] Sobre este asunto voltaremos posteriormente.
[21] Véxase Ghosh (1958).

pero como admitimos que o total de empregos por produtos é igual á suma da produción e das importacións, $e = q + m$, temos de forma alternativa;

$$H'(q + m) + v = g. \tag{40}$$

Agora considerando a estabilidade de C, ou sexa, substituíndo (13), obtemos;

$$H'(Cg + m) + v = g.$$

A continuación imos operando con vistas a despexar g;

$$H'Cg + H'm + v = g;$$

$$g - H'Cg = H'm + v.$$

Así, o modelo de oferta que explica a produción por ramas de actividade de acordo á estabilidade das columnas da matriz de orixe é o seguinte;

$$g = (I - H'C)^{-1}(H'm + v) \tag{41}$$

e en termos da produción por produtos;

$$q = C(I - H'C)^{-1}(H'm + v). \tag{42}$$

De forma análoga ao manifestado en relación aos modelos de demanda, se X e Z se corresponden con matrices cadradas, tamén se poden artellar matematicamente uns modelos alternativos aos anteriores. Dito doutro xeito, sempre e cando se poida calcular a inversa de D', a produción por produtos exprésase de acordo a;

$$q = (D')^{-1}g. \tag{43}$$

Desta forma, se imos a (40) e substituímos a anterior igualdade chegamos ao modelo que anunciabamos;

$$g = (I - H'(D')^{-1})^{-1}(H'm + v). \tag{44}$$

e o seu modelo asociado será;

$$q = (D')^{-1}(I - H'(D')^{-1})^{-1}(H'm + v). \tag{45}$$

Se dispoñemos da información acerca da procedencia dos fluxos da táboa de destino, interior e importada, podemos traballar cos modelos que construiremos a continuación. O aproveitamento deste desglose é aconsellábel, xa que os coeficientes a utilizar son máis precisos na súa interpretación e incluso, como veremos no seu momento os elementos do vector $H'm$ presentan certa ambigüedade á hora de interpretalos economicamente.

É obvio que os elementos da matriz de consumos intermedios se corresponden coa suma dos elementos da matriz de consumos intermedios de procedencia interior e dos relativos á matriz de consumos intermedios de procedencia importada;

$$X = X^d + X^m, \tag{46}$$

e aplicándolle a trasposición á anterior igualdade temos;

$$X' = X^{d\prime} + X^{m\prime}.$$

Entón, os totais por columnas da matriz X pódense expresar como a suma dos subtotais das matrices X^d e X^m;

$$X'i = X^{d\prime}i + X^{m\prime}i = t^d + t^m. \tag{47}$$

Indo de novo á relación contábel (4) e substituíndo (64) na mesma obtemos;

$$(X^{d\prime}i + X^{m\prime}i) + v = g, \tag{48}$$

agora, tendo en conta as igualdades (69) e (73) [22], o que implicaría supoñer estábeis os coeficientes de distribución interiores e importados (non homoxéneos), chegamos a

[22] Estas igualdades aparecen no Apéndice A deste capítulo.

$$H^{d\prime}q + H^{m\prime}m + v = g \tag{49}$$

e considerando a estabilidade de C, ou sexa, substituíndo (13) no anterior sistema temos;

$$H^{d\prime}Cg + H^{m\prime}m + v = g. \tag{50}$$

Se nos fixamos detidamente nos elementos de $H^{m\prime}m$ vemos como son coñecidos por nos;

$$\sum_{i=1}^{m} h_{ij}^{m} m_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{x_{ij}^{m}}{m_i} m_i = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^{m} = t_j^{m}, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Logo, de forma alternativa podemos expresar a igualdade (50) de acordo a;

$$H^{d\prime}Cg + t^m + v = g. \tag{51}$$

Procedemos de modo análogo aos anteriores modelos co fin de despexar a produción por sectores

$$g - H^{d\prime}Cg = t^m + v$$

e entón temos que o modelo de oferta por produción de ramas de actividade é o seguinte;

$$g = (I - H^{d\prime}C)^{-1}(t^m + v), \tag{52}$$

e a produción por produtos pode expresarse de acordo a;

$$q = C(I - H^{d\prime}C)^{-1}(t^m + v). \tag{53}$$

Como se pode ver, a variábel independente neste tipo de modelos, en vez da demanda final neta de importacións (ou interior), correspóndese co vector que se obten mediante a suma dos inputs intermedios importados e primarios, $t^m + v$.

Tal como sinalamos no seu momento, apoiándonos no cálculo da matriz inversa da trasposta de D, se X^d e Z son matrices cadradas de rango completo, ou se transforman de tal forma; e tendo en conta (43) xurdirían os modelos alternativos aos anteriores

$$g = (I - H^{d\prime}(D')^{-1})^{-1}(t^m + v), \tag{54}$$

e

$$q = (D')^{-1}(I - H^{d\prime}(D')^{-1})^{-1}(t^m + v). \tag{55}$$

Tamén nos parece oportuno interpretar economicamente as matrices de coeficientes de distribución destes modelos de oferta agora introducidos.

Como acabamos de sinalar, con vistas a analizar a produción por sectores ou por produtos, se na táboa de destino non se distinguen os consumos intermedios en función da súa procedencia, interior ou importada, podemos traballar cos seguintes modelos de oferta (enténdese que se consideran estábeis as estruturas das columnas da matriz de orixe);

$$g = (I - H'C)^{-1}(H'm + v) \tag{41}$$

e

$$q = C(I - H'C)^{-1}(H'm + v). \tag{42}$$

Xúrdenos nestes modelos un vector $H'm$, que imos simbolizar abreviadamente por τ, que neste caso aparece expresado como unha matriz columna de orde $(n \times 1)$, e os seus elementos son da forma

$$\tau_j = \sum_{i=1}^{m} h_{ij} m_i, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

cada τ_j correspóndese cunha estimación do total por columnas dos inputs intermedios importados. Compréndese facilmente que o vector τ é unha magnitude aproximada das importacións que son consumidas polas distintas ramas de actividade xa que, en xeral, as súas compoñentes non coinciden cos subtotais por columnas dos consumos intermedios de orixe importada

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^{m} = t_{ij}^{m} = \sum_{i=1}^{m} h_{ij}^{m} m_i \neq \sum_{i=1}^{m} h_{ij} m_i = \tau_{j,} \quad j = 1, 2, ..., n;$$

para que se cumprira a igualdade, os coeficientes de distribución totais terían que ser iguais aos coeficientes de distribución importados. Vexamos logo;

$$\frac{x_{ij}^d + x_{ij}^m}{q_i + m_i} = \frac{x_{ij}^m}{m_i} \Longrightarrow (x_{ij}^d + x_{ij}^m)m_i = (q_i + m_i)x_{ij}^m \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x_{ij}^d m_i = x_{ij}^m q_i.$$

Ou, alternativamente, os coeficientes de distribución interiores terían que ser iguais aos coeficientes de distribución importados, pero, en xeral, non acontece o indicado, ou sexa,

$$\frac{x_{ij}^d}{q_i} \neq \frac{x_{ij}^m}{m_i}.$$

Nestes modelos, aparécenos tamén unha matriz produto $H'C$, sendo a mesma unha matriz cadrada de orde n. Imos denotar o seu elemento xenérico por ϑ_{jk}, sendo o mesmo;

$$\vartheta_{jk} = \sum_{i=1}^{m} h_{ij} c_{ik} = \sum_{i=1}^{m} \frac{x_{ij}}{q_i + m_i} \frac{z_{ik}}{g_k}, \quad j,k = 1,2,...,n,$$

aínda que con fin de interpretalo economicamente é aconsellábel optar pola expresión alternativa;

$$\vartheta_{jk} = \sum_{i=1}^{m} c_{ik} h_{ij} = c_{1k}h_{1j} + c_{2k}h_{2j} + \cdots + c_{mk}h_{mj}, \qquad j,k = 1,2,...,n.$$

De modo que, ϑ_{jk} representa a *relevancia (aproximada) da produción da rama k sobre o total dos recursos que son empregados como inputs na produción dunha unidade monetaria na produción da rama de actividade j.* Podemos ver como o primeiro sumando $c_{1k}h_{1j}$ se corresponde co produto da *proporción da produción da rama k na produción do produto 1* pola *proporción de recursos do produto 1 empregada como input na produción da rama j.*

Por outra parte, tamén apuntamos neste apartado que se dispoñemos das matrices X^d e X^m podemos traballar cos seguintes modelos;

$$g = (I - H^{d\prime}C)^{-1}(t^m + v) \tag{52}$$

e

$$q = C(I - H^{d\prime}C)^{-1}(t^m + v). \tag{53}$$

Agora, a interpretación dos elementos de $H^{d\prime}C$ é máis manexábel cá dos elementos de $H'C$.

Como vimos, o feito de non saber que parte dos consumos intermedios era relativa á produción interior implicaba non saber con exactitude que proporción da produción dunha rama de actividade era empregada por outra rama de actividade, por ese motivo falabamos de aproximacións. Esa ambigüedade xa non se presenta neste tipo de modelos.

Usaremos a notación ϑ_{jk} para designar o elemento xenérico de $H^{d\prime}C$, sendo da seguinte maneira;

$$\vartheta_{jk}=\sum_{i=1}^{m}c_{ik}h_{ij}^{d}=c_{1k}h_{1j}^{d}+c_{2k}h_{2j}^{d}+\cdots+c_{mk}h_{mj}^{d},\qquad j,k=1,2,...,n.$$

A súa interpretación económica correspóndese coa *proporción da produción da rama de actividade k que emprega a rama j para producir unha unidade monetaria.*

2.A Desagregación dos fluxos na táboa de destino por orixe

Dado que na táboa de destino se distinguen os fluxos interiores dos fluxos importados podemos desagregar tanto os coeficientes técnicos como os coeficientes de distribución na súa parte interior e importada.

2.A.1 Coeficientes técnicos interiores

Tendo en conta que $x_{ij} = x_{ij}^d + x_{ij}^m$, sendo x_{ij}^d *o input i de orixe interior demandado pola rama de actividade non homoxénea j e* x_{ij}^m *o input i de procedencia importada demandado pola rama de actividade non homoxénea j;* definimos **os coeficientes interiores técnicos interiores non homoxéneos** da seguinte forma;

$$b_{ij}^d = \frac{x_{ij}^d}{g_j} = \frac{x_{ij}^d}{\sum\limits_{i=1}^{m} z_{ij}}, \qquad i = 1, 2, ..., m \quad \text{e} \quad j = 1, 2, ..., n.$$

E a interpretación económica do elemento xenérico da matriz B^d é *a proporción do input i de orixe interior por unidade monetaria de produción da rama de actividade non homoxénea j.*

De forma análoga aos coeficientes ténicos totais non homoxéneos, podemos resaltar certas igualdades matriciais e propiedades que se cumpren no entorno da matriz B^d. Fixémonos que introducimos un cambio no numerador cando definimos estes coeficientes, en vez de considerar os inputs totais, consideramos parte dos mesmos. De acordo á definición anterior vemos como se verifica;

$$B^d = X^d \hat{g}^{-1}, \tag{56}$$

onde $X^d = (x_{ij}^d)$ é a matriz de consumos intermedios de procedencia interior e podémola expresar

$$X^d = B^d \hat{g}. \tag{57}$$

Tamén entendemos acertado indicar que a demanda intermedia de orixe interior se corresponde co produto entre a matriz B^d e o vector g,

$$X^d i = B^d g. \tag{58}$$

Atendendo á relación contábel (6), $g = X'i + v$, sabemos que cada elemento de g, ou sexa, a produción das distintas ramas de actividade non homoxéneas resulta;

$$g_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^d + \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^m + v_j \ , \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Polo tanto, cúmprese a igualdade que se indica a continuación;

$$1 = \sum_{i=1}^{m} b_{ij}^d + \frac{\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^m}{g_j} + \frac{v_j}{g_j}, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{59}$$

Como se apuntaba anteriormente pode ser admisíbel supoñer que $v_j > 0$, de aí que ante esa hipótese nos aseguramos que a suma por columnas dos coeficientes técnicos interiores é estritamente menor que 1;

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij}^d < 1, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{60}$$

2.A.2 Coeficientes técnicos importados

Agora, plantexando unha relación entre os inputs intermedios importados e e a produción das distintas ramas de actividade non homoxéneas, definimos os **coeficientes técnicos importados non homoxéneos**

$$b_{ij}^m = \frac{x_{ij}^m}{g_j} = \frac{x_{ij}^m}{\sum_{i=1}^{m} z_{ij}}, \quad i = 1, 2, ..., m \quad \text{e} \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Así, o elemento b_{ij}^m representa *a proporción do input i de orixe importada por unidade monetaria de produción da rama de actividade non homoxénea j.*

A matriz relativa a estes coeficientes que estamos a introducir será

$$B^m = X^m \hat{g}^{-1}, \tag{61}$$

sendo $X^m = (x_{ij}^m)$ a matriz de consumos intermedios de orixe importada e podémola expresar da seguinte maneira;

$$X^m = B^m \hat{g}. \tag{62}$$

Na construción dos modelos obtidos directamente das táboas de orixe e destino interésaranos ver como a demanda intermedia de orixe interior se corresponde co produto da matriz B^m polo vector g,

$$X^m i = B^m g. \tag{63}$$

Se retomamos a igualdade (59), que apareceu cando estabamos a introducir os b_{ij}^d;

$$1 = \sum_{i=1}^{m} b_{ij}^d + \frac{\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^m}{g_j} + \frac{v_j}{g_j}, \qquad j = 1, 2, ..., n,$$

vemos como a suma por columnas dos coeficientes técnicos importados non homoxéneos tamén é estritamente menor que 1.

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij}^m < 1, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{64}$$

A conclusión que acabamos de obter semella evidente dado que os coeficientes técnicos totais obtéñense mediante a suma dos coeficientes técnicos interiores e importados. Vémolo doadamente;

$$b_{ij} = \frac{x_{ij}}{g_j} = \frac{x_{ij}^d + x_{ij}^m}{g_j} = \frac{x_{ij}^d}{g_j} + \frac{x_{ij}^m}{g_j} = b_{ij}^d + b_{ij}^m.$$

E por outro lado, se con anterioriedade, en (26) indicabamos que;

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij} < 1, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Polo tanto, con máis razón;

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij}^d < 1 \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=1}^{m} b_{ij}^m < 1, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

2.A.3 Coeficientes de distribución interiores

Tamén podemos establecer unha relación entre os inputs intermedios interiores e os totais por produción por produtos, definindo así **os coeficientes de distribución interiores non homoxéneos**;

$$h_{ij}^d = \frac{x_{ij}^d}{q_i} = \frac{x_{ij}^d}{\sum\limits_{j=1}^{n} z_{ij}}, \quad i = 1, 2, ..., m \qquad \text{e} \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

A interpretación económica do elemento xenérico h_{ij}^d correspóndese coa *proporción do produto i destinada a input para a produción dunha unidade monetaria de produción da rama de actividade non homoxénea j.*

De acordo á definición que acabamos de dar obtemos a seguinte expresión matricial;

$$H^d = \hat{q}^{-1} X^d. \tag{65}$$

Agora, en base a unha das relacións contábeis implícitas nas táboas de orixe e destino, en concreto en base a (3) sabemos que;

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^d + y_i^d = u_i^d + y_i^d, \qquad i = 1, 2, ..., m.$$

Entón, ten que cumprirse;

$$\sum_{j=1}^{n} h_{ij}^d + \frac{y_i^d}{q_i} = 1, \qquad i = 1, 2, ..., m.$$

Admitindo que a demanda final de produtos interiores é positiva, $y_i^d > 0$, $(i = 1, 2, ..., m)$; a suma por filas dos elementos de H^d é estritamente menor que 1.

$$\sum_{j=1}^{n} h_{ij}^d < 1, \qquad i = 1, 2, ..., m. \tag{66}$$

Aínda que é posíbel que a demanda final dalgún produto de orixe interior sexa nula, logo en xeral temos que $y_i^d \geq 0$, $(i = 1, 2, ..., m)$; e polo tanto a suma das filas correspondentes sería menor ou igual a 1,

$$\sum_{j=1}^{n} h_{ij}^{d} \leq 1, \qquad i = 1, 2, ..., m.$$

A partir da igualdade (65) deducimos a seguinte;

$$X^d = \hat{q} H^d. \tag{67}$$

Deste xeito, é inmediato ver como a matriz trasposta da relativa aos consumos intermedios interiores é;

$$(X^d)' = (H^d)' \, \hat{q}. \tag{68}$$

Por último, indicamos que a suma por columnas da matriz de coeficientes interiores, X^d, (que para maior comodidade xa optaramos por simbolizala abreviadamente por t^d), se corresponde co seguinte produto matricial;

$$t^d = (X^d)' i = (H^d)' q. \tag{69}$$

2.A.4 Coeficientes de distribución importados

Se establecemos unha relación entre os inputs intermedios importados e as importacións por produtos, acabamos definindo os denominados **coeficientes de distribución importados**;

$$h_{ij}^{m} = \frac{x_{ij}^{m}}{m_i}, \qquad i = 1, 2, ..., m \text{ e } \; j = 1, 2, ..., n.$$

En definitiva, podemos construir unha matriz da mesma orde que H^d, que imos a denotar por H^m, onde o seu elemento característico, h_{ij}^{m}, se interpreta como *a proporción das importación do produto i destinada a input para a produción dunha unidade monetaria de produción da rama de actividade non homoxénea j.*

Esta matriz ven dada polo seguinte produto matricial;

$$H^m = \hat{m}^{-1} X^m. \tag{70}$$

As importacións dos distintos produtos van destinadas á demanda final ou son utilizadas como inputs por parte das distintas ramas, así que verifícase;

$$m_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^m + y_i^m = u_i^m + y_i^m, \qquad i = 1, 2, ..., m.$$

Entón, ten que cumprirse

$$\sum_{j=1}^{n} h_{ij}^m + \frac{y_i^m}{m_i} = 1, \qquad i = 1, 2, ..., m.$$

Imos supoñer que as demandas finais dos distintos produtos importados son positivas, $y_i^m > 0$, $(i = 1, 2, ..., m)$; dese modo cúmprense as seguintes desigualdades, onde se pon de manifesto que as sumas por filas dos elementos de H^m son estritamente menores que un;

$$\sum_{j=1}^{n} h_{ij}^m < 1, \qquad i = 1, 2, ..., m.$$

A partir de (70), multiplicando ambos membros pola esquerda pola matriz diagonal de m e simplificando obtemos;

$$X^m = \hat{m} H^m. \tag{71}$$

Así, a trasposta desta matriz resulta da seguinte maneira;

$$(X^m)' = (H^m)' \hat{m}. \tag{72}$$

E xa por último, indicar que se multiplicamos pola dereita pola matriz unitaria de orde $(n \times 1)$, obtemos a matriz columna dos consumos intermedios importados;

$$t^m = (X^m)' i = (H^m)' \hat{m} i = (H^m)' m. \tag{73}$$

2.B Relacións entre as matrices de coeficientes directos

Resaltamos aquí as dependencias existentes entre as matrices de coeficientes obtidos directamente das táboas de orixe e destino[23], veremos como as mesmas nos resultarán fundamentais á hora de estudar a relación entre os modelos de oferta e demanda[24].

2.B.1 Interrelación entre C e D

As matrices de coeficientes de especialización e de coeficientes de mercado, C e D respectivamente, xurden da táboa de orixe. O feito de que nun caso se proceda por columnas e no outro por filas lévanos a ver facilmente como se pode expresar unha matriz en función da outra; xa vimos, en (11) e (7), a raíz da definición dos coeficientes de especialización e de mercado como

$$C = Z\hat{g}^{-1} \qquad \text{e} \qquad D = \hat{q}^{-1}Z.$$

Polo tanto, a matriz de produción pode expresarse alternativamente de acordo aos seguintes produtos matriciais;

$$Z = C\hat{g}, \qquad \text{ou} \qquad Z = \hat{q}D.$$

A partir de aquí, obtemos;

$$C\hat{g} = \hat{q}D$$

e agora vemos de inmediato como se pode escribir unha matriz en función da outra;

$$D = \hat{q}^{-1}C\hat{g}, \tag{74}$$

$$C = \hat{q}D\hat{g}^{-1}. \tag{75}$$

[23] Os resultados que se mostran a continuación están inspirados nas relacións existentes, dentro do entorno da táboa simétrica, entre as matrices de coeficientes técnicos e de distribución; e entre as súas correspondentes inversas. Ditas relacións podémolas ver, por exemplo, en Pulido e Fontela (1993, p. 81 e 83), ou Sánchez-Chóliz e Duarte (2003, p. 487).

[24] A relación entre os modelos de oferta e demanda (OD) abordarase máis adiante.

2.B.2 Interrelación entre B^d e H^d

Tamén sabemos que as matrices de coeficientes de técnicos interiores e de coeficientes de distribución interiores xurden a partir da táboa de destino. En (56) e (65) vimos como se poden expresar as matrices B^d e H^d en función de X^d;

$$B^d = X^d \stackrel{\wedge}{g}^{-1} \quad \text{e} \quad H^d = \stackrel{\wedge}{q}^{-1} X^d.$$

Polo tanto, a matriz de consumos intermedios interiores pode mostrarse alternativamente de acordo a;

$$X^d = B^d \stackrel{\wedge}{g}, \qquad \text{ou} \qquad X^d = \stackrel{\wedge}{q} H^d.$$

A partir de aquí, obtemos

$$B^d \stackrel{\wedge}{g} = \stackrel{\wedge}{q} H^d.$$

Estando xa en condicións de indicar como se pode expresar unha matriz en función da outra de acordo a ;

$$B^d = \stackrel{\wedge}{q} H^d \stackrel{\wedge}{g}^{-1}, \tag{76}$$

ou

$$H^d = \stackrel{\wedge}{q}^{-1} B^d \stackrel{\wedge}{g}. \tag{77}$$

No hipotético caso de apoiarse na matriz de inputs intermedios de fluxos totais tamén é posíbel buscar a relación entre matrices dos coeficientes relativos a mesma[25].

[25] Xa non nos detemos nas correspondentes dependencias matriciais porque despois optaremos por centrarnos basicamente nos modelos (de demanda ou oferta) relativos aos fluxos interiores.

Capítulo 3

Extensións da análise input-output no novo marco contábel

3.1 Introdución

Xa se indicou no capítulo anterior, en relación ao emprego da inversa tradicional, que se as matrices de produción non son cadradas non é posíbel obter as inversas de matrices de coeficientes de especialización e das traspostas de coeficientes de mercado, sendo estas inversas pezas clave para construír os modelos de análise. Polo tanto atopámonos diante dunha traba significativa na modelización económica tan resaltada en investigacións relativas a este terreo. O mesmo acontece se estas matrices, C e D', non son de rango completo, aínda que sexan cadradas. En concreto, xustifícase o calculo da inversa de C porque a mesma resulta imprescendíbel para explicar a produción por ramas de actividade en base á produción por produtos;

$$g = C^{-1}q, \tag{37}$$

e tamén se xustifica o cálculo da inversa de D' para explicar a produción por produtos en función da produción por industrias

$$q = (D')^{-1}g. \tag{43}$$

Pero pola propia confección das táboas de orixe e destino, o máis mormal é que estas matrices sexan rectangulares, de aí que para despexar q e g nos modelos obtidos directamente das TOD nos vexamos constantemente na obriga de calcular "inversas"de matrices rectangulares.

Para salvar este atranco dispoñemos dunha posibilidade, a que consiste en recorrer a agregacións por produtos (xeralmente $m > n$) para obter unha matriz cadrada, como así se fai de forma habitual. Pero este procedemento implica case sempre unha perda significativa desa información que nos achegan estas táboas. Neste sentido, imaxinémonos que desexamos analizar un sector económico que apareza fortemente agregado por ramas de actividade nas táboas de orixe e destino pero desagregado en maior medida por produtos; a correspondente agregación para conseguir unha matriz cadrada mermaría considerabelmente os resultados obtidos.

Neste capítulo imos ver como se pode atallar o mencionado atranco ao empregar pseudo-inversas. Ademais veremos como se abren distintas posibilidades á hora de artellar os modelos de análise de acordo á construción de modelos cunha presentación distinta e aparentemente máis sinxela, modelos que decidimos calificalos como simples.

3.2 O emprego de inversas xeralizadas no marco input-output

En vez de acudir a agregacións á hora de enfrontarnos á traba comentada na introdución, optaremos logo por outra alternativa que consiste no cálculo das "inversas" desas matrices rectangulares. En concreto, utilizaremos a **inversa xeralizada de Moore-Penrose** (ver definición e propiedades no Apéndice Matemático), sendo esta desenvolvida por Moore, E.H. (1935) e Penrose, R. (1955). Hai outros tipos de inversas xeralizadas (tamén denominadas pseudo-inversas), como poden ser a de Lanzos ou a de Drazin; pero a escollida, como veremos máis adiante, é moi manexábel dentro do marco input-output.

A inversa xeralizada de Moore-Penrose é empregada a miúdo noutros campos alleos á economía. Pero dentro da economía cónstanos a súa utilización en varios contextos. Así, entre outros, foi usada en econometría en relación a matrices particionadas (Baksalary, Chylinska e Styan, 2004), en modelos de Leontief dinámicos (Schinnar, 1978, p. 648 e seguintes), en traballos de agregación de industrias (Olsen, 2000, p. 6) e en matrices de contabilidade social (Luppino, Gajewski, Zohir, Khondker e Crowther, 2004, p. 18). Axustándonos ao uso desta inversa xeralizada dentro das táboas *Use-Make,* vemos como Zhao (2002) se apoia nesta ferramenta para evitar agregacións nos modelos de demanda en base á hipótese de tecnoloxía do produto.

3.2.1 As inversas xeralizadas das matrices C e D'

A inversa xeralizada de C, C_x, e a inversa xeralizada da trasposta de D, D'_x, serán elementos decisivos na elaboración certos modelos de demanda e oferta[1], enténdese de forma respectiva. De aí que a continuación comentamos algúns aspectos acerca das mesmas.

Centrándonos nas hipóteses mencionadas anteriormente, de tecnoloxía do produto e de tecnoloxía da industria; vemos frecuentemente como as táboas de orixe e destino non son cadradas e polo tanto de ser así non será posíbel calcular as matrices inversas de C e D'. Pero como xa dixemos, salvamos este obstáculo acudindo ao uso da inversa xeralizada de Moore-Penrose.

Habitualmente o rango destas matrices correspóndese co mínimo do número de columnas e de filas:

$$rg(C) = mín\{m, n\} \qquad \text{e} \qquad rg(D') = mín\{m, n\},$$

digamos que é un suposto asumíbel. En todo caso, se estas matrices non son de rango completo sempre se pode acudir a agregacións para evitar este problema, eso si, pasaríamos a reformular o sistema.

En primeiro lugar, imos deternos na igualdade (13), $q = Cg$, e ao mesmo tempo esiximos que as táboas de orixe e destino teñan un maior número de filas que de columnas, que por certo na maior parte das presentacións das táboas input-output así é[2]. O motivo desta esixencia explícase deseguido.

Se $C \in M_{m\times n}, (m > n)$ e $rg(C) = n \Longrightarrow \exists\ C_x \in M_{n\times m}$, calculándose C_x de acordo a;

$$C_x = (C'C)^{-1}C', \tag{78}$$

e ademais $C_xC = I_n$. (Ver Apéndice Matemático, proposición 9).

De modo que, multiplicando ambos membros da igualdade $q = Cg$ pola esquerda por C_x obtemos $C_xCg = C_xq$, pero como acabamos de recordar $C_xC = I_n$, quédanos xa de forma simplificada

[1] Decidimos acudir ao subíndice x para facer mención ao carácter de matriz xeralizada, diferenciando así do superíndice -1, tan característico da inversa dunha matriz. Dese modo, tamén se distinguirá mellor o contexto en que nos movamos; ou sexa, matrices cadradas *vs.* matrices rectangulares.

[2] E máis, este feito pode darse por suposto atendendo ao propio espíritu do SEC-95, tal como xa se puntualizou na introdución desta investigación.

$$g = C_x q. \tag{79}$$

É obvio que se $m = n$, ou sexa, se traballamos con táboas de orixe e destino cadradas estaríamos ante un caso particular. Sempre se poden chegar a táboas desta índole mediante agregacións de produtos (tendo presente que anteriormente xa indicamos que o normal é que $m > n$). De feito, en moitos traballos publicados recentemente, entre outros: (Cañada, 2001), (Viet, 1994), (ten Raa e Rueda-Cantuche, 2003, p. 444) e (Filho. 2002), sempre recordan que é preciso transformar as matrices orixinais en matrices cadradas cando se traballa coa hipótese de tecnoloxía do produto. Nese caso $C_x = C^{-1}$, entón

$$g = C^{-1} q. \tag{37}$$

En segundo lugar, imos ao sistema (10), $g = D'q$, e apuntamos que para despexar q para logo ir realizando as substitucións pertinentes para conseguir modelos alternativos de oferta precisamos traballar con táboas que posean un maior número de columnas que de filas, e lembramos unha vez máis que esta característica non é moi habitual.

Se $D \in M_{m\times n}$ $(m < n)$ e é de rango completo $\Longrightarrow \exists D' \in M_{\ n\times m}$, polo tanto tamén $\exists\ D'_x \in M_{m\times n}$, calculándose D'_x da seguinte maneira:

$$D'_x = (DD')^{-1} D, \tag{80}$$

e ademais $D'_x D' = I_m$.

O outro sistema obtense de forma análoga ao anterior, neste caso multiplicamos pola esquerda por D'_x ambos membros de $g = D'q$, quedándonos;

$$D'_x g = D'_x D' q$$

e unha vez simplificada a expresión anterior, temos que;

$$q = D'_x g. \tag{81}$$

Se dispoñemos de matrices cadradas, evidentemente que D'_x se correspondería coa inversa de D', $(D')^{-1}$, de aí que nese caso

$$q = (D^{\backprime})^{-1}g. \tag{43}$$

3.2.2 Expresións alternativas dos modelos de demanda

Modelo "simple"de Leontief (OD)

Tendo en conta a relación contábel que nos indica a identidade entre ofera e demanda correspondente aos fluxos interiores (3)[3]; $q = X^d i + y^d$ e admitindo estábeis os coeficientes técnicos interiores, ou sexa, en base a esta hipótese sabemos por (58) que se pode substituír o vector de demanda intermedia de fluxos interiores polo produto matricial $B^d g$. Obtemos logo;

$$q = B^d g + y^d. \tag{82}$$

Agora traballando coa hipótese de tecnoloxía do produto, noutras verbas, mantendo a estabilidade por columnas da matriz de orixe, podemos substituír q por Cg;

$$Cg = B^d g + y^d, \tag{83}$$

con vistas a explicar o vector de produción por ramas de actividade imos operando;

$$Cg - B^d g = y^d;$$

$$(C - B^d)g = y^d. \tag{84}$$

Para despexar a produción de ramas de actividade (non homoxéneas) vemos como é necesario recorrer á inversa xeralizada de Moore-Penrose, daso que en xeral a matriz $(C - B^d)$ é rectangular (habitualmente $m > n$), en principio cabe supoñer que o rango é igual a n; ou sexa, que coincide co número de sectores de actividade. É máis, en relación a este modelo que estamos a construír precísase que a matriz $(C - B^d)$ teña un maior número de produtos que de sectores, de ser así, a súa inversa xeralizada, $(C - B^d)_x$, sería de orde $n \times m$ e ademais

[3]Neste capítulo imos fixarnos case en exclusiva nos modelos de fluxos interiores xa que pensamos basicamente nas aplicacións de tipo rexional.

$$(C-B^d)_x(C-B^d)=I_n.$$

Así que multiplicando pola esquerda por $(C-B^d)_x$ ambos membros do sistema (84) temos que;

$$(C-B^d)_x(C-B^d)g=(C-B^d)_x y^d,$$

e unha vez simplificado, obtemos o modelo de demanda relativo á produción por ramas de actividade non homoxéneas, que no sucesivo imos a calificalo como "simple"para diferencialo doutros que introduciremos posteriormente

$$g=(C-B^d)_x y^d. \tag{85}$$

No caso de que $(C-B^d)\in M_{n\times m}$ e asumindo sempre que esta matriz fose de rango completo, si existiría a súa pseudo-inversa pero $(C-B^d)_x(C-B^d)$ sería unha matriz simétrica, aínda que non necerariamente se tería que corresponder coa matriz identidade. Por esa razón se esixe que $m>n$. Se dispoñemos de matrices cadradas ($m=n$) este problema desaparece, xa que estamos no caso particular de matrices inversas é

$$(C-B^d)^{-1}(C-B^d)=(C-B^d)(C-B^d)^{-1}=I_n.$$

Polo tanto, o modelo de demanda xa o expresaríamos como sigue[4];

$$g=(C-B^d)^{-1}y^d. \tag{86}$$

Aproveitamos agora a ocasión para buscar semellanzas co modelo tradicional de Leontief no que se explica a produción de sectores (ou produtos) en base á demanda final interior. Se salvamos as notacións e temos presente que aquí nos remitimos a ramas non homoxéneas, feito que nos implica respectar a estrutura por columnas da matriz de produción, vemos como a coincidencia é practicamente total (fixémonos que se os sectores fosen homoxéneos entón $C=I$). De aí, que nos atrevamos a asegurar, dende a óptica da demanda, que este é o modelo obtido directamente das táboas de orixe e destino máis natural.

[4]Nun traballo de Bidard e Erreygers (1998) acerca dos sistemas de produción de Sraffa e de Leontief aparece un modelo cunha presentación moi parecida, aínda que de acordo a fluxos totais.

Matematicamente é posíbel construír outros modelos máis complexos, ben co propósito de explicar a produción por produtos ou ben co propósito de explicar a produción por sectores; simplemente teríamos que acudir a certas substitucións en relación ás estruturas estábeis por filas ou por columnas da matriz de produción. Falamos de complexidade xa que xurden matrices de coeficientes froito de produtos matriciais que se asociarían a matrices simétricas vinculadas aos distintos modelos, na que a súa interpretación pode resultar excesivamente complicada – sobre todo se aparacen inversas.

Así, en relación ao anterior, o modelo de demanda relativo á produción por produtos asociado resulta inmediato, enténdese que nos seguimos apoiando na mesma hipótese de tecnoloxía;

$$q = C(C - B^d)_x y^d. \tag{87}$$

Unha vez introducida a construción do modelo de demanda a partir das táboas de orixe e destino de acordo aos fluxos interiores no que se explica a variábel g en base á demanda final interior, lembrémonos de que era o seguinte;

$$g = (C - B^d)_x y^d,$$

imos centrarnos na interpretación económica dos elementos da matriz $(C - B^d)_x$[5].

Atendendo logo á construción das táboas, vemos como $(C - B^d)$ é unha matriz de orde $m \times n$ (produto por sector). Volvemos a recordar que $m > n$, polo tanto, a matriz $(C - B^d)_x$, que imos a denominar **inversa xeralizada interior de Leontief (OD)** é de orde $n \times m$, sector por produto. Por comodidade, imos simbolizar os seus elementos mediante β^d_{ij}. Con vistas a unha maior nitidez ampliamos o modelo que expresamos de entrada na súa forma compacta, vexamos logo;

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^d_{11} & \beta^d_{12} & \cdots & \beta^d_{1m} \\ \beta^d_{21} & \beta^d_{22} & \cdots & \beta^d_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta^d_{n1} & \beta^d_{n2} & \cdots & \beta^d_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^d_1 \\ y^d_2 \\ \vdots \\ y^d_m \end{pmatrix}.$$

Así, a produción relativa a cada rama de actividade non homoxénea resulta do seguinte

[5] Tamén poderíamos introducir o modelo relativo aos fluxos totais, aínda que a efectos de buscar a mencionada interpretacón económica sérvenos perfectamente este.

modo;

$$g_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij}^d y_j^d = \beta_{i1}^d y_1^d + \beta_{i2}^d y_2^d + ... + \beta_{im}^d y_m^d, \qquad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Interpretamos o elemento xenérico da inversa xeralizada interior de Leontief, β_{ij}^d, como a *cantidade adicional producida polo sector i se a demanda final interior do produto j se incrementa nunha unidade*. A diferenza do que acontece cando traballamos coa táboa simétrica, onde os elementos da inversa de Leontief mostran certas características, como poden ser o feito de que sexan positivos, ou que aqueles pertencentes á diagonal principal sexan maiores que un. Vemos como neste contexto xa non dispoñemos de diagonal principal ao traballar con matrices rectangulares. Outro aspecto a comentar é a posibilidade de que xurdan valores negativos nesta matriz. Non debemos de esquecer que un mesmo produto pode ser producido por distintas ramas de actividade e que estamos a fixarnos en alteracións na produción de sectores motivadas por modificacións na demanda final de produtos, polo que poden entrar en xogo certas substitucións á hora de elaborar dito produto, ou sexa, que poden tirar máis da produción doutra rama en vez da considerada, por esa razón probabelmente apareza ese hipotético valor negativo.

Xa no que atinxe aos multiplicadores asociados a este tipo de modelos, vemos logo como se sumamos os elementos da columna j;

$$\beta_{\cdot j}^d = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij}^d,$$

estamos ante o *efecto final sobre a produción de tódolos sectores do sistema motivado polo incremento dunha unidade de demanda final interior do produto j.*

Se sumamos os elementos da fila i da matriz en cuestión;

$$\beta_{i\cdot}^d = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij}^d,$$

obtemos *o efecto final sobre a produción da rama de actividade non homoxénea i ante o incremento dunha unidade na demanda final interior de tódolos produtos.*

Outros modelos de Leontief

No capítulo anterior introducimos os modelos de demanda relativos a fluxos totais en base ás dúas hipóteses de tecnoloxía, agora continuamos co enfoque relativo a fluxos interiores con vistas a destacar algunhas das extensións destes modelos de análise.

Se traballamos coa hipótese de tecnoloxía da industria (10), $g = D'q$, podemos substituír alternativamente g na identidade contábel (82), $q = B^d g + y^d$, quedándonos logo;

$$q = B^d D' q + y^d, \tag{88}$$

polo que o modelo sería o seguinte;

$$q = (I - B^d D')^{-1} y^d. \tag{89}$$

Se se pretende explicar a produción por ramas de actividade;

$$g = D'(I - B^d D')^{-1} y^d. \tag{90}$$

Aínda que as matrices de orixe e destino sexan rectangulares, cando se opta por traballar cos modelos apoiados neste suposto non nos atopamos con problemas ante a inversibilidade das matrices, xa que as matrices produto $B^d D'$ son cadradas, recordar que $B^d \in M_{m\times n}$ e $D' \in M_{n\times m} \implies B^d D' \in M_m$. Cando se barallan as vantaxes e os inconvenientes á hora de escoller uns modelos ou outros, en base aos dous supostos, sempre se resalta como unha das fundamentais a comentada agora (Uniteds Nations, 1999. p. 99).

É máis, de acordo ás propiedades que verifican os coeficientes técnicos interiores e os coeficientes de mercado sempre existe a inversa de $(I - B^d D')$ e súa inversa é positiva, ou sexa, $(I - B^d D')^{-1} \geq 0$. Este é un aspecto moi importante en economía, pois cando é así os elementos das matrices teñen significado económico.

Neste senso, a continuación demostramos o anterior. Para iso consideramos a matriz $B^d D'$, sendo a mesma matriz positiva xa que se corresponde co produto de matrices positivas, e vemos de que forma é a súa trasposta;

$$(B^d D')' = D(B^d)'.$$

Ao mesmo tempo, traballando coa seguinte norma:

$$\|A\| = \sup_i \sum_j |\alpha_{ij}|$$

(ver Apéndice Matemático, proposicións 1 e 3), sabemos que

$$\left\|(B^d D)'\right\| = \left\|D(B^d)'\right\| \leq \|D\| \left\|(B^d)'\right\|.$$

Basándonos na propiedade que verifican as sumas por filas dos coeficientes de mercado, sendo as mesmas iguais a 1, é dicir, analiticamente;

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, ..., m,$$

e na propiedade que cumpren as sumas por columnas dos elementos da matriz de coeficientes técnicos interiores, B^d, sendo estritamente menores que 1,

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij}^d < 1, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Polo tanto, as sumas por filas da matriz trasposta de B^d tamén serán menores que 1.

Temos que $\|D\| = 1$ e $\left\|(B^d)'\right\| < 1$, entón

$$\|D\| \left\|(B^d)'\right\| < 1.$$

De aí que, se λ é autovalor de $B^d D'$, $\lambda \leq \left\|B^d D'\right\|$, e como $B^d D'$ é positiva e de norma estrictamente menor que 1, o autovalor máximo λ_m é estritamente menor que 1 (ver Apéndice Matemático, Modelo Aberto de Leontief).

E logo, $\forall \lambda > \lambda_m$, $(\lambda I - B^d D')$ é inversíbel e $(\lambda I - B^d D')^{-1} \geq 0$. Para enlazar coa matriz que nos parece no modelo basta con considerar $\lambda = 1$ e así temos que

$$(I - B^d D') \text{ é inversíbel e } (I - B^d D')^{-1} \geq 0.$$

Por último, retomando o modelo de demanda de fluxos interiores aquí introducido;

$$q = (I - B^d D')^{-1} y^d, \tag{89}$$

para interpretar economicamente os elementos da matriz de coeficientes $B^d D'$. Imos denotar o elemento xenérico desta matriz por π^d_{ik}, sendo da seguinte maneira;

$$\pi^d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} b^d_{ij} d_{kj}, \qquad i, k = 1, 2, ..., m.$$

Por suposto que a súa interpretación é semellante á dos coeficientes técnicos que xurdiron con anterioriedade en (35), iso si, neste caso estamos diante de coeficientes técnicos interiores. Entón temos que π^d_{ik} representa a *proporción do input i de orixe interior na produción dunha unidade monetaria do produto k.*

Outro modelo alternativo de Leontief en base á hipótese de tecnoloxía da industria

En distintas publicacións constrúen o modelo de demanda de acordo á tecnoloxía da rama como se presentou anteriormente (89), pero apoiándonos no desenvolvemento xurdido en relación á elaboración de táboas cadradas de produción imos introducir outro modelo alternativo. Tamén o compararemos co modelo "simple" de Leontief (OD).

Nós sabemos, por (3), que a produción por produtos se expresa;

$$q = X^d i + y^d,$$

por outra banda, de acordo a (15), $q = CD'q$, así que substituíndo en (3) obtemos;

$$CD'q = X^d i + y^d, \tag{91}$$

atendendo a (58), $X^d i = B^d g$, entón temos de forma alternativa;

$$CD'q = B^d g + y^d.$$

En base á hipótese de estabilidade de D, ou sexa, considerando (10), $g = D'q$, quédanos;

$$CD'q = B^d D'q + y^d$$

Agora con vistas a despexar q, imos realizando certas transformacións;

$$CD'q - B^d D'q = y^d;$$

$$(CD' - B^d D')q = y^d,$$

ou alternativamente

$$((C - B^d)D')q = y^d. \tag{92}$$

Antes de obter o modelo imos centrarnos na matriz diferenza, $(C - B^d)$, trátase dunha matriz de orde $(m \times n)$, que tamén xurdiu no artellamento do modelo "simple" de demanda. Observamos como son os seus elementos;

$$(C - B^d)_{m\times n} = (c_{ij} - b^d_{ij})_{m\times n} = (\frac{z_{ij}}{g_j} - \frac{x^d_{ij}}{g_j}) = (\frac{y^d_{ij}}{g_j}).$$

Temos que lembrarnos que parte da produción por produtos satisfai a demanda intermedia e o resto vai destinada á demanda final,

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} z_{ij} = \sum_{j=1}^{n} x^d_{ij} + \sum_{j=1}^{n} y^d_{ij}, \qquad i = 1, 2, ..., m.$$

Observamos que a suma das producións do produto i ofertadas polas n ramas de actividade destinadas á demanda final correspóndense coa **demanda final de orixe interior do produto i**, analiticamente;

$$\sum_{j=1}^{n} y^d_{ij} = y^d_i.$$

Por comodidade, imos simbolizar a matriz $(C - B^d)$ por F^d

$$F^d = (\frac{y^d_{ij}}{g_j}) = (f^d_{ij}) = \begin{pmatrix} f^d_{11} & f^d_{12} & \cdots & f^d_{1n} \\ f^d_{21} & f^d_{22} & \cdots & f^d_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f^d_{m1} & f^d_{m2} & \cdots & f^d_{mn} \end{pmatrix}.$$

O elemento xenérico desta matriz, denotado por f_{ij}^d, poderíase interpretar como *a parte da proporción da produción do produto i producido pola rama de actividade non homoxénea j destinada á demanda final.* Aínda que temos que matizar esta interpretación, xa que moitos dos elementos desta matriz serían negativos, ou sexa, o produto elaborado pola rama (no caso de que exista) non abonda para satisfacer a demanda intermedia desa rama de actividade. Pensemos que acontece cando o produto é secundario dentro da rama en cuestión, digamos logo que os elementos de F^d veñen a indicar a dispoñibilidade por parte da rama de actividade j do produto i con vistas a satisfacer a demanda final deste produto. Pero ao noso entender, o que nos interesa en realidade é o efecto global que nos ven dado pola suma por filas, anteriormente mencionado.

A continuación imos comprobar como a suma por columnas dos elementos de F^d é estritamente menor que 1. Así, vemos como a produción de calquera rama de actividade non homoxénea pode expresarse;

$$\forall j \in \{1, 2, ..., n\}, \qquad g_j = \sum_{i=1}^{m} z_{ij} = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^d + \sum_{i=1}^{m} y_{ij,}^d$$

polo tanto, ten que cumprirse o seguinte;

$$1 = \sum_{i=1}^{m} \frac{x_{ij}^d}{g_j} + \sum_{i=1}^{m} \frac{y_{ij}^d}{g_j} = \sum_{i=1}^{m} b_{ij}^d + \sum_{i=1}^{m} f_{ij}^d.$$

Pero cando estudamos os coeficientes técnicos interiores admitimos que;

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij}^d < 1,$$

entón;

$$\sum_{i=1}^{m} f_{ij}^d < 1.$$

A igualdade (92) expresaríase logo de forma abreviada:

$$F^d D' q = y^d, \tag{93}$$

ou alternativamente

$$\begin{pmatrix} f_{11}^d & f_{12}^d & \cdots & f_{1n}^d \\ f_{21}^d & f_{22}^d & \cdots & f_{2n}^d \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{m1}^d & f_{m2}^d & \cdots & f_{mn}^d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & \cdots & d_{m1} \\ d_{12} & d_{22} & \cdots & d_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{1n} & d_{2n} & \cdots & d_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^d \\ y_2^d \\ \vdots \\ y_m^d \end{pmatrix}.$$

Fixámonos agora nos elementos da matriz F^dD', esta é unha matriz cadrada de orde m. Imos denotar o seu elemento característico por θ_{ik}, sendo o mesmo do seguinte modo;

$$\theta_{ik} = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}^d d_{kj} = \sum_{j=1}^{n} \frac{y_{ij}^d}{g_j} \frac{z_{kj}}{q_k}, \qquad i,k = 1,2,...,m.$$

Para axudarnos na interpretación destes elementos, podemos expresalo detalladamente;

$$\theta_{ik} = f_{i1}^d d_{k1} + f_{i2}^d d_{k2} + ... + f_{in}^d d_{kn} = \frac{y_{i1}^d}{g_1} \frac{z_{k1}}{q_k} + \frac{y_{i2}^d}{g_2} \frac{z_{k2}}{q_k} + \ldots + \frac{y_{in}^d}{g_n} \frac{z_{kn}}{q_k}, \quad i,k = 1,2,...,m,$$

e por iso entendemos que θ_{ik} representa *a parte da proporción da produción do produto i para producir unha unidade monetaria do produto k destinada á demanda final.* Aclaramos, a modo de exemplo, que o primeiro sumando $f_{i1}^d d_{k1}$ correspóndese coa *proporción destinada á demanda final da proporción da produción do produto i por unidade monetaria de produción do produto k a través da rama de actividade 1*, xa que f_{i1}^d é *a parte da proporción da produción do produto i producido pola rama de actividade non homoxénea 1 destinada á demanda final* e d_{k1} e *proporción da produción da rama de actividade non homoxénea 1 na produción do produto k.*

Unha vez interpretados estes coeficientes, indicar que as demandas finais interiores dos distintos produtos veñen recolleitas polo sistema;

$$\begin{aligned} y_1^d &= \theta_{11}q_1 + \theta_{12}q_2 + \ldots + \theta_{1m}q_m \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ y_m^d &= \theta_{m1}q_1 + \theta_{m2}q_2 + \ldots + \theta_{mm}q_m \end{aligned}$$

Polo tanto, o modelo de demanda en base á hipótese de tecnoloxía da rama pode presentarse alternativamente como sigue;

$$q = \left(F^d D'\right)^{-1} y^d, \qquad (94)$$

e se queremos explicar a produción das ramas de actividade traballaríamos co modelo asociado

$$g = D' \left(F^d D'\right)^{-1} y^d. \qquad (95)$$

Podemos comprobar de acordo a unha aplicación como $\left(F^d D'\right)^{-1} = (I - B^d D')^{-1}$, aínda que o procedemento de elaboración do modelo é distinto as inversas resultantes son iguais.

Quizais sexa esta unha mostra clara para poñer de manifesto unha das moitas posibilidades das que dispoñemos á hora de artellar distintos modelos de comportamento, que incluso nalgúns casos son idénticos aínda que cunha presentación distinta. Ao mesmo tempo, temos que sinalar que a medida que se introducen hipóteses así nos xurden nos pasos intermedios distintas matrices que con dificultade podemos interpretar os seus elementos. Este feito invítanos a pensar que o máis acertado é traballar cos modelos máis simples. Aclaramos esta afirmación indicando que dende a perspectiva da demanda trátase de considerar estábeis as estruturas das columnas, tanto na táboa de orixe como na táboa de destino.

Modelos alternativos de demanda de acordo á inversa xeralizada de C

Dentro das diversas posibilidades que ofrece o emprego da inversa xeralizada de Moore-Penrose neste contexto, indicamos a continuación como podemos evitar as agregacións que se veñen realizando frecuentemente cando se traballa co modelo de Leontief baseado na hipótese de tecnoloxía do produto, sendo conscientes en todo momento que ditas agregacións mermarían notabelmente as conclusións a obter. Nesta liña tamén traballa Zhao (2002), iso si, salvando unha pequena diferenza, xa que este autor introduciu esta ferramenta en relación aos fluxos totais.

Se substituímos en (82), $q = B^d g + y^d$, a igualdade (79), $g = C_x q$, obtemos;

$$q = B^d C_x q + y^d, \qquad (96)$$

de forma que o modelo de demanda por produtos ven a ser;

$$q = (I - B^d C_x)^{-1} y^d. \qquad (97)$$

Outra posibilidade consiste en substituír (13), $q = Cg$, en (96) con vistas a explicar g

$$Cg = B^d g + y^d,$$

multiplicando a continuación pola esquerda ambos membros por C_x obtemos;

$$C_x C g = C_x B^d g + C_x y^d,$$

temos que lembrarnos que se $m > n$, entón $C_x C = I_n$, de aí que;

$$g = C_x B^d g + C_x y^d.$$

Polo tanto, o modelo de demanda correspondente á produción por ramas de actividade no tocante ao suposto de tecnoloxía do produto é;

$$g = (I - C_x B^d)^{-1} C_x y^d. \tag{98}$$

Aínda que aparentemente semelle distinto, este modelo correspóndese con (86) denominado por nós como o modelo *simple* de demanda, $g = (C - B^d)_x y^d$, ou sexa, $(I - C_x B^d)^{-1} C_x$ correspóndese coa inversa xeralizada de Leontief.

Se substituímos (81), $q = D'_x g$, en (82) obtemos;

$$D'_x g = B^d g + y^d, \tag{99}$$

e agora coa meta de despexar g, multiplicamos ambos membros da anterior igualdade por D';

$$D' D'_x g = D'(B^d g + y^d).$$

Tamén temos que indicar que $D' D'_x$ non ten porque corresponderse con I_n. Pero substituíndo $q = D'_x g$ en $g = D' q$ xa obtemos

$$g = D' D'_x g. \tag{100}$$

De aí, que o sistema (99) se poida expresar alternativamente de acordo a;

$$g = D'B^d g + D'y^d.$$

Así que o modelo relativo á produción de ramas de actividade é o seguinte;

$$g = (I - D'B^d)^{-1} D'y^d. \tag{101}$$

En relación aos fluxos totais, (Mernard, 2004, p. 131) introduce este modelo sen apoiarse na matriz D'_x. Este modelo obteríase de forma análoga ao anterior partindo da igualdade (34), que era da forma;

$$q = Bg + y - m,$$

e sería o seguinte;

$$g = (I - D'B)^{-1} D'(y - m). \tag{102}$$

Centrámonos na matriz $D'B$ para indicar cal é o significado económico dos seus elementos. A mesma é unha matriz cadrada de orde n;

$$D'B = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & \cdots & d_{m1} \\ d_{12} & d_{22} & \cdots & d_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{1n} & d_{2n} & \cdots & d_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

observamos como é o seu elemento característico, que optamos por denotalo de acordo a ξ_{jl}; o mesmo resulta do seguinte xeito:

$$\xi_{jl} = \sum_{i=1}^{m} d_{ij} b_{il} = \sum_{i=1}^{m} \frac{z_{ij}}{q_i} \frac{x_{il}}{g_l} \qquad j, l = 1, 2, ..., n.$$

Interpretándose como *unha aproximación da proporción da rama de actividade j na produción dunha unidade monetaria da rama de actividade l.* Probabelmente sexa máis cómodo expresalo de acordo a;

$$\xi_{jl} = d_{1j} b_{1l} + d_{2j} b_{2l} + ... + d_{mj} b_{ml}, \qquad\qquad j, l = 1, 2, ..., n.$$

Así, por exemplo, o primeiro sumando, $d_{1j}b_{1l}$ é *a "proporción" da rama de actividade j na produción dunha unidade monetaria da rama de actividade l a través do produto 1*; de aí, que o efecto global sexa o mencionado. Pode levar a confusión, pois b_{1l} correspóndese coa relevancia do input i (total) na produción da rama l e d_{1j} a relevancia da rama j na produción do produto 1 (só se refire á produción interior). Como é evidente, a proporción entre produción interior e importación varía dunha rama a outra, por iso preferimos falar de aproximacións.

No que atinxe ao modelo de demanda relativo á produción por ramas de actividade pero de acordo aos fluxos interiores

$$g = (I - D\acute{} B^d)^{-1} D\acute{} y^d, \tag{101}$$

a matriz obxecto de análise é a $D\acute{}B^d$, que tamén é unha matriz cadrada de orde n e o seu elemento característico ξ_{jl}^d é do seguinte modo;

$$\xi_{jl}^d = \sum_{i=1}^{m} d_{ij} b_{il}^d = \sum_{i=1}^{m} \frac{z_{ij}}{q_i} \frac{x_{il}^d}{g_l}, \qquad j, l = 1, 2, ..., n.$$

Do mesmo xeito que se procedeu nos casos anteriores podemos expresalo detalladamente;

$$\xi_{jl}^d = d_{1j} b_{1l}^d + d_{2j} b_{2l}^d + ... + d_{mj} b_{ml}^d, \quad j, l = 1, 2, ..., n,$$

Sendo o seu significado económico *a proporción da rama de actividade j na produción dunha unidade monetaria da rama de actividade l.* Analizando cada membro do sumatorio, por exemplo o primeiro, $d_{1j}b_{1l}^d$ vemos como se trata da *proporción da rama de actividade j na produción dunha unidade monetaria da rama de actividade l a través do produto 1.* Neste caso b_{1l}^d representa a relevancia do input 1 na produción da rama l e d_{1j} a relevancia da rama j na produción do produto 1, ou sexa, que nos referimos á produción interior.

3.2.3 Expresións alternativas dos modelos de oferta

Modelo *simple* de Ghosh (OD)

Na construción dos modelos de oferta vai ser fundamental a igualdade matricial (48)

$$(X^{d\prime} i + X^{m\prime} i) + v = g.$$

Tendo en conta (69), $X^{d\prime}i = H^{d\prime}q$, o que implicaría supoñer estábeis os coeficientes de distribución interiores (non homoxéneos), chegamos a

$$H^{d\prime}q + t^m + v = g. \tag{103}$$

A partires de aquí, asumindo á estabilidade da matriz D, ou sexa, se substituímos (10), $g = D'q$, no anterior sistema quédanos;

$$H^{d\prime}q + t^m + v = D'q, \tag{104}$$

agora imos operando de tal forma que despexemos a produción por produtos, q

$$D'q - H^{d\prime}q = t^m + v; \tag{105}$$

$$(D' - H^{d\prime})q = t^m + v. \tag{106}$$

Unha vez máis botamos man da inversa xeralizada de Moore-Penrose, neste caso trátase de multiplicar pola esquerda os membros da anterior identidade por $(D' - H^{d\prime})_x$;

$$(D' - H^{d\prime})_x(D' - H^{d\prime})q = (D' - H^{d\prime})_x(t^m + v),$$

precisamos traballar con táboas de orixe e destino que posean un maior número de columnas que de filas[6], ou en tal caso de igual número, para asegurarnos que

$$(D' - H^{d\prime})_x(D' - H^{d\prime}) = I_m,$$

de ser así, obtemos o modelo de oferta correspondente á produción por produtos;

$$q = (D' - H^{d\prime})_x(t^m + v), \tag{107}$$

e, como é obvio, o modelo asociado será o seguinte;

$$g = D'(D' - H^{d\prime})_x(t^m + v). \tag{108}$$

[6] Aínda que sabemos que na presentación das TOD isto normalmente non acontece.

Aínda que ao longo do traballo nos fixamos basicamente nos modelos correspondentes aos fluxos interiores, agora introduciremos o modelo *simple* de oferta por produtos correspondente aos fluxos totais con vistas á interpretación da **inversa xeralizada de Ghosh**. Dese modo a variábel independente será v (vector de inputs primarios).

Así que considerando a identidade;

$$X\acute{\imath} + v = g$$

e tendo en conta suposta a estabilidade de D e H, ou sexa, substituíndo g por $D\acute{}q$ e o vector dos inputs intermedios por $H\acute{}q$[7] obtemos;

$$H\acute{}q + v = D\acute{}q.$$

Agora, co obxectivo de despexar a produción por produtos;

$$(D\acute{} - H\acute{})q = v,$$

premultiplicamos ambos membros da igualdade pola inversa xeralizada de $(D\acute{} - H\acute{})$ (unha vez máis considerando esta última matriz de orde $m \times n$, sendo $m < n$ e de rango completo) e desta forma xa obtemos inmediatamente o modelo;

$$q = (D\acute{} - H\acute{})_x v.$$

No que respecta a este tipo de modelos (enténdese de oferta), pode resultar interesante xogar coa trasposta. Polo tanto, consideramos a igualdade entre inputs e produción na súa forma trasposta;

$$iX + v\acute{} = g\acute{},$$

e a partir de aquí recorremos ás substitucións anteriores relativas aos vectores de inputs intermedios e de produción de sectores; pero como é evidente, neste caso expresados mediante matrices fila, é dicir;

[7] No Capítulo 2 definíronse os coeficientes de distribución totais de tal maneira que nos distintos cocientes os denominadores se correspondían co total de recursos de produtos, pero para poder realizar esta última substitución é preciso que os denominadores se correspondan coas producións por produtos; ou sexa, que se precisaría unha redefinición destes coeficientes.

$$iX = q'H \qquad \text{e} \qquad g' = q'D.$$

Entón, a igualdade inicial podémola mostrar de acordo a;

$$q'H + v' = q'D,$$

e con vistas a explicar a produción por produtos imos operando;

$$\begin{aligned} q'D - q'H &= v'; \\ q'(D - H) &= v'. \end{aligned}$$

Agora só nos resta postmultiplicar ambos membros desta igualdade pola inversa xeralizada de $(D - H)$. Para evitar confusións temos que recordar que esta matriz ten que ser de orde $m \times n$, ou sexa, supoñemos que o número de produtos é estritamente inferior ao número de ramas, de aí que $(D - H)(D - H)_x = I_m$. Entón, o modelo resultante é o seguinte;

$$q' = v'(D - H)_x.$$

Denominamos a matriz $(D - H)_x$ **inversa xeralizada de Ghosh** e simbolizamos o seu elemento xenérico por δ_{ij}, que ven a representar *o incremento na produción do produto j ante o incremento dunha unidade do valor engadido da rama de actividade i.*

Este modelo pode expresarse de forma ampliada como;

$$\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1m} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nm} \end{pmatrix}.$$

Polo que a produción do j-ésimo produto resulta de modo inmediato;

$$q_j = \sum_{i=1}^{n} v_i \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} v_i = \delta_{1j} v_1 + \delta_{2j} v_2 + ... + \delta_{nj} v_n, \quad \forall\ j = 1, 2, ..., m.$$

Por último, centrámonos nos multiplicadores da matriz $(D{-}H)_x$, observamos que se sumamos os elementos da columna j;

$$\delta_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij},$$

nos encontramos co *efecto sobre a produción do produto j ante o incremento nunha unidade nos inputs primarios de tódolas ramas de actividade non homoxéneas que constitúen a economía.*

E se sumamos os elementos da fila i;

$$\delta_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{m} \delta_{ij},$$

o valor obtido correspóndese c*o efecto final sobre a produción de tódolos produtos ante o incremento nunha unidade no valor engadido do sector i-ésimo.*

Outros modelos de Ghosh

A outra alternativa que se nos presenta consiste en considerar a estabilidade de C, ou sexa, substituíndo (13) no sistema (103) obtemos;

$$H^{d\prime}Cg + t^m + v = g,$$

e o modelo de oferta relativo á produción por sectores é o seguinte

$$g = (I - H^{d\prime}C)^{-1}(t^m + v). \tag{109}$$

A continuación imos ver como neste tipo de modelos, ao igual que acontecía co modelo de Leontief relativo á hipótese de tecnoloxía da industria, tamén existe a inversa de $(I - H^{d\prime}C)$ e a mesma é $(I - H^{d\prime}C)^{-1} \geq 0$.

Consideramos a matriz $H^{d\prime}C$, sendo a mesma unha matriz positiva xa que se corresponde co produto de matrices positivas. A súa trasposta é a seguinte;

$$\left(H^{d\prime}C\right)' = C'H^d.$$

Tamén seguimos traballando coa mesma norma, recordemos: $\|A\| = \sup_i \sum_j |\alpha_{ij}|$. Polo tanto, sabemos que

$$\left\| \left(H^{d\prime} C^{\prime} \right) \right\| = \left\| C^{\prime} H^{d} \right\| \leq \|C^{\prime}\| \left\| H^{d} \right\|.$$

Pero anteriormente vimos como as sumas por columnas dos coeficientes de especialización son iguais a 1, ou sexa, analiticamente;

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

De aí que a suma por filas dos elementos da trasposta de C sexan iguais a 1.

Ao mesmo tempo, as sumas por filas dos elementos da matriz de coeficientes distribución interiores, H^d, son estritamente menores que 1;

$$\sum_{j=1}^{n} h_{ij}^{d} < 1, \quad i = 1, 2, ..., m.$$

Temos que $\|C^{\prime}\| = 1$ e $\left\| H^{d} \right\| < 1$, polo tanto

$$\|C^{\prime}\| \left\| H^{d} \right\| < 1.$$

Entón, se λ é autovalor de $H^{d\prime}C$, $\lambda \leq \left\| H^{d\prime}C \right\|$, e como $H^{d\prime}C$ é positiva e de norma estritamente menor que 1, o autovalor máximo λ_m é estritamente menor que 1[8].

Polo tanto, $\forall \lambda > \lambda_m$, $(\lambda I - H^{d\prime}C)$ é inversíbel e $(\lambda I - H^{d\prime}C)^{-1} \geq 0$. Para enlazar coa matriz que nos aparece no modelo abonda con considerar $\lambda = 1$ e así temos que;

$$(I - H^{d\prime}C) \text{ é inversíbel e } (I - H^{d\prime}C)^{-1} \geq 0.$$

Modelos alternativos de Ghosh de acordo ás inversas xeralizadas de C e $D^{\prime}$

Ao igual que se procedeu nos modelos de demanda, se recurrimos ao cáculo da inversa xeralizada de Moore-Penrose, podemos artellar outros modelos de oferta para explicar ben a produción de produtos ou ben a produción por ramas de actividade.

[8] Unha vez máis, véxase Apéndice Matemático, Modelo Aberto de Leontief.

Consideramos o sistema de ecuacións (103), $g = H^{d\prime}q + t^m + v$, e de acordo á hipótese da estabilidade das estruturas das columnas de Z podemos substituír (79), $g = C_x q$, en (103) e obtemos así;

$$C_x q = H^{d\prime}q + t^m + v.$$

A partir de aquí, multiplicamos pola esquerda ambos membros desta igualdade por C;

$$CC_x q = CH^{d\prime}q + C(t^m + v). \tag{110}$$

A matriz CC_x é unha matriz simétrica pero non ten porque corresponderse coa matriz identidade, para o que sería preciso supoñer que $m > n$. Pero vemos como se substituímos $g = C_x q$ en $q = Cg$ quédanos;

$$q = CC_x q, \tag{111}$$

así que, a partir de (110) con fin de despexar a produción por produtos,

$$q = CH^{d\prime}q + C(t^m + v)$$

xa obtemos de inmediato o modelo de oferta relativo á produción por produtos en base á estabilidade das estruturas das columnas da matriz de orixe;

$$q = (I - CH^{d\prime})^{-1}C(t^m + v). \tag{112}$$

Outra opción para elaborar un modelo de oferta en relación a q de acordo á estabilidade das estruturas das filas de Z consistirá en considerar (104);

$$D\prime q = H^{d\prime}q + t^m + v,$$

e multiplicando pola esquerda ambos membros do sistema pola inversa xeralizada de $D\prime$, $D\prime_x$, obtemos[9];

[9]Neste contexto ten que esixirse que $m < n$.

$$D'_x D' q = D'_x H^{d\prime} q + D'_x (t^m + v).$$

Polo tanto, o modelo de oferta sería o seguinte;

$$q = (I - D'_x H^{d\prime})^{-1} D'_x (t^m + v). \tag{113}$$

E xa por último, indicamos que se pode elaborar un modelo relativo a g xogando con D'_x. Trátase de substituír (81), $q = D'_x g$, en (103) obtendo así;

$$g = H^{d\prime} D'_x g + t^m + v.$$

En definitiva, o modelo de oferta alternativo sería o seguinte;

$$g = (I - H^{d\prime} D'_x)^{-1} (t^m + v). \tag{114}$$

Sempre se pode considerar $m = n$, e a inversa xeralizada de D' correspóndese coa súa inversa. Tamén comentamos que estes últimos modelos de oferta, (113) e (114) (enténdese coa particulariedade de $m = n$), non son introducidos por Mesnard (2004). Pero nós considerámolos de interese, pois máis adiante centrarémonos nas relacións entre modelos de oferta e demanda e observaremos a súa utilidade.

3.3 Resolución de modelos "simples" input-output

Nos modelos "simples" obtidos das táboas de orixe e destino aparécennos matrices rectangulares, ou sexa, dispoñemos dun maior número de ecuacións que de incógnitas; polo tanto, na discusión destes sistemas de ecuacións cábenos a posibilidade de encontrarnos con sistemas compatíbeis ou incompatíbeis. En relación aos modelos construídos a partir da táboa simétrica non se daba esa circunstancia, xa que ao traballar con matrices cadradas os sistemas son sempre compatíbeis e a solución é única, admitindo que traballamos con economías indescompoñíbeis.

Imos escoller o modelo "simple" de demanda, (85), para expoñer como se pode proceder para resolvelo

$$g = (C - B^d)_x y^d.$$

Atendendo á proposición 10 (A. Matemático), se o sistema é compatíbel existe unha solución única g^*, si e soamente si, $(C - B^d)_x(C - B^d) = I_n$, pero como xa vimos no desenrolo da elaboración do modelo, o anterior produto matricial si se correspondía coa matriz identidade $(m > n)$. Entón, nese hipotético caso xa falaríamos da existencia dunha solución única.

Pero é moi fácil atoparse con sistemas incompatíbeis e de ser así, en base á proposición 11 (A. Matemático), estamos ante unha *solución aproximada* (mínimo cuadrática de norma mínima) dada por;

$$g^* = (C - B^d)_x y^d.$$

Queremos introducir unha matización en relación aos sistemas compatíbeis para evitar o emprego da inversa xeralizada. Así, ao ser maior o número de filas que de columnas podemos eliminar $m - n$ filas, de tal maneira que consigamos unha matriz cadrada e probabelmente de Leontief; é importante que a mesma sexa desta índole polo que implicaría a existencia dunha inversa positiva (ver Apéndice Matemático: definicións 1 e 2; proposicións 5 e 6).

Deste modo, expoñemos o criterio a seguir para a eliminación desas filas, aínda que debemos matizar que en determinados casos pode resultar excesivamente laborioso –sobre todo se hai moita diferenza entre filas e columnas. En primeiro lugar, apoiándonos na idea de que para unha rama de actividade non homoxénea podémonos encontrar con varios produtos primordiais, trátase de ir detectando na matriz de orixe as filas asociadas a eses produtos principais pero que ao mesmo tempo sexan menos representativos para a rama produtiva, e en función dese criterio ir eliminándoas ata conseguir esa matriz cadrada desexada, denotémola por $\overset{\vee}{F}{}^d$, que case con toda probabilidade vai ser de Leonfief. Unha vez feita esa transformación, xa dispoñemos dun sistema compatíbel co mesmo número de ecuacións que de incógnitas, sendo estas as distintas producións por ramas. Polo tanto

$$g^* = (\overset{\vee}{F}{}^d)^{-1} \overset{\vee}{y}{}^d.$$

En realidade, cando confeccionamos a partir da táboa simétrica o modelo de Leontief de acordo aos fluxos interiores procedemos dunha forma semellante, dado que en vez de traballar cunha matriz rectangular de orde $(2n \times n)$.

$$\begin{pmatrix} X^d \\ X^m \end{pmatrix}_{2n \times n}$$

pasamos a traballar cunha matriz cadrada de orde n eliminando as filas correspondentes aos fluxos importados, -entendendo que estes son menos representativos á hora de explicar a produción-, ou sexa, quedámonos coa submatriz X^d e actuaría como variábel independente o vector y^d.

Esta alternativa aquí exposta para resolver estes sistemas pode ser de utilidade para outro tipo de análises, por exemplo, para aquelas vinculadas a táboas input-output sectoriais[10] (de carácter rectangular) que se quedan soamente en aspectos descritivos sen entrar en profundidade na cuantificación dos distintos impactos.

3.4 Construción de táboas simétricas a partir das táboas de orixe e destino

3.4.1 Introdución

Xa indicamos como se pode obter matrices de produción cadradas, produto por produto ou rama por rama, pero o máis normal é intentar conseguir matrices de consumos intermedios cadradas. Pero, como é sabido, as táboas de orixe e destino que se veñen publicando son rectangulares, de aí que haxa que acudir a distintas transformacións para obter táboas simétricas.

Por outra parte, existen distintas técnicas baseadas na análise tradicional Input-Output que estudan a interrelación entre sectores económicos. Así, a análise da articulación interna dunha economía estuda as relacións existentes entre os distintos sectores co fin de detectar a posíbel dependencia ou independencia entre sectores e identificar as interrelacións sectoriais máis significativas, e incluso se pode medir o grao de interrelación global dunha economía. Dentro do novo marco input-output tamén é posíbel reproducir ese tipo de análises en relación ás táboas simétricas que se elaboran a partir das táboas de orixe e destino.

Unha vez introducidos os modelos obtidos directamente destas táboas, imos seleccionar un deles, como pode ser o modelo de Leontief relativo ao suposto de tecnoloxía da industria;

$$q = (I - B^d \acute{D})^{-1} y^d, \tag{89}$$

para manifestar como se poden usar as ferramentas clásicas para estudar as interrelacións existentes por produtos dentro dunha economía a través das táboas de orixe e destino. Para iso precisamos dispoñer dunha táboa de destino produto por produto e neste caso, para conseguir

[10] Véxase García Negro, M. C. et al. (2003).

ese obxectivo, apoiámonos na estrutura que poseen as distintas filas da matriz de produción da táboa de orixe. A partir de aí, xa teremos a posibilidade de aplicar as técnicas habituais neste terreo como poden ser; a clasificación Chenery-Watanabe, os coeficientes de Streit ou a clasificación Colin-Clark.

3.4.2 Construción dunha táboa simétrica por produtos cunha matriz de consumos intermedios cadrada

O vector de demanda intermedia de produtos interiores, u^d, pode obterse de distintos xeitos como estudamos anteriormente, pero en función do modelo escollido obtense de acordo a;

$$u^d = X^d i = B^d g = B^d D' q.$$

Acto seguido transformamos o mencionado vector como o produto dunha matriz cadrada por unha matriz columna unitaria

$$B^d D' q = B^d D' \hat{q} i = W^d i,$$

denotamos de forma abreviada esa matriz cadrada de orde m por W^d

$$W^d = \left(w_{ik}^d\right) = \begin{pmatrix} w_{11}^d & w_{12}^d & \cdots & w_{1m}^d \\ w_{21}^d & w_{22}^d & \cdots & w_{2m}^d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m1}^d & w_{m2}^d & \cdots & w_{mm}^d \end{pmatrix},$$

o seu elemento xenérico, w_{ik}^d, representa o input i de orixe interior que se emprega na produción do produto k

$$w_{ik}^d = \pi_{ik}^d q_k = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^d d_{kj} q_k \qquad i, k = 1, 2, ..., m.$$

Agora acudindo a (88), en concreto ao sistema previo á construción do modelo de demanda que tomamos como referente (89);

$$q = B^d D' q + y^d = W^d i + y^d$$

é cando podemos resaltar a **táboa de destino produto por produto** asociada ao modelo seleccionado;

Produtos×Produtos	Prod 1	Prod 2	$\cdots$	Prod m	D. intermedia	D. final	Prod total
Produto 1	w_{11}^d	w_{12}^d	$\cdots\cdots$	w_{1m}^d	$\sum w_{1k}^d$	y_1^d	q_1
Produto 2	w_{21}^d	w_{22}^d	$\cdots\cdots$	w_{2m}^d	$\sum w_{2k}^d$	y_2^d	q_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Produto m	w_{m1}^d	w_{m2}^d	$\cdots\cdots$	w_{mm}^d	$\sum w_{mk}^d$	y_m^d	q_m
Inputs intermedios int	$\sum w_{i1}^d$	$\sum w_{i2}^d$	$\cdots$	$\sum w_{im}^d$			
Inputs intermedios imp	$t^m(q)_1$	$t^m(q)_2$	$\cdots$	$t^m(q)_m$			
Inputs primarios	$v(q)_1$	$v(q)_2$	$\cdots$	$v(q)_m$			
Produción total	q_1	q_2	$\cdots\cdots$	q_m			

É obvio que ao estar traballando coa produción interior, a demanda (final e intermedia) é relativa a produtos elaborados no interior da economía obxecto de estudo.

Os elementos de $t^m(q)$ correspóndense coa suma por columnas dos elementos da matriz W^m

$$t^m(q) = (W^m)'\, i$$

sendo W^m a matriz de inputs intermedios importados desta nova táboa de destino. Sinalamos que, de modo alternativo, podemos expresar $t^m(q) = iW^m$ e sería inmediato comprobar que $W^m = B^m D' \hat{q}$ (sendo B^m a matriz de coeficientes técnicos importados non homoxéneos).

O vector de inputs primarios[11] por produción corresponderase co seguinte produto matricial;

$$v(q)_{1\times m} = \begin{pmatrix} v(q)_1 & v(q)_2 & \cdots & v(q)_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v_1}{g_1} & \frac{v_2}{g_2} & \cdots & \frac{v_n}{g_n} \end{pmatrix}_{1\times n} D'_{n\times m}\hat{q}.$$

3.5 Relacións entre os modelos de demanda e oferta (OD)

Neste apartado imos a destacar as relacións existentes entre os modelos de demanda e oferta. Fixarémonos naqueles relativos aos fluxos interiores, aínda que de forma análoga tamén

[11] Optamos por considerar unha agregación dos inputs primarios de acordo a un vector, aínda que nas distintas presentacións das táboas de destino aparecen cando menos desagregados por capital e traballo.

poderíamos proceder en relación os modelos correspondentes aos fluxos totais.

Veremos como somos capaces de estimar matrices cadradas de inputs interiores, produto por produto ou sector por sector, a partir da matriz de consumos interiores, X^d, dende as dúas ópticas posíbeis. E ademais chegamos á mesma estimación, de aí que poderíamos falar da *complementariedade* entre modelos de demanda e oferta. En todo caso, xa indicaremos en que casos se dá esa circunstancia.

Observaremos como para obter *matrices de consumos intermedios por produtos* temos que multiplicar a matriz de consumos intermedios de fluxos interiores, X^d, pola dereita por C' ou D^{-1} (Dx) (por unha matriz ou por outra en función da hipótese de tecnoloxía asumida); e para obter *matrices de consumos intermedios por ramas de actividade* temos que multiplicar X^d pola esquerda por D' ou C^{-1} (Cx) (tamén segundo á hipótese considerada). No que atinxe á multiplicación por estas inversas xeralizadas, puntualizamos de novo que só teñen sentido en determinados contextos.

Se por algunha razón queremos estimar as matrices de coeficientes técnicos ou de distribución asociadas a estes modelos o cálculo tamén sería inmediato. Hai distintos traballos onde nos indican como se poden obter estas matrices de coeficientes técnicos dende a óptica da demanda; así de entrada podemos mencionar a ten Raa e Rueda-Cantuche (2003, p. 444 e 445), iso si, cando recorren á hipótese de tecnoloxía do produto traballan con matrices cadradas.

Comentar que, por motivos xa indicados, cando traballamos coa hipótese de tecnoloxía do produto non podemos construír modelos de demanda e oferta ao mesmo tempo se non coinciden o número de produtos co número de ramas de actividade, de aí que máis adiante particularicemos considerando o mesmo número de filas que de columnas, $m = n$, de aí que nos xurdan as inversas de C e D.

Queremos indicar que para obter unha matriz cadrada produto por produto de consumos intermedios interiores basándonos na hipótese de tecnoloxía da industria, W_I^d, temos dúas alternativas; vía demanda ou vía oferta. Sendo os modelos de referencia os seguintes;

$$q = (I - B^d D')^{-1} y^d \qquad (89) \qquad \text{e} \qquad q = (I - CH^{d\prime})^{-1} C(t^m + v), \qquad (112)$$

e calquera das opcións lévanos á mesma matriz, ou sexa, compróbase facilmente como se cumpre a seguinte igualdade

$$B^d D'\hat{q} = (CH^{d\prime}\hat{q})'.$$

Por un lado, vemos como basándonos en (56) e en (8) temos que;

$$B^d D\hat{q} = X^d \hat{g}^{-1} Z \hat{q}^{-1} \hat{q},$$

e simplificando obtemos que;

$$W_I^d = X^d \hat{g}^{-1} Z' = X^d C'.$$

Por outro lado, atendendo á propiedade relativa á trasposición dun produto de matrices temos

$$(CH^d \hat{q})' = \hat{q} H^d C'$$

e, ao mesmo tempo, tendo presente (65) e (11) vemos como;

$$\hat{q} H^d C' = \hat{q} \hat{q}^{-1} X^d (Z \hat{g}^{-1})'.$$

Por último, simplificando e operando xa observamos tamén como se pode obter W_I^d dende esta óptica

$$W_I^d = X^d \hat{g}^{-1} Z' = X^d C',$$

é dicir, de acordo ao produto da matriz de consumos intermedios interiores pola trasposta da matriz de coeficientes de especialización. No Anexo 1 podemos ver logo como se obten de forma doada a táboa simétrica agora considerada en relación á economía andaluza[12] de acordo ao produto matricial sinalado.

No que respecta á estimación dunha matriz cadrada de inputs intermedios interiores por ramas de actividade (non homoxéneas) de acordo ao suposto mencionado, ϖ_I^d, acontece algo análogo ao anterior; tamén se pode enfocar dende dúas perspectivas, dende a demanda ou dende a oferta. Os modelos de referencia son os seguintes;

[12] Acudimos a esta economía rexional e non a outra para ilustrar o considerado neste apartado dado que o IEA presenta as táboas de orixe e destino suficientemente agregadas e, o que é máis importante, os fluxos están avaliados do mesmo xeito. No que atinxe ás táboas galegas a táboa de orixe móstrase a prezos básicos e a de destino a prezos de adquisición e non se acompañan os elementos necesarios para proceder ao cambio de prezos que se debe esixir.

$$g = (I - D'B^d)^{-1} D'y^d \qquad (101) \qquad \text{e} \qquad g = (I - H^{d\prime}C)^{-1}(t^m + v) \qquad (52)$$

En efecto, tamén veremos como se cumpre a seguinte igualdade relativa a matrices de consumos intermedios interiores;

$$\varpi_I^d = D'B^d \hat{g} = (H^{d\prime}C\hat{g})'.$$

Co fin de comprobar esta, observamos por unha banda de que forma se modifica o primeiro membro apoiándonos nos coeficientes que vimos a manexar;

$$D'B^d \hat{g} = Z\hat{q}^{-1} X^d \hat{g}^{-1} \hat{g} = Z\hat{q}^{-1} X^d,$$

pero como $Z\hat{q}^{-1}$ se corresponde con D', xa obtemos pola vía da demanda que;

$$\varpi_I^d = D'X^d.$$

Pola outra banda, temos que;

$$\hat{g}C'H^d = \hat{g}(Z\hat{g}^{-1})\hat{q}^{-1} X^d$$

e operando quedános;

$$\hat{g}(Z\hat{g}^{-1})\hat{q}^{-1} X^d = \hat{g}\hat{g}^{-1} Z\hat{q}^{-1} X^d.$$

Agora simplificando;

$$\hat{g}\hat{g}^{-1} Z\hat{q}^{-1} X^d = Z\hat{q}^{-1} X^d,$$

ou sexa, que segundo adiantabamos, dende a perspectiva da oferta chegamos á mesma estimación;

$$Z\hat{q}^{-1} X^d = D'X^d.$$

En definitiva, a efectos prácticos, vemos como ϖ_I^d se corresponde co produto da trasposta dos coeficientes de mercado pola matriz de consumos intermedios interiores (produto por rama de actividade non homoxénea). De novo, acudindo ao Anexo 1 acompañamos o exemplo correspondente á economía andaluza.

Traballando coa hipótese da tecnoloxía do produto pero diante dunha situación onde dispoñamos dun mesmo número de filas que de columnas, tamén vemos como se complementan os seguintes modelos de demanda e oferta[13], respectivamente;

$$q = (I - B^d C^{-1})^{-1} y^d \quad \text{e} \quad q = (I - D^{-1} H^d)^{-1} D^{-1}(t^m + v).$$

Así, vemos por un lado como sería a matriz de consumos intermedios produto por produto, W_o^d, en relación ao modelo de demanda

$$W_o^d = B^d C^{-1} \hat{q} = X^d \hat{g}^{-1} (Z \hat{g}^{-1})^{-1} \hat{q},$$

atendendo á propiedade da inversa dun produto temos que $(Z\hat{g}^{-1})^{-1} = \hat{g} Z^{-1}$, de aí que substituíndo nos quede;

$$X^d \hat{g}^{-1} (Z \hat{g}^{-1})^{-1} \hat{q} = X^d \hat{g}^{-1} \hat{g} Z^{-1} \hat{q}$$

e agora simplificando

$$X^d \hat{g}^{-1} \hat{g} Z^{-1} \hat{q} = X^d (\hat{q}^{-1} Z)^{-1} = X^d D^{-1}.$$

Polo tanto,

$$W_o^d = B^d C^{-1} \hat{q} = X^d D^{-1}.$$

No que atinxe a este modelo, se quixeramos obter a matriz de coeficientes técnicos interiores asociada, $A_o(X^d, Z)$; esta obteríase inmediatamente. Vemos logo como;

$$A_o(X^d, Z) = B^d C^{-1} = X^d \hat{g}^{-1} (Z \hat{g}^{-1})^{-1} = X^d \hat{g}^{-1} \hat{g} Z^{-1} = X^d Z^{-1}.$$

[13] Aínda que estes modelos non foron introducidos, os mesmos son un caso particular dos modelos (97) e (113), de forma respectiva.

En concreto, este resultado que aquí apuntamos aparece en moitos artigos en relación aos fluxos totais, podemos destacar, por exemplo, Viet (1994, p. 41), Almon (2000, p.30) ou ten Raa e Rueda-Cantuche (2003, p. 444).

E por outro lado vemos que a matriz de consumos intermedios relativa ao modelo de oferta

$$(D^{-1}H^d\hat{q})' = ((D^{-1})'H^d\hat{q})' = \hat{q}H^dD^{-1} = \hat{q}\hat{q}^{-1}X^dD^{-1} = X^dD^{-1}.$$

De aí, que se poida expresar como sigue;

$$W_o^d = X^dD^{-1}.$$

As restantes posibilidades son os modelos de demanda e de oferta relativos á produción de sectores de actividade de acordo á hipótese de tecnoloxía do produto. Imos a centrarnos no caso particular onde $m = n$, deixando a súa xeralización para máis adiante. A expresión destes modelos é a seguinte[14];

$$g = (I - C^{-1}B^d)^{-1}C^{-1}y^d \qquad \text{e} \qquad g = (I - H^dD^{-1})^{-1}(t^m + v).$$

Neste caso imos poñer de manifesto a súa *complementariedade* indicando como podemos obter a matriz de consumos intermedios sector por sector de acordo a este suposto, que simbolizaremos por ϖ_o^d.

Acudindo ao modelo de demanda indicado, a matriz mencionada xurdiranos do seguinte produto matricial;

$$C^{-1}B^d\hat{g}.$$

Agora substituíndo B^d e a continuación simplificando, obtemos;

$$C^{-1}B^d\hat{g} = C^{-1}X^d\hat{g}^{-1}\hat{g} = C^{-1}X^d.$$

Indo ao modelo de oferta, a matriz a estimar resulta da trasposta que se sinala deseguido,

[14]Estes modelos tampouco foron introducidos anteriormente, pero obtéñense como caso particular de (98) e (114).

$$(H^d D^{-1} \hat{g})',$$

que tamén a podemos expresar alternativamente mediante

$$\hat{g} D^{-1} H^d.$$

Tendo en conta que $D^{-1} = (\hat{q}^{-1} Z)^{-1} = Z^{-1}\hat{q}$ e ao mesmo tempo substituíndo H^d por $\hat{q}^{-1} X^d$ quédanos

$$\hat{g} D^{-1} H^d = \hat{g} Z^{-1} \hat{q} \hat{q}^{-1} X^d = \hat{g} Z^{-1} X^d,$$

pero como sabemos por (11) que $C = Z\hat{g}^{-1}$, entón $C^{-1} = (Z\hat{g}^{-1})^{-1} = \hat{g} Z^{-1}$, de modo que

$$\hat{g} Z^{-1} X^d = C^{-1} X^d.$$

Ou sexa, que a matriz de consumos inputs intermedios mencionada pódese estimar por estas dúas opcións mediante este produto matricial;

$$\varpi_o^d = C^{-1} X^d.$$

Tamén nos parece acertado indicar, como xa sinalamos, que se traballamos cun número distinto de filas que de columnas, por exemplo $m > n$, si podemos elaborar o modelo de demanda por produtos (97);

$$q = (I - B^d C_x)^{-1} y^d.$$

A matrices de coeficientes técnicos interiores deste modelo, $A_o(X^d, Z)$, exprésase como $B^d C_x$, substituíndo B^d e C_x temos que;

$$A_o(X^d, Z) = B^d C_x = X^d \hat{g}^{-1} (Z\hat{g}^{-1})_x.$$

Agora ben, aínda que en xeral $(AB)_x \neq B_x A_x$, neste caso $(Z\hat{g}^{-1})_x = \hat{g} Z_x$.

Enténdese doadamente que para que $\hat{g} Z_x$ sexa a inversa xeralizada de Moore-Penrose de $Z\hat{g}^{-1}$ téñense que cumprir as catro propiedades relativas a esta noción (ver Apéndice Matemático, definición 3).

Hai que ter presente que $Z \in M_{m\times n}$, admitindo que é de rango completo, $rg(Z) = n \Rightarrow \exists\ Z_x \in M_{n\times m}$ e ademais $Z_x Z = I_n$. Recórdase que a matriz ZZ_x é unha matriz simétrica.

Demostramos a continuación o cumprimento das catro propiedades correspondentes á noción de inversa xeralizada para a matriz $Z\hat{g}^{-1}$:

$$Z\hat{g}^{-1}\hat{g}Z_x Z\hat{g}^{-1} = ZI_nI_n\hat{g}^{-1} = Z\hat{g}^{-1}. \tag{P.1}$$

$$Z\hat{g}^{-1}\hat{g}Z_x = ZZ_x, \text{ que é simétrica.} \tag{P.2}$$

$$\hat{g}Z_x Z\hat{g}^{-1} = \hat{g}Z_x Z\hat{g}^{-1} = \hat{g}I_n\hat{g}^{-1} = \hat{g}\hat{g}^{-1} = I_n \quad \text{(simétrica).} \tag{P.3}$$

$$\hat{g}Z_x Z\hat{g}^{-1}\hat{g}Z_x = \hat{g}Z_x ZZ_x = \hat{g}I_n Z_x = \hat{g}Z_x. \tag{P.4}$$

Volvendo de novo a

$$A_o(X^d, Z) = B^d C_x = X^d\hat{g}^{-1}(Z\hat{g}^{-1})_x = X^d\hat{g}^{-1}\hat{g}Z_x = X^d I_n Z_x = X^d Z_x.$$

No Anexo 1 tamén se acompaña a matriz de coeficientes agora considerada. Podemos ver como ao traballar coa hipótese do produto xurden os valores negativos tan comentados[15], en todo caso os mesmos son practicamente nulos.

A partir de aquí, podemos indicar como sería a matriz de consumos intermedios interiores de acordo a esta hipótese por produtos, iso si, agora a mesma é cadrada de orde m;

$$B^d C_x\hat{q} = X^d Z_x\hat{q}.$$

Aclaramos, pois pode conducirnos a confusión, que

$$B^d C_x\hat{q} \neq X^d D_x.$$

[15]Recordemos que este asunto xa foi tratado no Capítulo 2 cando se consideraba a matriz X^d cadrada. Vemos como ao traballar con matrices rectangulares este atranco volta a estar presente.

Temos que ter en conta que

$$D_x = (\hat{q}^{-1} Z)_x \neq Z_x \hat{q},$$

xa que se pretendemos comprobar se $Z_x \hat{q}$ é a pseudo-inversa de $\hat{q}^{-1} Z$ vemos como non se verifica a segunda propiedade, ou sexa, en xeral $\hat{q}^{-1} Z Z_x \hat{q}$ non é unha matriz simétrica, para ser simétrica esixiríase que as producións dos distintos produtos tivense o mesmo valor, algo que non acontece na realidade.

Xa por último, situámonos en táboas onde $m < n$. Como vimos anteriormente en (114), si ten sentido construír o modelo de oferta por ramas de actividade, lembramos que o mesmo era;

$$g = (I - H^d D_x)^{-1}(t^m + v).$$

Tamén podemos resaltar dunha forma semellante como se procede para obter a matriz de coeficientes de distribución relativa ao modelo en cuestión

$$(H^d D_x')', \text{ ou se queremos } \; D_x H^d.$$

En función das definicións das matrices de coeficientes de mercado e dos coeficientes de distribución interiores sabemos que

$$D_x H^d = (\hat{q}^{-1} Z)_x \hat{q}^{-1} H^d$$

e neste caso tamén temos que $Z_x \hat{q}^{-1}$ é a inversa xeralizada de $\hat{q}^{-1} Z$. Comprobándose agora o cumprimento das propiedades relativas a esta noción. Aínda que debemos sinalar previamente que se $Z \in M_{m \times n}$, sendo $m < n$ e supoñendo que Z é de rango completo, $rg(Z) = n \Rightarrow \exists$ $Z_x \in M_{n \times m}$ e ademais $Z_x Z$ é unha matriz simétrica e $Z Z_x$ correspóndese coa matriz identidade.

$$\hat{q}^{-1} Z Z_x \hat{q} \hat{q}^{-1} Z = \hat{q}^{-1} I_m I_m Z = \hat{q}^{-1} Z. \tag{P.1}$$

$$\hat{q}^{-1} Z Z_x \hat{q} \;=\; \hat{q}^{-1} I_m \hat{q} \;=\; \hat{q}^{-1} \hat{q} = I_m \quad \text{(simétrica)}. \tag{P.2}$$

$$Z_x \hat{q}\, \hat{q}^{-1} Z \;= Z_x I_m Z = Z_x Z, \text{ que é simétrica.} \tag{P.3}$$

$$Z_x\hat{q}\,\hat{q}^{-1}ZZ_x\hat{q} = Z_x I_m I_m\hat{q} = Z_x\hat{q}. \tag{P.4}$$

Unha vez demostrada esta igualdade podemos ver logo como;

$$D_x H^d = Z_x\hat{q}\hat{q}^{-1}H^d = Z_x H^d.$$

Entón, podemos indicar como sería a estimación matriz de consumos intermedios interiores de acordo a esta hipótese por sectores, sendo a mesma unha matriz cadrada de orde n;

$$\hat{g}D_x H^d = \hat{g}Z_x H^d$$

e deixamos claro que $\hat{g}Z_x H^d \neq C_x H^d$, dado que se $m < n$, $C_x = (Z\hat{g}^{-1})_x$ non se corresponde con $\hat{g}Z_x$. Demóstrase facilmente, xa que $\hat{g}Z_x Z\hat{g}$ non é unha matriz simétrica, dito doutro xeito, non se verifica a terceira propiedade de inversa xeralizada.

Por último, imos destacar a interrelación existente entre as matrices $(C - B^d)$ e $(D - H^d)$, matrices que nos aparecían nos procesos de confección dos modelos denominados por nós como *simples*. Primeiramente imos fixarnos na dependencia existente entre $(C - B^d)$ e $(D - H^d)$ (ou se queremos $(D' - H^{d'})$, pois así nos xurde no modelo oferta construído no seu momento).

Así, indicamos en (75) e (76) que;

$$C = \hat{q}D\hat{g}^{-1} \qquad \text{e} \qquad B^d = \hat{q}H^d\hat{g}^{-1}.$$

Polo tanto, considerando $(C - B^d)$ e realizando as substitucións pertinentes temos;

$$(C - B^d) = (\hat{q}D\hat{g}^{-1} - \hat{q}H^d\hat{g}^{-1}),$$

deseguido operamos de tal maneira que;

$$(\hat{q}D\hat{g}^{-1} - \hat{q}H^d\hat{g}^{-1}) = \hat{q}(D\hat{g}^{-1} - H^d\hat{g}^{-1}) = \hat{q}(D - H^d)\hat{g}^{-1}.$$

En definitiva,

$$(C - B^d) = \hat{q}(D - H^d)\hat{g}^{-1}, \tag{115}$$

ou se se prefire, podemos expresar a dependencia existente de acordo a;

$$(D - H^d) = \hat{q}^{-1}(C - B^d)\hat{g}. \tag{116}$$

Atendendo a unha das propiedades da trasposición obtemos

$$(D' - H^{d'}) = (D - H^d)'$$

e agora substituíndo

$$(D - H^d)' = (\hat{q}^{-1}(C - B^d)\hat{g})' = \hat{g}(C - B^d)'\hat{q}^{-1}. \tag{117}$$

A continuación, imos tratar a relación existente entre as inversas $(C - B^d)^{-1}$ e $(D - H^d)^{-1}$. É evidente que estas matrices nos aparecen cando dispoñemos dun mesmo número de filas que de columnas e, ao mesmo tempo, cando os rangos das matrices $(C - B^d)$ e $(D - H^d)$ son completos, ou sexa, $rg(C - B^d) = rg(D - H^d) = n$.

Por un lado, consideramos $(C - B^d)^{-1}$, e tendo presente unha das igualdades anteriores, en concreto (115), realizamos a substitución correspondente para resaltar a dependencia entre as matrices mencionadas;

$$(C - B^d)^{-1} = \left[\hat{q}(D - H^d)\hat{g}^{-1}\right]^{-1}.$$

Basándonos na propiedade relativa á inversa dun produto de matrices temos;

$$(C - B^d)^{-1} = \hat{g}(D - H^d)^{-1}\hat{q}^{-1}. \tag{118}$$

Por outra banda, podemos expresar $(D - H^d)^{-1}$ da seguinte maneira;

$$(D - H^d)^{-1} = \hat{g}^{-1}(C - B^d)^{-1}\hat{q}. \tag{119}$$

Agora vemos como depende $(D' - H^{d'})^{-1}$ de $(C - B^d)^{-1}$;

$$(D' - H^{d'})^{-1} = \left[(D - H^d)'\right]^{-1} = [(D - H^d)^{-1}]',$$

só nos resta substituír $(D - H^d)^{-1}$ e apoiarnos na propiedade da trasposta dun produto matricial

$$[(D - H^d)^{-1}]' = \left[\hat{g}^{-1}(C - B^d)^{-1}\hat{q}\right]' = \hat{q}\left[(C - B^d)^{-1}\right]\hat{g}^{-1}.$$

En definitiva, temos que;

$$(D' - H^{d\prime})^{-1} = \hat{q}\left[(C - B^d)^{-1}\right]\hat{g}^{-1}. \tag{120}$$

De acordo a esta igualdade vemos como as inversas asociadas aos modelos de demanda e oferta construídos dun xeito simple – no caso particular que nos ocupa ($m = n$)– son dependentes.

Cando nas táboas de orixe e destino dispoñemos dun número de produtos maior (ou menor) có número de sectores podemos recorrer de forma respectiva aos modelos onde nos aparecen as pseudo-inversas; $(C - B^d)_x$ e $(D' - H^{d\prime})_x$.

Anteriormente xa apuntamos como estes modelos se elaboran en contextos diferentes, entón xa non hai razón para buscar a dependencia entre estas matrices, fixarse que $m > n$ e o modelo de *simple* de demanda sería $g = (C - B^d)_x y^d$ pero indo ao modelo *simple* de oferta non podemos despexar a produción por produtos, véxase que:

$$(D' - H^{d\prime})_x (D' - H^{d\prime}) q = (D' - H^{d\prime})_x (t^m + v).$$

A matriz $(D' - H^{d\prime})_x (D' - H^{d\prime})$ é simétrica pero non ten porque corresponderse coa matriz identidade, I_m. Dito doutra forma, en xeral o vector $(D' - H^{d\prime})_x (D' - H^{d\prime}) q \neq q$, a distancia existente entre estes vectores xa nos indica que esa hipotética dependencia non vai a darse. É máis, se pretendemos demostrar a súa suposta relación, temos que:

$$(C - B^d)_x = [\hat{q}(D - H^d)\hat{g}^{-1}]_x,$$

pero, en xeral, $(AB)_x \neq B_x A_x$.

Así que, axustándonos ao noso caso, vemos como:

$$[\hat{q}(D - H^d)\hat{g}^{-1}]_x \neq \hat{g}(D - H^d)_x \hat{q}^{-1}.$$

Trátase de comprobar como a matriz $\hat{g}(D - H^d)_x \hat{q}^{-1}$ non é a pseudo-inversa de $\hat{q}(D - H^d)\hat{g}^{-1}$. De feito, verifícanse tres propiedades relativas á noción en cuestión, pero non se cumpre unha delas, en concreto a segunda (ver Apéndice Matemático, definición 3).

3.6 Modelo de prezos

Outra alternativa que se nos presenta fronte aos modelos introducidos ata agora é modelo de prezos (de Leontief) en relación ás táboas de orixe e destino. Hai distintos traballos, entre os que podemos destacar a ten Raa e Wolff (1991, p. 583 e seguintes) que abordan os modelos de prezos en base ás hipóteses de tecnoloxía da industria e do produto. O noso propósito é artellar o modelo de prezos apoiándonos no emprego da inversa xeralizada, buscar semellanzas co modelo *simple* de Leontief e por último ver como se poden obter os modelos que se teñen presentado ata agora de acordo aos supostos mencionados.

Queremos deixar claro de entrada que, a pesar de utilizar as mesmas notacións, o significado das matrices de orixe e destino en relación a este apartado é distinto. Ata o momento expresamos os modelos de cantidades de Leontief e Ghosh en termos de unidades monetarias, como así se fai en moitas ocasións, pero neste contexto temos que falar de unidades físicas. O mesmo acontecerá coas matrices de coeficientes que utilicemos.

Partimos do seguinte sistema;

$$p^t_{1\times m}(Z-X)_{m\times n} = v^t_{1\times n}, \tag{121}$$

Z e X son as matrices de produción e de consumos intermedios totais expresadas en unidades físicas, p^t e v^t representan de forma respectiva o vector de prezos por produtos trasposto e o vector de inputs primarios trasposto[16]. Tamén indicamos que, co fin de eliminar unha variábel de prezos en cada ecuación, é habitual dividir cada ecuación polo prezo unitario dos inputs primarios; pasando así a ter un prezo igual á unidade.

A efectos de expresar as ecuacións en base un, dividimos logo as mesmas polas correspondentes producións por sectores en unidades físicas, para facilitar o entendemento expresamos este vector de acordo a g. Matricialmente consiste en multiplicar pola dereita ambos membros do sistema anterior pola matriz $\hat{g}^{-1}$.

$$p^t(Z-X)\hat{g}^{-1} = v^t\hat{g}^{-1},$$

a partir de aquí obtemos;

[16] Aínda que a notación que se utilizou ata o momento para simbolizar a trasposición foi ´, de aquí en adiante tamén empregaremos o superíndice t. Calquera das notacións é moi empregada

$$p^t(Z\hat{g}^{-1} - X\hat{g}^{-1}) = v^t\hat{g}^{-1}.$$

Ou de forma simplificada;

$$p^t(C - B) = w^t, \tag{122}$$

sendo C e B as matrices de coeficientes de especialización e de coeficientes técnicos totais en termos de unidades físicas. Na confección deste modelo consideramos estábeis as matrices C e B, w_j é o coeficiente dos inputs primarios e correspóndese coa proporción dos inputs primarios na produción da rama de actividade j.

Neste caso, a diferenza do modelo de cantidades *simple* de Leontief, temos que admitir que dispoñemos dun menor número de produtos que de sectores, é dicir, $m < n$. Enténdese perfectamente que ten que ser así, xa que se pretendemos despexar os prezos, temos que postmultiplicar ambos membros da igualdade (121) pola inversa xeralizada de Moore-Penrose de $(C - B)$. Vexamos logo;

$$p^t(C - B)(C - B)_x = w^t(C - B)_x$$

e asumindo o suposto sinalado temos que $(C-B)(C-B)_x = I_m$. Polo tanto, o modelo de prezos de Leontief *simple* é o seguinte;

$$p^t = w^t(C - B)_x. \tag{123}$$

Se por algunha razón se quere escribir o vector prezos como matriz columna o modelo sería;

$$p = (C^t - B^t)_x w. \tag{124}$$

Como vemos, as hipóteses admitidas supoñen que se manteñen estábeis as estruturas das columnas das matrices de orixe e destino, ao igual que acontecía cos modelos *simples* de cantidades.

Os autores anteriormente mencionados, ten Raa e Wolff, consideran o mesmo número de produtos que de ramas e indican como serían as matrices de coeficientes técnicos asociadas aos supostos de tecnoloxía da industria e do produto. Mantendo a xeralidade, vemos como se poden obter rapidamente eses modelos que mostran unha maior complexidade. Trátanse de desenvolvementos análogos, nun caso postmultiplícanse ambos membros do sistema $p^t(C-B) = w^t$ por C_x (tecnoloxía do produto) e no outro por D^t (tecnoloxía da rama).

No primeiro caso, volvemos a reconsiderar a estrutura por columnas e así obtemos;

$$p^t(C-B)C_x = w^t C_x,$$

alternativamente;

$$p^t(CC_x - BC_x) = w^t C_x,$$

sendo o modelo resultante o seguinte;

$$p^t = w^t C_x (I_m - BC_x)^{-1}. \tag{125}$$

Fixémonos que se $m < n$ entón $CC_x = I_m$.

E no segundo caso, temos que;

$$p^t(C-B)D^t = w^t D^t,$$

ou se queremos;

$$p^t(CD^t - BD^t) = w^t D^t.$$

De modo que o modelo de prezos en base á este suposto é o seguinte;

$$p^t = w^t D^t (CD^t - BD^t)^{-1}, \tag{126}$$

como a matriz $(C-B)D^t$ é cadrada de orde n podemos presentar o modelo como sigue;

$$p^t = w^t D^t((C-B)D^t)^{-1}.$$

Poderíamos entrar nunha dinámica semellante á exposta en relación aos modelos de cantidades de Leontief obtidos directamente das táboas de orixe e destino, pero todo apunta a que o modelo máis natural é o construído mediante a estabilidade das columnas das matrices Z e X.

Capítulo 4

Os problemas de estabilidade do sistema económico na análise input-output

4.1 Introdución

Na presentación das táboas input-output[1] os elementos da matriz de consumos intermedios son positivos e o máis habitual é que as compoñentes do vector de inputs primarios tamén o sexan. Polo tanto, se estas compoñentes son positivas tódalas ramas produtivas do sistema económico manteranse nunha situación estábel; e como é evidente, de ser así a economía no seu conxunto tamén se mostraría en equilibrio.

Neste sentido, na meirande parte dos casos cando se analizan táboas input-output (pensemos que as mesmas se expresan en termos de valor) califícase a unha economía como produtiva cando as sumas por columnas dos elementos da matriz de coeficientes técnicos, A, son estritamente menores que un[2]; que de forma matricial se expresaría da seguinte maneira;

$$i'A < i'.$$

[1] Para evitar calquera confusión, sinalamos xa de entrada que ao longo deste capítulo imos a centrarnos nas táboas input-output simétricas.

[2] Cando se aborda a inversión da matriz de Leontief asúmese habitualmente esta condición, véxase por exemplo Waugh (1950, p. 147 e 148) ou Morillas (1982, p. 194).

Fixémonos que ao ser o autovalor máximo de A estritamente menor que 1 (Perron-Frobenius), é ben coñecido que $(I - A)$ é inversíbel e $(I - A)^{-1} \geq 0$.

De modo que se acudimos ao sistema de Leontief;

$$x = (I - A)^{-1} y,$$

asegurámonos unha produción non negativa[3], $x \geq 0$, para todo vector de demanda final non negativo, $y \geq 0$. Indudabelmente que y actúa como variábel esóxena.

Esta condición suficiente, $i'A < i'$, aplicábel a sistemas de Leontief non deixa de ser excesiva, xa que nos obriga a que tódolos sectores permanezan en equilibrio. O que si se ven observando, como apuntamos xa de entrada, é que as táboas input-output publicadas cumpren case sempre con ese requisito; cuestión que nos leva a pensar que pode vir dado pola propia realidade económica ou pola manipulación á que poden ser sometidas as táboas para que queden eclipsados eses hipotéticos valores negativos[4].

O noso esforzo consistirá en tratar de xustificar a posíbel existencia de compoñentes negativas no vector de inputs primarios sen que supoña ningun atranco, nin conleve a modificación algunha das táboas por distintas vías, como puidera ser o feito de recorrer a agregacións ou incluso o feito de verse na obriga de realizar certos reaxustes.

Se eses valores fosen negativos implicaríanos que as ramas de actividade vinculadas aos mesmos consumisen unha maior cantidade de inputs intermedios que os seus propios niveis de produción. Nese caso, as sumas das correspondentes columnas dos coeficientes técnicos (en termos de valor) serían maiores que un, enténdese perfectamente que a condición suficiente comentada ao inicio xa non sería válida. Aínda así, cando nos atopemos con eses valores negativos temos que estudar en que circunstancias somos capaces de lograr solucións positivas, ou sexa,

[3]Simbolizamos o vector da produción no entorno da TIO simétrica por x, para marcar a diferenza coa produción nas TOD. Lembremos que denotabamos a produción por produtos de acordo a q e por ramas de actividade de acordo a g.

[4]Cando se fala en termos de valor necesariamente está subxacente un vector de prezos que fai que o sistema, sector a sector, se manteña en equilibrio ou non. Dentro deste contexto, supoñamos agora que A sexa a matriz tecnolóxica en termos de cantidades, entón para calquera vector de prezos

$$p = (p_1, p_2, ..., p_n) / \forall j \in \{1, 2, ..., n\}, (1 - a_{jj}) p_j > \sum_{i \neq j} a_{ij} p_i$$

daríanos o equilibrio en termos de valor; en consecuencia se ese equilibrio non se dá será debido á inadecuación do vector de prezos. Ao noso entender, pode ser que en determinadas táboas (expresadas en termos de valor) se dea a circunstancia de que o vector de prezos esté mal calculado ou non sexa o real. En definitiva, en termos de valor semella aflorar certa *ambigüedade metodolóxica*.

que eses desequilibrios sectoriais non veñan a desestabilizar o sistema obxecto de estudo.

Insistimos logo en que a idea central radica en determinar ata que punto o conxunto da economía pode admitir ese desequilibrio existente nunha rama ou varias ramas produtivas. Puidera resultar extraño que pensemos nun escenario como o sinalado, pero é factíbel que as perdas nun sector sexan considerábeis nun momento puntual e aínda así o conxunto da economía sexa capaz de soportalas. A modo de exemplo, podemos cavilar ben nun sector industrial en crise ou ben nun sector adicado a fins sociais onde os seus consumos intermedios os sobrepasen.

Tamén dentro dunha economía de características semellantes á galega poden existir sectores que resulten deficitarios. Supoñamos que a agricultura sexa un deles, así é probábel que a mesma sexa subvencionada. Teoricamente pode selo por distintas finalidades; cohesión territorial, freo do despoboamento do campo, conservación do patrimonio rural ou mantemento do entorno ambiental. Pero como todos eses factores benefician ao conxunto da sociedade parece lóxico que sectores "excedentarios", que por certo en xeral son máis propensos ao deterioro medioambiental, contribúan dalgún modo á conservación do medio, máxime cando se pon en perigo a vitalidade do sistema no seu conxunto.

Entón, tratamos de ver como nese contexto o sistema sigue funcionando, no sentido de que a inversa de Leontief relativa á economía exista e sexa positiva. Unha forma doada de abordar o asunto consiste en comprobar se matriz de Leontief, $(I-A)$, cumpre a **condición de Hawkins-Simon**. Así, seguindo aos propios autores, Hawkins e Simon (1949), lembramos dita condición;

Existe a inversa de Leontief e a mesma é positiva, si e soamente si, tódolos menores principais de $(I-A)$ *son positivos.*

Unha primeira observación acerca da condición agora mencionada é que ao intentar buscarlle a correspondente interpretación económica dos menores principais, cando normalmente se traballa cunha matriz de certa dimensión, resultaríanos practicamente imposíbel. No momento de ter que recorrer ao concepto de determinante –pensemos no que encerra a definición do mesmo– as dificultades serían considerábeis.

Tamén procede sinalar que en diversos traballos cando resaltan esta condición só se centran nun único menor principal, o correspondente co determinante da matriz de Leontief, véxase Bêrni (2000, p. 16). Se tomamos como referente este último menor principal e vemos que o seu valor é moi próximo a cero, aínda que sexa positivo, entendemos que é un atrevemento calificar a unha economía como produtiva, fixémonos que os efectos que provocaría un incremento na demanda final sobre a produción serían esaxerados e practicamente inasumíbeis por calquera economía. Ademais imaxinémonos os valores que tomarían os elementos da inversa, pois a pesar de seren positivos, incrementaríanse de forma excesiva e como é lóxico os correspondentes multiplicadores tamén o farían do mesmo xeito.

Nos temos por obxecto introducir unhas condicións suficientes para lograr inversas de Leontief positivas naqueles casos onde xurdan valores negativos no vector de inputs primarios e ao mesmo tempo que se poida manter a desexada estabilidade do sistema. Tamén procuraremos expoñer as interpretacións económicas relativas aos elementos das matrices que empregaremos como ferramentas de apoio nos posteriores desenvolvementos.

4.2 Condicións suficientes para obter inversas de Leontief positivas

4.2.1 A inversa de Leontief como unha serie de potencias de matrices

Antes de resaltar certas condicións suficientes para obter inversas de Leontief positivas, queremos expresar o modelo de Leontief de tal xeito que a inversa se corresponda cunha serie de potencias de matrices. Trátase dun resultado tradicional que nos pode servir para explicar facilmente os distintos efectos da demanda final sobre a produción, distinguindo os mesmos entre directos e indirectos. Detémonos neste aspecto, xa que máis adiante centrarémonos en distintas formas de escribir os modelos e podemos empregar esta de referente.

Neste sentido, se partimos da identidade contábel entre oferta e demanda[5];

$$x = Xi + y,$$

que, admitindo a estabilidade dos coeficientes técnicos, tamén se pode mostrar da seguinte forma;

$$x = y + Ax.$$

Debemos recordar que neste contexto admítese que ningunha fila da matriz de consumos intermedios se pode expresar como combinación lineal das restantes[6], baixo ese suposto asumíbel temos que $|A| \neq 0$ e entón existe a inversa de A.

A continuación, multiplicamos pola esquerda ambos membros da última igualdade pola ma-

[5] A este respecto podemos traballar co esquema en termos de valor.

[6] En moitos casos denomínase a unha economía destas características como indescompoñíbel, véxase Morillas (1982, p. 194).

triz de coeficientes técnicos;

$$Ax = A(y + Ax)$$

e sabendo que $Ax = x - y$ temos que;

$$x - y = Ay + A^2x.$$

Entón, o vector de produción pode expresarse de acordo a;

$$x = y + Ay + A^2x = (I + A)y + A^2x,$$

onde nos aparece unha descomposición da produción dada pola demanda final (efecto directo), polo primeiro efecto indirecto dado por esa demanda final (Ay)[7] e polos restantes efectos. Agora, se desexamos seguir desglosando estes outros efectos temos que multiplicar de novo esta igualdade pola esquerda por A e operar. Obtendo así;

$$x = (I + A + A^2)y + A^3x.$$

Repetindo o proceso de modo sucesivo obtemos en xeral que;

$$x = y + Ay + A^2y + ... + A^ny + A^{n+1}x = (I + A + A^2 + ... + A^n)y + A^{n+1}x.$$

Segundo se incrementa n e dadas as características de A, a potencia A^{n+1} aproxímase á matriz nula, é dicir, $\underset{n\to\infty}{lím} A^n = 0$.

A continuación demóstrase o afirmado[8], aclarando en primeiro lugar que sabemos que $\underset{n\to\infty}{lím} \left(A^t\right)^n = 0$, xa que as sumas por columna dos elementos de A son estritamente menores que un, ou sexa, $\left\|A^t\right\| < 1$; pero neste caso desexamos demostrar que $\underset{n\to\infty}{lím} A^n = 0$.

En base á norma coa que traballamos[9] (Apéndice Matemático, proposición 1) temos que;

[7] Morillas (1982, p. 195) denomina a este vector de acordo a inputs directos requeridos para facer posíbel a necesidade orixinal de output (demanda final estipulada).

[8] Ata agora non nos constaba esta demostración.

[9] Waugh (1950, p. 147) cando estuda a eficacia na inversión da matriz de Leontief de acordo a unha serie de potencias traballa con outra norma. En concreto, a que se corresponde co máximo da suma por columnas dos valores absolutos dos elementos dunha matriz. Pero nos optamos por traballar de momento con esta, aínda que máis adiante nos apoiaremos de modo alternativo na agora mencionada.

$$\left\|A^2\right\| = \|AA\| \leq \|A\| \, \|A\| = \|A\|^2$$

e por indución $\|A^n\| \leq \|A\|^n$.

De modo que;

$$\underset{n\to\infty}{lím} \left\|\left(A^t\right)^n\right\| \leq \underset{n\to\infty}{lím} \left\|A^t\right\|^n = 0,$$

pero

$$A^t A^t = (AA)^t, \text{ ou sexa, } (A^t)^2 = (A^2)^t.$$

Da mesma forma temos que;

$$(A^t)^n = (A^n)^t,$$

entón podemos afirmar que;

$$\left\|(A^t)^n\right\| = \left\|(A^n)^t\right\|.$$

Así se $\underset{n\to\infty}{lím} \left\|\left(A^t\right)^n\right\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \underset{n\to\infty}{lím} \left\|(A^n)^t\right\| = 0$, é dicir;

$$\forall \ \frac{\varepsilon}{n} > 0, \ \ \exists \ n_0 \in N^*/ \ \ \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow \left\|(A^n)^t\right\| < \frac{\varepsilon}{n},$$

agora por comodidade imos expresar os elementos de A^n por a_{ij}^n, ou sexa, $A^n = (a_{ij}^n)$, alternativamente;

$$\sup_j \sum_i a_{ij}^n < \frac{\varepsilon}{n},$$

entón;

$$\forall n \geq n_0 \quad \text{ e } \quad \forall i, j \quad a_{ij}^n < \frac{\varepsilon}{n}.$$

A partir de aquí;

$$\forall n \geq n_0 \quad \text{e} \quad \forall i \quad \sum_j a_{ij}^n < n\frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$$

e

$$\forall n \geq n_0 \quad \text{e} \quad \sup_i \sum_j a_{ij}^n < \varepsilon, \ \text{é dicir}, \ \|A^n\| < \varepsilon.$$

Enlazando logo coas notacións iniciais temos que;

$$\underset{n\to\infty}{lím} \|A^n\| = 0.$$

De aí que;

$$x = (I + A + A^2 + ... + A^n + ...)y = (\sum_{n=0}^{\infty} A^n)y = (I - A)^{-1}y.$$

Sería unha forma de descompoñer a produción en base aos distintos efectos, o directo que ven dado pola demanda final e os indirectos que se corresponderían cos restantes sumandos, que cada vez se van reducindo[10].

Aínda que non se cumpra que $i'A < i'$, facilmente $i'A^2 < i'$ (ou xa nun caso extremo $i'A^3 < i'$); polo tanto, a serie matricial converxería e non nos encontraríamos cun problema na búsqueda dunha solución con significado económico.

Máis adiante xurdirán certas matrices de apoio (ou instrumentais) ás cais lle buscaremos o seu significado económico, así que tamén nos parece oportuno deternos nos elementos da matriz A^2 xa que podemos tomar a mesma como referente. Vemos como o elemento xenérico desta matriz é da seguinte forma;

$$a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + ... + a_{in}a_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}, \qquad i, j = 1, 2, ..., n.$$

O feito de esixir que a suma por columnas de A^2 sexa estritamente menor que 1 xa implica ter presente a interrelación existente entre as distintas ramas que constitúen o sistema económico;

[10] O algoritmo que aquí nos aparece emprégase a cotío e tómase como referente en moitas ocasións, por exemplo, en Sánchez-Chóliz e Duarte (2003, p 483 e seguintes). No que atinxe á descomposición da produción aquí presentada, en Robles e Sanjuán (2005, p. 149) podemos ver a exposición do cálculo de efectos directos e indirectos de acordo á mesma.

vemos logo como xurde unha diferenza en comparación coa primeira esixencia, onde se analizaba cada rama de actividade pero de forma separada recorrendo ás sumas das distintas columnas.

A expresión xenérica relativa á suma por columnas dos elementos desta matriz é a seguinte;

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

O valor da suma da columna j será;

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + ... + a_{in}a_{nj}),$$

con vistas a unha mellor interpretación podemos escribir de acordo a;

$$\begin{aligned} &(a_{11}a_{1j} + a_{12}a_{2j} + ... + a_{1n}a_{nj}) + \\ &(a_{21}a_{1j} + a_{22}a_{2j} + ... + a_{2n}a_{nj}) + ... \\ &+(a_{n1}a_{1j} + a_{n2}a_{2j} + ... + a_{nn}a_{nj}) \end{aligned}$$

e xa por último recurrimos a unha expresión máis manexábel;

$$(a_{11} + a_{21} + ... + a_{n1})a_{1j} + ... + (a_{1n} + a_{2n} + .. + a_{nn})a_{nj}.$$

Tendo en conta que traballamos en termos de valor, pois de traballar co sistema en termos de cantidades non tería sentido a interpretación[11], vemos como a mesma representa *a proporción que as distintas ramas de actividade aportan á rama 1 pola proporción que esta aporta á rama j e así sucesivamente a través das restantes ramas da economía.* Como se observa, imos máis aló dos requerimentos directos da rama j dado que tamén se teñen en conta os inputs que precisan as distintas ramas subministradoras do sector j, ou sexa, acudimos ao primeiro eslabón de requerimentos indirectos.

Se procedemos por filas, ou sexa, dende a outra óptica, vemos como a suma da fila i é do seguinte xeito;

[11] Véxase Morillas (1982, p 195).

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj},$$

ou se se quere;

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + ... + a_{in}a_{nj}).$$

Que a efectos de destacar o seu significado económico é aconsellábel escribir conforme a;

$$\begin{aligned}
&(a_{i1}a_{11} + a_{i2}a_{21} + ... + a_{in}a_{n1}) + \\
&+(a_{i1}a_{12} + a_{i2}a_{22} + ... + a_{in}a_{n2}) + .. + \\
&+(a_{i1}a_{1n} + a_{i2}a_{2n} + ... + a_{in}a_{nn}),
\end{aligned}$$

ou da seguinte maneira;

$$a_{i1}(a_{11} + a_{12} + ... + a_{1n}) + ... + a_{in}(a_{n1} + a_{n2} + ... + a_{nn}).$$

Representando así *a proporción de inputs da rama i destinada á rama 1 polas proporcións que esta última rama aporta as restantes ramas e así para as demais ramas produtivas*, poñéndose de manifesto a mencionada interrelación sectorial que non é tan palpábel se se observa só a matriz de coeficientes técnicos.

4.2.2 Teoremas: as inversas de Leontief no modelo de demanda

Introducimos en primeiro lugar unha condición suficiente, aínda que non necesaria, que nos asegura matrices de Leontief inversíbeis e positivas.

Para expoñer esta condición optamos por traballar co modelo de demanda relativo á táboa simétrica de fluxos totais e tamén indicamos que nos centraremos en modelos de demanda en termos de cantidades, aspecto que debemos deixar moi claro. Máis adiante, noutro contexto, traballaremos co modelo de prezos.

A mencionada condición queda exposta polo seguinte

TEOREMA [1]

Sexa a matriz de Leontief e sexa K a matriz diagonal formada polos elementos da diagonal principal de $(I-A)$. Se as sumas por filas da matriz $(I-K^{-1}(I-A))$ son estritamente menores que 1, é dicir, se $\left\|I-K^{-1}(I-A)\right\|<1$, entón a matriz $(I-A)$ é inversíbel e a súa inversa é positiva.

Como sabemos, a matriz de Leontief é do seguinte xeito;

$$(I-A)=\begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 1-a_{nn} \end{pmatrix}$$

e en base ao sinalado anteriormente temos que;

$$K=\begin{pmatrix} 1-a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Polo tanto, observamos facilmente como a matriz $(I-K^{-1}(I-A))$ resulta ser da seguinte maneira;

$$(I-K^{-1}(I-A))=\begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{1-a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{1-a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{1-a_{22}} & 0 & \cdots & \frac{a_{2n}}{1-a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{1-a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{1-a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Neste sentido, se consideramos a aplicación $\phi: M_n(R)\rightarrow M_n(R)$ definida por;

$$\phi(X)=K^{-1}+(I-K^{-1}(I-A))X$$

temos

$$\|\phi(X)-\phi(X')\|=\left\|(I-K^{-1}(I-A))(X-X')\right\|\leq\left\|(I-K^{-1}(I-A))\right\|\|(X-X')\|,$$

e se supoñemos que $\left\|(I-K^{-1}(I-A))\right\|<1$, é dicir, se a suma por filas dos elementos da matriz $(I-K^{-1}(I-A))$ é estritamente menor que 1, entón ϕ é unha contracción en $M_n(\mathbb{R})$ que admite un punto fixo único X^* neste espazo:

$$\phi(X^*) = K^{-1} + (I - K^{-1}(I-A))X^* = X^*.$$

Simplificando quédanos;

$$K^{-1}(I-A)X^* = K^{-1}.$$

a partir de aquí, multiplicando ambos membros pola esquerda por K e simplificando de novo temos que $(I-A)X^* = I$, do que deducimos que X^* é a inversa pola dereita de $(I-A)$[12], ou sexa, $X^* = (I-A)^{-1}$.

Por outra parte, $(I-A)^{-1}$ é un punto fixo de $\phi(X) = K^{-1} + (I - K^{-1}(I-A))X$, así que partindo dunha matriz $X_0 \geq 0$, xa que $K^{-1} > 0$ e $(I - K^{-1}(I-A)) \geq 0$, temos que a sucesión X_0, $X_1 = \phi(X_0)$, ..., $X_n = \phi(X_{n-1}), ...$ é tal que $X_n \geq 0$, $\forall\, n$ e en consecuencia $(I-A)^{-1} \geq 0$[13].

De modo alternativo, podemos expresar analiticamente a condición suficiente de acordo a;

$$\text{Se } \forall\, i \in \{1,2,...,n\}, \quad \sum_{j=1 (j\neq i)}^{n} \frac{a_{ij}}{1-a_{ii}} < 1 \Rightarrow \exists (I-A)^{-1} \quad \text{e} \quad (I-A)^{-1} \geq 0$$

En relación ao suposto, enténdese que tomamos como referentes os elementos da matriz $(I - K^{-1}(I-A))$. Aínda así, cando acudimos ao sumatorio indicar que j nunca é igual a i, xa que como vimos anteriormente os elementos da diagonal principal desta matriz son iguais a cero.

Parécenos acertado centrarnos na interpretación económica da suma dos elementos das filas desta matriz. En xeral, acudimos á i-ésima fila;

$$\frac{a_{i1}}{1-a_{ii}} + \frac{a_{i2}}{1-a_{ii}} + ... + \frac{a_{i(i-1)}}{1-a_{ii}} + \frac{a_{i(i+1)}}{1-a_{ii}} + ... + \frac{a_{in}}{1-a_{ii}}$$

e para un mellor entendemento, imaxinémonos que a mesma se corresponde cunha fila intermedia. Así, vemos como o primeiro sumando, $a_{i1} \,/\, (1-a_{ii})$, representa *o tanto por un que ten que producir a rama i para que a rama 1 poida elaborar unha unidade de produción.* Sinalamos que esta cantidade está infravalorada, pois deste xeito so se inclúen os autoconsumos da rama i, é

[12] En $M_n(\mathbb{R})$ a inversa pola dereita dunha matriz coincide coa inversa pola esquerda.

[13] Optamos por resaltar a demostración deste teorema, pero para maior detalle pódese consultar Quiñoá (1992b).

dicir, non falamos dos efectos indirectos na súa totalidade senón dunha estimación que supera a cantidade que nos ven marcada polos coeficientes técnicos. A suma dos elementos da fila, ou noutras verbas, o efecto global correspóndese coa *produción necesaria do sector i para que cada unha das restantes ramas do sistema poidan producir unha unidade de produto,* por suposto que segundo acabamos de explicar en relación ao primeiro sumando admitimos unha infravaloración do efecto mencionado.

Supoñemos que os coeficientes de dispoñibilidade das distintas ramas produtivas son menores ou iguais que un e ao mesmo tempo positivos, ou sexa, $0 < 1 - a_{ii} \leq 1$. Nestas condicións temos que $\frac{a_{ij}}{1-a_{ii}} \geq a_{ij}$, é dicir, a rama i está obrigada a producir unha cantidade maior ou igual de produtos que a cantidade de inputs demandada pola rama j, precisamente a posíbel diferenza viría dada polos posíbeis autoconsumos do propio sector subministrador.

Con vistas a indicar outra expresión opcional do modelo de demanda, consideramos o modelo da seguinte forma;

$$(I - A)x = y,$$

multiplicamos pola esquerda ambos membros pola matriz K^{-1} ;

$$K^{-1}(I - A)x = K^{-1}y$$

e agora sumámoslles aos mesmos o vector de produción;

$$x + K^{-1}(I - A)x = K^{-1}y + x.$$

A partir de aquí, obtemos de inmediato outra expresión alternativa do sistema;

$$x = K^{-1}y + x - K^{-1}(I - A)x = K^{-1}y + (I - K^{-1}(I - A))x.$$

En realidade, estamos ante unha aplicación $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\phi(x) = K^{-1}y + (I - K^{-1}(I - A))x$ que é unha contracción en $\mathbb{R}^n$ que admite un punto fixo único x. E $\forall\ x_o \in \mathbb{R}^n$, a sucesión x_o, $x_1 = \phi(x_0)$, ..., $x_n = \phi(x_{n-1})$, . converxe ao vector x, solución de $(I - A)x = y$.

Para xustificar o anterior, imos a expresar as distintas ecuacións deste sistema resaltado. Vexamos logo;

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{1-a_{11}} y_1 + \frac{a_{12}}{1-a_{11}} x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{1-a_{11}} x_n \\
x_2 &= \frac{1}{1-a_{22}} y_2 + \frac{a_{21}}{1-a_{22}} x_1 + ... + \frac{a_{2n}}{1-a_{22}} x_n \\
& \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= \frac{1}{1-a_{nn}} y_n + \frac{a_{n1}}{1-a_{nn}} x_1 + ... + \frac{a_{n(n-1)}}{1-a_{nn}} x_{n-1}
\end{aligned}
$$

ou sexa, cada ecuación pódese escribir da seguinte maneira;

$$\forall\ i = 1, 2, ..., n, \quad x_i = \frac{1}{1-a_{ii}} y_i + \sum_{j=1(j \neq i)}^{n} \frac{a_{ij}}{1-a_{ii}} x_j.$$

En realidade, cada ecuación representa unha descomposición da produción da rama i por destinos, ben sexa cara a demanda final ou ben cara a demanda intermedia das restantes ramas produtivas do sistema, atendendo sempre aos autoconsumos da rama produtora.

En definitiva, a ferramenta que acabamos de introducir sérvenos para abordar casos que se poden dar facilmente nunha economía, iso si, volvemos a recordar que se trata dunha condición suficiente aínda que non necesaria.

Tamén podemos cavilar en situacións onde a suma por filas da matriz $(I - K^{-1}(I - A))$ sexa maior ou igual que 1. Pero aínda que non se verifica este suposto pode existir perfectamente a inversa de Leontief e ser positiva. Para abordar estes casos podemos traballar con outra condición suficiente menos restritiva (en canto á hipótese) que a anterior; e a mesma xa nos serviría para tratar eses sistemas de Leontief. Matizamos o sinalado, pois se recurrimos a simulacións aínda sería posíbel forzar máis o sistema, pero entendemos que esa situación extrema corresponderíase cunha mera fición xa que o peso que representaría a demanda final fronte a demanda intermedia sería insignificante.

A condición ven dada polo seguinte

TEOREMA [2]

Sexa a matriz de Leontief e sexa K a matriz diagonal formada polos elementos da diagonal principal de $(I-A)$. Se as sumas por filas da matriz $(I-K^{-1}(I-A))^2$ son estritamente menores *que 1, entón a matriz $(I-A)$ é inversíbel e a súa inversa é positiva*[14].

Co fin de demostrar este teorema, en primeiro lugar indicamos de que forma é a matriz $(I-K^{-1}(I-A))^2$. Así, tendo presente que a matriz $(I-K^{-1}(I-A))$, tratada anteriormente, vemos como será a mesma;

$$\begin{pmatrix} \frac{a_{12}}{1-a_{11}}\frac{a_{21}}{1-a_{22}}+...+\frac{a_{1n}}{1-a_{11}}\frac{a_{n1}}{1-a_{nn}} & \cdots & \frac{a_{12}}{1-a_{11}}\frac{a_{2n}}{1-a_{22}}+...+\frac{a_{1(n-1)}}{1-a_{11}}\frac{a_{(n-1)n}}{1-a_{(n-1)(n-1)}} \\ \frac{a_{23}}{1-a_{22}}\frac{a_{31}}{1-a_{33}}+...+\frac{a_{2n}}{1-a_{22}}\frac{a_{n1}}{1-a_{nn}} & \cdots & \frac{a_{21}}{1-a_{22}}\frac{a_{1n}}{1-a_{11}}+...+\frac{a_{2(n-1)}}{1-a_{22}}\frac{a_{(n-1)n}}{1-a_{(n-1)(n-1)}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{a_{n2}}{1-a_{nn}}\frac{a_{21}}{1-a_{22}}+...+\frac{a_{n(n-1)}}{1-a_{nn}}\frac{a_{(n-1)1}}{1-a_{(n-1)(n-1)}} & \cdots & \frac{a_{n1}}{1-a_{nn}}\frac{a_{1n}}{1-a_{11}}+...+\frac{a_{n(n-1)}}{1-a_{nn}}\frac{a_{(n-1)n}}{1-a_{(n-1)(n-1)}} \end{pmatrix},$$

para evitar calquera tipo de confusión sinalamos que o elemento xenérico desta matriz é da seguinte forma

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{ik}}{1-a_{ii}}\frac{a_{kj}}{1-a_{kk}}, \quad k\neq i,\ j \quad \text{e} \ \forall \ \ i,j\in\{1,2,...,n\}.$$

Como podemos ver, os elementos da diagonal principal poseen $n-1$ sumandos e os restantes $n-2$ sumandos. Observamos como os elementos desta matriz mostran certa complexidade. Así, a modo de exemplo, se seleccionamos o situado na primeira fila e na primeira columna;

$$\frac{a_{12}}{1-a_{11}}\frac{a_{21}}{1-a_{22}}+...+\frac{a_{1n}}{1-a_{11}}\frac{a_{n1}}{1-a_{nn}}$$

vemos o mesmo como representa *a proporción que aporta a rama 1 ás outras ramas de tal modo que as mesmas poidan satisfacer os consumos intermedios necesarios para producir unha unidade de produción da rama 1, incluidos xa os autoconsumos das distintas ramas da economía que exercen de subministradoras.* Digamos que cando se analizan os elementos desta matriz xa se teñen en conta certas interrelacións sectoriais.

Indo xa á demostración do teorema[15], consideramos a aplicación $\phi : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ definida por;

[14] Quiñoá (1992b) en relación ao modelo infinito de Leontief, traballa coa matriz $(I-K^{-1}(I-A))^{n_o}$, $n_o \in N^*$. Pero neste caso decidimos particularizar e considerar $n_o = 2$ para evitar excesivas dificultades á hora de atallar ás correspondentes interpretacións económicas.

[15] Aínda que noutro contexto, Quiñoá (1992b) realiza a demostración deste teorema. Poderíase omotir a mesma, pero decidimos reproducila aquí para un mellor seguemento da ferramenta agora considerada.

$$\phi(X) = K^{-1} + (I - K^{-1}(I - A))X,$$

sendo $\phi^2(X) = \phi(\phi(X)) = \phi(K^{-1} + (I - K^{-1}(I - A))X)$.

Entón

$$\phi^2(X) = K^{-1} + (I - K^{-1}(I - A))K^{-1} + (I - K^{-1}(I - A))^2 X.$$

Temos que

$$\left\|\phi^2(X) - \phi^2(X')\right\| = \left\|(I - K^{-1}(I - A))^2(X - X')\right\| \leq \left\|(I - K^{-1}(I - A))^2\right\| \|(X - X')\|$$

e supoñendo que $\left\|(I - K^{-1}(I - A))^2\right\| < 1 \Longrightarrow \left\|\phi^2(X) - \phi^2(X')\right\| \leq \|(X - X')\|$, polo tanto $\phi^2(X)$ é unha contracción en $M_n(R)$ que admite un punto fixo X^*.

En base á hipótese, sabemos que

$$\phi^2(X^*) = X^*,$$

logo

$$\phi[\phi^2(X^*)] = \phi[X^*]$$

e como $\phi \circ \phi^2 = \phi^2 \circ \phi$ tamén temos que;

$$\phi^2[\phi(X^*)] = \phi(X^*)$$

e $\phi(X^*)$ é punto fixo de ϕ^2, sendo este único. Entón temos que $\phi(X^*) = X^*$ e X^* é punto fixo de ϕ.

Entón $K^{-1} + (I - K^{-1}(I - A))X^* = X^*$ e obtemos de inmediato $(I - A)X^* = I$, sendo X^* a matriz inversa pola dereita de $(I - A)$.

Ao ser $(I - A)^{-1}$ punto fixo de $\phi(X)$, como vimos na demostración do Teorema [1], partindo dunha matriz $X_0 \geq 0$, temos unha $(I - A)^{-1} \geq 0$.

Centrámonos agora na interpretación económica da hipótese coa que se traballa neste teorema. Vemos como por esta vía, ao actuar sobre esta matriz, $(I - K^{-1}(I - A))^2$, enos posíbel observar se a suposta inestabilidade dunha rama (ou varias ramas) nos queda, ou non, diluida no conxunto do sistema, ou sexa, se eses desequilibrios sectoriais poden ser, ou non, permitidos pola economía reflectida na táboa simétrica.

En base ao suposto desta condición, esíxese que ás sumas dos elementos por filas desta matriz sexan menores que 1. Así, con vistas a atoparlle unha interpretación económica a este suposto e aínda que nos poderíamos centrar en calquera outra fila; optamos por escoller a suma relativa á primeira (para evitar confusións en relación ás notacións aquí empregadas e o seu significado, lembrémonos das matizacións feitas recentemente acerca do elemento xenérico). Vexamos logo;

$$(\frac{a_{12}}{1-a_{11}}\frac{a_{21}}{1-a_{22}}+...+\frac{a_{1n}}{1-a_{11}}\frac{a_{n1}}{1-a_{nn}})+...+(\frac{a_{12}}{1-a_{11}}\frac{a_{2n}}{1-a_{22}}+...+\frac{a_{1(n-1)}}{1-a_{11}}\frac{a_{(n-1)n}}{1-a_{(n-1)(n-1)}}),$$

que de forma alternativa se pode escribir

$$\frac{a_{12}}{1-a_{11}}(\frac{a_{21}}{1-a_{22}}+...+\frac{a_{2n}}{1-a_{22}})+..+\frac{a_{1n}}{1-a_{11}}(\frac{a_{n1}}{1-a_{nn}}+...+\frac{a_{n(n-1)}}{1-a_{nn}}).$$

Agora ben, ao esixirlle que esta suma sexa menor que 1, en realidade, estámoslle a obrigar a que *a suma das cantidades de inputs que aporta a rama de actividade 1 ás restantes ramas de actividade (unha vez xa considerado o seu nivel de autoconsumos como rama proveedora), para que estas a súa vez poidan realizar as correspondentes aportacións de inputs ás outras ramas do sistema (tamén tendo en conta os seus niveis de autoconsumos como ramas subministradoras) de tal maneira que todas elas poidan producir unha unidade de produción, sexa inferior á unidade.* A complexidade ven dada por todas esas interrelacións que se poñen de manifesto dentro dese "primeiro eslabón de requerimentos indirectos".

Cando traballamos coa matriz $(I-K^{-1}(I-A))^2$ dispoñemos dunha visión global do conxunto da economía, cuestión que non acontece se analizamos a matriz de Leontief directamente, pois nese caso estúdanse os sectores produtivos dunha forma máis aillada. De aí que a efectos prácticos, se nunha determinada economía percibimos como se presenta unha inestabilidade sectorial tamén é posíbel analizar esta matriz instrumental para determinar se ese suposto desequilibrio pode ser asumido ou non polo conxunto do sistema.

No Anexo 2 mostramos unha suposta economía onde aparecen compoñentes negativas no vector de inputs primarios e podemos ver como a matriz instrumental cumpre a hipótese que estamos a considerar, de aí que sexa posíbel obter a inversa de Leontief e a mesma sexa positiva. Tamén podemos ver como non se cumpre o suposto do Teorema [1], ou sexa, que nese caso esa ferramenta non nos serviría.

Cálculo alternativo da inversa de Leontief

Na introdución deste capítulo indicamos como a inversa de Leontief se podía obter conforme a unha serie de potencias de matrices. Seguindo nesta liña imos indicar outra expresión alternativa do modelo de Leontief. Con vistas ao sinalado, consideramos a expresión xa tratada de antemán;

$$x = K^{-1}y + (I - K^{-1}(I - A))x,$$

multiplicamos ambos membros desta identidade pola esquerda pola matriz $(I - K^{-1}(I - A))$[16], desta forma obtemos;

$$(I - K^{-1}(I - A))x = (I - K^{-1}(I - A))[K^{-1}y + (I - K^{-1}(I - A))x].$$

A partir de aquí;

$$x - K^{-1}(I - A)x = (I - K^{-1}(I - A))K^{-1}y + (I - K^{-1}(I - A))^2 x,$$

pero como $(I - A)x$ se corresponde con y temos que;

$$x = K^{-1}y + (I - K^{-1}(I - A))K^{-1}y + (I - K^{-1}(I - A))^2 x.$$

Tamén podemos chegar a anterior expresión doutro xeito, xa que x é punto fixo de $\phi(x) = K^{-1}y + (I - K^{-1}(I - A))K^{-1}x$ e $\phi^2(x) = \phi(\phi(x)) = \phi(x) = x$.

Unha vez máis, se premultiplicamos os membros da igualdade pola matriz $(I - K^{-1}(I - A))$ temos;

$$\begin{aligned}(I - K^{-1}(I - A))x \;&=\; (I - K^{-1}(I - A))[K^{-1}y + \\ &\quad +(I - K^{-1}(I - A))K^{-1}y + (I - K^{-1}(I - A))^2 x],\end{aligned}$$

e operando obtemos

[16] Aínda que non demostramos a inversibilidade desta matriz, asumimos que se pode obter a súa inversa.

$$
\begin{aligned}
x &= K^{-1}y + (I - K^{-1}(I-A))K^{-1}y + \\
&\quad +(I - K^{-1}(I-A))^2K^{-1}y + (I - K^{-1}(I-A))^3x.
\end{aligned}
$$

Repetindo o proceso de forma sucesiva logramos a expresión xeral;

$$
\begin{aligned}
x &= K^{-1}y + (I - K^{-1}(I-A))K^{-1}y + ... + \\
&\quad (I - K^{-1}(I-A))^nK^{-1}y + (I - K^{-1}(I-A))^{n+1}x.
\end{aligned}
$$

a partir dun n determinado sabemos que $(I - K^{-1}(I-A))^{n+1}$ se corresponde aproximadamente coa matriz nula[17], ou sexa, $\underset{n\to\infty}{lím}(I - K^{-1}(I-A))^n = 0$. Entón, temos que;

$$x = [\sum_{n=0}^{\infty}(I - K^{-1}(I-A))^n]K^{-1}y.$$

En definitiva, a inversa de Leontief ven dada polo produto matricial entre a serie de potencias e a matriz K^{-1}, é dicir,

$$(I-A)^{-1} = [\sum_{n=0}^{\infty}(I - K^{-1}(I-A))^n]K^{-1}.$$

En relación ao agora exposto, no Anexo 3 acompañamos un exemplo correspondente ao cálculo da inversa de Leontief dunha economía fiticia por esta vía alternativa, onde se pode comprobar a converxencia de dita serie.

4.2.3 Teoremas alternativos

Ata o momento vimos como traballando cunhas matrices instrumentais, $(I - K^{-1}(I-A))$ e $(I - K^{-1}(I-A))^2$, e procedendo por filas eramos capaces de saber se a matriz de Leontief era inversíbel e a súa inversa era positiva. Agora imos a acudir a unha desas matrices[18] e ceñirémonos

[17] Anteriormente demostrouse que $\underset{n\to\infty}{lím}\|A^n\| = 0$, fixémonos que seguimos traballando coa mesma norma e coa mesma hipótese.

[18] Como a exposición é moi análoga á xurdida en relación á outra norma, soamente nos centramos na matriz $(I - K^{-1}(I-A))$.

á suma por columnas –pasamos a traballar con outra norma, a que se corresponde co supremo da suma en valor absoluto por columnas dos elementos da matriz, que optamos por simbolizar de acordo a $\| \quad \|^*$ [19]– para ver se logramos o mesmo obxectivo.

Previamente introduciremos unha condición necesaria e suficiente acerca da inversibilidade da matriz de Leontief, aínda que despois, pensado xa na práctica, centrarémonos nunha condición suficiente onde se segue a considerar a matriz K anteriormente empregada.

Así que en primeiro lugar introducimos unha condición necesaria e suficiente de acordo ao seguinte

TEOREMA [3]

Sexa $(I-A) \in M_n(\mathbb{R})$. $(I-A)$ *é inversíbel* $\Leftrightarrow$ $\exists\, B \in M_n(\mathbb{R})$, B *inversíbel e* $\left\|I - B^{-1}(I-A)\right\|^* < 1$.

Demostración[20]**:**

" $\Leftarrow$ "

Evidente, abonda con tomar $B = (I-A)$.

" $\Rightarrow$ "

Supoñamos que existe B inversíbel e ademais $\left\|I - B^{-1}(I-A)\right\|^* < 1$.

Consideramos a aplicación $\phi : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ definida por;

$$\phi(X) = B^{-1} + (I - B^{-1}(I-A))X,$$

temos que;

$$\|\phi(X) - \phi(X')\|^* = \left\|(I - B^{-1}(I-A))(X - X')\right\|^* \leq \left\|(I - B^{-1}(I-A))\right\|^* \|(X - X')\|^*,$$

e se supoñemos que $\left\|(I - B^{-1}(I-A))\right\|^* < 1$, é dicir, se as sumas por columnas dos elementos da matriz $(I - B^{-1}(I-A))$ son estritamente menores que 1, entón ϕ é unha contracción en $M_n(\mathbb{R})$ que admite un punto fixo único X^* neste espazo:

$$\phi(X^*) = B^{-1} + (I - B^{-1}(I-A))X^* = X^*$$

[19] Véxase no Apéndice Matemático a nota que xurde ao final do apartado adicado a Álxebras de Banach.

[20] Esta demostración está inspirada en Quiñoá (1992b), a única diferencia é que agora se traballa noutro contexto.

Simplificando quédanos;

$$B^{-1}(I-A)X^{*}=B^{-1},$$

a partir de aquí, multiplicando ambos membros pola esquerda por B e simplificando de novo temos que $(I-A)X^{*}=I$, do que deducimos que X^{*} é a inversa pola dereita de $(I-A)$, ou sexa, $X^{*}=(I-A)^{-1}$.

A efectos prácticos, o problema radica en saber cal pode ser a matriz B. De aí que, en segundo lugar, se introduza a condición suficiente xa mencionada onde volvemos a recorrer a matriz K, que como xa sabemos presenta unhas características determinadas que a convirten en interesante. Vexamos logo o seguinte

TEOREMA [4]

Sexa a matriz de Leontief e sexa K a matriz diagonal formada polos elementos da diagonal principal de $(I-A)$. Se as sumas por columnas da matriz $(I-K^{-1}(I-A))$ son estritamente menores que 1, ou sexa, se $\left\|I-K^{-1}(I-A)\right\|^{*}<1$, entón a matriz $(I-A)$ é inversíbel e a súa inversa é positiva.

A súa demostración é análoga á relativa á condición suficiente do Teorema [3], trataríase de particularizar $B=K$, obtendo logo o punto fixo $X^{*}=(I-A)^{-1}$. A partir de aquí só nos queda por demostrar que esa inversa é positiva.

Como $(I-A)^{-1}$ é un punto fixo único de $\phi(X)=K^{-1}+(I-K^{-1}(I-A))X$, polo tanto partindo dunha matriz $X_0\geq 0$, xa que $K^{-1}>0$ e $(I-K^{-1}(I-A))\geq 0$, temos que a sucesión X_0, $X_1=\phi(X_0)$, ..., $X_n=\phi(X_{n-1})$, ... é tal que $X_n\geq 0$, $\forall\ n$ e en consecuencia $(I-A)^{-1}\geq 0$.

O Anexo 3 ilustra perfectamente a utilidade deste último teorema, pois nesa aplicación práctica aínda que tódolas sumas por filas non eran estritamente menores que 1, por columnas si o son; polo tanto xa nos aseguramos o obxectivo marcado sen necesidade de acudir ao teorema [2], onde nos xurdía xa unha matriz que era máis complexa. O feito de poder proceder por filas ou por columnas dentro desta matriz instrumental, $(I-K^{-1}(I-A))$, vendo se as sumas das mesmas son estritamente menores que 1; acaba convertindo este procedemento nunha técnica moi manexábel para saber se un determinado sistema económico é estábel.

4.3 Algunhas consideracións acerca das matrices de Leontief e as súas inversas

Queremos deixar claro que ao realizar simulacións na medida en que a demanda final vai perdendo peso fronte á demanda intermedia –feito que implica de modo paralelo que os inputs primarios perdan peso fronte aos consumos intermedios–, observamos como os elementos das inversas de Leontief resultantes van aumentando o seu valor.

É máis, en relación ao entorno das matrices de Leontief, indicamos que o dominio da aplicación que transforma matrices nas súas inversas se corresponde cun conxunto aberto, así vemos como segundo nos aproximemos á fronteira deste conxunto os elementos das matrices imaxe tenden a infinito. Pode comprobarse que nese contexto o determinante de $(I - A)$ é positivo pero practicamente nulo, e aínda que a matriz cumpra as condicións de Hawkins-Simon e se pode calificar de matriz "produtiva", os efectos da demanda final serían tremendamente esaxerados, ou sexa, digamos que sería un escenario difícil de imaxinar na realidade.

Se nos achegamos á fronteria do dominio, pero xa no caso en que nas matrices imaxe xurdan elementos negativos, observaremos como os elementos destas inversas tenderían ao menos infinito. Debemos sinalar que nesas circunstancias o determinante de $(I - A)$ xa sería negativo, polo tanto non se verificarían as condicións de Hawkins-Simon. Neste sentido, indicamos que se partimos dunha matriz de Leontief, $(I - A)$, e por algunha razón desexamos modificar a súa estrutura é indicativo esixirlle á nova matriz, $(I - A')$, que cumpra a seguinte condición suficiente (Bourbaki, 1967, p. 17);

$$\|(I - A') - (I - A)\| < \frac{1}{\|(I - A)^{-1}\|},$$

para asegurarnos que exista e sexa positiva $(I - A')^{-1}$. En definitiva, é aconsellábel non alonxarnos excesivamente da matriz de Leontief inicial e, como resulta evidente, canto maior sexa a norma da inversa menor será a marxe de maniobra, enténdese aplicando esta condición.

4.4 Recuperación da estabilidade a través dos prezos

A continuación imos apoiarnos no modelo de prezos de Leontief para ver de que xeito se pode resolver unha situación onde nos xurdan elementos negativos no vector de inputs primarios e pretendamos lograr elementos non negativos. Evidentemente que en todo momento tamén mantemos o propósito de encontrar unha inversa de Leontief positiva, é dicir, que dalgunha maneira se reproduce o tratado anteriormente en relación ás características da matriz de Leontief e as propiedades das matrices instrumentais que nos ían aparecendo nas distintas presentacións do modelo de cantidades. De non ser posíbel atopar a matriz inversa indicada, dificilmente conseguiríamos o noso obxectivo.

Polo tanto, trataremos de ver cal é o vector de prezos que nos asegura o nivel de inputs primarios desexado, recordemos que no modelo de prezos de Leontief o vector de coeficientes de inputs primarios, w, actuaría como variábel esóxena.

Previamente imos centrarnos en distintas expresións do sistema de prezos e no significado dos elementos das matrices de apoio que nos emerxen nos diferentes desenvolvementos. Dispoñemos de dúas alternativas á hora de presentar o modelo de prezos na forma matricial compacta;

$$p^t(I - A) = w^t, \quad \text{ou} \quad (I - A^t)p = w,$$

que se corresponden co sistema de n ecuacións;

$$\begin{aligned}
p_1 - (a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{n1}p_n) &= w_1 \\
p_2 - (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + ... + a_{n2}p_n) &= w_2 \\
&\;\;\; ... \\
p_n - (a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + ... + a_{nn}p_n) &= w_n,
\end{aligned}$$

ou ben;

$$\begin{aligned}
(1 - a_{11})p_1 - a_{21}p_2 - ... - a_{n1}p_n &= w_1 \\
-a_{12}p_1 + (1 - a_{22})p_2 - ... - a_{n2}p_n &= w_2 \\
&\;\;\; ... \\
-a_{1n}p_1 - a_{2n}p_2 - ... + (1 - a_{nn})p_n &= w_n
\end{aligned}$$

Esta é a forma máis usual de mostrar o sistema de ecuacións que temos entre mans, pero dado o obxectivo marcado inicialmente, entendemos conveniente expresar os prezos en función do vector w, sendo logo;

$$\begin{aligned}
p_1 &= a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{n1}p_n + w_1 \\
p_2 &= a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + ... + a_{n2}p_n + w_2 \\
&... \\
p_n &= a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + ... + a_{nn}p_n + w_n,
\end{aligned}$$

digamos que mostramos unha descomposición dos prezos, matricialmente expresase de acordo a;

$$p^t = p^t A + w^t, \quad \text{ou} \quad p = A^t p + w.$$

Na búsqueda doutras descomposicións alternativas dos prezos e as súas correspondentes interpretacións, procede premultiplicar ambos membros da igualdade de $(I - A^t)p = w$ por K^{-1} (debemos matizar que optamos por considerar de novo a matriz K anterior, recordemos que os elementos da súa diagonal principal eran da forma $1 - a_{ii}$, $i = 1, 2, ..., n$). Poñamos logo;

$$K^{-1}(I - A^t)p = K^{-1}w,$$

e a continuación sumámoslle a cada membro desta igualdade o vector p;

$$p + K^{-1}(I - A^t)p = p + K^{-1}w.$$

A partir de aquí, realizamos a seguinte transformación;

$$p = p - K^{-1}(I - A^t)p + K^{-1}w,$$

alternativamente

$$p = K^{-1}w + (I - K^{-1}(I - A^t))p.$$

A matriz $(I - K^{-1}(I - A^t))$ ven a ser;

$$(I - K^{-1}(I - A^t)) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{21}}{1-a_{11}} & \cdots & \frac{a_{n1}}{1-a_{11}} \\ \frac{a_{12}}{1-a_{22}} & 0 & \cdots & \frac{a_{n2}}{1-a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{1n}}{1-a_{nn}} & \frac{a_{2n}}{1-a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

A interpretación económica dos elementos desta matriz garda semellanzas coa da matriz $(I - K^{-1}(I - A))$, aínda que nesta ocasión xogamos coa trasposta da matriz de Leontief, non debemos esquecer que agora procedemos por columnas. Unha vez máis, os efectos motivados polos consumos intermedios das distintas ramas do sistema económico veñen marcados polos valores $1/(1 - a_{ii})$, $i = 1, 2, ..., n$ que nos aparecen nas filas da matriz que estamos a considerar; aínda que dentro deste enfoque aténdese ao nivel de dispoñibilidade da rama que actúa como demandante de inputs.

Desta forma, podemos mostrar unha descomposición dos prezos distinta á dada inicialmente;

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{1-a_{11}} w_1 + \frac{a_{21}}{1-a_{11}} p_2 + ... + \frac{a_{n1}}{1-a_{11}} p_n \\ p_2 &= \frac{1}{1-a_{22}} w_2 + \frac{a_{12}}{1-a_{22}} p_1 + ... + \frac{a_{n2}}{1-a_{22}} p_n \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n &= \frac{1}{1-a_{nn}} w_n + \frac{a_{1n}}{1-a_{nn}} p_1 + ... + \frac{a_{(n-1)n}}{1-a_{nn}} p_{n-1} \end{aligned}$$

En xeral, vemos logo como o prezo do produto i se pode expresar conforme a;

$$p_i = \frac{1}{1-a_{ii}} w_i + \sum_{j=1 (j \neq i)}^{n} \frac{a_{ji}}{1-a_{ii}} p_j, \quad \forall i = 1, 2, ..., n.$$

A outra posibilidade para obter a anterior expresión consiste en multiplicar pola dereita por $(K^t)^{-1}$ ambos membros da igualdade $p^t(I - A) = w^t$. Pero atendendo ás características de K, sabemos que a inversa da súa trasposta vai a coincidir con K^{-1}, ou sexa, $(K^t)^{-1} = K^{-1}$. De aí, temos que;

$$p^t(I-A)K^{-1} = w^tK^{-1}.$$

A continuación sumámoslle o vector de prezos, iso si, esíxese que sexa na súa forma trasposta, quedándonos logo;

$$p^t + p^t(I-A)K^{-1} = p^t + w^tK^{-1},$$

e despois operamos co fin de despexar p^t;

$$p^t = w^tK^{-1} + p^t - p^t(I-A)K^{-1} = w^tK^{-1} + p^t(I-(I-A)K^{-1}).$$

De todos modos, simplemente aplicándolle a trasposición a $p = K^{-1}w + (I - K^{-1}(I - A^t))p$ obtemos doadamente a fórmula agora sinalada.

Analogamente ao sinalado en relación ao modelo de cantidades podemos indicar outras expresións alternativas do modelo de prezos. Neste sentido, se consideramos a igualdade $p = K^{-1}w + (I - K^{-1}(I - A^t))p$, e acto seguido premultiplicamos ambos membros desta por $(I - K^{-1}(I - A^t))$[21], vexamos logo;

$$\left[(I - K^{-1}(I - A^t))\right] p = \left[(I - K^{-1}(I - A^t))\right] \left[K^{-1}w + (I - K^{-1}(I - A^t))p\right].$$

A partir de aquí temos;

$$p - K^{-1}(I - A^t)p = (I - K^{-1}(I - A^t))K^{-1}w + (I - K^{-1}(I - A^t))^2p,$$

pero como $(I - A^t)p$ se corresponde con w, entón obtemos outra expresión opcional da descomposición dos prezos, sendo a seguinte;

$$p = K^{-1}w + (I - K^{-1}(I - A^t))K^{-1}w + (I - K^{-1}(I - A^t))^2p.$$

Poderíamos prolongar o proceso para atopar a expresión relativa a inversa da trasposta de Leontief, $(I - A^t)^{-1}$, tal e como o fixemos para a inversa de Leontief en relación ao modelo de cantidades; pero o noso interese primordial xira en torno á interpretación económica dos

[21] Admitimos que existe a súa inversa.

elementos da matriz $(I-K^{-1}(I-A^t))^2$. Sendo esta matriz da seguinte forma;

$$\begin{pmatrix} \frac{a_{12}}{1-a_{22}}\frac{a_{21}}{1-a_{11}}+...+\frac{a_{1n}}{1-a_{nn}}\frac{a_{n1}}{1-a_{11}} & \cdots & \frac{a_{n2}}{1-a_{22}}\frac{a_{21}}{1-a_{11}}+...+\frac{a_{n(n-1)}}{1-a_{(n-1)(n-1)}}\frac{a_{(n-1)1}}{1-a_{11}} \\ \frac{a_{13}}{1-a_{33}}\frac{a_{32}}{1-a_{22}}+...+\frac{a_{1n}}{1-a_{nn}}\frac{a_{n2}}{1-a_{22}} & \cdots & \frac{a_{n1}}{1-a_{11}}\frac{a_{12}}{1-a_{22}}+...+\frac{a_{n(n-1)}}{1-a_{(n-1)(n-1)}}\frac{a_{(n-1)2}}{1-a_{22}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{a_{12}}{1-a_{22}}\frac{a_{2n}}{1-a_{nn}}+...+\frac{a_{1(n-1)}}{1-a_{(n-1)(n-1)}}\frac{a_{(n-1)n}}{1-a_{nn}} & \cdots & \frac{a_{n1}}{1-a_{11}}\frac{a_{1n}}{1-a_{nn}}+...+\frac{a_{n(n-1)}}{1-a_{(n-1)(n-1)}}\frac{a_{(n-1)n}}{1-a_{nn}} \end{pmatrix},$$

onde o seu elemento característico ven a ser

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{jk}}{1-a_{kk}}\frac{a_{ki}}{1-a_{ii}}, \quad k\neq i,j \quad \text{e} \quad \forall\, i,j\in\{1,2,...,n\}.$$

Así, cavilando na interpretación do elemento xenérico desta matriz, é dicir, o situado na fila i e na columna j, vemos como o mesmo representa *a proporción que aporta a rama j ás restantes ramas produtivas de tal xeito que as mesmas poidan satisfacer os consumos intermedios necesarios para elaborar unha unidade de produción do sector i, incluídos xa os autoconsumos das distintas ramas produtivas que exercen de receptoras de inputs.*

Aínda que neste caso non entramos en detalle ao igual que se procedeu co modelo de demanda en termos de cantidades, si podemos fixarnos na interpretación correspondente ás sumas dos elementos por filas da matriz $(I-K^{-1}(I-A^t))^2$. Tamén optamos por escoller a suma relativa á primeira, sendo a mesma a seguinte;

$$(\frac{a_{12}}{1-a_{22}}\frac{a_{21}}{1-a_{11}}+...+\frac{a_{1n}}{1-a_{nn}}\frac{a_{n1}}{1-a_{11}})+...+(\frac{a_{n2}}{1-a_{22}}\frac{a_{21}}{1-a_{11}}+...+\frac{a_{n(n-1)}}{1-a_{(n-1)(n-1)}}\frac{a_{(n-1)1}}{1-a_{11}}),$$

que de forma alternativa se pode expresar;

$$(\frac{a_{12}}{1-a_{22}}+...+\frac{a_{n2}}{1-a_{22}})\frac{a_{21}}{1-a_{11}}+...+(\frac{a_{1n}}{1-a_{nn}}+...+\frac{a_{(n-1)n}}{1-a_{nn}})\frac{a_{n1}}{1-a_{11}}.$$

En realidade, se esiximos que este valor sexa menor que 1 o que facemos é obrigar a que *a suma das sumas das cantidades de inputs que aportan as ramas ás distintas ramas de actividade (unha vez xa considerados os seus niveis de autoconsumos, enténdese que son os das propias ramas que veñen actuando como receptoras de inputs), para que estas a súa vez poidan realizar as correspondentes aportacións de inputs á rama 1 (tamén tendo en conta o seu nivel de auto-*

consumos), de tal forma que a rama 1 poida producir unha unidade de produción, sexa inferior á unidade. Polo tanto, por esta vía á hora de estudar a posíbel estabilidade dunha economía tamén dispoñemos dunha visión máis global, iso si tamén nos aparece esa complexidade que ven marcada polo "primeiro eslabón de requerimentos indirectos".

E por último, no Anexo 4 adxuntamos un exemplo no que xurde unha compoñente no vector de inputs primarios negativa, para poñer de manifesto como, en base a unha alteración do vector de prezos, se pode lograr un vector positivo (de inputs primarios) desexado. Esto será posíbel sempre e cando se dean as debidas condicións de estabilidade do sistema económico.

Capítulo 5

Novos procedementos para a actualización de matrices

5.1 Introdución

A elaboración das táboas input-output representa un custo elevado, polo tanto non é viábel dispoñer de versións anuais das mesmas e o máis habitual é que estas táboas sexan publicadas máis ou menos cada lustro. De feito, a recomendación xeral efectuada pola *Oficina de Estatística do Departamento de Asuntos Económicos e Sociais das Nacións Unidas* indica que se debe facer un esforzo na súa publicación cada cinco ou dez anos, dependendo da estabilidade dos coeficientes e dos recursos dispoñíbeis.

Aínda así, ante a falla destas táboas para cada anualidade, na análise input-output acostúmase a predicir o vector de produción, por sectores económicos ou por produtos, para un período de tempo t en función da demanda final neta de importacións para ese mesmo período amparándose na estrutura produtiva do último exercicio para o que se elaboraron as táboas (enténdese sempre e cando se traballe con modelos de demanda no entorno da táboa simétrica). Matricialmente;

$$x_t = (I - A(0))^{-1} y_t,$$

sendo $A(0)$ a matriz de coeficientes técnicos relativa ao ano base. Pero aínda que o transcurso de tempo sexa curto e intuíamos que o cambio da estrutura produtiva da economía sexa cativo, é moi probábel que a estimación obtida acerca do vector de produción diste en boa medida dos datos reais. En definitiva, atopámonos cun atranco significativo se procedemos do xeito indicado.

Co propósito de realizar simulacións para períodos de tempo para os que non se dispón da TIO e sendo conscientes do afastamento da realidade ao admitir a estabilidade dos coeficientes técnicos (totais ou interiores); ao longo do tempo distintas investigacións contribuíron á estimación de matrices de consumos intermedios ou de matrices de coeficientes técnicos para evitar o problema mencionado. Deixando xa un lado procedementos máis específicos, cabe destacar o método biproporcional RAS e a programación matemática como as ferramentas máis empregadas á hora de abordar as estimacións.

En base aos obxectivos fixados na introdución desta investigación, optamos logo por un banda por adicarlle unha atención especial ao emprego do método RAS no entorno das matrices rectangulares; matrices de produción, matrices de consumos intermedios e outras asociadas ás mesmas. Dado que anteriormente (Capítulos 2 e 3) tratamos unha maior explotación das matrices rectangulares, agora pretendemos ver como se pode proceder cando traballamos cos modelos construídos directamente das táboas de orixe e destino, que é precisamente onde nos aparecen este tipo de matrices. Polo tanto, se realizamos simulacións considerando os coeficientes constantes xurdiranos un problema semellante ao indicado en relación ao modelo tradicional. De aí que a nosa intención sexa expoñer unha variante do método que nos estime as distintas matrices de coeficientes a utilizar no modelo, ou alternativamente as matrices de produción e consumos intermedios (interiores ou totais), de tal maneira que as mesmas sexan logo máis representativas da realidade que se desexe estudar.

E por outra banda, tamén dentro deste contexto de actualización de matrices decidimonos por introducir unha técnica aplicábel naqueles casos onde se dispón dunha información limitada e non é posíbel recorrer aos métodos mencionados.

5.2 O método tradicional: RAS

Dispoñemos de moitos métodos de axuste de coeficientes, pero probabelmente un dos máis empregados sexa o método RAS, un método biproporcional proposto inicialmente por Richard Stone (1961) e que logo presentou conxuntamente con Brown (1962) dentro do *Cambridge Computable Model of Economic Growth*. Este método é aplicado no entorno da táboa input-output simétrica e consiste en correxir de forma reiterada unha matriz inicial de coeficientes técnicos, A, de acordo a uns coeficientes correctores por filas e por columnas, obtendo así unha nova matriz axustada de coeficientes, A^{*1}. Matricialmente;

$$A^* = RAS,$$

sendo R e S matrices diagonais.

Esta técnica tamén é extrapolábel a matrices rectangulares. Mesnard, en varios dos seus traballos, menciona este método biproporcional dentro deste contexto.

Aínda que no noso caso non nos imos a deternos nos métodos de programación matemática, cando menos debemos destacar o que se corresponde co método RAS, así este pode plantexarse como un problema de optimización matemática con restricións de igualdade;

$$\begin{array}{ll} \text{Mín } \sum\limits_i \sum\limits_j x_{ij}^t \ln \left(x_{ij}^t / x_{ij}^0 \right) & \\ \text{suxeita a:} & \\ \sum\limits_i x_{ij}^t = t_j, & j = 1, 2, ..., n \\ \sum\limits_j x_{ij}^t = u_i, & i = 1, 2, ..., n \end{array}$$

ou sexa, trátase de minimizar a *proximidade* entre a matriz inicial e a matriz a obter de acordo as restricións que veñen dadas polos vectores de demanda intermedia e de inputs intermedios[2]. Hai moitos autores que explotaron esta técnica propoñendo distintas variantes, así entre outros podemos recorrer a Jackson e Murray (2004), e a Manrique e Santos (2000).

A ferramenta que introducimos é válida para calquera dos modelos construídos, xa que imos actuar sobre as matrices de produción, Z, e de consumos intermedios, X. A modo de exemplo, imos a escoller o modelo que explicaba a produción de produtos a través da demanda final neta de importacións;

$$q = (I - BD)^{-1}(y - m).$$

Coñecidos os vectores de demanda final para un período de tempo t, y_t, e de importacións para o mesmo período, m_t, e considerando as matrices B e D constantes, ou sexa, que os coeficientes técnicos totais non homoxéneos e os de mercado fosen os mesmos que os correspon-

[1]En España, ao igual que no resto do mundo foi (e é) moi empregado. Entre outros investigadores, podemos resaltar a Pedreño (1986). Unha boa exposición do método atopómola en Pulido e Fontela (1993, p. 218).

[2]En vistas de que non imos a traballar con estas técnicas decidimos non entrar en comentarios acerca das notacións aquí xurdidas.

dentes ao período 0, poderíamos cuantificar de xeito aproximado a produción de produtos para o período t de acordo a;

$$\overset{\wedge}{q_t} = (I - B(0)D'(0))^{-1}(y_t - m_t),$$

pero, en xeral, esta estimación non se axusta á produción real.

Desenrolaremos así unha variante do método RAS, que optamos por denominar RAS-OD, sendo logo un método biproporcional, xa que imos rectificando sucesivamente por filas e por columnas a matriz de consumos intermedios totais e a matriz de produción de acordo a uns coeficientes correctores. Dese modo, unha vez estimadas estas é inmediato indicar cais son as estimacións de B e a da trasposta de D, que simbolizaremos por B^* e D'^*. As mesmas serán parecidas as matrices $B(0)$ e $D'(0)$, e "cumprirán" a seguinte igualdade matricial;

$$q_t = (I - B^*D'^*)^{-1}(y_t - m_t).$$

5.3 Adaptación do RAS aos modelos orixe-destino

A diferenza do que acontecía cos modelos tradicionais, nos modelos obtidos directamente das táboas de orixe e destino temos que axustar dúas matrices, é dicir, que esta técnica engloba dos procesos de corrección, un relativo á matriz de produción e outro relativo á matriz de inputs intermedios. Estes procesos desenvolvense por separado.

Unha vez considerado o modelo a utilizar, que como acabamos de sinalar escollemos a modo de exemplo o modelo de demanda por produtos en base á hipótese de tecnoloxía da industria;

$$q = (I - BD')^{-1}(y - m),$$

podemos estimar, en primeiro lugar, a matriz de produción, Z. Indicar que as marxes desta matriz serán os elementos de referencia neste proceso de axuste parcial. Precisamos coñecer a matriz de produción do ano 0, $Z(0)$, a produción por produtos para os anos 0 e 1, $q(0)$ e $q(1)$ respectivamente; e a produción por ramas de actividade non homoxéneas para o ano 1, $g(1)$. Así os vectores $q(1)$ e $g(1)$ correspóndense coas marxes por filas e por columnas da matriz Z.

Usaremos as seguintes notacións para designar algúns dos datos reais a empregar posteriormente;

$$q(1) = \begin{pmatrix} q_1(1) \\ q_2(1) \\ \vdots \\ q_m(1) \end{pmatrix}; \quad g(1) = \begin{pmatrix} g_1(1) \\ g_2(1) \\ \vdots \\ g_n(1) \end{pmatrix}$$

Á hora de construír os coeficientes correctores temos que acudir de forma sistemática a vectores estimados das producións por produtos e por sectores. Nos optamos polas seguintes notacións para designar estas producións estimadas;

$$q^i = \begin{pmatrix} q_1^i \\ q_2^i \\ \vdots \\ q_m^i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, ... \quad ; \qquad g^k = \begin{pmatrix} g_1^k \\ g_2^k \\ \vdots \\ g_n^k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, ...$$

Un primeiro paso consiste en construír a matriz de coeficientes de mercado para o ano 0, $D(0)$, a partir de $Z(0)$ e $q(0)$, de acordo a igualdade (7);

$$D(0) = \overset{\wedge}{q(0)}^{-1} Z(0),$$

asumindo nun primeiro momento que estes coeficientes se manteñen constantes, podemos estimar unha matriz de produción para o ano 1, Z^1;

$$Z^1 = \overset{\wedge}{q(1)} D(0).$$

Esta primeira estimación cumprirá a restrición por filas pero non verificará a restrición por columnas, noutras verbas, a estimación da produción por produtos coincide coa produción real pero a estimación que nos resulta da produción por ramas de actividade non coincide coa produción real por sectores. E agora cando procede correxir sucesivamente esta matriz estimada ata que as marxes por filas e columnas sexan aproximadamente iguais a $q(1)$ e $g(1)$ de forma respectiva.

Nunha segunda etapa rectificamos a matriz Z^1 multiplicándoa pola dereita por unha matriz diagonal, so^1, onde os elementos da diagonal principal se corresponden cos cocientes obtidos entre os totais das producións por ramas de actividade non homoxéneas e os totais estimados para as mencionadas producións de acordo a $Z^1, (Z^1)\tilde{\imath} = g^1$. A matriz de coeficientes correctores indicada expresaríase matricialmente;

$$so^1 = \left[\overset{\wedge}{g(1)}\right] \left[\overset{\wedge}{g^1}\right]^{-1},$$

sendo a expresión analítica dos elementos da diagonal principal desta matriz a seguinte;

$$so^1_{jj} = so^1_j = \frac{g_j(1)}{g^1_j}, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Así que a matriz correxida, $Z^2 = Z^1 so^1$, verificará a restrición imposta por columnas, ou sexa, a suma por columnas desta nova matriz estimada correspóndese coa produción real das ramas de actividade do ano 1;

$$\left(Z^2\right) \hat{\imath} = g(1).$$

Agora, a partir de Z^2, se realizamos a suma por filas obtemos unha primeira estimación da produción por produtos, q^1, que non se vai a corresponder cos datos reais;

$$Z^2 i = q^1.$$

Atopámonos cunha estimación da matriz de produción que non verifica a restrición por filas, neste caso correximos a mesma multiplicándoa pola esquerda por unha nova matriz, ro^1, onde os seus elementos da diagonal principal son construídos polos cocientes entre a produción real por produtos para o ano 1, $q(1)$, e a produción por produtos que acabamos de estimar, q^1. En base ao sinalado, a matriz de coeficientes de rectificación resulta do seguinte produto matricial;

$$ro^1 = \left[\overset{\wedge}{q(1)}\right] \left[\overset{\wedge}{q^1}\right]^{-1},$$

se nos fixamos nos elementos da diagonal principal vemos como son da seguinte forma;

$$ro^1_{ii} = ro^1_i = \frac{q_i(1)}{q^1_i}, \qquad i = 1, 2, ..., m.$$

Polo tanto, obtemos unha nova estimación da matriz obxecto de correccións, $Z^3 = ro^1 Z^2 =$ $= ro^1 Z^1 so^1$, esta si que cumprirá a restrición por filas, ou sexa;

$$Z^3 i = q(1),$$

pero a suma por columnas dos elementos desta matriz non ten porque axustarse á realidade, temos de novo outra estimación do vector de produción de ramas de actividade (n.h.), g^2, $(Z^3)\acute{i} = g^2$.

As seguintes etapas consisten en ir axustando de forma iterada a matriz de produción multiplicando convenientemente polas matrices de correctores ata que cumpra co suficiente grao de aproximación, incluso total, as restricións que nos veñen dadas polos vectores de produción reais, $q(1)$ e $g(1)$. Enténdese que multiplicamos as matrices estimadas pola dereita polas matrices;

$$so^h = \left[\overset{\wedge}{g(1)}\right] \left[\overset{\wedge}{g^h}\right]^{-1}, \quad h = 1, 2, ...$$

e pola esquerda polas matrices;

$$ro^h = \left[\overset{\wedge}{q(1)}\right] \left[\overset{\wedge}{q^h}\right]^{-1}, \quad h = 1, 2, ...$$

Vemos de que forma será a seguinte matriz estimada, $Z^4 = Z^3 so^2 = ro^1 Z^1 so^1 so^2$; e $Z^5 = = ro^2 Z^4 = ro^2 ro^1 Z^1 so^1 so^2$.

Supoñendo que a matriz de produción que se nos axusta en boa medida sexa Z^* e que se corresponda coa p-ésima etapa temos que a expresión xeral é a que se indica a continuación;

$$\text{se } p \text{ é par} \qquad Z^p = ro^{\frac{(p-2)}{2}} ... ro^1 Z^1 so^1 ... so^{\frac{p}{2}}$$

$$\text{se } p \text{ é impar} \qquad Z^p = ro^{\frac{(p-1)}{2}} ... ro^1 Z^1 so^1 ... so^{\frac{(p-1)}{2}}$$

No que atinxe ao "cumprimento" das restricións; $Z^p i \simeq q(1)$ e $(Z^p)\acute{i} = g(1)$ se p é par (ou $Z^p i = q(1)$ e $(Z^p)\acute{i} \simeq g(1)$ se p é impar). Se traballamos cun número elevado de etapas xa se cumprirían as dúas igualdades.

O outro proceso consiste, tal como se apuntou anteriormente, en axustar a matriz de consumos intermedios[3]. O proceso é análogo ao introducido en relación a matriz de produción.

[3] Neste caso optamos por traballar cos fluxos totais, pero como é evidente tamén se podería traballar de modo alternativo cos fluxos interiores.

De entrada indicar que necesitamos coñecer a matriz de consumos intermedios para o ano 0, $X(0)$, a produción por ramas de actividade (n.h.) para o ano 0 e os vectores marxinais por filas e columnas para o ano 1, ou sexa, o vector de demanda intermedia, $u(1)$, e o vector de inputs intermedios totais, $t(1)$, respectivamente. Convén lembrar de entrada que estes dous datos non teñen porque ser coñecidos, pero si os relativos á demanda final, y, importacións, m, e inputs primarios, v , dese modo sería inmediato calculalos, xa que;

$$u = (q + m) - y \qquad \text{e} \qquad t = q - v.$$

As notacións a empregar para designar as marxes reais, enténdanse como suma por filas e por columnas da matriz de consumos intermedios, demanda intermedia e inputs intermedios respectivamente, son as seguintes;

$$u(1) = \begin{pmatrix} u_1(1) \\ u_2(1) \\ \vdots \\ u_m(1) \end{pmatrix}; \quad t(1) = \begin{pmatrix} t_1(1) \\ t_2(1) \\ \vdots \\ t_n(1) \end{pmatrix}.$$

Como temos que elaborar sistematicamente matrices diagonais de coeficientes correctores e precisamos traballar con estimacións de marxes, indicamos que denotaremos as mesmas de acordo a;

$$u^i = \begin{pmatrix} u_1^i \\ u_2^i \\ \vdots \\ u_m^i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, ... \quad ; \qquad t^k = \begin{pmatrix} t_1^k \\ t_2^k \\ \vdots \\ t_n^k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, ...$$

Centrándonos logo neste segundo proceso, na primeira etapa trátase de construír a matriz de coeficientes técnicos para o ano inicial, $B(0)$; a partir da matriz $X(0)$ e o vector $g(0)$ temos;

$$B(0) = X(0) \overset{\wedge}{g(0)}^{-1}.$$

Agora, provisionalmente, asumimos que os coeficientes técnicos permanecen constantes con vistas a estimar unha matriz de consumos intermedios para o ano 1;

$$X^1 = \overset{\wedge}{g(1)} B(0).$$

Xa sinalamos que se trata dun proceso similar ao anterior, a diferenza é que agora traballamos con outras matrices e outros vectores; a suma por filas correspóndese cos datos reais da demanda intermedia do ano 1, a restrición a ter en conta, pero a suma por columnas non se axusta, ou non ter porque axustarse, cos inputs intermedios relativos ao ano 1. Deste xeito é cando procede ir correxindo esta matriz ata que verifique, con maior ou menor exactitude, as restricións que nos impoñen os vectores reais, $u(1)$ e $t(1)$.

O paso seguinte consiste en correxir a matriz X^1 multiplicándoa pola dereita por unha matriz diagonal, sd^1, sendo os elementos da súa diagonal principal os cocientes obtidos entre os inputs intermedios reais e os estimados, que como é obvio se obteñen pola suma por columnas da matriz que acabamos de estimar; $(X^1)\check{\imath} = t^1$. A matriz cadrada de orde n de coeficientes correctores indicada expresaríase;

$$sd^1 = \left[\overset{\wedge}{t(1)}\right] \left[\overset{\wedge}{t^1}\right]^{-1},$$

sendo os elementos da diagonal principal desta matriz do seguinte modo;

$$sd^1_{jj} = sd^1_j = \frac{t_j(1)}{t^1_j}, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

De novo obtemos outra estimación da matriz obxecto de corrección, $X^2 = X^1 sd^1$. Esta cumprirá a restrición imposta por columnas, ou sexa, a suma por columnas desta nova matriz estimada correspóndese cos datos reais dos inputs intermedios totais para o ano 1;

$$\left(X^2\right) \check{\imath} = t(1).$$

Pero agora se realizamos a suma por filas de X^2 obtemos unha primeira estimación da demanda intermedia que non se vai axustar aos datos reais;

$$X^2 i = u^1.$$

É dicir, atopámonos cunha estimación da matriz de inputs intermedios que non cumpre a restrición por filas, dentro deste proceso iterativo correspóndenos correxir a mesma multiplicándoa pola esquerda por unha nova matriz, rd^1, onde os seus elementos da diagonal principal son construídos polos cocientes entre a demanda intermedia (total) do ano 1, $u(1)$, e a demanda intermedia que acabamos de estimar, u^1. Desta forma, a matriz de coeficientes de rectificación será;

$$rd^1 = \left[\overset{\wedge}{u(1)}\right] \left[\overset{\wedge}{u^1}\right]^{-1},$$

e vemos como os elementos da diagonal principal son do seguinte modo;

$$rd^1_{ii} = rd^1_i = \frac{u_i(1)}{u^1_i}, \qquad i = 1, 2, ..., m.$$

En base ao produto matricial mencionado, obtemos unha nova estimación da matriz de consumos intermedios, $X^3 = rd^1 X^2 = rd^1 X^1 sd^1$, e a suma por filas desta matriz si que verifica a restrición;

$$X^3 i = u(1).$$

Agora, unha vez máis, a suma por columnas dos elementos desta matriz non ten porque axustarse á realidade. Temos de novo outra estimación do vector consumos intermedios totais, t^2, $(X^3)\acute{i} = t^2$.

Así, as seguintes etapas consisten en ir axustando de forma sucesiva a matriz de consumos intermedios totais multiplicando convenientemente polas matrices de rectificación ata que cumpran ás restricións que nos veñen dadas polos datos reais, $u(1)$ e $t(1)$. Imos multiplicando alternadamente as estimacións obtidas da matiz de consumos intermedios pola dereita polas matrices

$$sd^h = \left[\overset{\wedge}{t(1)}\right] \left[\overset{\wedge}{t^h}\right]^{-1}, \quad h = 1, 2, ...$$

e pola esquerda polas matrices

$$rd^h = \left[\overset{\wedge}{u(1)}\right] \left[\overset{\wedge}{u^h}\right]^{-1}, \quad h = 1, 2, ...$$

Apuntamos que as seguintes matrices estimadas serían; $X^4 = X^3 sd^2 = rd^1 X^1 sd^1 sd^2$; e $X^5 = rd^2 X^4 = rd^2 rd^1 X^1 sd^1 sd^2$ e así sucesivamente.

Imos a denotar a matriz de consumos intermedios que se nos axusta en boa medida por Z^* e supoñamos que se corresponda coa p-ésima etapa e sinalamos que a expresión xeral da mesma é a seguinte;

$$\text{se } p \text{ é par} \qquad X^p = rd^{\frac{(p-2)}{2}}...rd^1 X^1 sd^1...sd^{\frac{p}{2}} \ ,$$
$$\text{se } p \text{ é impar} \qquad X^p = rd^{\frac{(p-1)}{2}}...rd^1 X^1 sd^1...sd^{\frac{(p-1)}{2}} .$$

Por último, no que respecta ao "cumprimento" das restricións; $X^p i \simeq u(1)$ e $(X^p)\acute{\imath} = t(1)$ se p é par (ou $X^p i = u(1)$ e $(X^p)\acute{\imath} \simeq t(1)$ se p é impar). Como é de esperar, a medida que recurrimos a un maior número de etapas, maior serán as aproximacións.

5.4 Actualización de matrices con información limitada: un novo método biproporcional

Introducimos aquí unha técnica de axuste biproprocional que non se corresponde cun procedemento multietápico. Esta técnica actúa ben sobre a matriz de Leontief dun ano base ou ben sobre a súa inversa (en modelos de demanda) para estimar as mesmas co fin de cuantificar magnitudes vectoriais para períodos para os que non se elaboraron táboas e para os que poseemos certa información que calificamos como básica. Incluso non sería necesario recorrer a outro tipo de métodos máis sofisticados e para os que precisaríamos unha maior información (as marxes das distintas matrices, ou noutras verbas, o vector de demanda intermedia e o vector de consumos intermedios relativos ao novo período). Ademais é moi probábel atoparnos con situacións onde non se dispoña da mesma e como consecuencia non se poderían aplicar os métodos coñecidos.

Son moitos os casos onde se precisan as estimacións mencionadas, así destacamos a modo de exemplo, estudos da incidencia do turismo nunha economía con información limitada para un ano posterior ao que foi publicada unha TIO[4]. Outra posibilidade, no entorno da búsqueda da nova inversa de Leontief, sería estudar a posíbel modificación de multiplicadores ao longo dun período de tempo máis ou menos curto ante a escasez de datos.

Iremos centrándonos nos distintos modelos de comportamento construídos a partir da táboa

[4]Recentemente, con Luís Castañón, elaboramos distintos estudos acerca do impacto do turismo na economía galega, e un dos proxectos que temos en mente é precisamente a estimación dos efectos turismo no Ano Xacobeo 2004 tomando como base as táboas input-output do ano 1998 para Galiza e algunha outra información dispoñíbel para o 2004.

simétrica para indicar en que consiste a técnica mencionada. Tamén indicaremos como é posíbel aplicar este método aos modelos obtidos a partir das táboas de orixe e destino, incluso cando xurden matrices rectangulares. Por último, na búsqueda de semellanzas como método RAS, introducimos unha variante desta técnica que actúa directamente sobre a matriz de coeficientes técnicos cunha información mínima, ou sexa, descoñecendo unha das marxes, en concreto a suma por columnas dos consumos intermedios.

5.4.1 Axustes en modelos de demanda

Consideramos o modelo de demanda de fluxos totais relativo á táboa simétrica para un período de tempo determinado;

$$x(0) = (I - A(0))^{-1} y(0),$$

para o que coñecemos o vector de produción, $x(0)$, o vector de demanda final (neta de importacións), $y(0)$[5], e a matriz de coeficientes técnicos totais, $A(0)$.

Como imos actuar sobre a matriz de Leontief, expresamos o sistema do seguinte modo;

$$(I - A(0))x(0) = y(0),$$

e agora admitimos que dispoñemos da información acerca da produción e acerca da demanda final para un período posterior, $x(1)$ e $y(1)$ respectivamente, pero non dispoñemos da matriz de coeficientes técnicos para ese período. Polo tanto, indicaremos como se pode estimar $(I - A(1))$ conforme a un método biproporcional que nos asegure a compatibilidade do novo sistema;

$$(I - A(1))x(1) = y(1).$$

A idea consiste en rectificar a matriz de Leontief do ano inicial mediante unhas matrices diagonais para obter a estimación mencionada. Aproveitando a información dispoñíbel, a que optamos calificar como básica, vemos como se artellan matrices diagonais que nos servirán para detectar os correspondentes coeficientes de corrección a usar.

Por un lado, cabe sinalar que o vector de produción, $x(1)$, pode escribirse de acordo a;

[5] Por comodidade empregamos esta notación, aínda que noutro momento expresamos o vector por $[y(0) - m(0)]$.

$$x(1) = R\ x(0),$$

sendo R unha matriz diagonal. Matricialmente;

$$R = [\hat{x}(1)][\hat{x}(0)]^{-1},$$

onde os elementos da diagonal principal son, $r_{ii} = x_i(1)/x_i(0)$, enténdese que os $x_i(1)$ e os $x_i(0)$ representan as producións das distintas ramas (ou produtos) dos períodos 1 e 0, é dicir, os elementos da diagonal de R correspóndense coas tasas brutas de crecemento da produción[6] nese intervalo de tempo.

Por outro lado, o vector de demanda final, $y(1)$, tamén se pode expresar mediante;

$$y(1) = P\ y(0),$$

sendo P unha matriz diagonal. Entón, matricialmente;

$$P = [\hat{y}(1)][\hat{y}(0)]^{-1},$$

de tal modo que os elementos da diagonal principal son da forma; $p_{ii} = y_i(1)/y_i(0)$, onde $y_i(1)$ e $y_i(0)$ representan a demanda final das distintas ramas para os anos 1 e 0; ou sexa, os elementos da diagonal principal correspóndense coas tasas brutas de crecemento da demanda final das distintas ramas de actividade.

5.4.2 Actualización da matriz de Leontief

Enlazando co anterior, a continuación imos poñer de manifesto en que consiste esta técnica biproporcional para actualizar a matriz de Leontief; tomamos o modelo de demanda para o ano inicial;

$$(I - A(0))x(0) = y(0),$$

acto seguido multiplicamos pola esquerda ambos membros da identidade matricial por P;

[6] Ao longo deste capítulo seguiremos falando de tasas brutas de crecemento, aínda que se podería falar de tasas brutas de variación xa que tamén é factíbel que algún elemento (p.e. demanda final dun produto) decreza co transcurso do tempo.

$$P(I - A(0))x(0) = P\ y(0),$$

agora, xa que $R^{-1}R = I_n$, introducimos $R^{-1}R$ no membro da esquerda,

$$P(I - A(0))R^{-1}R\ x(0) = P\ y(0).$$

A partir de aquí, realizando as substitucións pertinentes, obtemos;

$$P(I - A(0))R^{-1}x(1) = y(1).$$

Polo tanto, deducimos que $P(I - A(0))R^{-1}$ se corresponde con $(I - A(1))$, indicamos logo;

$$(I - A(1)) = P(I - A(0))R^{-1},$$

ao ser R unha matriz diagonal é inmediato calcular R^{-1}, de modo que a mesma tamén será unha matriz diagonal onde os elementos da súa diagonal principal resultarán dos cocientes entre os $x_i(0)$ e os $x_i(1)$.

Unha vez que se introducíu o procedemento, destacamos a relación que gardan os elementos da matriz $(I - A(1))$ (simbolizamos o elemento xenérico de $A(1)$ por $a_{ij}(1)$) cos elementos da matriz $(I - A(0))$ (denotamos o elemento característico de $A(0)$ por $a_{ij}(0)$).

Desta forma, centrándonos na matriz $P(I - A(0))R^{-1}$, por un lado vemos como os elementos da diagonal principal son;

$$(1 - a_{ii}(1)) = p_{ii}(1 - a_{ii}(0))\frac{1}{r_{ii}} = \frac{y_i(1)}{y_i(0)}(1 - a_{ii}(0))\frac{x_i(0)}{x_i(1)},$$

e con vistas a súa interpretación económica expresámolos conforme a;

$$(1 - a_{ii}(1)) = \frac{y_i(1)/y_i(0)}{x_i(1)/x_i(0)}(1 - a_{ii}(0)), \qquad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Observamos como se multiplican os elementos en cuestión polo cociente entre as tasas brutas de crecemento da demanda final e da produción.

O resto dos elementos da matriz $(i \neq j)$ resultan da seguinte maneira;

$$p_{ii}(-a_{ij}(0))\frac{1}{r_{jj}} = \frac{y_i(1)}{y_i(0)}(-a_{ij}(0))\frac{x_j(0)}{x_j(1)},$$

ou sexa, temos que;

$$(-a_{ij}(1)) = \frac{y_i(1)/y_i(0)}{x_j(1)/x_j(0)}(-a_{ij}(0)).$$

Se o obxectivo fose atopar a matriz $A(1)$ que nos asegurase a compatibilidade do sistema, entón a mesma resultaría do seguinte xeito;

$$A(1) = I - P(I - A(0))R^{-1},$$

sendo os seus elementos;

$$\text{se} \quad i = j, \qquad a_{ii}(1) = 1 - \frac{y_i(1)/y_i(0)}{x_i(1)/x_i(0)}(1 - a_{ii}(0))$$

$$\text{e se} \quad i \neq j, \qquad a_{ij}(1) = \frac{y_i(1)/y_i(0)}{x_j(1)/x_j(0)}a_{ij}(0).$$

Vemos como se estimarían os elementos da diagonal principal, onde nesa función de dobre corrección interveñen os cocientes entre tasas de crecemento brutas da demanda final e da produción dos distintos sectores. En principio, cabe esperar que en transcursos de tempo curtos, salvo cambios excepcionais nunha economía, o cociente entre ditas tasas para un sector ven a ser próximo a 1. E no que respecta aos demais elementos, estes son rectificados conforme ao cociente entre a tasa de crecemento da demanda final do output do sector i e a tasa do crecemento da produción do sector j. O feito de que se incremente a produción do sector j implica un maior nivel de consumos intermedios, pero este non ten porque ser proporcional, dalgún modo xurde a corrección paralela por filas basándose nas tasas brutas de crecemento da demanda final. Tamén procede indicar que aínda que se incremente a produción do sector subministrador i, iso non implica que se provoque un incremento proporcional na demanda intermedia e na demanda final.

Recordamos que, entre outros moitos autores, Pulido e Fontela (1993, p. 226) indican que "O RAS é un procedemento de cuadre automático dunha matriz por filas e columnas, pero iso non quita ao proceso unha certa xustificación económica. Nalgún sentido, as rectificacións por filas responden a efectos substitución dos inputs duns sectores polos dos outros e as rectificacións por columnas, representan efectos fabricación, propios do cambio de tecnoloxía da produción de cada sector". Así que en contraste co RAS, a interpretación económica deste método introducido é máis clara e as tasas que se empregan desempeñan os efectos indicados. En todo caso, hai que ser conscientes das limitacións que pode presentar este último, enténdase que o mesmo se vai aplicar nas situacións comentadas actuando sobre a matriz de Leontief e non coa meta de estimar a matriz de coeficientes técnicos, cando o método iterativo si o fai actuando directamente sobre a matriz de coeficientes técnicos do ano base, aínda que despois se emprege a nova matriz de Leontief para cuantificar algún vector. Máis adiante intentaremos buscar comparanzas, pero en contextos semellantes.

Tradicionalmente, as distintas técnicas de axuste actúan sobre A para despois situarse nos modelos de comportamento e obter a inversa de Leontief correspondente. De aí, esa necesidade constante de observar de que forma é esa nova matriz de coeficientes técnicos, pero ese paso é evitábel xa que se pode acudir directamente á matriz de Leontief ou incluso a súa inversa.

Outro aspecto a comentar é que para poder a aplicar o RAS precisamos unha maior información, en concreto hai que dispoñer a maiores dos datos relativos aos inputs intermedios, ou alternativamente dos datos dos inputs primarios, dado que os inputs intermedios se poden obter como diferenza entre a produción da rama de actividade e os inputs primarios. Mentres que este método aplícase dispoñendo da información relativa á produción e á demanda final para o ano 1, tal como se sinalou anteriormente.

Tamén temos que subliñar, en comparación co método RAS, que este método ao axustar a matriz por columnas de acordo ás producións dos sectores ofrece unha maior liberdade que o RAS, pois nese caso os sucesivos axustes sempre se realizan sobre o vector de consumos intermedios, que neste contexto admitimos descoñecer.

En definitiva, trátase dun método de axuste por filas e columnas onde nos apoiamos nos datos relativos á produción e á demanda final dos períodos 0 e 1. Presenta unha vantaxe notábel fronte ao RAS, pois neste último tamén se recorre a un axuste por filas e por columnas basándose nos datos relativos á demanda intermedia e aos inputs intermedios; pero é máis laborioso xa que ao ser un método iterativo e se desexa unha boa aproximación é moi probábel que haxa que acudir a bastantes etapas.

5.4.3 Actualización da inversa de Leontief

A efectos prácticos entendemos máis acertado aplicar directamente este método sobre a inversa de Leontief, xa que se facilitan os cálculos. A continuación imos ver como temos dúas posibilidades para realizar o axuste. Unha das mesmas consiste en apoiarnos no desenvolvemento anterior relativo á matriz de Leontief. Así, se retomamos;

$$P(I - A(0))R^{-1}x(1) = y(1),$$

e multiplicamos ambos membros da identidade pola esquerda pola inversa de $[P(I - A(0))R^{-1}]$, observemos que esta matriz é cadrada e no entorno en que nos movemos pode considerarse de rango completo. Fixémonos que $(I - A(0))$ normalmente é unha matriz de diagonal dominante e as tasas brutas de crecemento coas que traballamos cabe supoñer que non distan moito do valor 1. Entón temos;

$$[P(I - A(0))R^{-1}]^{-1}P(I - A(0))R^{-1}x(1) = [P(I - A(0))R^{-1}]^{-1}y(1),$$

e agora simplificando obtemos

$$x(1) = [P(I - A(0))R^{-1}]^{-1}y(1).$$

Atendendo á propiedade da inversa dun produto de matrices quédanos;

$$x(1) = R(I - A(0))^{-1}P^{-1}y(1).$$

A outra posibilidade que se comentaba consiste en considerar o sistema na forma inicial;

$$x(0) = (I - A(0))^{-1}y(0),$$

despois multiplicamos pola esquerda pola matriz de coeficientes correctores R (anteriormente definida)

$$R\,x(0) = R(I - A(0))^{-1}y(0),$$

e acto seguido introducimos a matriz identidade de acordo a $P^{-1}P$ (sendo P a outra matriz diagonal de coeficientes correctores que tamén introducimos previamente);

$$R\,x(0) = R(I - A(0))^{-1}P^{-1}Py(0).$$

Polo tanto, tendo en conta que $x(1) = Rx(0)$ e $y(1) = Py(0)$, unha vez feitas as oportunas substitucións obtemos de novo a expresión á que chegamos pola outra vía.

En definitiva, a inversa de Leontief relativa ao período 1, $(I - A(1))^{-1}$, estímase rectificando por filas e columnas á inversa de Leontief do período 0 mediante as matrices R e P^{-1};

$$(I - A(1))^{-1} = R(I - A(0))^{-1}P^{-1}.$$

Agora imos deternos na interpretación económica dos elementos da matriz estimada. Sendo as notacións empregadas para simbolizar os elementos das inversas de Leontief dos períodos en cuestión as seguintes;

$$(I - A(0))^{-1} = (\alpha_{ij}(0)) \in M_n \qquad \text{e} \qquad (I - A(1))^{-1} = (\alpha_{ij}(1)) \in M_n.$$

Tamén lembramos, aínda que sexa evidente, que a interpretación económica do elemento característico de $(I - A)^{-1}$, α_{ij}, se corresponde coa *cantidade adicional producida polo sector i se a demanda final do sector j se incrementa nunha unidade monetaria.*

Para un mellor entendemento, consideramos acertado expresar con detalle a matriz $R(I - A(0))^{-1}P^{-1}$;

$$\begin{pmatrix} r_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11}(0) & \alpha_{12}(0) & \cdots & \alpha_{1n}(0) \\ \alpha_{21}(0) & \alpha_{22}(0) & \cdots & \alpha_{2n}(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}(0) & \alpha_{n2}(0) & \cdots & \alpha_{nn}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/p_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/p_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/p_{nn} \end{pmatrix}$$

Polo tanto, o elemento xenérico da matriz estimada é da seguinte maneira;

$$\alpha_{ij}(1) = r_{ii}\alpha_{ij}(0)\frac{1}{p_{jj}} = \frac{x_i(1)}{x_i(0)}\alpha_{ij}(0)\frac{y_j(0)}{y_j(1)},$$

ou, de modo alternativo;

$$\alpha_{ij}(1) = \frac{x_i(1)/x_i(0)}{y_j(1)/y_j(0)}\alpha_{ij}(0). \quad \forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Vese como se multiplican os elementos da inversa de Leontief inicial por un cociente de tasas brutas de crecemento da produción do sector i e da demanda final do sector j, é dicir, corríxense paralelamente os elementos da matriz $(I - A(0))^{-1}$, de tal forma que a correción das filas ven dada pola multiplicación dos mesmos pola tasa bruta de crecemento da produción do i-ésimo sector e a correción por columnas ven dada pola división dos mencionados elementos pola tasa bruta de crecemento da demanda final do j-ésimo sector.

Tendo en conta a importancia da matriz de Leontief na análise económica, tamén nos parece interesante fixarnos nos multiplicadores resultantes na matriz estimada, $(I - A(1))^{-1}$, para ver de que xeito se dan as rectificacións comentadas. A modo de exemplo, centrámonos nos relativos ás columnas, coñecidos como multiplicadores da produción; sabemos que estes multiplicadores recollen o efecto total sobre os distintos sectores da economía ante un incremento dunha unidade monetaria de demanda final do sector j-ésimo. Os mesmos exprésanse conforme a;

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}(1) = \alpha_{1j}(1) + \alpha_{2j}(1) + \cdots + \alpha_{nj}(1), \qquad \forall j \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Para unha maior nitidez e en base ao sinalado anteriormente en relación aos $\alpha_{ij}(1)$, unha vez realizadas as substitucións, temos que;

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}(1) = [\frac{x_1(1)}{x_1(0)}\alpha_{1j}(0) + \cdots + \frac{x_n(1)}{x_n(0)}\alpha_{nj}(0)]\frac{1}{y_j(1)/y_j(0)}, \qquad \forall j \in \{1, 2, ..., n\},$$

así, para a columna j vemos como xurden as correccións de acordo ás n filas, cada unha en relación ás distintas tasas brutas de crecemento de produción dos n sectores que compoñen a economía, e a rectificación da columna en función da tasa bruta de crecemento da demanda final do sector j.

5.4.4 Extensións do método

Axustes en modelos de prezos

Outro dos modelos utilizado na análise económica é o sistema dual de prezos de Leontief, sendo unha das súas expresións na forma compacta para un ano determinado a seguinte;

$$p^t(0)(I - A(0)) = w^t(0).$$

Temos por obxectivo estimar $(I - A(1))$, unha vez coñecidos o vector de prezos para o ano 1, $p(1)$, e o vector de inputs primarios por unidade de output para ese mesmo ano $w(1)$, de xeito que nos asegure a compatibilidade do seguinte sistema;

$$p^t(1)(I - A(1)) = w^t(1).$$

Así, indicamos como podemos expresar os vectores de prezos e de consumos primarios por unidade de output para o ano 1 en función das magnitudes vectoriais que miden os mesmos fenómenos para o ano 0[7];

$$p^t(1) = p^t(0)R \qquad \text{e} \qquad w^t(1) = w^t(0)P.$$

O proceso a seguir para obter a estimación de $(I - A(1))$ é análogo ao exposto nos outros casos; multiplicamos pola dereita por P ambos membros do sistema inicial;

$$p^t(0)(I - A(0))P = w^t(0)P,$$

a continuación introducimos a matriz identidade no membro da esquerda mediante RR^{-1};

$$p^t(0)RR^{-1}(I - A(0))P = w^t(0)P.$$

E por último, tendo en conta que $p^t(0)R = p^t(1)$ e $v^t(0)P = w^t(1)$, obtemos;

$$p^t(1)R^{-1}(I - A(0))P = w^t(1).$$

En defintiva, a matriz a estimar óbtense multiplicando $(I - A(0))$ pola esquerda pola inversa de R e pola dereita por P;

$$(I - A(1)) = R^{-1}(I - A(0))P,$$

sendo a estimación da matriz de coeficientes técnicos para o exercicio 1 por esta vía a seguinte:

$$A(1) = I - R^{-1}(I - A(0))P.$$

[7] Sempre simbolizamos as matrices de coeficientes correctores por R e P, pero debemos indicar que en cada contexto son (ou poden ser) diferentes.

Neste contexto, a matriz de coeficientes técnicos $A(1)$ óbtense de acordo á información relativa aos prezos e aos coeficientes dos inputs primarios.

Alternativamente, podemos expresar o modelo de prezos para o ano de referencia, período 0, como

$$(I - A(0)^t)p(0) = w(0)$$

e apoiándonos nunha das propiedades da trasposición de matrices vemos como a matriz que se pretende obter se pode expresar de acordo a;

$$I - A(1)^t = (I - A(1))^t.$$

Agora, substituíndo $A(1)$ obtemos;

$$\begin{aligned}(I - A(1))^t &= (R^{-1}(I - A(0))P)^t = \\ &= P^t(I - A(0))^t(R^{-1})^t,\end{aligned}$$

e de novo, tendo presente que as matrices P e R son diagonais, $P^t = P$ e $(R^{-1})^t = R^{-1}$, temos que;

$$I - A(1)^t = P(I - A(0)^t)R^{-1}.$$

A trasposta da matriz $A(1)$ podíase obter directamente, pero a partir do anterior obtemos que;

$$A(1)^t = I - P(I - A(0)^t)R^{-1}.$$

Por último, en relación ao modelo de prezos de Leontief vemos como se aplica este método biproporcional sobre a inversa de Leontief. Así que se retomamos este modelo na forma;

$$p^t(1)(I - A(1)) = w^t(1),$$

e a continuación expresamos os prezos en función do vector de inputs primarios por unidade de produto;

$$p^t(1) = w^t(1)(I - A(1))^{-1}.$$

Tendo presente que a nova matriz de Leontief era estimada $(I - A(1)) = R^{-1}(I - A(0))P$, só nos queda realizar a substitución correspondente;

$$p^t(1) = w^t(1)(R^{-1}(I - A(0))P)^{-1},$$

e, en base á inversa dun produto de matrices, obtemos;

$$p^t(1) = w^t(1)P^{-1}(I - A(0))^{-1}R,$$

ou sexa, $(I - A(1))^{-1} = P^{-1}(I - A(0))^{-1}R$.

Agora xa estamos en condicións de observar como son os elementos da inversa de Leontief estimada. Se empregamos as notacións que xurdiron no modelo de demanda, vemos que os mesmos son da seguinte maneira;

$$\alpha_{ij}(1) = \frac{1}{p_{ii}}\alpha_{ij}(0)r_{jj}, \qquad \forall i, j \in \{1, 2, ..., n\},$$

e en base á construción das matrices de coeficientes correctores, temos de modo alternativo;

$$\alpha_{ij}(1) = \frac{w_i(0)}{w_i(1)}\alpha_{ij}(0)\frac{p_j(1)}{p_j(0)} = \frac{p_j(1)/p_j(0)}{w_i(1)/w_i(0)}\alpha_{ij}(0), \qquad \forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Neste caso os elementos da inversa de Leontief son rectificados mediante os cocientes que xurden entre as tasas brutas de crecemento dos prezos do input j e as tasas brutas de crecemento dos coeficientes de inputs primarios correspondentes ao sector i-ésimo.

Axuste en modelos de oferta

Aínda que os modelos de oferta non son tan empregados na análise económica, tamén podemos ver, agora xa dunha forma máis fluída, como podemos aplicar este método a este tipo de modelos relativos á unha táboa simétrica. Máis adiante indicaremos como se procede cando traballamos con modelos obtidos directamente das táboas de orixe e destino.

Consideramos o modelo de Ghosh para un ano determinado, o cal tomamos como base;

$$x^t(0)(I - D(0)) = v^t(0),$$

e asumindo que coñecemos a produción por sectores $x(0)$ e os inputs primarios $v(0)$ dos distintos sectores para ese ano, ao igual que a matriz de coeficientes de distribución, $D(0)$[8].

Para expoñer a técnica, unha vez máis situándonos nun contexto no que coñecemos $x(1)$ e $v(1)$ e no que somos conscientes de que ante o transcurso do tempo os coeficientes de distribución mudaron. Se nos vemos na obriga de realizar algunha análise relativa neste período 1, imaxinémonos a modo de exemplo, que queremos cuantificar nesa economía a parte dos inputs primarios motivados polo turismo a partir de certos datos, será de recibo estimar a nova matriz de Ghosh, para lograr así unha boa aproximación en base ao sistema;

$$x^t(1)(I - D(1)) = v^t(1).$$

Anteriormente vimos como se expresaba $x(1)$ en función de $x(0)$;

$$x(1) = R\ x(0),$$

así aplicándolle a trasposición obtemos;

$$x^t(1) = x^t(0)R.$$

Cabe sinalar que $R^t = R$, xa que R é unha matriz diagonal.

Do mesmo xeito, sabendo que $v(1) = Pv(0)$ e que $P^t = P$, temos;

$$v^t(1) = v^t(0)P,$$

neste contexto, a matriz de coeficientes correctores, P, constúese apoiándose nos datos dos inputs primarios dos períodos 0 e 1, ou sexa, matricialmente $P = [\hat{v}(1)][\hat{v}(0)]^{-1}$.

Neste caso multiplicamos pola dereita os membros da identidade $x^t(0)(I - D(0)) = v^t(0)$ por P;

$$x^t(0)(I - D(0))P = v^t(0)P,$$

[8] Se esta non é coñecida, é obvio que dispoñendo da táboa simétrica estaríamos en condicións de obtela.

a continuación introducimos a matriz identidade mediante RR^{-1};

$$x^t(0)RR^{-1}(I - D(0))P = v^t(0)P.$$

Entón podemos expresar $v^t(1)$ en función de $x^t(1)$ conforme a;

$$x^t(1)R^{-1}(I - D(0))P = v^t(1).$$

Polo tanto, a estimación da nova matriz de Ghosh que nos asegura a compatibilidade do sistema recorrendo a esta técnica é a seguinte;

$$I - D(1) = R^{-1}(I - D(0))P.$$

A matriz de coeficientes de distribución estimada para o ano 1 por esta vía será;

$$D(1) = I - R^{-1}(I - D(0))P,$$

sendo os seus elementos da seguinte maneira;

$$\text{se} \quad i = j, \qquad d_{ii}(1) = 1 - \frac{v_i(1)/v_i(0)}{x_i(1)/x_i(0)}(1 - d_{ii}(0)),$$

$$\text{se} \quad i \neq j, \qquad d_{ij}(1) = \frac{v_j(1)/v_j(0)}{x_i(1)/x_i(0)} d_{ij}(0).$$

Neste tipo de modelos o axuste biproporcional realizado sobre a matriz de Ghosh inicial, $(I-D(0))$, radica en rectificar os elementos das filas dividíndoos polas tasas brutas de crecemento da produción das distintas ramas e rectificando as columnas de acordo ao produto das tasas brutas de crecemento dos inputs primarios dos sectores correspondentes. Nesta situación hai unha maior liberdade no axuste das filas xa que nos remitimos ao total, ou sexa, á produción dos distintos sectores. En todo caso, recordar que a prerspectiva agora é por columnas, é dicir, os modelos de oferta explican a produción en base ao vector de inputs primarios ou viceversa.

Nos modelos de oferta é habitual expresar o vector de inputs primarios en función do vector de produción sen necesidade de traspoñer ditos vectores. Polo tanto, o modelo para o ano 1 expresaríase;

$$(I - D(1)^t)x(1) = v(1).$$

Vemos de inmediato como se correxiría a matriz inicial, $(I - D(0)^t)$, sabemos que;

$$(I - D(1)^t) = (I - D(1))^t,$$

agora substituíndo $(I - D(1))$ e aplicando a propiedade da trasposición dun produto de matrices;

$$(I - D(1))^t = (R^{-1}(I - D(0))P)^t = P^t(I - D(0))^t(R^{-1})^t,$$

pero como P e R son matrices diagonais $P^t = P$ e $(R^{-1})^t = R^{-1}$, de aí que;

$$(I - D(1)^t) = P(I - D(0))^t R^{-1},$$

ou alternativamente

$$(I - D(1)^t) = P(I - D(0)^t)R^{-1}.$$

Se o obxectivo fose estimar a trasposta de $D(1)$, a mesma sería do seguinte modo;

$$D(1)^t = I - P(I - D(0)^t)R^{-1}.$$

Incluso sería máis inmediato se acudimos xa directamente á trasposta de $D(1)$, recordamos que $D(1) = I - R^{-1}(I - D(0))P$, ou sexa, vemos facilmente como;

$$\begin{aligned} D(1)^t &= (I - R^{-1}(I - D(0))P)^t = I^t - (R^{-1}(I - D(0))P)^t = \\ &= I - P^t(I - D(0))^t(R^{-1})^t = I - P(I - D(0)^t)R^{-1} \end{aligned}$$

Rapidamente sinalamos como se procede para estimar a inversa de Ghosh, para iso apoiámonos na estimación da matriz $(I - D(1))$; ou sexa

$$(I - D(1))^{-1} = (R^{-1}(I - D(0))P)^{-1} = P^{-1}(I - D(0))^{-1}R,$$

asegurando a mesma a compatibilidade do sistema

$$x^t(1) = v^t(1)(I - D(1))^{-1}.$$

Aplicación a modelos orixe-destino

Como o procedemento para aplicar este método biproporcional a modelos obtidos directamente das táboas de orixe e destino é análogo ao visto no entorno da táboa simétrica, só nos imos deter no denominado modelo "simple" de demanda para poñer de manifesto que a técnica de axuste que estamos a resaltar tamén é aplicábel a matrices rectangulares.

Así que consideramos o modelo *simple* de demanda relativo aos fluxos totais;

$$g = (C - B)_x y.$$

A continuación tomamos como referente o seguinte sistema de ecuacións correspondente ao ano 0;

$$(C(0) - B(0))g(0) = y(0),$$

por comodidade imos expresar abreviadamente a matriz diferenza entre os coeficientes de especialización e os coeficientes técnicos totais (non homoxéneos), $(C(0) - B(0))$, de acordo a $F(0)$. Así que alternativamente temos;

$$F(0)g(0) = y(0).$$

Unha vez máis, indicamos que son coñecidos os vectores de produción das ramas de actividade e de demanda final (por produtos) para o ano 0, $g(0)$ e $y(0)$, de forma respectiva.

Analogamente ao que acontecía nos modelos de demanda obtidos a partir da táboa simétrica, agora coñecemos $g(1)$ e $y(1)$ pero supoñemos que descoñecemos $F(1)$[9]. Trátase logo de estimar $F(1)$ conforme a información de $g(1)$ e $y(1)$, de tal forma que faga compatíbel o sistema;

$$F(1)g(1) = y(1).$$

[9]Hai que indicar que as táboas de orixe e destino nalgúns casos son publicadas máis a miúdo.

En contraste cos modelos anteriores, nestes as matrices de coeficientes correctores, P e R, en xeral non son da mesma orde. Así que apoiándonos nas matrices mencionadas, vemos como podemos expresar a demanda final do ano 1;

$$y(1)_{m\times 1} = P_{m\times m}\, y(0)_{m\times 1}\ ,$$

e a produción por ramas de actividade (non homoxéneas) para ese mesmo ano;

$$g(1)_{n\times 1} = R_{n\times n}\, g(0)_{n\times 1}\ .$$

Polo tanto, se multiplicamos pola esquerda o sistema $F(0)g(0) = y(0)$ pola matriz P;

$$PF(0)g(0) = Py(0)$$

e deseguido introducimos a matriz identidade (de orde n) no primeiro membro do sistema;

$$PF(0)I_n g(0) = PF(0)R^{-1}Rg(0) = Py(0).$$

Agora só nos resta realizar as substitucións pertinentes;

$$PF(0)R^{-1}g(1) = y(1),$$

para concluír que a estimación de $F(1)$, ou se se quere de $[C(1) - B(1)]$, en base a este método é a seguinte:

$$F(1) = PF(0)R^{-1}.$$

Polo tanto, vemos como os elementos da matriz estimada resultan;

$$c_{ij}(1) - b_{ij}(1) = \frac{y_i(1)}{y_i(0)}(c_{ij}(0) - b_{ij}(0))\frac{g_j(0)}{g_j(1)},\quad \forall i = \{1, 2, ..., m\} \ \text{ e } \ \forall j = \{1, 2, ..., n\},$$

ou, alternativamente;

$$c_{ij}(1) - b_{ij}(1) = \frac{y_i(1)/y_i(0)}{g_j(1)/g_j(0)}(c_{ij}(0) - b_{ij}(0)), \quad \forall i = \{1, 2, ..., m\} \text{ e } \forall j = \{1, 2, ..., n\}.$$

Vese neste contexto, ao igual que no modelo de demanda obtido en base á táboa simétrica, como o elemento corrector ven dado polo cociente entre tasa bruta de crecemento da demanda final do produto e a tasa bruta de crecemento da produción por ramas de actividade.

Pero a efectos prácticos, o habitual é estudar a incidencia da incremento da demanda final dun produto sobre a produción dos sectores (n.h.). Polo tanto, é de interese ver como estimamos a pseudo-inversa de Leontief para o período 1, $(C(1) - B(1))_x$, así que de forma semellante á procedida no modelo de demanda correspondente á táboa simétrica, consideramos o modelo relativo ao ano 0 expresado da seguinte maneira (insistimos de novo que é preciso que o número de produtos sexa maior ou igual que o número ramas de actividade);

$$g(0) = (C(0) - B(0))_x y(0),$$

multiplicamos ambos membros pola esquerda pola matriz diagonal R;

$$R\ g(0) = R(C(0) - B(0))_x y(0),$$

despois introducimos a matriz I_m, hai que ter en conta que ao ser P unha matriz diagonal $P^{-1}P = I_m$, ou sexa, obtemos;

$$R\ g(0) = R(C(0) - B(0))_x I_m y(0) = R(C(0) - B(0))_x P^{-1} P y(0)$$

Por último, tendo en conta como se poden expresar os vectores $g(1)$ e $y(1)$, temos;

$$g(1)_{n\times 1} = R_{n\times n}(C(0) - B(0))_{x\ n\times m} P^{-1}_{m\times m} y(1)_{m\times 1},$$

é dicir, a pseudo-inversa de Leontief estimada para o ano 1 que asegura a compatibilidade do sistema é a seguinte;

$$(C(1) - B(1))_x = R(C(0) - B(0))_x P^{-1}.$$

No que atinxe á interpretación dos elementos desta matriz, se optamos por simbolizar o elemento xenérico de $(C(1)-B(1))_x$ por $\beta_{ij}(1)$ e o elemento xenérico de $(C(0)-B(0))_x$ por $\beta_{ij}(0)$, os mesmos resultan;

$$\beta_{ij}(1) = r_{ii}\beta_{ij}(0)\frac{1}{p_{jj}} = \frac{g_i(1)}{g_i(0)}\beta_{ij}(0)\frac{y_j(0)}{y_j(1)}, \qquad \forall j \in \{1,2,...,m\} \qquad \text{e} \qquad \forall i \in \{1,2,...,n\},$$

ou de modo alternativo;

$$\beta_{ij}(1) = \frac{g_i(1)/g_i(0)}{y_j(1)/y_j(0)}\beta_{ij}(0), \qquad \forall j \in \{1,2,...,m\} \qquad \text{e} \qquad \forall i \in \{1,2,...,n\}.$$

Vemos logo como o elemento xenérico estimado da pseudo-inversa de Leontief para o período 1, $\beta_{ij}(1)$, que representaría *o incremento na produción da rama de actividade i ante o incremento dunha unidade monetaria na demanda final do produto j no novo exercicio* xurde da dobre corrección feita sobre $\beta_{ij}(0)$ correspondente co cociente entre a tasa bruta de crecemento da produción do sector i-ésimo e a tasa bruta de crecemento da demanda final do produto j.

5.5 Aplicación do RAS á Inversa de Leontief; comparación co novo método proposto

5.5.1 Desenvolvemento do método RAS

Aínda que o máis habitual é que esta técnica, ou as súas variantes, sexan aplicadas ben sobre a matriz de consumos intermedios ou ben sobre a matriz de coeficientes técnicos, comentar que hai traballos onde aplican directamente o método RAS sobre a inversa de Leontief e incluso sobre a $[(I-A)^{-1}-I]$ (Mun-Heng, T., 1998: 4 e seguintes).

A continuación indicamos de que xeito se procede para aplicar o método RAS á Inversa de Leontief seguindo o documento mencionado, aínda que introducimos certos cambios nas notacións con vistas a buscar semellanzas co noso método. Ao mesmo tempo tamén realizaremos algunha matización que estimamos de interese.

Consideranse a inversa de Leontief inicial e a actualizada de acordo a, $(I-A(0))^{-1}$ e $(I-A(1))^{-1}$, de forma respectiva; sendo;

$$(I-A(1))^{-1} = R\,(I-A(0))^{-1}S.$$

De modo que o modelo de demanda de Leontief para o período 1 expresaríase da seguinte maneira;

$$x(1) = (I - A(1))^{-1}y(1) = R\ (I - A(0))^{-1}Sy(1)$$

unha vez máis simbolizamos a produción por sectores para o período 1 e a demanda final para o período 1 por $x(1)$ e $y(1)$, asumindo que as mesmas son coñecidas.

As matrices diagonais, R e S, representan os efectos fabricación e substitución. Queremos deternos nesta última afirmación, xa que o autor asígnalle a función de factores de substitución aos elementos de R e considera os elementos de S como factores de fabricación indistintamente se aplica o método RAS sobre a matriz de coeficientes técnicos ou sobre a inversa de Leontief, pero nós pensamos que no contexto en que nos movemos a rectificación por filas correspóndese cun efecto substitución e a rectificación por columnas cun efecto fabricación.

Para iso, acudimos a o modelo de demanda, de tal maneira que se aplique o RAS sobre a matriz de Leontief, pois tamén cabe esa posibilidade,

$$(I - A(1))x(1) = R^{*}(I - A(0))S^{*}x(1) = y(1),$$

evidentemente R^{*} e S^{*} serían as matrices diagonais resultantes da iteración sobre $(I - A)$. Por unha banda, temos que a variación das sumas por filas dos elementos da matriz de Leontief ao longo do tempo reflicte o efecto substitución no que se aforran un tipo de inputs a costa doutros. E pola outra, a variación da suma por columnas dos elementos da mesma matriz corresponderíase co efecto fabricación debido á innovación tecnolóxica, no que o peso dos inputs intermedios variaría en relación aos inputs primarios. Iso implica que;

$$x(1) = [R^{*}(I - A(0))S^{*}]^{-1}y(1),$$

ou sexa;

$$x(1) = S^{*-1}(I - A(0))^{-1}R^{*-1}y(1).$$

Polo tanto as matrices de coeficientes de corrección en relación á inversa de Leontief, en realidade veñen a ser $R = S^{*-1}$ e $S = R^{*-1}$.

Unha vez realizada a correspondente matización, indícase que as distintas ecuacións do sistema de demanda se poden expresar;

$$x_i(1) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(1) y_j(1), \qquad \forall i \in \{1, 2, ..., n\},$$

pero tendo en conta como se estiman os distintos $\alpha_{ij}(1)$:

$$x_i(1) = \sum_{j=1}^{n} r_i \alpha_{ij}(0) s_j y_j(1), \qquad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

De aí que os distintos factores r_i sexan:

$$r_i = \frac{x_i(1)}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(0) s_j y_j(1)}, \qquad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Aínda que o autor só se centra no coeficiente global, indicamos que os coeficientes de rectificación por filas das distintas correccións resultan do cociente entre a produción real do sector i-ésimo para o período 1 e a produción estimada nas distintas fases do proceso; a modo de exemplo, na primeira etapa o denominador corresponderíase coa estimación da produción da rama i dada polo produto de $(I - A(0))^{-1}$ por $y(1)$.

Para obter os valores dos distintos factores s_j é preciso recorrer o modelo de prezos de Leontief;

$$p(1) = (I - A(1)^t)^{-1} w(1) = [(I - A(1))^{-1}]^t w(1),$$

sendo, unha vez máis, $p(1)$ e $w(1)$ os vectores de prezos e de consumos intermedios por unidade de produto do período 1.

Así que, atendendo á estimación de $(I - A(1))^{-1}$, de acordo a Mun-Cheng, sinalar que podemos expresar;

$$p(1) = [(I - A(1))^{-1}]^t w(1) = [R(I - A(0))^{-1} S]^t w(1) = S(I - A(0)^t)^{-1} R w(1).$$

As ecuacións do modelo pódense escribir da seguinte maneira;

$$p_j(1) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}(1) w_i(1), \qquad \forall j \in \{1, 2, ..., n\},$$

e agora, de novo, atendendo a estimación dos $\alpha_{ij}(1)$;

$$p_j(1) = \sum_{i=1}^{n} s_j \alpha_{ij}(0) r_i w_i(1) = s_j \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}(0) r_i w_i(1).$$

Polo tanto, os factores s_j xurden dos seguintes cocientes;

$$s_j = \frac{p_j(1)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}(0) r_i w_i(1)}, \qquad \forall j \in \{1, 2, ..., n\}$$

Por último, indicar que os coeficientes correctores por columnas nas distintas fases constúense de acordo aos cocientes entre os prezos reais e os estimados en base á matriz estimada na fase anterior.

Queda así posto de manifesto como se procede para estimar os distintos elementos das diagonais principais cando se aplica o RAS sobre a inversa de Leontief.

A idea central, como é evidente, consiste en rectificar unha matriz sistematicamente por filas e columnas, logo a matriz a correxir ten que ser a mesma. Podemos encontrarnos cunha dificuldade para aplicar este método dado que habitualmente as táboas publicadas veñen expresadas en termos de valor; así que, se coñecemos os consumos intermedios en unidades monetarias pero descoñecemos os prezos dos inputs non podemos dispoñer das unidades físicas. De aí que a efectos prácticos o método exposto non sexa manexábel en moitos casos dado o problema existente para atopar os datos relativos ás unidades físicas. Entendemos que unha alternativa consiste en asumir que os prezos sexan unitarios e en vez de falar de cantidades físicas falamos de cantidades expresadas en unidades monetarias. De proceder desta maneira facilitaríase a labor.

Queremos introducir esta matización para evitar un emprego erróneo desta técnica. Co fin de reforzar a mesma, facemos unha breve mención acerca das matrices de coeficientes coas que podemos traballar.

En primeiro lugar, imos recordar cal é a diferenza entre a matriz de coeficientes técnicos cuánticos, A, e a matriz de coeficientes en termos de valor A^*. Os seus elementos xenéricos defínense de acordo ao cociente entre os consumos intermedios e a produción das distintas ramas de actividade, nun caso en termos de cantidades e no outro en termos de valor. É así que a relación entre os mesmos sexa;

$$a_{ij}^* = \frac{x_{ij} p_i}{x_j p_j} = a_{ij} \frac{p_i}{p_j},$$

sendo a^*_{ij} o elemento característico de A^* e a_{ij} o elemento característico de A, p_i e p_j son os prezos dos inputs i e j, respectivamente; e x_{ij} e x_j representan os inputs intermedios e a produción da rama en termos de cantidades[10].

Matricialmente temos;

$$A^* = \hat{p} A [\hat{p}]^{-1}$$

sendo $\hat{p}$ a matriz diagonal dos prezos e $[\hat{p}]^{-1}$ a súa inversa. No caso de que $p = i$, vese a coincidencia entre as matrices A^* e A.

En segundo lugar, recordar que aínda que se manteña a estrutura produtiva constante sábese que modificacións de coeficientes en termos de valor poden recoller simples alteracións de prezos.

E atendendo á definición dos coeficientes técnicos relativos aos inputs intermedios e primarios sábese que a suma por columnas da inversa de Leontief para os períodos 0 e 1 (asumindo xa que as cantidades se expresan en unidades monetarias e os prezos iguais a un) son iguais a 1, de aí que;

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(0) + w_j(0) &= 1, \quad \forall j \in \{1, 2, ..., n\}, \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(1) + w_j(1) &= 1, \quad \forall j \in \{1, 2, ..., n\}, \end{aligned}$$

ou sexa, a restrición por columnas ven dada polo valor 1.

En definitiva, se procedemos como acabamos de sinalar, os coeficientes de rectificación s_j serían;

$$s_j = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}(0) r_i w_i(1)}, \quad \forall j \in \{1, 2, ..., n\}$$

5.5.2 Diferenzas e consideracións

Acudindo ao noso método para estimar a inversa de Leontief para un período determinado;

[10] Este aspecto é explicado con detalle por Lozano (1977, p. 197-98).

$$(I - A(1))^{-1} = R(I - A(0))^{-1}P^{-1},$$

e en relación á obtención dos factores r_i do método RAS, vese como se consideramos;

$$s_j = \frac{1}{p_{jj}} = \frac{y_j(0)}{y_j(1)}, \qquad \forall j \in \{1, 2, ..., n\}$$

e substituímos

$$r_i = \frac{x_i(1)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(0) \frac{y_j(0)}{y_j(1)} y_j(1)}, \qquad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$$

quédanos;

$$r_i = \frac{x_i(1)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(0) y_j(0)}, \qquad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$$

ou sexa, como cabía esperar os coeficientes teñen que ser iguais as tasas brutas de crecemento da produción, que xogan o papel de efectos fabricación[11];

$$r_i = \frac{x_i(1)}{x_i(0)}, \qquad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

A modo de conclusión e entrando en comparación con esta variante do RAS mencionada no documento de Mun-Cheng, indicar que como método biproporcional que é, garda unha semellanza con este outro método, xa que nos dous casos a inversa de Leontief inicial queda multiplicada tanto pola esquerda como pola dereita por matrices diagonais. De acordo ao proceso iterativo, estas matrices diagonais xurden de produtos de varias matrices diagonais representando as mesmas os efectos "fabricación" e "substitución". Na técnica introducida por nós as matrices diagonais empregadas, R e P^{-1}, teñen unha interpretación clara e precisa que ven dada polo cociente entre tasas. E por último, indicar que non precisamos de tanta información para realizar a correspondente actualización da inversa de Leontief, que incluso é moi probábel que a mesma sexa descoñecida.

[11] Que non leve a confusión, pois ao comparar estes dous métodos atopámonos cunha coincidencia de notacións á hora de simbolizar distintas matrices de coeficientes correctores por R.

5.5.3 O problema da información limitada

Agora introducimos unha variante da técnica coa que viñemos a traballar ata o momento, pero neste caso aplicada directamente sobre a matriz de coeficientes técnicos, ou sexa, trátase de estimar unha nova matriz de coeficientes dispoñendo da información correspondente á produción por sectores e á demanda final. En contraste con esta técnica, noutros métodos biproporcionais empregados neste entorno, como o RAS e *Synthetic Biproportional Projector* (Andréosso-O´Callaghan, 2.000) e as súas variantes, precisamos dispoñer das marxes das matrices para levar a cabo os distintos procesos sucesivos para estimar a matriz.

Polo tanto, partindo da relación contábel dada polo equilibrio entre a oferta e a demanda para un período inicial, enténdese que para o mesmo foi elaborada a táboa simétrica;

$$x(0) = X(0)i + y(0),$$

alternativamente, en base á definición dos coeficientes técnicos e a súa estabilidade, pode expresarse;

$$x(0) = A(0)x(0) + y(0).$$

Para o seguinte exercicio, admitimos coñecer a $x(1)$ e $y(1)$, de aí que por diferenza coñezamos a demanda intermedia, $u(1)$[12],

$$u(1) = x(1) - y(1).$$

Interésanos estimar $A(1)$ coa información dispoñibel, sabendo que a demanda intermedia para o ano 1 se pode expresar;

$$u(1) = A(1)x(1),$$

e que a mesma resulta do seguinte produto matricial;

$$u(1) = R\ u(0),$$

[12] De acordo ao sinalado no Capítulo 2, o vector de demanda intermedia do ano 1, $X(1)i$, podémolo simbolizar abreviadamente por $u(1)$.

sendo R unha matiz diagonal onde os seus elementos se corresponden coas tasas brutas de crecemento da demanda intermedia dos distintos sectores. E que a produción para o ano 1

$$x(1) = P\ x(0)$$

sendo P unha matriz diagonal construída coas tasas de crecemento brutas da produción.

Trátase de acudir á igualdade

$$u(0) = A(0)x(0)$$

e multiplicar ambos membros da mesma pola esquerda por R e introducir a matriz identidade en base a $P^{-1}P$, é dicir;

$$R\ u(0) = RA(0)P^{-1}P\ x(0),$$

a partir de aí, recurrimos ás substitucións pertinentes e obtemos;

$$u(1) = RA(0)P^{-1}x(1),$$

Logo cumprirase o equilibrio entre oferta e demanda para o ano 1;

$$x(1) = RA(0)P^{-1}x(1) + y(1).$$

Podendo expresar o modelo conforme a esta estimación feita de $A(1)$;

$$x(1) = (I - RA(0)P^{-1})^{-1}y(1).$$

A continuación detémonos na interpretación da estimación na nova matriz de coeficientes técnicos en base a unha información limitada, tal como comentamos antes. Temos que;

$$A(1) = RA(0)P^{-1}$$

e expresando con detalle este produto matricial (recordamos que anteriormente simbolizamos o elemento xenérico de $A(1)$ por $a_{ij}(1)$ e o de $A(0)$ por $a_{ij}(0)$);

$$\begin{pmatrix} r_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}(0) & a_{12}(0) & \cdots & a_{1n}(0) \\ a_{21}(0) & a_{22}(0) & \cdots & a_{2n}(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(0) & a_{n2}(0) & \cdots & a_{nn}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/p_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/p_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/p_{nn} \end{pmatrix}$$

Tendo presente á construción das matrices diagonais R e P, onde os seus elementos da diagonal principal viñan dados polas tasas brutas de crecemento da demanda intermedia e da produción (respectivamente); vemos facilmente de que forma é o elemento xenérico da matriz estimada, $A(1)$;

$$a_{ij}(1) = r_{ii} a_{ij}(0) \frac{1}{p_{jj}} = \frac{u_i(1)}{u_i(0)} a_{ij}(0) \frac{x_j(0)}{x_j(1)},$$

ou, de forma alternativa;

$$a_{ij}(1) = \frac{u_i(1)/u_i(0)}{x_j(1)/x_j(0)} a_{ij}(0), \qquad \forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Así, observamos como se multiplican os elementos da matriz de coeficientes técnicos inicial, $A(0)$, por un cociente de tasas brutas de crecemento da demanda intermedia do sector i e da produción do sector j, ou sexa, rectifícanse paralelamente os elementos de dita matriz, de tal forma que a corrección das filas ven dada pola multiplicación dos mesmos pola tasa bruta de crecemento da demanda intermedia do i-ésimo sector e a corrección por columnas ven dada pola división dos elementos pola tasa bruta de crecemento da produción do j-ésimo sector.

Anteriormente, cando se aplicaba esta técnica sobre a matriz de Leontief (ou sobre a súa inversa), xa se comentaba que o verdadeiro obxectivo neses casos era atopar unha estimación da inversa de Leontief co fin de estimar distintas magnitudes vectoriais dentro da análise económica, pero tamén introducimos unha posíbel estimación da matriz de coeficientes para o novo período coa idea de buscar semellanzas co método RAS.

Seguindo nesa liña, aínda que se tratan de métodos distintos, sábese que para poder aplicar o RAS é preciso dispoñer do vector de consumos intermedios a maiores cando nesta técnica non se emprega esta información, e ademais nalgúns casos pode ser descoñecida. No caso de dispor desa información pódese optar polo método iterativo e, como é evidente, estaríamos en condicións de comparar os resultados, observando así a distancia entre as matrices estimadas.

Indicar que nesta técnica a restrición por columnas ven dada polo vector relativo á produción en vez dos consumos intermedios, de aí que nos atopemos cun maior grao liberdade por columnas. Pero dalgún xeito, o vector de produción nos debe facilitar unha aproximación ao vector dos inputs intermedios, ou o que é o mesmo, do vector dos inputs primarios xa que este se obten por diferenza entre a produción e o anterior; é dicir, dentro da interrelación que gardan entre si as distintas magnitudes dentro dunha táboa input-output cabe esperar que a estimación que se pode obter por esta vía do vector de consumos primarios se aproxime en boa media á realidade.

Con vistas a comprobar a posíbel eficacia do método que aquí introducimos optamos por acompañar no Anexo 5 algunhas gráficas onde se poden observar por unha banda a distancia existente entre os coeficientes técnicos interiores non homoxéneos dalgunhas ramas produtivas da economía española do ano 1998 e o ano 2000, e por outra banda a distancia entre os mesmos coeficientes para o ano 1998 e os estimados de acordo a esta técnica para o ano 2000[13]. En definitiva, en liñas xerais podemos afirmar que a técnica empregada é capaz de detectar os cambios que se dan na realidade nas distintas estruturas produtivas.

Tamén nos atrevemos a afirmar que a técnica aquí introducida é unha ferramenta axeitada para levar a cabo distintos contrastes na elaboración das TIO co fin de evitar posíbeis erros[14]. No sentido en que os expertos poden intuír determinados cambios tecnolóxicos nas estruturas produtivas, pero que os mesmos poden resultar difíciles de cuantificar; de aí que recorrendo a este método como instrumento complementario podemos estar en mellores condicións de confirmar as estimacións relativas aos cambios, ou polo contrario, manter a dúbida ao respecto.

En relación á inversa de Leontief $(I - A(1))^{-1}$, indicar que os resultados da estimación son distintos de acordo a esta vía exposta, aínda que poden ser moi semellantes. Así, coméntase que as expresións do modelo de demanda para o ano 1 en base ás estimacións sinaladas son;

$$x(1) = (I - RA(0)P^{-1})^{-1}y(1)$$

$$x(1) = R(I - A(0))^{-1}P^{-1}y(1).$$

e aínda que as matrices de corrección, R e P, sexan distintas nos dous casos; en xeral, temos que as dúas matrices estimadas fan compatíbel o sistema pero;

[13]Como pode verse, os exemplos acompañados xiran en torno a matrices rectangulares. Non entramos aquí na exposición do método neste contexto, pero a mesma sería moi semellante á introducida.

[14]En todo momento queremos deixar claro que cambios bruscos nas tasas de crecemento conducen a cuestionar as técnicas de axuste. De ser así, os resultados deberían interpertarse con moita prudencia.

$$(I - RA(0)P^{-1})^{-1} \neq R(I - A(0))^{-1}P^{-1}$$

No Anexo 6 recurrimos a un exemplo dunha economía ficticia para poñer de manifesto o afirmado. Ao mesmo tempo podemos comparar tanto os elementos das inversas de Leontief resultantes como os correspondentes multiplicadores. En concreto, cabe destacar a práctica coincidencia das sumas por filas das matrices estimadas por unha vía ou outra, cuestión importante dado que non debemos esquencer que estamos traballando con modelos de demanda.

5.6 Conclusións e posíbeis liñas de actuación

Ao longo deste capítulo indicamos como se poden actualizar matrices en base a un método biproporcional de acordo a unha información básica e limitada, e a súa vez mencionamos outros métodos empregados a miúdo, en concreto fixámonos no RAS, aínda que tamén se puideron recordar outros. Tamén vimos como é posíbel actuar sobre distintas matrices, unha delas é a actuación sobre a matriz de Leontief, non nos fixamos como se aplica o RAS sobre esta matriz pero trátase dun procedemento análogo ao que ten lugar en relación á inversa de Leontief. Para rematar este capítulo desexamos realizar certas consideracións acerca das estimacións feitas en base aos distintos métodos, e dentro das distintas posibilidades imos ceñirnos á matriz de Leontief.

Segundo empregemos unha técnica ou outra, así nos encontramos con distintas estimacións da matriz de tal maneira que fan compatíbel, ou practicamente compatíbel, o sistema de Leontief. Cabe supoñer que as distancias entre as matrices estimadas sexan pequenas e ao mesmo tempo que se aproximen á matriz real, pero un aspecto no que temos que fixarnos é na existencia das inversas e no seu correspondente significado. Deste modo, sinalamos que cando empregamos técnicas biproporcionais como as tratadas aquí e ao apoiarnos nas matrices orixinais, temos que ter presente á hora de construír as matrices de coeficientes correctores en función dos datos reais que estes últimos non varíen drasticamente, pois se se chegaran a dar cambios radicais os resultados obtidos serían de dubidosa validez. Podemos comprobar de acordo a simulacións que se aplicamos estes métodos ante hipotéticos cambios significativos nas variábeis de produción ou demanda final, pensemos en situacións extremas, e acto seguido procuramos obter a súa inversa de Leontief. Pois, aínda que a mesma exista pode carecer de significado económico, ou aínda que o teña pode xurdirnos unha sobrevaloración dos multiplicadores. (Nese sentido, podemos recordar as matizacións feitas cando tratamos a estabilidade dun sistema económico en relación ao dominio da aplicación matriz inversa e que acontecía na proximidade da súa fronteira).

Dentro das posíbeis estimacións que se poden obter da matriz de Leontief, queremos indicar que a sobrevaloración dun elemento implica a infravaloración doutros para asegurarnos a compatibilidade do sistema. Así, cando tratamos a posíbel estabilidade dunha economía presentábase unha expresión alternativa do sistema de Leontief;

$$x = K^{-1}y + (I - K^{-1}(I - A))x,$$

onde a produción de cada rama se pode escribir

$$\forall \; i = 1, 2, ..., n, \qquad x_i = \frac{1}{1 - a_{ii}} y_i + \sum_{j=1 (j \neq i)}^{n} \frac{a_{ij}}{1 - a_{ii}} x_j,$$

ou sexa, de acordo á "descomposición da produción da rama i por destinos", ben sexa cara a demanda final ou ben cara a demanda intermedia dos restantes ramas.

Agora en relación ás distintas estimacións, se escollemos a modo de exemplo a primeira ecuación e ante unha hipotética sobrevaloración de a_{11}, vemos como diminúe $1 - a_{11}$, pero para cumprirse a igualdade tendo en conta que as producións dos distintos sectores e a demanda final do produto 1 son reais implicaríanos unha infravaloración dos restantes coeficientes da fila.

Tamén aproveitamos a ocasión para indicar que se comparamos o coeficiente asociado á demanda final do produto i, $\frac{1}{1-a_{ii}}$, co elemento da diagonal principal da fila i da inversa de Leontief vemos como estamos ante unha aproximación do efecto global que implica o aumento dunha unidade da demanda final do produto i na súa propia produción, iso si, temos que admitir que só se recolle o efecto indirecto motivado polo nivel de autoconsumos da rama subministradora de produtos; de aí a diferencia entre os coeficientes obxecto de comparación.

Por último, apuntar que introducimos esta modificación no sistema para indicar dalgún xeito a importancia que pode ter o coñecemento de antemán dos elementos da diagonal principal da matriz de coeficientes técnicos, xa que traballando con algún tipo de restricións a maiores podíamos estimar os restantes elementos sen afastarnos excesivamente dos reais.

Conclusións

Na introdución desta investigación formulamos diversos obxectivos, entre os que podemos destacar como os máis significativos os seguintes: a posibilidade de invertir matrices rectangulares para poder obter modelos económicos no entorno das táboas de orixe e destino, a búsqueda da estabilidade dun sistema económico naqueles casos onde se presentan desequilibrios sectoriais e a introdución dun procedemento alternativo para actualizar matrices cando se dispón de escasa información.

Entón, conforme aos obxectivos fixados de entrada e as propias consecuencias do estudo, expoñemos a continuación as conclusións máis relevantes ás que chegamos ao longo desta investigación. Para unha mellor presentación das mesmas, optamos por mostralas agrupadas en función das distintas problemáticas aquí consideradas.

Conclusións en relación ao emprego de modelos obtidos directamente das táboas de orixe e destino

O emprego dos modelos input-output construídos directamente das táboas de orixe e destino desempeña unha función complementaria de enorme valía dentro da análise económica, especialmente no que atinxe a estudos de tipo sectorial. É máis, tendo en conta que habitualmente as táboas de orixe e destino mostran unha maior desagregación por produtos cás táboas simétricas, estes modelos resúltannos moi útiles xa que por medio dos mesmos somos capaces de lograr un maior aproveitamento da información dispoñíbel nas táboas input-output.

Neste sentido, a utilización directa das táboas de orixe e destino para a elaboración de modelos ten vantaxes de información e análise. Así, aínda que un grupo de produtos teña as mesmas características tecnolóxicas e polo tanto non existan problemas na súa agregación dende este punto de vista, as características da súa demanda si poden ser diferentes (por exemplo, reparto consumo interno-externo). De aí que con esa desagregación de produtos, en principio, se lograría un mellor coñecemento dos efectos sobre a demanda dun maior número de produtos.

Dentro deste contexto é posíbel elaborar modelos sector por sector ou modelos produto por produto. Debemos indicar que o modelo sector por sector é máis útil para a análise de emprego, distribución de ingresos e planificación sectorial; e o modelo produto por produto é máis apropiado para estudos de comercio internacional, movemento de prezos ou análise de ligazóns. Ademais o modelo produto por produto evitaría unha reclasificación dos diversos elementos da demanda final, que sempre se presentan estatisticamente a nivel de produto, tarefa que teríamos logo que realizar en relación a un modelo sector por sector.

Pola propia confección das táboas de orixe e destino, o máis normal é que as matrices de produción e consumos intermedios sexan rectangulares, de aí que para poder explicar a produción por produtos e a produción por ramas nos modelos OD nos vexamos constantemente na obriga de calcular *inversas* de matrices rectangulares. En moitos casos para salvar este atranco acuden a agregacións por produtos para obter unha matriz cadrada, pero este procedemento implica case sempre unha perda significativa desa información que nos aportan as táboas mencionadas. Polo tanto, o feito de recorrer á inversa xeralizada de Moore-Penrose cando artellamos modelos OD supónnos un avance significativo, pois desa forma podemos construír modelos de demanda relativos á hipótese de tecnoloxía do produto sen necesidade de acudir a agregacións por filas, que como é evidente non sería posíbel se se traballa coa inversa tradicional.

O uso da inversa xeralizada de Moore-Penrose tamén nos permite a elaboración doutros modelos de demanda, oferta e prezos no entorno das TOD, modelos que nos optamos por calificalos como *simples*. É máis, entendemos que estes son perfectamente válidos para explicar as variábeis usuais da análise input-output: produción por produtos e produción por ramas de actividade. Adicionalmente tamén se viu como é posíbel construír distintos modelos OD con vistas a explicar ditas variábeis, simplemente teríamos que acudir a certas substitucións en relación ás estruturas estábeis por filas ou por columnas da matriz de produción. Pero xurdían nalgúns modelos de análise certa complexidade, pois aparecían matrices de coeficientes froito de produtos matriciais que se asociarían a matrices simétricas vinculadas aos distintos modelos, nas que a súa interpretación viña a ser excesivamente complicada. Ese feito invítanos a pensar que o máis acertado é recorrer aos modelos máis simples, que dende a perspectiva da demanda consiste en considerar estábeis as estruturas das columnas, tanto na táboa de orixe como na táboa de destino.

Na elaboración dos modelos *simples* obtidos a partir das táboas de orixe e destino aparecen habitualmente matrices rectangulares, dispoñendo deste xeito dun maior número de ecuacións que de incógnitas. Polo tanto, na discusión deste tipo de sistemas de ecuacións é posíbel encontrarnos con sistemas compatíbeis ou incompatíbeis, cuestión diferente ao que acontece en relación aos modelos construídos a partir da táboa simétrica; xa que ao traballar con matrices cadradas (e admitindo a súa vez que as economías son indescompoñíbeis) os sistemas son sempre compatíbeis con solución única.

Dentro deste contexto, apuntouse un procedemento alternativo para a resolución dos sistemas compatíbeis para o que non sería preciso acudir á inversa xeralizada. Así, tendo en conta que no modelo escollido o número de filas era maior que o número de columnas, trátabase de transformar o sistema e para eso sinalouse neste documento un criterio a seguir para eliminar $m-n$ filas. Unha vez feita esa transformación, xa teríamos un sistema compatíbel co mesmo número de ecuacións que de incógnitas. Non se trata dunha maneira de proceder novidosa, pois en realidade cando artellamos o modelo de Leontief de acordo aos fluxos interiores a partir da táboa simétrica procedemos dunha forma semellante, dado que en vez de traballar cunha matriz rectangular de orde $(2n \times n)$ pasamos a apoiarnos nunha matriz cadrada de orde n suprimindo precisamente as filas correspondentes aos fluxos importados; tomando como referente a submatriz de consumos intermedios interiores, X^d, e actuaría logo como variábel independente o vector y^d. Esta alternativa aquí exposta para resolver estes sistemas pode ser de utilidade para outro tipo de análises, por exemplo, para aquelas vinculadas a táboas input-output sectoriais (de carácter rectangular) que se quedan soamente en aspectos descritivos sen entrar en profundidade na cuantificación dos distintos impactos.

Conclusións acerca da estabilidade económica dentro do marco input-output

Na presentación das táboas input-output os elementos da matriz de consumos intermedios son positivos e o máis habitual é que as compoñentes do vector de inputs primarios tamén o sexan. Polo tanto, se estas compoñentes son positivas tódalas ramas produtivas do sistema permaneceran nunha situación estábel; e como é evidente, de ser así a economía no seu conxunto tamén se mostraría en equilibrio. No capítulo 4 xustificouse a posíbel existencia de compoñentes negativas no vector de inputs primarios sen que supoña ningunha traba. Aínda así, matizouse que cando nos atopemos con eses valores negativos temos que observar en que circunstancias somos capaces de lograr solucións positivas, ou sexa, que eses desequilibrios sectoriais non desestabilicen o sistema obxecto de estudo.

Naquelas táboas onde aparecen elementos negativos no vector de inputs primarios, o emprego de modo alternativo dos teoremas [1] e [4], nos que se acude á matriz $(I - K^{-1}(I - A))$ observando se as sumas das filas ou das columnas son estritamente menores que 1, tradúcese nun procedemento moi manexábel para determinar se o sistema económico é estábel. Recórdase que se considera a matriz K como unha matriz diagonal onde os seus elementos da diagonal principal se corresponden cos da matriz de Leontief, $(I-A)$.

A utilización da condición suficiente (Teorema [2]) na que se analiza a matriz $(I-K^{-1}(I-A))^2$ a través da suma por filas dos seus elementos resulta primordial para esclarecer a posíbel estabilidade dunha economía con sectores en desequilibrio; xa que se trata dun instrumento de índole "global" que nos serve para determinar se as interrelacións sectoriais son capaces de manter eses desequilibrios asegurando así a estabilidade do conxunto do sistema. Esa resposta non se obten conforme ao estudo da matriz de Leontief xa que non se aproveita tanto a información dispoñíbel na matriz de consumos intermedios.

Dentro das distintas formas de expresión do modelo de demanda destaca como a máis utilizada a forma tradicional:

$$x = (I + A + A^2 + ... + A^n + ...)y = (I-A)^{-1}y,$$

onde a inversa de Leontief se pode calcular como a serie de potencias de matrices, $(\sum_{n=0}^{\infty} A^n)$. Aquí mostramos unha expresión alternativa onde tamén nos xurde outra serie de potencias:

$$x = [\sum_{n=0}^{\infty}(I - K^{-1}(I-A))^n]K^{-1}y.$$

Ao realizar simulacións para ver ata que punto se pode manter a estabilidade dun sistema económico, vemos que a medida que a demanda final vai perdendo peso fronte á demanda intermedia –o que implica de modo paralelo que os inputs primarios perdan peso fronte aos consumos intermedios–, observamos como os elementos das inversas de Leontief resultantes van aumentando o seu valor. E ademais como o dominio da aplicación que transforma matrices nas súas inversas se corresponde cun conxunto aberto, vemos como segundo nos aproximemos á fronteira deste conxunto os elementos das matrices imaxe tenden a infinito. Neste contexto o determinante de $(I-A)$ sería positivo pero practicamente nulo, de aí que aínda que a matriz cumpra as condicións de Hawkins-Simon dificilmente se podería calificar a matriz como produtiva, xa que os efectos que provocaría un incremento da demanda final sobre a produción serían esaxerados. Nesta liña, sinalamos que se partimos dunha matriz de Leontief, $(I-A)$, e por algunha razón desexamos modificar a súa estrutura é indicativo esixirlle á nova matriz, $(I-A')$, que cumpra a seguinte condición suficiente;

$$\|(I-A') - (I-A)\| < \frac{1}{\|(I-A)^{-1}\|},$$

para asegurarnos que exista e sexa positiva $(I - A)^{-1}$, é dicir, é aconsellábel non alonxarnos excesivamente da matriz de Leontief inicial. Este aspecto é trascendental e tamén ten repercusións significativas sobre os mecanismos de actualización e axuste de matrices.

Conclusións en relación á actualización de matrices dentro do marco input-output

O método RAS aplicado a matrices rectangulares ten unha importancia significativa xa que boa parte das táboas de orixe e destino que publican a miúdo os centros de estatística non se obteñen de forma directa, ou sexa, son elaboradas con técnicas *non survey.* Nese sentido e como xa sinalamos de entrada que o obxectivo fundamental desta investigación xiraba na búsqueda de solucións teóricas para poder resolver posíbeis atrancos dentro do marco input-output, entendemos acertado indagar en futuros documentos de investigación acerca dos resultados obtidos mediante esta técnica e outras para contrastalos a posteriori cos publicados polos distintos centros.

O método biproporcional aquí introducido en base a unha información limitada, en relación a modelos de demanda, presenta unha notábel vantaxe fronte ao RAS. Para aplicar este último precísase unha maior información, en concreto hai que dispoñer dos datos relativos aos inputs intermedios e á demanda intermedia; cando para a aplicación do método introducido abonda cos datos do vector de demanda intermedia e do vector de produción.

A efectos prácticos é aconsellábel aplicar este método biproporcional directamente sobre a inversa de Leontief sen necesidade de aplicalo previamente sobre a matriz de Leontief ou sobre a matriz de coeficientes técnicos, eso si, sempre e cando se acuda ao modelo de demanda. A verdade é que, debido aos avances dados no terreo da informática, hoxe por hoxe superáronse aquelas dificultades existentes anos atrás en relación ao cálculo de inversas de matrices dunha dimensión considerábel; pero aínda así é evidente que ao proceder do modo indicado se facilita a labor, onde o cálculo de inversas de matrices sería un trámite innecesario.

Este método biproporcional é unha ferramenta válida para evitar posíbeis erros na elaboración das TIO. Aínda que os expertos en TIO poden intuír determinados cambios tecnolóxicos nas estruturas produtivas, estes poden resultar difíciles de cuantificar; de tal modo que recorrendo a este método como instrumento de contraste podemos estar nas condicións axeitadas de ratificar os coeficientes estimados, ou polo contrario de manter a dúbida ao respecto.

Debido ao enfoque que se lle deu a esta investigación, atopámonos na mesma cunha escasez de aplicacións prácticas; pero certo é que, dentro desa escasez e apoiándonos na publicación que existía de matrices de consumos intermedios da economía española para dous períodos de tempo, probamos a *eficacia* do método biproporcional con información limitada, chegando así asegurar que a matriz estimada se axustaba dabondo á real. De aí que seguindo esta liña e coa idea de reforzar máis a utilidade deste método, consideramos acertado e interesante tratar en futuras investigacións a comparabilidade do mesmo con outros métodos de actualización de matrices coñecidos.

Na actualización de matrices, segundo traballemos cunha técnica ou outra así nos encontraremos con distintas estimacións da matriz de Leontief de tal forma que as mesmas fan compatíbel, ou practicamente compatíbel, o sistema de Leontief. Tamén cabe supoñer que as distancias entre as matrices estimadas por unha vía ou outra sexan pequenas e ao mesmo tempo que estas se aproximen en boa mediada á real, pero outro aspecto que debemos ter en conta é a existencia das correspondentes inversas e o seu significado económico. Polo tanto, nese sentido concluímos que ao empregar técnicas biproporcionais como as aquí tratadas, onde construímos matrices de coeficientes correctores en función dos datos reais; debemos ter tino de que estes últimos non mudaran de forma drástica. Pois de darse cambios radicais nas magnitudes que se toman de referencia os resultados obtidos serían de dubidosa validez.

Bibliografía

• Alcántara, V. (1995) *Economía y Contaminación Atmosférica; hacia un Nuevo Enfoque desde el Análisis Input-Output.* Tese doutoral. Universidade de Barcelona.

• Almon, C. (2000) "Product-to-Product Tables via Product-Technology with No Negative Flows". *Economics Systems Research.* 12 (1), 27-43.

• Andréosso-O´Callaghan, B. e Yue, G. (2000) "An Analysis of Structural Change in China using Biproportional Methods". *Economics Systems Research.* 12 (1), 99-111.

• Arnaiz, G e Lausen, J. R. (1959) "Significado Económico de los Coeficientes en el Análisis Input-Output". *Estadítica Española.* 5, 27-33.

• Barbolla, R. e Sanz, P. (2000) *Álgebra Lineal y Teoría de Matrices.* Prentice Hall.

• Baksalary, J.; Chylinska, K. e Styan, G. (2004) "A Specifics form the Generalized Inverse of a Partitioned Matrix Useful in Econometrics". Traballo presentado no *13th International Workshop on Matrices and Statistics* en celebración do oitenta cumpreanos de Ingram Olkin.

• Berger, W. J. e Saibel, E. (1957) "Power Series Inversion of the Leontief Matrix". *Econometrica.* 25, 154-65.

• Bêrni, D. de A. (2000) *Matriz de Insumo-Producto: Exposiçao Teórica e Desdobramentos Empíricos.* Porto Alegre.

• Beutel, J. (2000) "Updating Input-Output Tables". Traballo presentado na *13th International Conference on Input-Output Techniques.* Macerata, 21-25 Agosto.

• Bidard, C. e Erreygers, G. (1998) "Sraffa and Leontief on Joint Production". *Review of Political Economy.* 10, (4), 427-46.

• Bielsa, J.; Sánchez-Chóliz, J.e Duarte, R. (2001) "Agua y Estructura Productiva". *Papeles de Economía Española.* 19 (Exemplar adicado a: Economía de las Comunidades Autónomas), 71-84.

• Bourbaki, N. (1967) *Thèories Spectrales. "Éléments de Mathématique"*. París. Hermann.

• Cabrer, B. e Pavía, J. M. (2003) "Flujos Demográficos Regionales: un Análisis Input-Output". *Estadística Española*, 154, 407-29.

• Cañada, A. (2001) "*Una Nota sobre los Coeficientes y Modelos Multiplicadores a partir del Nuevo Sistema Input-Output del SEC-95*". INE. Documento en PDF dispoñíbel en http://www.ine.es.

• Cañada, A. e Toledo, I. (2000) " Leontief y España: una Reflexión sobre las Tablas Input-Output y su Relevancia para la Economía y los Economistas Españoles". *Revista de Información Comercial Española.* ICE. (Dec. 2000- Enero 2001).

• Cella, G. (1984) "Input-Output Measurement of Interindustry Linkages". *Oxford Bulletin of Economics and Statistics.* 46 (1).

• Chenery, H. B. e Watanabe, T. (1958) "International Comparasions of the Structures of Production". *Econometrica.* 26 (4), 487-521.

• Dietzenbacher, E. (1997) "In Vindication of the Ghosh Model: a Reinterpretation as a Price Model". *Journal of Regional Science.* 37, 629-651.

• Dietzenbacher, E. (2001) "An Intercountry Decomposition of Output Growth in EC Countries". *Input-Output Analysis: Frontiers and Extensions*, Lahr, M.L. & Dietzenbacher, E., Palgrave Publishers Ltd (Macmillan Press Ltd.), New York.

• Dietzenbacher, E. (2002) "Interregional Multipliers: Looking Backward, Looking Forward". *Regional Studies*, 36 (2), 125-136.

• EUROSTAT (1994) *Système Européen des Comptes SEC 1995.* Luxembourg/BEL.

• Filho, F. (2002) *Contribuiçoes do Turismo à Economia Brasileira.* Tese doutoral. Documento en PDF dispoñíbel en http://www.teses.usp.br.

• García Negro, M. C. et al. (2003) *Táboas Input-Output Pesca-Conserva Galegas. 1999.* Ed. Consellería de Pesca, Marisqueo e Acuicultura. Xunta de Galicia.

• Gantmacher, F. R. (1959) *The Theory of Matrices*, Vol I. New York. Chelsea Publishing Co.

• Ghosh, A (1958) "Input-Output Approach in an Allocation System". *Economica.* 25, 58-64.

• Giarratani, F. (1980). "A Note on a Negleted Aspect of Intersectoral Flows Analysis". *Journal of Regional Science.* 20, (4), 513-15.

• Hawkins, D. e Simon, H.A. (1949) "Note: Some Conditions of Macro-Economic Stability". *Econometrica.* 17, 245-48.

• Herrero, C.; Jiménez, I e Villar, A. (1981) "La Selección de Técnicas en Modelos Multisectoriales de Producción Simple: Revisión Matemática". *Investigaciones Económicas.* 11, 117-34.

• Hirschman, A. O. (1958) *The Strategy of Economic Development.* Yale University Press. New Haven.

• IEA (1999) *"Sistema de Cuentas Económicas de Andalucía. Marco Input-Output 1995"*. Junta de Andalucía. Documento dispoñíbel en http://www.juntadeandalucia.es/institutodeestadistica/mioan95.

• IGE (2001) *"Contas Económicas e Táboa Input-Otput de Galicia. 1998"*. Xunta de Galicia.

• INE (1997) *"Sistema Europeo de Cuentas Nacionales y Regionales SEC-1995"* Ed. INE.

• IVE *"Marco Input-Output y Contabilidad Regional de la Comunidad Valenciana 1995".* Documento en PDF dispoñíbel en http://www.gva.es.

• Jackson, R e Murray, A (2004) "Alternate Input-Output Matrix Updating Formulations". *Economics Systems Research.* 16 (2), 135-48.

• Jansen, P. K. e ten Raa, T. (1990) "The Choice of Model in the Construction of Input-Output Coefficients Matrices". *International Economic Review*, Department of Economics, University of Pennsylvania and Osaka University Institute of Social and Economic Research Association. 31(1), 213-27.

• Jones, L. P. (1976) "The Measurement of Hirschmanian Linkages". *Quaterly Journal of Economics*, XC (2), 323-333.

• Kagawa, S. e Suh, S (2004) "*Multistage Process-Based Make-Use System*". Documento en PDF dispoñíbel en http://www.plan.civil.tohoku.ac.jp.

• Kornelis, M. e Koole, B (2003) *"Building Compatible Supply, Use, and Input-Output Tables on the Basis of Integrated Data: An Application to the Agricultural Economy of the Netherlands".* Documento en PDF. Agricultural Economics Research Institute. Netherland.

• Leontief, W. (1941) *The Structure of the American Economy 1919-39.* Oxford University Press, New York.

• Leontief, W. (1982) "Academic Economics". *Science*, 217. (Introducción carta de Leontief Revista *Science*).

• Lozano, E (1977) "La Matriz A de Coeficientes Técnicos y los Análisis sobre Cambios Estructurales". *Investigaciones Económicas* 3, 197-202.

• Luppino, M., Gajewski, G., Zohir, S., Khondker, B. e Crowther, D. (2004) "Estimating the Impacts of the Jamuna Bridge on Poverty Levels in Bangldesh using SAM and CGE Models: A Comparative Study" Documento presentado en *EcoMod Input-Output and General Equilibrium: Data, Modeling and Policy Analysis Conference.* Bruxelas.

• Manrique, C. e Santos, D. (2000) "*A Nonlinear Approach for the Adjustment and Updating of IO Accounts".* Documento presentado en XIII International Conference on Input-Output Techniques. University of Macerata, Italy, August 21-25th.

• Mckenzie, L. (1959) "Matrices with Dominant Diagonals and Economic Theory". *Mathematical Methods in the Social Sciences.* Arrow, Karlin e Suppes [ed]. Stanford University Press.

• Mesnard, L. de (1997) "A Bipropotional Filter to Comparate Technical and Allocation Coefficient Variations". *Journal of Regional Science.* 37 (4), 541-64.

• Mesnard, L. de (2004) "Understanding the Shortcomings of Commodity-Based Technology in Input-Output Models; An Economic-Circuit Approach". *Journal of Regional Science.* 44 (1), 125-41.

• Miller, R. E. e Blair, P.D. (1985) *Input-Output Analysis. Foundations and Extensions.* Prentice-Hall.

• Morillas, A (1982) "El Modelo de Leontief (Input-Output): Formulación y Limitaciones". *Cuadernos de Ciencias Económicas y Eempresariales.* Vol. Extra 9-10, 189-216.

• Mun-Cheng, Toh (1998) "Projecting the Leontief Inverse Directly by the RAS Method". Traballo presentado na *12th International Conference on Input-Output Techniques*, New York, 18-22 Maio.

• Muñoz, C. (2000) *Las Cuentas de la Nación. Introducción a la Economía Aplicada.* Cívitas. 2^a Ed.

• Olsen, A. (2000) "*General Perfect Aggregation of Industries in Input-Output Models*". Documento en PDF dispoñíbel en www.dst.dk/upload/w2000_02.pdf.

• Oosterhaven, J. (1981) *Interregional Input Output Analysis and Dutch Policy Problems*, Gower Publishing, Aldershot-Hampshire.

• Oosterhaven, J. (1988) "On the Plausibility of the Supply-Driven Input-Output Model". *Journal of Regional Science.* 28, 203-17.

• Oosterhaven, J. (1989) "The Supply-Driven Input-Output Model; a New Interpretation but Still Implausible". *Journal of Regional Science.* 29 (3), 459-65.

• Pedreño, A. (1986) "Deducción de las Tablas Input-Ouput: Consideraciones Críticas a través de la Contrastación Survey-Nonsurvey". *Investigaciones Económicas.* Vol X (3), 579-99.

• Pulido, A. e Fontela, E. (1993) *Análisis Input-Output. Modelos, Datos y Aplicaciones.* Ed. Pirámide.

• Quiñoá, J. L. (1983) *Inversibilidad en Álgebras de Banach de Matrices Infinitas y Aplicación a los Sistemas de Ecuaciones de Orden Infinito.* Tese Doutoral. Zaragoza.

• Quiñoá, J. L. (1992a) "Sur un Type de Matrice Infinite de Diagonale Dominante dans le Thèorie Économique". *European Meeting of the Econometric Society.* Bruselas.

• Quiñoá, J. L. (1992b) *Sistemas Infinitos de Leontief.* Proxecto de Investigación. Universidade de Santiago de Compostela.

• Rao, C.R e Mitra, S.K. (1971) *Genaralized Inverse of Matrices and its Applications.* Jhon Wiley.

• Rasmussen, P. N. (1956) *Studies in Intersectoral Relations.* Einar Harcks Forlag & North-Holland Publishing Company. Copenhague & Amsterdam.

• Robles, L. e Sanjuán, J. (2005) "Análisis Comparativo de las Tablas Input-Output en el Tiempo". *Estadística Española.* 27, n^{o} 158, 143-177.

• Sánchez-Chóliz, J. e Duarte, R. (2003) "Production Chains and Linkage Indicators". *Economics Systems Research.* 15 (4), 481-94.

• Schaffer, W. (1999) *Regional Impact Models.* Manual dispoñíbel en http://www.rri.wvu.edu/WebBook/Schaffer/TOC.html

• Schinnar, A. (1978) "The Leontief Dynamic Generalized Inverse". *The Quarterly Journal of Economics.* 92, (4), 641-52.

• Segura, J. (1967) "Hipótesis y Condiciones de Equilibrio en el Modelo Input-Output". *Estadística Española.* 35, 79-106.

• Segura, J. (1968) "Análisis de Precios, Costes y Regional. Algunos Problemas Metodológicos del Modelo Input-Output". *Estadística Española.* 41, 51-73.

• Stone, R. e Brown, A (1962) *A Computable Model of Economic Growth.* Vol I. Londres, Chapman and Hall.

• Svensson L. e Widell, L. M. (2004) *Estimation of Commodity by Commodity IO Matrices.* Orebro University W.P. 14-2004.

• ten Raa, Chakraborty, D. e Small, J. A (1984) "An Alternative Treatment of Secondary Products on Input-Output Analysis". *Review of Economics and Statistics.* 66, 88-97.

• ten Raa, T. e Rueda-Cantuche, J.M. (2003) "The Construtction of Input-Output Coefficients Matrices in an Axiomastic Context: Some Further Considerations". *Economics Systems Research,* 15 (4), 439-55.

• ten Raa, T. e Rueda-Cantuche, J.M. (2004) *"Secondary products in the Andalusian Economy".* Documento en PDF dispoñíbel en http://www.ecomod.net/conferences/iioa2004.

• ten Raa, T. e Wolff, E. (1991) "Secondary Products and the Measurement of Poductivity Growth". *Regional Science and Urban Economics.* 21, 581-615.

• ten Raa, T. e Wolff, E. (2001) "Outsourcing of Services and the Productivity Recovery in U.S. Manufacturing in the 1980s and 1990s" *Journal of Productivity Analysis.* 16, 149-65.

• United Nations (1999) "Hanbook of Input-Output Table Compilation and Analysis". *Handbook of National Accounting. Studies in Methods.* Series F, N^o 74. New York.

• Viet, V. (1994) "Practices in Input-Output Table Compilation". *Regional Science and Urban Economics.* 24, 27-54.

• Waugh, F. V. (1950) "Inversion of the Leontief Matrix by Power Series". *Econometrica.* 18 (2), 142-54.

• Zhao, Jinwen (2002) "The Techniques of Compiling the Rectangular UV Input-Output Table under the Hypothesis of Product Technology". Documento presentado na *14th International Input-Output Conference*, outubro, 10-15. Montreal.

Apéndice matemático

Alxebras de Banach

Denotaremos por $M_n(\mathbb{R})$ ao conxunto de matrices finitas cadradas de orde n con coeficientes reais.

Para

$$A = (\alpha_{ij}), \quad 1 \leq i \leq n \;\text{ e }\; 1 \leq j \leq n$$

i é o índice da fila e j é o da columna.

Para $A = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, $B = (\beta_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ defínense;

$$A + B = (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) \quad \text{e} \quad \lambda A = (\lambda\alpha_{ij}),$$

respecto das operacións anteriores, suma de matrices cadradas e produto por un escalar $M_n(\mathbb{R})$ é un espazo vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Ademais, en $M_n(\mathbb{R})$ defínese o produto de matrices;

$$A \cdot B = (\alpha_{ij}) \cdot (\beta_{ij}) = (\gamma_{ij}),$$

onde $\gamma_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kj}$ e temos que:

O produto é asociativo: $\forall\; A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$, $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

O produto é distributivo respecto da suma: $\forall\; A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Existe elemento neutro respecto ao produto: $\exists\; I_n \in M_n(\mathbb{R}) /\; A \cdot I_n = I_n \cdot A, \forall A \in M_n(\mathbb{R})$.

Proposición 1.-

A aplicación

$$\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^+ \\ A & \rightsquigarrow & \|A\| = \sup\limits_i(\sum\limits_j |\alpha_{ij}|) \end{array}$$

é unha norma en $M_n(\mathbb{R})$.

$M_n(\mathbb{R})$ é pois un espazo normado.

Proposición 2.-

$\forall\ A \in M_n(\mathbb{R})$ e $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$, $\|A \cdot x\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|A\|_{M_n(\mathbb{R})} \cdot \|x\|_{\mathbb{R}^n}$.

A compoñente i-ésima de $A \cdot x$ é: $(A \cdot x)_i = \sum\limits_j \alpha_{ij} x_j$ e entón

$$\|A \cdot x\|_{\mathbb{R}^n} = \sup_i |(A \cdot x)_i| = \sup_i \left|\sum_j \alpha_{ij} x_j\right| \leq \sup_i(\sum_j |\alpha_{ij}|\,|x_j|),$$

pero, $\forall j$, $|x_j| \leq \sup\limits_i |x_j| = \|x\|_{\mathbb{R}^n}$ temos que;

$$\sup_i(\sum_j |\alpha_{ij}|\,|x_j|) \leq \|A\|_{M_n(\mathbb{R})} \cdot \|x\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Proposición 3.-

$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Proposición 4.-

$M_n(\mathbb{R})$ é completo.

$M_n(\mathbb{R})$ é así un espazo vectorial normado completo (espazo de Banach). Ademais en $M_n(\mathbb{R})$ dispoñemos dunha lei de composición interna, o produto de matrices cadradas, que é asociativa, admite elemento neutro I e é distributiva respecto á suma. A norma introducida en $M_n(\mathbb{R})$ é compatíbel co produto no sentido de que $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ e $\|I\| = 1$.

Diremos que $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ con esta norma é un **álxebra de Banach con unidade I.**

Teorema 1.-

Sexa $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. A é inversíbel $\Leftrightarrow \exists\ B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, B inversíbel e $\left\|I - B^{-1}A\right\| < 1$.

E ademais a aplicación $\phi : \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ definida por

$$\phi(X) = B^{-1} + (I - B^{-1}A)X$$

é contracción en $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ que admite un punto fixo único $\bar{X} = A^{-1}$ e $\forall\ X_0 \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ a sucesión matricial X_0, $X_1 = \phi(X_0)$, ..., $X_n = \phi(X_{n-1})$, ...converxe a $\bar{X} = A^{-1}$ (**Teorema do punto fixo**).

NOTA:

A aplicación

$$\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^+ \\ A & \rightsquigarrow & \|A\|^* = \sup\limits_j (\sum\limits_i |\alpha_{ij}|), \end{array}$$

tamén é unha norma en $M_n(\mathbb{R})$, polo tanto $M_n(\mathbb{R})$ é un espazo normado (en relación a esta norma).

Verifícase que $\|A \cdot B\|^* \leq \|A\|^* \cdot \|B\|^*$ [15], $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e $M_n(\mathbb{R})$ é completo,.

Entón $M_n(\mathbb{R})$ tamén é un espazo vectorial normado completo (espazo de Banach). E ademais en $M_n(\mathbb{R})$ dispoñemos dunha lei de composición interna, o produto de matrices cadradas, que é asociativa, admite elemento neutro I e é distributiva respecto á suma. A norma introducida en $M_n(\mathbb{R})$ é compatíbel co produto no sentido de que $\|A \cdot B\|^* \leq \|A\|^* \cdot \|B\|^*$ e $\|I\|^* = 1$.

En definitiva, $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ con esta outra norma tamén é un **álxebra de Banach con unidade I.**

Matrices de diagonal dominante

Definición 1.-

Sexa $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, diremos que A é de diagonal dominante por filas, se $\forall\ i$, $1 \leq i \leq n$,

$$|\alpha_{ii}| > \sum_{j \neq i} |\alpha_{ij}|\,.$$

[15] Véxase Waugh (1953, p. 147).

O que significa que para toda fila o termo da diagonal en valor absoluto é estritamente maior que a suma dos valores absolutos dos restantes termos da fila.

De forma análoga definimos a diagonal dominancia por columnas;

$$\forall j, 1 \leq j \leq n, \quad |\alpha_{jj}| > \sum_{i \neq j} |\alpha_{ij}| .$$

Se unha matriz $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ é de diagonal dominante por filas, a súa trasposta A^t é diagonal dominante por columnas e reciprocamente.

Proposición. 5-

Se $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ é de diagonal dominante, entón é inversíbel.

En efecto $\left\| I - B^{-1}A \right\| < 1$.

Sendo $B = (b_{ij})$ unha matriz diagonal, onde os $b_{ii} = \alpha_{ii}$ e $b_{ij} = 0$, se $i \neq j$.

Matrices de Leontief

Definición 2.-

Diremos que $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ é **de Leontief** se $\forall\ i, 1 \leq i \leq n$, $\alpha_{ii} > 0$ e $\forall\ i \neq j$, $\alpha_{ij} \leq 0$.

Proposición 6.-

Se $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ é diagonal dominante e ademais é de Leontief, entón A inversíbel e $A^{-1} \geq 0$.

Teorema 2.-

Sexa $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ e $A \geq 0$, se λ é autovalor de A, entón $|\lambda| \leq \|A\|$.

Teorema 3.-

Sexa $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, $A \geq 0$ e tal que $\forall\ i$, $\sum_j \alpha_{ij} = a = \|A\|$, entón $a = \|A\|$ é autovalor real máximo que admite o $\bar{1} = (1, 1, ..., 1)$ como autovector.

Teorema 4.-

Sexa $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, $A \geq 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda > \|A\|$, entón $(\lambda I - A)$ é inversíbel e $(\lambda I - A)^{-1} \geq 0$.

Modelo aberto de Leontief

As notacións empregadas son as seguintes;

x_{ij} = fluxo da rama i á rama j.

x_i = produción total da industria i.

y_i = demanda final (neta de importacións) do produto i.

De aí, que matricialmente se pode expresar de acordo a;

$$x = Xi + y.$$

Apoiándonos na definición dos coeficientes ténicos totais podemos escribir o sistema de modo alternativo;

$$(I - A)x = y.$$

Estamos diante dun sistema de n ecuacións con n incógnitas. Entón, dado o vector y e suposta constante a tecnoloxía durante un período de tempo (A constante) poderemos resolver o sistema, ou sexa, calcular $x = (x_1, x_{2,\ldots,}x_n)$ sempre que sexa de Cramer; é dicir, se $(I - A)$ é inversíbel.

Supoñemos que $y \geq 0$ e polo menos para un i, $y_i > 0$, pois no caso contrario estaríamos na situación do modelo cerrado. Ademais, aínda que $(I - A)$ sexa inversíbel, x debe ser maior que cero para que a solución teña significado económico.

Dado que $A \geq 0$, a admite un autovalor real máximo λ_m (Perron-Frobenius) e $\forall\lambda > \lambda_m$, $(\lambda I - A)$ é inversíbel e $(\lambda I - A)^{-1} \geq 0$. Como temos que $Ax = x - y$ e $x \geq 0$, $y \neq 0$ o autovalor real máximo λ_m de A é tal que $\lambda_m < 1$ e logo para $\lambda = 1 > \lambda_m$, $(I - A)$ é inversíbel e $(I - A)^{-1} \geq 0$. De aí que de $(I - A)x = y$ resulta a solución $x = (I - A)^{-1}y \geq 0$.

Inversa xeralizada de Moore-Penrose

Definición 3.-

Sexa a matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, decimos que unha matriz A_x de orde $n \times m$ é **inversa xeralizada de Moore-Penrose,** si e soamente si, se verifica que

$$AA_xA = A. \tag{P.1}$$

$$AA_x \text{ é simétrica.} \tag{P.2}$$

$$A_xA \text{ é simétrica.} \tag{P.3}$$

$$A_xAA_x = A_x. \tag{P.4}$$

Proposición 7.-

Dada unha matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, cúmprese que:

(i) Sempre existe A_x.

(ii) A_x é única.

Proposición 8.-

Dada unha matriz A de orde $m \times n$ e a súa inversa xeralizada A_x, verifícase que:

(i) $(A_x)_x = A$

(ii) $(A')_x = (A_x)'$

(iii) Se $m = n$ e $|A| \neq 0 \implies A^{-1} = A_x$

Proposición 9.-

Dada unha matriz A de orde $m \times n$, cúmprese que:

(i) Se $m \geq n$ e $rg(A) = n$ entón

$$A_x = (A'A)^{-1}A'.$$

E ademais $A_xA = I_n$.

(ii) Se $m \leq n$ e $rg(A) = n$ entón

$$A_x = A'(AA')^{-1}.$$

E ademais $AA_x = I_m$.

(iii) Se $rg(A) = r \leq mín\{m, n\}$ entón a inversa xeralizada de A é

$$A_x = C_x B_x,$$

sendo B_x e C_x as inversas xeralizadas, respectivamente, das matrices $B \in M_{m\times r}(\mathbb{R})$ e $C \in M_{r\times n}(\mathbb{R})$ de rango r tales que $A = BC$.

Proposición 10.-

Dado o sistema compatíbel;

$$Ax = b,$$

sendo $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $b \in \mathbb{R}^m$; verifícase que existe solución única $x^* \iff A_x A = I_n$, sendo A_x a inversa xeralizada da matriz A.

Definición 4.-

Dado o sistema $Ax = b$ e a función;

$$f(x) = Ax - b$$

decimos que x^* *solución aproximada mínimo cuadrática é de norma mínima* (**NMmc**), si e soamente si, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que;

$$Q(x) = f'(x)f(x) = f'(x^*)f(x^*),$$

tense que;

$$\|x\|^2 = x'x > (x^*)'x^* = \|x^*\|^2,$$

sendo $\|x\|$ a norma euclídea.

Proposición 11.-

Dado o sistema incompatíbel;

$$Ax = b,$$

con $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$; a súa solución **NMmc** é única e está dada por;

$$x^* = A_x b.$$

Anexos

A.1. Táboas simétricas a partir das táboas de orixe e destino da economía andaluza

Táboa de Orixe p.b. (Interior) de Andalucía 1995

		Ramas de actividade principal				**Oferta interior p.b.**
		1	2	3	4	
		Primario	Industria	Construción	Servizos	
1	Produtos da agricultura, a gandeiría, a caza, a silvicultura, a pesca e a acuicultura	1.101.274	11.221	0	2.780	**1.115.275**
2	Produtos das industrias extractivas, produtos manufacturados e enerxéticos	14.688	4.630.473	1.649	15.261	**4.662.071**
3	Traballos de construción	0	13.016	2.008.285	4.418	**2.025.719**
4	Servizos de comercio ao por maior e polo miúdo, de reparación, de hostelería, de transporte, almacenamento e comunicacións	0	29.629	13.644	4.360.678	**4.403.951**
5	Servizos de intermediación financieira, inmobiliarios e de aluguer e servizos empresiariais	513	50.989	3.513	2.098.015	**2.153.030**
6	Outros servizos	0	719	0	2.622.265	**2.622.984**
	Produción por ramas de actividade p.b.	**1.116.475**	**4.736.047**	**2.027.091**	**9.103.417**	**16.983.030**

Matriz de coeficientes de especialización

		Ramas de actividade principal			
		1	2	3	4
		Primario	Industria	Construción	Servizos
1	Produtos da agricultura, a gandeiría, a caza, a silvicultura, a pesca e a	0,9864	0,0024	0	0,0003
2	Produtos das industrias extractivas, productos manufacturados e	0,0132	0,9777	0,0008	0,0017
3	Traballos de construción	0	0,0027	0,9907	0,0005
4	Servizos de comercio ao por maior e polo miúdo, de reparación, de hostelería, de transporte, almacenamento	0	0,0063	0,0067	0,4790
5	Servizos de intermediación financieira, inmobiliarios e de aluguer e servizos	0,0005	0,0108	0,0017	0,2305
6	Outros servizos	0	0,0002	0	0,2881

Matriz de coeficientes de mercado

		Ramas de actividade principal			
		1	2	3	4
		Primario	Industria	Construción	Servizos
1	Produtos da agricultura, a gandeiría, a caza, a silvicultura, a pesca e a	0,9874	0,0101	0	0,0025
2	Produtos das industrias extractivas, produtos manufacturados e	0,0032	0,9932	0,0004	0,0033
3	Traballos de construción	0	0,0064	0,9914	0,0022
4	Servizos de comercio ao por maior e polo miúdo, de reparación, de hostelería, de transporte, almacenamento	0	0,0067	0,0031	0,9902
5	Servizos de intermediación financieira, inmobiliarios e de aluguer e servizos	0,0002	0,0237	0,0016	0,9744
6	Outros servizos	0	0,0003	0	0,9997

Táboa de Destino p.b. (Interior) de Andalucía 1995

	Ramas de actividade principal: Primario	Industria	Construción	Servizos	**Demanda intermedia**	Demanda final	Produción por produtos
	Consumos intermedios a prezos básicos						
Produtos da agricultura, a gandeiría, a caza, a silvicututa, a pesca e a acuicultura	54.899	430.990	18	24.937	**510.844**	604.431	1.115.275
Produtos das industrias extractivas, produtos manufacturados e enerxéticos	91.420	797.115	310.617	480.213	**1.679.365**	2.982.706	4.662.071
Traballos de construción	16.918	7.774	355.054	63.462	**443.208**	1.582.511	2.025.719
Servizos de comercio ao por maior e polo miúdo, de reparación, de hostelería, de transporte, almacenamento e comunicacións	58.391	227.168	94.901	648.510	**1.028.970**	3.374.981	4.403.951
Servizos de intermediación financieira, inmobiliarios e de aluguer e servizos empresiariais	7.481	150.560	55.552	1.105.988	**1.319.581**	833.449	2.153.030
Outros servizos	1.735	1.606	26	107.262	**110.629**	2.512.355	2.622.984
Total consumos intermedios interiorres	**230.844**	**1.615.213**	**816.168**	**2.430.372**	**5.092.597**	**11.890.433**	**16.983.030**
Produción por ramas de actividade	1.116.475	4.736.047	2.027.091	9.103.417	**16.983.030**		

Matriz de coeficientes técnicos interiores (non homoxéneos)

	Ramas de actividade principal			
	Primario	Industria	Construción	Servizos
Produtos da agricultura, a gandeiría, a caza, a silvicultura, a pesca e a acuicultura	0,0492	0,0910	0,0000	0,0027
Produtos das industrias extractivas, produtos manufacturados e enerxéticos	0,0819	0,1683	0,1532	0,0528
Traballos de construción	0,0152	0,0016	0,1752	0,0070
Servizos de comercio polo maior e polo miúdo, de reparación, de hostelería, de transporte, almacenamento e comunicacións	0,0523	0,0480	0,0468	0,0712
Servizos de intermediación financieira, inmobiliarios e de aluguer, e servizos empresariais	0,0067	0,0318	0,0274	0,1215
Outros servizos	0,0016	0,0003	0,0000	0,0118
Total por ramas de actividade	**0,2068**	**0,3410**	**0,4026**	**0,2670**

Matriz de coeficientes de distribución interiores (non homoxéneos)

	Ramas de actividade principal				**Total por sectores**
	Primario	Industria	Construción	Servizos	
Produtos da agricultura, a gandeiría, a caza, a silvicultura, a pesca e a acuicultura	0,0492	0,3864	0,0000	0,0224	**0,4580**
Produtos das industrias extractivas, produtos manufacturados e enerxéticos	0,0196	0,1710	0,0666	0,1030	**0,3602**
Traballos de construción	0,0084	0,0038	0,1753	0,0313	**0,2188**
Servizos de comercio polo maior e polo miúdo, de reparación, de hostelería, de transporte, almacenamento e comunicacións	0,0133	0,0516	0,0215	0,1473	**0,2336**
Servizos de intermediación financieira, inmobiliarios e de aluguer, e servizos empresariais	0,0035	0,0699	0,0258	0,5137	**0,6129**
Outros servizos	0,0007	0,0006	0,0000	0,0409	**0,0422**

Matriz de consumos intermedios (interiores) producto por produto (H. T. Industria)

$X^{d}C'$

55180,29	422146,60	1214,42	14641,63	10412,45	7248,60	**510844**
92210,53	781606,45	310159,05	237106,99	119834,25	138447,73	**1679365**
16725,46	8218,49	351812,21	32837,72	15332,53	18281,59	**443208**
58332,26	224036,60	94959,62	312706,29	152095,59	186839,63	**1028970**
8073,61	149201,47	55987,16	531101,24	256611,70	318605,83	**1319581**
1747,94	1772,86	82,23	51390,38	24738,22	30897,37	**110629**
						5092597

Matriz de consumos intermedios (interiores) rama por rama (H. T. Industria)

$D'X^{d}$

	Primario	Industria	Construción	Servizos	
Primario	54499,61	428126,62	1009,62	26400,39	
Industria	92031,93	801193,05	312747,37	508201,89	
Construción	16997,84	8938,50	352492,81	66899,44	
Servizos	67314,62	376954,83	149918,20	1828870,28	
	230844	**1615213**	**816168**	**2430372**	**5092597**

Matriz de coeficientes técnicos (interiores) produto por produto (H.T. Produto)

$$A_o(X^d,Z)=X^dZ_x$$

0,0486	0,0929	-0,0001	0,0033	0,0023	0,0016
0,0807	0,1707	0,1540	0,0687	0,0342	0,0401
0,0153	0,0010	0,1767	0,0094	0,0042	0,0049
0,0524	0,0477	0,0465	0,0932	0,0452	0,0557
0,0063	0,0305	0,0264	0,1591	0,0768	0,0955
0,0016	0,0002	-0,0001	0,0154	0,0074	0,0093
0,2050	**0,3431**	**0,4034**	**0,3492**	**0,1702**	**0,2071**

A.2. Cálculo da inversa de Leontief dunha forma alternativa á tradicional serie de potencias

	Sector 1	Sector 2	Sector 3	D Intermedia
Sector 1	10	12	10	32
Sector 2	20	20	19	59
Sector 3	10	20	12	42
I Inter	40	52	41	
I Primarios	35	24	39	
Produción	75	76	80	

Inc D Final
1
0
0

$$A=\begin{bmatrix} 0{,}1333 & 0{,}1579 & 0{,}125 \\ 0{,}2667 & 0{,}2632 & 0{,}2375 \\ 0{,}1333 & 0{,}2632 & 0{,}15 \end{bmatrix} \qquad [I-K^{-1}(I-A)]=\begin{bmatrix} 0{,}0000 & 0{,}1822 & 0{,}1442 \\ 0{,}3619 & 0{,}0000 & 0{,}3223 \\ 0{,}1569 & 0{,}3096 & 0{,}0000 \end{bmatrix}$$

$$(I-A)^{-1}=\begin{bmatrix} 1{,}3210 & 0{,}3915 & 0{,}3037 \\ 0{,}6053 & 1{,}6870 & 0{,}5604 \\ 0{,}3946 & 0{,}5837 & 1{,}3976 \end{bmatrix}$$

$$x=(I+A+A^2+\ldots)y$$

1	0	0
0,1333	0,2667	0,1333
0,0765	0,1374	0,1080
0,0454	0,0822	0,0626
0,0269	0,0486	0,0371
0,0159	0,0288	0,0219
0,0094	0,0170	0,0130
0,0056	0,0101	0,0077
0,0033	0,0060	0,0045
1,3163	**0,5967**	**0,3880**

$$x=(I+[I-K^{-1}(I-A)]+[I-K^{-1}(I-A)]^2+\ .....)K^{-1}y$$

1,1538	0	0
0	0,4176	0,1810
0,1022	0,0583	0,1293
0,0293	0,0787	0,0341
0,0192	0,0216	0,0289
0,0081	0,0163	0,0097
0,0044	0,0061	0,0063
0,0020	0,0036	0,0026
0,0010	0,0016	0,0014
1,3201	**0,6037**	**0,3933**

A.3. Estabilidade económica con valores negativos no vector de inputs primarios

	Sector 1	Sector 2	Sector 3	D Intermedia
Sector 1	15	18	20	53
Sector 2	2	14	8	24
Sector 3	12	9	10	31
I Intermedios	29	41	38	
I Primarios	31	**-1**	14	
Produción	60	40	52	

A=

0,25	0,45	0,3846	1,0846
0,0333	0,35	0,1538	0,5372
0,2000	0,225	0,1923	0,6173
0,4833	1,025	0,7308	

A^2=

0,1544	0,3565	0,2393	0,7503
0,0508	0,1721	0,0963	0,3191
0,0960	0,2120	0,1485	0,4565
0,3012	0,7407	0,4841	

$[I-K^{-1}(I-A)]$=

0	0,6000	0,5128	1,1128
0,0513	0	0,2367	0,2880
0,2476	0,2786	0	0,5262
0,2989	0,8786	0,7495	

$[I-K^{-1}(I-A)]^2$=

0,1578	0,1429	0,1420	0,4426
0,0586	0,0967	0,0263	0,1816
0,0143	0,1486	0,1929	0,3558
0,2306	0,3881	0,3612	

$(I-A)^{-1}$=

1,6972	1,5574	1,1048
0,1997	1,8303	0,4437
0,4759	0,8955	1,6353

A.4. Modificación do vector de prezos para lograr un vector de inputs primarios positivo

	Sector 1	Sector 2	Sector 3
Sector 1	15	9	8
Sector 2	10	8	9
Sector 3	4	15	12
I Intermedios	29	32	29
I Primarios	10	-2	40
Produción	39	30	69

A =	0,3846	0,3	0,1159
	0,2564	0,26666667	0,1304
	0,1026	0,5000	0,1739
	0,7436	1,0667	0,4203
w =	**0,2564**	**-0,0667**	**0,5797**
p =	1	1	1

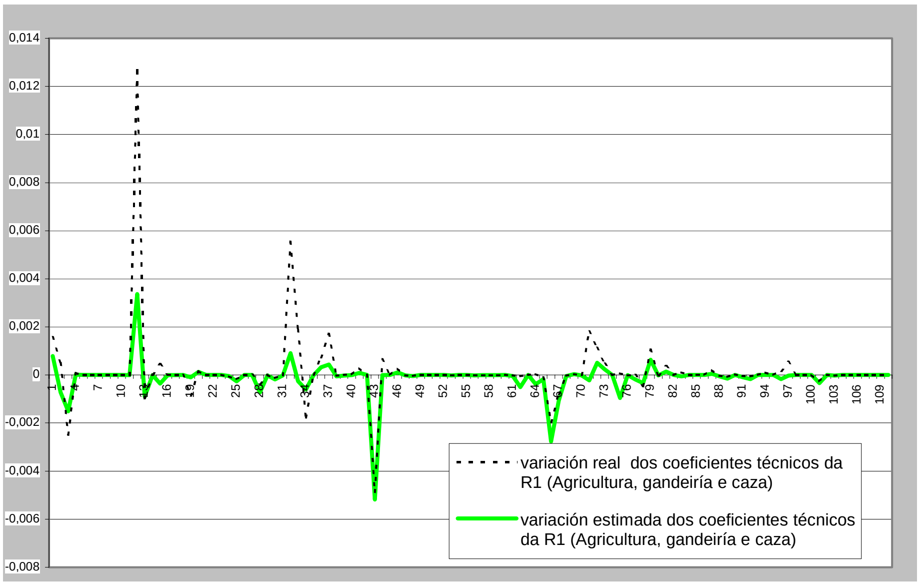
I-A =	0,6154	-0,3	-0,1159
	-0,2564	0,73333333	-0,1304
	-0,1026	-0,5000	0,8261
	0,2564	**-0,0667**	**0,5797**
$(I-A)^{-1}$ =	2,2382	1,2661	0,5141
	0,9324	2,0556	0,4554
	0,8422	1,4014	1,5500

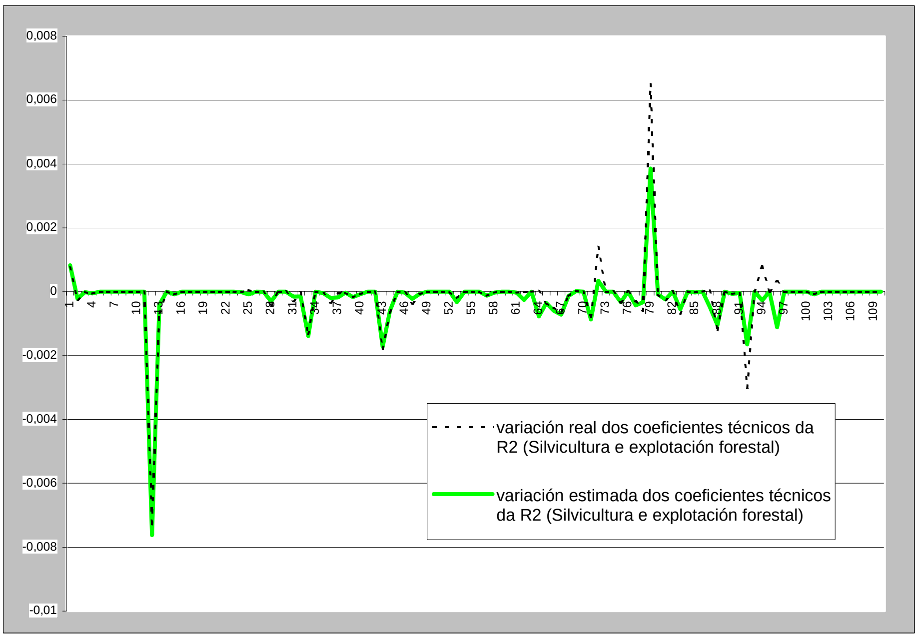
$$p^t = w^t (I-A)^{-1}$$

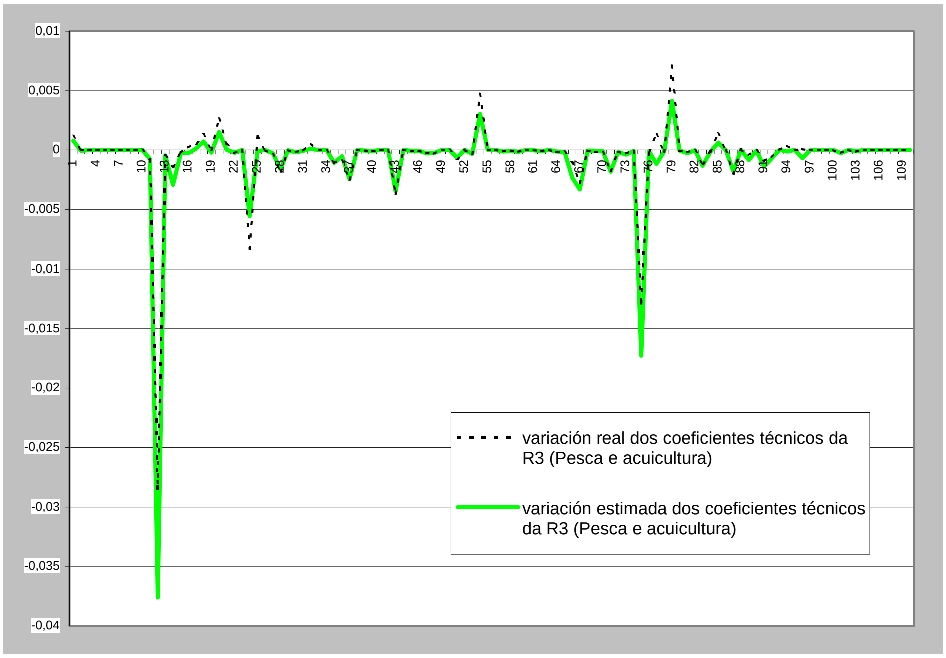
w* =	0,2	0,1	0,54
p* =	0,9957	1,2155	0,9854

A.5. A eficacia do método biproporcional con información limitada

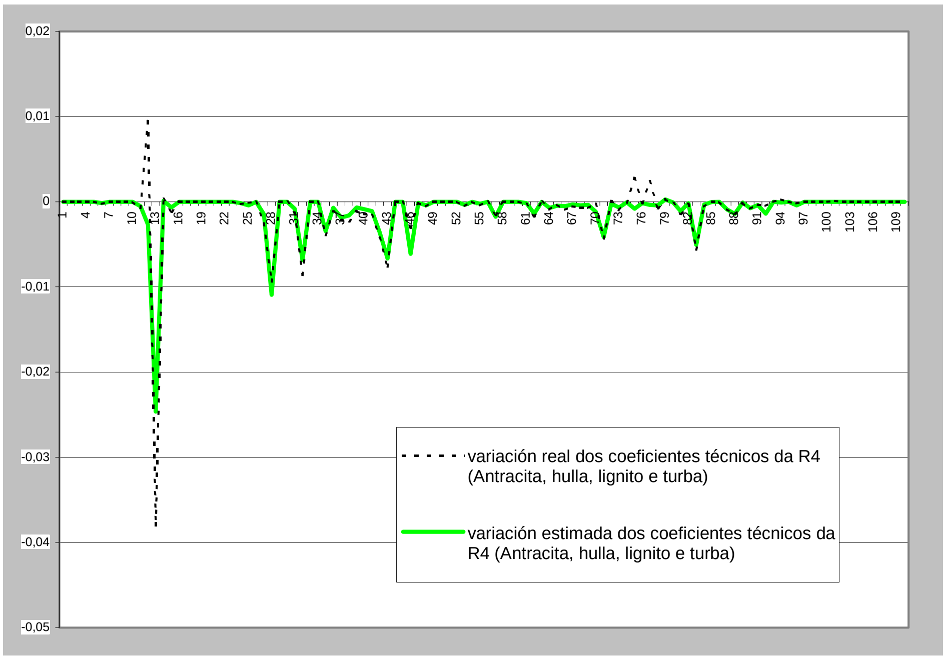
Gráficas comparativas entre as variacións reais e as estimadas (en base ao método) dos coeficientes técnicos interiores dalgunhas ramas da economía española 1998-2000.



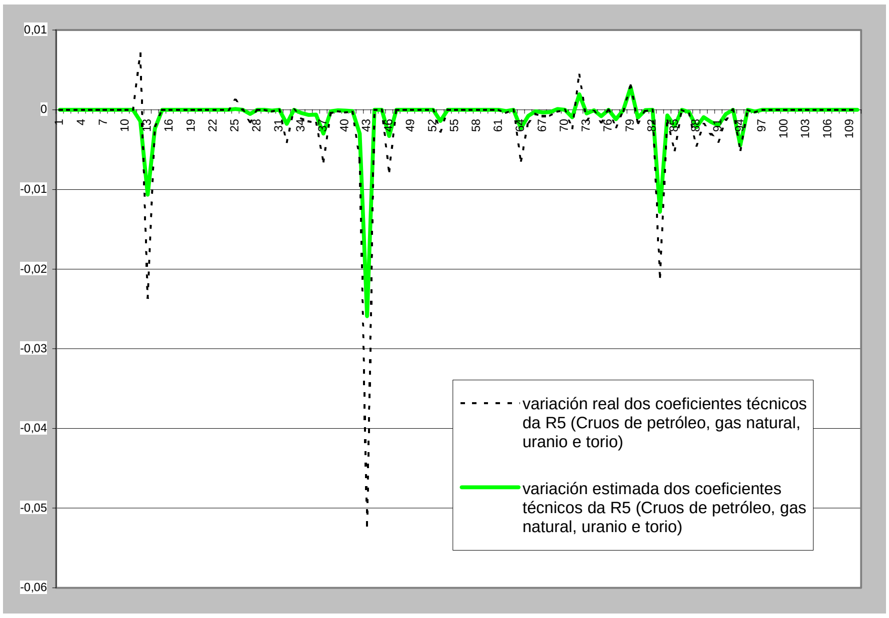


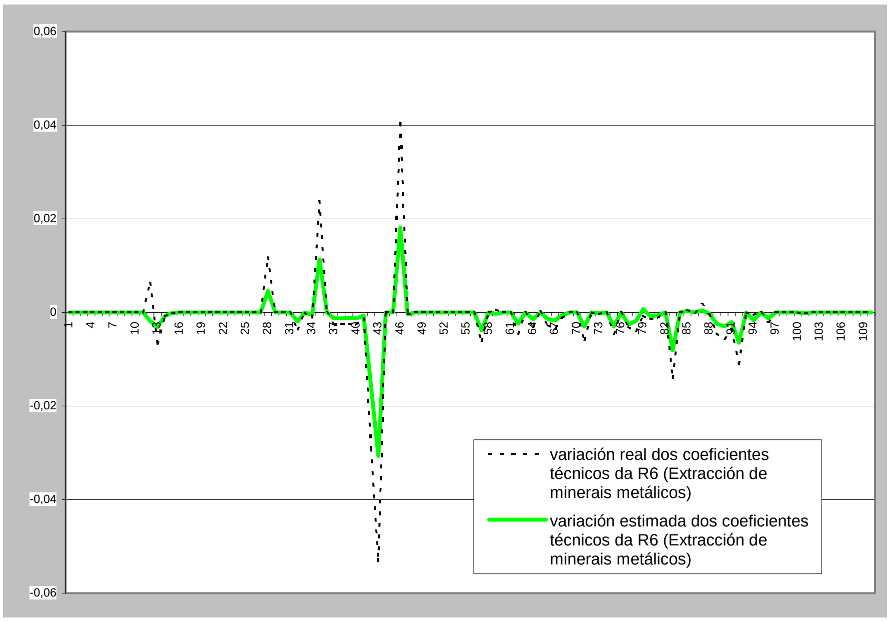


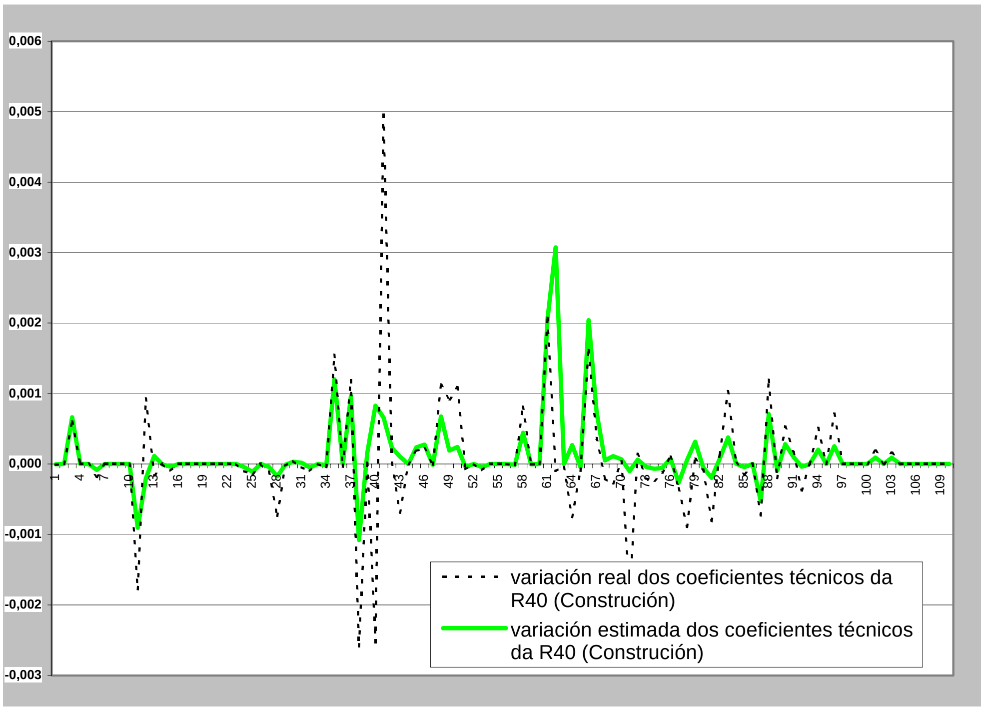
0,01
0,005
0
-0,005
-0,01
-0,015
-0,02
-0,025
-0,03
-0,035
-0,04
variación real dos coeficientes técnicos da R3 (Pesca e acuicultura)
variación estimada dos coeficientes técnicos da R3 (Pesca e acuicultura)

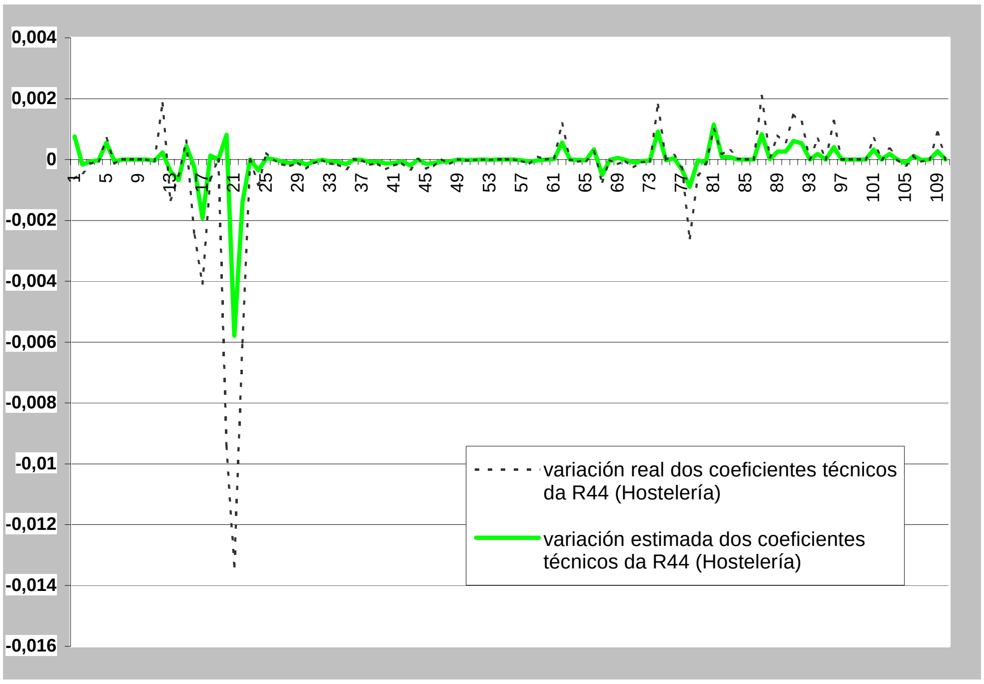


0,02
0,01
0
-0,01
-0,02
-0,03
-0,04
-0,05
variación real dos coeficientes técnicos da R4 (Antracita, hulla, lignito e turba)
variación estimada dos coeficientes técnicos da R4 (Antracita, hulla, lignito e turba)


0,01
0
-0,01
-0,02
-0,03
-0,04
-0,05
-0,06
variación real dos coeficientes técnicos da R5 (Cruos de petróleo, gas natural, uranio e torio)
variación estimada dos coeficientes técnicos da R5 (Cruos de petróleo, gas natural, uranio e torio)


0,06
0,04
0,02
0
-0,02
-0,04
-0,06
variación real dos coeficientes técnicos da R6 (Extracción de minerais metálicos)
variación estimada dos coeficientes técnicos da R6 (Extracción de minerais metálicos)


0,006
0,005
0,004
0,003
0,002
0,001
0,000
-0,001
-0,002
-0,003
variación real dos coeficientes técnicos da R40 (Construción)
variación estimada dos coeficientes técnicos da R40 (Construción)


0,004
0,002
0
-0,002
-0,004
-0,006
-0,008
-0,01
-0,012
-0,014
-0,016
variación real dos coeficientes técnicos da R44 (Hostelería)
variación estimada dos coeficientes técnicos da R44 (Hostelería)

A.6. Actualización da inversa de Leontief de acordo ao método biproporcional con información limitada

	sector 1	sector 2	sector 3	D Intermedia	D Final	Produción
sector 1	22	15	14	51	45	96
sector 2	15	16	9	40	39	79
sector 3	18	9	19	46	49	95

D Inter (t)	D Final (t)	Prod (t)
53	49	102
42	41	83
47	47	94

	0,229	0,190	0,147
A(0)=	0,156	0,203	0,095
	0,188	0,114	0,200

	1,453	0,391	0,314	**2,158**
$(I-A)^{-1}(0)$=	0,331	1,364	0,223	**1,918**
	0,388	0,286	1,355	**2,029**
	2,171	**2,041**	**1,892**	

Actualización sobre a inversa de Leontief

	1,418	0,395	0,348	**2,160**
$(I-A)^{-1}$=	0,319	1,364	0,244	**1,926**
	0,352	0,269	1,398	**2,019**
	2,089	**2,028**	**1,989**	

Actualización sobre a matriz de coeficientes técnicos

	1,442	0,386	0,330	**2,158**
$(I-A)^{-1}$=	0,326	1,363	0,236	**1,926**
	0,373	0,278	1,368	**2,020**
	2,142	**2,027**	**1,935**	