UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
Departamento de Didáctica y Organización Escolar
Facultad de Ciencias de la Educación

TESIS DOCTORAL

LA MEDIACIÓN DE SQUEAK ETOYS EN EL DESARROLLO DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN: UNA EXPERIENCIA CONSTRUCCIONISTA EN UNA ESCUELA DE GALICIA

Directora: Dra. Adriana Gewerc Barujel

Autor: Cerapio Nicéforo Quintanilla Cóndor

Santiago de Compostela
Diciembre de 2012

ADRIANA GEWERC BARUJEL, Profesora Titular de Didáctica y Organización Escolar de la Universidad de Santiago de Compostela, como Directora de la Tesis Doctoral realizada por Dn **CERAPIO NICÉFORO QUINTANILLA CÓNDOR**, titulada **“ La mediación de Squeak Etoys en el desarrollo del concepto de fracción: una experiencia construccionista en una escuela de Galicia”**

HACE CONSTAR

Que dicha Tesis Doctoral reúne los requisitos académicos y científicos necesarios para proceder a su lectura y defensa pública.

Santiago de Compostela, 20 de diciembre de 2012

Fdo. Adriana Gewerc Barujel

Esta tesis está dedicada a la memoria de mi padre y con todo amor a mi madre, Juana.

AGRADECIMIENTOS

Mi especial reconocimiento a la *Dra. Adriana Gewerc Barujel*, directora de la tesis, por creer en mí, por la paciencia y dedicación que me ha brindado para realizar este trabajo; siempre minuciosa y clara en sus lecturas y consideraciones respecto de la Tesis. Compartir, aprender y trabajar al lado de ella ha sido, sin duda, una experiencia personal y profesionalmente enriquecedora.

Mi gratitud a *Fernando Fraga Varela*, por conducirme a este mundo de la teoría del construccionismo. Gracias profesor Fernando por su apoyo, sin su ayuda hubiese sido imposible concluir el trabajo emprendido.

A la Dra. *Lourdes Montero Mesa*, por su apoyo incondicional como amiga, como madre, como maestra durante el pasaje de este trabajo hasta su culminación.

A *Vilma* mi compañera de viaje, por entenderme y por la paciencia, y a mis hijos *Kenny* y *Max* por su comprensión de mi ausencia, descuidando su formación. Gracias por apoyarme. Asimismo, a mis *hermanos y hermanas* por su apoyo durante mi estancia.

Mi agradecimiento al Dr. José Antonio Cajaraville Pegito por su valiosa ayuda y la lectura minuciosa de la tesis con observaciones siempre pertinentes

A mis amigos (as), Vanessa Ferraces, Almudena Alonso, Laura Lodeiro, Julia Diz, Severino Lavandeira, Gabriel Suyo, Ubaldo Cayllahua, Félix Canales, Edgar Quispe y Álvaro Camposano por las valiosas sugerencias.

Mi gratitud a Cecilia Gaita y Francisco Ugarte por su aliento constante. De manera especial a un inolvidable amigo Ed Dubinsky, por inspirarme en la investigación de la matemática educativa y la teoría APOS. También a Manuel Moreira por compartir muchas horas en discusiones sobre el tema de investigación.

Expresar mi sincero agradecimiento a los miembros del *Grupo de Investigación Stellae* y a la *Red UNISIC*, por acogerme y alentarme en la culminación de la tesis.

A ***ERASMUS MUNDUS Lote 18*** por el intercambio en la Universidad de Santiago de Compostela, durante el desarrollo de la investigación.

Por último, y no por ello menos importante, quiero agradecer el apoyo ofrecido y los momentos compartidos a todas aquellas personas que me han apoyado durante toda esta larga etapa; en especial a mis amigos Héctor, Iria, Ana, Nuria, Denébola, Jéssica e Iván; a todos ellos mi gratitud.

El autor

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE GENERAL

Índice de figuras

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE CUADROS

Introducción

0. INTRODUCCIÓN

La investigación que aquí se presenta, pretende indagar cómo construyen el concepto de fracción niños de 5[to] de primaria cuando utilizan un entorno tecnológico constructivista. El trabajo describe y explica también el papel que juegan las tecnologías como herramientas educativas en el aprendizaje de las matemáticas. Para tal efecto, se enmarca, principalmente, dentro de dos teorías: el construccionismo de Seymour Papert que orienta el marco teleológico de la investigación y la teoría APOS (acción, proceso, objeto y esquema) de Ed Dubinsky que ayuda a comprender y explicar los niveles de constructos mentales que los niños/as logran alcanzar durante el proceso de su aprendizaje; ambas tienen su fundamento en las teorías de Jean Piaget.

Los medios de comunicación y las tecnologías son una parte integral de la vida de los niños en el siglo XXI. El escenario de hoy en día, está lleno de teléfonos celulares, iPods, juegos de videos, mensajería instantánea, juegos interactivos multi-jugador de video, sitios de realidad virtual, redes sociales, etc. (Brooks-Gunn y Hirschhorn Donahue (2008), Asimismo, el rápido crecimiento de la utilización de tecnologías en las escuelas ha llevado a una mayor disponibilidad y uso de ordenadores (o computadoras, expresión que se utiliza en Latinoamérica).

En tal sentido, las tecnologías podrían convertirse en herramientas para ayudar a los niños/as y al profesorado, a cubrir las necesidades educativas y a comprender mejor los conceptos e ideas que con anterioridad se veían demasiado complejas. Como tal, las tecnologías no deberían funcionar como soluciones aisladas; sino que requieren ser consideradas como herramientas de ayuda que pueden resultar idóneas para hacer frente a los desafíos del proceso de enseñanza y aprendizaje, sobre todo en el caso de la matemática, cuyo aprendizaje históricamente ha sido complejo (Friz Carrillo, Sanhueza Henríquez, Sánchez Bravo, Belmar Mellado, & Figueroa Manzi, 2008a).

Este último es uno de los motivos por los cuales se selecciona el concepto de fracción para esta investigación: su comprensión y enseñanza en el nivel escolar resultan unas de las más complejas, tanto para el profesorado como para el alumnado (Arnon, 1998; I. Harel, 1991; Y. B. Kafai, 1995; Kieren, 1976; Friz Carrillo et al., 2008). Sin embargo, numerosos antecedentes (Hutchins-Korte, 2008; Mochon & López Jarquín, 2006; Schacter, 1999; Tinio, 2002) evidencian que el uso de tecnologías permitirían un aprendizaje más significativo de este concepto. En ese contexto, se toma la decisión de tomar una herramienta tecnológica, Squeak Etoys, para que el alumnado comience a comprender el concepto de fracción, asumiendo resultados de investigaciones precedentes. Se trata de una herramienta con potencia para mediar en el aprendizaje de los niños/as, permitiendo simular diferentes situaciones utilizando conceptos matemáticos, desde los más elementales hasta los más complejos para la edad de los niños/as. Squeak Etoys difiere de otros lenguajes de programación porque está expresado en objetos y su presentación, dinámica y versátil, permite a los niños/as realizar diseños creativos.

El construccionismo es un enfoque filosófico y una teoría de la educación que fundamenta el uso de tecnologías digitales en la educación (Badilla & Chacón, 2004); promueve a que los niños construyan sus propios conocimientos en interacción con el mundo real simulando virtualmente. Asimismo, el diseño de proyectos supone un nuevo paradigma basado en actividades con ordenadores, y difiere radicalmente del uso tradicional de software computacional. Se trata de diseñar proyectos con lenguajes de programación, a partir de los cuales los niños piensan, hacen y construyen en su entorno (I. Harel, 1991).

Por lo tanto, resulta inevitable pensar que, en la actualidad, el aprendizaje de la matemáticas, no puede basarse sólo en el lápiz y el papel, sino que también podría utilizar tecnologías, a modo de herramientas o artefactos (Fraga & Gewerc, 2004), que posibiliten el aprendizaje y que potencien la creatividad, integrando los conceptos matemáticas con otras áreas de conocimiento. Como expresa Dolors Reig (2012), la educación de hoy debe promover en los niños/as la creatividad, a ser proactivo, y a tener esa inquietud de aprender e investigar constantemente.

El propósito principal del estudio estuvo centrado en comprender cómo los niños/as desarrollan el concepto de fracción utilizando el lenguaje de programación Squeak Etoys, en un ambiente construccionista, simulando, a través del diseño de proyectos, el plano de la Casa de las Ciencias de la Coruña, España. Para la evaluación de los niveles de constructos mentales alcanzados por los niños, se tomó la descomposición genética de la teoría APOS (acción, proceso, objeto y esquema), que también se ubica bajo el paradigma del constructivismo. El estudio comprende las diferentes etapas de construcción del concepto con Etoys y el uso de los elementos matemáticos; así como, su interrelación con otras áreas de las ciencias.

El trabajo de investigación se ha desarrollado utilizando la metodología cualitativa de estudios de casos en cinco etapas:

1) Análisis y construcción del marco teórico;
2) Diseño y ejecución de un proyecto con Squeak Etoys en un centro educativo
3) Recolección de datos
4) Análisis de los datos, evaluación de los resultados y
5) Conclusiones.

Para ilustrar el proceso seguido durante la investigación nos hemos permitido describir su secuencia, desde el inicio de las actividades hasta la finalización de las experiencias y el reporte de las conclusiones del trabajo, con un diagrama (ver Figura 0.1).

El capítulo 1 de este trabajo, expone el problema de investigación. Se realiza una descripción de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas (ya investigadas): la ubicación del estudio; trabajos previos relacionados con investigaciones acerca de la construcción del concepto fracciones; y trabajos que sirvieron de inspiración y sustentan la investigación. También se exponen las dimensiones a estudiar, los objetivos a alcanzar y las preguntas que guiaron el trabajo de investigación.

El Capítulo 2 aborda la problemática de las dificultades en el aprendizaje y cómo son analizadas por las diferentes teorías de la didáctica de la matemática. Allí se diferencian dificultades, errores y obstáculos y se analiza con detenimiento las aportaciones de la teoría de situaciones didácticas (TSD); antropológico-didáctico (TAD); ingeniería didáctica; socioepistemología y el enfoque ontosemiótico (EOS).

Sumado a esto, se profundiza en las teorías cognitivas. Se tomó como base principal el construccionismo de Seymour Papert, cuya fuente la encontramos en las teorías de Jean Piaget, L. Vigotsky y Jerome Bruner. El análisis comienza por explicar las bases fundamentales de la teoría de Piaget (asimilación y la acomodación y la abstracción reflexiva), luego realiza un análisis de la teoría de Vigotsky en interrelación con el trabajo sobre andamiaje de Jerome Bruner. Asimismo, en la misma línea de investigación, de base piagetiana se encuentra la teoría APOS, que permite explicar los niveles de constructos mentales de los niños a través de la descomposición genética y la triada de Piaget. Finalmente, se analiza el construccionismo, su filosofía y teoría del aprendizaje.

Estas teorías nos han permitido sentar las bases fundamentales para realizar la investigación. El construccionismo, como teoría marco orientó el proceso de construcción del concepto durante las experiencias, en las cuales niños y niñas vivieron situaciones totalmente diferente a las clases tradicionales, diseñando proyectos, trabajando en equipo, compartiendo información, participando activamente en las exposiciones, desarrollando su potencial creativo al enfrentarse al desafío de realizar una programación y una actividad realmente divertida y mediada por el lenguaje de programación Squeak Etoys.

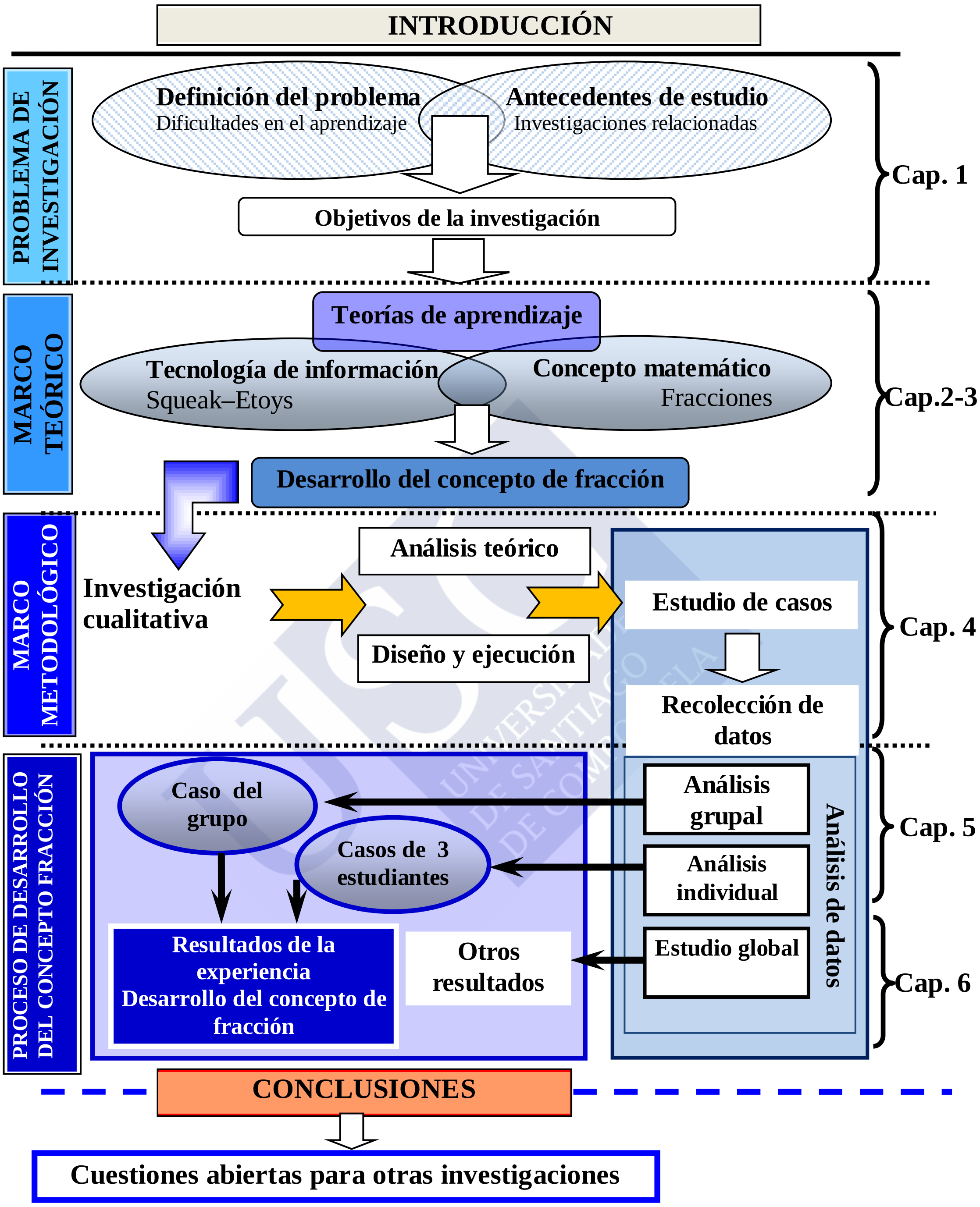


Figura 0.1. Estructura de la investigación

La teoría APOS plantea para la enseñanza tres componentes denominados ciclos ACE (actividades, discusión en clases y ejercicios), estos ciclos fueron utilizados durante el desarrollo de las experiencias, los dos primeros procesos fueron llevados a cabo en el laboratorio de informática de la escuela. Los niños/as trabajaron diseñando sus programaciones; luego discutieron del trabajo realizado, con la finalidad de resumir y aclarar resultados del proyecto. En lugar de los ejercicios, los niños continuaron desarrollando programaciones en sus hogares.

El capítulo 3 analiza las aportaciones de Squeak Etoys al proceso de enseñanza y aprendizaje además de profundizar en la génesis del concepto y significado de fracción

El capítulo 4 describe las opciones metodológicas seleccionadas para abordar el problema de estudio. Desde la selección del método (estudio de casos) a las etapas y proceso de la investigación, los instrumentos utilizados para la recolección de datos durante la experiencia y las entrevistas realizadas a dos profesores de la escuela antes y después de la experiencia.

El capítulo 5 especifica el análisis del proceso de construcción del concepto de fracción en dos momentos: uno global, que incluye a todos los participantes de la experiencia como un caso, identificando los niveles de constructos mentales alcanzados; y otro en donde se realiza un análisis de tres estudiantes con diferentes niveles de rendimiento escolar (bajo, medio y alto), con el objeto de verificar las posibles diferencias en el proceso de construcción. Estos análisis se realizan de acuerdo a los niveles propuestos en la descomposición genética del concepto de fracción, utilizando los conceptos de equilibración, asimilación y acomodación, la abstracción reflexiva y la triada de J. Piaget.

Los capítulos 6 y 7 abordan las conclusiones de la investigación.

Por último, añadir que ésta investigación significó reorientar mi desarrollo profesional hacia nuevas formas de ver el aprendizaje de las matemáticas y el uso de las tecnologías. Y este nuevo encuadre, necesariamente ha orientado también la propuesta metodológica de la investigación hacia una metodología cualitativa, menos tradicional en el campo de las investigaciones de la matemática educativa; finalmente, este enfoque posibilitó comprender y sustentar todo el proceso de la investigación.

Capítulo I:

El problema de investigación

1. CAPÍTULO I. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Definición del problema de investigación

Esta investigación pretende indagar cómo construyen el concepto de fracción niños de 5to de primaria cuando utilizan un entorno tecnológico constructivista. El amplio desarrollo del mundo tecnológico y de las comunicaciones hace posible la aparición de nuevas fórmulas educativas que podrían ayudar a superar las dificultades para con la matemática que, históricamente han tenido los escolares; sin embargo, su utilización en la enseñanza para el apoyo al aprendizaje de los estudiantes tiene aún muchas resistencias (Gewerc & Montero, 2013; Montero Mesa et al., 2007). En tal sentido, consideramos que los cambios tecnológicos con los que convivimos demandan una nueva perspectiva acerca de la enseñanza y el aprendizaje en función del uso de los recursos de las Tecnologías de Información y la Comunicación (TIC) y sus posibilidades de interacción con el mundo.

Este trabajo de investigación se centra en el nivel de educación primaria. La investigación se enfoca en uno de los conceptos matemáticos más complejos en nivel, el concepto de fracción y sus propiedades, que es parte de uno de los sistemas de números introducidos en la escuela (Kafai, 1995; Sankaran, Sampath, & Sivaswamy, 2009).

Siendo las matemáticas una de las ciencias de mayor complejidad que más dificultades de aprendizaje acarrea a los estudiantes de los diferentes niveles de la educación; la didáctica de la matemática ha generado un gran interés en desarrollar conocimientos que permitan la reorientación de la práctica educativa y la consolidación de sus procesos de enseñanza, aprendizaje y evaluación (Cerda Quintero, 2010; Rodríguez Quintana, 2005). Como resultado de esas investigaciones, en diferentes partes del mundo han nacido varias teorías del aprendizaje de las matemáticas; algunas más centradas en el proceso de aprendizaje (Dubinsky & Lewin, 1986; Papert, 1971a; Pirie & Kieren, 1992) y otras que incluyen la problemática de la enseñanza y sus métodos específicos de investigación (J.D. Godino, Font, & Wilhelmi, 2008) en la didáctica de la matemática (ver más detalle en el Capítulo II). Éstas teorías han sido desarrollados generalmente por matemáticos que estuvieron comprometidos con la educación la matemática y también por algunos psicólogos; aunque estos últimos no cuentan con un fundamento matemático.

Existen ciertas dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, aunque estas no vienen sólo de una deficiente planificación, sino que también provienen de la naturaleza propia de asignatura (Macnab y Cummine, 1992, p. 17). Podríamos enumerar estas dificultades del siguiente modo:

a) La naturaleza abstracta de los conceptos implicados

b) La complejidad de los conceptos

c) La naturaleza jerárquica de las matemáticas

d) La notación formal

e) Los algoritmos formales

f) El concepto y uso de las variables

g) Los conceptos espaciales y el pensamiento geométrico.

En una investigación realizada por Hidalgo Alonso, Maroto Sáez, y Palacios Picos (2004), denominada ¿Por qué se rechazan las matemáticas? Se obtuvieron las siguientes respuestas:

a) el auto-concepto de las matemáticas, es decir ser bueno o malo haciendo cálculo mental es un problema;

b) el rechazo hacia las matemáticas se debe en cierta medida a los profesores de matemáticas. Uno de cada dos alumnos considera al profesor causante de una visión negativa de las matemáticas; y

c) el elemento central es la percepción de dificultad y la vivencia de dicha dificultad; se consideran a la asignatura muy difícil y el 82% del alumnado rechaza las matemáticas.

Es posible también que otros factores afecten los bajos resultados que obtienen el alumnado en matemáticas; por ejemplo, Anghel y Cabrales (2010) concluyen que la profesión de los padres es predictora de los resultados. Llegan a esta conclusión relacionando datos de calificaciones en educación primaria, con las características individuales de cada alumno, la nacionalidad, el tipo de familia, el nivel educativo y profesión de los padres. También es posible encontrar explicaciones que aluden al tipo de escuela (pública o privada), fundamentalmente en lo relativo al número de estudiantes, el profesorado y sus características (tipo de contrato, experiencia), actividades extracurriculares y número de estudiantes con necesidades educativas especiales.

A todo lo anterior hay que añadir que el niño/a de educación primaria entra en una nueva fase al enfrentarse a símbolos matemáticos y ésta es difícil de concebir en las primeras etapas de su vida escolar. Al respecto, el Instituto Internacional de Planeamiento de la Educación (2003, p. 1) sostiene que "la matemática es una disciplina fascinante para aquellos que logran descubrir el atractivo en esas relaciones permanentes que se encuentran entre los números y los símbolos. Pero para la mayoría de los estudiantes – y para todo aquel que pasó por la escuela — es una especie de tortura, de jeroglífico indescifrable".

¿Por qué el concepto de fracciones? Al respecto, muchas investigaciones a nivel mundial muestran que operar con fracciones y desarrollar problemas matemáticos con fracciones es una de las principales dificultades en el nivel primario (Pirie & Kieren, 1994; Fraser, Murray, Hayward, & Erwin, 2004), a pesar de que a menudo utilizan el concepto en su vida cotidiana (Duzenli-Gokalp & Devi Sharma, 2010), éstas son muy complicadas (Duzenli-Gokalp y Sharma, 2010). Del mismo modo, la enseñanza de las fracciones es una de las tareas más difíciles para los maestros de educación primaria, por ello, un alto porcentaje de estudiantes fracasan en aprender este concepto (De León & Fuenlabrada, 1996; Sankaran et al., 2009). Además, el tema fracciones es completamente limitado para muchos estudiantes con discapacidades en el aprendizaje (Cawley & Miller, 1994; citado por Brigham, Wilson, Jones, & Moisio, 1996).

El Instituto Internacional de Planeamiento de la Educación (2003, p. 1) hace referencia, a un operativo muestral de evaluación de calidad educativa realizada por el Ministerio de Educación en la Argentina en 1993, en el que detectaron que de 10 estudiantes, 9 no sabía operar fracciones; y que después de más de 10 años continúan con dificultades de aprendizaje.

Asimismo en España, Escolano Vizcarra y Gairín Sallán (2005, p. 1) hacen referencia a un estudio realizado por el INCE (2002, p. 2) con alumnos españoles de sexto curso de Educación Primaria (12 años), en el que se refleja que de cada cuatro estudiantes tres de ellos no comprenden el concepto de fracción y sus operaciones. Otras investigaciones también redundan en lo mismo, y muestran que muchos niños tienen dificultades en la comprensión de los números racionales o fracciones en educación primaria; por ejemplo, muchos niños/as piensan que 1/3 es menor que 1/5 (Nunes, Bryant, Hurry, & Pretzlik, 2006).

En consecuencia, el problema de la comprensión de los conceptos matemáticos es complejo, no se origina en una sola causa y requiere de intervenciones desde diferentes perspectivas. Asimismo, consideramos que el contenido de fracciones será un concepto clave para comprender otros de mayor complejidad en las matemáticas. Por ejemplo, es fundamental e importante tener habilidad en el desarrollo de las fracciones para el aprendizaje del álgebra (National Mathematics Advisory Panel (NMAP), 2008), por lo tanto, merece un estudio que permita comprender el proceso de cómo los niños logran construirlo.

Sin embargo, no podemos dejar de lado el tipo de metodología que utiliza el docente, que le permite al alumnado la construcción de los conceptos que en principio presentan dificultad intrínseca. Esta investigación se propuso analizar los procesos de construcción del concepto de fracción, cuando se utiliza una tecnología con base en el construccionismo como es Squeak Etoys, la cual podría operar como mediador instrumental ayudando al alumnado a comprender conceptos que en inicio presentan dificultad.

1.1.1 Ubicación del estudio

El estudio se realiza en el contexto del sistema educativo español, en el marco curricular establecido por la LEY ORGÁNICA 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE), en una escuela real. Esto quiere decir que no se ha aislado al alumnado del contexto, a modo de laboratorio. Sino que la experiencia se realiza en una escuela, en donde la institución, y sus normas explícitas e implícitas, entran en juego. De allí que también es sugerente la pregunta ¿Qué sucede cuando se realiza una experiencia de este tipo que es nueva para el docente y la institución? ¿Qué limitaciones y posibilidades ofrece? ¿Qué cuestiones se ponen en juego para el docente de clase? ¿Cómo responden los niños ante una propuesta que es muy diferente a las habituales? Y durante el proceso de investigación ¿cuál es el proceso a seguir cuando se hace uso de las tecnologías en este tipo de experiencias?

Esto supuso la necesidad de conocer y estudiar las condiciones curriculares que se plantean para el nivel primario, en concreto para el área de matemáticas con el objeto de adaptar la experiencia a las demandas curriculares actuales. Además, conocer y analizar los libros de texto que se utilizan habitualmente en la escuela, y que resumen el tipo de actividades "típicas" que realiza el alumnado para aprender el concepto de fracción.

Ubicación del concepto de fracción en el currículo español

De acuerdo al LOE 2 (2006), art. 18, la educación primaria está distribuida en tres ciclos, cada uno de dos años académicos, y organizados en áreas que tienen carácter globalizador; una de las áreas es matemática. Según el

Real Decreto 1513 (2006), las matemáticas es considerada como un conjunto de saberes asociados, en una primera aproximación a los números y las formas, que luego van progresivamente completándose hasta constituir un modo valioso de analizar situaciones variadas. Permiten estructurar el conocimiento que se obtiene de la realidad, analizarlo y lograr una información nueva para conocerla mejor, valorarla y tomar decisiones. Además, la educación primaria busca alcanzar una eficaz *alfabetización numérica*, entendida como la capacidad para enfrentarse con éxito a situaciones en las que intervengan los números y sus relaciones, permitiendo obtener información efectiva, directamente o a través de la comparación, la estimación y el cálculo mental o escrito.

En el Real Decreto 1513 (2006), los contenidos se han organizado en cuatro bloques que responden al tipo de objetos matemáticos que se manejan en cada uno de ellos: *números* y *operaciones*, *medida*, *geometría* y *tratamiento de la información, azar y probabilidad*. Es preciso advertir que esta agrupación es solo una forma de organizar los contenidos, que tendrán de abordarse de manera relacionada. La enseñanza de las matemáticas atenderá a la configuración cíclica de los contenidos que están siempre relacionados y se construyen unos sobre otros. La resolución de problemas actúa como eje vertebrador que recorre transversalmente todos los bloques, y por ello, se incluye con especial relevancia en cada uno de ellos. En referencia al Real Decreto (2006, pp. 43098–43099), el tema de investigación está localizado en el tercer ciclo, bloque 1; cuyo contenido se encuentra en:

Cuadro 1.1. *Números y operaciones*

Números enteros, decimales y fracciones	Operaciones	Estrategias de cálculo
Uso en situaciones reales del nombre y grafía de los números de más de seis cifras. Múltiplos y divisores. Números positivos y negativos. Utilización en contextos reales. Números fraccionarios.	Potencia como producto de factores iguales. Cuadrados y cubos. Jerarquía de las operaciones y usos del paréntesis	Utilización de operaciones de suma, resta, multiplicación y división con distintos tipos de números, en situaciones cotidianas y en contextos de resolución de problemas. Utilización de la tabla de multiplicar para identificar múltiplos y divisores. Calculo de tantos por ciento básicos en situaciones

Obtención de fracciones equivalentes. Números decimales. Valor de posición y equivalencias. Uso de los números decimales en la vida cotidiana. Ordenación de números enteros, de decimales y de fracciones por comparación y representación gráfica. Expresión de partes utilizando porcentajes. Correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes. Sistemas de numeración en culturas anteriores e influencias en la actualidad.		reales. Estimación del resultado de un cálculo y valoración de respuestas numéricas razonables. Resolución de problemas de la vida cotidiana utilizando estrategias personales de cálculo mental y relaciones entre los números, explicando oralmente y por escrito el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas. Utilización de la calculadora en la resolución de problemas, decidiendo sobre la conveniencia de usarla en función de la complejidad de los cálculos. Capacidad para formular razonamientos y para argumentar sobre la validez de una solución identificando, en su caso, los errores. Colaboración activa y responsable en el trabajo en equipo, manifestando iniciativa para resolver problemas que implican la aplicación de los contenidos estudiados.

Fuente: Real Decreto 1513 (2006, pp. 43098–43099)

El Decreto 130 (2007) del 28 de junio establece el currículo de la educación primaria en la Comunidad Autónoma de Galicia; en este, se hace referencia a las competencias básicas que los estudiantes deben alcanzar, “tanto como las habilidades y las actitudes y que más allá del saber y del saber hacer, incluyendo el ser o estar”; es decir, supone poner en práctica de forma integrada en contextos y situaciones diversas, la capacidad; los conocimientos; las habilidades y las actitudes personales adquiridas. En el Decreto 130/2007, el área de matemáticas está dividida en tres bloques: 1. Espacio y forma, 2. Cantidad, y 3. Tratamiento de la información y el azar. El tema de fracciones aparece en forma general agrupado con otros tipos de números “Lectura, escritura, seriación, ordenación, descomposición, comparación (expresión de los resultados de la comparación exactos o por tanteo según la situación) y representación de la recta numérica de distintos tipos de números (naturales, enteros, fracciones, decimales hasta las centésimas) en contextos reales” (p. 11742).

Es importante añadir, que la organización de profesores de matemáticas de Estados Unidos, National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), diseñó los “*Principios y Estándares para la Matemática Escolar*” (*Principios y Estándares 2000*) que proporcionan lineamientos y una perspectiva general muy rigurosa para las matemáticas y su enseñanza. Siendo las fracciones de naturaleza compleja, inclusive para estudiantes de secundaria, consideramos las expectativas relacionadas con el aprendizaje de las fracciones propuesta por NCTM (2000), citado por Godino (2004, p. 244):

- *Comprensión de los números, modos de representación, relaciones entre números y sistemas numéricos*
  - Comprender las fracciones como partes de un todo (unidad), como partes de una colección, como posiciones en la recta numérica, y como divisiones de números naturales.
  - Usar modelos, puntos de referencia y formas equivalentes para juzgar el tamaño de las fracciones.
  - Reconocer y generar formas equivalentes de fracciones usadas comúnmente, decimales y porcentajes.
  - Explorar números menores que 0 ampliando la recta numérica y mediante aplicaciones familiares.
  - Describir clases de números según sus características tales como la naturaleza de sus factores.
- *Calcular con fluidez y hacer estimaciones razonables*
  - Desarrollar y usar estrategias para estimar cálculos con fracciones y decimales en situaciones relevantes a la experiencia del estudiante.
  - Usar modelos visuales, patrones, y formas equivalentes para sumar y restar fracciones y decimales usados habitualmente.

Mientras tanto, el Real Decreto 1513 (2006, pp. 43098–43099) consideran como contenidos, que los niños/as deberían lograr en su aprendizaje:

- Números fraccionarios para expresar particiones y relaciones en contextos reales, utilización del vocabulario apropiado.
- Obtención de fracciones equivalentes.
- Ordenación de fracciones por comparación y representación gráfica.
- Expresión de partes utilizando porcentajes. Correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes.

Por lo expuesto, consideramos que el concepto matemático de fracciones merece una especial atención, ya que es considerado de importancia tanto dentro del currículo, como por la NCTM.

1.2 Antecedentes del estudio

Existen muchísimos trabajos relacionados con la enseñanza y aprendizaje del concepto de fracciones; sin embargo, son escasos los estudios realizados sobre su proceso de construcción, así como sobre las concepciones del concepto de fracción en niños de educación primaria utilizando una herramienta digital como Squeak Etoys. A continuación se menciona algunos de los trabajos significativos relacionados con el tema de investigación.

El trabajo de Leung (2009) tuvo como objetivo identificar, mediante una prueba, la comprensión del concepto de fracción en cinco subconstructos: *parte/todo*, *proporción*, *operación*, *cociente* y *medida*; y luego comparar los resultados con los obtenidos en Chipre. Para realizar el trabajo tomó 46 escuelas de diferentes distritos, estatus y niveles socio-económicos, con un total de 4400 estudiantes de Hong Kong. Los datos obtenidos muestran que los estudiantes de Hong Kong, tuvieron significativamente mejores resultados que los estudiantes de Chipre. Los instrumentos utilizados eran los mismos en ambos países. Las diferencias se atribuyen a las características de tipo cultural lingüístico, por tener cada país diferente cultura acotando la necesidad de que el profesorado tenga esto presente al ayudar a los alumnos.

Otro referente es el trabajo realizado por Keijzer y Terwel (2000), "Learning for Mathematical Insight: A Longitudinal comparison of Two Dutch Curricula on Fractions", cuyo objetivo fue comparar dos grupos: de escuelas de educación primaria en Holanda (control y experimental). Ambos grupos trabajaron de acuerdo al currículo escolar; sin embargo, siguieron diferentes programas para el aprendizaje del concepto de fracciones. El grupo experimental fue dirigido con programas de fracciones, tales como presentación de objetos reales, discusión y modelos de razonamiento, en cambio, el grupo control trabajó con los modelos formales del currículo. El proceso tuvo una duración de un año. La evaluación se llevó a cabo con pruebas estandarizadas para medir la habilidad; también se realizaron observaciones durante el proceso de aprendizaje para verificar los factores de estudio. Los resultados demostraron que el grupo experimental obtuvo una diferencia cualitativa en comparación con los resultados obtenidos del grupo control. Además, concluyen que, en el estudio de fracciones, existen dificultades para algunos estudiantes. Las habilidades son limitadas para aquellos estudiantes débiles en desarrollo de las matemáticas y, en especial, en el desarrollo de las fracciones.

En España, se han elaborado algunos estudios relacionados con el concepto de fracción, un ejemplo de ello es el trabajo realizado en el nivel secundario por Gómez y Contreras (2006), quienes parten de la constatación de que el modelo actual de enseñanza de la división de fracciones no da cuenta de la riqueza de las variables de los problemas (estructura, modelos de las operaciones, modelos físicos, constructos, contextos y tipología de los datos) y las variables de la resolución (esquemas, métodos y algoritmos involucrados).

Finalmente, Escolano Vizcarra y Gairín Sallán (2005, p. 2), realizan un estudio sobre las dificultades de comprensión que provoca el significado parte-todo, porque este significado forma parte del proceso de enseñanza de la fracción en el sistema educativo español. Luego enuncian una propuesta didáctica, sobre este significado tomando como referentes la fenomenología y la epistemología del número racional;

con el objetivo de incrementar la comprensión de los alumnos sobre los números racionales.

Destacamos también el trabajo realizado por Pirie y Kieren (1992) sobre el proceso de comprensión del concepto de adición y diferencia de fracciones y cuyo análisis se ha realizado a través de los ocho niveles de la teoría de la comprensión: *conocimiento primitivo* (primitive knowing), *creación de imagen* (image making), *comprensión de la imagen* (image having), *identificación de la propiedad* (properties noticing), *formalización* (formalising), *Observación* (observing) *estructuración* (structuring) e *invención* (inventising). El trabajo se realizó con un grupo de estudiantes de 8 a 12 años de edad en un ambiente constructivista en siete momentos (episodios); y el análisis de los resultados fue realizado con diferentes estudiantes que participaron en la actividad. Las conclusiones que obtienen son las siguientes:

a) Que en los ambientes constructivistas, los niños/as demostraron haber comprendido los contenidos matemáticos enseñados, cuando el profesor crea deliberadamente ambientes constructivistas.

b) Que los estudiantes construyeron y demostraron haber comprendido con coherencia los conceptos de fracción; así pueden también, comprender otros conceptos matemáticos.

Los trabajos realizados por Manade, Núñez, y Bryant (2005) analizaron la equivalencia y orden de las fracciones en situaciones de la parte/todo y el cociente. El estudio fue presentado en el *"29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education"*, Australia. La metodología consistió en presentar situaciones de cociente y parte/todo, relacionados a: (1) equivalencia de fracciones; (2) ordenamiento de fracciones y (3) nombrar fracciones. Además, las instrucciones fueron presentadas oralmente; los niños trabajaron sobre libros de actividades que contenían gráficos que ilustraban las situaciones descritas y fueron observados individualmente por un experimentado nativo de habla portuguesa. Los resultados obtenidos fueron:

a) La habilidad de los niños para resolver problemas de equivalencia de fracciones y ordenamiento de fracciones es mejor en las situaciones de cocientes que en la situación de parte/todo. No obstante, la enseñanza denominada tradicional usa la parte/todo y no las situaciones de cociente para introducir el concepto de fracciones.

b) El uso de correspondencia ayuda a los niños a resolver los problemas correctamente cuando están trabajando situaciones de cociente. En cambio, cuando los problemas presentan situaciones de la parte entera, la regla de correspondencia parece no ser aceptada por los niños como procedimiento.

1.2.1 Trabajos que respaldan la investigación

Más cercanos a nuestra propuesta de investigación, y desde donde es posible apoyarla con fortaleza, encontramos los trabajos sobre los procesos relacionados al aprendizaje de fracciones, utilizando herramientas tecnológicas como los ordenadores y lenguajes de programación. Se destacan los trabajos realizados por Idit Harel Caperton y Yasmin Kafai, ambos del Massachusetts Institute of Technology (MIT), Media Laboratory, Media Technology, Arts & Sciences Program, Epistemology and Learning Research (1988).

El trabajo de investigación de Harel [tesis doctoral], fue elaborado dentro de la teoría del ***construccionismo*** desarrollado por Papert y Harel (1991) y Papert (1982), con un marco tecnológico y computacional. Al tomar la teoría de Papert como medio para desarrollar y estudiar la noción de programación y su contribución al aprendizaje y desarrollo de los niños, ha implementado un proyecto denominado "*Proyecto de instrucción y diseño de software*" (Instructional Software Design Project, ISDP), a través del cual exploró el aprendizaje de los niños.

El proyecto estuvo dirigido a estudiantes de cuarto grado de primaria de una escuela pública de Boston por un semestre completo. Los niños hicieron uso del ISDP y diseñaron programas instruccionales en Logo[1] para enseñar a otros niños el concepto de fracciones. Por ello, los estudiantes no solamente aprendieron programación de fracciones, sino también a diseñar, usar interfaces, además de temas pedagógicos y diversos conceptos matemáticos (Harel, 1991); Asimismo, se considera, que este paradigma de trabajo con niños difiere radicalmente del uso tradicional de las computadoras y el *software* (lenguajes de programación) en las escuelas.

El trabajo se realizó con un total de 51 estudiantes del cuarto grado, de los cuales 17 fueron partícipes del grupo experimental (clases del diseño de software instruccional), mientras que los otros 34 fueron del grupo control. En la selección del grupo experimental jugó un papel importante la relación que tuvo con el profesor de un proyecto anterior; además, consideró el dinamismo del profesor de aula con que trabajarían. La otra razón; es que los niños/as tenían ciertas dificultades con el concepto de fracción, y la mayoría no tenían nociones del uso de las computadoras ni del lenguaje de programación. Se propuso dos objetivos relacionados al experimento: a) la implementación del *proyecto de instrucción y diseño de software* en el cuarto grado, y b) la evaluación del proceso cognitivo día a día de los logros y los resultados de los estudiantes diseñando y programando el *software* de instrucción.

Se seleccionaron tres grupos de trabajo utilizando Logo: Logo-integrado (grupo control 1), Logo-aislado (grupo control 2) y Logo integrado – diseño de software (grupo experimental). Los estudiantes seleccionados para el desarrollo del *Logo-integrado* trabajaron los proyectos del Instituto Tecnológico de Massachusetts entre 45

---

[1] Logo. Un lenguaje de programación desarrollado en el MIT en 1966 por Seymour Papert, Danny Bobrow y Wallace Feurzeig; luego se implementaron muchas versiones (Feurzeig, 2010). El lenguaje Logo deriva de Lisp (List-Processing) que es uno de los lenguajes clásicos de programación no orientado a objetos, creado para el procesamiento de listas. http://el.media.mit.edu/logo-foundation/products/index.html

a 60 minutos por día durante los 5 días de la semana estuvieron, dirigidos por profesores que fueron también parte de la elaboración del proyecto por el instituto.

Los estudiantes trabajaron durante varias semanas los proyectos que fueron integrados dentro del currículo, en áreas como ciencia y literatura; y fueron evaluados por un sistema denominado *soft* que verificó nuevas habilidades. Mientras tanto, el grupo de *Logo-aislado,* realizó un trabajo similar al grupo de Logo-integrado; usaron las computadoras menos tiempo de 30 a 45 minutos a la semana, y desarrollaron pequeños programas de ejercicios y asignaciones dados por el coordinador del programa. Además, la clase de Logo-aislado fue parte del programa curricular que cubrían; el profesor no fue involucrado en las clases de informática y fueron dirigidos por el coordinador del laboratorio de informática en todas las clases.

El *Logo integrado–diseño de software* fue un aspecto principal del experimento, similar al desarrollo del *Logo–integrado*; el proyecto fue muy complejo y un factor muy importante en el aprendizaje de los estudiantes, porque reflexionaron, revisaron, modificaron y mantuvieron sus programas. Además, en el desarrollo de su trabajo, los estudiantes estuvieron involucrados en un proceso rico, significativo y complejo, trabajando en diseñar el programa como un producto real para otras personas.

En el análisis de los datos se realizaron dos evaluaciones cuantitativas: una prueba de entrada y una prueba de salida. Se hicieron evaluaciones cualitativas para el informe, y en particular una evaluación de seguimiento a una estudiante. Presentamos la tercera conclusión, en la que se considera que el diseño de software para la enseñanza de los niños de tercer grado usando el programa Logo fue efectivo para el aprendizaje, creando y trasladando representaciones de números racionales, y así mejorando la comprensión matemática de las fracciones y sus representaciones. I. Harel, (1991) considera que el método tuvo efecto en el éxito de la evaluación final. Este trabajo es importante porque Harel considera que los niños aprenden *diseñando* actividades relacionadas al concepto de fracciones y *diseñando* programas en el programa Logo. Según Schacter, (1999), el trabajo de Harel demostró dos aspectos importantes:

a) Quienes diseñaron el *software* de fracciones para que otros aprendieran usando el Logo, aprendieron mejor que aquellos estudiantes que fueron enseñados usando métodos convencionales.

b) Los estudiantes que diseñaron el *software* aprendieron mejor el Logo, que aquellos estudiantes que solamente recibieron instrucciones de programación Logo.

En esta línea, también encontramos la investigación de Kafai (1995), en su tesis desarrollada en el MIT, Media Laboratory, Arts & Sciences Program, Epistemology and Learning Research. El trabajo de investigación estuvo orientado a que los niños/as desarrollen un *proyecto de diseño de juego* (software) en el que el concepto de *fracción* estuvo integrado; este *software* servía, para que también otros niños pudieran jugar y aprender fracciones. El *software* fue elaborado con el lenguaje de programación Logo, a lo que Kafai denominó un modelo de ambiente de aprendizaje construccionista, lugar donde los niños acometen sus propios aprendizajes y conocimientos.

Para la ejecución del proyecto del diseño, se ha roto el concepto tradicional de currículo (enfoque de tres a cuatro semanas por tema); los estudiantes trabajaron implementado el diseño durante seis meses; en el proyecto se han integrado varias materias tales como: programación, lenguaje, matemática y artes. Los niños trabajaron cinco minutos escribiendo sus planes e ideas de juegos en sus *notebooks* antes de ir a trabajar en sus computadoras durante 45 minutos; luego, al retornar a sus clases escribieron nuevamente sus experiencias. En el proyecto se utilizaron 100 ordenadores interconectados; para el desarrollo de las actividades, se usaron grupos formados por 17 ordenadores ubicados en círculo. En la investigación participaron cuatro grupos: **Experimental** (diseño de juego y software instruccional: fracciones, Logo y representación y explicación del diseño), **control 1** (clases de software instruccional),

control 2 (clases de Logo-integrado) y **control 3** (Logo-aislado). Se realizaron dos evaluaciones, un pre-test y un post-test; en ambos casos cuatro tipos de pruebas: un Logo test, una prueba de números racionales, una prueba de Boston Public School Test y una entrevista con una pregunta específica: ¿qué es una fracción? Algunas de las conclusiones:

a) La actividad a través del diseño permite a los estudiantes un interés personal por los estilos de pensamiento, aprendizaje y el diseño.

b) Dentro del paradigma construccionista con las actividades del proyecto de diseño del juego, no solo se ha creado un rico y complejo ambiente de aprendizaje, sino también una cultura de aprendizaje.

c) Aprendiendo a través del diseño de proyectos, proporciona a los estudiantes de una poderosa oportunidad para el aprendizaje.

d) El lenguaje de programación Logo fue usado en el proyecto de diseño de juego como una herramienta para el conocimiento, reformulación y expresión personal.

e) El Proyecto de diseño de juego presentado como una aproximación no común para el aprendizaje de fracciones, permite a los estudiantes crear diferentes representaciones inventadas como historias, fantasías y contextos que raramente se presentan en los libros de matemáticas.

El trabajo de Kafai (1995) hace énfasis en el aprendizaje a través del *diseño y el juego* que naturalmente atrae a los niños; y considera que el juego es más importante que tomar el papel de enseñar (haciendo referencia a trabajo de Harel).

Ambos trabajos el de Harel (1991) y Kafai (1995), guardan estrecha relación con la investigación que se presenta, porque fueron desarrollados dentro del paradigma del construccionismo. Fueron trabajos realizados con niños en edad escolar, utilizando como herramienta los ordenadores, en los que realizaron programación en Logo para desarrollar la comprensión de las fracciones elementales. Además Harel y Kafai se centran en la elaboración de proyecto instruccional de diseños de software, el primer programa elaborado por los niños para enseñar a otros niños, y el segundo para enseñar fracciones a través del juego también a otros niños. Lo importante de estos trabajos es que los niños realizan en los ordenadores, actividades consideradas como juegos con un enfoque denominado construccionista, que les permiten desarrollar su creatividad.

Otro importante trabajo que guarda relación directa con el lenguaje de programación Squeak, desarrollado en España es el realizado por Fernando Fraga y Adriana Gewerc en el Colegio La Salle de Santiago con alumnos del 4^{to} de primaria. Para el trabajo se contó con 25 ordenadores en red con conexión a internet. Los objetivos que lograron alcanzar fueron los siguientes:

a) Familiarizar al alumnado con el nuevo software.

b) Desarrollar actividades en ese proceso de forma interdisciplinar que tuvieran un significado curricular clara (Fraga y Gewerc, 2004, pp. 9–10).

La metodología seguida consistió en formar cinco grupos, cada grupo integrado por dos estudiantes con la finalidad de mejorar las relaciones personales, actitudes cooperativas y favorecer el aprendizaje significativo. Las actividades se desarrollaron mediante proyectos e iniciaron con la clase de lengua, partiendo con la lectura de un cuento; se realizó el diseño de las actividades mediante la presentación de una figura o pintura en el ordenador, y que explique lo que le llamó más la atención. Esta actividad es “la punta del iceberg” (Fraga y Gewerc, 2004); luego, a partir de ahí se inicia la interdisciplinariedad porque se relaciona indirectamente con diversas áreas tales como matemáticas, artes y físicas (ciencias naturales); de esa manera, se le brinda al estudiante una diversidad de oportunidades para explorar.

Las conclusiones a las que arribaron luego de la experiencia fueron muy interesantes; estas se podrían resumir en las siguientes líneas. Por un lado, los estudiantes elaboran su propio e irrepetible proceso de aprendizaje, y el profesor debe apoyarlo y enriquecerlo brindando contextos de aprendizajes enriquecedoras. Las potencialidades que ofrecen las nuevas tecnologías facilitan el modo de conocer y aprender de acuerdo a las necesidades en las que se desenvuelve la sociedad educativa.

Cuadro 1.2. *Resumen de los trabajos que sustentan la investigación*

Autores/ programa	Objetivos	Tipo de investigación	Metodología	Resultados
Idit Harel (1991) Lenguaje Logo	Comparar la eficacia del lenguaje de programación Logo en el aprendizaje del concepto de fracción, a través del diseño de un software para enseñar a otros niños las fracciones	Mixto: Cuantitativo y cualitativo	**Experimental:** Logo integrado + Diseño de juego. **Control 1:** Logo integrado **Control 2:** Logo aislado	Quienes diseñaron el *software* de fracciones para que otros aprendieran usando el Logo, aprendieron mejor que aquellos estudiantes con clases tradicionales. Los estudiantes que diseñaron el *software* aprendieron mejor el Logo, que aquellos estudiantes que solamente recibieron instrucciones de programación Logo
Yasmin Kafai (1995) Lenguaje Logo	Comparar la eficacia del lenguaje de programación Logo en el aprendizaje del concepto de fracción, a través del diseño de un software de juego para enseñar a otros niños las fracciones	Mixto: Cuantitativo y cualitativo	**Experimental:** Diseño instruccional Diseño de juego. **Control 1:** Diseño instruccional **Control 2:** Logo integrado **Control 3:** Logo aislado	Dentro del paradigma construccionista con las actividades del proyecto de diseño del juego, no solo se ha creado un rico y complejo ambiente de aprendizaje, también una cultura de aprendizaje. El aprendizaje a través del diseño, provee a los estudiantes de una poderosa oportunidad para el aprendizaje de las fracciones.
Fernando Fraga – Adriana Gerwerc (2004) Lenguaje Squeak	Familiarizar al alumnado con el nuevo software. Desarrollar actividades en ese proceso de forma interdisciplinar que tuvieran un significado curricular clara.	Investigación de corte cualitativo	Con 25 ordenadores Distribuido en 5 grupos de trabajo. Dos estudiantes por grupo.	Los niños elaboran su propio aprendizaje. El profesor debe apoyarle con programas enriquecedoras. Squeak promueve nuevas potencialidades para una nueva sociedad educativa.

Teniendo en cuenta la complejidad en el aprendizaje de las fracciones y las matemáticas; es importante ver como las investigaciones que nos anteceden remarcan la importancia de utilizar algún tipo de software de diseño que permita a los alumnos construir conceptos complejos y lograr aprendizajes más duraderos.

Por eso nos propusimos realizar un estudio en donde se ponga a prueba esta situación, con el objetivo de identificar y comprender los procesos que pone en juego el alumnado cuando construye el concepto de fracción mediado por un software de estas características, cuestión que no es habitual en las aulas del contexto español.

1.2.2 Dimensiones básicas iniciales: concepto de fracción, Squeak Etoys y construcción del concepto de fracción con Etoys

En resumen, las dimensiones que orientarán el trabajo de investigación pueden verse en la Figura 1.1. Gracias a la flexibilidad del paradigma cualitativo (por el que nos decantamos), éstas afloran y se amplían a lo largo del proceso de investigación y van profundizándose (Vera C & Vollalón C, 2005). Asimismo, se debe tener en cuenta la continua interrelación entre las dimensiones durante el proceso y el acercamiento a la realidad a estudiar, luego éstas nuevas dimensiones constituirán el eje del análisis de la información (Sandoval Casilimas, 1996).

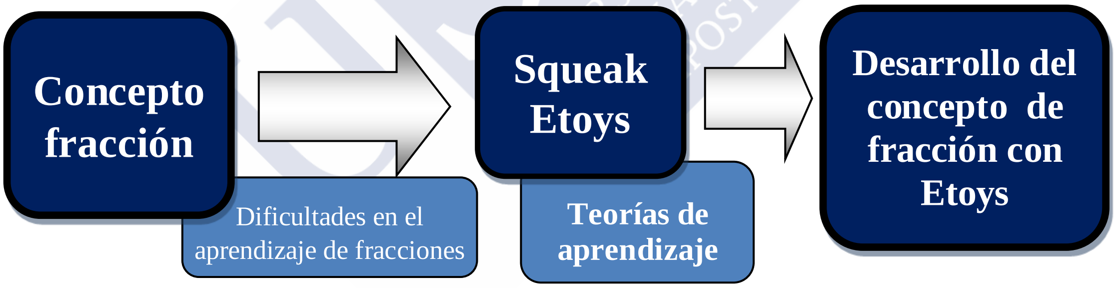


Figura 1.1. Dimensiones básicas de la investigación

Para el estudio emprendido, se ha seleccionado Squeak Etoys, porque es un lenguaje de programación que hereda la mayoría de las características de Smalltalk-80 y se basa en una arquitectura simple denominado “marco mórfica”; éste permite a cada objeto visual llamado “Morph” ser operado como un objeto a través de la interfaz visual que ofrece Squeak. Además, es un entorno de varias funcionalidades, tales como un navegador Web, un servidor web y un entorno en 3-D.

El uso de Squeak en España se inicia en la comunidad de Extremadura a finales del año 2003. Al respecto, no muestran resultados concretos, aunque en la actualidad continúa utilizándose y consideran a Squeak en el grupo de herramientas digitales para enseñar y aprender[2].

Asimismo, la Junta de Extremadura a través de CNICE-MEC (2006) muestra en forma genérica el resultado de las experiencias en las escuelas de dicha Junta:

a) los profesores que utilizan Squeak se muestran mayoritariamente muy satisfechos con las capacidades de la herramienta. A los estudiantes les gusta verse creadores de sus propias realidades virtuales, les engancha

b) su atípica forma de presentarse ante el usuario hace que los profesores les cueste más que a los estudiantes hacerse con la herramienta (p. 5).

También los trabajos de Fraga y Gewerc (2004, 2006) realizados en una escuela de Santiago de Compostela, en experiencias relacionados con las ciencias, muestran la cualidad de Squeak en el aprendizaje interdisciplinar de los niños y niñas.

En esta investigación se realizará el estudio profundo en el área de las matemáticas, exclusivamente el concepto de fracción.

El trabajo de investigación en esta dimensión pretendió obtener información de cómo los niños construyen el concepto de fracción utilizando el lenguaje de programación Squeak Etoys. Es decir, qué conceptos matemáticos y qué niveles de aprendizaje entran en juego en cada etapa del proceso, de acuerdo a la teoría propuesta. También identificaremos cómo se enlazan los diferentes conceptos matemáticos durante la construcción. Del mismo modo, se analizará la influencia de Squeak Etoys en las construcciones de conceptos específicos de las matemáticas.

[2] Página de la Junta de Extremadura, http://squeak.educarex.es/Squeakpolis, donde se ubica Squeak.

El estudio está enmarcado en el constructivismo de Jean Piaget, el construccionismo de Seymour Papert y la teoría APOS de Ed Dubinsky. En principio el constructivismo de Piaget ofrece una ventana para que los niños logren alcanzar la habilidad en los diferentes estadios de su desarrollo (Ackermann, 2001); en cambio, el construccionismo de Papert enfatiza en el arte de aprender; es decir, en aprender para aprender, el significado de aprender haciendo cosas, utilizando ordenadores en ambientes informatizados denominados *micromundo* (Ackermann, 2001).

Finalmente, la teoría APOS, que tiene base en el constructivismo de Piaget, permite desarrollar la descomposición genética del concepto de fracción y evaluar el logro de la construcción del concepto a través de los niveles que alcanzan los niños, denominados constructos mentales (acción, proceso, objeto y esquema). Las actividades que desarrollan los niños/as se encuentran dentro del entorno de aprendizaje que potencia la exploración, el diseño, la creación y la construcción de proyectos que nacen en el ámbito de las estructuras mentales de los niños y que se transforman en construcciones concretas a partir de los diseños electrónicos que programan con Squeak Etoys, mientras juegan con el ordenador, esto les permite desarrollar sus capacidades de creatividad y concebir las diversas situaciones como un concepto de una fracción.

1.3 Objetivos de investigación

El objeto de estudio seleccionado es dinámico, holístico, múltiple, y nos lleva a no tratar deductivamente hipótesis previas, sino a indagar de forma inductiva las relaciones existentes entre el uso de Squeak Etoys y la construcción del concepto de fracción, luego explicar el significado de las relaciones entre dichas categorías. Para tal efecto, con el trabajo de investigación se pretende alcanzar los siguientes objetivos:

a) Analizar la génesis del aprendizaje del concepto de fracción en estudiantes de 5^{to} grado de educación primaria.

b) Describir el diseño de proyecto de fracciones como un ambiente de aprendizaje dentro de paradigma del construccionismo

c) Identificar los diferentes niveles de constructos mentales que alcanzan los estudiantes en la concepción del concepto de fracción al diseñar proyectos de fracciones con Squeak Etoys

d) Identificar las dificultades y posibilidades que encuentran los alumnos de 5to grado de primaria para la construcción de concepto de fracción

e) Identificar las características y cualidades educativas del lenguaje de programación Squeak Etoys

f) Analizar las características que adquiere la introducción de una experiencia diferente a lo habitual en la escuela primaria.

g) Identificar las etapas de la construcción del concepto de fracción, al hacer uso del lenguaje de programación Squeak Etoys.

1.3.1 Preguntas y propuestas que guiarán el trabajo de investigación

Por otro lado, una vez propuestos los objetivos es necesario considerar preguntas/ cuestiones y características para guiar a lo largo del proceso del trabajo de investigación.

Preguntas / cuestiones	Característica del estudio
¿Cuál es el propósito de la investigación?	• Examinar en profundidad al grupo objeto de investigación (niños/as del 5to grado de primaria) • Comprender cómo los niños construyen el concepto de fracción al utilizar tecnologías de información.
¿Cuál es la naturaleza del proceso de investigación?	• Revisión de la literatura y recopilación de información previa. • Desarrollo de experiencias con Squeak Etoys en el laboratorio de informática y la construcción del concepto de fracción. • Proceso de la experiencia en contexto natural.
¿Qué instrumentos	• Entrevistas a profesores de aula antes y depués de las

utilizar para la recolección de información?	experiencias. • Observación de las experiencias • Recolección documental (libretas de notas, archivos digitales y fotografías) • Grabación de audio y video.
¿Tipo de análisis de datos se debe utilizar?	• Descriptivo. • Interpretativo en función de las propuestas teóricas. • Análisis global a resultados del grupo de estudiantes. • Análisis individual de resultados de tres estudiantes que tienen niveles de rendimiento académico: bajo, regular y bueno. • Reflexiones relativo a los resultados.
Comunicación de los resultados	• Descripciones objetivas del proceso. • Interpretaciones reflexivas de los resultados

Capítulo II:

Teorías en matemática educativa

2. CAPÍTULO II. DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE Y TEORÍAS EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

2.1 Introducción:

En este capítulo se realiza un análisis de las dificultades, errores y obstáculos en el aprendizaje de fracciones; las teorías en matemática educativa y las teorías del aprendizaje que más sobresalen para el aprendizaje de esta disciplina; también lo relativo al uso de las tecnologías y sus consecuencias en el acto educativo. Al iniciar la revisión de las bases teóricas de la investigación, tomamos nota de las teorías que guardan relación directa con el aprendizaje de las matemáticas, que han evolucionado teniendo como una de sus base fundamentales a los estudios realizados por Jean Piaget: la teoría de *comprensión* de Pirie y Kieren, la teoría *APOS* desarrollada por el grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) bajo la dirección de Ed Dubinsky y el *construccionismo* desarrollado por Seymour Papert; asimismo, la epistemología que sirven de base a esta investigación. Existen otras teorías desde un marco social constructivismo que podrían explicar la problemática del estudio de las matemáticas, que manejan muchas más variables, además de la cognitiva, como la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau, la Teoría Antropológica en Didáctica de la Matemática (TAD) de Chevallard, la socioepistemología de Ricardo Cantoral o el enfoque ontosemiótico de Juan D.Godino. Sin embargo, se ha optado por el primer grupo, por la tradición del investigador en ese campo.

2.2 Dificultades, errores y obstáculos en el aprendizaje de las fracciones:

Las fracciones representan uno de los conceptos matemáticos básicos y de mayor complejidad, pero muy pobremente comprendidos en el currículo de la escuela elemental (Duzenli-Gokalp & Devi Sharma, 2010). Los estudiantes pueden tener dificultades con el aprendizaje de las fracciones, ya que éstas [las fracciones] no se comportan como los números naturales (Duzenli-Gokalp & Devi Sharma, 2010, pp. 5168–5171); sin embargo, pueden aprender mejor cuando están activamente involucrados en procesos de aprendizaje haciendo conexiones, generalizaciones y resolviendo problemas.

Es necesario conocer cuáles son los aspectos de las fracciones que ofrecen una mayor resistencia en su adquisición por parte de los niños/as. Asimismo, también es necesario precisar lo que entendemos por dificultad, error y obstáculo. El significado de cada uno de estos aspectos guarda relación con el aprendizaje de las fracciones.

Al respecto, Y. Ríos García categoriza los errores de la siguiente manera: "error debido a la incomprensión del símbolo, de tecnología (errada elección de las técnica), de técnica (errada ejecución de tareas), de teoría (deficiencia de manejo de conceptos), debido a la incomprensión del ítem o pregunta, debido a la no especificidad de la respuesta (aún y cuando el proceso es correcto), y sintáctico" (2011, p. 18). Además hay que incluir la propia complejidad del objeto matemático "fracciones", tal y como explican la epistemología de la matemática y la semiótica. Por lo tanto, consideramos necesario ordenar y diferenciar entre dificultad, error y obstáculo.

2.2.1 Dificultad en el aprendizaje de las fracciones

El estudio de las dificultades de aprendizaje se remonta a los años 1800-1940 denominado etapa de fundación, de 1940 – 1963 etapa de transición y de 1963 hacia adelante etapa de integración (Ortiz González, 2004, p. 15). Además en España, fue tratado a partir de 1963 aproximadamente por Romero (1993), García (1995, 1998), Miranda (1986) y Miranda, Soriano y Jarque (2001).

Con referencia a definiciones de dificultades de aprendizaje los autores tienen diferentes acepciones. Según Aguilera y García (2003), Samuel Kirk en (1962, p. 236) es quien considera por primera vez el término de dificultades de aprendizaje, desde una perspectiva psicológica como "una alteración o retraso en el desarrollo en un más procesos de lenguaje, habla, deletreo, escritura o aritmética que se produce por una disfunción cerebral y/o trastorno emocional o conductual y no por un retraso mental, depravación sensorial o factores culturales o instruccionales". Además Aguilera y García clasifican en categorías las dificultades de aprendizaje.

Cuadro 2.1. Cuatro categorías que se refiere a las dificultades del aprendizaje

	Descriptivos	Explicativos
Desarrollo	➢ Deficiencias cognitivas ➢ Organización visomotora inmadura ➢ Formas leves de retraso ➢ Desequilibrios evolutivos ➢ Retrasos madurativos	➢ Inmadurez neurológica ➢ Daño cerebral ➢ Lesión cerebral
Aprendizaje	➢ Dificultades específicas para el aprendizaje ➢ Discapacidad de aprendizaje ➢ Dificultades específicas para el aprendizaje ➢ Déficit para el aprendizaje ➢ Inhabilidad para el aprendizaje	➢ Disfunción cerebral mínima ➢ Trastornos neuropsicológicos del aprendizaje

Fuente: A. Aguilera y García (2003, p. 42).

También Ortiz Lázaro (1994, p. 145) considera, que cuando se trata de niños con inteligencia normal, las dificultades se manifiestan en el uso del lenguaje, la lectura, a escritura o habilidades matemáticas. Estas alteraciones son intrínsecas al individuo, debido presumiblemente a disfunciones del sistema nervioso central y pueden tener lugar a lo largo de todo el ciclo vital. Pueden coexistir con problemas en conductas de autorregulación, percepción social e interacción (Blanco Pérez, 2007, p. 23).

Sin embargo desde la óptica de la Didáctica de la Matemática, la dificultad de aprendizaje está relacionada a la complejidad de la matemáticas y proced de diversas causas relacionadas con el concepto que se pretende aprender, con el método que utiliza el profesor, con la preparación anterior del alumno o con su propia predisposición para aprender (Centeno Pérez, 1988, p. 144). Luego para Godino et al. (2003, p. 69) y J. Godino (2004, p. 73), “el término *dificultad* indica el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio. Si el porcentaje de respuestas incorrectas (índice de dificultad) es elevado se dice que la dificultad es alta, mientras que si dicho porcentaje es bajo, la dificultad es baja”.

Según Godino et al. (2003) las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se clasifican en 6 tipos:

a) Dificultades relacionadas a los contenidos matemáticos

b) Dificultades causadas por la secuencia de actividades propuestas (profesor)

c) Dificultades que se originan en la organización del centro

d) Dificultades relacionadas con la motivación del alumno

e) Dificultades relacionadas con el desarrollo psicológico de los alumnos

f) Dificultades relacionadas con la falta de dominio de los contenidos anteriores

Generalmente, los psicólogos consideran las dificultades de aprendizaje en términos cognitivos que guardan relación con las deficiencias de los niños/as; es decir, las dificultades están relacionadas con las alteraciones en la adquisición del lenguaje, la lectura, el razonamiento o habilidades matemáticas. Sin embargo, la dificultad del aprendizaje de las matemáticas no está limitada al estudiante; sino que hace referencia a la propia complejidad de las matemáticas y a diversos factores externos que, en general, no se toman en cuenta.

De acuerdo con las investigaciones sobre la temática, podemos clasificar las dificultades en: simbolismo matemático (carácter semiótico), dificultades conceptuales, inadecuado proceso de enseñanza, la comunicación del profesor, uso de materiales educativos, uso de tecnologías e influencias ambientales.

2.2.1.1 Simbolismo matemático (carácter semiótico)

Miguel Ariza (2007) formula las interrogantes ¿Cuál es la naturaleza de los objetos con los que la matemática trabaja? ¿Estos objetos están cifrados? ¿Es por medio de un conjunto de símbolos carentes de significado propio, sometidos a interpretación extrínseca que podemos dar cuenta de estos objetos? Intentamos dar respuesta a estas interrogantes partiendo del concepto denominado “objetos”.

En la construcción de un concepto matemático, entran en juego los ***objetos*** y los ***símbolos***. H. Blumer (1982, p. 8) considera al objeto como “aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a lo cual puede hacerse referencia (una nube, libro, un cuerpo legislativo, un banquero, etc.); y categorizan en físicos (sillas, árboles, etc.), sociales (estudiantes, sacerdotes, presidente, una madre, etc.) y abstracto (principios morales, doctrinas filosóficas e ideas como la justicia)”.

Para Chevallard (1991; citado por D’ Amore & Godino (2007, p. 197)) el objeto matemático es:

> Un emergente de un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se desglosan en diferentes registros semióticos: registro de lo oral, palabras o expresiones pronunciadas; registros de lo gestual; dominio de las inscripción, lo que se escribe o dibuja (grafismos, formulismos, cálculos, etc.), es decir, registro de los escrito (p. 8).

Existe una convergencia de opiniones de que “los objetos matemáticos deben ser considerados como símbolos de unidades culturales que emergen de un sistema de usos relacionados con actividades matemáticas (resolución de problemas) que efectúan ciertos grupos de personas y van evolucionando con el tiempo. En nuestra concepción, lo que determina la aparición progresiva de los "objetos matemáticos" y su "significado" está íntimamente ligado a los problemas y la actividad realizada en la resolución de problemas. Por ello es imposible la reducción del significado de un objeto matemático a su mera definición matemática" (D'Amore, 2007, p. 27; D'Amore & Godino, 2007, p. 207).

Asimismo, D'Amore y Godino (2007) clasifican los tipos de objetos matemáticos en los siguientes:

- ***Lenguaje*** (términos, expresiones, notaciones o gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, entre otros).
- ***Situaciones*** (problemas, aplicaciones extra-matemática, ejercicios).
- ***Procedimientos*** (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos).
- ***Conceptos*** (que son introducidos mediante definiciones o descripciones, como recta, punto, número, media o función).
- ***Propiedad*** o atributo de los objetos (como los enunciados sobre conceptos).
- ***Argumentos*** (p.e., los que se usan para validar o explicar los enunciados por deducción o de otro tipo).

Y estos objetos se organizan en entidades más complejas, como sistemas conceptuales o teorías (D'Amore & Godino, 2007, p. 209).

Del mismo modo, muchos trabajos resaltan el rol de la semiótica, porque comprende y describe los fenómenos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Godino, 2010, p. 23). También, para Radford (2006, p. 7) es sustancial la toma de conciencia progresiva del hecho de que, dada la generalidad de los objetos matemáticos, la actividad matemática es, esencialmente, una actividad simbólica.

Entonces la semiótica, para Radford (2006, p. 8), extiende las relaciones entre los signos a través de los cuales piensan los individuos y el contexto cultural. En cambio para Godino (2010, p. 24) la semiótica abarca todos los aspectos de la construcción de signos por el hombre, la lectura e interpretación de los signos a través de los múltiples contextos en que tiene lugar dicho uso.

En consecuencia, la semiótica desempeña un papel central en la *representación* de los objetos y, por ende en su interpretación y comprensión, que resultan nucleares para el aprendizaje de las matemáticas. La actividad semiótica no puede crear al objeto (Radford, 2004, p. 14), al tratarse de objetos abstractos en el aprendizaje de las matemáticas, las actividades cognitivas requieren la utilización de sistemas de expresión y de representación; como hace referencia Bruno D'Amore (2004, p. 100) quien considera que "en las matemáticas, la adquisición conceptual de un objeto pasa necesariamente a través de la adquisición de una o más representaciones semióticas".

***Objetos matemáticos*:**

- conceptos (recta, punto, número, media o función)
- lenguaje (términos, expresiones, notaciones, ecuaciones o gráficos), (escrito, oral, gestual, entre otros)
- situaciones (problemas, aplicaciones extra-matemática, ejercicios)
- procedimientos
- propiedades (los enunciados sobre conceptos)
- validar o explicar (enunciados por deducción)

***Sus representaciones*:**

- las escrituras decimales o fraccionarias
- las ecuaciones
- los símbolos
- los gráficos
- los trazados de las figuras

***Figura 2.1*.** Resumen de la relación entre un objeto matemático y sus representaciones.

Finalmente, tomando la idea de Blumer concluimos que el ***objeto*** matemático es todo aquello que es indicado, señalado o hace referencia y puede comunicarse a otros cuando se aprende matemática. Además, no sólo son indispensables para fines de comunicación, sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática.

Además, es importante que organicemos la relación existente entre los *objetos* y sus diferentes *representaciones* y *transformaciones*. Luis Rico (2000, p. 235), citando a Duval (1993) postula la existencia del mundo *de las representaciones mentales y el de las representaciones semióticas,* y sostiene que el desarrollo de las representaciones mentales se efectúa por interiorización de las representaciones externas.

D'Amore (2006), citando a Radford (2005, p. 203) considera que los signos son artefactos, objetos a su vez "lingüísticos" (en sentido amplio); es decir, estos son objetos, artefactos, términos lingüísticos y signos en general que se utilizan con el fin de volver aparente una intención y de llevar a cabo una acción. Para D'Amore la simbolización de los principios semióticos:

Semiótica $=_{df}$ adquisición de una representación semiótica

Noética $=_{df}$ adquisición conceptual de un objeto

Entenderemos, de ahora en adelante:

- $r^m =_{df} \ m^{th}$ registro semiótico (m = 1, 2, 3, …)
- $R_i^m(A) =_{df} \ i^{th}$ representación semiótica i-ésima (i = 1, 2, 3, …) de un concepto A en un registro semiótico r^m.

En el esquema que se muestra, puede resumir el proceso que sucede en el aula desde un punto de vista complejo, que pone en juego los elementos que se desea poner en conexión entre ellos: objetos, significados, representaciones semióticas y sentido.

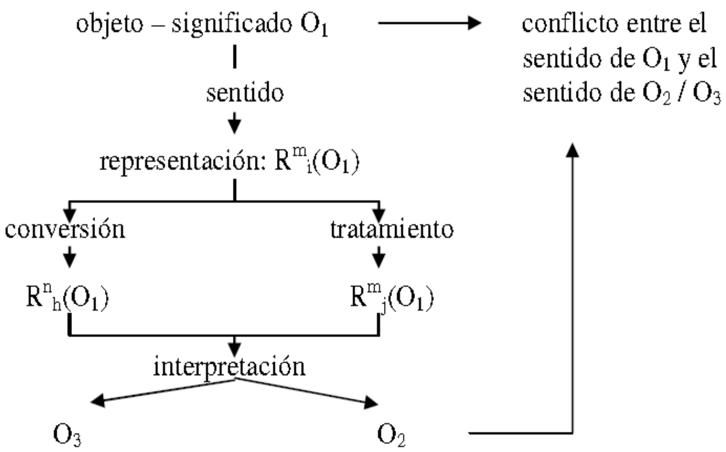


Figura 2.2. Esquema que muestra el proceso de: objetos, significados, representaciones semióticas y sentido (D'Amore, 2006, p. 8).

Ejemplo.

a) El objeto O_1 es “cálculo numérico en $\mathbb{Q}$”

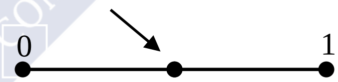
Registro semiótico r^1: el lenguaje aritmético.

- Representación semiótica $R_1^1(O_1)$: 1/2 (escritura fraccionaria)
- Representación semiótica $R_2^1(O_1)$: 0,5 (escritura decimal)
- Representación semiótica $R_3^1(O_1)$: 5.10^{-1} (escritura exponencial)

Registro semiótico r^2: el lenguaje algebraico

- Representación semiótica $R_4^1(O_1)$: $\{\ x \in Q^+ / 2x - 1 = 0\ \}$ (escritura de una ecuación)
- Representación semiótica $R_5^1(O_1)$: $\{\ y = f(x) / f : x \to x/2\ \}$ (escritura funcional)

Registro semiótico r^2: el lenguaje geométrico de 1/2.

- Representación semiótica $R_6^1(O_1)$: 

  …

- 1/2 transformación de tratamiento en r^1: 0,5
- 0,5 transformación de tratamiento en r^1: 5.10^{-1}

  …

- 1/2 transformación de conversión de r^1 a r^2 : 50%
- ….

D’Amore (2004) tomando la paradoja de Duval (2003, p. 38) intenta dar respuesta a las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas;

> (…) por una parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser más que un aprendizaje conceptual y, por otra, es sólo por medio de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Esta paradoja puede constituir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje. ¿Cómo sujetos en fase de aprendizaje no podrían confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas si ellos no pueden más que tener relación solo con dichas representaciones? La imposibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos, fuera de toda representación semiótica, vuelve la confusión casi inevitable. Y, al contrario, ¿cómo podrían ellos adquirir el dominio de los tratamientos matemáticos, necesariamente ligados a las representaciones semióticas, si no tienen ya un aprendizaje conceptual de los objetos representados? Esta paradoja es aún más fuerte si se identifica actividad matemática con actividad conceptual y si se consideran las representaciones semióticas como secundarias o extrínsecas (2004, p. 95).

Para aclarar tal situación, presentamos un reporte de investigación con niños de quinto de primaria con contenidos de probabilidad de D'Amore. *Los alumnos, discutiendo en grupo y básicamente compartiendo prácticas bajo la dirección del docente, alcanzan a decidir que la respuesta se expresa con la fracción 3/6 porque "los resultados posibles al lanzar un dado es 6 (el denominador) mientras que los resultados que hacen verdadero el evento es 3 (el numerador)"*.

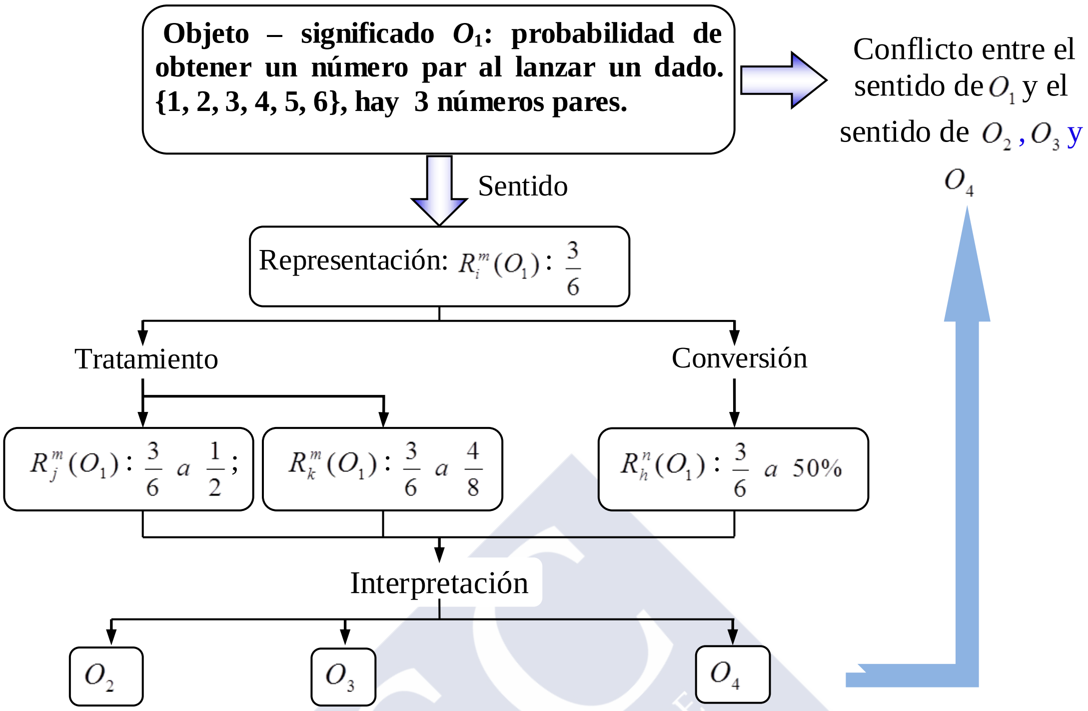


Figura 2.3. Proceso de sentido, transformaciones e interpretación de un evento.

La Figura 2.3, muestra el proceso de construcción del concepto de probabilidad expresado como una fracción. Se parte del objeto matemático, luego el registro semiótico, la representación semiótica, las transformaciones y los conflictos en la comprensión del objeto y el resultado de las transformaciones.

Terminada la sesión, el profesor a modo de pregunta dice que $\frac{4}{8}$ es equivalente a $\frac{3}{6}$, y entonces ¿ésta representa el evento realizado? Los alumnos responden con una seguridad que no representa al evento realizado. El profesor entonces, afirma que $\frac{4}{8}$ no representa el evento realizado con anterioridad, ya que el número de lados que tiene el dado es 6 y no 8. Es decir, que el docente aclara que existen dados que tienen 6 caras y dados de 8 caras. En este caso $\frac{4}{8}$, representaría al lanzamiento de un dado de 8 caras y la obtención de un número par.

La secuencia nos muestra las transformaciones (tratamientos y conversiones) que ha sufrido O_1 y la diferencia de sentidos de O_2, O_3 y O_4. Tomando en cuenta las expresiones de Duval, de este proceso se puede deducir que las dificultades en el aprendizaje de las fracciones que tienen los estudiantes, se originan en el desconocimiento que tienen los profesores sobre estas cuestiones de carácter semiótico.

Otra de las dificultades que puede estar sujeta a la representación simbólica interna y externa de las fracciones es su representación simbólica. Porque como concepto necesita un sistema de simbolización propio y diferente de los números naturales y números enteros; aunque las propiedades y las operaciones tengan similitud, sus representaciones simbólicas difieren. En las fracciones la representaciones internas u objetos del pensamiento, ubicadas en la mente de cada uno de los individuos, son diferentes de las representaciones externas de carácter semiótico, dadas por signos, símbolos o gráficos (Rico, Castro, & Romero, 2000, p. 6).

Finalmente, según Duval (2003), muchas de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se originan en el desconocimiento que tienen los profesores sobre los fenómenos relativos a estas cuestiones (D'Amore, 2006).

2.2.1.2 Dificultades conceptuales

Uno de los aspectos que podrían determinar el fracaso, se podría deber a que la enseñanza prioriza el significado del fraccionamiento de la unidad así como el dominio en las reglas de cálculo, dejando de lado la gran variedad de situaciones que están vinculadas con el significado de las fracciones (De León & Fuenlabrada, 1996, p. 269). Para Nunes et al. (2006) los estudiantes tienen dificultades muy considerables con el aspecto conceptual de las fracciones. No se debe olvidar que el origen de tales dificultades no es extrínseco, sino intrínseco al individuo.

La clasificación de dificultades varía según los investigadores. Para Friz Carrillo, Sanhueza Henríquez, Sánchez Bravo, Belmar Mellado y Figueroa Manzi (2008) las dificultades conceptuales se clasifican en: dificultades asociadas a la *posición espacial*, *conocimientos previos* como la *noción de conjunto*, *orden de las fracciones* y *uso de la recta numérica*, *fracciones equivalentes* y *dificultades en la adición y sustracción* de fracciones con igual denominador. También dentro de este grupo se encuentran las dificultades en las simplificaciones (Beato Sirvent, 2010).

Para Ohlsson (1989), citado por Sánchez García (2001, p. 19) "la dificultad está asociada con las fracciones es de "naturaleza semántica", indicando que el complicado significado de las mismas, en parte es consecuencia de la dificultad que conlleva al combinar los significados de a y b para generar un significado conjunto para a/b. Precisamente una gran parte de los errores que los niños cometen al trabajar con fracciones tienen su origen en pensar en la similitud, tanto en el lenguaje como en el simbolismo que presentan los números naturales".

Al estudiar las fracciones los niños/as se enfrentan a nuevas situaciones de un nuevo sistema numérico de números racionales (Salazar, Martinic Valencia, & Maz Machado, 2011; Zapata Cardona, 2009); tales números no tienen el siguiente, que la multiplicación no siempre se puede interpretar como una suma reiterada y que no siempre hace el producto mayor que cada uno de sus factores. Otros aspectos que el estudiante tiene que comprender es por ejemplo, el número 4 de la fracción $\frac{1}{4}$ no significa las cuatro unidades que se podían contar cuando se trabajan con los números naturales. Este 4 en el nuevo sistema numérico significa el número de particiones; esta transición no es fácil de hacer para un estudiante de educación primaria.

Teresa Mateos Ponce (2008), identifica las dificultades en las operaciones con los números fraccionarios:

a) Debido al conocimiento de los números naturales, no pueden diferenciar cuál de los números es más grande $\frac{1}{2}$ *o* $\frac{1}{5}$. Dificultad en la comprensión de la expresión del número fraccionario.

b) Diferencia de los números naturales que tiene un antecedente y un subsecuente, mientras que las fracciones no lo tiene; característica que confunde al niño y que puede pensar ¿qué número sigue a 1/3?

c) En la resolución de problemas. Los contextos de los problemas y las exigencias del conocimiento previo dificultan la comprensión del problema y su respectiva solución.

En conclusión, las dificultades que tienen los estudiantes durante el aprendizaje del concepto de fracción están relacionadas por la falta de comprensión de dicho concepto, consecuencia de los obstáculos didácticos que algunas veces es promovido por los conceptos anteriores, los profesores, la escasez de materiales concretos y situaciones reales. Quizás un gran problema es la presentación tradicional de las fracciones y que en el contexto escolar se haya producido un abuso de las representaciones continuas, normalmente vinculadas al círculo (la célebre “tarta”), sin tener en cuenta otras representaciones continuas (como el rectángulo), o discretas (las fichas) (Sánchez García, 2001, p. 21); como la difícil elección de los ejemplos o situaciones que debe realizar el profesor para construir el concepto de fracción (Larcombe, 1985, p. 34).

2.2.1.3 Inadecuado proceso de enseñanza

Reid Lyon (1996, p. 9), expresa que “por desgracia, un factor importante que no contribuye al aprendizaje de las matemáticas puede ser la inadecuada preparación de los profesores por las facultades de educación. Estudios recientes han encontrado que la mayoría de los maestros regulares sienten que no están preparados para hacer frente a las diferencias individuales en las capacidades de aprendizaje en los salones de clase”. Por ejemplo, sólo uno de 23 maestros estadounidenses proporcionan una representación conceptualmente correcto, sin embargo surge un problema pedagógico para una situación relacionada con la división entre las fracciones ($1\frac{3}{4}$) $\frac{1}{2}$ = $3\frac{1}{2}$). (Moyer, 2001, p. 192).

Los profesores, sin embargo, con frecuencia enseñan lo que se les ha enseñado. Hay mucha evidencia de que los maestros no están capacitados para hacer frente a las diferencias individuales de aprendizaje en general y, específicamente, no están preparados para enseñar a los estudiantes de orígenes muy diversos, que llegan a sus clases con una amplia gama de habilidades iniciales (Lyon et al., 2001, p. 22).

Para De León y Fuenlabrada (1996, p. 269), el fracaso escolar está relacionado al desconocimiento de los maestros, tanto de los esquemas de conocimientos que necesitan los alumnos para darle significado a las fracciones, como de los modelos de conocimiento implícito de los niños sobre fracciones. Más aún, los docentes plantean a los niños de manera prematura y con excesiva prisa el uso de lenguaje convencional, las sumas, los algoritmos y la representación simbólica sin reconocer que necesitan ciertos esquemas (de partición, equivalencia, conservación del área, etc.) para darle sentido al lenguaje simbólico y las reglas de operaciones de cálculo (Larcombe, 1985, p. 38).

En consecuencia, se pone de relieve la importancia de la profundidad y amplitud en la comprensión de las matemáticas que tienen los maestros, para entender los fenómenos explicados y ayudar a los niños/as a orientar un aprendizaje adecuado disminuyendo las dificultades. Caso contrario, los niños/as no harán el enlace adecuado entre las palabras y los símbolos, aunque pueden utilizar los nombres correctos, pero no escribir correctamente la fracción y menos aún comprenderla.

2.2.1.4 El lenguaje y comunicación del profesor

El lenguaje es un medio de expresión y comunicación que nos permite estar en contacto con otros mediante una convención aprendida; y entre el lenguaje y las matemáticas, existen fascinantes conexiones: entre los usos cotidianos y especializados, y entre terminología y comprensión. Es decir, el lenguaje es como un facilitador del desarrollo de conceptos en las matemáticas (Larcombe, 1985, p. 40).

Clare Lee (2009, p. 73) sostiene que para "casi en todas las áreas de las matemáticas es importante aprender tanto el vocabulario como la forma en que se utiliza. Los estudiantes necesitan desarrollar este lenguaje para acostumbrase al modo en que usan las expresiones y para empezar a utilizar los términos matemáticos para definir la red de conceptos e ideas que abarcan esos términos". Asimismo, para Mateos Ponce (2008, p. 202) entre las matemáticas y el lenguaje escrito, existe una relación especial: el razonamiento matemático depende de las abreviaturas y símbolos, y para su desarrollo, hace falta utilizar la notación escrita, sin que pueda transferirse con facilidad al lenguaje hablado. En tal sentido, se podría decir que en estas circunstancias existe dificultad, inclusive en la forma de comunicar las expresiones verbales, escritas, así como en las simbologías en las matemáticas.

Mateos Ponce (2008, p. 205) citando a Vergnaud (1991) manifiesta que la comprensión de los problemas, está en la decodificación del enunciado, el problema debe ser presentado con un lenguaje que tenga cierto nivel de complejidad y controlar la posibilidad de resolver el problema.

Consideramos que una de las dificultades en la resolución de problemas es la comprensión del texto, podría ser que no esté escrito con un lenguaje apropiado para el nivel de los niños/as o con demasiada simbología. Otra de las dificultades se relaciona con una cantidad de información sin expresión gráfica que ayude a comprender el enunciado; en algunos casos los enunciados requieren información previa de algoritmos que son resultados de la mecanización de los procedimientos en la resolución de problemas.

Asimismo, la notación de las fracciones y el vocabulario formal pueden ser algunas de las razones que originan este problema. Estudios muestran que, estudiantes del nivel universitario que tienen desconocimiento del *lenguaje matemático* conllevan una serie de deficiencias, como consecuencia, tienen fracaso en los exámenes (Ortega Dato, J. y Ortega Dato, J.F, 2001).

Es necesario que el profesor tenga cuidado en dosificar el nivel del enunciado para que sea adecuado a la edad de los escolares con un lenguaje claro y preciso, sin cometer el uso excesivo de los símbolos. Porque está claro que la abstracción de las experiencias sensoriales es más significativa y precisa si el lenguaje relacionado a las matemáticas es comunicado adecuadamente (Larcombe, 1985).

2.2.1.5 Uso de materiales educativos

En el proceso de aprendizaje de las matemáticas la presencia de experiencias concretas es fundamental para el desarrollo de conceptos (Larcombe, 1985, p. 37), porque es más rica la exploración sensorial, manipulación y observación de materiales concretos. Por lo que la enseñanza de las fracciones debe tener una instrucción previa, que debería involucrar al escolar en un sinnúmero de experiencias matemáticamente ricas que le ayuden a construir el concepto de fracción (Zapata Cardona, 2009, p. 225). Ellas podrían estar compuestas de particiones de figuras geométricas, particiones de grupos de objetos y particiones de medidas de tiempo, siempre embebidas en un contexto real.

Según los investigadores, el uso de materiales didácticos mejoran el aprendizaje de las matemáticas (Miguel Miguel & Chamoso Sánchez, 1995; Tomaz Henriques Serrano Caldeira, 2009), si es así, debemos tener buenos resultados en los exámenes de matemáticos, mayor cantidad de aprobados; sin embargo, ¿con qué frecuencia usan los materiales educativos los profesores de matemáticas? ¿Cuáles y que tipo son los materiales que con mayor frecuencia usan?, ¿qué sucede con el uso de los materiales educativos? Al respecto, es difícil otorgar respuesta.

En estudios anteriores en los que se utilizaron materiales manipulables, se deduce que el simple uso de materiales manipulativos no es suficiente si no consideramos cómo los maestros los están utilizando. La enseñanza es un sistema, entonces cada función, por sí sola, no dice mucho sobre el tipo de enseñanza que se desarrolla (Moyer, 2001).

En consecuencia, los maestros juegan un papel importante en la creación de ambientes que ofrecen las matemáticas a los estudiantes y promueven experiencias con manipulaciones y representaciones de los materiales que mejoren forma de pensar de los niños y las niñas.

2.2.1.6 Uso de tecnologías

El uso de tecnologías de información y la comunicación (TIC) en la educación se está convirtiendo en un elemento de consideración importante en la mayoría de los países. La mayor parte de ellos están incorporando el uso de ordenadores en sus escuelas con la creencia de que los estudiantes se beneficiarán de la utilización de las nuevas tecnologías (Barrera-Osorio & Linden, 2009). Pero a pesar de recibir las computadoras, capacitación y asistencia técnica, los maestros simplemente no incorporan la nueva tecnología en su enseñanza en el aula. Las investigaciones muestran que el mero entrenamiento y la dotación de equipos no parece ser suficiente.

Los resultados del trabajo de A. Gewerc y L. Montero (2013) muestran evidencias de que las creencias del profesorado acerca de los contenidos y su concepción de enseñanza se encuentran entre los elementos que frenan los procesos de cambio que podrían generar las TIC, a pesar de identificar significativos cambios en el desarrollo profesional del profesorado en la cultura profesional e institucional a través del proceso de investigación-acción colaborativa vivido. La continuidad del trabajo en los centros ha sido uno de los elementos que facilitaron estos logros.

L. Cuban (2012) señala que en algunas escuelas americanas la introducción del uso específico de las TIC, así como los iPods en las clases de geometría, permiten que los estudiantes realizaran operaciones de verificación de los ejercicios realizados con lápiz y papel en matemáticas, con resultados positivos

Barrera-Osorio y Linden (2009) señalan que las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, en especial de las fracciones, se podrían deberse, entre otras cosas, al inadecuado uso de las TIC por los profesores, con problemas de ejecución y pobres diseños pedagógicos. En cambio como hemos mencionado, la investigación que trabaja el uso de una tecnología como Logo genera el aprendizaje de las fracciones a través de los diseños de proyectos (I. Harel, 1991; Kafai, 1995). Lo cual presupone que cambiando determinadas condiciones algunas dificultades son superadas.

Por lo tanto, consideramos que la elección y uso de las tecnologías, está en manos del profesor, así como la propuesta de las unidades a desarrollar; podríamos plantear como hipótesis que, según el camino seleccionado, se podrían producir algunas dificultades en el aprendizaje del concepto de las fracciones. Estas dificultades y otras aquí no descritas son las que podrían influir directa o indirectamente el aprendizaje de los conceptos matemáticos, así como en el concepto de las fracciones.

2.2.2 Errores en el aprendizaje de las fracciones

A lo largo de la historia durante el desarrollo del conocimiento científico, el error fue un factor importante para buscar la verdad y ha contribuido al avance de las ciencias; por lo tanto, el error puede formar parte integrante del conocimiento humano y en su desarrollo histórico. Rico (1995, p. 69) sostiene, que "el error es una posibilidad permanente en la adquisición y consolidación del conocimiento y puede llegar a formar parte del conocimiento científico que emplean las personas o colectivos".

En el campo educativo, según Cantu Garza (2012), la investigación de los errores matemáticos surgen como herramienta en la enseñanza. En los Estados Unidos y Alemania existen investigaciones sobre errores, documentadas desde 1925; en Estados Unidos, Buswell y Judd (1925) mencionan más de treinta investigaciones sobre el tema; entre 1922 y 1928 en Alemania, Weimmer y Seemann (citado por Radatz 1979), investigaron los errores desde el punto de vista de la teoría de la Gestalt. En los años cincuenta, en España, Villarejo, Fernández Huerta, Centeno, Rico, Castro, González, Coriat y Molina entre otros, se abocaron a la determinación de los errores más frecuentes y a establecer las bases para una enseñanza basada en la corrección de los mismos ya que consideraron que la interpretación de los errores sirve de orientación en el proceso de enseñanza (Engler, Gregorini, Müller, Vrancken, & Hecklein, 2004).

En cuanto a los errores en el aprendizaje de las matemáticas, Engler et al. (2004, p. 26) dicen que “no podemos desconocer que los errores son la manifestación exterior de un proceso complejo en el que interactúan muchas variables: profesor, alumno, currículo, contexto sociocultural, entre otras. Aún no se ha completado un desarrollo teórico sistemático que permita clasificar, interpretar, predecir y superar errores y dificultades en busca de un aprendizaje de calidad”.

En tal sentido, los errores en las matemáticas están estrechamente relacionados con conceptos erróneos que conducen a menudo a los alumnos a establecer una conclusión absurda y a dar respuestas incorrectas. Sin embargo, se pueden caracterizar los errores desde diferentes puntos de vista; desde lo filosófico, epistemológico hasta lo práctico; así como por los tipos de errores que se cometen al resolver un ejercicio o dar solución a un problema en las matemáticas. En este momento, puntualizaremos en los errores que se comenten al realizar operaciones o dar solución a problemas con fracciones.

Un estudio sobre los errores en fracciones con niños de 5to de primaria en Bruneian, realizado por Yusof y Malone (2003), identificó 5 tipos de errores relacionados a las operaciones.

Cuadro 2.2. *Tipos de errores clasificados por Yusof*

Tipos de Error	**Problemas**	**Ejemplo de errores**
Error de agrupación	$1\frac{2}{3}+\frac{4}{7}$	$=1\frac{14}{21}+\frac{12}{21}=(1\frac{26}{21})$
Error de acción básico	Expresar 4 kg como una fracción de 10 kg	$=\frac{4}{10}=\frac{1}{2}$
Defecto en algoritmo	$\frac{\quad}{10}=\frac{1}{2}=\frac{8}{\quad}$	$\frac{5}{10}=\frac{1}{2}=(\frac{8}{4})$

Operación incorrecto	$\frac{13}{15}+\frac{8}{15}$	$=(\frac{5}{15})=(\frac{1}{3})$
Error de descuido	Calcular $\frac{3}{8}\times 64$	$=\frac{3}{8}\times 64 \quad 8\times 3=\frac{24}{1}$

Otro estudio, de Ríos García (2011) realizado acerca de las concepciones sobre las fracciones, categorizó los errores en: la incomprensión del símbolo, tecnología (errada elección de la técnica), de técnica (errada ejecución de tareas), de teoría (deficiencia en el manejo de conceptos), debido a la incomprensión del ítem o pregunta, debido a la no especificidad de la respuesta (aun y cuando el proceso es correcto), y sintáctico (2011, p. 18).

Luego Yusof (2003, p. 113) amplia los estudios sobre la resolución de problemas y detecta los siguientes errores:

a) **Error de lectura**. Los niños no responden a los problemas propuestos mediante textos. Asimismo, no tienen habilidad para responder cuando se les hace preguntas, y si lo hacen tienen respuestas equivocadas.

b) **Error de comprensión**. Dado los problemas los alumnos pueden leer, pero no saben cuáles son las preguntas que le pide responder, por lo que solamente suelen volver a escribir las cifras dadas.

c) **Error de transformación**. Los alumnos tienen dificultades en expresar sus respuestas. Por ejemplo, a la pregunta: se tiene una cinta de 4 metros y hace 10 divisiones. ¿Qué representa la longitud de cada pieza? La respuesta es 4/10 y luego escribe $2\frac{2}{4}$ y que es igual a $2\frac{1}{2}$. El error parte al realizar la división de 10/4.

d) **Error de proceso**. Yusof parte por la pregunta: Ali compró 5 paquetes de alitas de pollo. Cada paquete pesa $1\frac{1}{2}$ kg. Encontrar el total de peso de las alitas de pollo que compró. La respuesta con error de proceso es $5\times1\frac{1}{2}=\frac{5}{1}\times\frac{3}{2}=\frac{15}{2}=5$.

e) **Error de codificación**. La pregunta: Una botella contiene $2\frac{1}{2}$ litros de jugo de naranja. Si $1\frac{2}{3}$ de litros ha sido consumido, ¿cuántos litros de jugo de naranja queda en la botella? La respuesta: $2\frac{1}{2}$ – $1\frac{2}{3}$ = $\frac{5}{2}$ – $\frac{5}{3}$ sigue operando $\frac{15}{6}$ – $\frac{10}{6}=\frac{5}{6}=\frac{25}{6}$.

También, Niekerk, Newstead, Murray y Oliver (1999) en un estudio que realizaron sobre los éxitos y obstáculos que tienen los niños de 6^{to} grado sobre la concepción de las fracciones; atribuyen los errores y dificultades a la persistencia de experiencias anteriores o de la dificultad del profesor con la adaptación al nuevo enfoque pedagógico. Identificaron los siguientes errores:

a) Muchos niños expresan bien el nombre correcto de una fracción, explica sus métodos para resolver problemas; pero escriben el símbolo incorrecto. Por ejemplo, escriben $\frac{3}{1}$ en lugar de escribir $\frac{1}{3}$.

b) Algunos niños dan respuesta numérica correcta. Sin embargo hacen los trazos incorrectos al realizar las divisiones en partes iguales.

c) Cuando los niños han estado expuestos a los mismos contenidos por un tiempo prolongado, parece que el exceso hace generalizar sus normas de auto-construcción para otras situaciones similares donde no es apropiado.

d) Un error conceptual se comete, cuando comparan fracciones, no siempre comprenden que las fracciones de un todo se puede comparar. Por ejemplo, a la pregunta ¿Qué preferirías tener, un tercio de la barra de chocolate o una quinta parte de una barra de chocolate? La respuesta que se obtiene es un quinto, porque se piensa que es más grande que un tercio.

e) Otro error conceptual que los niños/as cometieron es al realizar las operaciones de adición. En algunos casos, simplemente se suman los numeradores y denominadores, la fracción fue como las suma de dos números enteros diferentes.

f) La tendencia de los niños a aplicar su marco conceptual de números enteros a las fracciones; una fracción como la interpretación de dos números enteros.

Asimismo, en un estudio sobre errores correctos en la simplificación de fracciones en educación secundaria, Beato Sirvent (2010) clasifica los errores de simplificación en: simplificar números, pero no letras, multiplicar el numerador por el denominador; no identificar el factor común, y por lo tanto, la posibilidad de simplificación; separa mal las fracciones en sumandos; cuando se simplifica todo queda el vacío.

Finalmente, a veces el error no se produce por una falta de conocimiento, sino porque el alumno usa un conocimiento que es válido en algunas circunstancias, pero no en otras, en las cuales se aplica indebidamente. En este caso decimos que existe un *obstáculo*. Con frecuencia el origen de los errores no es sencillo de identificar, aunque a veces se encuentran ciertos errores recurrentes, para los cuales la investigación didáctica aporta explicaciones y posibles maneras de afrontarlos (Juan D Godino et al., 2003, p. 70).

2.2.3 Obstáculos en el aprendizaje de las fracciones

La acepción del concepto *obstáculo* es mucho más compleja, porque está ligado a la teoría del conocimiento de Gastón Bachelard y al concepto obstáculo epistemológico; al respecto A. de Camilloni (2001, p. 12) define “como lo que ya se sabe y que, como ya se sabe, esto genera una inercia que dificulta el proceso de construcción de un saber nuevo que es, precisamente, lo que constituye el acto de conocer.

También se deriva de una idea central en la teoría de las situaciones didácticas; la idea de un obstáculo, tal como describe Guy Brousseau (1997, p. 82) que … los errores y los fracasos no tienen la función simplificada que nos gustaría jugar. Los errores son no sólo el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, de la casualidad [...] al contrario, una parte anterior del conocimiento que era interesante y exitoso, ahora se revela como falsa o simplemente no adaptadas a la situación. Los errores de este tipo no son erráticos e inesperados, ellos constituyen obstáculos.

Haciendo referencia al proceso de aprendizaje, dice Papert (1982, p. 142) "que a menudo hay obstáculos en el proceso. El conocimiento anterior frecuentemente contradice al nuevo, y el aprendizaje efectivo requiere estrategias para manejar tales conflictos". Es una barrera que se produce al momento de intentar conocer y pueden aplicarse tanto en la epistemología como a la historia, al principio pudo haber sido eficiente pero luego se muestra inadecuado". El término obstáculo designa una función en una relación de aprendizaje y no una "cosa" o una propiedad "en sí misma" (Rumelhard, 2001, p. 38).

Asimismo, para D'Amore (2001)

- Un *obstáculo* es una idea que, en el momento de la formación de un concepto, ha sido eficaz para afrontar problemas precedentes, pero se revela ineficaz cuando se trata de aplicarla a un problema nuevo.
- La posibilidad de interpretar el *error* no como el efecto de un conocimiento ausente, sino como el resultado de un *conocimiento precedente* que ha producido resultados positivos y que no *resiste* a la prueba de hechos más contingentes o más generales.
- Se tiene un *obstáculo* cuando, en el análisis histórico de una idea, se reconoce una fractura, una discontinuidad en la evolución histórico-crítica de la idea misma.

- Se tiene un *obstáculo* cuando un mismo error se verifica como recurrente, más o menos en los mismos términos.
- En la escuela, en la práctica didáctica, búsqueda de *obstáculos* es el estudio de la historia de la matemática (2001, pp. 60–61).

Duroux (1982), citado por Brousseau (1997, pp. 99–100) considera las siguientes condiciones:

- Un obstáculo es un conocimiento o una concepción, no una dificultad o una falta de conocimiento.
- Esta parte del conocimiento, produce respuestas que sean adecuadas dentro de un contexto particular, ya encontradas en experiencias anteriores.
- Pero genera respuestas falsas, si el estudiante intenta usar este conocimiento fuera del contexto. Una respuesta correcta y universal requiere un punto de vista particular y diferente.
- Por último, el obstáculo produce contradicciones ocasionales y el establecimiento de mejorar el conocimiento. La posesión de un mejor conocimiento no es suficiente para que el precedente pueda desaparecer. Por ello es esencial identificar el rechazo e incorporar el nuevo conocimiento.
- Luego reconocida su inexactitud, sigue y vuelve a surgir de forma inesperada y persistente.

En tal sentido, cuando los escolares empiezan el estudio de las fracciones, tienen una amplia experiencia con los números naturales y otros conceptos. Estos conocimientos y experiencias serán su punto de apoyo, pero también se constituirán en un obstáculo para comprender este nuevo sistema de números que no tiene la misma característica que las anteriores. Por ejemplo, el trabajo de investigación realizada con niños de 4, 5, 6, 7 y 8 años por Gould y Outhred (2006), se distinguen los obstáculos al solicitar realizar figuras sombreadas.

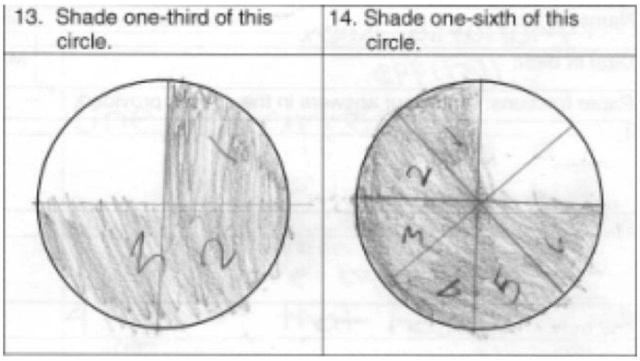


Figura 2.4. Las fracciones expresadas por niños de 5 años (Gould & Outhred, 2006, p. 267).

A la solicitud de sombrear 1/3 (un tercio) en la pregunta 13, el niño colorea los 3/4 en lugar de un tercio. Asimismo en la pregunta 14, le solicita que colorea 1/6 (un sexto) del círculo; y el niño colorea 6/8. En cada uno de las figuras los niños colorean y luego enumeran cada una de las partes como se realiza con los números naturales Se aprecia el obstáculo del conocimiento sobre números naturales en el aprendizaje del concepto de las fracciones.

En este nuevo sistema numérico, los estudiantes se enfrentan a situaciones nuevas tales como: en los naturales hay un siguiente, es decir si el número es 5, el siguiente es 6, o el anterior es 4; en cambio en este nuevo sistema no hay ese número siguiente. La experiencia de la adición en los números naturales, no le es útil al estudiante, porque $\frac{2}{7}+\frac{3}{4}$ el resultado no es $\frac{5}{11}$. Es decir, al utilizar los conocimientos de las operaciones realizados en los números naturales no concuerda con las operaciones en las fracciones; a este fenómeno Sánchez García (2001) lo denomina "efecto distractor" de los números naturales.

Por otra parte los conceptos abstractos como la "recta", "ángulo", "medida" (objetos mentales) son difíciles de comprender; mientras se trabaja con materiales manipulativos o situaciones en la vida real. El uso de estas dos situaciones, por una parte los objetos mentales (entes abstractos) y por la otra los objetos físicos manipulables, podrían constituir un obstáculo en el aprendizaje de los conceptos matemáticos; por ejemplo en una recta numérica, identificar la posición de las fracciones o el hecho de realizar divisiones; y por otra parte cuando los niños trabajan con barras de bloques multi-base, y que estas tienen volumen definido y marcas definidas. En consecuencia, es muy probable existan muchísimas situaciones similares en las matemáticas que constituyen de obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas.

Un obstáculo que aparece con mucha frecuencia es el de pasar de una fracción como parte-todo a una división como fracción de medida con valores numéricos mayores a la unidad. Por ejemplo, se tiene un pote de semillas, y se le pide al niño distribuir en tres partes iguales, el niño lo hará con facilidad y dirá que cada porción es un tercio; pero si le decimos que el pote contiene 1500 gramos de semilla, repartir en tres porciones iguales, también lo puede realizar con la ayuda de un instrumento. Sin embargo expresar como fracción 1/3 cada porción es difícil de concebir, porque cada porción tiene 500 gramos de semilla. Tampoco podrá darse cuenta fácilmente que 1/3 es operador de 1500 gramos.

Finalmente, las dificultades, los errores y los obstáculos forman parte del proceso de aprendizaje del concepto de fracción en las matemáticas. Éstos muchas veces pueden ser no detectados por el maestro; porque las causas son múltiples y que aún se esperan muchas más investigaciones de corte multidisciplinario para comprender en profundidad este fenómeno.

2.3 Didáctica de la matemática y paradigmas de investigación

La preocupación por la enseñanza de las matemáticas no es reciente, D'Amore (2008) cita a Comenius (1657) al referirse a la *grande didáctica* «como un único método para enseñar las materias… las artes, las ciencias y lenguas»; fueron necesario siglos para establecer un modo definitivo y librarse de esta concepción en la que contenido y método no estaba diversificado en función de las características del objeto de conocimiento y para que las didácticas específicas puedan asumir su estatus como tal.

Según Törner & Sriraman (2005, p. 198), el principal de estos primeros teóricos fue Adán Reise "el aritmético" que ha destacado cálculos manuales como un proceso de aprendizaje fundamental en las matemáticas. Este énfasis se encuentra en los clásicos pedagógicas del siglo XIX escrita por Johann Friedrich Herbart (1776-1841), Hugo Gaudig (1860-1923), Georg Kerschensteiner (1854-1932) (véase Jahnke, 1990; Führer, 1997; Huster, 1981). En los primeros años del siglo XX, Féliz Klein (1849) y Hans Freudenthal (1905-1990) (origen alemán) se interesó por las complejidades de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las escuelas. La influencia de este enfoque se hizo eco en la década de 1960, en la didáctica de las llamadas enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria que sirvió de aprendizaje y pre-requisito para las matemáticas en las escuelas secundarias.

La evolución de la didáctica de las matemáticas, según Josef Gascón (1998, p. 7) "está determinada por sucesivas ampliaciones de la *problemática didáctica*. Cada una de estas ampliaciones comporta cambios de su *objeto primario de investigación* y, en consecuencia, modifica la naturaleza de la didáctica como disciplina científica". Es necesario diferenciar términos. En efecto, para Godino (1991, p. 136) el término educación es más amplio que el de didáctica y, por tanto, se distingue entre Educación Matemática y Didáctica de la Matemática; sin embargo, en el mundo anglosajón se emplea la expresión "Mathematics Education" para referirse al área de conocimiento que en Francia, Alemania, España, etc. se denomina Didáctica de la Matemática.

Siendo el fin de la matemática educativa, las investigaciones sobre el estudio de dos componentes, la enseñanza y el aprendizaje, es necesario enmarcarse dentro de paradigmas consolidadas. En tal sentido surgen dos puntos de vista. Desde los inicios de la didáctica de las matemáticas como disciplina, fue consolidándose un primer enfoque sistemático, que considera el aprendizaje en general, y el de las matemáticas en particular, como un *proceso psico-cognitivo* fuertemente influenciado por *factores motivacionales*, *afectivos* y *sociales* (Gascón, 1998, p. 3).

Frente a una serie de limitaciones de este primer enfoque al que Brousseau denominó teoría clásica (Gascón, 1998); se amplía la problemática y se obtiene un nuevo objeto de estudio. Se trata de un conjunto de fundamentos que requieren una base multidisciplinar que englobe la pedagogía, la epistemología de las matemáticas, la sociología, psicología educativa, y otras disciplinas. En esta corriente, se sitúan en primer lugar, la teoría de situaciones didácticas (TSD) de Guy Brousseau; teoría antropológico de lo didáctico (TAD) de Chevalard; la ingeniería didáctica de Michèle Artigue y el enfoque ontosemiótico (EOS) de Godino, entre otras teorías (Juan D. Godino, 1991, p. 124).

A pesar de las limitaciones del enfoque cognitivo señaladas por Gascón (1998) nuestra investigación está relacionada en primer lugar con la teoría de cognitiva del aprendizaje, tomando como principal fundamento la teoría constructivista de Jean Piaget[3]. En segundo lugar, con las teorías de corte epistemológico en Didáctica de las Matemáticas, como la TSD, la TAD, el EOS y la socioepistemología basados en el constructivismo social. La teoría cognitiva, es el principal soporte en el trabajo de investigación, porque, a través del constructivismo como teoría, se propuso desarrollar actividades centradas en la interacción de las situaciones con el entorno real, donde los niños/as realizan experiencias con el fin construir el conocimiento haciendo uso de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC). Además, la Didáctica de las Matemáticas, nos permitió identificar aspectos como las dificultades, errores y obstáculos epistemológicos que los estudiantes tienen durante el proceso de la enseñanza y aprendizaje; así como la organización de los contenidos. Sin embargo,

[3] El constructivismo es visto desde distintas posturas, tales como el constructivismo radical de Ernest Von Gasersfeld, constructivismo dialéctico de los neopiagetianos y el constructivismo social Vigostky.

consideramos que ambos son elementos complementarios, una con mayor presencia que la otra y que dan soporte al trabajo de investigación.

Es necesario describir cada una de ellas, ya que su complejidad hace que se realice una revisión profunda para discernir su verdadera identidad. En esta primera parte (epígrafe 2.3) se toma en cuenta la corriente social constructivista relacionado a la didáctica de la matemática; luego, en segundo lugar (en el epígrafe 2.4) se hará un pasaje de las teorías cognitivas que están relacionados con el construccionismo de Seymour Papert y la teoría APOS de Ed Dubnisky, ya que la investigación está relacionada a estas teorías.

2.3.1 Teoría de situaciones didácticas (TSD)

La TSD analiza cuales son las interacciones que se presentan en el aula entre los actores del proceso enseñanza aprendizaje. Los términos que utilizan son la transposición didáctica, fenómenos didácticos, situaciones: fundamental, didáctica y a-didáctica, contrato didáctico, variable didáctica, obstáculos y errores, entre otros.

Una situación es un modelo de interacción entre el sujeto y un medio determinado; y la situación didáctica es todo el entorno del alumno, incluidos el docente y el sistema educativo (Brousseau, 2007). Es decir, una situación didáctica de aprendizaje comprende el proceso en el cual el docente proporciona el medio didáctico en donde el estudiante construye su conocimiento**.** La *Situación A-Didáctica* es el proceso en el que el docente le plantea al estudiante un problema que asemeje situaciones de la vida real (Chavarría, 2006).

Uno de los principales ejes es la modelización de las situaciones en didáctica; para tal efecto se clasificaron en cuatro situaciones diferentes (Brousseau, 2007, pp. 24-28): acción, formulación, validación e institucionalización.

Dadas la forma de modelización de las situaciones didácticas aparecen dos configuraciones que subyace la modelización. 1. situación a-didáctica: situación donde el alumno/a acepta como suyo el problema y produce su respuesta, sin intervención docente (conjunto de relaciones establecidas explícita o implícitamente entre un alumno o grupo de alumnos y el profesor de modo que estos adquieran un saber constituido o en constitución). 2.- situación fundamental: cada conocimiento matemático posee al menos una situación que lo caracteriza y lo diferencia de los demás (Salinas Muñoz, 2010).

Otro de los elementos principales de la TSD es el Contrato Didáctico, se refiere a la consigna establecida entre profesor y alumno, comprende el conjunto de comportamientos que el profesor espera del alumno y el conjunto de comportamientos que el alumno espera del docente. Para Godino, Batanero y Font (2003),

> "el 'contrato didáctico' regula los derechos y obligaciones del profesor y los alumnos. Es el resultado de un proceso de negociación entre los alumnos, el profesor y el medio educativo. Uno de los componentes esenciales del contrato didáctico son los criterios de evaluación explícitos, pero hay otros no explicitados que sólo se detectan cuando el profesor plantea actividades poco habituales que vulneran las reglas del contrato, lo cual produce el consiguiente desconcierto en los alumnos. Los alumnos, en su adaptación al medio escolar, llegan a desarrollar un sentido que les permite captar cuáles son las reglas del contrato didáctico en cada caso" (2003, p. 68).

Por lo tanto, al proceso de las obligaciones reciprocas de profesor y alumno bajo un conjunto de reglas (con frecuencia no enunciadas explícitamente), se denomina contrato didáctico, que es específico para el contenido enseñado, y para el logro del conocimiento objetivo de la matemática (Brousseau, 1997, p. 32).

Por otro lado, debido a las características del conocimiento matemático que incluye conceptos, sistemas de representación simbólica y procedimientos de desarrollo y validación de nuevas ideas matemáticas, Brousseau identifica cuatro tipo de situaciones: *situaciones de acción*, sobre el medio que permite el surgimiento de teorías; *situaciones de formulación*, que permite la adquisición de modelos y lenguajes explícitos; *situaciones de validación*, requieren de los alumnos la explicitación de pruebas y por tanto explicaciones de las teorías relacionadas, medios que subyacen en los procesos de demostración; y *situaciones de institucionalización*, que tiene por finalidad establecer y dar un "status" oficial a algún conocimiento aparecido durante la actividad de la clase (Juan D. Godino, 1991).

Algunos fenómenos ligados a la situación didáctica han podido ser puestos en evidencia, Brousseau identifica el efecto Topaze como aquella circunstancia en donde el estudiante llega a la solución de un problema, pero no ha sido por sus propios medios, sino porque el profesor asume la resolución del problema. Éste último ve las dificultades que tiene un grupo para llegar a la resolución de un problema, por lo cual se ve en la necesidad de indicar cuál es el procedimiento que deben seguir. Con ello no permite la construcción de conocimiento por parte de los estudiantes. En cambio, el efecto Jordain consiste en la actitud que toma el profesor cuando un estudiante da una respuesta que es incorrecta, no obstante, para no desilusionarlo le dice que "está bien", que es la respuesta correcta. Entonces, un comportamiento banal del alumno es asumido como un conocimiento válido (Chavarría, 2006).

El término *obstáculo epistemológico* fue acuñado por primera vez por el filósofo francés Gaston Bachelard en 1938. Guy Brousseau (1997, p. 84), retoma el concepto de obstáculo y lo adapta al dominio de la matemática dentro de su teoría de las situaciones didácticas, y se manifiesta en errores, que no son debidos al azar, sino que son reproducibles y persistentes. Aquellos errores no desaparecen completamente de una sola vez; se resisten, persisten, luego reaparecen, se manifiestan mucho tiempo después de que el sujeto ha rechazado el modelo defectuoso de su sistema cognitivo consciente (1997, p. 84).

Los obstáculos se clasifican según su origen. El obstáculo *ontogénico*, es cuando los estudiantes tienen limitaciones en el desarrollo de conocimientos apropiados a sus habilidades y objetivos teniendo en cuenta su edad. Los obstáculos de origen *didáctico* son los que parecen depender sólo de una elección o proyecto dentro de un sistema educativo. Y los obstáculos de origen *epistemológico* son aquellos de los cuales uno no puede ni debe escapar, debido a su papel formativo en el conocimiento que se busca. Se pueden encontrar en la historia de los mismos conceptos. Esto no quiere decir, que hay que amplificar su efecto o reproducir en el contexto escolar las condiciones históricas (Brousseau, 1997, pp. 86-87).

Luego, Chevalard (1989) ha adoptado una posición de notable generalidad para los estudios de Didáctica. Desde una perspectiva antropológica, la Didáctica de la Matemática sería el estudio del hombre (las sociedades humanas) aprendiendo y enseñando matemáticas. Sin embargo, Godino (1991) sugiere que para el éxito del programa se debe tener en consideración un conjunto de condicionantes (cognitivos, culturales, sociales, inconscientes, fisiológicos, etc.) del alumno, que juegan o pueden jugar un papel en la formación de su relación personal con el objeto de su saber en cuestión.

2.3.2 Teoría antropológico de lo didáctico (TAD)

la Teoría Antropológica de lo Didáctico propuesta por Chevallard, a inicios del 1990, está inspirada en la atención que ha centrado el investigador en las actividades de las personas implicadas en la materia de análisis, que no es solo resolver problemas, sino en comunicar la matemática como tal (Rodriguez, 2011). En este sentido, el estudio de las concepciones epistemológicas de los docentes cobra especial relevancia, por su influencia en el proceso enseñanza-aprendizaje, y en la relación del docente con el estudiante, durante su proceso formativo.

La Teoría de Transposición Didáctica, para Chevallard (2000, p. 469) se refiere a la transformación de un contenido de saber preciso en una versión didáctica de ese objeto de saber, puede denominarse más apropiadamente "transposición didáctica *strictu sensu"*. El primer eslabón marca el paso de los implícito a lo explícito, de la práctica a la teoría, de lo preconstruido a lo construido.

Para Chevallard los *objetos de saber*, son los que el profesor de matemáticas debe poseer. Las nociones matemáticas como categorías (definición, propiedades), así como las paramatemáticas que son *nociones-herramientas* de la *actividad matemática* (Chevallard, 2000, pp. 57–58).

Una vez realizadas las transformaciones del objeto del saber; el objeto a enseñar es diferente del saber sabio, pues es el nuevo contenido que podría denominarse como el saber sabio que el alumno/a va adquirir y que es diferente al significado original, ya que para introducirlo en el proceso de la enseñanza se han incorporado una serie de conceptos con el objetivo de que sea comprensible en el acto educativo. En tal sentido, la expresión transposición didáctica hace referencia a la modificación que el conocimiento matemático sufre para ser adaptado como objeto de enseñanza.

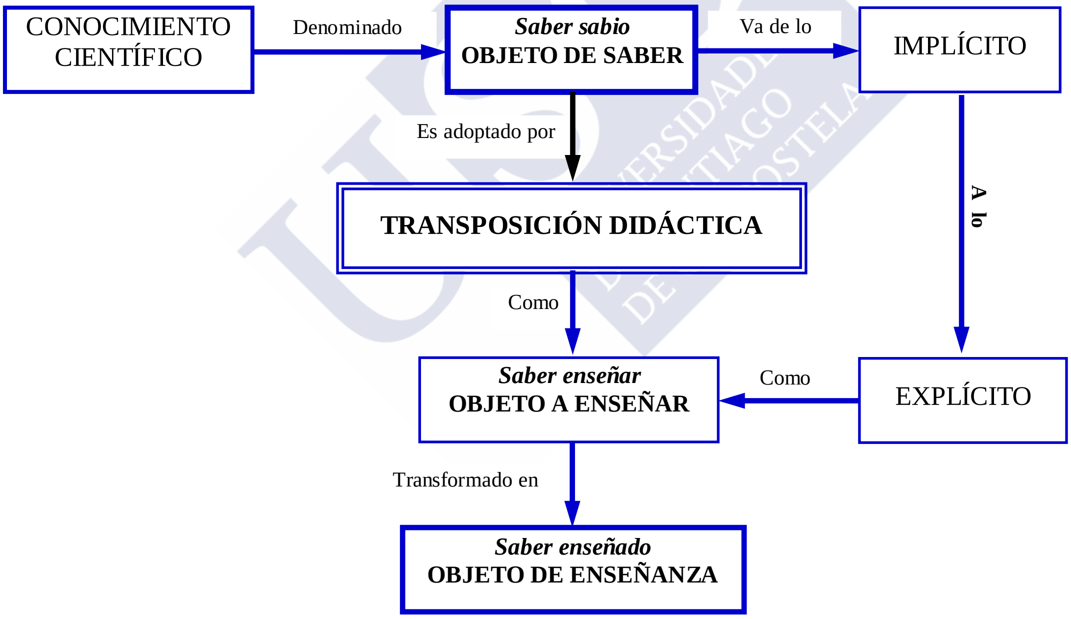


Figura 2.5. Proceso de la transposición didáctica, adaptado de Solarte E (2006).

En el marco de la didáctica fundamental, y como una consecuencia natural del desarrollo de la teoría de la transposición didáctica, ha surgido el *enfoque antropológico en didáctica de las matemáticas* (Chevallard, 1992, citado por Gascón, 1998, p. 11). Para Gascón (1998), la TAD propugna que la actividad matemática debe ser interpretada (modelizada) como una *actividad humana* junto a las demás, en lugar de considerarla únicamente como la construcción de un *sistema de conceptos*, como la utilización de un *lenguaje* o como un *proceso cognitivo*. De esta manera, el enfoque antropológico integra muchos enfoques parciales (epistemológicos, lingüísticos, psicológicos, sociológicos, ...).

La Teoría Antropológica describe la actividad matemática y el saber que de ella emerge en términos de *organizaciones o praxeologías matemáticas*. Una organización matemática es una entidad (tipos de problemas o tareas problemáticas; tipos de técnicas) que permite resolver los tipos de problemas; *tecnologías* o discursos ("logos") que describen y explican las técnicas; una *teoría* que fundamenta y organiza los discursos tecnológicos. Los tipos de problemas y los tipos de técnicas constituyen el "saber-hacer" matemático, mientras que los discursos tecnológicos y teóricos conformarían el "saber" matemático propiamente dicho (Bosch Casabó, 2000, p. 16).

Además Bosch (2000, p. 17), sostiene que "la Teoría Antropológica asume, como uno de sus postulados fundamentales, que toda actividad en sentido estricto, todo "saber-hacer", presupone la existencia de un "saber" o discurso justificativo-explicativo de la actividad. El término mismo de "praxeología", formado a partir de "praxis", actividad, y de "logos", discurso, atestigua la inseparabilidad supuesta entre el "hacer" y el "explicar" dicho hacer".

En consecuencia, en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, no sólo debemos tener en cuenta las definiciones precisas de los objetos matemáticos, sino también los problemas, las representaciones, las propiedades involucradas y las justificaciones respectivas. Los conceptos matemáticos, interpretados desde la perspectiva antropológica, se convierten en un objeto dinámico que se construye progresivamente.

2.3.3 Teoría de ingeniería didáctica

La noción de ingeniería didáctica surgió en la didáctica de las matemáticas a comienzos de los años ochenta. Se denomina ingeniería didáctica a una forma de trabajo didáctico, equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control científico. Cuya visión de la ingeniería didáctica fue abordar dos aspectos de la didáctica de las matemáticas de la época: las relaciones entre la investigación y la acción en el sistema de enseñanza; y el papel que conviene hacerle tomar a las "realizaciones didácticas" en clase, dentro de las metodologías de la investigación en didáctica (Artigue, 1995).

> …la ingeniería didáctica no es el desarrollo de un problema; sino, el término de ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clases diseñadas, organizadas y articuladas de manera coherente en un determinado tiempo por un maestro-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para determinado grupo de estudiantes. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor. Así, la ingeniería didáctica es, al mismo tiempo, un producto, resultante de un análisis *a priori*, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta en funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase (Douady, 1994, p. 37).

En tal sentido, el término ingeniería didáctica se utiliza en didáctica de las matemáticas con una doble función: como metodología de investigación y como producciones de situaciones de enseñanza y aprendizaje. Además para Artigue (2004, p. 8), en la teoría de situaciones (G. Brousseau, 1996), el objetivo fundamental no es el sujeto que aprende, sino la situación en la que el sujeto interactúa con otros y con la matemática.

Asimismo para Artigue, la teoría de situaciones didácticas ha permitido comprender mejor los mecanismos fundamentales del juego didáctico y construir ingenierías didácticas. La teoría de la transposición didáctica (iniciada por Yves Chevalard, 1985) contribuye a reforzar este enfoque sistémico de la didáctica francesa (Artigue, 2004, p. 8).

Considerando a la teoría de situaciones y la transposición didáctica como componentes de la ingeniería didáctica, De Faria Campos (2006, p. 2) ilustra a través del diagrama (ver Figura 2.6) el proceso de apropiación del saber por el sujeto. Artigue (1995, p. 40) distingue tres dimensiones ligadas a los procesos de construcción de ingenierías didácticas: dimensión epistemológica, dimensión cognitiva y dimensión didáctica.

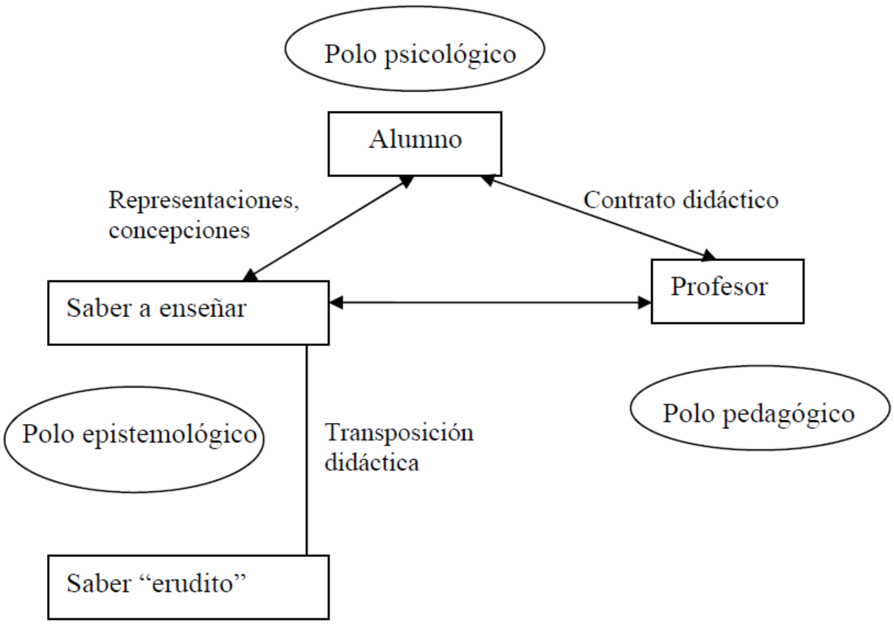


Figura 2.6. Diagrama del proceso de la Ingeniería Didáctica.

Además, la ingeniería didáctica como metodología de investigación, se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Allí se distinguen por lo general dos niveles: el *micro-ingeniería* y la *macro-ingeniería*, dependiendo de la importancia de la realización didáctica involucrada en la investigación. Nivel de micro-ingeniería, las investigaciones a este nivel son las que tienen por objeto el estudio de un determinado tema. Ellas son locales y toman en cuenta principalmente la complejidad de los fenómenos en el aula. Nivel de macro-ingeniería, son las que permiten componer la complejidad de las investigaciones de micro-ingeniería con las de los fenómenos asociados a la duración de las relaciones entre enseñanza y aprendizaje.

Por lo tanto, "la ingeniería didáctica es singular no por los objetivos de las investigaciones que entran en sus límites, sino por las características de su funcionamiento metodológico" (Artigue, 1995, p. 35).

Por otra parte, el proceso como producción de situaciones de enseñanza aprendizaje de la ingeniería didáctica considera tres fases: Análisis preliminar que considera las dimensiones cognitiva, didáctica y epistemológica del conocimiento a impartir; segunda fase: concepción y análisis a "priori" (descriptiva y predictiva) y diseño de una situación didáctica, se determinan qué variables didácticas son pertinentes y sobre cuáles se actuará, se establece las hipótesis de trabajo; la tercera fase: la experimentación es una "puesta de escena" de la situación didáctica, donde es un "proceso" en el cual el profesor implementa el producto y realiza los ajustes y adaptaciones necesarias según la dinámica de clase. La cuarta fase: análisis a posteriori y evaluación; que consiste en la revisión y validación de los resultados, a las observaciones que se tuvo en la resolución de problemas de los estudiantes.

En consecuencia, la ingeniería didáctica no sólo se apoya en resultados científicos de los experimentos realizados, sino que además realiza una toma de decisiones y el control sobre las componentes en el proceso.

Finalmente, M. Artigue (2004) sostiene que la ingeniería didáctica no implica sustituir un paradigma por otro, sino integrar diferentes aproximaciones teóricas en una construcción global y coherente, donde cada uno tiene su lugar, su función, y se organizan de manera eficaz las relaciones entre las diferentes centraciones posibles en las investigaciones didácticas y entre los diferentes niveles de análisis, del microdidáctico al macrodidáctico.

2.3.4 La socioepistemología

La socioepistemología estudia la construcción social del conocimiento; es un enfoque teórico de carácter sistémico que puede tratar los fenómenos de la producción y difusión de conocimiento desde una perspectiva múltiple.

Esta teoría forma parte de las Didáctica de la Matemática, que según Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez Sierra (2006, p. 85) y Cantoral y Farfán (2003), la aproximación socioepistemológica de la investigación matemática busca construir una explicación sistémica de los fenómenos didácticos en el campo de las matemáticas, […] interviene en el sistema didáctico en un sentido amplio, al tratar los fenómenos de producción, adquisición y de difusión del conocimiento matemático, así como en las investigaciones realizadas por Cantoral y que permite tratar en forma articulada los cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento, al estudio de la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización (modos de transmisión) vía enseñanza. Esta aproximación múltiple ha sido denominada como el acercamiento socioepistemológico (Cantoral, 1998, 1999).

Tradicionalmente, los enfoques epistemológicos asumieron que el conocimiento es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas de la evidencia empírica, ignorando en absoluto el papel de los escenarios de interés histórico, cultural e institucional en cada actividad humana. La socioepistemologia, propone el examen de conocimientos socialmente situada teniendo en cuenta que a la luz de las circunstancias y contextos sociales (Cantoral & Ferrari, 2004, pp. 67–68).

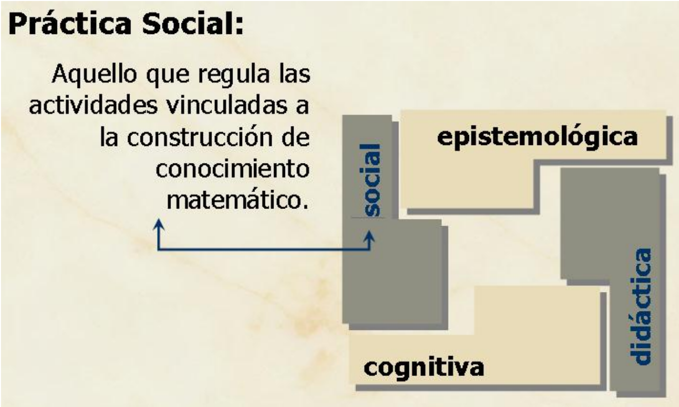


Figura 2.7. Proceso Dimensiones Construcción social del pensamiento matemático; tomada de la exposición V Foro – Mexicali. Ricardo Cantoral (Cinvestav del IPN / Clame AC).

La frase "práctica social" se refiere a la actividad del ser humano sobre el medio en el que se desenvuelve. A través de las prácticas sociales el hombre da sentido a los problemas fundamentales de la ciencia, sometiéndolos a las complejas relaciones entre ellos y su entorno (Camacho Ríos, 2006, p. 133).

Ricardo Cantoral et al. (2006, p. 85), considera a la práctica social como una "normativa" de la actividad, más que como actividad humana reflexiva o reflexión sobre la práctica o como sostiene Radford (2004, citado por Cantoral, 2006) quién considera como la "interiorización reflexiva de prácticas sociales históricamente constituidas".

Consideramos a la socioepistemología como sostiene Cantoral et al. (2006):

> "que la aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa busca construir una explicación sistemática de los fenómenos didácticos en el campo de las matemáticas, no sólo discute el asunto de la semiosis o el de la cognición de manera aislada, sino busca intervenir en el sistema didácticos en un sentido amplio, al tratar a los fenómenos de producción, adquisición y de difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple, que incorpore al estudio de la epistemología del

conocimiento, su dimensión socio cultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza” (2006, pp. 85–86).

Además, se ocupa del problema que plantea la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional. Dado que este conocimiento adquiere el estatus de saber sólo hasta que se haya constituido socialmente, en ámbitos no escolares, su difusión hacia y desde el sistema de enseñanza le obliga a una serie de modificaciones que afectan también a las relaciones que se establecen entre los estudiantes y su profesor.

2.3.5 Enfoque ontosemiótico (EOS)

En los apartados anteriores hemos trabajado sobre las teorías de la Educación Matemática desarrolladas por los franceses Guy Brousseau, Yves Chevallard y Michèle Artigue; y del mexicano Ricardo Cantoral. Grupos que han desplegado y vienen desplegando esfuerzos en una reflexión teórica sobre el objeto y los métodos de la investigación específicos en la Didáctica de la matemática. También Godino ha ampliado estos marcos para establecer un marco teórico más completo y, autores de la talla de Sierspinaka, Brousseau o D’Amore, consideran hoy en día al EOS como una de las más relevantes de las existentes en la Educación Matemática actual.

El EOS ha desarrollado diversas herramientas teóricas que se basan en varios antecedentes teóricos, que describen y analizan (Godino, 2003, p. 128). Y presenta las nociones teóricas articulando las dimensiones semióticas, institucionales y personales, epistemológica, psicológica y socio cultural en educación matemática, así como la ontología matemática en el estudio de la cognición matemática (Godino, 2002, 2003).

La propuesta de un enfoque unificado del conocimiento, como lo llama Godino, ha pasado por tres etapas (Godino, Batanero y Font, 2007). La primera etapa, se inicia en el periodo 1993 – 1998, (Godino & Batanero, 1994) con el desarrollo progresivo de las nociones de *significado institucional* y *personal* de un objeto matemático y su relación con la noción de comprensión. Desde supuestos pragmáticos, estas ideas tratan de centrar el interés de la investigación en los conocimientos matemáticos institucionalizados, pero sin perder de vista al sujeto, hacia quien se dirige el esfuerzo educativo (Godino et al., 2007a, p. 128).

La segunda etapa, comienza a partir de 1998, elaborando más detalladamente los *modelos ontológicos* y *semióticos*; ya que los problemas epistémicos y cognitivas no pueden separarse de la reflexión ontológica; de una ontología que describa la actividad matemática y los procesos de comunicación de sus "productos". Además, avanzaron en el desarrollo de una ontología específica y semiótica para estudiar los procesos de interpretación de los sistemas de signos matemáticos utilizados en la interacción didáctica (Godino et al., 2007, p. 128).

En la tercera etapa, estuvieron interesados en los *modelos teóricos* para la *instrucción matemática* (Godino, Contreras, y Font, 2006). Luego definieron seis dimensiones en el proceso de instrucción matemática, cada uno de ellos modelizable como un proceso estocástico con sus respectivos espacios de estados y trayectorias: *epistémica* (relativo al conocimiento institucional), *educativo* (funciones del docentes), *estudiante* (funciones de los estudiantes), *mediacional* (uso de recursos instruccionales), *cognitivos* (génesis de significados personales) y *emocionales* (actitudes, emociones, etc. de los estudiantes ante el estudio de las matemáticas) (Juan D Godino et al., 2007a, p. 129). Además, sostiene que el modelo ontológico y semiótico de la cognición proporciona criterios para identificar los estados posibles de las trayectorias epistémica y cognitiva, y la adopción de la "negociación de significados" como noción clave para la gestión de las trayectorias.

El enfoque teórico inicia a partir de las nociones sobre significado personal e institucional de los objetos matemáticos (Godino & Batanero, 1994), y que a partir de presupuestos de tipo pragmático, se enfatiza el papel del conocimiento institucional matemático, sin dejar de lado la importancia del sujeto como foco central de los esfuerzos educativos.

En el trabajo mencionado se concibe el significado de un objeto matemático (número, función, etc.) en términos del sistema de práctica realizadas para resolver un cierto tipo de problemas; es decir, el objeto matemático designa a todo lo que es indicado, señalado o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemáticas (Godino, 2002). El *significado personal/significado institucional* de un objeto matemático se define como un sistema de prácticas, operativas y discursivas, realizadas por una persona o en el interior de una institución para resolver un campo de problemas (Godino & Batanero, 1994).

Esta teoría incluye una categorización de los objetos matemáticos. Se propone como categorías primarias: situaciones, acciones, lenguaje, conceptos, propiedades y argumentación. El modelo ontológico propuesto se complementa y enriquece con la consideración de las cinco facetas o dimensiones duales (situaciones – problemas, acciones) como praxis y los tres componentes (concepto – definiciones, proposiciones y argumentaciones) que desempeñan un papel normativos en las matemáticas, que junto con la noción de función semiótica como entidad relacional entre los distintos tipos de entidades, permite escribir y relacionar una variedad de nociones cognitivas (D'Amore & Godino, 2007).

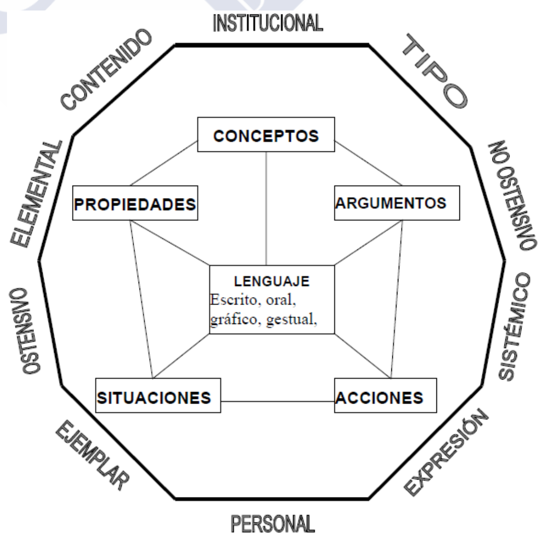


Figura 2.8. Componentes y facetas de la cognición matemática

En la estructura ontosemiótico, la enseñanza implica la participación de los estudiantes en la comunidad a través de prácticas para compartir el sentido institucional, y el aprendizaje se concibe como la apropiación de los estudiantes de estos significados. Además, debemos indicar que el enfoque EOS, tiene el triple aspecto de la matemática: como resolución de problemas socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado, así como la dimensión cognitiva individual. Asimismo, aporta herramientas teóricas para analizar el pensamiento matemático, los ostensivos que le acompañan, las situaciones y los factores que condicionan su desarrollo; propiciando un modelo unificado de la cognición e instrucción matemática (Juan D Godino, Batanero, & Font, 2007b).

2.4 Teorías cognitivas del aprendizaje de las matemáticas

En esta parte, se presentas las principales teorías cognitivas de la matemática educativa, la teoría de la comprensión de Pirie–Kieren, la teoría APOS del grupo RUMEC, el constructivismo de Piaget y el construccionismo de Seymour Papert. Luego, para el propósito del trabajo de investigación, se consideran las teorías que guardan directa relación con los objetivos propuestos. Nos referimos fundamentalmente a la teoría APOS y al construccionismo de Seymour Papert.

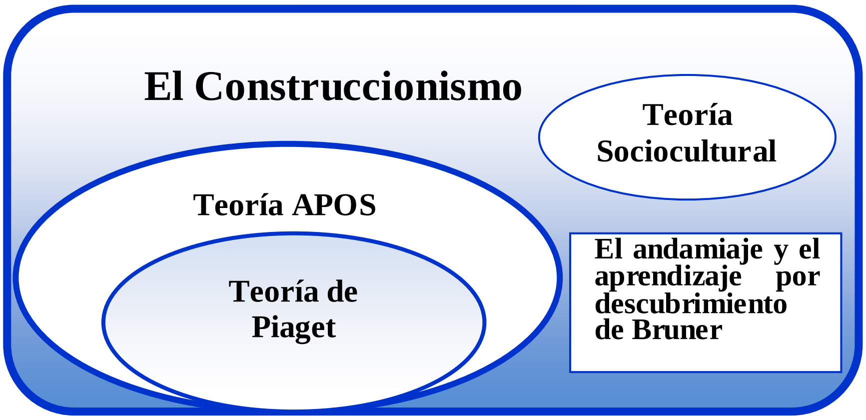


Figura 2.9. ***Teorías que sustentan el trabajo de investigación*.**

Los trabajos de Piaget, dieron origen a la teoría APOS (1985 – 1995) propuesta por Dubinsky y Asiala et al. (1996), así como a la teoría del construccionismo. Esta teoría explica cómo los niños comprenden un determinado concepto u objeto matemático a través de niveles de constructos mentales y abstracciones reflexivas. El construccionismo de Seymour Papert, se sustenta en los trabajo de Piaget, Vigotsky y Bruner y se considera una teoría más amplia que ayuda a comprender a las anteriores.

2.4.1 Teoría de la comprensión de Pirie–Kieren

2.4.1.1 Introducción a la idea de comprensión

El conocimiento, la habilidad y la comprensión son el material que se intercambia en educación. La mayoría de los docentes muestran un fuerte compromiso con los tres. Pero la comprensión demuestra ser más sutil. Por cierto no se reduce al conocimiento (Perkins, 1999, p. 69); y que el alumno que hábilmente resuelve problemas rutinarios de física o escribe párrafos con oraciones tópicas puede no comprender casi nada de física, de escritura o de aquello acerca de lo que escribe. Aunque el conocimiento y la habilidad pueden traducirse como información y desempeño rutinario, la comprensión escapa de estas normas simples.

David Meel (2003, p. 225), hace referencia a los trabajos de Browell y Sims (1946), para quienes la comprensión matemática era un concepto difícil de definir y explicaron que "es muy difícil de encontrar y formular una definición técnica exacta de comprender o comprensión". Además describieron como (a) la capacidad de actuar, sentir o pensar de manera inteligente respecto a una situación; (b) varía respecto al grado de exactitud e integridad; (c) varía respecto a la situación problemática que presenta; (d) necesita conectar las experiencias del mundo real y los símbolos inherentes; (e) necesita verbalizaciones, a pesar de contener significados menores; (f) desarrolla varias experiencias, en vez de la repetición de las mismas; (g) está influida por los métodos empleados por parte del maestro; y (h) es inferida por la observación de las acciones y las verbalizaciones.

Para David Meel (2003, p. 225), antes de 1978 la comprensión se identificaba con el conocimiento y se establecía a través del éxito frente a la resolución de problemas y operaciones algorítmicas. Luego a partir de 1978, según Meel el trabajo de Skemp introdujo la clasificación de la comprensión matemática en *relacional* como saber hacer, qué hacer y por qué se debe hacer, y la comprensión *instrumental* como tener reglas sin una razón explícita. Finalmente, Skemp, añadiría dos categorías denominadas lógica (organización de acuerdo a una prueba final) y simbólica (una conexión del simbolismo y notación con las ideas asociadas) (Meel, 2003, p. 226).

En cambio, George Pólya (1981, p. 23) identificó la comprensión como un elemento complementario a la resolución de problemas, y se expresó así:

> … se debe tratar de comprender todo, los hechos aislados mediante su recopilación con los hechos relacionados, los descubrimientos recientes a través de sus conexiones con lo ya asimilado, lo desconocido por analogía con lo acostumbrado, los resultados especiales mediante la generalización, los resultados generales por medio de la especialización adecuada, las situaciones complejas mediante la separación de las mismas en sus partes constituyentes y los detalles mediante la integración de los mismos dentro de una imagen total .

Otra manera de ver la comprensión es como construcción de concepciones operacionales y estructurales. Al respecto, Anna Sfard (1991) define la base de las matemáticas como dos entidades: *Concepto* y *concepción*. Un concepto se refiere a una idea real definida matemáticamente; y que una concepción involucra un grupo de representaciones y vínculos internos del aprendiz causados por el concepto. Además, para Sfard los conceptos matemáticos radican en su dualidad de su concepción, por lo que se puede ver como estáticos, instantáneos e integradores (estructurales, o dinámicos, secuenciales y detallados – operacionales) (Meel, 2003, p. 233). En tal sentido, una concepción operacional se relaciona con los procesos, algoritmos y acciones que ocurren a nivel físico o mental. Y una concepción estructural es más abstracta, más integrada y menos detallada que una concepción operacional (Meel, 2003, p. 233).

2.4.1.2 El modelo de Pirie y Kieren

El modelo es una estructura diseñada para la investigación y la ejecución de actividades en el proceso de aprendizaje. Pirie y Kieren (1989) desarrollaron su posición teórica respecto a la comprensión matemática, y sostienen que:

> La comprensión matemática se puede definir como algo estable pero no lineal. Es un fenómeno recursivo, y la recursión parece ocurrir cuando el pensamiento cambia los niveles de sofisticación. De hecho cada nivel de comprensión se encuentra contenido dentro de los subniveles subsiguientes. Cualquier nivel particular depende de las formas y los procesos del mismo y, además, se ve limitada por los que están fuera de él (1989, p. 8).

Dentro de la teoría de Pirie-Kieren, el conocimiento y la comprensión son más que un simple proceso de abstracción reflexiva de las experiencias sobre objetivaciones mentales. […] En la teoría de Pirie-Kieren, el desarrollo de la comprensión es visto como un proceso dinámico y activo que implica la construcción del mundo matemático para actuar sobre él (Pirie & Martin, 2000, p. 128).

La teoría de Pirie-Kieren ha crecido y ha evolucionado hasta convertirse en una teoría que puede ser utilizada por un profesor o investigador como una herramienta para escuchar y observar en el contexto de la actividad matemática. Según Pirie y Martin (2000, p. 129), esta teoría nos ofrece una forma teórica de ver la comprensión cada vez más con mayor precisión lo que ocurre. Esto es un sistema por el cual un observador (un profesor o investigador) puede observar la comprensión no en términos de una adquisición personal o un estado adquirido; sino, como un proceso continuo (preferimos utilizar la palabra "conocimiento" para la adquisición estática). Asimismo, se trata de una herramienta teórica del pensamiento que una persona está plasmando con la comprensión matemática y que podrían estar interactuando con los estudiantes que están participando en las acciones de la comprensión.

Niveles de la comprensión

Para realizar la investigación o el proceso de aprendizaje de un determinado tópico específico, la teoría de Pirie y Kieren (1992), provee de ocho niveles para la comprensión, y son los siguientes: *conocimiento primitivo* (primitive knowing), *creación de imagen* (image making), *comprensión de la imagen* (image having), *identificación de la propiedad* (properties noticing), *formalización* (formalising), *Observación* (observing) *estructuración* (structuring) e *invención* (inventising).

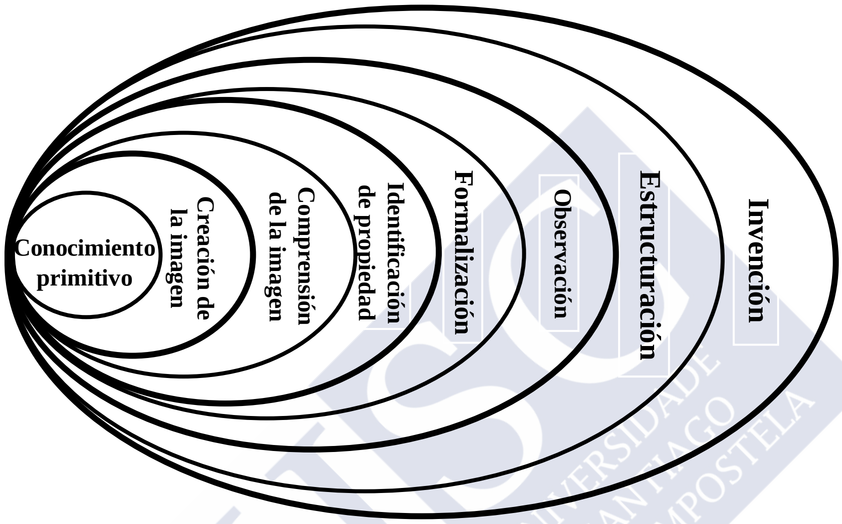


Figura 2.10. Niveles de representación diagramática del modelo para la evolución de la comprensión (Meel, 2003).

- *Conocimiento primitivo*. Aquí los estudiantes traen conocimientos (información) previos al contenido a aprender. El término primitivo no se utiliza en el sentido de nivel más bajo o insignificante, sino como el primero de los elementos "importante" y "anterior". Este conocimiento fue construido previamente fuera del contenido a aprender (Pirie & Kieren, 1992; Pirie & Martin, 2000).

- *Creación de imagen*. Es cuando el estudiante es capaz de realizar distinciones con base en capacidades y conocimientos anteriores. Estas imágenes no son necesariamente "representaciones pictóricas", sino que transmiten el significado de cualquier tipo de imagen mental. Las acciones que se realizan en este nivel se relacionan con que el estudiante realice alguna actividad, mental o física, para obtener una idea sobre un concepto (Meel, 2003, p. 237). Por ejemplo, cuando los niños cortan objetos en las fracciones (Pirie & Martin, 2000, p. 130).

- *Comprensión de la imagen*. Es la etapa en la que los alumnos ya no están ligados a la actividades de crear imágenes, ahora son capaces de llevar con ellos un plan mental para estas actividades y usarlo en consecuencia (Martin & Pirie, 2003, p. 174). Es decir, que una persona puede utilizar una construcción mental sobre un tema sin tener que hacer las actividades particulares que la han provocado (Pirie & Kieren, 1994, p. 170).

- *Identificación u observación de la propiedad*. Es cuando el estudiante puede examinar una imagen mental y determinar los distintos atributos asociados con dicha imagen. Además de observar las propiedades internas de una imagen específica, el estudiante es capaz de observar las distinciones, combinaciones o conexiones entre las distintas imágenes mentales (Meel, 2003, p. 237). Aquellas imágenes que el alumno ha examinado y ha comprendido; ahora pueden articular las propiedades y las conexiones (Martin & Pirie, 2003, p. 174). Es decir, este cuarto nivel o modo de comprensión, se produce cuando uno puede manipular o combinar los aspectos de la construcción de imágenes, propiedades específicas y estructuras relevantes.

- *Nivel de formalización*. En esta etapa el estudiante es capaz de reconocer las propiedades para abstraer las cualidades comunes de las clases de imágenes. En este estrato el estudiante tiene objetos mentales de clases similares construidos a partir de propiedades observadas, la extracción de las cualidades comunes y el abandono de los orígenes de la acción mental de la persona (Pirie & Kieren, 1989, p. 9). Para Meel (2003, p. 238) “la descripción de estos objetos mentales de clases similares tienen como resultado la producción de definiciones matemáticas completas”.

- *Nivel de observación*. Este nivel permite la capacidad de considerar y utilizar como referencia el pensamiento formal de las persona. Más allá de la relación del estudiante en la meta-cognición, el estudiante también es capaz de observar, estructurar y organizar los procesos de pensamiento personales, así como reconocer las ramificaciones de los procesos del pensamiento. En este nivel el estudiante puede producir verbalizaciones relacionadas con la cognición, sobre el concepto formalizado (Meel, 2003, p. 238) Una persona que está formalizando, también está en condiciones de reflexionar y coordinar la actividad formal, y expresar tales coordinaciones como teoremas (Pirie & Kieren, 1994, p. 171).

- *Nivel de estructuración*. Ocurre cuando un estudiante trata de pensar sobre las observaciones formales como una teoría. Significa, que el estudiante es consciente que la colección de teoremas que está interrelacionado y requiere una justificación o verificación de estas proposiciones a través de argumentos lógicos o meta-matemáticos (Pirie & Kieren, 1994, p. 171). Para Meel (2003, p. 239) en "esta etapa el estudiante comienza a observar la relación entre distintos objetos [sic sujetos]; realiza ciertas preguntas sobre ideas subyacentes; axiomas y ejemplos; relaciona estas ideas subyacentes a través de varios dominios y percibe la interconexión de diversas teorías".

- *Nivel de invención* (*inventising*). Este nivel originalmente conocido como invención (*inventing*), cuyo nombre cambió para distinguir las actividades asociadas con este nivel y las inversiones que puedan representarse en los niveles inferiores de la comprensión (Pirie & Kieren, 1994, p. 166). Además, dentro de este nivel una persona tiene la comprensión completamente estructurada, y por tanto, puede ser capaz de romper las preconcepciones acerca de esta comprensión y crear nuevas preguntas, el cual podría generar nuevos conceptos (1994, p. 171). Como resultado, dice Meel (2003, p. 239) que "el uso de la invención no implica que una persona no puede inventar en otros niveles, sino que utiliza para indicar la capacidad de liberarse del conocimiento

> estructurado que representa la comprensión total y crear preguntas totalmente nuevas que tendrán como resultado el desarrollo de un nuevo concepto". Sin embargo, "un objeto matemático, que se ha originado como un emergente del sistema de práctica que permite resolver un determinado campo de problemas, con el paso del tiempo queda enmarcado en diferentes programas de investigación. […] De esta manera, con el paso del tiempo aparecen nuevos sistemas de prácticas (sentidos) que amplían el significado del objeto" (Font, 2005, p. 113).

En consecuencia, el desarrollo de la comprensión no es un proceso unidireccional; sino es un proceso *recursivo* y *evolutivo*. Además, el desarrollo de la comprensión, es un proceso de movimiento de ida y vuelta entre y a través de los niveles; por lo que se caracteriza a la comprensión, como un proceso organizacional y dinámico. Una consecuencia de esta línea de pensamiento es que, la estructura de la comprensión tiene una cualidad de tipo fractal (Meel, 2003; Pirie & Kieren, 1994).

2.4.2 La visión constructivista de Piaget

La base fundamental para comprender el proceso de aprendizaje y el desarrollo de los conocimientos de los niños es la teoría de Jean William Fritz Piaget (1896–1980). Piaget hizo un estudio sobre el desarrollo y la formación de los conocimientos tomando en cuenta el proceso central de equilibración, que ocupa el centro de su concepción epistemológica y se considera fundamentalmente constructivista (Bärbel Inhelder, Garcia, & Vonèche, 1978).

La equilibración es un proceso que conduce desde ciertos estados de aproximados equilibrio a otros, cualitativamente diferentes, pasando por múltiples desequilibrios y reequilibraciones. Estos equilibrios cognitivos son muy diferentes a un equilibrio mecánico. Además, considera que los ciclos epistémicos y su funcionamiento se basan en dos procesos fundamentales que son los componentes de un equilibrio cognitivo, *asimilación* y *acomodación*; para ello, propone dos postulados:

a) Todo esquema de asimilación tiende a alimentarse, es decir, a incorporar los elementos exteriores a él y compatibles con su naturaleza.

b) Todo esquema de asimilación se encuentra obligado a acomodarse a los elementos que asimila, es decir, a modificarse en función de sus particularidades, pero sin perder, por ello, su continuidad (y por tanto su cerramiento en cuanto ciclo de procesos interdependientes), ni sus anteriores poderes de asimilación (Piaget, 1990, p. 9).

Considera que el segundo postulado es válido en el plano biológico con las adaptaciones fenotípicas; entonces, es necesario un equilibrio entre la asimilación y la acomodación, en la medida que la acomodación se impone y sigue siendo compatible con el ciclo, modificado o no. También ocurre una asimilación *recíproca*; cuando dos esquemas o subsistemas se aplican a los mismos objetos; por ejemplo, dos acciones, como la de mirar y coger un objeto, que pueden ser dependientes o independientes, o se coordinan sin tener necesidad del contenido real.

El equilibrio cognitivo se consigue cuando el estudiante ha alcanzado un nivel de conocimiento, pero ¿por qué se producen los desequilibrios? Al respecto, Piaget (1990, p. 14) considera que “es evidente que en una perspectiva de equilibración una de las fuentes de progreso en el desarrollo de los conocimientos ha de buscarse en los desequilibrios como tales, de por sí solos obligan a un sujeto a superar su estado actual y a buscar lo que sea en nuevas direcciones”. Los *desequilibrios* solo desempeñan una función de *desencadenadores,* ya que su fecundidad se mide por la posibilidad de superarlos; pero este desequilibrio hay que superarlo buscando una fuente real en la *reequilibración*, no en el mismo equilibrio que desencadenó el conflicto, sino en una forma superior. Por tanto, sin el desequilibrio no se habría producido una “reequilibración maximizadora” (Bârbel Inhelder, García, & Vonèche, 1978; Piaget, 1990), denominado así a la equilibración con la mejora obtenida.

Consideremos un ejemplo de desequilibro en la adición. Hasta la aparición del tema de los números enteros, los niños han trabajado con números naturales en la adición, por lo que la adición suponía la obtención de un resultado igual o mayor a uno de los componentes: 3 + 0 = 3, 2 + 5 = 7; entonces, los niños han alcanzado el equilibrio. Pero cuando le presentamos una adición con signo negativo de la forma: 4 + (– 3), produce en los niños y niñas un desequilibrio en la concepción de la operación adición, que se resolverá con la correspondiente asimilación y acomodación.

Es necesario prestar atención a cómo funciona la equilibración. Para Piaget (1990) se inicia con la *perturbación* y se define como aquello que constituye un *obstáculo* para la asimilación, como la llegada a un objetivo; todas las *regulaciones* son, desde el punto de vista del sujeto, reacciones a perturbaciones. Además, considera dos tipos de perturbaciones: a) una que se opone a las acomodaciones, que constituye las causas de fracasos o de errores, donde las regulaciones que les corresponden entrañan una retroalimentación negativa; b) la segunda; se refiere a las perturbaciones que son fuentes de desequilibrios, que consisten en *lagunas* que dejan las necesidades insatisfechas y se expresan en la alimentación insuficiente de un esquema. Una *laguna* se convierte en una perturbación cuando se trata de la ausencia de un objeto o de las condiciones de una situación que son necesarias para realizar una acción o, incluso, cuando existe carencia de un conocimiento que es indispensable para resolver un problema. Cabe aclarar; que cualquier laguna no constituye una perturbación.

Los mecanismos de regulación hacen que intervengan dos componentes de sentidos opuestos: uno retroactivo, que conduce del resultado de una acción a su repetición, y otro proactivo, que conduce a una corrección o a un refuerzo. La *retroalimentación negativa* consiste en una corrección supresora, ya que se trata de apartar obstáculos o modificar esquemas eliminando un elemento en provecho de otro. La *retroalimentación positiva* es cuando se realiza un refuerzo, ajena a cualquier negación. Es necesario determinar la naturaleza de una laguna; según Piaget "una *laguna* es un carácter negativo y llenar una laguna con un refuerzo es también una supresión, aunque afecte a esta insuficiencia como tal" (Piaget, 1990, p. 28).

Si los equilibrios funcionan por conservaciones mutuas; y la perturbación es la que amenaza a esa conservación, para neutralizar dicha perturbación existe un elemento denominado compensación (Piaget, 1990). De forma general, las regulaciones mediante retroalimentaciones negativas desembocan siempre en compensaciones, pero en su seno se pueden distinguir dos clases: las compensaciones por inversión, que consisten en anular la perturbación, y las compensaciones de reciprocidad, que consisten en diferenciar el esquema para acomodarlo al elemento inicialmente perturbador. "En el caso de las perturbaciones que se pueden producir con ocasión de la asimilación recíproca de esquemas o de subsistemas, es evidente que las regulaciones desembocan en compensaciones por reciprocidad" (Piaget, 1990, p. 31). Finalmente, añade que "si toda perturbación desencadena una regulación y si toda regulación conlleva una compensación que se orienta hacia el equilibrio, la tesis es siempre verdadera y en consecuencia tautológica" (p. 191).

2.4.2.1 Asimilación y acomodación

Piaget centra su investigación en la inteligencia y el pensamiento, en la búsqueda de conceptos formales que expliquen el conocimiento bajo dos conceptos centrales denominados asimilación y acomodación. Para Da Silva (2008) la *asimilación* es directamente derivada de la biología, y es la capacidad del organismo para incorporar el objeto de la cognición a su estructura cognitiva. Para que esto ocurra, es necesaria que ciertas transformaciones sean ejecutadas por el organismo sobre el objeto de la realidad, de modo que al colocarla en forma adecuada ocurra la absorción. La asimilación se relaciona con la adquisición de nuevos datos y la formación de vínculos entre esta nueva información y la estructura original (Meel, 2003). El resultado de este proceso es una forma de conocimiento, y no es el resultado de copiar el dato externo, tal como se nos presenta a los sentidos. Por ello, asimilar no es copiar, asimilar es dar sentido e interpretar, dar significado a una nueva experiencia para que luego sean parte de nuestros esquemas cognitivos y requiera acomodación continuamente.

La **acomodación** reorganiza parte del todo de la estructura cognitiva del individuo (Meel, 2003). Según Piaget (1976, p. 316), "esta acomodación permanece de tal modo indiferenciada de los procesos asimiladores, que no da lugar a ninguna conducta especial, sino que consiste, simplemente, en un ajuste de estos a las cosas asimiladas". La acomodación consiste en la modificación de la estructura cognitiva o del esquema comportamental para acoger nuevos objetos y eventos que, hasta el momento eran desconocidos para el niño

Finalmente, es importante resaltar que el conocimiento elemental nunca es resultado de una simple impresión impuesta por los objetos en los órganos sensoriales, sino que siempre se debe a una asimilación activa del sujeto que incorpora los objetos a sus esquemas sensomotores, es decir, a aquellas acciones propias que son susceptibles de reproducirse y de combinarse entre ellas. Por consiguiente, el aprendizaje en función de la experiencia no se realiza a partir de presiones pasivamente sufridas por el sujeto, sino a partir de la acomodación de sus esquemas de asimilación (Piaget, 1985).

Meel (2003), considera que la asimilación y la acomodación subyacentes son dos mecanismos esenciales en el desarrollo cognitivo y están compuestos por dos componentes esenciales, que son la generalización y la abstracción. En matemáticas, la generalización comúnmente se refiere al proceso de aplicar un argumento en un contexto más amplio; sin embargo, el tipo de generalización empleada por el estudiante depende de la estructura cognitiva. En cambio, la abstracción, se presenta cuando el estudiante se orienta en las propiedades de un objeto, es decir, en la estructura subyacente del contexto, y extrapola las cualidades o características comunes y las considera aisladas del objeto del cual se obtuvieron.

En resumen, Piaget; no solo construye un edificio teórico complejo y coherente sino que aporta un enfoque y una metodología nueva para abordar el problema del conocimiento humano. Además, hace posible la construcción de una ciencia del conocimiento, la epistemología genética, que no se limita a estudiar el desarrollo individual sino que abarca también el desarrollo del pensamiento científico (Socas Robayna, 2000).

2.4.2.2 La abstracción reflexiva de Piaget

El trabajo fundamental de proceso cognitivo de Piaget que él calificó como "equilibrio", se describe como el proceso por el cual el sujeto intenta comprender todo un sistema cognitivo. Tal sistema ocurre cuando el sujeto construye cognitivamente una comprensión de una información a través de un proceso llamado "abstracción reflexiva" (Dubinsky & Lewin, 1986).

2.4.2.2.1 Abstracción empírica

Para Piaget y Beth (1980, p. 212), la abstracción empírica proviene de los objetos percibidos y consiste simplemente en extraer los caracteres comunes de una clase de objetos (combinando la abstracción con la mera generalización); es decir, la abstracción empírica es como el mecanismo que deriva del conocimiento de las propiedades de los objetos, y aparece con las experiencias del sujeto y es algo externo; sin embargo, el conocimiento de aquellas propiedades es el resultado de las construcciones hechas internamente por el sujeto (Dubinsky, 1991). Ejemplo, cuando extraemos alguna propiedad de un objeto, la noción de peso, o de color, sin hacer ninguna acción sobre el objeto, entonces se trata de una *abstracción empírica*. En efecto, las abstracciones en los primeros años de infante se podría decir que son las abstracciones empíricas; en cambio en el adulto se presenta en las experiencias iniciales.

2.4.2.2.2 Abstracción seudo-empírica

Se encuentra en el intermedio entre la abstracción empírica y la abstracción reflexiva. "Se trata de una regulación, no ya de las abstracciones empíricas, sino de las abstracciones seudoempíricas [sic] (es decir, que atañen a propiedades que las operaciones del sujeto introducen en los objetos, como el orden o el número, etc., y no a las propiedades físicas). Hay por lo tanto, aquí un tipo más complejo de las regulaciones" (Piaget, 1990, p. 24). El conocimiento de esta situación se considera empírica porque tiene que ver con los objetos; sin embargo, su configuración en el espacio da lugar a realizar acciones sobre los objetos (Dubinsky, 1991). Cuando la coordinación afecta a las propiedades momentáneas de los objetos, pero introducidas en ellos por el sujeto: por ejemplo, la equivalencia entre dos filas de fichas que el sujeto habrá ordenado en correspondencia de término a término. En este caso, es evidente que se tratará de una coordinación entre acciones u operaciones del sujeto y no entre objetos, aunque la lectura de los resultados se efectúa en los objetos, pero en la medida en que se les aplica las operaciones en juego (Piaget, 1990, p. 52). Una vez más, por supuesto, entendiendo que hay una relación 1–1 entre dos conjuntos es el resultado de las construcciones informales hechas por los sujetos.

2.4.2.2.3 Abstracción reflexiva

La abstracción reflexiva consiste en extraer de un sistema de acciones o de operaciones de nivel inferior ciertos caracteres, cuya reflexión (en el sentido casi físico del término) sobre acciones u operaciones de nivel superior está garantizada por ella misma; pues no es posible percatarse de los procesos de una construcción anterior sino reconstruyéndola sobre un nuevo plano (Piaget & Beth, 1980, p. 212). Mientras que Ayers, Davis, Dubinsky y Lewin (1988, p. 2), entienden por abstracción reflexiva al proceso cognitivo por el cual una acción física o mental se reconstruye y reorganiza en un plano superior del pensamiento. Cuando la equilibración en una estructura cognitiva reequilibra una perturbación por sometimiento en mayor o menor grado de reconstrucción, a este proceso se le conoce como abstracción reflexiva. Entonces, se considera que el aprendizaje del estudiante fue exitoso, y la abstracción reflexiva ha tomado lugar (Dubinsky & Lewin, 1986). La abstracción reflexiva es el mecanismo que nos sirve para extraer o separar una característica de un objeto, a partir no exactamente de los objetos, sino de acciones que realizamos sobre ellos.

Por tanto, la abstracción empírica y la abstracción seudo–empírica se basan en el conocimiento de los objetos mediante la realización o imaginación de las acciones sobre ellos. En cambio, la abstracción reflexiva interioriza y coordina estas acciones para formar nuevas acciones y, en última instancia, nuevos objetos. La abstracción empírica se utiliza para extraer los datos de estos nuevos objetos a través de la acción mental sobre ellos, y así sucesivamente. En la *abstracción empírica* el sujeto observa una serie de objetos y abstrae la propiedad común. Por otra parte, la abstracción seudo-empírica procede de la misma manera; luego de haber realizado acciones sobre los objetos. Mientras tanto, la abstracción reflexiva es mucho más complicado, pero el desarrollo cognitivo puede darse a través de las abstracciones (Dubinsky, 1991, p. 96).

2.4.3 La teoría APOS

El mecanismo principal en la construcción de conocimiento matemático en la teoría APOS, es la abstracción reflexiva tomada de Piaget (coordinación general de acciones), en el sentido de un proceso que permite al individuo, a partir de las acciones sobre los objetos, inferir sus propiedades o las relaciones entre objetos o en cierto nivel de pensamiento, lo que implica, entre otras cosas, la organización o la toma de conciencia de dichas acciones y separar la forma de sus contenido, e insertar esta información en un marco intelectual reorganizado en un nivel superior (Trigueros, 2005).

Para Dubinsky, los trabajos de Piaget sobre el proceso de abstracción *reflexiva* fueron la clave para la construcción de los conceptos lógico matemáticos, e influyeron en el desarrollo de la teoría de Acción – Proceso – Objeto – Esquema (teoría APOS, sigla en inglés: Action, Process, Object and Schema). Meel (2003) sostiene que en el mecanismo de la construcción de estos esquemas, la abstracción reflexiva, es el corazón de la teoría APOS; además, añade que la abstracción reflexiva extiende la construcción de conexiones entre los conceptos abstraídos y constituye una estructura fuera de las abstracciones relacionadas. A continuación, se muestra la construcción de la estructura del conocimiento matemático.

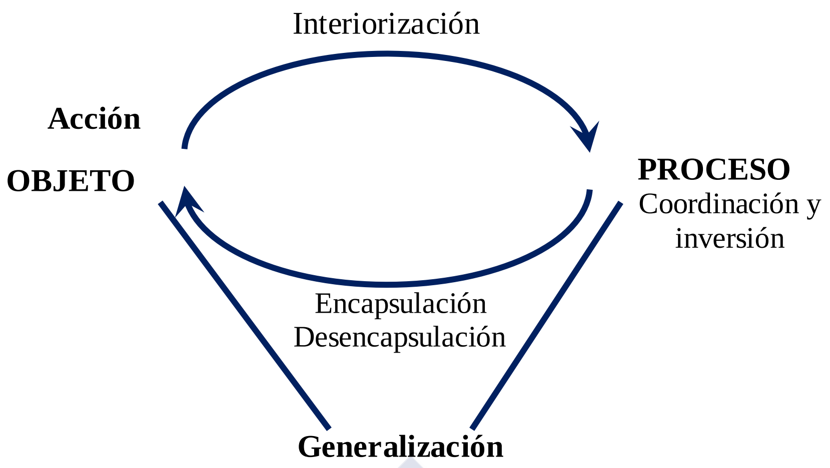


Figura 2.11. Etapas de los objetos y procesos como constructo mental (Meel, 2003).

2.4.3.1 Constructo mental de Acción

Los elementos principales de la teoría APOS son cuatro; y la piedra angular es el constructo mental *acción* (similar a los *esquemas acción* de Piaget). Según Asiala et al. (1996), la comprensión de un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales previamente construidos para formar acciones. Y para Breidenbach, Dubinsky, Hawks, y Nichols (1992, p. 249) una *acción* es "cualquier manipulación repetible, física o mental, que transforma objetos (por ejemplo, números, figuras geométricas, conjuntos, etc.) para obtener objetos".

2.4.3.2 Constructo mental de Proceso

Cuando una acción es repetida y el individuo reflexiona sobre ella, puede *interiorizar* tal acción en ***proceso***; la construcción interna permite realizar la misma acción, pero no puede ser dirigida necesariamente por estímulos externos. Según Meel (2003, p. 244), "conforme una acción se *interioriza* a través de una secuencia de repetición de la acción y el reflejo de la misma, la acción ya no se maneja por influencias externas, pues se vuelve una construcción interna llamada *proceso* (similar a las *operaciones de Piaget*)". El logro de esta concepción de proceso indica que el estudiante puede reflejar el proceso, describirlo e, incluso, revertir los pasos de transformación sin requerir el estímulo externo (Asiala et al., 1996).

2.4.3.3 Constructo mental de objeto

Cuando un individuo reflexiona sobre acciones aplicadas a un proceso específico, y es consciente del proceso como un todo, percibe qué transformaciones (acciones o procesos) pueden influir en el proceso y es capaz de construir realmente tales transformaciones. En tal sentido, se dice que el individuo reconstruyó o encapsuló el proceso como un **objeto** cognitivo. Una vez encapsulado, el objeto existe en la mente del individuo y necesita la asignación de una etiqueta para el objeto (Dubinsky, Dautermann, Leron, & Zazkis, 1994). La etiqueta resultante, permite al estudiante nombrar el objeto y conectar dicho nombre con el proceso a partir del cual se construyó el objeto perseguido. Los objetos, se pueden desencapsular hacia el proceso desde el cual se formaron. Finalmente, las acciones, los procesos y los objetos se pueden organizar en esquemas (Asiala et al., 1996, p. 8).

2.4.3.4 Constructo mental de esquema

Para Meel (2003, p. 244), "los esquemas son estructuras de organización que incorporan acciones, procesos, objetos y otros esquemas que el estudiante invoca para resolver una situación problemática de las matemáticas". Asimismo, Barbosa (2003) considera que un *esquema* para un concepto matemático es una colección individual de acciones, procesos y objetos a los que se pueden agregar otros esquemas previamente construidos. Además, las diversas construcciones se encuentran conectadas, conscientemente o no, en una estructura coherente en la mente del individuo. La construcción de dichas estructuras requiere un mecanismo llamado *generalización*, el cual permite un alcance más amplio de la utilización del esquema (Meel, 2003). Según Dubinsky, Piaget se refiere a dicha construcción como una asimilación reproductiva o generalizada, y la llamó la generalización *extensional* (Dubinsky, 1991). Dicha generalización es la más simple y familiar de la abstracción reflexiva, debido a que se relaciona con la aplicación de un esquema ya existente para un nuevo conjunto de objetos.

Otro de los componentes principales en la teoría APOS es la *descomposición genética*. Cuando se realiza un análisis de los conceptos matemáticos en el que se ponen de relieve las construcciones cognitivas que pueden ser requeridas en su aprendizaje, a este proceso se le conoce como descomposición genética del concepto (Trigueros, 2005).

2.4.3.5 Diferentes clases de abstracción reflexiva

Durante el proceso de construcción del conocimiento, los niños pasan por diferentes estadios considerados por Piaget como tres tipos de abstracciones reflexivas. Dubinsky (1991, p. 101), considera cinco abstracciones reflexivas como métodos de construcción del pensamiento matemático avanzado:

Interiorización: según Dubinsky, Piaget denomina interiorización a la construcción de procesos internos como una manera de atribuir sentido a los fenómenos observados. Además, se refiere a esa construcción como "traducción de una sucesión de acciones materiales en un sistema de operaciones interiorizadas".

Coordinación: es un proceso cognitivo en utilizar dos o más acciones para construir un nuevo proceso o un nuevo objeto. Por ejemplo, la multiplicación es la adición de adiciones; además, para multiplicar, es necesario primero encapsular (mental) la acción en un objeto.

Encapsulación: es la conversión de un proceso (dinámico) en un objeto (estático). Es decir, es la transformación mental de un proceso dinámico en un objeto cognitivo estático. Este objeto puede ser visto como una entidad total y puede ser transformado mentalmente por otras acciones o procesos. Por tanto, decimos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto cognitivo.

Generalización: es la construcción que se presenta cuando el sujeto aprende a aplicar un esquema pre-existente a una amplia colección de fenómenos. Meel (2003), considera que la *generalización* es la forma más simple y familiar de la abstracción reflexiva, debido a que se relaciona con la aplicación de un esquema ya existente para un nuevo conjunto de objetos.

Dubinsky y Lewin (1986) toman como ejemplo que la comprensión de los niños de la conmutatividad de la adición puede ser fácilmente extendida a la conmutatividad de la multiplicación. Luego, puede ser generalizada para incluir operaciones de conjuntos, tales como unión e intersección. Pero no todo es cierto, por ejemplo, en las operaciones de matrices no cumple la propiedad conmutativa.

Reversibilidad: esta construcción está presente cuando el sujeto es capaz de obtener un nuevo proceso invirtiendo un proceso interiorizado. Asimismo, la reversión es, esencialmente, la construcción de un proceso que es contraorden de un proceso internalizado (Meel, 2003).

2.4.3.6 La triada de Piaget: Intra–Inter–Trans

En su obra Psicogénisis e historia de la ciencia, Piaget y García (1982) presentan su tesis sobre la evolución de los esquemas, proponiendo tres etapas: *Intra*, *inter* y *trans*. Julie Clark et al. (1997) retomaron el trabajo de Piaget y García para analizar los mecanismos de la triada: *Intra*, *Inter* y *Trans*. La etapa *Intra*, se caracteriza por la concentración en un solo objeto en forma aislada de otras acciones, procesos u objetos. La etapa *Inter,* se caracteriza por el conocimiento de las relaciones entre las diferentes acciones, procesos, objetos y/o esquemas. Consideramos que es útil llamar pre-esquema a la colección que se encuentra en esta etapa de desarrollo. La etapa *Trans*, se caracteriza por la construcción de una estructura coherente que subyace a algunas relaciones descubiertas en la etapa inter de desarrollo.

Esta mejora del concepto de esquema nos permite explicar las acciones y afirmaciones que los niños realizan en el proceso de construcción del concepto de fracción con Squeak Etoys.

2.4.4 La visión social de aprendizaje de Vigotsky

Vigotsky hijo de una familia judía, nació en Orsha en 1896 y falleció en 1934. En su tesis doctoral sobre psicología del arte, aparecen ciertos bosquejos sobre las funciones psicológicas inferiores y superiores, lo que da origen a problemas de aprendizaje; este es un tema que desarrolló a lo largo de sus obras.

El carácter histórico y social de los procesos psicológicos superiores, el papel de los instrumentos de mediación que protagonizan en su ejecución y, en un plano metodológico, la necesidad de un enfoque genético en psicología; conforman la tesis de que los procesos psíquicos superiores tienen un origen histórico social, que los instrumentos de mediación (herramientas y signos) cumplen un papel importante en la constitución de los procesos psíquicos superiores y estos se pueden abordar desde una perspectiva genética (Baquero, 2001).

Según Vigotsky, "el desarrollo cultural del niño se caracteriza, en primer lugar, por el hecho de que transcurre bajo condiciones de cambios dinámicos en el organismo. El desarrollo cultural se halla sobrepuesto a los procesos de crecimiento, maduración y desarrollo orgánico del niño. Forma una unidad con estos procesos. Solamente mediante un proceso de abstracción podemos separar un conjunto de procesos de otro"(Baquero, 2001, p. 38).

Para Vigotsky la función inicial del lenguaje es la comunicativa. El lenguaje es, ante todo, un *medio de comunicación social*, de expresión y de comprensión (Ackermann, 2004; Baquero, 2001; Vygotsky, 1989). Vigotsky hace mayor énfasis que Piaget sobre el rol del lenguaje, y en la relación de integración entre el habla y la inteligencia, o entre el habla y el desarrollo cognitivo (Harel, 1991). Según Vigotsky (1979, p. 49) "para el niño, hablar es tan importante como el actuar para lograr una meta. Los niños no hablan sólo de lo que están haciendo; su acción y conversación son parte de *una única y misma función psicológica* dirigida hacia la solución del problema planteado". Además, para Vigotsky, los niños resuelven tareas prácticas con la ayuda del lenguaje, así como con la de sus ojos y de sus manos; esto le permite la internalización del campo visual.

El aprendizaje infantil, se inicia mucho antes de que el niño llegue a la escuela (Vigotsky, 1979). Los niños empiezan a estudiar aritmética en la escuela, pero mucho antes han tenido ya alguna experiencia con la operación de cantidades. Luego, Vigotsky (1979) demostró:

> "…que la capacidad de dos niños de idéntico nivel de desarrollo mental para aprender bajo la guía de un maestro variaba en gran medida, se hizo evidente que ambos niños no poseían la misma edad mental y que evidentemente, el subsiguiente curso de su aprendizaje sería distinto. Esta diferencia entre doce y ocho, o nueve y ocho, es lo que denominamos la *zona de desarrollo próximo*. *No es otra cosas que la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz*"(p. 133).

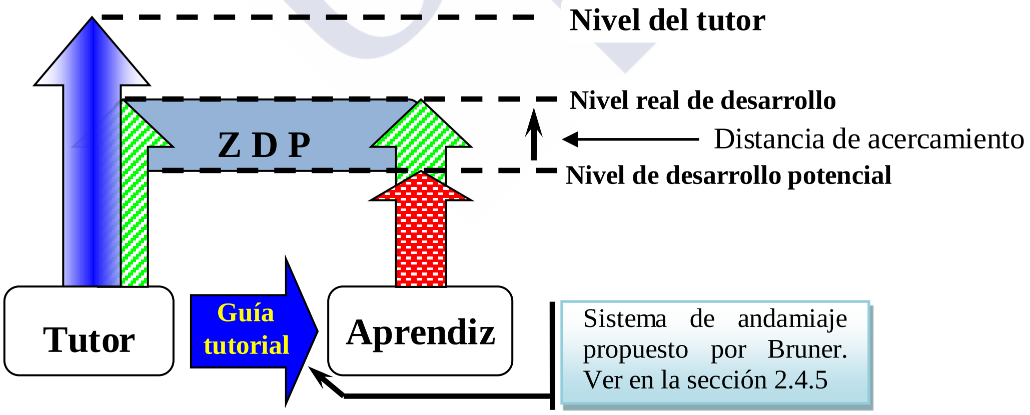


Figura 2.12. Esquema de la zona de desarrollo próximo (ZDP) de Vigotsky y el andamiaje de Bruner.

Estos dos procesos son los ejes y los que nos permiten trazar el futuro inmediato del niño/a, así como su estado evolutivo en la propuesta de las prácticas educativas por Vigotsky; el nivel real de desarrollo del niño es cuando éste tiene la capacidad de realizar un problema de modo independiente. Mientras tanto, define la zona de desarrollo próximo como la zona en la que aquellas funciones todavía no han madurado, pero se hallan en proceso de maduración; son funciones que, más adelante alcanzarán su madurez. "El nivel de desarrollo real caracteriza el desarrollo mental retrospectivamente, mientras que la zona de desarrollo próximo caracteriza el desarrollo mental prospectivamente" (Vigotsky, 1979, p. 134).

En efecto, sobre los procesos del aprendizaje "nosotros postulamos que lo que crea la zona de desarrollo próximo, es un rasgo esencial de aprendizaje; es decir, el aprendizaje despierta una serie de procesos evolutivos internos capaces de operar solo cuando el niño está en interacción con las personas de su entorno y en cooperación con algún semejante. Una vez se ha internalizado estos procesos, se convierte en parte de los logros evolutivos independientes del niño" (Vigotsky, 1979, pp. 138-139).

Idit Harel (1991, p. 29), sostiene que la teoría de Vigotsky nos ofrece varias e importantes ideas pedagógicas, pero no posee una estructura técnica que relacione el mecanismo de la mente con el desarrollo cognitivo. En cambio, el constructivismo de Piaget, tiene una estructura teórica y una estructura teórica del mecanismo de la mente y del desarrollo cognitivo.

2.4.5 El aprendizaje por descubrimiento y el andamiaje de Jerome Bruner

El aprendizaje de Bruner se basa en la categorización de los procesos mediante las cuales simplifica la interacción con la realidad a partir de la agrupación de objetos, sucesos u objetos (Esteban, 2009). El aprendiz construye su conocimiento según sus propias categorías y va modificando a partir de su interacción con el ambiente. Por tanto, el aprendizaje es un proceso activo, de asociación, construcción y representación. Aramburu Oyarbide (2004, p. 12) sostiene que el aprendizaje por descubrimiento puede infundirle confianza al estudiante. Asimismo, Esteban (2009, p.

238) considera que una fase cognitiva del pensamiento pedagógico de Bruner es el aprendizaje por descubrimiento. El instructor debe motivar a los estudiantes para que sean ellos mismos los que descubran relaciones entre conceptos y construyan conocimientos. La influencia de Piaget al respecto es evidente.

Bruner observa que los seres humanos comprenden mejor por la estimulación visual y la experiencia de la manipulación de objetos en nuestro entorno. Bruner llegó a la conclusión de que nuestras mentes funcionan de tres maneras principales: habilidades de iconos (reconocimiento visual), habilidades de manejos inactivos (manipulación de objetos inertes) y habilidades simbólicas (capacidad para comprender el razonamiento abstracto). Y que según Booth (2006, p. 3), Kay utilizó estas observaciones para crear el primer interfaz (Graphical User Interface) llamado “Xerox Star”, un interfaz gráfica de ventanas (Windowing GUI), con todo sus componentes. Y que Microsoft no tardó en ponerse en esta idea y creó su propia GUI llamado ´Windows´.

Por otra parte en el aprendizaje, las discusiones sobre la resolución de problemas o la adquisición de habilidades por lo general parten de la premisa de que el alumno está solo y sin ayuda. En consecuencia el papel central del buen maestro consiste en descubrir la ZDP de cada estudiante en un momento determinado de su desarrollo y facilitarle la ***mediación*** y el apoyo en el aprendizaje. Esa actividad del profesor constituye el “andamiaje”, que permite a un niño/a o novato, resolver un problema o una tarea para alcanzar un objetivo, que sería muy difícil alcanzar sin la ayuda de un tutor (Wood, Bruner, & Ross, 1976). Este andamiaje, consiste esencialmente en que el adulto controle los elementos de la tarea que inicialmente está más allá de la capacidad del alumno (ver Figura 2.12).

2.4.6 El construccionismo de Papert y los objetos con los cuales pensar

El principal autor de esta teoría es Seymour Papert, matemático y eminente investigador principalmente en el campo de la matemática educativa del MIT. Se sabe que Papert trabajó con Piaget en Géneva entre los años 1950 hasta los inicios del año 1960, y fue considerado como el más brillante y exitoso discípulo recomendado por Piaget. Papert construye su modelo de aprendizaje usando la teoría cognitiva de Piaget, la teoría de inteligencia artificial, la investigación sobre las diferentes facetas sociales y afectivas involucradas en las matemáticas, la computación y las ciencias de la educación (Papert, 1980; Turkle, 1984; Minsky, 1986; citado por Harel, 1991).

En apariencia, tanto Piaget como Papert definen la inteligencia como la adaptación o la habilidad para mantener un balance entre la estabilidad y el cambio, cierra y abre, continuidad y diversidad, o en palabras de Piaget entre asimilación y acomodación. Ambos ven las teorías psicológicas como un intento de modelar a la gente y estabilizar sus dificultades. Pero, en un nivel más profundo, Piaget está más interesado principalmente en la construcción de la estabilidad interna, es decir, la génisis de la estabilidad mental interna y la capacidad del desarrollo cognitivo en sus diferentes niveles; en cambio, Papert está interesado en el cambio de dinamismo (Ackermann, 2004). Además, Piaget y Papert cuentan con similares objetivos, pero tienen diferentes significados. Piaget ve las diversas formas del conocimiento en términos de etapas, vemos diferentes enfoques del conocimiento como estilos de aprendizaje, y todos son igualmente válidos en sus propios términos (Turkle & Papert, 1990).

Seymour Papert y Marvin Minsky crearon el laboratorio de inteligencia artificial del MIT. Allí, construyeron un robot tortuga que ubicado en el suelo, se conectaba a una computadora; a través de ésta los niños programaban los movimientos de la tortuga en el lenguaje de programación Logo. Durante tres décadas de trabajo, los investigadores desarrollaron una teoría denominada *construccionismo*, teniendo como soporte un lenguaje de programación: el Logo.

Según Papert y Harel (1991), la definición más simple de *construccionismo* evoca la idea de aprender haciendo y esto es lo que estaba ocurriendo cuando los estudiantes trabajaban en sus esculturas de jabón en una clase que no es matemáticas, donde cada estudiante generaban sus propias fantasías. La otra idea es la más sutil, que llama “cercanías a los objetos”, es decir, algunas personas prefieren formas de pensar que las mantienen cerca de las cosas físicas, mientras que otras usan medios abstractos y formales para distanciarse de los materiales concretos. Para Papert, estos dos aspectos de estilos son muy pertinentes con la idea de construccionismo.

Sin embargo, se puede diferenciar el construccionismo como una reconstrucción del constructivismo y como un enfoque filosófico como señala Papert y Harel (1991):

> Construccionismo —la palabra con N en oposición a la palabra con V— comparte la connotación constructivista de aprendizaje como “construcción de estructuras de conocimiento” independientemente de las circunstancias del aprendizaje. Luego, agrega la idea de que esto ocurre de manera especialmente exitosa en un contexto donde el aprendiz esta conscientemente comprometido a construir una entidad pública, ya sea un castillo de arena en la playa o una teoría del universo (1991, pp. 1–11).

Resnick (2001) considera que en el construccionismo existen dos tipos de construcción. En el primero, el aprendizaje es un proceso activo mediante el cual las personas construyen activamente el conocimiento a partir de sus experiencias en el mundo (basadas en la teoría constructivista de Piaget). El segundo, agrega la idea de que los seres humanos construyen su conocimiento con particular eficacia cuando participan en la construcción de productos que son personalmente significativos, como castillos de arena, máquinas con Lego o programas de computación. Según Kafai y Resnick (1996, p. 2), el construccionismo no es un conjunto de ideas estáticas. Esto significa que existen cambios en todas las direcciones, porque los investigadores están continuamente actualizando, reconstruyendo nuevas actividades educativas y nuevas herramientas.

Finalmente, se puede concebir el construccionismo desde una perspectiva mucho más amplia como sostiene George Jachewatzky-Hashaviah (2011), que el construccionismo es un enfoque filosófico y, a la vez, es un método y una praxis educativo. Se construye en y deviene de la naturaleza misma en toda la biosfera de esta pelotita que llamamos "tierra" (*aunque la mayor parte de ésta es agua…*) desde hace más de 4 mil millones de años… El Construccionismo es, por ende, una actividad natural y biológica antes que un enfoque filosófico o un paradigma teórico o un método práctico. Al instrumentar el construccionismo, estamos devolviendo lo "natural" a la actitud, acción y hecho de "aprender" (o de *construir, adquirir, desarrollar y actualizar* cuerpos o sistemas de *conocimientos, comprensiones, actitudes y aptitudes*).

2.4.6.1 Filosofía del lenguaje de programación Logo

A finales de la década de los 60, Seymour Papert desarrolla junto con sus colaboradores del laboratorio de inteligencia artificial del MIT, un lenguaje para ordenadores que denomina Logo. Siendo ésta una alternativa que posibilita el uso de ordenador para apoyar el aprendizaje desde los primeros niveles (Cajaraville Pegito, 1989, p. 111).

El lenguaje de programación Logo es uno de los primeros lenguajes desarrollados en el campo de la educación; el lenguaje Logo fue el pilar y base del construccionismo de Papert. Hereda la filosofía del lenguaje de programación de la versión pura de Lisp (Murray-Lasso, 2005, p. 177), Lisp 1.5 (List programming) que dio origen a Logo, y es usado por muchos en el campo de la inteligencia artificial por su funcionalidad en el procesamiento de listas (Sammet, 1972, p. 603).

Tanto el construccionismo como el Logo se sustentan en la teoría de Piaget; sin embargo, a diferencia de Piaget, Papert atribuye mayor importancia al efecto del medio en que se desenvuelve el aprendizaje (Cajaraville Pegito, 1989; Papert, 1982), y a la idea de la resolución de problemas; ya que al igual que Polya está en desacuerdo con la enseñanza sobre números y gramática que se producen en la escuela, ya que no se les enseñan a pensar (Papert, 1995, p. 100), porque la mejor manera de aprender es haciendo.

Según Papert (1980a, 1982, pp. 17–18), en todo el mundo, grandes industrias están produciendo los llamados software educativo para instrucción asistida por computadora para enseñar a los niños (podría decirse que la computadora se utiliza para programar al niño). En cambio con Logo, los niños pueden hacer su propio software educativo (el niño programa la computadora), y al diseñar el software, aprenden mucho y adquieren un dominio sobre una de las tecnologías más modernas y poderosas.

Papert estimula el uso de Logo no sólo como lenguaje de programación, sino como filosofía educativa, al sostener que la cultura Logo enriquece la interacción entre los estudiantes y los maestros, […] además, los innovadores educacionales deberían ser antropólogos sensibles a la cultura circundante para utilizar su dinámica en sus intervenciones educativas; porque al realizar actividades y programaciones con Logo, estas están acompañadas por un tipo de reflexión epistemológica; además los ambientes Logo se aparecen a las escuelas de samba en algunos aspectos. La semejanza más profunda proviene que en ellos la actividad matemática es una actividad real compartida por novatos y expertos. La actividad es tan variada y tan rica en descubrimientos (Papert, 1982).

Una de las característica fundamentales de partida de Logo fue popularizar la "geometría de la tortuga" basada en las propiedades intrínsecas de las figuras; asimismo la simplicidad que ofrece para construir un vocabulario propio. Las funciones principales de la programación fue (a) *primitivas* (función base), que transmite una orden específica (conceptos de primer orden) a la computadora; (b) los *procedimientos*, permiten establecer conceptos de orden superior; y (c) procedimientos *recursivos*, que permite abreviar la ejecución de los procedimientos, siendo ésta una herramienta poderosa (Cajaraville Pegito, 1989, p. 113).

2.4.6.2 Filosofía y epistemología del construccionismo

El Construccionismo es una filosofía de la educación; sostiene que los niños aprenden haciendo, explorando y descubriendo, en lugar de recibir una información pre-envasada (Papert, 1986). Es un proceso guiado y de colaboración en el que incluyen comentarios de sus compañeros, no solo de los maestros (Kayton, Vosloo, & Sparks, 2008). En este caso, ambos se refieren al aprendizaje de los contenidos de matemáticas u otras áreas de las ciencias mediante las construcciones y reconstrucciones y no como una simple transmisión de la información a los alumnos.

Para Turkle y Papert (1990, p. 129), en el construccionismo la palabra epistemología tiene un sentido más cercano a Piaget que a la del filósofo. En el uso tradicional, el objetivo de la epistemología es indagar sobre la naturaleza del conocimiento y las condiciones de su validez. En cambio, la epistemología del construccionismo tiene como base la epistemología de Piaget, que investiga dentro de la naturaleza el conocimiento, y hace un estudio comparativo de las diversas clases de conocimiento, encontrada en las diferentes edades de los niños. Además, Papert dice que difiere de Piaget en un punto muy importante: si Piaget ve las diversas formas del conocimiento en términos de estadíos desde un punto de vista formal, Papert las diferentes aproximaciones al conocimiento como estilos, y cada estilo igualmente validado con sus propios términos (Turkle & Papert, 1990).

2.4.6.3 El construccionismo como teoría de aprendizaje

Kafai y Resnick (1996), consideran al *construccionismo* como una teoría de aprendizaje y una estrategia para la educación. Se construye sobre el constructivismo de Piaget y afirman que el conocimiento no es la simple transmisión de profesor a alumno; sino es activamente construido en la mente del aprendiz. Los niños no consiguen ideas; ellos hacen nuevas ideas. La teoría sugiere que los aprendices probablemente realicen actividades para generar nuevas teorías cuando participan activamente en la realización de algún tipo de artefacto externo que se puede reflexionar y compartir con los demás (Bouras, Poulopoulos, & Tsogkas, 2010; Papert & Harel, 1991).

Para Bull (2005), Papert, como matemático y teórico educacional que trabajó en un rico ambiente tecnológico, considera a la computadora parte de la tecnología educacional y sugiere que podría servir como un medio para “pensar sobre el pensamiento", debido a que las computadoras son portadoras de gérmenes o semillas culturales que pueden ejercer una poderosa influencia en el pensamiento de las personas (Papert, 1982). El construccionismo es, en parte una teoría de comprensión de cómo la gente aprende más efectivamente construyendo, creando y diseñando sus propios materiales para aprender (Berland, 2009; Papert, 1982). Por tales razones, se considera que una de las herramientas imprescindibles para el aprendizaje de los estudiantes son los ordenadores y el lenguaje de programación, con los cuales los niños construyen sus conocimientos y aprenden conceptos muy avanzados.

En tal sentido para Papert, el aprendizaje significa la invención y la formulación de reglas y conceptos a través de procesos activos de pensar y lo que uno hace, cómo uno hace, y cómo uno se siente acerca de dicho objeto durante el desarrollo intelectual o diferentes etapas dentro de la resolución de problemas. A diferencia de Piaget, Papert ve el aprendizaje como algo particularmente efectivo cuando este toma lugar en un contexto rico de una actividad concreta, en el cual el sujeto (ya sea niño o adulto) construye significativamente su experiencia tal como un trabajo de una pieza de arte, una historia o un reporte de investigación (I. Harel, 1991).

Para Papert, la actividad de ensayar, errar, corregir el error (ensayo – error) conduce a los niños y a las niñas a crear y aprender. A este acto lo denomina un proceso de depuración (corrección del error). Además, hace mención que "… los errores nos benefician porque nos llevan a estudiar lo que sucedió, a comprender lo que anduvo mal y a través de comprenderlo a corregirlo" (Papert, 1987, pp. 135 – 136; citado por Badilla y Chacón, 2004).

Finalmente para Badilla y Chacón (2004), el construccionismo aborda tres conceptos clave: objetos con el cual pensar, entidades públicas y micromundos.

2.4.6.4 Objetos con los cuales pensar

El construccionismo de Papert parte de la concepción del aprendizaje; según esta, la persona aprende por medio de la interacción dinámica con el mundo físico, social y cultural en el que está inmerso (Papert & Harel, 1991). Además, Papert considera la premisa de que en las escuelas, las clases se desarrollan bajo una instrucción en la que existe transferencia direccional de conocimiento de profesor a los alumnos. También cree que el aula es un ambiente artificial e ineficiente que la sociedad se ha visto obligada a inventar debido a que sus ambientes informales fallan en ciertos dominios esenciales del aprendizaje, como la escritura, la gramática o la matemática escolar.

Según Papert (1982), las escuelas tal como lo conocemos hoy, no tendrán lugar en el futuro. Él centra especial atención en las actividades que los niños hacen con *objetos con el cual pensar* (objects-to-think-with), en un espacio totalmente diferente interactuando con los ordenadores. Si para Piaget y Papert el conocimiento se construye, entonces, la educación consiste en proveer las oportunidades para que los niños se comprometan en actividades creativas. Papert dice; que "el mejor aprendizaje no derivará de encontrar mejores formas de enseñar, sino de ofrecer al educando mejores oportunidades para construir" (Falbel, 1993)

2.4.6.5 Entidades públicas

Papert elabora su teoría sobre la base del pensamiento de Piaget, analizando cómo aprenden los niños en la era digital, y así construye la teoría del construccionismo. En otras palabras, "construccionismo es con N opuesto a la letra V del constructivismo, donde el aprendizaje es la construcción del conocimiento mediante la progresiva internalización de acciones… Además, añade la idea de que esto sucede cuando el estudiante conscientemente está dedicado a construir en una **entidad pública**, como cuando se trata de construir un castillo de arena en la playa o una teoría del universo" (Papert & Harel, 1991).

Para Vicario (2009), una entidad pública refiere a las construcciones que realizan los estudiantes diseñando para ser mostradas, discutidas, examinadas, probadas y que permiten representar visual o auditivamente ideas y conceptos para experimentar con ellos, con lo que el objeto creado, al compartirse con los demás se convierte en una entidad pública que refuerza el aprendizaje construccionista alcanzado.

2.4.6.6 Micromundos

La introducción y propagación de la tecnología informática en las escuelas desde 1980 en los EE.UU, han dado lugar a la creación de un nutrido surtido de software educativo, la mayoría tiene funciones instructivas. Sin embargo, surge otro grupo mucho más pequeño, conocido como "micromundo", se basa en principios muy diferentes, los de la invención, el juego y el descubrimiento (Rieber, 2004, p. 1).

La concepción formal de *micromundo* en la tecnología informática, aparece por primera vez en el libro editado por Taylor, "*The computer in the school: Tutor, tool, tutee*". La contribución de Papert es que las "computadoras basadas en micromundos son como incubadoras de ideas poderosas"; donde Papert (1980, p. 204) considera que un subconjunto de la realidad o una realidad es construida cuando la estructura coincide con la de un mecanismo cognitivo, además la realidad proporciona un entorno para que el mecanismo cognitivo funcione eficazmente. En el concepto subyace la idea de un proyecto que invente micromundo que sean estructurados para permitir que un aprendiz humano pueda ejercer determinadas ideas poderosas o habilidades intelectuales.

Papert considera que para alcanzar este propósito es necesario diseñar nuevos ambientes de aprendizaje; estos son denominados "micromundo", que incluyen herramientas para la exploración (*objetos con los cuales pensar*) que lleva a la construcción de conocimientos. Badilla y Chacón (2004, p. 8) resaltan que "un micromundo constituye por sí mismo una entidad pública que utiliza como herramientas para su construcción objetos con los cuales pensar". Ackermann (2004), sostiene que Papert ha pasado parte de su vida creando entornos tecnológicos o micromundo, donde los niños pueden pasar el tiempo hasta con ideas riesgosas, en un terreno seguro. Por tanto, consideramos que un micromundo es un ambiente donde los niños pueden explorar, construir y reconstruir; hacer simulaciones, realizar experimentos, construir historias que los lleven a construir su conocimiento.

Uno de los principales postulados del construccionismo es que los alumnos *construyen* y *reconstruyen* activamente sus conocimientos de sus experiencias en el mundo (Kafai & Resnick, 1996, p. 2), y que el aprendizaje en ambientes del construccionismo alienta múltiples estilos de aprendizaje y representaciones del conocimiento. En lugar de dar a los estudiantes conocimientos transmitidos por generación; el objetivo, es dar a los estudiantes los recursos y herramientas para construir y perfeccionar sus conocimientos muy significativos.

Por lo tanto, la epistemología que subyace a micromundo es el construccionismo. Porque la perspectiva construccionista otorga importancia a la interacción del individuo y el mundo circundante (la sociedad y la naturaleza); entonces el aprendizaje se caracteriza por la construcción y reconstrucción mediante la interrelación con el mundo real.

2.4.6.7 El uso de las tecnologías en el aprendizaje de las matemáticas

Con la aparición del ordenador, la educación ha empezado a tener mejores expectativas; sin embargo, el uso de las tecnologías no es reciente en el campo educativo, un ejemplo de la antigüedad, es el *ábaco* con más de 3000 a.C., su uso estaba orientado a realizar cálculos matemáticos. En nuestros tiempos, esta máquina del pasado se ha reactualizado y se utiliza en el campo de la educación. Según Bliss (1999), el aprendizaje, el razonamiento y el pensamiento se realizan en diferentes contextos sociales y tecnológicos, y la manera como ellos practican con los artefactos ayuda a determinar la forma en que las personas aproximan sus situaciones.

La informática educativa comienza en 1958 con el trabajo del psicólogo B.F. Skinner, denominado "Máquinas de enseñar"; esto dio origen a la enseñanza programada (Smith, 1994). A partir de los años 60 del siglo pasado tuvieron lugar las primeras experiencias en la utilización de ordenadores en el campo educativo (Levis, 2007). Hace más de veinte años, se comenzaron a introducir las nuevas tecnologías en el aula de matemáticas. Primero, fueron las calculadoras; después las calculadoras gráficas y, en los últimos años, *software* de cálculo simbólico ejecutado en un ordenador personal (Codes & Sierra, 2005).

De acuerdo a los Principios y Estándares para la Educación Matemática NCTM (2000, p. 24) y la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales" y NC TM (2003, p. 26), "la tecnología es fundamental en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y enriquece su aprendizaje".

En la actualidad el uso de los ordenadores, dispositivos móviles (celular, tablets y dispositivos electrónicos) y la masificación de internet generaron la expansión cultural y social de la informática. Sin embargo, aún no está claro sus fines en el campo educativo. J. Dantel (2003, p. 7), hace referencia al uso de la tecnología:

> Instalar buenos computadores y conexiones a Internet en las aulas no es suficiente. También se deben saber utilizar en la forma apropiada. Esto significa que las escuelas deberán cambiar su metodología y encontrar nuevas modalidades de transmisión de conocimientos. […] Las nuevas tecnologías son muy prometedoras y capaces de revolucionar el aprendizaje, pero solo en la medida que sus actores se proporcionen a sí mismos los medios para lograrlo. Como cualquiera otra herramienta, todo depende de lo que se haga con ella. (p.7).

A Papert, debemos la introducción de los ordenadores como herramientas de aprendizaje de los niños, por lo que se podría considerar el padre de la informática educativa. El uso de los ordenadores y de otras tecnologías de la comunicación permite imaginar nuevos modos de enseñar y de aprender, ser capaces de conducir la educación hacia caminos menos tortuosos de los que atraviesa en la actualidad (Levis, 2007). Comenta Papert, en una entrevista realizada por Bennahum (1996), que los niños ahora pueden realizar cosas mucho más complejas gracias al uso de las computadoras. Entonces, estas computadoras son más que catalizadores; son el instrumento mismo que hace posible el conocimiento.

Desde los años 80 del siglo pasado, se inició en España el uso de la tecnología de información en los centros educativos. Se institucionalizó con el "Proyecto Atenea" y el "Proyecto Mercurio", impulsados por el Ministerio de Educación y Ciencia; luego, surge el programa "Nuevas Tecnologías de la Información y Comunicación" (PNTIC). De forma paralela, distintas comunidades autónomas con competencias plenas en materia educativa también crearon sus propios planes dirigidos a impulsar el uso de los ordenadores en el marco escolar.

Los proyectos "Abrente" y "Estrela" en Galicia**;** el plan "Zahara" en Andalucía; el "Plan Vasco de Informática Educativa"; el "Programa Informática a l´Ensenyament**"** de Valencia; el proyecto "Ábaco" en Canarias o el "Plan de Informática Educativa" de Cataluña fueron algunas de las experiencias institucionales desarrolladas (Area, 2007). Y finalmente en la Comunidad de Galicia, el Proyecto Abalar es un proyecto que sustancia la estrategia para la integración plena de las TIC en la práctica educativa de Galicia (Xunta de Galicia, 2012). Este proyecto está orientado a la modernización y implementación con tecnologías digitales los centros educativos y el perfeccionamiento de los profesores en las TIC.

El espíritu del proyecto "Atenea" propuesto por el Ministerio de Educación y Cultura (MEC) en 1985 tuvo un carácter experimental y era consciente de la potencialidad de las nuevas tecnologías de la información para la mejora de la *calidad de enseñanza* y del papel importante que les ha de corresponder en el futuro de la educación (Escudero & Guarro, 1989). El proyecto tuvo la orientación de dotaciones de equipamiento informático, tanto de *hardware* como de *software* a los centros educativos. La evaluación de este proyecto abarcó tanto contenidos, *software*, organización de clase, profesorado, alumnado, clima relacional y la evaluación en sí (Escudero y Guarro, 1989), los resultados no fueron alentadores, por la falta de capacitación en el uso de tecnologías del momento.

Consideramos que muchos factores perjudican en la introducción y uso de las tecnologías en la educación, y aún más en el campo de la enseñanza de las matemáticas, según EACEA/Eurydice (2011, p. 11), el uso de las TIC se admiten en todos los países de Europa, sin embargo, los datos internacionales de la encuesta muestran que las TIC no se utiliza con frecuencia en las clases de matemáticas. Asimismo, para Vinagre (2010, p. 19), "el modelo pedagógico del sistema educativo español hace hincapié en la transmisión de teorías y conceptos y *no* incluye entre sus objetivos prioritarios el aprendizaje autónomo, el conocimiento instrumental, el aprendizaje basado en problemas o el desarrollo de las habilidades sociales y comunicativas, competencias fundamentales que demanda la nueva sociedad del conocimiento". Esta afirmación puede relativizarse, porque desde la óptica de la Transposición Didáctica, el profesor realiza la re-contextualización (transformaciones) del objeto matemático a aprender para realizar el proceso de enseñanza mediante el contrato didáctico (Chevallard, 2000).

Para Papert (1982), en muchas escuelas, la frase "instrucción asistida por computadora" significa hacer que la computadora enseñe al niño. Podría decirse que *se utiliza la computadora para programar* al niño; y que en nuestros días sigue vigente esta idea. El uso de los ordenadores debe concebirse de una manera diferente. Como dice Papert (1982, p. 18), "en mi concepción, el *niño programa la computadora* y, al hacerlo, adquiere un sentido de dominio sobre un elemento de la tecnología más moderna y poderosa y, a la vez establece un íntimo contacto con algunas de las ideas más profundas de la ciencia, la matemática y el arte de construcción de modelos intelectuales".

Para Dubinsky (2000), existen diferentes formas de usar los ordenadores para ayudar a los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas y cada una tiene sus ventajas y desventajas. Por lo tanto, en el trabajo de investigación, se considera importante el uso de los ordenadores como herramienta de aprendizaje en las ciencias, porque nos brinda la ventaja de ser un ambiente de aprendizaje interactivo; porque los medios digitales desde el marco del construccionismo son herramientas sociales que promueven la democratización, la igualdad y las formas de relacionarse, organizarse, aprender, crear, transformarse, producir, procesar información, valorarla y convertirla en conocimiento. Para un buen funcionamiento es necesario encontrar nuevas fórmulas educativas que se adapten a la realidad virtual en la que viven los alumnos en la actualidad (Piscitelli, 2011).

Capítulo III:

Squeak Etoys y fracciones

3. Capítulo III. Etoys y significado de las fracciones

Esta parte expone el contenido referente a temas conceptuales específicos, como Squeak Etoys, las tecnologías de información, el diseño de proyectos. Y la segunda parte se trata del significado del concepto de fracciones.

3.1 Squeak Etoys

3.1.1 Alan Kay, Squeak Etoys y su historia

Alan Kay Curtis, considerado el padre la *programación orientada a objetos*, nació el 17 de mayo de 1940 en Springfield, Massachusetts. Estudió matemática y biología molecular, y de sus antecedentes de estudio de biología formula su analogía y postula que un ordenador ideal funcionaría muy semejante a la vida de un organismo, donde cada célula se interrelacionaría con otra para cumplir un objetivo con una función autonómica. Las células se reagrupan ellas mismas en orden para atacar otro problema (Gash, 2003).

En 1968, Kay visitó en el MIT el laboratorio de inteligencia artificial. Tuvo una conversación inicial con Marvin Minsky sobre la educación de los niños (Kay, 2004), allí nació su interés por el tema. Luego, comenzó a visitar a Papert y a discutir sobre el trabajo que realiza con el lenguaje de programación Logo. Observó los trabajos con niños y Logo en el laboratorio de Papert, quien le inspiró y le influyó. Después, en su trabajo doctoral acerca de la *gráfica orientada a objetos* en la Universidad de Utah, Kay vio la noción de computación desde otra óptica.

Realizó su investigación y desarrolló un lenguaje de programación denominado *Smalltalk*, que estaba orientado a objetos. En 1972, mientras trabajaba en el Instituto de Palo Alto (Xerox PARC), comenzó a usar Smalltalk en el campo educativo. Cuando dirigía el grupo de investigación, Kay desarrolló un ordenador modelo *laptop*; a este prototipo lo llamó *Dynabook* (origen de los ordenadores y las tablets pc actuales). Finalmente como resultado de Smalltalk, se creó Squeak[4], un lenguaje de programación amigable para los niños y de fácil uso (Gash, 2003; Parra & Luengo, 2006). Sin embargo, es necesario hacer una distinción entre Squeak y Etoys.

Haciendo un poco de historia, remontamos a 1995 cuando el grupo de investigadores Ingalls, Kaehler, Maloney, Wallace y Kay deciden diseñar un lenguaje con un ambiente educacional que sea programado por gente no experta, como los niños. Deseaban un software eficaz en los medios de acceso masivos como PDA o Internet, con tiempo de descarga rápida y que sea compatible con hardware y sistemas operativos diversos. Por lo tanto, el sistema ideal sería un núcleo pequeño y portátil de diseño simple y uniforme que puede adaptarse rápidamente a los nuevos vehículos de reparto. Consideraron el uso de Java, pero, a pesar de su promesa, Java no estaba todavía madura: las bibliotecas estaban en un estado de cambio, pocas implementaciones comerciales estaban disponibles, y las que estaban disponibles carecían de los ganchos necesarios para crear el tipo de cambio dinámico que habían propuesto (Ingalls, Kaehler, Maloney, Wallace, & Kay, 1997, p. 2).

Como ya tenían implementado Smalltalk–80. Determinaron la implementación en C, lo cual sería clave para la portabilidad, pero ninguno de ellos deseaba escribir en C. Luego empezaron a escribir en paralelo un traductor de Smalltalk a C y dejaron a Smalltalk construir su intérprete; así que en la octava semana, el intérprete tradujo por primera vez y aparece una ventana en la pantalla. En diez semanas de proyecto, se "cruzó el puente" y fueron capaces de usar Squeak para evolucionar, ya no necesitan las imágenes del puerto delantero de Apple Smalltalk. Finalmente, seis semanas más tarde, el rendimiento de Squeak había mejorado hasta el punto de que podría simular

[4] Squeak, es un lenguaje de programación que se puede obtener en: http://www.squeak.org/

su propio intérprete y ejecutar el conversor C; entonces, Squeak se convirtió completamente en autosuficiente (Ingalls et al., 1997).

Squeak es un Smalltalk moderno implementado de Smalltalk–80, de código abierto, escrito en sí mismo, muy portable y muy rápido (Black et al., 2009, p. ix; Gómez Deck, 2006, p. 16) (Ingalls et al., 1997, p. 2). Squeak es permisible y corre en plataformas Windows, Apple, Linux, iPaqs, etc. Squeak es muy portátil - incluso su máquina virtual está escrita completamente en Smalltalk[5], por lo que es fácil de depurar, analizar y cambiar.

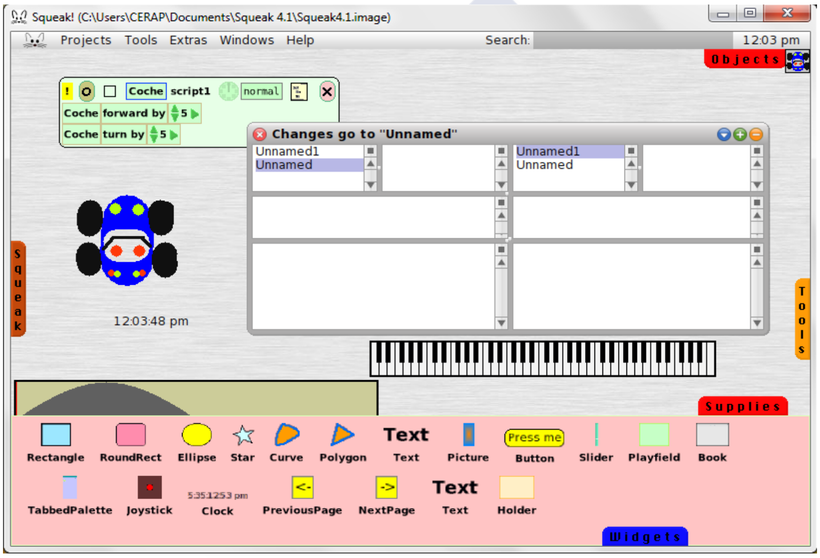


Figura 3.1. Squeak versión 4.1.

Squeak es la continuación de proyecto original de Smalltalk y cuenta con los aportes de varios de los desarrolladores originales de los años 70s; entre ellos Alan Kay, Dan Ingalls, Ted Kaehler, etc. (Gómez Deck, 2006, p. 16). Squeak es el vehículo para una amplia gama de proyectos innovadores de aplicaciones multimedia y *plataformas educativas* y entornos comerciales de desarrollo web (Black et al., 2009).

[5] El primer lenguaje de programación orientando a objetos desarrollado en Apple Computer en la década de 1970: http://www.smalltalk.org/main/

Squeak en la práctica, es un Smalltalk, donde el investigador, profesor o estudiante puede examinar el código fuente de todas las partes del sistema, incluidas las gráficas primitivas y la máquina virtual de sí mismo, y hacer cambios de inmediato y sin necesidad de ver o hacer frente a cualquier idioma que no sea Smalltalk (Ingalls et al., 1997, p. 2).

Según Ingalls et al. (1997), con Squeak puede disfrutar de las mismas prestaciones que las implementaciones comerciales de Smalltalk, sin comprometer la maleabilidad y la portabilidad. En nuestra experiencia, la base de código de bytes de la norma Smalltalk-80 es difícil de superar por su compacticidad y sencillez. Actualmente Squeak cuenta con un grupo muy grande de usuarios[6] en interconexión a través de la red.

3.1.1.1 Una breve historia de Etoys

Con el paso del tiempo, Apple se desinteresó del proyecto y, en 1996, Squeak migró a Disney Engineering Research; luego, Squeak 4.0 es publicado bajo la licencia del MIT (Aunque el tema de la licencia libre no está aún aclarado).

Etoys comenzó su desarrollo y fue dirigido por Alan Kay en Disney con el soporte del aprendizaje construccionista influenciado por Seymour Papert y el lenguaje de programación Logo. El original de Etoys[7] fue desarrollado por el equipo formado por: Scott Wallace, Ted Kaehler, John Maloney, Dan Ingalls.

---

[6] Existen usuarios de Squeak alrededor del mundo, quienes comparten información: http://www.squeakland.org/resources/community/

[7] Es un lenguaje de programación diseñado con fines educacionales por Viewpoints Research, Inc. http://www.squeakland.org/

Figura 3.2. Etoys, versión 5.0.

En el año 2001, el proyecto Etoys dirigido por Alan Kay pasó a la fundación Viewpoints Research, Inc, para mejorar la educación de los niños de todo el mundo. En el periodo 2006 – 2007, Etoys se construyó sobre la base de Squeak y fue usado por el proyecto educacional OLPC XO–1; también, fue preinstalado en todas las máquinas XO–1 laptops. En 2009, la Fundación Squeakland fue creada por Viewpoints Research, Inc, como un paso inicial para lanzar y continuar la mejora del desarrollo y uso de Etoys como un medio educacional. Luego, en enero de 2010, la Fundación Squeakland fue lanzada como una entidad separada.

Etoys en la actualidad es una herramienta educacional que permite a los niños realizar simulaciones de situaciones de la vida real a través de la programación; siendo ésta un lenguaje de programación muy versátil, proveyendo al niño de un ambiente muy amigable. Actualmente, Etoys ha sido incorporado en muchos países como herramienta educacional en sus escuelas.

En el trabajo de investigación consideramos Squeak Etoys; porque, inicialmente se tuvo la propuesta trabajar con Squeak, porque esta trae dentro de su plataforma las herramientas para crear objetos similares a Etoys. Sin embargo, la presentación de Etoys es mucho más adecuada para los niños/as, por lo que se trabajó con Etoys. Consideramos que Squeak es una herramienta que ayuda al profesor si desea realizar programaciones avanzadas cuando tiene limitaciones con Etoys.

3.1.1.2 Filosofía de Squeak Etoys

Seymour Papert es una de las personas que más ha influido en la filosofía de Squeak. Aquino (2006), haciendo referencia el origen de Squeak, considera que este lenguaje de programación extiende la filosofía fundamental de Smalltalk, que es de completa apertura, al incluir una máquina virtual. Es una genuina, completa, compacta, eficiente y robusta implementación de un ambiente Smalltalk. Squeak fue inspirado por Logo, PARC-Smalltalk, Hypercard, y starLOGO; ofrece un ambiente moderno y una fuente abierta para el desarrollo del lenguaje de programación clásico Smalltalk (Black et al., 2009; Kay, 2007a; Matsuoka et al., 2007). Es completo, con un sencillo y poderoso modelador de objetos para diferentes tipos de objetos creados por el usuario, que pueden ser ejecutados en varias plataformas. Squeak también es software libre (CIDETYS, 2011), lo cual es importante en el campo de la educación.

También, se concibe Squeak como fruto de una singular concepción epistemológica, ligada al construccionismo de Papert. Es difícil concebir la naturaleza de las tecnologías, pero su fundamentación está principalmente en precisar su origen. Al respecto Fraga y Gewerc, (2004, p. 3) consideran que "el trabajo con Squeak no se fundamenta en un programa sino en una forma de entender los procesos de aprendizaje que implica cambios metodológicos, cambios en los roles y en el desarrollo de las clases".

En España con el inicio de la utilización de Squeak se ha podido concebir, que las raíces de Squeak Etoys se encuentran en la filosofía constructivista de Piaget, quien afirmó que los niños y niñas construyen sus propias nociones acerca de cómo funciona el mundo haciendo uso de los materiales que tienen a su disposición en las sucesivas etapas de su vida. Para Piaget, los niños y niñas son verdaderos científicos que realizan experimentos, formulan teorías y las llevan a la práctica con más experimentos; se trata de la teoría del constructivismo (CEPIndalo, 2008). No obstante, Kay (2002) sostiene que la filosofía que está detrás de Squeak es que el aprendizaje de matemáticas y ciencias es esencial para entender el mundo de hoy; pero Kay hace la aclaración de que el objetivo de Squeak no es convertir a los niños en científicos, sino en hacer de ellos una generación capaz de usar algo más que el sentido común para entender el mundo que los rodea.

Smalltalk no es un lenguaje de computación, Smalltalk es un ambiente donde conviven objetos que interactúan entre sí enviándose mensajes. Cuando un usuario interactúa con un ambiente Smalltalk, este ambiente se ve modificado como efecto de esa interacción (Gómez Deck, 2006, p. 33). Por lo tanto, la filosofía de Squeak, implica que tanto el traductor dinámico y sus secuencias de código de destino se deben escribir y depurar en Smalltalk, luego traducido automáticamente en C para crear la máquina virtual de producción (Ingalls et al., 1997, p. 11). Asimismo, compartimos la idea de Alan Kay, que la filosofía de Squeak Etoys es el aprendizaje de las matemáticas y las ciencias para entender el mundo de hoy. Además consideramos, que Squeak Etoys es una fuente de ideas muy ricas y poderosas, y que permite a los niños crear proyectos divertidos; promoviendo, la creatividad, el descubrimiento, el aprendizaje de las matemáticas y las ciencias.

3.1.1.3 Squeak Etoys más que un lenguaje de programación

Squeak Etoys es uno de los lenguajes de programación más completo de libre distribución con un interfaz fácil de usar. El *software* está diseñado para ayudar a los niños desde los seis hasta los doce años de edad; ellos aprenden a través de la interacción y la colaboración (Bouras et al., 2010). Además, el interés de Squeak Etoys es ayudar a los niños a pensar en la compresión de los conceptos matemáticos y otras áreas de las ciencias; también sirve como un papel electrónico que puede contener nuevas formas de representar las ideas poderosas (Gaelli, Nierstrasz, & Stinckwich, 2006; Kay, 2003, 2007a).

Yatim y Masuch (2007) demostraron, al emplear Squeak, que los alumnos son hábiles para explorar y aprender modelos programación, construir programas completamente avanzados, lenguajes y acciones llamados lógica computacional, porque programar es realmente un buen ejercicio para el cerebro; sin embargo, es necesario el soporte de un educador o un hombre artificial (tutor). Por otra parte, también se considera que “Squeak es mucho más que un procesador de textos – es un *procesador de ideas*”. Efectivamente es un lenguaje, una herramienta, un medio creador de entornos e ideas (Conn & Rose, 2003).

Alan Kay (2007b) sostiene, que Etoys se creó para ayudar a los niños, y el estilo de programación es diferente de las convencionales. Y si al programar se comete un error, ese error toma un sentido completamente distinto, dado que podemos ver claramente lo que el dispositivo programado no está realizando según nuestro objetivos (G. Zabala, Morán y Blanco, 2010). En este ambiente, igual que en el Logo, no se critica al niño por un error en la programación, dibujo o diseño. El proceso de depuración es parte normal del proceso de comprender un programa (proceso de ensayo-error) y que el niño/a generalmente corrige el error al verificar el proceso (Papert, 1982, p. 80), otras veces entre compañeros, porque el desarrollo de las actividades se llevan a cabo en equipo; y por último, cuando es imposible, el profesor media las alternativas de solución de las situaciones.

En conclusión, este paradigma defiere radicalmente del uso tradicional del *software* computacional en las escuelas y colegios. Squeak Etoys es un entorno gráfico, un lenguaje de programación orientado a objetos basado en un lenguaje de programación genuino en el mundo de la informática y que, en el campo educativo, permite aprender una programación real. A diferencia de otros lenguajes de programación, en Squeak Etoys no se tienen que realizar bloques de códigos, códigos estructurados, ni complejos diagramas (Gaelli et al., 2006). Squeak Etoys es un laboratorio virtual cuya característica principal, es que está orientado para realizar investigaciones, simulaciones, porque constituye un campo abierto a la imaginación y a la creatividad, además es un ambiente amigable que permite a los niños realizar descubrimientos a temprana edad. Allen Conn dice que Squeak Etoys hace las ideas simples más simples y facilita que las ideas complejas sean posibles (Kay, 2002).

3.1.2 Diseño de *software* y ambientes de aprendizaje

Con este trabajo de investigación deseamos introducir un aspecto muy importante, denominado diseño de proyectos en el aprendizaje de las matemáticas. Los dos trabajos que nos anteceden (Harel, 1991; Kafai, 1995), consideran muy importante dos aspectos: teorías del diseño y teorías del aprendizaje. Se tiene poca información acerca de la definición de teorías de diseño relacionadas a las teorías de aprendizaje; aunque otros autores la consideran más como diseño instruccional, que es la forma de planear el acto educativo (Herrera Batista, 2006; Sangrá & Guàrdia, 2005), o el proceso del desarrollo sistemático que conduce a la mejora de los sistemas instruccionales (Berger & Kam, 1996); y otros como diseños educativos que constituyen el análisis, la representación, la reordenación de los contenidos y los ejercicios (Reigeluth, 2000).

Mientras para Hardt (2006), el término *diseño* es de interés para diferentes grupos dentro de la sociedad. Para Kafai (1995), el *diseño* en sí es raramente considerado en el proceso educativo; tal es la razón de que el término *diseño* fuese inspirado por la arquitectura, el desarrollo de productos y la industria (Bentley, Fairley, & Wright, 2001). “Los teóricos del diseño están interesados en el producto final como tal, mientras tanto para los teóricos en el aprendizaje el producto es el resultado del proceso de lo que se hizo” (Kafai, 1995, p. 7). Por supuesto, como las personas no son edificios ni productos; de allí que abordamos el problema del diseño a través de las teorías del aprendizaje.

3.1.2.1 Diseño de aprendizaje

Es necesario buscar una convergencia entre ambas teorías (diseño y aprendizaje) y que tengan un interés común. En este contexto, ambas teorías deben estar conceptualizadas como procesos de solución de problemas. Para Hardt (2006), el diseño significa un concepto general, una actividad, un plan o intención, y como un resultado final o producto (design is to design the design of a design); en cambio, Perkins (1986, p. 2) denomina al diseño como "una estructura adaptada a un propósito", casos de modelos y una o más técnicas de evaluación; porque el uso aproximado de un diseño mental explica el conocimiento.

López Martínez, Prieto Sánchez y Hervás Avilés (1998, p. 95), sugieren un modelo para entender el proceso creativo y la inventiva basada en el diseño. Perkins (1986) considera el conocimiento como un diseño y que el aprendizaje significativo se produce al penetrar en lo profundo de la esencia del conocimiento; además, sostiene que el diseño, constituye un concepto puente que permite el paso de lo específico, concreto y simple a lo general, abstracto y complejo.

Otro concepto de diseño aplicado a la investigación educacional, que intenta mostrar la mejor comprensión de los aspectos pragmático y teórico del desarrollo del diseño basado en actividades es el de Kafai (1995), sostiene que el diseño tiene dos fases: análisis y síntesis. El análisis examina el problema y divide sus componentes; y mientras tanto, la síntesis se enfoca en llevar todas las partes juntas a la solución. Con el análisis y la síntesis, el diseñador desarrolla estrategias, tales como la modularización o la generación alternativa de soluciones, cuando se tiene que hacer frente a tareas complejas de diseño (Kafai, 1995).

Para Selander (2008, p. 12), "el concepto de 'diseño para el aprendizaje' se refiere a las condiciones materiales y temporales para el aprendizaje, así como la actividad de aprendizaje en sí". Según Harel y Papert (1990) y Harel (1991), el diseño de un *software* representa un nuevo paradigma basado en actividades con ordenadores en las escuelas para aprender. Este paradigma de trabajo con niños/as difiere radicalmente del uso tradicional del software tradicional (y de programación) en las escuelas. En ese sentido, Etoys es un ambiente de aprendizaje, donde los niños/as diseñan un software, cuyo resultado es denominado proyecto; además, es fácil de mostrar su funcionalidad a diferencia de otros lenguajes de programación que utilizan códigos (Steinmetz, 2001).

Finalmente, consideramos importante en el trabajo de investigación el diseño de proyecto de un software como una actividad muy potente de aprendizaje; porque la discusión en detalle es la filosofía educacional que incide a la creación de un ambiente para el aprendizaje, arguyendo que el acto de diseñar promueve y activa el uso de la creatividad y el conocimiento del estudiante al momento de diseñar (D. N. Perkins, 1986); asimismo, el estudiante puede auto-enseñarse en su propio ambiente de aprendizaje; también, puede compartir su ambiente de diseño con otros (Gargarian, 1996, p. 141). Además, aunque el diseño de proyectos permite al estudiante ser auto suficiente; bajo la propuesta de Bruner, el profesor es el responsable de preparar, diseñar los proyectos para la construcción del conocimiento y facilitar el proceso de aprendizaje.

3.1.2.2 Andamiaje mediado por Squeak Etoys

En nuestro medio se está expandiendo rápidamente las modernas tecnologías (en particular, videos, ordenadores y redes) y han ido cambiado las formas en que produce, consume, se comunica y piensa; causando profundos efectos en la forma que aprendemos (Collins & Halverson, 2009, p. 5) y en particular Internet ha cambiado la forma que nosotros pensamos sobre la tecnología y la información (Thomas & Brown, 2011, p. 42).

De partida tenemos a Squeak Etoys una herramienta educativa dentro de la corriente tecnológica, basados en las ideas de Papert, Piaget y Bruner, que sostienen una postura netamente constructivista. La potencialidad que nos ofrece es facilitarnos el acercamiento a otro modo de conocer y aprender y con ello lo que hacemos en las escuelas esté más acorde con las necesidades de la sociedad en la que vivimos (Fraga & Gewerc, 2004, p. 19).

Según Griffiths y Blat (2005, p. 58), "el modelo educativo derivado de la obra de Papert se centra en un determinado tipo de conservación, que implica un lenguaje formal que media la conservación y un modelo de actividad de los alumnos en el que se reconoce el aprendizaje cuando aquellos son capaces de producir artefactos que sus compañeros o sus maestros consideran aceptables, o de satisfacer alguna norma". La referencia hace alusión al uso de las máquinas como la tortuga de Papert que son manipulables; como los Mindstorm de Lego, y los juguetes robóticos éTui, dispositivos sencillos (relacionados con el enfoque de Brooks de la construcción de robots que interactúa directamente con los seres humanos) (Griffiths & Blat, 2005, p. 57), que median la reflexión, estimulando la percepción y la creatividad de los niños. Si bien es cierto que estas máquinas son manipulables y programables, y que permiten a los niños/as controlar acciones; no les permite simular otras situaciones como lo hace Squeak Etoys.

En cambio Squeak Etoys, permite que los niños/as puedan desarrollar programas diseñando proyectos para aprender matemáticas; al mismo tiempo, diseñar y simular situaciones de otras áreas de las ciencias. Siendo Squeak una fuente de código abierto de Smalltalk (open source), permite desarrollar y ampliar programas de acuerdo a sus necesidades; tal es el caso, desarrollaron una ampliación de Squeak Etoys denominado Physical Etoys[8], que permite controlar mediante programación los robots Lego (Mindstorm) y la placa Arduino. Es decir, Squeak Etoys ***media*** en un contexto más amplio usando la tecnología digital, desde el compartir información hasta el desarrollo de juegos en redes. En este contexto, si un niño/a desarrolla una simulación no solo aprende el contenido de la materia, sino que también, aprende la

[8] Es un lenguaje de programación diseñado de Squeak, que permite programar Lego educativo, Mindstorm (robótica) y la placa Arduino (electrónica); además, cuenta con la plataforma de Etoys permitiendo diseñar las situaciones. http://tecnodacta.com.ar/gira/projects/physical-etoys/

dinámica de comportamiento de su entorno. Por ejemplo, la simulación del comportamiento de los peces en un acuario, como se muestra en la siguiente figura.

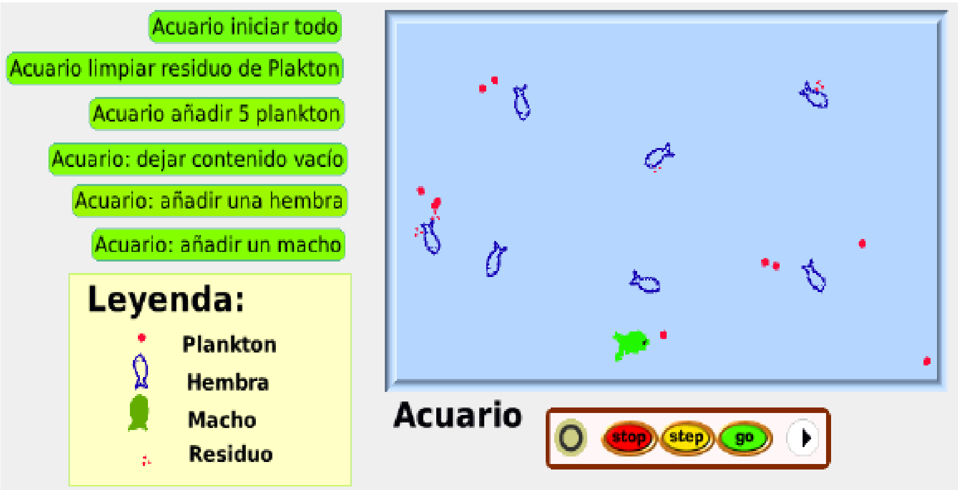


Figura 3.3. Simulación de un acuario, que permite interactuar al niño/a con la naturaleza de manera virtual.

El niño/a aprende en estas situaciones la dinámica de los peces, acerca de su comportamiento, la variedad de peces que desea simular, la cantidad de alimento que necesita para mantener una determinada cantidad de peces, la limpieza del acuario, cuantos machos debe haber como máximo, etc.; es decir, el niño/a aprende y comprende una serie de conceptos muy complejas para su edad.

Figura 3.4. Programación que muestra conceptos matemáticos que aprenden los niños/as al diseñar un acuario.

Al mismo tiempo, al realizar la programación se propicia el aprendizaje de conceptos matemáticos mucho más avanzados para el nivel curricular de su edad, por ejemplo, el concepto de número aleatorio (random). Porque el pez, se desplaza en distintas direcciones y con rapidez variada. Por lo tanto, el sistema de andamiaje que Squeak Etoys media en el aprendizaje de las ciencias es muy poderoso, en la medida que el profesor oriente apropiadamente los proyectos.

3.1.2.3 El proyecto en Squeak Etoys

Cuando se habla del diseño de un *software* elaborado por un estudiante, nos referimos a los proyectos creados dentro del Mundo que pueden acoplarse utilizando una serie de medios como por ejemplo pinturas y dibujos, texto, vídeo, y fotografías. Para Conn y Rose (2003), los proyectos son construidos a partir de los conceptos que se introducen, empezando por crear un coche […] El proyecto es el "hiper-documento" de Squeak. Los proyectos son creados, publicados (guardados), compartidos e intercambiados en un disco duro, en un servidor, o en Internet, cuyo formato tiene extensión ".pr" (indicando que el fichero es un proyecto Etoys). Es un procesador de textos, creamos documentos; en Squeak creamos proyectos.

Entonces, un proyecto en Squeak Etoys es la construcción de conocimientos, experimentando y simulando situaciones reales (un modelo, un cuento, una historia, un juego, un experimento físico, crear una música, editar un video y otras acciones realizadas por un niño o un adulto) a partir de conceptos e ideas que los estudiantes introducen en el mundo virtual. El proyecto es un hiper-documento por ser un documento electrónico que tiene dos niveles: el *contenido* y las *estructuras*. Los contenidos integran el texto, los párrafos, la gráfica, las imágenes y su formato de presentación. La estructura son las estructuras lógicas y/o físicas que organizan el documento (Del Río, 1992).

3.2 Breve génisis y significados del concepto de fracción

En los últimos años, en el campo educativo las matemáticas y su historia aparecen unidas cada vez más, porque, sin tener en cuenta su historia y epistemología de la matemática, no se podría comprender su evolución, conceptos y definiciones. Aunque no es posible especificar una epistemología de las fracciones, se puede asimilar a la epistemología de las matemáticas propuestas por Campos (2007), que incluye los siguientes aspectos: génesis, estructura, función, método y problemas. La génesis se desarrollará en el siguiente apartado, mientras que la estructuración del concepto de fracción en la definición de los números racionales.

Respecto a la función epistemológica del concepto fracción en la actividad educativa, es por excelencia promover la creatividad, habilidad, destreza y dominio para resolver tareas dentro de la sociedad; esto indica que un plan de estudios no es un lujo, sino un instrumento de trabajo indispensable mirando a la sociedad desde diferentes ángulos (Campos, 2007). El cuarto es el método, que la investigación está orientada a la construcción del aprendizaje (construccionismo de Papert); de allí que se propone el uso de un lenguaje de programación Squeak Etoys para que los estudiantes pudieran aprender el concepto de fracción en interrelación con otras disciplinas.

3.2.1 Breve historia de las fracciones

El origen de las matemáticas está inmerso en las actividades del hombre. El progreso de la civilización y el de las matemáticas han ido de la mano. Las matemáticas empezaron con los números y los números siguen siendo fundamentales, pero la disciplina ya no se limita a los cálculos numéricos (Stewart, 2007). Las primeras civilizaciones agrícolas se remontan a los 13000 a 10000 a. C. en Palestina, aunque no se tenga referencia alguna de actividades matemáticas (Maza, 2000). Así la historia de las matemáticas empieza con la invención de los símbolos marcados para denotar números. La primera evidencia de un registro numérico data aproximadamente de unos 37 000 a. C.; se trata de un hueso de babuino que tiene 29 muescas grabadas, que fue encontrado en las montañas de Lebombo, entre las fronteras de Swazilandia y Sudáfrica (Stewart, 2007).

3.2.1.1 Las fracciones en la civilización de Babilonia

Dentro de la historia de las matemáticas, se pueden considerar periodos aislados y referenciados unos a otros (Morales, 2002); las primeras civilizaciones que utilizaron objetos (la bulla, especie de bolsa endurecida, encerraba en su interior objetos pequeños de arcilla en forma de esfera, cono o cilindro con diversas marcas en el exterior) para contabilizar o realizar sus actividades comerciales fueron los Uruk (civilización meridional de Mesopotamia), que se remontan a los milenios VII al VI (Maza, 2000). Los símbolos, numerales y formas de escrituras en tablillas de arcilla escritos en ***cuneiforme*** se encuentran en los sumerios (Mesopotamia) hacia los años 3500 a 3000 a.C. (Mankiewicz, 2000; Maza, 2000; Stewart, 2007). Finalmente, los babilonios dejaron un legado de tablillas con operaciones muy formalizadas (Stewart, 2007); este sistema de numeración fue utilizado para el comercio, la contabilidad y, en principal, para la astronomía.

Según Maza (2000), para "los babilonios, la necesidad de dividir algo en partes fue una de las hazañas para descubrir la fracción, y estuvo determinada por dos contextos: el reparto de un determinado producto en partes iguales, de manera que las fracciones surgirían como fruto de una división, y la medición de mayor exactitud posible de una cantidad de: peso, volumen, longitud, etc., de manera que la fracción surgiría entonces a partir de la medida" (pp. 37–39).

La representación de las fracciones la hacían con comas decimales que tenían múltiplos de una décima, una centésima a su derecha los múltiplos y así sucesivamente (por ejemplo: 25, 47 significa 2 decenas + 5 unidades + 4 décimas y 7 centésimas) (Stewart, 2007). Además añade, que los estudios denotan al equivalente babilónico de la coma decimal por un punto y coma (;), que es una coma sexagesimal y que son múltiplos de 1/60, ($\frac{1}{60}\times\frac{1}{60}=\frac{1}{3600}$), así sucesivamente. Por ejemplo, los números 12,59; 57,17 significa $12\times 60+59+\frac{57}{60}+\frac{17}{3600}$ que es aproximadamente 779,955 (Stewart, 2007, p. 17). El otro ejemplo que consideramos 1;15 representa 1 15/60 o 1 1/4, y 0;0,44,26,40 representa la siguiente expresión $44/60^2 + 26/60^3 + 40/60^4$ o 1/81; porque los babilonios no tenían la representación del cero inicial (Katz, 1998, p. 13).

3.2.1.2 Las fracciones en la civilización egipcia

Probablemente casi en los mismos periodos que los de Mesopotamia, los ***egipcios*** también iniciaron su desarrollo en el campo de las matemáticas, aunque en forma independiente (Maza, 2000); siendo una civilización muy antigua, dejaron pocas evidencias matemáticas, salvo los papiros (Mankiewicz, 2000). Las primeras representaciones de las cantidades matemáticas que emplearon fue la escritura jeroglífica (Maza, 2000). Las operaciones con fracciones estuvieron dentro de su actividad; asimismo, en diversos periodos, utilizaron diferentes notaciones. Una de las notaciones especiales son: 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32 y 1/64, que se obtenían por división por dos repetida (Stewart, 2007).

Uno de los documentos más importantes es el papiro de Rind, escrito por el escriba Ahmes aproximadamente por los años 1650 a.C. Este contiene 85 problemas y, para su resolución, se realizan operaciones con fracciones, geometría, cálculo de dimensiones y volúmenes de pirámide. El papiro de Moscú también contiene 25 problemas relacionados con la vida real, aunque los investigadores no muestran la presencia de fracciones. Otro de los documentos que muestran es el rollo de cuero de las matemáticas egipcias, donde se ubican 26 sumas escritas en forma de fracciones unitarias, esto es, fracciones con numeradores unitarios (Anglin, 1994; Katz, 1998; Morales, 2002).

3.2.1.3 Las fracciones en la civilización China

La noción de fracción, así como el cálculo con fracciones se presenta en la dinastía de Jiu Shang. El origen de fracción es la acción de reparto asociada a una división inexacta de cantidades (Katz, 1998; Maza, 2000). En la cultura China, se tuvo dominio de simplificación de fracciones, suma de fracciones, división de fracciones, proporción y regla de tres simple. Los chinos en la actualidad usan las reglas actuales que nosotros empleamos (Katz, 1998).

Para Filep (2001, p. 2), los antiguos egipcios y los chinos, para comprender mejor el concepto de fracción las presentaron como fracciones complementarias:

	1/2	2/3	– 1/3	3/4	– 1/4
Egipcios	lado, brazo	dos partes	tercera parte	tres partes	cuarta parte
Chinos	una parte	parte mayor	parte menor	parte fuerte (¿?)	parte débil

También los griegos usaron la misma lógica para denominar las partes y la parte unitaria de las fracciones.

3.2.1.4 Las fracciones en la civilización de Grecia

Según Maza (2000, p. 219), los “primitivos griegos contaron con dos sistemas de numeración escrita: el llamado Sistema Ático, encontrado en dicha región desde aproximadamente el 450 a. C. (aunque se cree bastante anterior) y el alfabético ordinario, localizado en una inscripción de Halicarnaso datándose desde las mismas fechas”. El desarrollo científico temprano en la antigua Grecia tiene fundamentalmente dos espacios, el de la colonia asiática de Mileto, entre ellos Tales, Anaximandro y Anaxímenes; y el itálico donde se asienta Pitágoras.

El aspecto más influyente de la filosofía del culto pitagórico es la creencia de que el universo se funda en los números; además, expresaban su creencia en simbolismos mitológicos y la apoyaban con observaciones empíricas. Para Stewart (2007), los pitagóricos consideraban el número 1 como la fuente primaria de todas las cosas en el universo. Los números 2 y 3 simbolizaban los principios femenino y masculino; el 4 simbolizaba los cuatro elementos: agua, tierra, aire y fuego. Además, los números 1, 2, 3, …, llevaban de manera natural a un segundo tipo de números, las “fracciones”, que los matemáticos llaman *números racionales*.

Así, la evolución del concepto de fracción fue desarrollándose en cada una de las civilizaciones de acuerdo a su contexto social. Luego por los años 1202 Leonardo de Pisa publica su libro *Liber Abbaci*, en el que incluye y promociona la notación de la barra horizontal de una fracción, así como $\frac{3}{4}$; aunque se sabe que los hindúes empleaban una notación similar, pero sin barra. Parece que la barra (/) fue introducida por los árabes, o tal vez por el sistema monetario de Pisa (Katz, 1998). Aunque Fibonacci (1170 – 1250) quién la empleó con muchísima frecuencia (Boyer, 1991; Stewart, 2007), y su notación para los números mixtos difiere de las notaciones actuales; por ejemplo, 5 2/3 se escribía como 2/3 5 (Katz, 1998).

Sobre las fracciones decimales, por los años 300 a. C., en la China ya se tenía la decimalización de las fracciones (Boyer, 1991). Luego por 1500 d. C., Stevin contemporáneo de Viète, contribuyó con su pensamiento de las fracciones decimales.

Un número racional es una fracción a/b, donde a, b son números naturales (Stewart, 2007). Durante mucho tiempo en los libros y textos, a las fracciones se les conocían como números quebrados; Linares y Sánchez (1988, p. 37), presenta una figura que es la reproducción de una página de un libro de aritmética elemental publicado en 1828 (*Lecciones de Aritmética*. Sevilla: Imprenta de Don Mariano Caro, 1928); este dice: "Fracción o quebrado, es aquel número que consta solo de partes de la unidad, o que expresa una cantidad menor que la unidad entera". Asimismo, el diccionario de la Real Academia Española (2001) sigue considerando la *fracción* como un *número quebrado*. En la actualidad, ya no se expresa como número quebrado; se considera como número racional y parte de ella son las fracciones.

3.2.2 Los significados de las fracciones y su comprensión

El término "fracción" ha evolucionado de acuerdo al desarrollo de las ciencias y la humanidad; aunque algunas expresiones son de uso común, por ejemplo las expresiones "un cuarto" (1/4) o "tercera parte" (1/3) ya utilizada por los egipcios. Según Kieren (1980), el concepto y las actividades sobre fracciones, utilizadas en los libros de texto de 1975 eran idénticas de las que se veían en los textos de 1875, donde los constructos básicos (concepto de número, los axiomas y la equivalencia) eran enseñados de manera aislada. Asimismo, su comprensión también es compleja; y existe consenso entre investigadores acerca de que uno de los factores que contribuye a la complejidad de su enseñanza y aprendizaje se encuentra en el hecho de que las fracciones implican una construcción multifacética (Brousseau, Brousseau, & Warfield, 2004)(Kieren, 1996; Lamon, 2001; citado por Charalambos & Pitta-Pantazi, 2005).

La idea fracción está relacionada con las divisiones de las magnitudes con o sin resto (de un objeto, una sustancia medida por magnitudes, o realizar un reparto de una superficie de diferentes formas geométricas). Las divisiones se pueden realizar utilizando diversos criterios:

- Pueden ser reversibles o no, o pueden ser simbólicos.
- La igualdad de partes puede ser juzgada a la vista o con el tacto.
- Plegado en dos con el fin de reducir en la mitad, o plegar en 3 partes con el fin de doblar en tres partes iguales.
- Comparar el equilibrio del platillo de una balanza para medir la masa de un objeto.
- Utilizando GPS o satélite en la distribución de un área geográfica.

Los textos escolares de matemáticas que se usan en las escuelas en la actualidad, Matemáticas 4 y Matemáticas 5, ambos de la Editorial SM, expresan el concepto de fracción con la idea deductiva de *repartir, partir o dividir un objeto* (con actividades de lápiz y papel) teniendo en consideración ejemplos aplicada a la vida cotidiana (galletas, tartas, chocolates), por ejemplo la división de una tarta (Peña, Santaolalla y Aransubía, 2010; Peña, Santaolalla, Aransubía y Sanz, 2010), o el reparto de productos; pero no se realiza una contextualización más abierta en relación con el mundo real (con actividades lúdicas). El libro Matemáticas 4 del proyecto Mundo Agua, expresa que “una fracción representa una o varias partes iguales de una unidad” (Román y Pérez, 2008, p. 88), presentando también situaciones en un contexto real, similares a los textos anteriores.

Kieren (1976) fue el primero en proponer que el concepto de fracciones está compuesto de varios subconstructos; la base de la comprensión del concepto está en profundizar en el conocimiento de cada uno de los significados de las fracciones. Inicialmente Kieren (1976) identificó siete interpretaciones de las fracciones y números racionales: *fracciones, decimales, pares ordenados* (*clases de equivalencia*), *medida, cociente, operador y razón*. Luego, considera los cinco principales constructos: *parte-todo, cociente, medida, razón y operador*, donde *parte-todo* está interrelacionada con los otros cuatro subconstructos (Kieren, 1980). En lo que sigue desarrollemos estos temas de manera resumida.

3.2.2.1 Parte-todo

Esta situación es cuando el ***todo*** (continuo o discreto) es dividido en ***partes*** congruentes (equivalentes como cantidad de superficie o cantidad de objetos). La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes (que puede estar formado por varios "todos"). El todo recibe el nombre de unidad (Llinares & Sánchez, 1988, p. 55).

La idea de fracción se expresa por un par ordenado de números naturales escrito de la forma *a*/*b*, es utilizado en contextos y situaciones que muchas veces no pueden parecer nada en común (Llinares & Sánchez, 1988, p. 52). La fracción *a*/*b*, expresa la relación existente entre dos cantidades específicas: Una parte *a* (una porción) sobre un todo o unidad (continua o discreta).

Al respecto Hans Freudenthal (1983, p. 140) introduce de manera intuitiva la explicación sobre las fracciones de parte-todo; y considera la idea de cortar, separar, romper, colorear en partes iguales el objeto denominado el "todo", como la forma más concreta de representar las fracciones. Además, el "todo" se clasifica en: discreto o continuo, definido o indefinido (representación infinita del objeto), estructurado y sin estructurar.

3.2.2.1.1 Representación de continuo y discreto

Las representaciones más frecuentes suelen ser diagramas circulares, rectangulares (de dos dimensiones) (Llinares & Sánchez, 1988, p. 56), o superficies cuando se trata de situaciones reales, así como un terreno o un área geográfica.

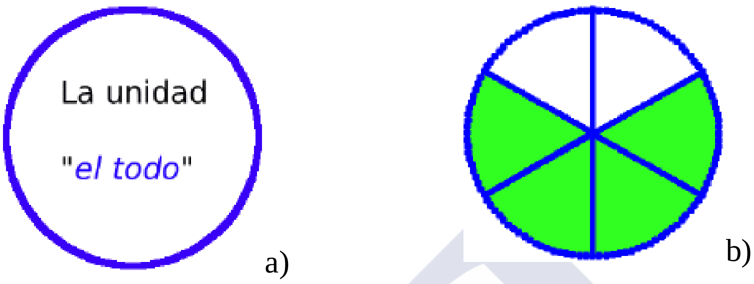


Figura 3.5. a) El todo, considerado como la unidad; b) la unidad o el todo dividido en partes iguales

De las seis partes del todo, se han coloreado cuatro. Entonces la fracción coloreada de verde corresponde a “4 de las 6 divisiones”; “4/6”

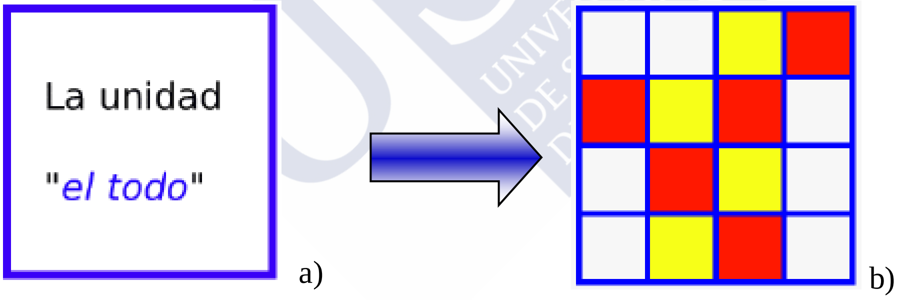


Figura 3.6. a) es considerado como la unidad, b) la unidad o el todo ha sido distribuido en 16 partes

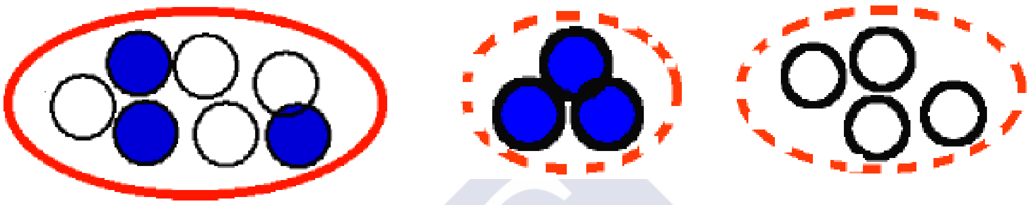
En este caso, el ***todo*** se ha dividido en dieciséis partes iguales:

a) De los cuales se han coloreado de rojo cinco partes; “5 de las 16”; “5/16”.

b) Se ha coloreado de amarillo cuatro partes; “4 de las 16”; “4/16”.

El ***todo*** es considerado como la unidad y la ***parte*** es una porción del todo. En una situación real, por ejemplo, cada una representaría una tarta, una barra de chocolate y un tablero de 16 casilleros o las losetas del suelo de la casa.

La representación ***discreta*** del ***todo***, está conformada por un conjunto de elementos de cantidad conocida (definido) y se puede representar en dos contextos: una, cuando los elementos son del mismo tamaño y la misma característica (una bolsa de caramelos, una caja de conservas o un paquete de lapiceros de una marca, etc.); la segunda se refiere a elementos de diferentes características (tamaños, colores, formas, pesos) que tiene el conjunto.



a) El todo (unidad)

b) Las partes

Figura 3.7. a) El conjunto conformado por las 7 bolillas es considerado como la unidad. b) selección de bolillas en grupos por color (color azul 3/7).

Aquí el ***todo*** está formado por el conjunto global de las siete bolas, tres de los cuales están coloreadas de color azul. La parte coloreada de azul representa "3/7".

Cuando los elementos del conjunto son iguales; en este caso, existe poca dificultad en la comprensión, porque los elementos discretos tienen igual dimensión. Sin embargo, Lamon (1996), en su investigación, considera dos tipos de conjuntos cuyos elementos son discretos: el primero, hace referencia al tipo de elementos que no requieren cortar, cuyos elementos son separables. Por, ejemplo, se tiene un paquete que contiene 12 huevos para repartir entre 4 personas. El segundo es un conjunto de elementos discretos separables pero compuesto. Por ejemplo, se tiene 4 *six–packs* de "Refrescos Etoys" para repartir entre 3 personas; a cada uno le tocará 1 *six–packs*, pero queda 1 *six–packs* para repartir entre 3 personas; habrá que descomponer un *six–packs*, que equivalen a 6 unidades de refrescos y tocará a cada uno 2 botellas de refrescos.

Cuando el ***todo*** está representado por elementos cuyas características son diferentes, es cuando una fracción se representa simbólicamente, cuyas partes de este objeto no son congruentes, su conjunto es la forma y distraen visualmente a los estudiantes (Harel & Papert, 1990, p. 13).

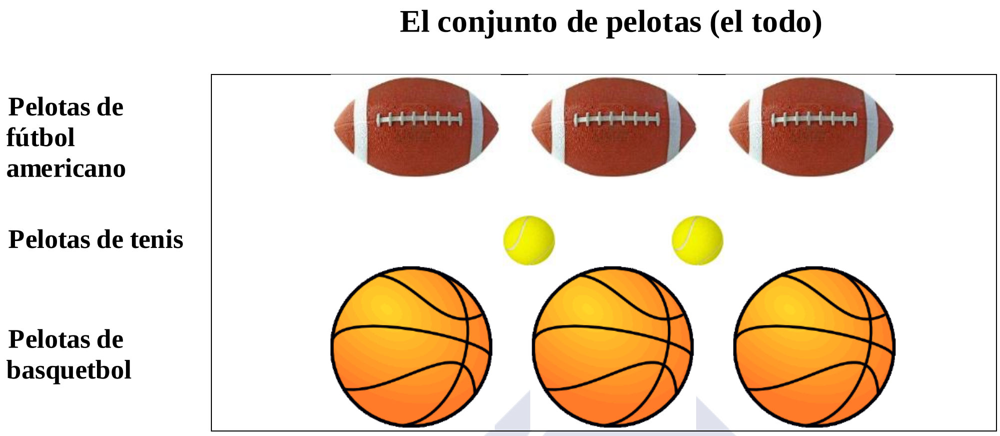


Figura 3.8. Concepto de fracción tomada desde una visión de elementos discretos.

En este conjunto, se consideran a los elementos como discretos y no interesa el tamaño. Cualquier elemento del conjunto se considera como una parte; por ejemplo, si se extraen las pelotas de tenis, sería 2/8 de pelotas extraídas o se extrae una pelota de tenis y dos pelotas de básquetbol, la fracción extraída sería 3/8 de pelotas.

3.2.2.1.2 Representación de definido e indefinido

Los términos finito o infinito están relacionados con la cantidad o dimensión del “todo”; si se conoce la dimensión o cantidad del “todo” se denomina finito; en cambio si no se puede determinar la cantidad o la dimensión del “todo”, entonces se denomina infinito. Por ejemplo, la humanidad (por tiempo indefinido es discreta) puede ser dividida de acuerdo al grupo de sangre, además este conjunto puede ser considerado como estructurado o no estructurado en función del sexo, la raza, distribución geográfica, y así sucesivamente (Freudenthal, 1983, pp. 142-143).

Otro ejemplo, la baldosa propuesta por Freudenthal (continua e indefinida) es estructurada en patrones de ladrillos, dividida de acuerdo a los colores y figuras. Las plantas silvestres de una zona son discretas e indefinidas. El aire, es continuo e indefinido, un conjunto sin estructura, dividido en gases, oxígeno, nitrógeno, argón y otros.

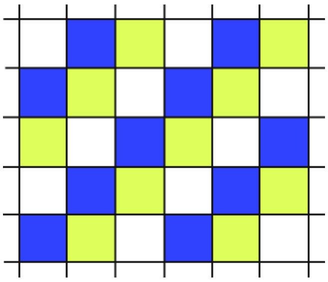


Figura 3.9. El todo como objeto continuo e indefinido.

3.2.2.1.3 Representación de estructurado y no estructurado

Hans Freudenthal (1983, p. 141) parte de la idea de dividir, puede ser estructurada o no estructurada; por ejemplo, de 60 perlas en un tazón 1/6 son rojas, 1/3 son blancas y 1/2 son azules; aquí el "todo" es un conjunto definitivo discreto y estructurado de acuerdo al color; sin embargo es no estructurado en el espacio. Otra situación, una pared o un suelo de baldosas, son continuos, con una extensión indefinida, estructuradas en un patrón de ladrillos o tejas (divididos de acuerdo al color, brillo, imágenes, material), piezas desconectadas, estructuradas o no estructuradas y distribuidos con o sin estructura.

3.2.2.1.4 Representación inversa de parte – todo: construcción del todo a partir de las partes

Consiste en determinar el todo (reconstrucción de la unidad) a partir del conocimiento de un conjunto de parte congruentes. Ejemplo, a partir de las partes dadas en la figura construir el todo de cada una de las situaciones presentadas.

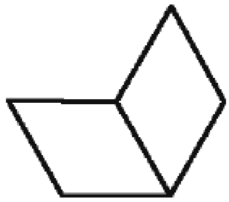
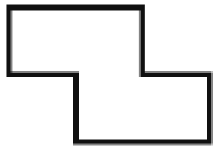
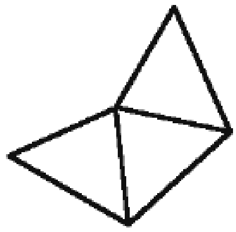
			
Es $\frac{1}{3}$ de una figura	Son los $\frac{2}{6}$ de una figura	Es $\frac{1}{4}$ de una figura	Son los $\frac{3}{5}$ de una figura

Figura 3.10. Partes de un todo que requieren ser construido.

Este tipo de situaciones no es común en los libros de texto que utilizan los niños/as en las escuelas. Sin embargo, consideramos que los niños/as deben comprender que un *todo* se puede dividir en partes, y la operación inversa es reconstruir el todo a partir de las partes.

3.2.2.2 Fracciones como cociente

Está relacionado con la división de un número natural por otro no nulo (la división de $a \div b = a/b$). En este caso, la fracción es el resultado de una situación de reparto donde se busca conocer el tamaño de cada una de las partes resultantes al distribuir a unidades en b partes iguales. Según Thomas Kieren (1980, p. 135), al dividir una unidad en cuatro partes, la designación de 3 (3/4) da lugar a la misma cantidad que la división de 3 unidades en 4 partes (3/4); además, los estudiantes de 10 a 14 años pueden desarrollar, comprender y explicar los dos aspectos del constructo.

Cid, Godino y Batanero (2003, p. 315) consideran “que los objetos pueden ser divididos en partes sin que pierdan sus propiedades básicas. En este caso la existencia de un resto obliga a dividir en partes iguales la unidad de reparto para poder seguir repartiendo el resto de forma igualitaria entre los individuos. Por tanto, si cada individuo recibe *a/b* objetos significa que cada uno de los objetos a repartir ha sido dividido en *b* partes iguales y se ha entregado *a* de ellas a cada individuo”. Por ejemplo, repartir 5 tartas entre 8 niños. Cada tarta se divide entre ocho porciones iguales y se da a cada niño 5 porciones. El resultado del reparto se expresa como la fracción de 5/8. Sin embargo, hay situaciones que no se pueden dividir en contextos discretos de una fracción; por ejemplo, se desea distribuir 4 niños en 3 salones, el resultado es que un niño va a cada salón y un tercio de niño para cada salón no es posible.

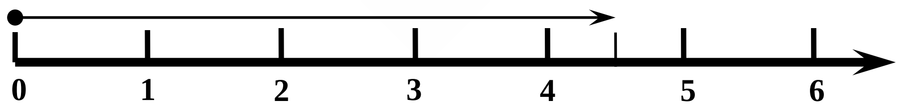
Muchas situaciones de reparto proporcional se presentan en las sociedades jerarquizadas con repartos o contribuciones que no son equitativas; sino que se realiza de acuerdo a ciertas condiciones. Al respecto, Cid et al. (2003, p. 316) consideran que "la relación entre las cantidades repartidas puede ser de tipo aditivo o de tipo multiplicativo según que lo que se mantenga constante sea la diferencia entre las cantidades a repartir o el cociente".

- Una relación aditiva es cuando se reparte a una persona adicionando o disminuyendo una cantidad exacta respecto del otro. Ejemplo, si cada individuo recibe tres unidades más que el anterior: el primero recibe 10 unidades y el segundo 13 unidades.
- Una relación multiplicativa es cuando el reparto se realiza un número de veces más que el otro. Ejemplo, la distribución de los dos primeros puestos en una competencia de natación. El primer puesto recibe tres veces más que el segundo lugar. Si el segundo puesto recibe 600 euros, el primer puesto recibirá 1800 euros. En este caso decimos, que el reparto se hace a razón de 3 a 1. Por tanto, si el reparto se hace en la razón $a \div b$, por cada a objetos o cantidades que reciba el primer individuo, el segundo debe recibir b objetos o cantidades (Cid et al., 2003).

Como consecuencia de la fracción cociente, surge otra situación donde el numerador (las ***partes*** son mayores) es mayor que el denominador (considerado como la unidad), por ejemplo, se desea repartir 455 euros en cantidades iguales entre 10 niños, a cada niño le corresponde $\frac{455}{10}$ luego se tiene $45\frac{5}{10} = 45\frac{1}{2}$ o para ser más específicos la distribución sería expresada en decimales de 45,5 euros. Cabe aclarar, cuando se expresa las fracciones de la forma $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{3}{5}$ *o* $\frac{2}{7}$, éstas se encuentran entre 0 y 1; mientras tanto la fracción $\frac{455}{10}$ cuyo resultado es $45\frac{5}{10}$ *o* $45\frac{1}{2}$ o 45,5 es mayor que la unidad, es decir que no están entre 0 y 1. Este tipo de fracciones generan las fracciones mixtas; en el caso del ejemplo observamos que 45 representan las unidades (45 unidades) y $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ es la fracción en sí. En consecuencia, esta parte la fracción cociente guarda relación con ***parte*** – ***todo*** y con los decimales.

3.2.2.3 Fracciones como medida

La fracción como medida está estrechamente relacionada con la relación parte-todo. Sin embargo, las tareas de medición significan la asignación de un número a una región (de una, dos y tres dimensiones u otras características) (Kieren, 1980, p. 136). Es realizado a través de la interacción de los procesos de contar el número de unidades enteras en cubrir la región. La recta numérica también sirve como una buena representación de la interpretación de las fracciones como medida. Identificada una unidad de medida (segmento), admite subdivisiones congruentes (Llinares & Sánchez, 1988, pp. 60–61).



$$4+\frac{1}{2}=4\frac{1}{2}=4+0,5=4,5$$

Otra situación de medida es por fraccionamiento de la unidad; esto ocurre cuando "existe una cantidad de magnitud a medir que no equivale a la unidad o alguno de sus múltiplos. Para precisar más la medida, se divide la unidad en partes iguales y si una cantidad de magnitud mide *a/b* unidades quiere decir que dividiendo la unidad en *b* partes iguales la cantidad de magnitud a medir equivale a un número *a* de dichas partes" (Cid et al., 2003, p. 316). Por ejemplo, una botella pequeña de cerveza tiene 250/1000 mililitros. Al respecto Freudenthal (1983, p. 149) considera que, una fracción como medida, puede ser expresada en unidades de medidas (como $2\frac{1}{2}m$, $2\frac{1}{2}kg$, $2\frac{1}{2}l$) y no es necesario cuando la fracción es una fracción operador.

Las unidades básicas de medida como el metro (m), el kilogramo (kg) y el litro (l) tienen sus subdivisiones. Por ejemplo, el metro como unidad, provee una notación de número decimal, con decímetros, centímetros y milímetros teniendo como modelo físico para los décimos, centésimos, milésimos.

3.2.2.4 Fracciones como razón

Partimos de las situaciones de medida en las que se comparan dos cantidades de una magnitud, estableciendo cuántas veces tiene que ser repetida cada una de ellas para obtener dos cantidades iguales. En este caso, muestra a la fracción como índice comparativo entre dos cantidades de magnitud A y B (por ejemplo, dos varillas de longitudes A y B), decimos que fracción *a*/*b* como la razón *a*÷*b* si repitiendo *b* veces la cantidad de magnitud A y *a* veces la cantidad de magnitud B, se obtienen dos cantidades de magnitud iguales, es decir, *b*A = *a*B (Cid et al., 2003, p. 316). Ejemplo. En una fiesta hay dos varones por cada tres mujeres.

Figura 3.11. Razón entre dos grupos de objetos (dos varones y tres mujeres).

Luego teniendo en cuenta que si tomamos 2 grupos de chicas obtenemos la misma cantidad de personas que si tomados 3 grupos varones. En ambos casos se obtiene 6 personas.

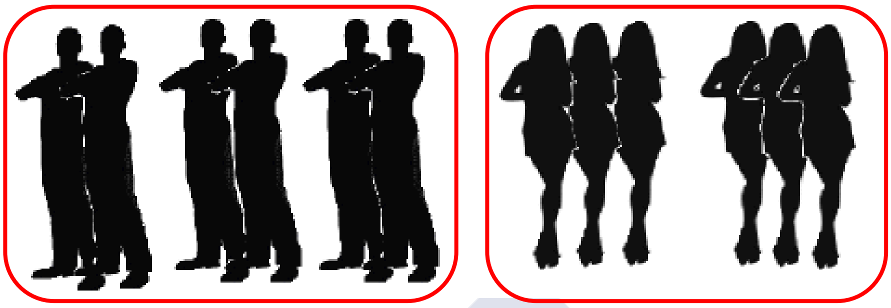


Figura 3.12. La razón como magnitudes iguales.

Entonces, una razón es el cociente indicado de dos números. En una razón $a \div b$, al término de arriba (a) lo denominamos **antecedente** y al término de abajo **consecuente** (b)**.** Además se diferencia de la proporción, porque ésta es la igualdad de dos razones.

Presentamos otro ejemplo. César tiene en la finca 9 terneras y 6 conejos. Si se compara la cantidad de terneras entre la cantidad de conejos, se obtiene que por cada 3 terneras, hay dos conejos. Es decir, se compara e interpreta las relaciones entre dos datos de objetos diferentes y que la operación es: $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$.

3.2.2.5 Fracciones como operador

Bajo esta interpretación las fracciones son vistas en el papel de transformaciones: «algo que actúa sobre una situación (estado) y lo modifica». Se concibe aquí la fracción como una sucesión de multiplicaciones y divisiones o a la inversa (Llinares & Sánchez, 1988, p. 72).

Por ejemplo, se tiene 24 niños/as matriculados en el cuarto grado de primaria (una situación: contexto discreto; Estado-Unidad). Durante el año hubo deserción, así como traslados a otros centros; quedando al final de año solo los 2/3 (dos tercios).

Estado – Unidad Situación	Operador	Estado final
24 niños/as del 4to grado de primaria	Multiplicar por 2, dividir por 3, O dividir por 3 y multiplicar por 2.	16 niños/as

En un contexto continuo, la superficie de un cuadrado, se desea encontrar $\frac{1}{2}$ de un $\frac{1}{4}$, como se muestra en la coloreada de la figura.

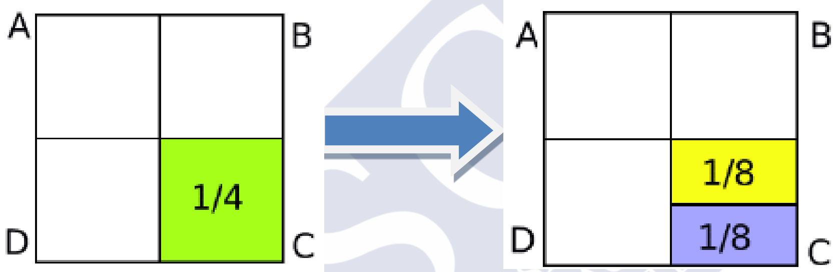


Figura 3.13. Presentación gráfica de ½ de un ¼.

El factor $\frac{1}{2}$ transforma la superficie de $\frac{1}{4}$, convirtiéndolo a $\frac{1}{8}$. Es decir que $\frac{1}{2}$ ha convertido a la mitad la superficie de $\frac{1}{4}$, cuyo resultado es la mitad de la parte coloreada que equivale a $\frac{1}{8}$.

Por lo tanto, la fracción *a/b* como operador es el número que modifica un valor particular *n* multiplicándolo por *a* y dividiéndolo por *b*. Además, la fracción se puede considerar como una “máquina” que transforma. La entrada de la máquina es un dato numérico que, no obstante, puede también ser representado geométricamente. La máquina en sí misma no muestra ninguna estructura geométrica o de otra clase. Es una “caja negra” (Freudenthal, 1983, p. 154). Ejemplo: Iván, en un partido, ha ganado los 2/3 de 12 canicas. ¿Cuántas canicas ha ganado?

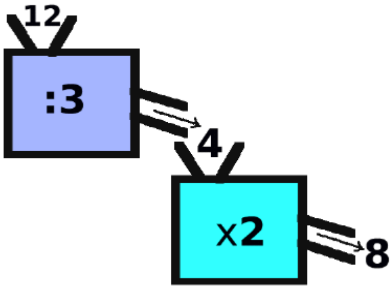
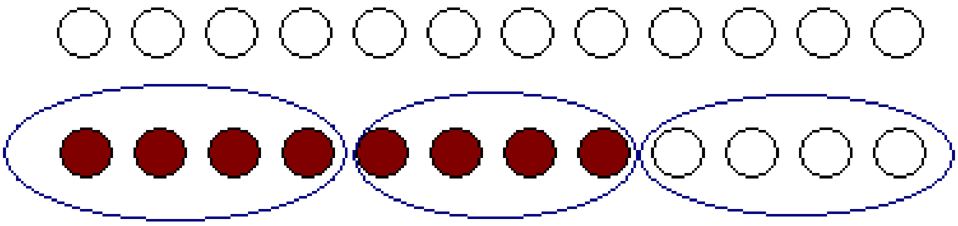


Figura 3.14. La máquina transformadora (Cajaraville Pegito, 2012).



Al respecto Llinares y Sánchez (1988, p. 74) manifiesta que se encontró un contexto natural para la composición de transformaciones (funciones, operador), la idea de la inversa (el operador que reconstruye el estado inicial), la idea de identidad (el operador que no modifica el estado inicial).

La representación geométrica de la fracción como operador en un segmento unidad. Por ejemplo, 1/4 es operador de 1/5. Dividimos el segmento en 5 partes iguales, y luego cada una de estas partes se divide en 4 partes iguales. Se observa que una parte de 1/5 equivale a 1/20 parte del segmento unidad.

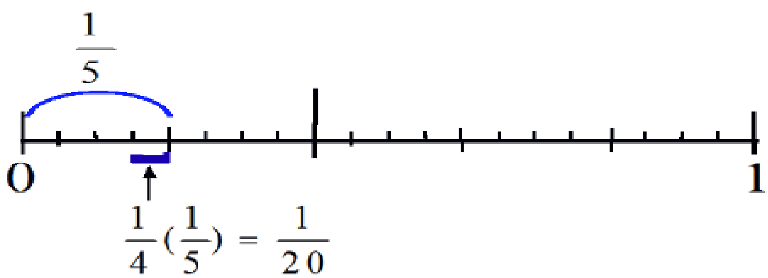


Figura 3.15. La fracción como operador de otra fracción (Cajaraville Pegito, 2012)

Por otra parte, cuando se utiliza la relación parte–todo en contextos discretos, las situaciones numéricas pueden conducirnos a la idea de operador o de porcentaje (razón). Por ejemplo, la figuras de 20 estrellas.

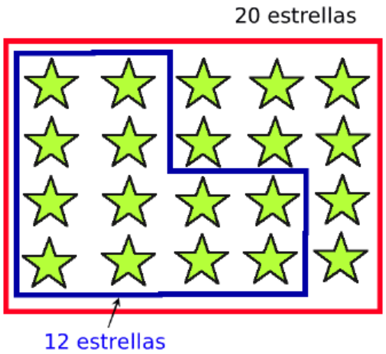


Figura 3.16. La fracción como operador de un conjunto de objetos.

Luego los «$\frac{3}{5}$ de 20» puede interpretarse como una fracción actuando sobre un número (operador), es decir una acción más que la descripción de una situación; o cuando empleamos para describir esta situación el lenguaje de porcentajes «60% de 20», el 60% de 20 estamos comunicando que existe la misma «relación»: (el sentido de razón) «tres de cinco» que en «sesenta de cien» (Llinares & Sánchez, 1988, p. 76).

La fracción operador "enésima parte de" puede ser aplicada al objeto del valor numérico. La enésima parte es exclusivamente vista dentro del todo – algo que no sería factible "n veces". Fenomenológicamente esta aproximación conduce a las fracciones propias solamente si (< 1). Lo contrario sería las fracciones mixtas (> 1). Las expresiones tales como $1\frac{1}{2}$ que son generalmente un trabajo en el papel, no tienen relación con la realidad, que es aún visible en la fracción propia (Freudenthal, 1983).

Finalmente, la fracción como número de medida, es un punto en la recta numérica y como número racional es el resultado de aplicar el operador a una unidad (Freudenthal, 1983, p. 150).

3.2.2.6 Fracciones involucradas en cuentos a través de textos

Fracciones involucradas en un cuento, texto o relatos de situaciones reales que involucren el concepto de fracción. En este contexto los niños podrán incorporar una dimensión del aprendizaje que es la lectura, para ello el estudiante podrá elaborar un programa con el software Squeak Etoys, un libro virtual de cuentos en el que se puedan incorporar conceptos matemáticos; en el proyecto, el estudiante puede dibujar, poner en movimiento y agregar sonidos. Por ejemplo, un pasaje de la obra Alicia en el país de las maravillas, cuando Alicia habla consigo mismo: “¡Vaya, he realizado la mitad de mi plan! ¡Qué desconcertantes son los cambios! ¡No puedo estar segura de lo que va a ser al minuto siguiente! Lo cierto es que he recobrado mi estatura normal” (Carrol, 2003, p. 50).

Otra obra muy conocida es “El diablo de los números”, escrita por Hans Magnus Enzenberger (1997), que trata de Robert, un niño al que no le gustan las matemáticas; pero una noche entre sus sueños, un diablillo comienza a enseñarle las ciencias de los números. Un pasaje del cuento involucra el concepto de las fracciones y es como sigue:

> Ahora les toca el turno a las series.
>
> -¿Series? ¿Qué clase de series?
>
> -Bueeeno -dijo el diablo de los números-, los números no siempre forman como soldados de plomo. ¿Qué pasa cuando se unen? Quiero decir, cuando se les suma.
>
> -No entiendo -gimió Robert.
>
> Pero el anciano ya había escrito la primera serie en el techo de la habitación.
>
> -¿No has dicho que debo descansar? –preguntó Robert.
>
> -No te pongas así. Sólo tienes que leer lo que pone:

$$\frac{1}{\boxed{2}}+\frac{1}{\boxed{4}}+\frac{1}{\boxed{8}}+\frac{1}{\boxed{16}}+\frac{1}{\boxed{32}}+\frac{1}{\boxed{64}}\ldots=$$

> -¡Son quebrados! -exclamó indignado Robert-.
>
> ¡Al diablo con ellos!
>
> -Perdona, pero la verdad es que son muy sencillos.
>
> ¿No te lo parece a ti?
>
> -Un medio -leyó Robert- más un cuarto más un octavo más un dieciseisavo, etcétera. Arriba hay siempre un uno, y abajo están los números saltarines de la serie del dos, los de la camiseta negra: 2, 4, 8, 16... Ya sabemos cómo sigue.
>
> -Sí, pero ¿qué sale si sumamos todos esos quebrados?
>
> -No lo sé -repuso Robert-. Como la serie no termina nunca, probablemente salga una cantidad infinita. Pero por otra parte 1/4 es menos que 1/2, 1/8 es menos que 1/4, etcétera... así que lo que añado es cada vez más pequeño (1997, pp. 179–180).

Las fracciones, son parte de las actividades que realizamos a diario; y forman parte del lenguaje cotidiano; aunque tal vez no se entiende el concepto refinado, pero se comprende como algo más pequeño que un objeto determinado.

3.2.2.7 Fracciones involucradas en diseños de juegos

Fracciones dentro de los juegos. Según Kafai (1995) los estudiantes haciendo juegos con el *software* integran el aprendizaje y el diseño de una manera estimulante y poderosa. Diseñando sus juegos, los estudiantes construyen sus propias representaciones; lo más destacado es que los estudiantes pensaron y trataron con fracciones en sus juegos a través de la invención de historias y fantasías, que son contextos raramente promovidos en textos de matemáticas. La programación se convirtió en un medio de expresión personal de los niños y de la creación en el diseño de juegos; dedicando sus fantasías y las relaciones construidas en otros espacios de la realidad que van más allá de los enfoques tradicionales de la escuela. En estos juegos, también se pueden involucrar bloques, tangramas, sudokus, entre otros.

De todo lo expuesto, las fracciones, como concepto y aplicación se encuentran en toda actividad de la vida real y, muchas veces, pasan desapercibidas. Por ejemplo, las encontramos cuando una persona va recorriendo una pista atlética (problema de distancia), la superficie de un terreno, un vaso con agua de poca cantidad, etc.

Al respecto Cramer, Post, Doerr y Zawojewski (2003), introducen en el Proyecto de Número Racional la propuesta de Lesh (1979), que las fracciones tiene representaciones en diversas situaciones de la vida real: Materiales manipulativos, gráficos o diagramas, expresiones orales y representaciones simbólicas (forma escrita vg. 3/5). Sin embargo, hoy las tecnologías nos permiten expresar las fracciones de distintas maneras, por lo que consideramos necesario agregar las tecnologías de información en el diagrama (ver Figura 3.17).

Los niños deben introducirse en este tipo de situaciones para comprender el concepto real de fracción; para tal efecto, las actividades deben ser diseñadas en el doble sentido de las flechas para que los niños desarrollen y comprendan las diferentes representaciones.

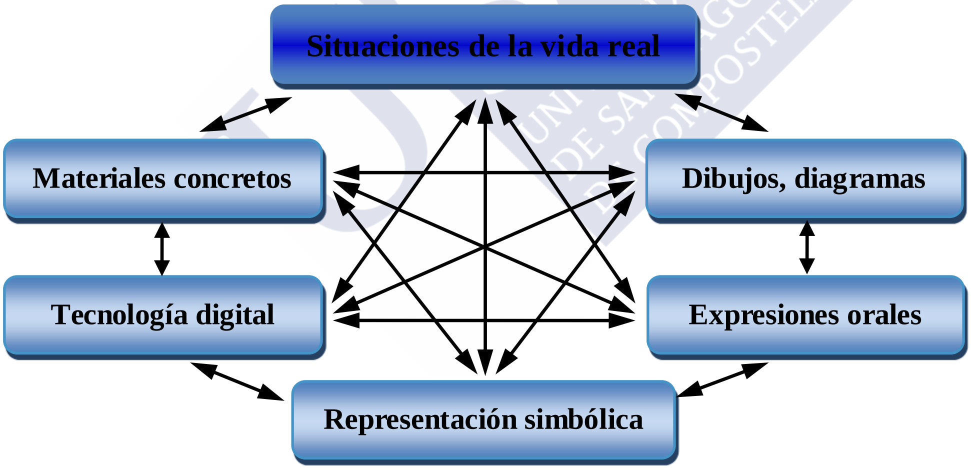


Figura 3.17. Representación de las fracciones en diversas situaciones del entorno real de la actividad del hombre.

Sin embargo, no todas las situaciones permiten realizar dicho procedimiento; pero la tecnología como herramienta posee más recursos, por lo que se debería aprovechar su potencialidad.

3.2.3 El número racional y las fracciones

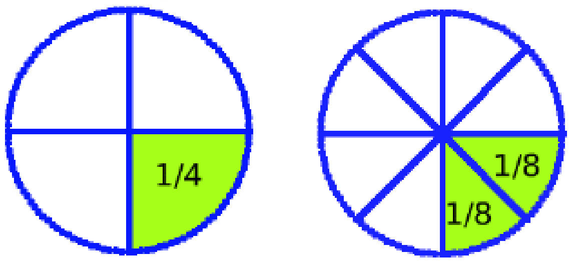
De León y Fuenlabrada (1996), haciendo referencia la clasificación de Kieren (1980; 1983), considera que los números fraccionarios son una estructura de una riqueza y complejidad que encuentran aplicaciones en una multiplicidad de contextos: la ciencia, la técnica, el arte y la vida cotidiana.

El símbolo usado en el sistema para representar las fracciones, es un número entero sobre otro número entero a/b, donde a y b son enteros y $b \neq 0$, aunque no se distingue con claridad el significado de fracción (Gould, 2010). Un número racional simplemente es una fracción, que es el cociente $\frac{m}{n}$, también se escribe como ${}^{m}\!/_{n}$, donde m y n son enteros y $n \neq 0$ (Lang, 1988).

3.2.3.1 Equivalencia de fracciones

La importancia de la idea de equivalencia de fracciones se debe al papel clave que juega en diversos aspectos: en la relación de orden (ordenar dos fracciones, insertar varios fracciones entre dos fracciones dadas), en el desarrollo de los algoritmos de la suma y resta de fracciones de denominador diferentes (Llinares & Sánchez, 1988, p. 117).

Dos o más fracciones son equivalentes si representan al mismo número fraccionario, aún cuando sus términos sean diferentes



$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$$

El conjunto de las fracciones queda dividido en "clases de equivalencia", cada una de ellas formada por todas las fracciones equivalentes entre sí. Cada una de las clases se dice que es un *número racional*; y el conjunto de todas las clases, el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ (Cid et al., 2003, p. 319).

La equivalencia de fracciones se presenta por multiplicación y división.

$$\frac{3}{4} \overset{\times 3}{\underset{\times 3}{=}} \frac{9}{12} \qquad\qquad \frac{30}{42} \overset{\div 6}{\underset{\div 6}{=}} \frac{5}{7} \qquad\qquad \overbrace{\frac{2}{3} \overset{\times 2}{\underset{\times 2}{=}} \frac{4}{6} \overset{\times (3/2)}{\underset{\times (3/2)}{=}} \frac{6}{9}}^{\times 3}$$

Además, Cid, Godino y Batanero (2003) consideran que el número racional [2/3] = {2/3, 4/6, 6/8, ...} lo identificamos con la fracción 2/3 cuando es usada como representante de cualquier otro miembro de la clase de fracciones equivalentes a 2/3. Las distintas fracciones de una misma clase de fracciones equivalentes son todas ellas diferentes unas de otras.

Finalmente, dos fracciones a/b, c/d son equivalentes si se cumple "la igualdad de los productos cruzados", o sea: $a.d = b.c$. La equivalencia de fracciones y razones es la propiedad que justifica varias técnicas importantes de manipulación de racionales (Cid et al., 2003, p. 319).

3.2.3.2 Operación de adición con fracciones

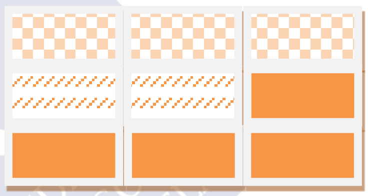
En cuanto a las operaciones, según Llinares y Sánchez (1988, p. 133) existe mucha polémica, ya los algoritmos se convierten en reglas sin sentido para los niños, por situaciones como la introducción temprana en la escuela, demasiado rápido en el uso de simbologías y la falta de un modelo de comprensión. Por lo tanto, se justifica el algoritmo a través de una «situación concreta». Y la realización de ejercicios con posterioridad, pretende que los niños «cojan práctica», en realizar las cuentas (1988, p. 139).

Antes de iniciar con algoritmos, es necesario hacer una mirada a situaciones problemáticas y que a través de ellas de forma natural, tratar de introducirnos a los algoritmos de sumar y restar.

«Rubén se ha comido los 3/9 de la barra de chocolate y Luis los 2/9. ¿Cuánto de chocolate se han comido entre los dos?»

La barra de chocolate está dividida en 9 partes, es decir contados en décimas (tres novenos más dos novenos son 5).

$$\begin{array}{rcl} \frac{3}{9} & \qquad & \text{3 novenos} \\ + \ \frac{2}{9} & & \text{2 novenos} \\ \hline \frac{5}{9} & & \text{5 novenos} \end{array}$$



Luego el algoritmo de adición de fracciones cuyos denominadores son iguales, con a menor que c, y con b menor que c.

$$\boxed{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}}$$

Otra situación que genera números mixtos es cuando las situaciones son mayores que la unidad.

Por ejemplo, «se tienen tres contenedores (A, B y C) de residuos en un laboratorio; los contenedores llevan 10 marcas que indican la cantidad.

El contenedor A contiene 8/10 de residuo; el contenedor B contiene 9/10 de residuo y el contenedor C contiene 6/10 de residuo. ¿Qué cantidad de residuo se ha recolectado en total?

Una forma de conseguir el total es añadir de un contenedor en otro contenedor hasta completar, y luego la otra; finalmente, lo que queda es una parte del contenedor.

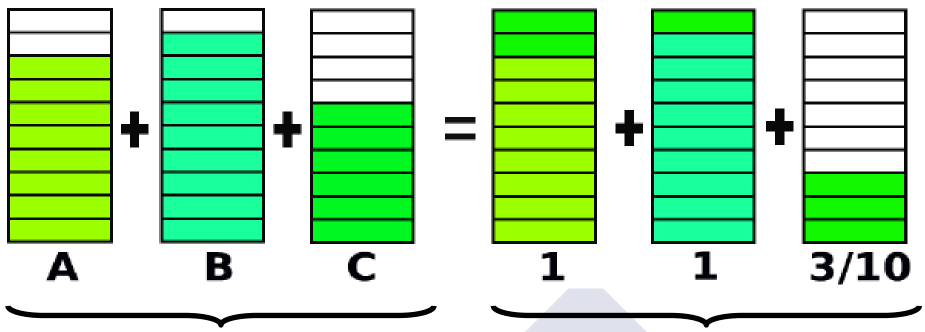


Figura 3.18. Contenedores de residuos diseñados con Etoys que permiten observar la operación de las fracciones.

$$\frac{8}{10} + \frac{9}{10} + \frac{6}{10} \quad = \quad 1 + 1 + \frac{3}{10} = 2\frac{3}{10}$$

O también realizar las sumas de las fracciones unitarias:

8 décimas + 9 décimas + 6 décimas = 23 décimas = 20/10 + 3/10 = 2 + 3/10.

Este proceso utilizado en las dos situaciones descritas, se apoya en sumar fracciones unitarias, cuyos denominadores son iguales.

Representación geométrica de las fracciones

Sin embargo, cuando necesitamos realizar operaciones con fracciones cuyos denominadores son distintos aparecen las dificultades; es decir cuando la unidad a contar es distinta en ambas fracciones (Llinares & Sánchez, 1988, p. 142). Aquí, ni los texto hacen referencia, sino que se limitan a realizar operaciones haciendo uso de la fórmula. Cabe preguntarnos, ¿cada una de las fracciones provienen de objetos diferentes (unidades)? No queda claro. Intentamos dar respuesta a esta interrogante mediante el ejemplo que suelen considerar en los textos.

Sumar $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=?$

Supongamos que se tiene un folio A4 de papel, y dividimos en 4 partes (habría varias maneras de dividir) vemos las dos formas:

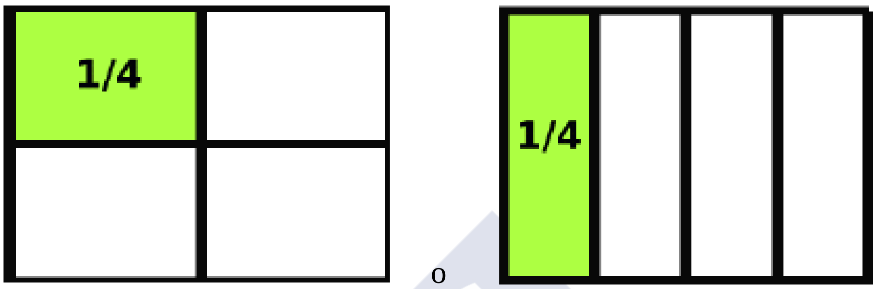


Figura 3.19. Dos de las muchas maneras de dividir un folio A4 en cuatro partes iguales.

Luego realizamos la división en otro folio A4 en 6 partes (varias maneras de dividir), presentamos dos formas.

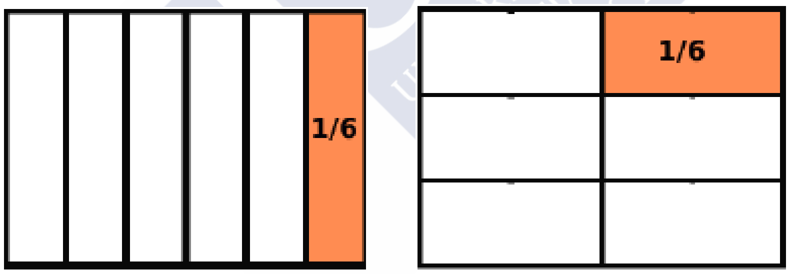
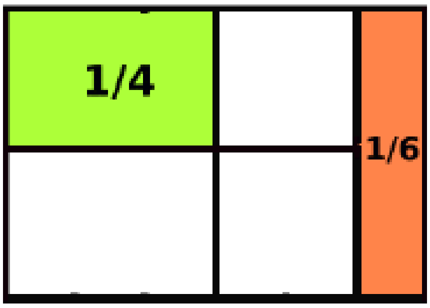


Figura 3.20. Dos de las muchas maneras de división de un folio A4 en seis partes iguales.

Aquí viene la respuesta. En realidad, se debe “realizar la operación” en una misma unidad (en un «todo»), no en objetos separados (ni objetos diferentes). Presentamos por el momento las dos posibilidades (recordemos que la operación debe llevarse a cabo en un solo objeto):



o

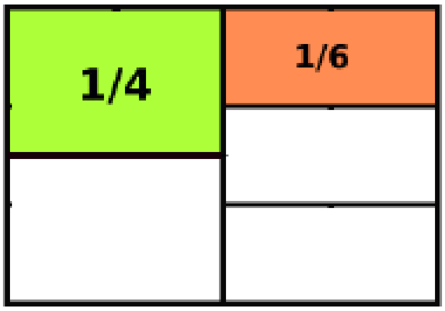


Figura 3.21. Dos de las formas de la suma de 1/4 + 1/6 en un folio A4.

Ahora debemos hacer que ambas fracciones tengan igual denominador, para realizar operación. Para tal efecto, se debe encontrar las fracciones equivalentes:

a) Elegir el denominador más grande de las fracciones. En este caso 6.

b) Calcular sus múltiplos hasta encontrar uno que sea múltiplo de 4,

   6×1 = 6 no es múltiplo de 4,

   6×2 = 12 si es múltiplo de 4, porque 4×3 = 12.

   Significa que el folio A4 se debe dividir en 12 partes, cada parte es 1/12.

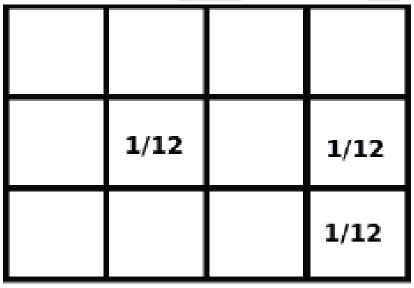
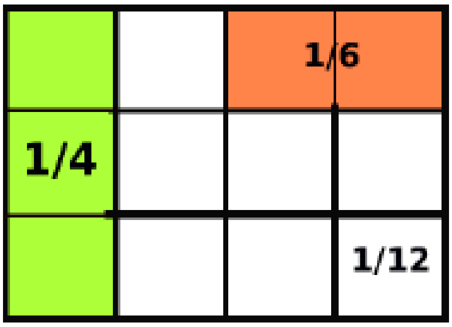


Figura 3.22. División del folio A4 en 12 partes iguales (múltiplo de 4 y 6)

Luego coloreamos las fracciones de 1/4 y un 1/6 en el mismo folio.



$$\frac{1}{6}\times 1=\frac{1}{6}\times(\frac{2}{2})=\frac{1\times 2}{6\times 2}=\frac{2}{12}$$

$$\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{4}\times(\frac{3}{3})=\frac{1\times 3}{4\times 3}=\frac{3}{12}$$

Figura 3.23. Suma de las fracciones 1/4+1/6 gráficamente.

Finalmente se tiene: $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3}{12}+\frac{2}{12}=\frac{3+2}{12}=\frac{5}{12}$

Otro ejemplo, nos permita la representación geométrica de la suma de fracciones cuando los numeradores no son necesariamente la unidad.

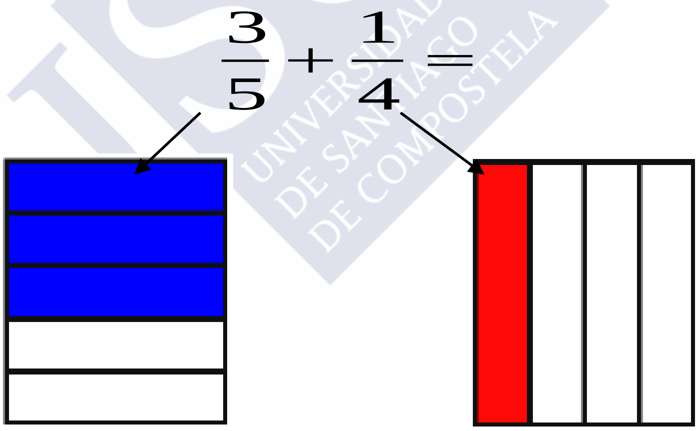


Figura 3.24. Suma de las fracciones 3/5+1/4 geométricamente.

Deseamos sumar tres quintos y un cuarto, debemos obtener el mcm{5, 4} y que es igual a 20. Luego debemos expresar tres quintos y un cuarto con fracciones equivalentes a ellas y que tengan 20 como común denominador.

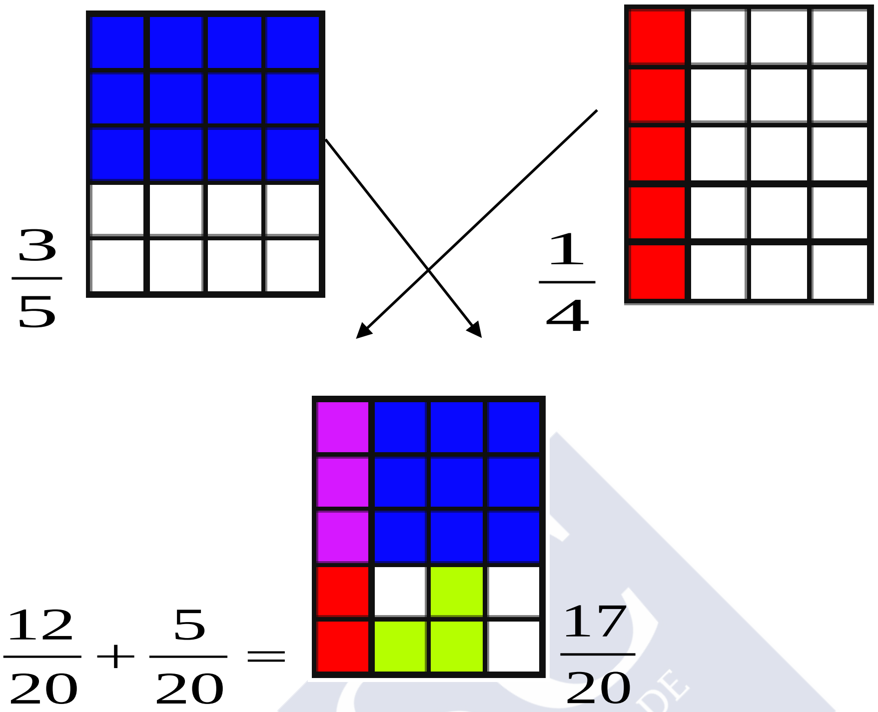


Figura 3.25. Suma geométrica de fracciones

Representación geométrica de las suma de fracciones sobre el segmento de unidad

Sumar: $\frac{2}{5}+\frac{1}{4}$

La unidad se divide en 5 partes iguales (cada parte tiene 4 divisiones), luego se divide la unidad en 4 partes iguales (cada parte tiene 5 divisiones), entonces sumamos el pedido.

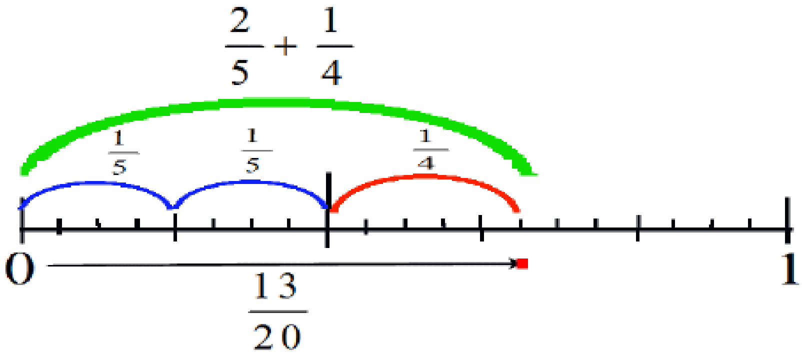


Figura 3.26. Suma geométrica sobre un segmento de unidad

3.2.3.3 Operación de la resta con fracciones

Ejemplo, restar un cuarto de tres quintos.

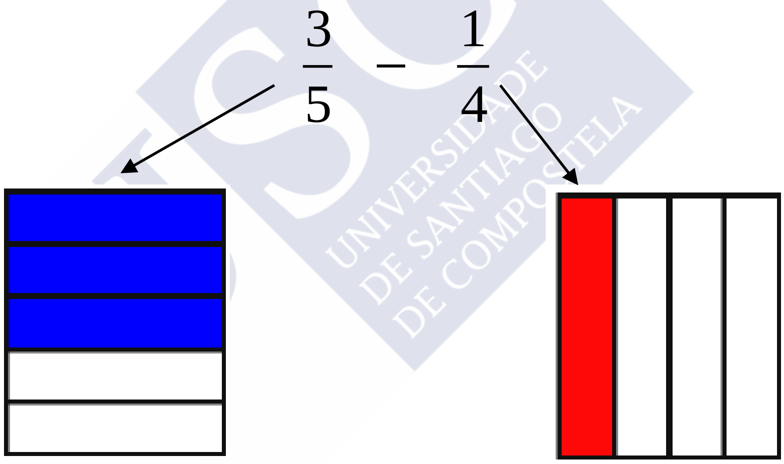


Figura 3.27. Resta de las fracciones 3/5-1/4 geométricamente

Deseamos restar un cuarto de tres quintos, debemos obtener el mcm{5, 4} y que es igual a 20. Luego debemos expresar tres quintos y un cuarto con fracciones equivalentes a ellas y que tengan 20 como común denominador.

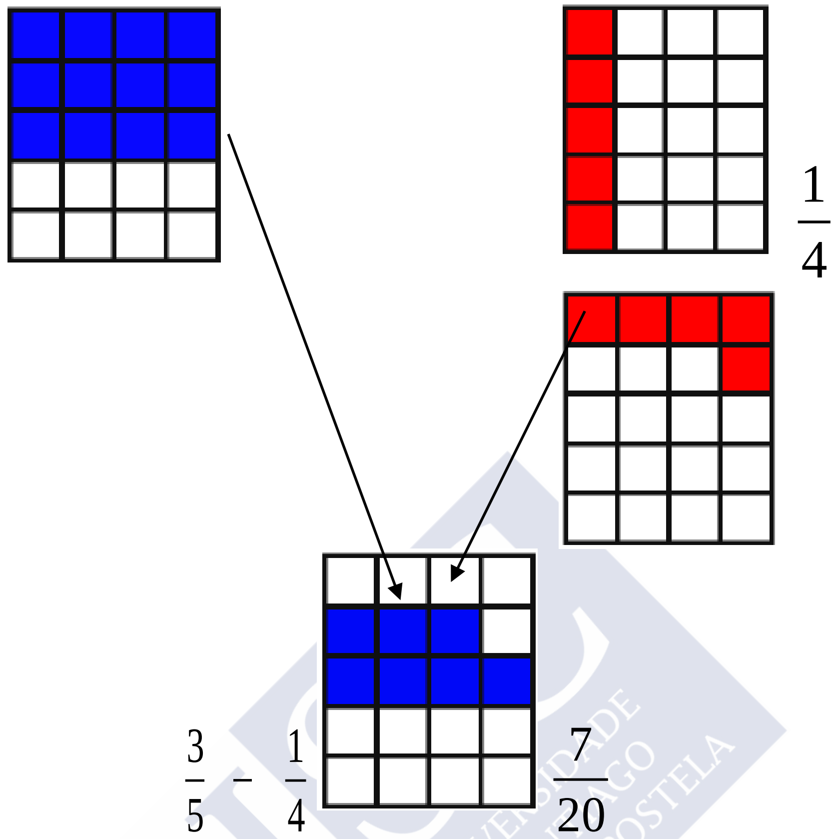


Figura 3.28. Resta geométrica de fracciones

Otra manera: realizar la resta en un segmento de unidad.

Realizar la resta de $\frac{3}{5} - \frac{1}{4}$.

Para realizar la operación se debe dividir el segmento en 5 partes iguales, luego nuevamente dividir el segmento en 4 partes iguales.

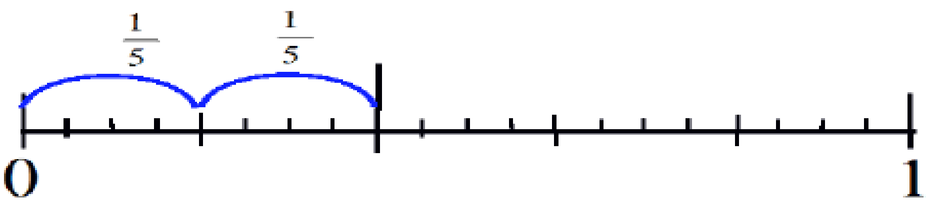


Figura 3.29. Un segmento de unidad dividido en 5 partes iguales.

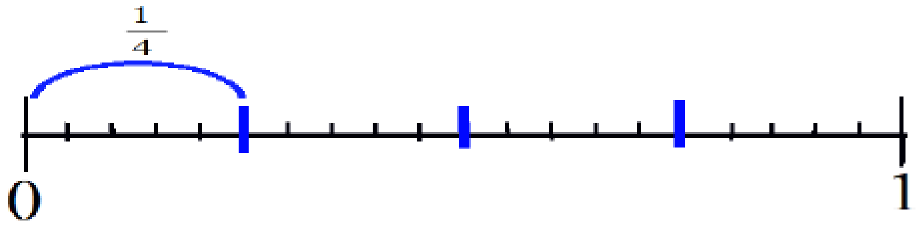


Figura 3.30. Un segmento de unidad dividido en 4 partes iguales.

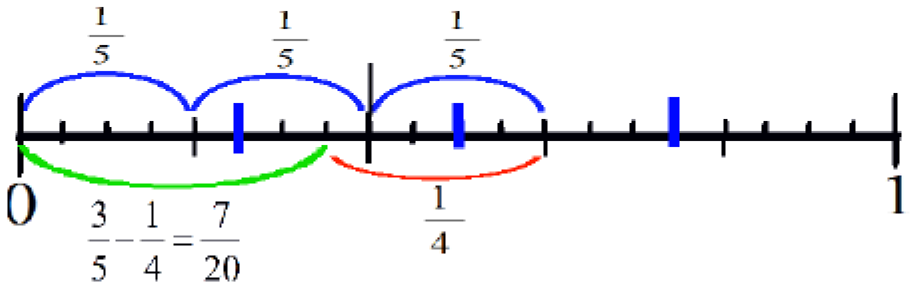


Figura 3.31. La resta de fracciones 3/5 – 1/4 en un segmento unidad,

En consecuencia, se observa que las figuras ayudan a explicar, aunque muchas veces es difícil de presentar; por lo que es importante animar a los estudiantes a representar sus ideas en formas que tengan sentido para ellos, aunque sus primeras representaciones no son los convencionales. Porque los modelos concretos son importantes para ayudar a los estudiantes a construir el significado de las fracciones y las operaciones (Cramer, Wyberg, & Leavitt, 2008, p. 496).

3.3 La descomposición genética del aprendizaje y concepción de las fracciones

La descomposición genética de un concepto es un conjunto estructurado de constructos mentales, el cual podría describirse como el concepto que puede desarrollarse en la mente de un individuo (Asiala et al., 1996). Por tanto, es necesario construir los niveles de constructos mentales y las categorías del concepto de fracción que los niños deben alcanzar durante el desarrollo de sus proyectos con Squeak Etoys.

Los niveles de construcciones se caracterizan bajo el rubro de acción, proceso y objeto (Trigueros, 2005), propuestos en la parte teórica, para desarrollar el concepto central de fracciones. Las categorías acerca del concepto de fracciones a considerarse en el trabajo de investigación son las siguientes: una parte y el todo, objetos discretos, juegos, objetos continuos, expresión verbal, la escritura de textos o cuentos y aplicaciones al contexto del mundo real.

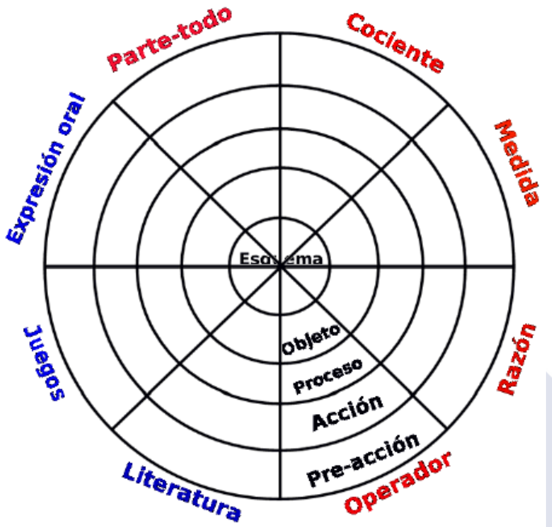


Figura 3.32. Categorías del concepto de fracción y niveles mentales que los estudiantes deberían alcanzar.

Pre-acción, este nivel se considera, cuando el estudiante no puede identificar la noción de fracción en cualquiera de las categorías y no llegan a la solución de las situaciones matemáticas. Debe centrarse la concepción sobre el concepto de fracción, mas no en el uso de lenguaje de programación Squeak Etoys.

Acción, es una manipulación metal o física repetible de los objetos (Breidenbach et al., 1992). En este nivel de constructo, es cuando el estudiante logra identificar o reconocer el concepto de fracción en las diferentes categorías (una parte y el todo, objetos discretos, juegos, objetos continuos, expresión verbal y la escritura). Consideramos algunas acciones que debe realizar el estudiante si se encuentra en el nivel de acción:

A.1. Observa una gráfica e identifica la fracción.

A.2. Reparte un conjunto de objetos en porciones.

A.3. Lee y escribe una fracción sin interpretar.

A.4. Realiza una operación de fracción de manera mecánica apelando a patrones anteriores o por similitud.

A.5. Considera a la fracción sin considerar si los elementos son discretos (un conjunto de elementos) u objetos continuos (un objeto particionado en varias partes).

A.6. Realiza operaciones mecánicamente sin comprender su significado.

"El nivel de *proceso* es una transformación basada en una construcción interna, ya no dirigida por estímulos que el individuo percibe como externos" (Trigueros, 2005, p. 9). La concepción de ***proceso*** de una fracción ocurre cuando una acción es repetida y el estudiante reflexiona sobre ella; entonces, puede interiorizar tal acción en proceso.

Es así que la construcción interna permite realizar la misma acción, mas no puede ser dirigida por estímulos externos; como ejemplo de estar ubicado en este nivel, el individuo puede realizar las siguientes operaciones:

P.1. Diferencia entre dos fracciones diferentes en las diversas categorías.

P.2. Construye gráficos de fracción haciendo uso de la paleta de Etoys.

P.3. Diferencia los tipos de fracciones considerando los tipos de elementos que tiene un conjunto.

P.4. Construye figuras de fracciones utilizando programación con Etoys.

P.5. Expresar conceptos matemáticos (longitudes, áreas y volúmenes) que relacionan al concepto de fracciones haciendo uso de Etoys.

P.6. Construir las fracciones en dos conjuntos (equivalencia de fracciones) a través de Etoys.

Objeto.- es cuando el individuo reflexiona sobre las acciones aplicadas a un proceso específico; también es capaz de ver con amplitud las semejanzas y adición de fracciones en alguna de las categorías, es capaz de reconstruirlas. Si es así el caso, se dice que se ha realizado una reconstrucción o se ha encapsulado como un objeto cognitivo; entonces, el individuo está en la capacidad de:

O.1. Mostrar las desigualdades entre dos fracciones haciendo uso de Etoys.

O.2. Comprender y explicar la fracción de una cantidad.

O.3. Realiza operaciones básicas de adición y sustracción de fracciones con Etoys.

O.4. Realiza movimientos de figuras geométricas en la operación de adición y sustracción, de fracción unitaria y fracción no unitaria con Etoys.

O.5. Realiza movimientos de figuras geométricas en la operación de adición, sustracción, multiplicación y división de fracción de fracciones mixtas con Etoys.

O.6. Diseña y diferencia las fracciones entre dos conjuntos (equivalencia de fracciones) a través de Etoys.

Esquema.- según Asiala et al. (1996), se llega a construir un esquema cuando los objetos y procesos pueden ser interconectados en varias formas. Los esquemas designados por Dubinsky et al. (1994) corresponden a los esquemas tematizados de Piaget, los cuales indican que la colección fusionada en un objeto en el cual pueden tener lugar acciones; es decir se encuentra en el nivel *trans*, donde el estudiante construye con diversos esquemas. Entonces, cuando el estudiante alcanza el nivel de constructo mental, está en la capacidad de:

S.1. Diseñar diversas situaciones (juegos, figuras geométricas, actividades de la vida real, inventa textos electrónicos, etc.) con Etoys que expresen e involucran el concepto de fracciones.

S.2. Mostrar y explicar el concepto de fracción en sus diversas acepciones asociando los diferentes niveles de conceptos matemáticos con Etoys.

Esta descomposición genética es posible cuando el proyecto se realiza con estudiantes del 5to grado de primaria por un periodo de 3 meses; porque se desarrollan las actividades de manera integral con otras áreas de las ciencias. Además el profesor o investigador podrá agregar, quitar o reformular los componentes de la descomposición genética de acuerdo al objetivo que desea alcanzar y también de acuerdo al grado de estudios que tienen los estudiantes.

3.3.1 Descomposición genética para la construcción del concepto fracción

Siendo la anterior descomposición genética una propuesta de modo general que conduce al estudio de los niveles alcanzados sobre las concepciones del concepto de las fracciones. Y teniendo una nueva propuesta específica de la construcción del concepto de fracción rediseñando el plano de la Casa de las Ciencias, es conveniente proponer los niveles de constructos mentales que deben marcar el proceso de construcción del concepto de fracción. Para tal efecto recurrimos a la descomposición genética que considera cuatro niveles de constructos mentales que son: *acción, proceso*, *objeto* y *esquema*; propuestos por la teoría APOS. Además proponemos un nivel de constructo mental antes del nivel de *acción* y lo denominamos *pre-acción*.

Pre-acción. Se considera *pre – acción*, cuando el estudiante no puede identificar la noción de fracción en cualquiera de las categorías y no tiene preciso el concepto de fracción en las situaciones matemáticas.

Acción, es una manipulación metal o física repetible de los objetos (Breidenbach et al., 1992). En este nivel de constructo es cuando el estudiante logra identificar o reconocer el concepto de fracción en las diferentes categorías (Una parte y el todo, objetos discretos, juegos, objetos continuos, expresión verbal y la escritura). Consideramos algunas acciones que debe realizar el estudiante si se encuentra en el nivel de acción:

A.1. Observa una gráfica e identifica la fracción.

A.2. Reparte un conjunto de objetos en porciones.

A.3. Lee y escribe una fracción como una definición clásica hecho en los libros.

A.4. Reconoce los elementos (líneas, ángulos, números, polígonos) de un objeto matemático que determina una fracción.

A.5. Considera a la fracción como la división de una circunferencia relacionando a una tarta.

A.6. Considera la división del plano de La Casa de las Ciencias como una división clásica realizando trazos (sin analizar las posibilidades).

La concepción de ***proceso*** de una fracción ocurre cuando una acción es repetida y el estudiante reflexiona sobre ella; entonces, puede interiorizar tal acción en proceso. Es así que la construcción interna permite realizar la misma acción, mas no puede ser dirigida por estímulos externos; como ejemplo de estar en este nivel, el individuo puede realizar las siguientes operaciones:

P.1. Diferencia las fracciones en dos figuras e identifica sus elementos.

P.2. Analiza los elementos u objetos matemáticos que componen La Casa de las Ciencias para realizar la división; por ejemplo una recta, un cuadrado (compuesto de rectas y ángulos de 90°) y triángulos (tres lados y tres ángulos). Presenta múltiples formas de dividir.

P.3. Experimenta la construcción de un segmento, determinando su distancia y ubicando un marco referencial, utilizando como herramienta Squeak Etoys.

p.4. Construye ángulos considerando giros hacia la derecha o hacia la izquierda, ángulos complementarios y suplementarios, haciendo uso de Etoys.

P.5. Ensayan construir los elementos cuadrados y triángulos que son elementos básicos que componen un objeto matemático como es la fracción, haciendo uso de Etoys.

La concepción de **Objeto**, se refiere a cuando el individuo reflexiona sobre las acciones aplicadas a un proceso específico; en esta etapa se espera que los estudiantes construyan y reconstruyen las fracciones. Si es así el caso, se dice que se ha realizado una reconstrucción o se ha encapsulado como un objeto cognitivo; entonces, el individuo está en la capacidad de:

O.1. Explica los elementos de un cuadrado y su construcción.

O.2. Explica los elementos de un triángulo, así como su construcción.

O.3. Compone los diferentes mosaicos en un guion para la construcción de un cuadrado.

O.4. Compone los diferentes mosaicos en un guion para la construcción del triángulo.

Esquema.- según Asiala et al. (1996) un esquema se realiza cuando una vez están construidos, los objetos y procesos pueden ser interconectados en varias formas. Los esquemas designados por Dubinsky et al. (1994) corresponden a los tematizados por Piaget, los cuales indican la colección fusionada en un objeto en el cual pueden tener lugar las acciones. Las fracciones construidas con Squeak Etoys mediante la utilización de diversos elementos matemáticos, como por ejemplo: segmentos, ángulos, triángulos, cuadrados, rectángulos y que cada uno de los elementos tienen un concepto definido (Esquemas construidos por otros elementos matemáticos) dentro de Squeak Etoys. Entonces cuanto el estudiante alcanza el nivel de constructo mental está en la capacidad de:

S.1. Concebir el concepto de una fracción como la división de un objeto en varias partes iguales mediante el uso de Squeak Etoys.

S.2. Construir fracciones con el elemento triángulo (la distribución de la Casa de las Ciencias), y otras fracciones haciendo uso de Etoys.

S.3. Construir las fracciones con el elemento rectángulo (contenedor de basura), u otras divisiones haciendo uso de Etoys.

S.4. Concebir el concepto de una fracción como la unión de varias partes iguales para formar un objeto dividido, haciendo uso de Squeak Etoys

S.5. Diseñar y explicar las diversas situaciones del contexto de la vida que involucran al concepto de fracciones.

Estos niveles permiten que los niños construyan el concepto fracción. Se debe entender que la comprensión y la construcción del concepto en cada niño/a no es estándar; su aprendizaje difiere uno del otro. Por lo tanto, los niveles de la composición genética permiten tener una aproximación a los constructos mentales que alcanzan los niños.

Capítulo IV:

Marco metodológico

4. CAPÍTULO IV. MARCO METODOLÓGICO

Este capítulo describe la metodología del proceso de la investigación en función del problema y los objetivos diseñados. El trabajo pretende describir y comprender el proceso de construcción del concepto de una fracción por parte de los niños/as de 5to de primaria utilizando como herramienta el lenguaje de programación Squeak Etoys. Se selecciona una metodología de carácter cualitativo mediante estudio de casos. Además, se trata de un estudio de la relación entre varios aspectos: por un lado el uso de Squeak Etoys, por otro, las características del alumnado de 5to grado de primaria, las condiciones curriculares que se imponen en el contexto escolar y por último el concepto de fracción. El conjunto de estos aspectos guardan estrecha relación entre sí y configuran una estructura dinámica cuyo producto es la investigación que presentamos (Martínez Miguélez, 2004).

4.1 La investigación cualitativa en la matemática educativa

Consideramos que una simple definición deja pobre un concepto tan amplio como es el de investigación cualitativa, intentamos su conceptualización a partir de los aportes de Denzin y Lincoln (2011, pp. 3-4), quienes consideran que la investigación cualitativa es un campo de investigación transversal a diversas temas y disciplinas; con una compleja interconexión entre familia de términos y conceptos. […] La investigación cualitativa implica la utilización de diferentes tipos de estudios (Estudio de caso, experiencias personales introspectivas, y otros) y el uso de recolección de una variedad de materiales empíricos, entrevistas, artefactos, textos, producciones culturales, observación y textos interactivo visuales que describen momentos de rutinas, problemas y significados en la vida de los individuos.

Para Savenye y Robinson (2004, p. 1046) la investigación cualitativa está dedicada a desarrollar la comprensión de los sistemas humanos; ya sea pequeños, como el uso de tecnologías en el aula por los estudiantes y el profesor; o amplios como un sistema cultural. Los estudios cualitativos de investigación suelen incluir las etnografías, estudio de casos y estudios descriptivos en general. También, Mª Paz Sandín (2003) considera que “la investigación cualitativa es una actividad sistemática orientada a la comprensión de fenómenos educativos y sociales, a la transformación de prácticas y escenarios socioeducativos, a la toma de conciencia y también hacia el descubrimiento y desarrollo de un cuerpo organizado de conocimiento”.

En el campo de la matemática educativa, existen pocas referencias de experiencias que utilicen investigación cualitativa. Sin embargo, ya hace tiempo que se trabaja con este encuadre, como muestran los trabajos de Jean Piaget (Piaget & Inhelder, 1967; Piaget, Inhelder, & Szeminska, 1981). En los años 1990, el grupo RUMEC, presentó una estructura de investigación cualitativa (Asiala et al., 1996); y a partir de esa fecha la investigación cualitativa comenzó a tomar mayor importancia en el campo de la matemática educativa.

Por otra parte, el trabajo de investigación emprendido se centra en estudiar y dar respuesta a la pregunta ¿cómo los niños construyen el concepto de fracción en las matemáticas haciendo uso de Squeak Etoys? Para dar respuesta a esta pregunta, no es necesario recurrir a valorar calificaciones de su rendimiento, o medir la adquisición de conocimientos de los niños/as; sino que requiere comprender para explicar el proceso de la construcción del concepto, haciendo un seguimiento etapa por etapa mientras niños y niñas trabajan con Squeak Etoys con el objeto de ubicar en cada etapa los niveles de constructos mentales alcanzados por los niños/as. Por lo tanto, el estudio por su naturaleza requiere de la investigación cualitativa; para tal efecto, tomamos como referencia el trabajo y la estructura del grupo RUMEC.

El trabajo de investigación se realizó en una escuela, observando el proceso desarrollado por los alumnos y alumnas de 5to grado de primaria mientras trabajaban con el software de programación. Se observó a todo el grupo de estudiantes del 5to grado de primaria en un primer momento. Y en un segundo momento, a tres estudiantes en particular. En ambos momentos se hizo un seguimiento profundo mediante el análisis de los procesos que han seguido durante el desarrollo de las sesiones. La observación se apoyó en filmaciones de las experiencias, grabación de los proyectos (en el ordenador) y revaloración de las libretas del alumnado (Swanborn, 2010, p. 26). Asimismo, durante el desarrollo de la investigación se han realizado entrevistas al profesorado con el objeto de recoger sus opiniones.

4.1.1 Elección del grupo de trabajo

Existen diferentes apreciaciones sobre la elección de la muestra para el trabajo de investigación; esta discusión surge a raíz del tamaño de la muestra y el universo para la generalización, visto desde dos paradigmas tanto cuantitativo y cualitativo. Una aproximación en la colección de datos cualitativos usualmente implica involucrase de modo directo con los individuos uno a uno, para luego formar un grupo o conjunto de personas (Hancock, 1998, p. 13). Mack, Woodsong, MacQueen, Guest, y Namey (2005, p. 5), consideran que en la investigación cualitativa, es suficiente solo una muestra (un subconjunto) seleccionado de una población. Aunque es fundamental comprender que son los objetivos de la investigación y las características de la población en estudio las que determinan cuál y cómo deben ser seleccionados los sujetos participantes.

Para la elección de la muestra en la presente investigación se tuvo en consideración la propuesta de A. Laperrière (1997), quién considera que la elección de la muestra teórica está ligada con el análisis en curso, de tal manera que los grupos elegidos o las situaciones están en función de su pertinencia respecto de la elaboración de las categorías conceptuales y de sus relaciones, y no por su representatividad; además, el muestreo teórico inicial está determinado por la pregunta de investigación y es continuamente reestructurado para responder a nuevas interrogantes que surgen del análisis.

La muestra elegida no fue aleatoria; sino que cumplía ciertas características:

- El grupo observado ya tenían conocimientos básicos del uso de Squeak Etoys, esto facilitaba el desarrollo de las experiencias limitadas por el horario (pocas horas) y la distribución curricular de los contenidos mediante cronogramas planteada en el proyecto de centro.
- El profesor de este grupo de alumnos ya había iniciado la unidad de fracciones de tal manera que permitía al alumnado participar en la experiencia.
- 5° grado de primaria resulta ser el ideal para realizar las experiencias en esta temática por el desarrollo curricular planteado.

4.1.2 El estudio de casos

La investigación social describe y explica ciertos fenómenos que están relacionados a la vida de la gente, grupos, organizaciones, comunidades, pueblos y hasta ciudades. En tal sentido, existen diversos métodos, estrategias y metodologías (aunque no existe homogeneidad entre los autores) para explicar dichos fenómenos. Uno de los diseños que con mucha frecuencia los investigadores suelen utilizar en este tipo de investigaciones, es el *estudio de casos* (Swanborn, 2010, p. 12). Aunque su definición puede causar dificultad, ésta puede ser definido en diferentes formas por su amplitud, además está sujeto a las estrategias de investigación y, a los diferentes fuentes de datos obtenidos.

Robert Yin (1994, p. 13), sostiene que el *estudio* de *casos* es una investigación empírica, investiga un fenómeno contemporáneo dentro de un contexto de la vida real, especialmente cuando los límites entre el fenómeno y el contexto no son claramente evidentes. Mack, Woodsong, MacQueen, Guest y Namey (2005, p. 1) consideran que la investigación cualitativa es efectiva para obtener culturalmente una información específica acerca de valores, opiniones, comportamientos y contextos sociales particulares de las poblaciones. Asimismo, para Yin (1984, p. 14) el estudio de caso permite a un investigador retener las características de manera holística y significativo de eventos de la vida real.

Robert Stake 2000, p. 24), también considera que el estudio de casos puede ser usado para probar hipótesis, particularmente para examinar si una hipótesis es falsa; además expone que el estudio de casos puede ser altamente estadístico. Pero es más pertinente el estudio de casos en las ciencias sociales, porque permite realizar descripciones que son muy complejas, de manera holística y con la participación de un gran número de variables no muy aislada. Por otra parte, para Sabariego Puig, Massot Lafon y Dorio Alcaraz (2009, p. 310), el estudio de casos es un método de investigación cualitativa, utilizado para comprender en profundidad la realidad social y educativa. Puede ser clasificado en: intrínseco, instrumental, colectivo, descriptivo, interpretativo y evaluativo (Sabariego Puig et al., 2009, pp. 314-315). También, el *caso* puede ser un individuo, un grupo de individuos, o un determinado movimiento formado por un grupo de personas (Flyvbjerg, 2000; Sabariego Puig et al., 2009; Stake, 2005).

En tal sentido, para el estudio emprendido se adoptó el *estudio* de *casos* por contener dos etapas de análisis, la primera a todo un grupo de alumnos; y la segunda seleccionando individuos en función de determinados criterios con el objetivo de profundizar en determinados aspectos. De allí que los casos seleccionados pueden denominarse “colectivo”, por comprender el comportamiento de un grupo de estudiantes e *intrínseco*, porque se trata de comprender a un estudiante en particular; finalmente, *interpretativo*, por adoptar descripciones densas interpretando de acuerdo a las teorías propuestas.

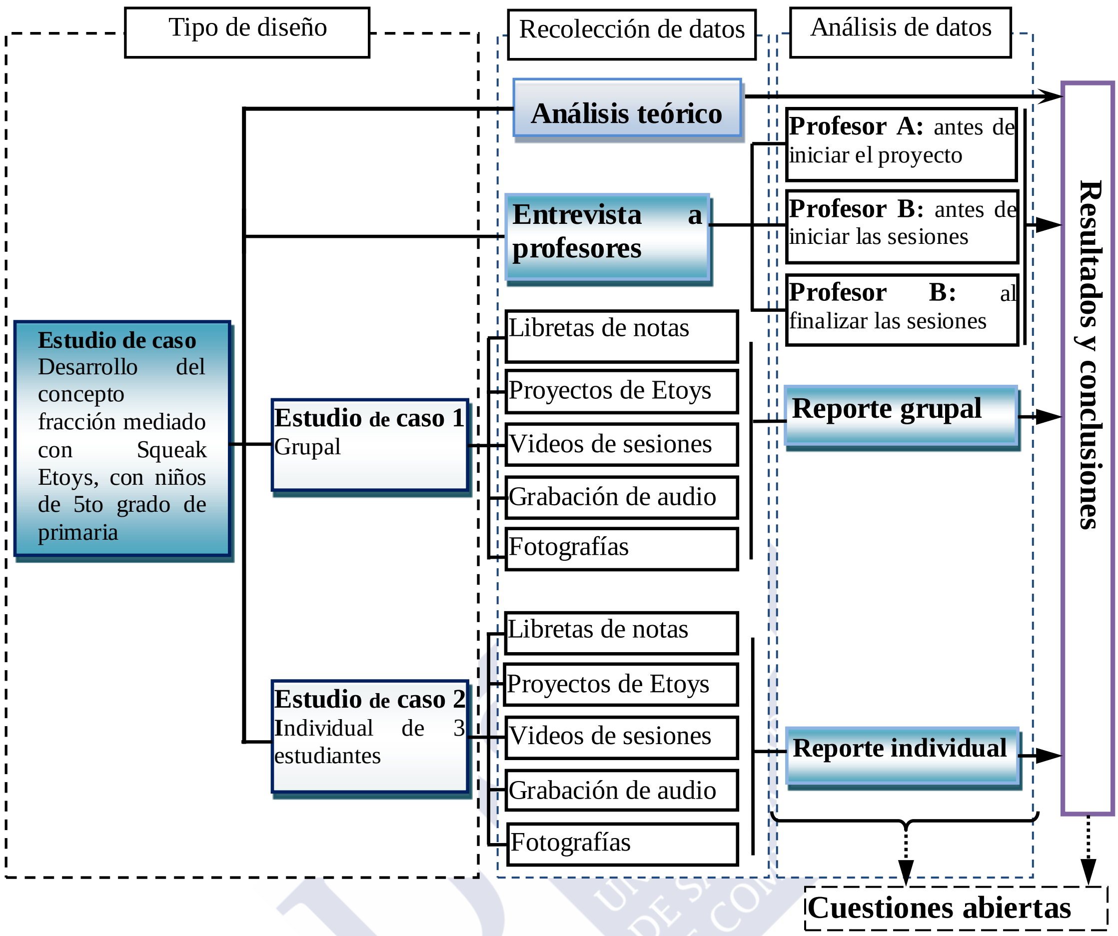


Figura 4.1. Diagrama del diseño del análisis de estudio de casos.

El trabajo se llevó a cabo en dos momentos. En el primer momento se realiza un análisis global de todo el grupo de estudiantes, denominado estudio colectivo de casos; porque cada estudiante tiene su propio estilo trabajo, de aprendizaje y diseño de proyectos; por lo tanto, todos forman un caso. El segundo momento, se realizó un estudio intrínseco de casos de tres estudiantes por separado; seleccionados por su rendimiento académico a criterio del docente en: deficiente, regular y bueno. Finalmente, se hizo un análisis cruzado de los datos obtenidos (entrevistas, videos, proyectos, grabación de audios, y fotografías), para proponer algunas conclusiones. Se debe entender que el análisis de las evidencias del estudio de casos, es uno de los aspectos muy dificultosos en su tratamiento y elaboración (Yin, 1984, p. 105).

4.1.3 Etapas e instrumentos de recolección de información

En el estudio de casos, la unidad de análisis es un factor crítico; por lo general, es un sistema de acción que tienden a ser más selectiva concentrándose en uno o dos temas que son fundamentales para comprender el sistema en estudio, y en particular el estudio en un individuo o un grupo de individuos (Tellis, 1997). En ese sentido, surge la necesidad de seleccionar y contar con instrumentos apropiados (flexibles y adaptables) para la recolección de datos o información.

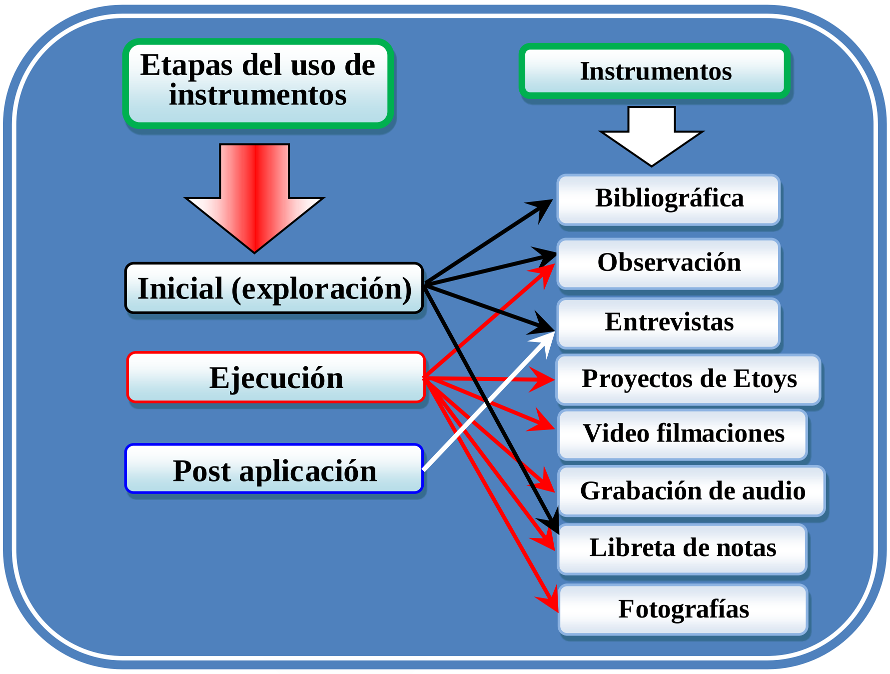


Figura 4.2. Etapas del uso de instrumentos en la recolección de información.

Para Yin, (1984, p. 84) el estudio de caso se basa en seis diferentes fuentes de evidencia: documentos, archivo de grabaciones, entrevistas, observación directa, observador-participante y objetos físicos. En el trabajo de investigación se utilizaron distintas técnicas para la recolección de información como la observación, las entrevistas, el análisis de diseño de proyectos elaborados con Squeak Etoys, filmaciones de las experiencias y grabación de audio.

4.1.3.1 La observación

En la investigación cualitativa la observación tiene lugar en entornos que son lugares naturales de la actividad. La observación natural es una técnica ideal para la recopilación de datos, al menos, lo más discreto posible (Angrosino & Rosenberg, 2011, p. 467). Las observaciones conducen al investigador hacia una mejor comprensión del caso. "[…] Durante la observación, el observador cualitativo en estudio de casos registra bien los acontecimientos para ofrecer una descripción profunda, relativamente incuestionable para posteriores análisis y el informe final" (Stake, 2005, pp. 60–61). Por tanto, en el trabajo de investigación la observación fue un aspecto esencial, porque se realizaron observaciones durante el desarrollo de las experiencias. En el apartado 3.2.10 se hace un análisis detallado de las observaciones realizadas.

4.1.3.2 La entrevista

Según Gurdián-Fernández (2007, p. 197), la entrevista cualitativa, se encuentra a medio camino entre la conversación cotidiana y la entrevista formal. Es una técnica o actividad que, conducida con naturalidad, hace imperceptible su importancia y potencialidad. Y en el estudio de casos, una fuente esencial en la recolección de información (Yin, 1984, p. 84). En otras palabras, consideramos a la entrevista como una fuente para comprender la naturaleza de la sociedad o un grupo de personas. Los datos de la entrevista proporciona la materia prima básica, pero depende de lo que deseamos hacer con él (Back & Goldsmiths, 2012, p. 14).

Existen distintos tipos de entrevistas según diferentes autores, según Turner (2010), las entrevistas son: (a) un entrevista de conversación informal, (b) una entrevista general guiada, y (c) una entrevista estandarizada abierto (sin límite de tiempo); en cambio I - TECH (2008) (International Training & Education Center for Health) y Fontana y Frey 2005) consideran más adecuada una clasificación en función de la estructura de preguntas que contiene la entrevista. De ahí que la clasifican en: no-estructurada, semi estructurada y estructurada. Boyce y Neale, (2006, p. 3), consideran a la entrevista en profundidad, como una técnica de la investigación cualitativa, que conduce a una relación intensa con un pequeño número de encuestados para explorar sus perspectivas sobre un programa o situación particular.

Aunque todas las entrevistas en la investigación cualitativa, contienen los mismos elementos básicos, como la discusión, el detalle y la descripción; éstas varían de acuerdo al control del entrevistador. En el trabajo de investigación se tomaron dos tipos de entrevistas, “entrevista de conversación informal” y, “entrevista semi estructurada”, que se emplea con fines de exploración, tratando de obtener las primeras informaciones para poder delimitar el problema de investigación, en este caso concreto, las ventajas y desventajas del uso de Squeak Etoys como herramienta educacional (Olaz, 2008). Se optó por emplear este tipo de entrevistas por dos razones. Sus resultados de carácter exploratorio o de acercamiento, nos permitieron un planteamiento preciso en el marco conceptual de la teoría del construccionismo. Y por otro lado, para obtener un mejor panorama y valoración sobre el uso de Squeak Etoys en el aprendizaje de las matemáticas como herramienta para el trabajo en el laboratorio.

También, se realizaron entrevistas semi estructuradas (siguiendo una guía) al profesor de aula del 5to grado, antes de empezar y al culminar las experiencias, para tener información sobre su apreciación sobre ellas. Las entrevistas fueron grabadas en audio y posteriormente transcriptas para su análisis.

4.1.3.3 Proyectos de Etoys – documentos electrónicos

Yin (1984, p. 87) considera que muchos estudios de casos utilizan “archivos” cuando son frecuentemente grabados en ordenadores (servicio de registros, registros de organización, mapas y gráficos, datos de encuestas y registros personales). En la experiencia realizada, los niños guardaron sus proyectos en *carpetas digitales* que fueron de vital importancia para el análisis de los procesos que siguieron los niños/as durante sus experiencias con Squeak Etoys.

Los archivos digitales de Etoys se guardan por defecto en una carpeta denominado *Etoys*, pero si uno desea guardar en otra carpeta, se direcciona haciendo un clic prolongado en  y aparece una ventana, donde se selecciona *publicar en un servidor distinto*. La extensión de los archivos es *.pr* (ejemplo: Casa de las Ciencias.002.pr), la particularidad de los archivos es que cada vez que se guarda se genera otro archivo nuevo con código ascendente (ejemplo: Casa de las Ciencias.003.pr). Este tipo de archivo permite verificar el progreso de la ejecución de los proyectos hasta el momento de haber guardado; y seguir trabajando el proyecto más adelante. Los archivos sirvieron para realizar el análisis correspondiente de la evolución en la construcción del concepto a través de la programación. Aunque, debido a problemas técnicos encontrados en los ordenadores de la escuela (algunos de bastante antigüedad) se produjeron dificultades para el guardar la información, tanto en las carpetas de los ordenadores, como en los lápices de memoria, por lo tanto se perdieron muchos archivos guardados por los niños.

4.1.3.4 Los video filmaciones y fotografías

El uso de video, fotografía y audio en la recolección de datos es útil, sobre todo en los estudios de observación no participantes (Savenye & Robinson, 2004, p. 1052). Un video permite responder a la pregunta ¿qué pasó durante la experiencia? Los datos cualitativos, precisamente a menudo requieren este tipo de pruebas directas sobre la dinámica de lo que está sucediendo (Dey, 2005, p. 177). ¿Cómo analizar esta dinámica? Una manera consiste en analizar los datos por categorías que capturan los principales elementos de la acción social, y luego identificar en la documentación de cómo se interconectan las categorías. En el trabajo de investigación, se analizaron cada una de las dimensiones y su interrelación; asimismo, los momentos que vivieron los estudiantes, sus emociones, dificultades y el trabajo en equipo.

Cada una de las sesiones ha sido grabada en video. Se utilizaron tres cámaras filmadoras que cubrían toda el aula y segmentaba grupos de alumnos. El propósito fue describir el comportamiento durante el desarrollo de sus proyectos; esta filmación permitió observar la experiencia de una forma holística, capturar sus expresiones verbales, los movimientos, gestos y la comunicación entre compañeros de estudios de trabajo. También se encuentra grabada en video la actividad realizada por el profesor/investigador como observador participante (Massot Lafon, Dorio Alcaraz, & Sabariego Puig, 2004; Pérez Serrano, 1994), cuando explica y dirige algunas actividades realizadas por los niños y niñas, y guía las consultas con pistas; así como las realizadas por el profesor de aula, estas se concentraron mostrando su presencia con el objeto de poner orden en el laboratorio o ayudar a esclarecer algunas preguntas de los alumnos. También se tomaron algunas fotografías específicas para captar el resultado de algunos estudiantes, mostrar así el logro de la programación y la construcción del concepto fracción. Estas fotografías lograron estabilizar una acción durante el desarrollo de las experiencias, que permitieron corroborar el análisis de información.

4.1.3.5 Libreta de notas

Hemos denominado libretas de notas a un cuaderno que se entregó a cada uno de los niños y niñas para que escriban y/o anoten sus proyectos y comentarios de los compañeros u otras situaciones de las sesiones. Estos documentos relevantes, sirven para corroborar con otras fuentes y acrecentar el numero evidencias (Yin, 1984, pp. 85–86). Las libretas fueron una fuente especial, porque cada niño/a desarrolló las secuencias de las experiencias, escribiendo y graficando el procesos de diseño de sus proyectos.

Las libretas fueron recogidas al finalizar el trabajo y se transformaron en valiosos informes que han servido para ver cómo abordaron los niños/as el problema y cómo han trabajado, antes, durante y al final de cada proyecto; además, fueron muy útiles para realizar el análisis de la evolución en la construcción del concepto de fracción realizado por cada estudiante contrastando con los proyectos de sus archivos digitales. Algunos de los estudiantes realizaron muchas anotaciones hasta alcanzar seis páginas, a diferencia de otros que hicieron sólo una página.

4.2 Etapas del proceso de investigación

El proceso de investigación se ha desarrollado en diferentes etapas, se apoyándonos en los trabajos de Asiala et al (1996), Trigueros (2005), Arnon (1998) y Barbosa (2006). Concretamente se ha basado en cinco etapas fundamentales:

1) Análisis y construcción del marco teórico;

2) Diseño y ejecución del proyecto en el centro educativo seleccionado, partiendo de la recolección de información previa a través de entrevistas, asistencia a clases, experiencias previas con Etoys y revisión de documentos (revisión de libros de primaria, Real Decreto de enseñanza de primaria en España y currículo de educación primaria de Galicia).

3) Recolección de información mediante las carpetas digitales de los proyectos y de las libretas de los niños, grabación de video de las sesiones de trabajo, grabaciones de audio de las mismas, documentación fotográfica de la experiencia y entrevistas al profesorado participante.

4) Análisis de los datos, evaluación de los resultados y

5) Conclusiones.

El Figura 4.3 muestra las interacciones entre los tres componentes: análisis teórico, diseño y ejecución de proyectos, recolección y análisis de datos y conclusiones.

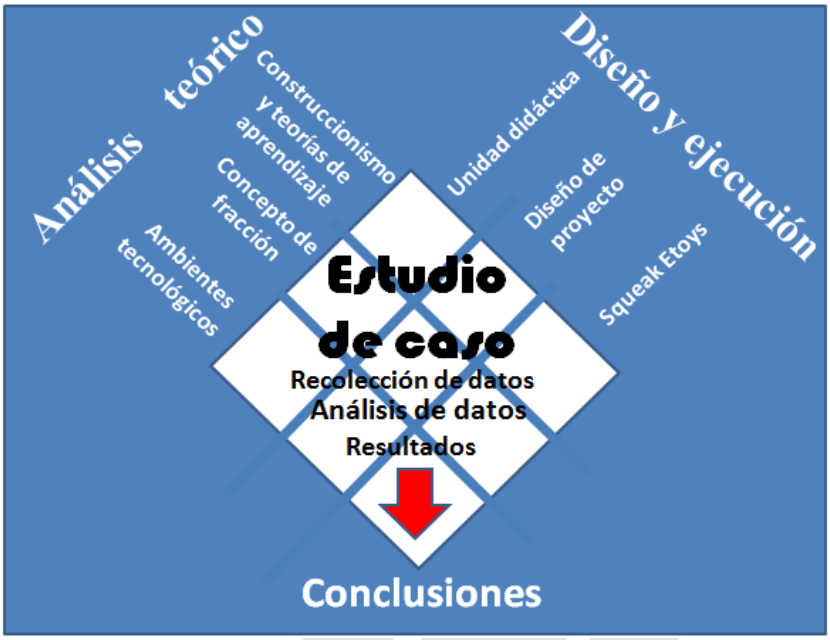


Figura 4.3. Estructura global de la investigación.

En relación a la etapa de construcción del marco teórico, se hace referencia al marco teórico desarrollado en el Capítulo II, donde se realiza un análisis de las teorías y enfoques que sustentan el trabajo de investigación: el constructivismo de Piaget, fundamentalmente en sus aportaciones en relación con las equilibraciones cognitivas, asimilación y acomodación; la teoría APOS de Ed Dubinsky (descomposición genética y los niveles de las estructuras mentales), el construccionismo de Papert, asentado en los objetos con los cuales pensar (Papert, 1982, p. 24), las entidades públicas y micromundos. Asimismo, se ha presentado una visión general del lenguaje de programación Squeak Etoys como herramienta educativa, y el uso de los ordenadores. También, la historia y definición del concepto de fracción.

La etapa de diseño y ejecución de proyecto con Squeak Etoys, requirió de diferentes pasos: la elaboración del esquema global del proceso, revisión del currículo de educación primaria y libros de textos, la exploración de Squeak Etoys, el diseño inicial de proyectos y la elaboración de la unidad didáctica que incluye el diseño final del proyecto.

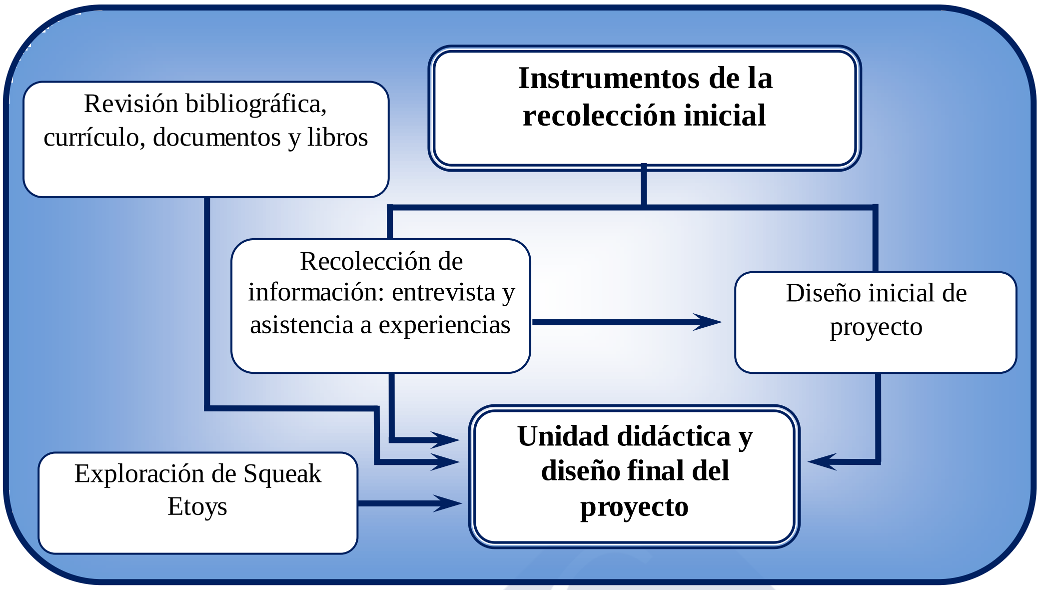


Figura 4.4. Etapas del diseño e implementación de proyectos.

Este diagrama muestra el proceso que se siguió para obtener información, desde la revisión de material bibliográfico hasta obtener la unidad didáctica de fracciones que incluye el proyecto final para el desarrollo con Etoys.

4.2.1 Análisis de documentos: proyecto curricular de centro seleccionado y libros de textos

Se realizó una revisión del currículo de educación primaria en sus dos niveles; una es el currículo a nivel nacional según el REAL DECRETO 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria, en concordancia con la Ley Orgánica 2/2006, del 3 de mayo; así como las establecidas en la Comunidad Autónoma de Galicia (Decreto 130, 2007). Asimismo se hizo un análisis de los libros de texto de matemáticas del cuarto y quinto grado de educación primaria.

La educación en España, tuvo numerosas reformas educativas introducidas de forma gradual (Anghel & Cabrales, 2010); reflejo de ello es la estructura curricular vigente acorde a los cambios actuales y la inmersión en la Comunidad Europea. El

Real Decreto (2006) (RD) 1513/2006, de 7 de diciembre, establece las enseñanzas mínimas (aspectos básicos del currículo, objetivos, competencias básicas, los contenidos y criterios de evaluación) en la educación Primaria. Ambas normas explicitan la obligatoriedad de la educación primaria y la promoción del aprendizaje a lo largo de la vida, dentro y fuera del sistema educativo, con la finalidad de actualizar, completar y ampliar las capacidades, conocimientos, habilidades, aptitudes y competencias para su desarrollo personal y profesional.

4.2.1.1 Programa curricular nacional y proyecto curricular de centro

La Ley Orgánica 2/2006 (LOE), en su artículo sexto define el currículo como "el conjunto de objetivos, competencias básicas, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de cada una de las enseñanzas" (2006, p. 17166). Se trata de una formulación similar a la adoptado en la Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) y a la Ley Orgánica de Calidad de la Educación (LOCE); pero, introduciendo una nueva referencia denominada competencias básicas.

Para Penalva Buitrago (2007, p. 2), el modelo de currículum elegido en el sistema educativo español para hacer frente a las demandas contemporáneas es el llamado *currículum abierto y flexible*. Se fundamenta en el principio de *significatividad*; en donde existe la primacía y protagonismo del alumno en el proceso de enseñanza (en virtud de la enseñanza participativa), y se introduce en las aulas la integración de alumnos diversos, ello significa que la pericia del profesor (en el proceso de enseñanza) debe residir en su capacidad para *adaptarse* a todos los alumnos. Desde esta perspectiva, es imposible que ocurra que el profesor se adapte a cada alumno, porque cada estudiante es un mundo diferente; siendo la propuesta una utopía. En tal sentido, una hipótesis de trabajo es que el profesor se orienta a una actividad tradicional.

Luego mediante el Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, se establecen la enseñanzas mínimas en la Educación Primaria; de aquí se desprende uno de los objetivos que tiende a "Desarrollar las competencias matemáticas básicas e iniciarse en la resolución de problemas que requieran la realización de operaciones elementales de cálculo, conocimientos geométricos y estimaciones, así como ser capaces de aplicarlos a las situaciones de su vida cotidiana" (Real Decreto 1513, 2006), y con respecto del uso de las tecnologías, propone "Iniciarse en la utilización, para el aprendizaje, de las tecnologías de la información y la comunicación desarrollando un espíritu crítico ante los mensajes que reciben y elaboran" (Real Decreto 1513, 2006, P. 43054); ambos objetivos relacionados al trabajo de investigación.

Los contenidos de matemáticas están organizado en cuatro bloques: *Números y operaciones*, *Medida: estimación y cálculo de magnitudes*, *Geometría* y *Tratamiento de la información, azar y probabilidad*. El concepto de fracción se encuentra dentro del bloque de Números y operaciones.

El Decreto 130/2007, del 28 de junio sujeto a la Ley Orgánica 2/2006, del 3 de mayo y el Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, establece el currículo de la educación primaria para la Comunidad Autónoma de Galicia, coincide con la propuesta en el Real Decreto 1513/2006 en sus rasgos principales. Sin embargo, en relación a las competencias, realiza una propuesta interesante, porque plantea la necesidad de promover la habilidad de utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático. Otra de las competencias en la que hemos basado la experiencia realizada, es la habilidad para interpretar y expresar con claridad y precisión las informaciones y seguir aprendiendo a lo largo de la vida, así como en situaciones reales o simuladas en la vida cotidiana.

En definitiva, "se supone que el alumno deberá aplicar destrezas y actitudes que permitan razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje de la matemática, utilizando las herramientas de apoyo adecuadas, e integrando el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento para dar un mejor respuesta a las situaciones de la vida de distinto nivel de complejidad" (Decreto 130, 2007, p. 130). Propone fomentar la creatividad;

capacidad de interactuar con el entorno, teniendo como sustento los conocimientos y habilidades matemáticas. Además, existe una expresión bastante marcada hacia un currículo interdisciplinario, aunque con una débil propuesta en el uso de las tecnologías.

Finalmente, A. Zabala, (2011, p. 11) manifiesta que el currículo LOE privilegia aspectos cognitivos dejando de lado lo social y afectivo y por otro lado, dentro de lo cognitivo tiende hacia una perspectiva memorística, porque

> […] el currículo define con una precisión y detalle las áreas o materias de enseñanza y, en cada una, los objetivos, los contenidos y los criterios de evaluación. Es decir, la respuesta al para qué hay que enseñar, qué hay que enseñar, cuándo hay que enseñar a ciclos en primaria y niveles o cursos en secundaria) y también a lo que hay que evaluar (A. Zabala, 2011, p. 11).

El proyecto educativo de centro y proyecto curricular de centro

El proyecto educativo de centro (PEC) y proyecto curricular de centro (PCC) de la escuela donde se realizó la experiencia guarda relación con el currículo. Plantea de manera especial el desenvolvimiento de las capacidades creativas y de espíritu crítico y anima la iniciativa de los alumnos/as.

Las capacidades están distribuidas en capacidades físico-psicomotriz, cognitivas, meta cognitivas, y de participación. Estas capacidades están orientadas al desarrollo y adquisición de conocimientos dentro del colegio y por ende dentro de los salones de clases. Ninguna capacidad menciona actividades experimentales; esto se puede corroborar con las propuestas de evaluación: evaluación inicial, formativa y sumativa; en relación a la información verbal, habilidad intelectual, actitudes, meta cognición y trabajo en grupo.

El PCC se desarrolla en espiral, de tal forma que los mismos objetivos y contenidos se plantean con diferente nivel de profundidad y complejidad en 1 ciclo y en los ciclos superiores. Por tanto los contenidos de matemáticas están organizados en cuatro bloques: representación y espacio, números, medida, gráfica e iniciación estadística. El concepto de fracción se ubica en el bloque 2 de números, que está compuesto de dos áreas, fracciones y operaciones; para los niños/as del 5to de primaria.

4.2.1.2 Revisión de libros de texto de cuarto y quinto grado de primaria

También se realizó una revisión de dos libros de texto de cuarto de primaria[9] y un libro de texto de quinto primaria[10]. Los libros de textos analizados pertenecen a la Editorial SM, son utilizados cotidianamente en la escuela seleccionada. También se realizó un análisis del libro de texto de la Editorial Edelvives de cuarto grado con el objetivo de comparar contenidos y actividades con el libro de texto que se utiliza en la escuela. Esta revisión permitió obtener orientación acerca del tipo de actividades que los alumnos están habituados a realizar en el día a día escolar, y por lo tanto, completar así el diagnóstico de situación con el que nos encontraríamos a la hora de realizar la experiencia.

Cuadro 4.1. *Características de los libros de texto del cuarto de primaria*.

Características del libro (1): Proyecto mundo, agua. Cuarto de primaria	Características del libro (2): Proyecto tirolina (SM). Cuarto de primaria
Modo de uso Explica el modo de uso del libro. Cada tema compone de los siguientes puntos: acertijo, vocabulario, información importante, actividades, estrategias para resolver problemas, repaso de conceptos y pregunta difícil. Cada una de ellas con su explicitación.	**Modo de uso**: No tiene. Sólo presenta dos símbolos: de temas de salud, medio ambiente y actividades y otro, hace referencia a una página de Internet.
Distribución de las unidades	**Distribución de las unidades**

[9] Matemáticas 4 primaria. Proyecto tirolina. SM. (2010) / Matemáticas 4 primaria. Proyecto mundo agua. Editorial Edelvives (2008).
[10] Matemáticas 5 primaria. Proyecto Timonel. SM.

Distribuye en 12 unidades, El concepto de fracción se ubica en 6ta unidad.	Distribuye en 15 unidades, El concepto de fracción se ubica en 6ta unidad.
Concepto de fracción Es la sexta unidad, y está compuesto por: La fracción y sus términos, representación de fracciones, escritura y lectura de fracciones, comparación de fracciones, las fracciones y la unidad, la fracción de una cantidad, valores (cuidemos nuestro planeta), lógica (razonamiento con fracciones), resuelvo problemas, calculo mental, repaso y cuánto he aprendido.	**Concepto de fracción** Es la sexta unidad, y está compuesto por: Las fracciones, comparar fracciones, fracción y unidad, fracción de un número, resuelvo problemas, aprende a aprender, recuerda lo anterior, pon a prueba tus competencias
Prerrequisitos del concepto de fracción El libro presenta dos prerrequisitos básicos: la división de dos números (unidad 4), y la noción de recta y ángulo, circunferencia y círculo (unidad 5).	**Prerrequisitos del concepto de fracción** El libro presenta un prerrequisito básico: la división de dos números (unidad: 4 y 5).

El libro (1), resalta tres aspectos, hace referencia al cálculo mental, autoevaluación y el trabajo en equipo. Asimismo expone el modo de uso del libro, para que los niños/as no tengan dificultades (como realizar los ejercicios, los niveles de las dificultades, y otros); incluye en cada unidad el cálculo mental. Su presentación es más dinámica con figuras que permiten comprender las operaciones. Los prerrequisitos básicos son fundamentales en el texto son dos: uno sobre rectas y ángulos, y el otro, la división de números. Estos dos prerrequisitos permitirían al niño/a ubicarse inmediatamente en los conceptos de rectas y ángulos, así como en las medidas elementales para la construcción del concepto de fracción.

En cambio el libro (2) que corresponde al quinto grado de primaria, no presenta el modo de uso del texto (guía de como se debe utilizar el libro), presenta como prerrequisito básico solamente la división de dos números. El prerrequisito principal para el desarrollo del concepto de fracción, es la comprensión del concepto de la recta y el ángulo, que se ubican en la unidad 13; por lo tanto, es difícil que los niños/as se ubiquen en esta primera etapa en el concepto de fracción al trabajar con Etoys.

Además, existe un error en la unidad 12, acerca de la capacidad y peso. De acuerdo al sistema internacional de unidades el *peso* se expresa en Newton (N) y la unidad de la *masa* se expresa en kilogramos (kg); en el libro la unidad de medida del peso se expresa en kilogramos.

El libro de texto del 5^{to} de primaria del proyecto timonel, de la editorial SM, es el texto que utilizan los niños/as en el colegio. Cada unidad está distribuida en dos bloques: al inicio presenta situaciones como narraciones o historietas que inducen la idea del concepto de la unidad y la segunda corresponde al desarrollo de contenidos. Luego, cada parte está dividida en tres áreas: la primera presenta conceptos básicos, la segunda actividades y la tercera resolver problemas. Al final de cada unidad existen *actividades* de reforzamiento del aprendizaje: Resolver problemas, aprender a aprender, recuerda lo anterior y pon a prueba tus competencias. Todo el contenido está enmarcado en promover el aprendizaje mediante el desarrollo de ejercicios.

Cuadro 4.2. *Características de los libros de texto del quinto de primaria del Proyecto Timonel.*

Modo de uso No tiene.

Presenta tres símbolos:

 Indica los apartados que tratan de temas relacionados con la salud, el cuidado del medio ambiente, el respeto otras personas y actividades que promueven la convivencia.

 Indica las actividades para mejorar la competencia del estudiante.

 Indica el lugar para visitar una página en Internet.

Distribución de las unidades

Distribuye en 15 unidades, El concepto de fracción se ubica en la 4ta y la operación de fracciones en la 5^{ta} unidad.

Fracciones

Unidad 4. Inicia con una narración que promueve la lectura. Los contenidos son: Las fracciones. Lectura y escritura, comparar fracciones con el mismo

	denominador, comparar fracciones con distinto denominador, fracciones equivalentes, resolver problemas, aprender a aprender y pon tus competencias.
Unidad 5.	Inicia con una narración que promueve la lectura. Los contenidos son: Fracción de una cantidad, sumar y restar fracciones con el mismo denominador, fracción como división exacta, fracciones y números mixtos, resuelve problemas, aprende a aprender, recuerda lo anterior y pon a prueba tus competencias.

Se puede resumir que los libros de textos revisados promueven el razonamiento lógico matemático (problemas) y hacen énfasis en los cálculos mentales; los contenidos relacionados con el concepto de fracción son tratados con presentaciones clásicas, como la división de tartas. Las actividades estas relacionadas con acciones de copiar situaciones del libro a las libretas y luego completar lo que aprendió en la clase (reforzamiento). Los problemas propuestos son situaciones relacionadas con la actividad cotidiana, y tienen que ser resueltos utilizando la imaginación y el razonamiento, escribiendo en un folio o en el cuaderno. A este tipo de aprendizaje, Morris Kline (1976, p. 9) lo considera como la imitación del niño/a a lo que hacen el profesor y el libro. Por tanto, lo alumnos se enfrentan a una variedad desconcertante de procedimientos que aprenden de memoria con el fin de dominarlos. Por lo tanto, podríamos conjeturar que habría un dominio de aprendizaje memorístico.

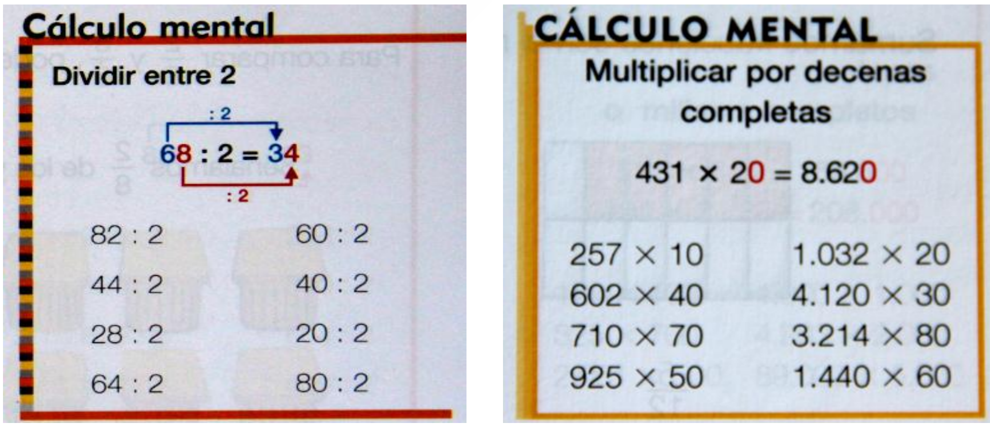


Figura 4.5. Cálculo mental propuesto por los libros de primaria, que inducen al memorismo en las clases de matemáticas.

Ninguno de los textos mencionan actividades del tipo de experimentos o experiencias físicas que permitan el descubrimiento y el desarrollo de la creatividad, relacionados a los contenidos que los niños/as necesitan adquirir para descubrir y aprender de la interacción con el mundo real. Tampoco hacen sugerencias para el uso de materiales educativos; ni el uso de tecnologías como los ordenadores y calculadoras. Al respecto sobre el uso de las tecnologías, Allan Collins y Richard Halverson (2009, p. 43) consideran que existe incompatibilidades entre la práctica de la escuela y los imperativos de las nuevas tecnologías.

El contenido de la unidad didáctica de fracciones, del proyecto en el que se basa la investigación, se diseñó adaptándolo al currículo de la Comunidad Autónoma de Galicia, reorientado para que se adecue a la propuesta curricular de la escuela. El proyecto curricular de la escuela está distribuido en cuatro bloques; y el concepto de fracción se ubica en el bloque de números: atributo de los objetos, tales como forma, tamaño, textura; los números naturales, división de números naturales; concepto de fracciones y operaciones básicas. Los bloques de esta propuesta curricular están de acuerdo a la estructura del Real Decreto 1513/2006, que establece las enseñanzas mínimas de la Educación primaria.

4.2.2 Recolección de información inicial: Entrevistas y observaciones de las experiencias en el laboratorio con Etoys

Según N. K. Denzin y Lincoln (2011) la entrevista es muy útil para generar información acerca de la experiencia vivida y sus significados. Existen tres formas generales: estructurada, no estructurada y preguntas abiertas. Dos de las utilidades principales del estudio de casos son las descripciones y las interpretaciones que se obtienen de otras personas y la entrevista es el cauce principal para comprender las realidades múltiples (Stake, 2005, p. 63).

En el trabajo de investigación se tuvo presente una serie de cuestiones éticas, como son, mantener el anonimato de la identidad de las personas y de las instituciones que nos brindaron la información y la autorización respectiva para la investigación. Por lo que se asignaron nombres ficticios a cada uno de los estudiantes. A los profesores entrevistados se les designaron con letras A y B respectivamente, y a la institución educativa como “Colegio concertado de Santiago de Compostela”.

Se realizaron entrevistas a dos profesores que trabajan en el mismo colegio. Uno de ellos, realiza actividades de aprendizaje con sus alumnos utilizando Squeak Etoys con resultados significativos, que, en adelante denominaremos *profesor* “A” (profesor del cuarto de primaria en el año 2010-2011). El otro, es el profesor de aula con quien se realizó la experiencia y carecía de dicha experiencia, que en adelante denominaremos *profesor* “B” (profesor del quito grado de primaria 2011-2012). Durante el desarrollo de la investigación se realizaron cuatro entrevistas al profesor “A” y dos al profesor “B”: la primera antes del inicio de las sesiones y la segunda al culminar las sesiones.

4.2.2.1 Entrevistas al profesor “A” y acercamiento a la experiencia con Etoys

La etapa inicial de recolección de información se inicia con entrevistas al profesor “A” que ya tiene experiencia en la utilización de Squeak. Su elección se basa en que es el único que tiene dominio del lenguaje de programación Squeak, además viene realizando experiencias mediante proyectos con sus alumnos desde el año 2003.

El acercamiento a la experiencia de este profesor permitió comprender cuestiones relativas al funcionamiento del entorno informático de la escuela, y también al ritmo que llevan los alumnos. Es de resaltar también que este profesor desarrolla su actividad en un año anterior al curso seleccionado, por lo que los alumnos que vivieron las experiencias en el diseño de esta investigación, ya habían pasado por las experiencias propuestas por este profesor. Las entrevistas fueron exploratorias y abiertas.

El proceso de información estuvo marcado por dos fases claramente diferenciadas, en el primer momento realizamos un estudio de corte exploratorio mediante una serie de entrevistas abiertas (2) al profesor “A” de aula que gentilmente nos brindó su apoyo. El segundo grupo de entrevistas al profesor “A”, se realizó en un segundo momento, cuando se asistieron a sesiones de diseño en el laboratorio de informática con los niños de 4to grado de primaria. Las sesiones se concentraron en diseñar un proyecto para construir un reloj de manecillas. Estas dos fuentes nos permitieron obtener una primera aproximación de los aspectos a tratar.

Cuadro 4.3. *Característica de la entrevista en la etapa exploratoria*.

Aspectos de la investigación	Recolección de información
Procedimiento metodológico	Entrevista no dirigida
Tipo de preguntas	Abiertas
Sujetos de las entrevistas (Universo)	Profesor “A” del aula
Ámbito	Colegio Concertado de Santiago de Compostela
Forma de contacto	Directora de tesis
Número de entrevistas	4
Fechas de entrevistas	Del 24-01-2011 al 22-02-2011.

Las entrevistas al profesor “A” se realizaron en cuatro momentos diferentes:

Entrevista 1: prólogo informativo, características de la educación en España.

Entrevista 2: conversación relacionada con las teorías del construccionismo en la que se basa el trabajo de investigación,

Entrevista 3: experiencias del uso de tecnologías en España, y el uso de Squeak.

Entrevista 4: preguntas sobre Squeak Etoys, sus bondades, ya que el profesor es uno de los que mejor conoce las cualidades de Squeak Etoys.

Las entrevistas no fueron grabadas, porque las reuniones fueron informales. Cada una de ellas duró aproximadamente de 15 a 20 minutos, en paralelo al proceso de sus clases en el colegio y fueron realizadas en diferentes horarios.

La entrevista de exploración realizada al *profesor A*, ayudó a consolidar la línea de investigación, acerca del construccionismo como una teoría del aprendizaje muy completa que permite que los niños puedan construir sus propios conocimientos haciendo uso de las tecnologías. Además a identificar el lenguaje de programación Squeak como una herramienta muy poderosa que promueve el aprendizaje de alto nivel al integrar diversas materias; y, finalmente a comprender el proyecto curricular de centro en su rígida temporalización mediante cronogramas previamente establecidas.

En las conversaciones que mantuvimos, el profesor "A" hacía énfasis sobre las cualidades de Squeak "que es una herramienta muy poderosa que permite al estudiante construir su propio conocimiento" (profesor "A", entrevista N° 3, pág. N° 2, párrafo 4). Estas conversaciones permitieron investigar otros programas interactivos similares como Logo y Scratch[11] (Maloney, Resnick, Rusk, Silverman, & Eastmond, 2010). Estos son programas orientados a objetos para diseñar historias animadas y juegos (creado en el MIT), muy semejantes a Etoys. También se indagó acerca de StarLogo TNG[12] un lenguaje de programación gráfica en un mundo en 3D (que ha pasado por diversas presentaciones y modificaciones tales como NetLogo y StarLogo).

Luego de analizar cada uno de los programas: NetLogo, StarLogo, StarLogo TNG y Scratch, se seleccionó Squeak Etoys, visualizando que este tiene la

[11] Para descargar Scratch visitar: http://info.scratch.mit.edu/es/Scratch_1.4_Download
[12] Para descargar starLogo visitar: http://education.mit.edu/starlogo/

particularidad de ser muy versátil en el diseño en el que se centra el tema de investigación. Es manipulable, tiene múltiples funciones y es un sistema multimedia destinado a ayudar a los niños a aprender ideas poderosas mediante la construcción de objetos creados por ellos mismos (Kay, 2007a), además es gratuito de código abierto y se puede descargar Etoys[13] para diversas plataformas (Windows, Macintosh y Linux), lo cual nos permite su mejor adaptabilidad para ser utilizado en las escuelas.

4.2.2.2 Notas de campo sobre observación a las experiencias de los niños

Luego de la primera entrevista exploratoria realizada al profesor “A” de cuarto grado de primaria, se participó como observador a las experiencias con Squeak que estaba realizando con sus alumnos. El proyecto objeto de observación se basaba en la construcción de un reloj de manecillas; cuando comienza la observación, los niños ya llevaban dos meses de trabajo.

La observación de las experiencias de los niños durante el proceso del diseño de proyectos en la construcción del reloj con manecillas tuvo dos propósitos. La primera fue comprender las cualidades del lenguaje de programación Etoys; y la segunda, tomar notas acerca cómo funciona la metodología del construccionismo durante el proceso de conducción del profesor y el diseño de los proyectos por los estudiantes.

La exploración con Etoys se inicia mucho antes de tener la entrevista con el profesor (antes de iniciar la investigación desconocía las cualidades de Etoys). Pero involucrarme a realizar el diseño del proyecto para construir el reloj en las mismas condiciones que los niños del colegio hizo que consolidara el proyecto de investigación por las bondades y características de Squeak Etoys, observando cómo

[13] Descargar para instalar en: http://www.squeakland.org/download/

promueve el aprendizaje de los niños y las construcciones de sus conocimientos, muy diferente a las clases tradicionales.

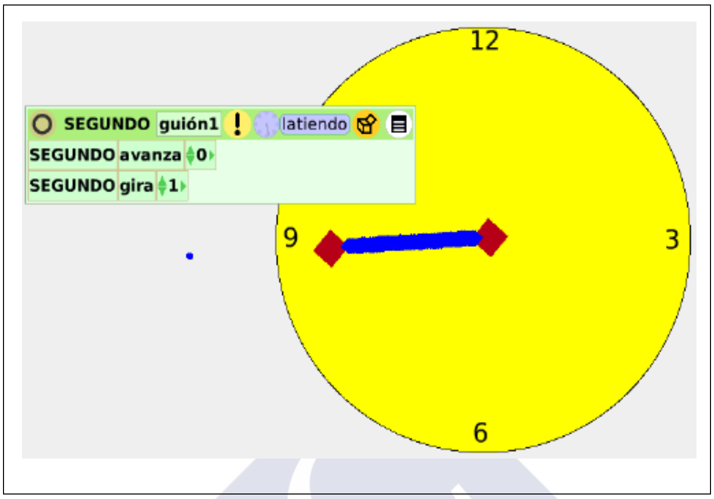


Figura 4.6. Primer diseño del proyecto para construir un reloj.

Para esta primera fase de exploración se elaboraron dos instrumentos básicos de observación, el primero fue destinado a la observación del laboratorio y el segundo para observar el desarrollo de clases en el salón de clases (ver Anexo A y B respectivamente). En un principio ambos tenían las características de las fichas de observaciones clásicas; pero en el momento de la observación se verificó que este tipo de instrumento no fue útil para continuar la observación, porque la característica de una sesión con Etoys es totalmente diferente a las clases tradicionales. Por ésta razón, la observación sirvió para diseñar un instrumento (ver anexo C) que además resultó de utilidad para la etapa de ejecución del proyecto en el colegio con los alumnos del 5to grado de primaria.

El instrumento de observación estuvo centrado en valorar las acciones que los niños/as realizan al diseñar sus proyectos, desde la formulación de hipótesis, las actividades que realiza con Squeak Etoys, etapas en la construcción del concepto, el desenvolvimiento dentro del laboratorio en relación al trabajo en equipo y la socialización de los contenidos en el aula de los resultados realizados en el laboratorio.

Se dividió en cuatro categorías: Dominio de Squeak Etoys, construcción del concepto, interacción entre compañeros y socialización.

La primera parte del trabajo con Etoys se llevó a cabo en el laboratorio de informática con una periodicidad de una hora por semana. Se observaron cuatro sesiones, donde el alumnado realizó el proyecto de construir un reloj de manecillas, teniendo como herramienta a Squeak Etoys.

Si bien no tuvimos acceso directo a los proyectos digitales de los niños/as se pudo observar cómo, en cada sesión, diseñaban etapa por etapa, y experimentaban en intentar hacer girar cada manecilla del reloj manipulando los guiones y los mosaicos; unos lo hacían girar muy rápido, otros lo hacían muy despacio, para otros las manecillas giraban en sentido anti horario, en algunos momentos preguntaban al profesor sobre sus dudas, el profesor solo daba algunas pistas y nuevamente a trabajar y en otros momentos, los mismos niños/as ofrecieron las soluciones a las dificultades de sus compañeros.

Una segunda etapa (los viernes en el salón de clases) consistió en el resumen y reforzamiento de los conceptos aprendidos en las experiencias realizadas en el laboratorio. El profesor preguntaba si alguien había avanzado el proyecto en su casa, la mayoría levantaba las manos. Algunos explicaban las acciones ejecutadas correctas, otros sólo atinaron a decir que intentaron pero no pudieron, otros que diseñaron, pero su diseño no funcionó; luego pasaban a la pizarra a mostrar su propuesta. Parte de algunas participaciones se muestran en las anotaciones del investigador, como las siguientes:

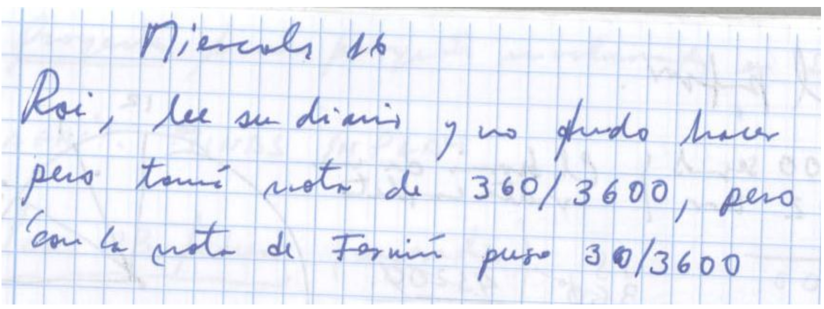

Miercoles 16
Roi, lee su diario y no pudo hacer
pero tomó nota de 360/3600, pero
con la nota de Fermín puso 30/3600

Figura 4.7 Nota de observación a participaciones en las clases.

La figura muestra la división que intentan hacer los niños al buscar la relación de una vuelta sobre el total de segundos que tiene una hora. Las propuestas son hechas por los alumnos en el salón de clases; y que será puesta en escena en el laboratorio de informática en la siguiente sesión.

Finalizando las experiencias con los niños

Al finalizar el proyecto, el profesor hizo una sesión especial con los niños/as en el salón de clases, para hacer un recuento de todas las experiencias vividas por los niños durante el trabajo en el laboratorio; así como, los diversos conceptos aprendidos durante la construcción del reloj.

Cada estudiante tuvo que participar exponiendo sus anotaciones, explicando el proceso del diseño en la construcción del reloj y brindando sus aportes de conceptos aprendidos. El profesor, asumía el rol de moderador para conducir la reunión y arribar a conclusiones.

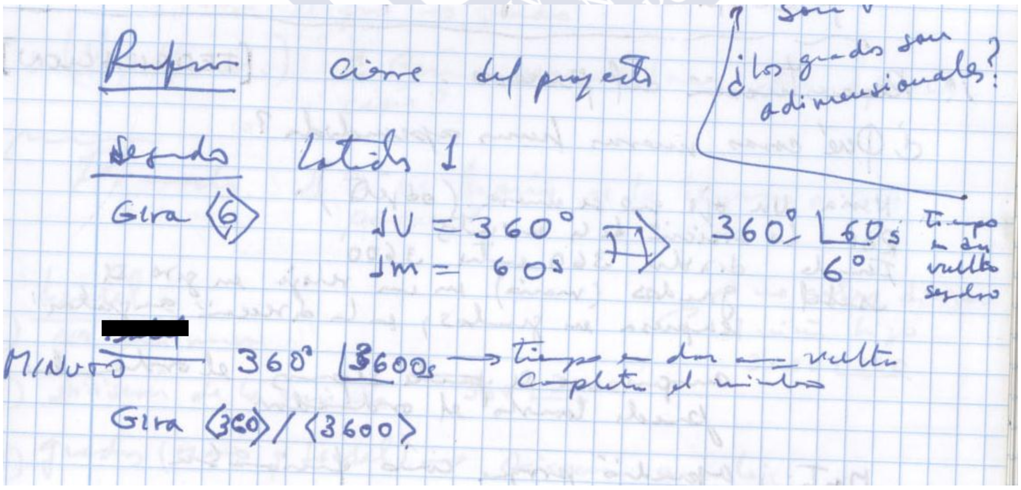
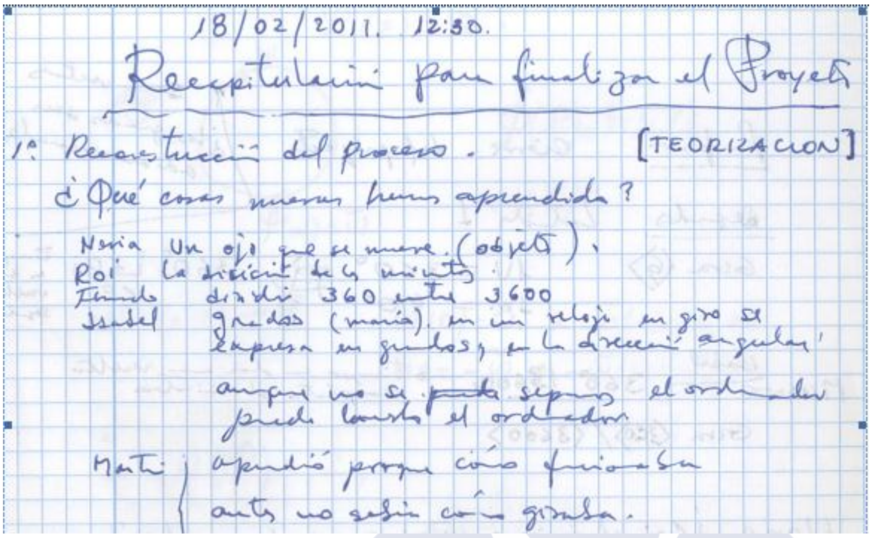


Figura 4.8. Notas de aclaraciones del profesor en la construcción del reloj.

Aquí se muestra algunas aclaraciones del profesor sobre el número de grados que tiene una vuelta; luego Alice realiza la división de 360/3600 en un mosaico. Se observa que el estudiante no puede dividir porque todavía no tiene cierto dominio de la división, que no está considerada en el plan curricular de 4to grado.


18/02/2011. 12:30.

Recapitulación para finalizar el Proyecto

1º Reconstrucción del proceso. [TEORIZACION]

¿Qué cosas nuevas hemos aprendido?

Nería Un ojo que se mueve. (objeto).
Roi La división de los minutos.
Fernando dividir 360 entre 3600
Isabel grados (manía). en un reloj el giro se expresa en grados, por la dirección angular.
aunque no se [illegible] sepamos el ordenador puede construir el ordenador
Martí aprendió porque cómo funcionaba antes no sabía cómo giraba.

Figura 4.9 Comentarios de los niños sobre los conceptos aprendidos durante el diseño del proyecto.

Al finalizar el proyecto se hizo una recapitulación de todo el desarrollo realizado en el laboratorio, así como en las clases durante el diseño del proyecto de la construcción del reloj de manecillas. Cada estudiante expuso los conceptos que había aprendido durante su experiencia, los conceptos estuvieron relacionados con las matemáticas, con Etoys y con el área de lenguaje; esta última porque los niños llevaron un diario, donde escribieron sus proyectos, discutieron y leyeron (competencia digital aplicada a la lengua castellana).

La experiencia de observación de las clases en donde los niños diseñaban sus proyectos, fortaleció y orientó el proceso de la investigación dentro del panorama del construccionismo. Porque se observó la metodología en la práctica y se visualizó con claridad cómo los niños construyeron sus conocimientos con Etoys interrelacionando con otras áreas del currículo, así como con contenidos de materias que son muy complejas y que corresponde a niveles superiores.

4.2.2.3 Entrevista de negociación con el profesor “B” de aula

Antes del inicio de las sesiones en el colegio se tuvo la ***primera*** “entrevista de coordinación” con el profesor de aula donde se iba a desarrollar la experiencia. Es el profesor “B” de los niños/as del 5to de primaria, quienes anteriormente fueron alumnos del 4to de primaria, y ya habían trabajado con Squeak Etoys, en las clases que fueron observadas y comentadas anteriormente. La reunión tuvo como propósito solicitarle personalmente la posibilidad de desarrollar el proyecto durante las horas de matemáticas, además de conocer algunos aspectos de cómo se desarrolla el aprendizaje de las matemáticas en el aula. Estas entrevistas fueron grabadas en audio, para su posterior transcripción y análisis bajo consentimiento de la entrevistada.

Finalmente, de la entrevista al profesor “A” de aula del 4to grado, de las observaciones a las experiencias de los mismos niños/as en el laboratorio de informática cuando realizaban diseño del proyecto en construir un reloj con manecillas, de las observaciones de las clases de resumen; y la entrevista de negociación con el profesor “B” de aula del 5to grado de primaria, se rescatan los siguientes elementos.

a) Que Squeak Etoys es una herramienta educacional muy atractiva para los niños, porque permite interactuar múltiples situaciones en mismo proyecto.

b) Con Squeak Etoys el profesor no realiza clases de matemáticas, sino ayuda a los niños/as a desarrollar los proyectos y a través de los proyectos aprenden matemáticas.

c) En el momento de realizar las experiencias con Squeak Etoys los niños/as intercambian opiniones e informaciones en el proceso del diseño del proyecto.

d) Que la teoría del construccionismo es una teoría de la educación que sostiene un aprendizaje constructivo.

e) La unidad didáctica y la propuesta de trabajar con Squeak, motivó la participación en la experiencia al profesor “B” del 5to grado.

Estos elementos son puntos importantes que dieron sostenibilidad al trabajo de investigación, así como un impulso, desde una perspectiva no común a las clases tradicionales.

Segunda entrevista al profesor “B” de aula.

La segunda entrevista al profesor “B”, fue definida como una “entrevista en profundidad basada en un guión tentativo con aquellos cuestiones sobre las que se pretendió profundizar (Olaz, 2008). El cuadro muestra las características del proceso de la entrevista. Se realizó al finalizar las sesiones del proyecto de esta investigación.

La entrevista tuvo como propósito recabar información sobre la valoración de las experiencias que presenció durante el desarrollo de los proyectos por parte de los niños/as en el laboratorio de informática. El protocolo de la entrevista guarda relación con preguntas sobre el desarrollo de las experiencias en el laboratorio.

Cuadro 4.4. *Segunda entrevista al profesor B, luego de finalizar las experiencias.*

Aspectos de la investigación	Entrevista no estructurado
Procedimiento metodológico	Entrevista en profundidad
Tipo de preguntas	Abiertas
Sujetos de las entrevistas	Profesor del aula
Ámbito	Colegio Concertado de Santiago de Compostela
Forma de contacto	A través del profesor A de 4to grado
Número de entrevistas	Una
Fecha de entrevista	1^{ero} de marzo 2012.

4.2.3 Exploración de Etoys y diseño de proyectos

Luego de las informaciones obtenidas, se inicia la exploración de Squeak Etoys. Este proceso resultó complejo dada la escasez de material público disponible. En un inicio sólo un texto sirvió de apoyo, el libro “Ideas Poderosas en el Aula: El uso de Squeak para la mejora del Aprendizaje de las Matemáticas y de las Ciencias” de B.J. Allen-Conn & Kim Rose. También se visitaron páginas Web relacionadas al trabajo con Etoys. La de mayor importancia, en cuanto a la calidad y cantidad de los proyectos, fue el centro de “Aprendizaje y programación con Etoys”[14] de la University of Illinois at Urbana – Champaign.

Dada la escasez de tutoriales nos vimos en la necesidad de elaborar un tutorial a medida que explorábamos el entorno. Se trata de un “Manual básico de Squeak Etoys” de seis páginas, que contiene los elementos de básicos del Mundo de Squeak Etoys (ver Anexo D), este material, que en una primera instancia se pensó para ser entregado a los niños, también permitió conocer con mayor amplitud las bondades básicas de Etoys. Luego no hubo necesidad utilizarlo, dado que se seleccionó al grupo de niños que ya tenían experiencia con Etoys en el año anterior.

Sin embargo, para el uso del software, nos encontramos con dificultades en cuanto al diseño de proyectos porque los materiales encontrados no muestran el espíritu constructivista, así como la orientación didáctica. Según F. Fraga y A. Gewerc (2004, p. 7), si bien hay tutoriales desarrollados por Squeakland o los traducidos por Small-Land; el problema de estos tutoriales, es que carecen de referentes curriculares y didácticos. Los tutoriales se muestran sin los elementos básicos de la programación educativa.

---

[14] Learning and Programming with Etoys http://etoysillinois.org/, repositorio de proyectos.

A pesar de las dificultades, se continuó apostando por este software para el trabajo, porque sus bondades para el aprendizaje de los niños, indican la necesidad de continuar construyendo conocimiento, enriqueciéndolo con experiencias que ayuden y estimulen a otros a continuar con esta línea de trabajo.

4.2.3.1 Diseño de proyectos

El proceso de diseño del proyecto que finalmente se aplicó, pasó por diferentes aproximaciones y etapas hasta que nos acercamos a una propuesta que estuviese acorde con los principios teóricos que se sustentan desde la investigación.

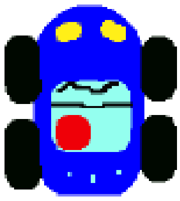
El análisis de estas etapas permite observar también el proceso de aproximación que puede llevar a un docente a una propuesta como ésta. Porque, a pesar de conocer en profundidad la teoría de base en la que se sustenta esta investigación, la evaluación de las diferentes aproximaciones mostró con claridad que al inicio se tiende a repetir o reproducir aquello que es lo más habitual o conocido. Se hace necesario un trabajo de reflexión profunda de los objetivos del proyecto y de confrontación con la teoría de manera constante, para identificar cuáles serían las actividades que "realmente" nos permitan romper la perspectiva más tradicional del aprendizaje de matemáticas.

Es así como las primeras etapas se basaron y tomaron como referencia los proyectos ya existentes, tomando como modelo los trabajos de Harel (1991) y Kafai (1995) quienes realizaron trabajos similares en el MIT con el lenguaje de programación Logo y el Libro de Ideas Poderosas de Allen-Conn & Rose (Proyecto 1, Introducción y elaboración de un coche 'poner en movimiento y hacer que pinte figuras geométricas; Proyecto 2, Pintar figuras geométricas y sus divisiones).

Pero, la dificultad residía en diseñar un proyecto para la construcción del concepto de fracción. Consideramos importante ubicar estos intentos de diseñar los proyectos iniciales, dentro de la metodología, porque nos permite visualizar el proceso en la construcción, hasta llegar al definitivo como puede verse en la siguiente página.

PROYECTO 1

Pintando un coche y puesta en movimiento para generar figuras geométricas.



Descripción
Este proyecto hace una introducción en los fundamentos básicos de Squeak Etoys y que les permitirá familiarizarse con las herramientas. Los bocetos se crean en el "Mundo" de Etoys. A la unidad "guardada" o "publicada" se le llama *Proyecto*. Los bocetos dibujados, cuando se guardan, se convierte en *objetos*. Se espera que los estudiantes pinten el primer un boceto (coche) utilizando las herramientas de pintura de Etoys. Ésta es la primera actividad que le permitirá explorar un entorno informático, contribuyendo en el manejo del teclado y el mouse (ratón). Las potencialidades a desarrollar es la creatividad; asimismo, al manipular el ratón, al realizar una pintura de un boceto en el mundo de Etoys, impulsa el desarrollo de la motora fina (lúdica).

Prerrequisitos	Conceptos relacionados con las matemáticas
Deseos de aprender, porque es el inicio de hacer proyectos.	Orientación referencial de giro: izquierda y derecha (negativo y positivo respectivamente). Los conceptos de coordenadas "x" e "y", para generar el concepto de par ordenado (x; y). Concepto de números enteros (positivos y negativos). La dirección como ángulo y el número de grados del ángulo central de un círculo. El giro de una vuelta completa equivale a 360º.

Objetivos

Los objetivos propuestos por el alumno y sus resultados.

Pintar un coche

Revelar un visor de objeto.

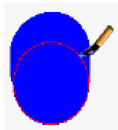
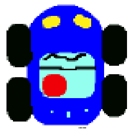
Guardar un proyecto.

Poner en movimiento y establecer la dirección de *avance* y *giro* del coche.

Pintar sobre el mundo objetos matemáticos.

Iniciemos el proyecto

Hacer clic en ícono  para iniciar Etoys. Luego hacer clic en  y desplegar el pintor.

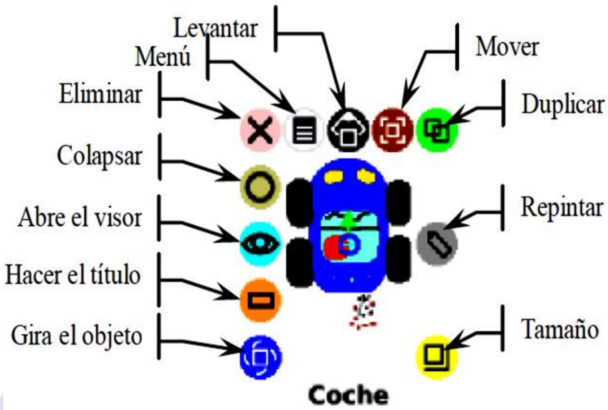
Selecciona el pincel , luego el color que te guste y usa el pincel más gordo para pintar el cuerpo del coche.	
Selecciona el pincel mediano y dibuja las ruedas con el color negro.	
Selecciona el color blanco y dibuja un pequeño parabrisas; luego dibuja las luces del coche. Usar un color diferente al que has usado para pitar el coche.	
Cuando estás de acuerdo con el dibujo, haz clic en el botón ***salva*** (*guardar*). Esto transformará el dibujo en objeto y ocultará las herramientas del dibujo. El botón ***atrás*** borra la última acción realizada al dibujar; ***limpia*** hace que se borre toda lo pintado en ese momento y ***quita*** elimina el dibujo y desaparece la herramienta de dibujo.	
Coloque el cursor sobre el coche y hacer clic derecho en el ratón y aparece el halo, que son sus utilidades. La flecha verde situada en el centro del objeto indica la dirección en la cual avanzará. Para cambiar de dirección, haz un clic en la *flecha+shift* y arrástrala en la dirección que desees que se mueve el coche. Para darle un nombre a tu coche, haz clic en la palabra ***boceto***, y reescribir un nuevo nombre. Finalmente hacer clic en  y aparece la ventana para guardar, y el proyecto ha sido completado.	

Importante: El proyecto ha sido guardado en la carpeta: *Bibliotecas* ►*Mis documentos* ► *Etoys*. Y si necesita recuperar el proyecto guardado, hacer clic en , luego selecciona el proyecto deseado y abrir.

Uso de los guiones

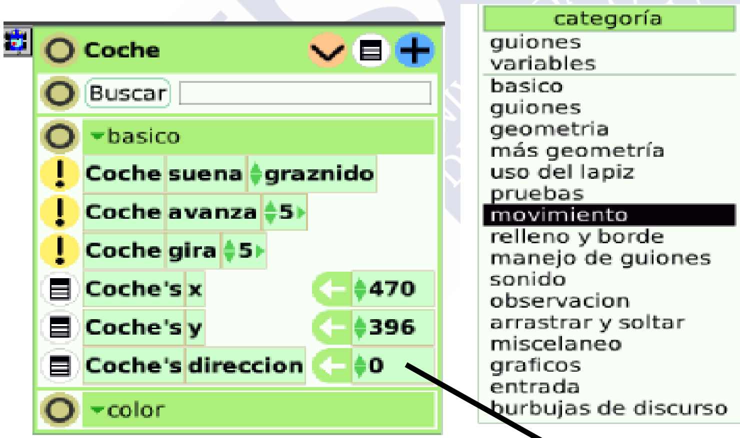
Una vez que tienes el coche sobre el *Mundo*, hacer clic derecho del ratón sobre el coche para mostrar los manipuladores, tal como se muestra en la figura de abajo.

Hacer clic en el manipulador *cián* "ojo" para mostrar el visor del objeto.



El **visor**, que se tiene abajo muestra la categoría "básica".

Para ver las demás categorías hacer clic en  *flecha abajo* ubicado al lado izquierda de la categoría básico.



Hacer clic en el manipulador azul  del coche y mover de izquierda a derecha y viceversa. Observar cómo cambia el **valor** en los mosaicos de "*coche's dirección*" del visor (ver figura derecha).

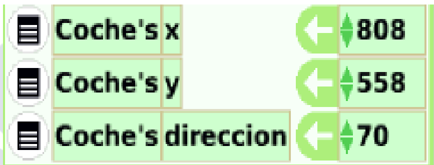
Hacer clic sobre el coche y mover por el mundo. Fíjate en los cambios producidos en los mosaicos de valores "*x*" e "*y*".

¡***Debes ser un observador***! Fíjate en los valores del panel de la categoría **básico**. Se observa dos tipos de mosaicos; algunos precedidos por un signo de exclamación  de color amarillo y los otros no. Los que se encuentran detrás del signo de exclamación se denominan ***acciones***.

Mosaicos de acción

Los mosaicos que no están precedidos por el signo de exclamación son mosaicos de "*valor*".

Mosaicos de valor



A cada uno de ellos le siguen una flecha blanca con borde verde que establece un valor numérico para un atributo en particular del objeto en el momento dado. Si mueves el coche de un lugar a otro, puedes observar que los números de los mosaicos cambian.

Los guiones se crean agrupando mosaicos. Para obtener un "editor de mosaicos" arrastra el mosaico "*guion vacío"* desde la categoría de guiones al Mundo.

Editor de guiones

Importante: Aquí se inicia la programación.

Para crear un guion, añade el mosaico "*avanza* 5" al editor de guiones arrastrándolos y soltando sobre él. Aparecerá un rectángulo verde brillante indicando que se puede agregar el mosaico al editor.

Permitirá que su coche avance 5 pixeles. Además podemos cambiar los números sea negativo o positivo.

Cuando cualquier ***mosaico de acción*** (mosaicos precedidos por el signo de exclamación) es arrastrado al Mundo y soltado crea su propio editor de guiones. **Los *mosaicos de valores*** se pueden añadir a un editor de guiones o a una cadena de *acción* en un guion; estos mosaicos siendo arrastrados y soltados en el Mundo NO crean su propio editor.

Los mosaicos que no se necesitan pueden ser eliminados de dos maneras:

a) Arrastrándolos hasta la basura, o

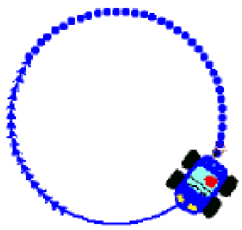
b) Haciendo clic derecho sobre el mosaico y aparece el manipulador y hacer clic en .

Tacho de basura

Los guiones se pueden ejecutar haciendo clic en el reloj del editor de guiones. También se puede variar la velocidad, manteniendo pulsado sobre el reloj hasta que aparezca un menú de *latidos*, luego modificar los latidos por segundos (pruebe modificando cada una).

Ahora observas que el coche se mueve. ¿Qué mosaico debes agregar al guion para que el coche avanzara y girara simultáneamente**?**

Cualquier objeto al moverse sobre el Mundo puede dejar rastro y ser visualizado. Seleccione la categoría *Uso de lápiz* en el Visor del coche. Cambia a "verdadero" en el *mosaico de valor* y active el reloj; y fíjate el rastro que deja el coche. Se puede modificar el *tamaño del lápiz* y *estilo de trazo* (línea, puntos y puntas de flecha).

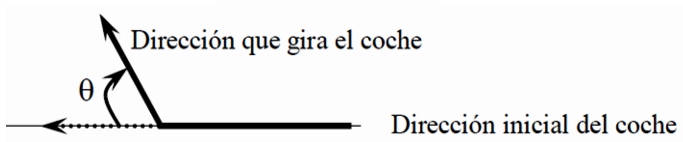


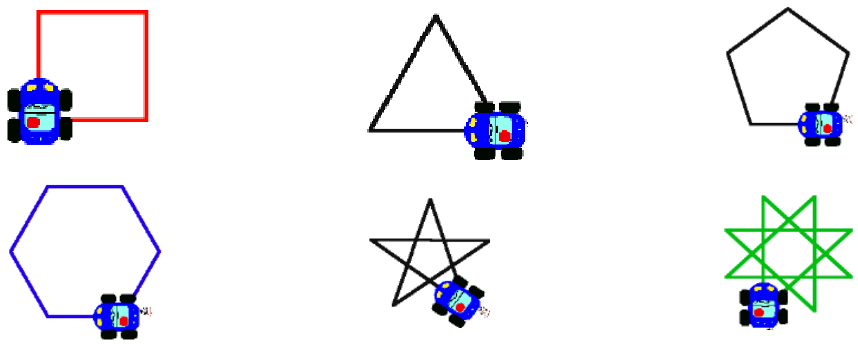
Una vez que el proyecto tenga múltiples guiones es recomendable hacer uso de un control (*parar/paso a paso/ avanza*) **stop, step y go**, que se obtiene de la pestaña de provisiones y colocarlos en el Mundo. Haciendo clic en cada uno de ellos puedes explorar.

Desafío

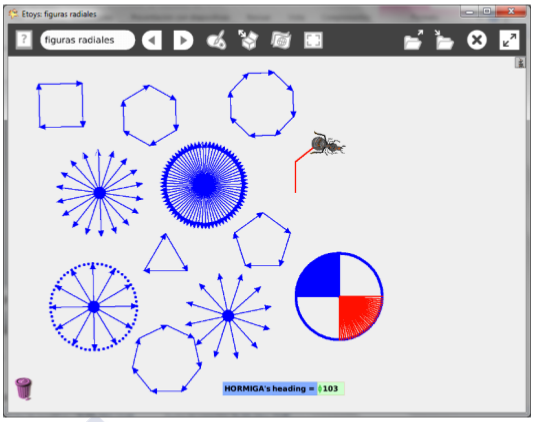
Ponemos al alcance de tu creatividad descubrir cómo crear las formas geométricas y otras más, creando guiones simples para el coche.

¡Una pista!





Proyecto 2

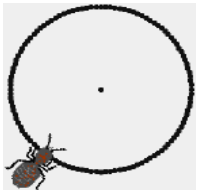


Aprendiendo a pintar figuras geométricas y hacer divisiones

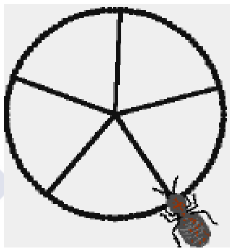
Descripción	
El proyecto está relacionado con la división de figuras geométricas en el Mundo de Etoys, realizado por un objeto (coche, animales y otros). De acuerdo a su imaginación los estudiantes pueden elaborar proyectos y construir diversas figuras geométricas y realizar divisiones.	
Prerrequisitos	**Conceptos relacionados con las matemáticas**
Dibujar. Nombrar objetos. Establecer la dirección de avance y giro de un objeto. Revelar un visor de objeto. Crear guiones. Crear controles	El concepto de números positivos y números negativos. Concepto de dirección (rumbo). La suma de ángulos externos es de 360º. La suma de ángulos internos de un polígono es $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 180^\circ (n-2)$; donde n es el número de lados del polígono. Ángulos externos de un polígono. Ubicación de espacio dimensional.

Para iniciar el proyecto debe abrir el Mundo de Etoys y sobre él dibujar un objeto (cualquier figura que desea). Para la presentación esta vez se dibujará un insecto.

Una vez dibujado el insecto, abrir los manipuladores y hacer clic en el ojo para abrir el visor del insecto. Luego de la categoría básico sacar el mosaico avanza y colocar sobre el Mundo, luego añadirlos mosaicos gira y avanza.

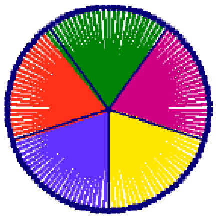


Para construir una circunferencia con un punto en el centro, modificar los valores de los mosaicos ***avanza***, el primero a 100 (avanza 100 pixeles) y el segundo a –100 (negativo) para hacer regresar lo que ha avanzado. También el valor numérico del mosaico ***gira*** a 3. Además modificar en la categoría de ***uso de lápiz*** el *tamaño de lápiz* a 4, en *insecto´s trazar* cambiar a **verdadero** y en *insecto´s estilo de trazo* a **puntos**.



Ahora se debe realizar las divisiones a la circunferencia. Tener en cuenta que una vuelta es 360º y se desea repartir en *n* lados; donde *n* es 2, 3, 4, … Entonces se debe modificar en el mosaico ***insecto gira,*** cambiar el número 3 por el número 360, y partir en 5, como muestra 

; luego en el visor de categoría ***uso de lápiz*** en el mosaico *insecto´s estilo de trazo* cambiar a **línea.** Manipulando el reloj se obtiene la figura.

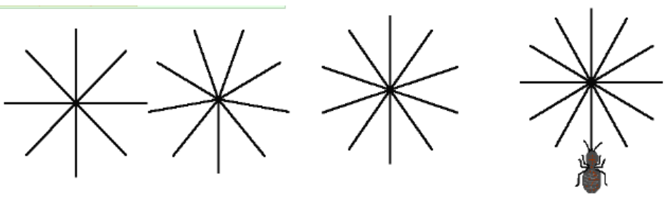


Ahora debemos pintar de colores diferentes cada partición, para realizar hay que llevar control de la posición del insecto en las divisiones con el 

. Detener en cada marca de división y en el visor, en la categoría uso de lápiz cambiar el color en *insecto´s color de lápiz*.

Desafío

Construir círculos con 7, 8, 9,12 y 13 divisiones debidamente pintadas.



Construir polígonos de 5, 6, 8, 9 y 12 lados y las divisiones respectivas.

4.2.3.2 Diseño de proyectos orientados al desarrollo del concepto de fracción

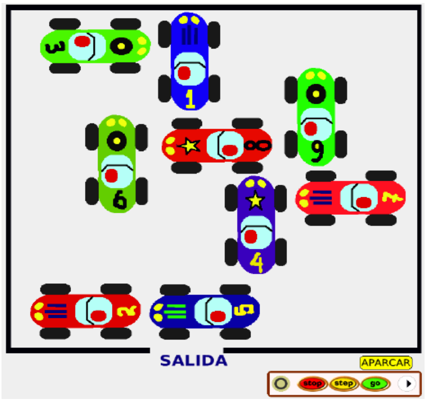
Los proyectos fueron evaluados por el profesor “A” del 4to curso y la directora de la tesis, Dra. Adriana Gewerc, y, si bien se consideraron interesantes, aún no era posible visualizar que el alumnado tuviese que resolver un problema que sirva como desafío. La intención era que en ese proceso se ponga en juego el concepto de fracción.

En ese intento de diseñar nuevos proyectos se elaboraron varias propuestas, entre ellas se encuentra el estacionamiento de coches en un aparcadero; la visita a un amigo en Santiago de Compostela (recorrido en un mapa); competencia de coches y un cuento de las fracciones para elaborar un libro con Squeak Etoys; los cuales se transformaron en aproximaciones al proyecto definitivo. En un principio faltó integrar desafíos, y la contextualización con mayor profundidad del concepto de fracción, del mismo modo se requería que el proyecto permita a los niños/as realizar con mayor amplitud, diversos desafíos en la construcción del concepto de fracción. Presentamos uno de los proyectos lo cual permite comprender el sentido de lo que estamos explicitando, ver en la siguiente página.

PROYECTO

APARCAMIENTO

DE COCHES



Justificación del proyecto

El proyecto está diseñado para que los estudiantes pongan en juego su razonamiento y realizar los movimientos necesarios para sacar u ordenar los coches dentro de un aparcamiento. En ella está inmerso el concepto de fracciones por la proporción de coche que serán desplazados de la totalidad. Se considera importante relacionar esta actividad con el contenido de la Unidad, porque el concepto de fracciones se encuentra en la actividad de la vida cotidiana. Los estudiantes para poner en movimiento los coches harán uso del lenguaje de programación Squeak Etoys.

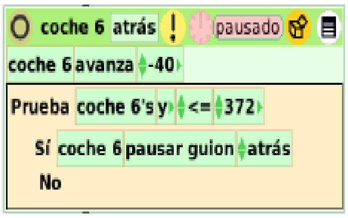
Descripción

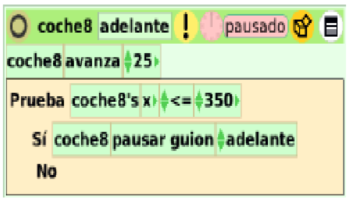
El diseño del proyecto se centra en el estacionamiento de coches en un aparcamiento, donde los estudiantes tienen el reto de solucionar problemas del entorno real. Los estudiantes podrán realizar retiro de coches del aparcamiento y optimizar el número de movimientos, y agrupamiento de coches por colores utilizando solo marcha adelante y marcha hacia atrás. Para la primera actividad cada coche deberá moverse una sola vez; para la segunda actividad un coche podrá moverse a lo más dos veces.

Prerrequisitos	**Conceptos relacionados con las matemáticas**
Dibujar un objeto	Espacios geométricos.
Nombrar objetos.	Ejes cartesianos (pares ordenados)
Revelar un visor de objeto.	Fracción.
Crear guiones.	Traslación.
Crear libro.	Desigualdad.

Para iniciar el proyecto debe abrir el Mundo de Etoys y sobre él debe dibujar un coche y luego duplicar hasta alcanzar coches de tres colores y modelos diferentes.

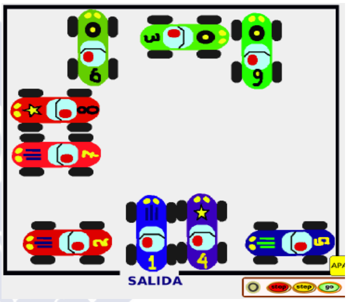
Ubicar los nueve coches tal como muestra la figura. El reto es ayudar al director del colegio sacar el coche número 1 haciendo el mínimo de movimiento de los coches, para la operación solo se debe utilizar marcha hacia adelante o marcha hacia atrás. La figura de la derecha muestra un ejemplo de los guiones a diseñarse (coche N°6 y N° 8), luego se moverá el coche N° 8, el coche N°1 y el coche N° 5; con guiones similares.

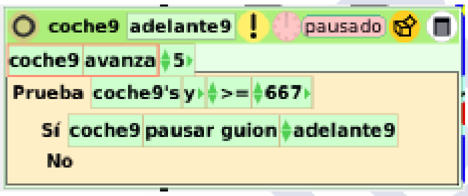




Es necesario llevar el control de velocidad de cada coche haciendo clic en el reloj y *avanza*. Luego sacar de la caja de provisiones *Todos los guiones* para sincronizar los movimientos.

Una segunda actividad es ordenar por colores formando grupos. Para tal efecto se debe realizar el menor número de movimientos de los coches. En este caso se utilizará guiones similares al proyecto anterior, ejemplo del coche N° 9.





Preguntas.

De la primera (1), ¿qué parte de los coches representa el coche del profesor?

Al realizar los movimientos, ¿qué parte de los coches se han trasladado para sacar el coche del director?

Si se observa por colores, ¿qué porción de cada color se ha movido?

De la segunda, cuando se ha agrupado por colores ¿qué porción de cada uno de los colores representa del total de coches?

DESAFÍO

De la primera parte, ¿es posible encontrar diferentes maneras de sacar los coches, describa el número por orden de movimiento de los coches.

En la segunda parte, ¿cuántas maneras diferentes de ordenar por colores hay?

4.2.3.3 La unidad didáctica y el diseño final del proyecto

Luego de diferentes intentos para conseguir un proyecto que se adapte a las posibilidades que ofrece la escuela, pero también a nuestro objetivo de investigación y que al mismo tiempo aproveche las posibilidades que ofrece Squeak Etoys; se diseña otro proyecto que integra el concepto de fracciones.

Gracias a una visita a La Casa de las Ciencias en La Coruña surge la idea de diseñar un proyecto sobre la estructura de su emblemático edificio.

La Casa de las Ciencias es el primer museo interactivo y científico ubicado en el parque de Santa Margarita de la ciudad de la Coruña que es considerado el primer museo público de España. El museo cuenta con un planetario, y tres plantas de exposiciones: experimentos físicos, exposición temporal y actualidad científica; además, en la parte central se ubica una escalera con forma de espiral, en cuyo centro oscila un péndulo de Foucault. Por su particularidad (posee formas de figuras geométricas muy especiales) ha inspirado finalmente en el diseño de la unidad didáctica que se desarrolló para la investigación. La propuesta es como sigue:

UNIDAD DE APRENDIZAJE DE FRACCIONES

AREA: Matemáticas	**UNIDAD: Fracciones y operaciones de adición y sustracción**	
Temporalización:	De 14 – 11 – 2011 Hasta: 25 – 11 – 2011	N° de sesiones: 08
PROFESOR: Cerapio Quintanilla C. / USC.		
Introducción		
El propósito de esta unidad didáctica es desarrollar el tema fracciones, uno de los contenidos más complejos de la matemática que muchos estudiantes tienen dificultad en comprender. La enseñanza de las fracciones inicia desde 4^{to} grado de primaria, con los siguientes temas: fracción y su representación, comparación de fracciones, la fracción y la unidad y la fracción de una cantidad. Luego en 5^{to} grado se amplía hasta las operaciones de adición y resta de fracciones. Se desarrollará una metodología basada en el de uso del lenguaje de programación Squeak Etoys, herramienta que los niños y niñas usarán en el proceso del		

aprendizaje; el papel del profesor será guiar el proceso de aprendizaje desde el punto de vista de la teoría del Construccionismo, apoyando a que los niños construyan su conocimiento.

La evaluación se realizará en tres momentos, una de inicio, una de proceso y una de salida.

COMPETENCIAS BÁSICAS MATEMÁTICAS DE LA UNIDAD

1. Relacionar diferentes conceptos de matemática en la construcción del concepto de fracción.
2. Manejar símbolos para relacionar la división de dos números con el concepto fracción
3. Realiza operaciones básicas y utilizar espontáneamente en los ámbitos personal y social, los elementos y razonamientos matemáticos para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y el mundo laboral y la toma de decisiones.
4. Integrar diferentes operaciones, tales como: comparar, establecer relaciones, transformar, describir, interpretar, analizar y ensayar procesos descubriendo reglas.

OBJETIVOS DE LA UNIDAD

Objetivos	Criterios de evaluación
1. Identificar los términos de una fracción en una situación real.	1. Identifica los elementos de una fracción en una situación propuesta.
2. Representar la fracción de un objeto mediante una gráfica.	2. Elabora una gráfica que representa una fracción determinada.
3. Escribir simbólicamente las expresiones de fracciones en diferentes situaciones de la vida cotidiana	3. De las situaciones cotidianas presentadas, extrae y escribe simbólicamente las expresiones que representan una fracción.
4. Comparar fracciones con distintos denominadores y fracciones equivalentes.	4. Compara la equivalencia entre dos fracciones.
5. Resolver problemas cotidianos con fracciones	5. Resuelve problemas propuestos sobre fracciones.

Contenidos		
Conceptos	Procedimientos	Actitudes
1. Las fracciones. Lectura y escritura. 2. Comparar fracciones de denominadores iguales. 3. Fracciones equivalentes 4. Fracciones con denominadores diferentes. 5. Operaciones con fracciones: sumar y restar fracciones con denominadores iguales. 6. Fracciones con división exacta. 7. Fracciones y fracciones mixtas.	1. Lectura y escritura simbólica de fracciones. 2. Comparar fracciones equivalentes. 3. Comparar fracciones con denominadores diferentes. 4. Realiza la operación de adición y sustracciones de fracciones. 5. Identificación de fracciones mixtas. 6. Resolución de problemas	1. Reconoce la fracción como expresión de situaciones reales. 2. Valora la presentación de simulación donde existe el concepto de fracción. 3. Valora, respeta y acepta las críticas y opiniones de sus compañeros.
Temas transversales		
Uso de las tecnologías: manejo y uso adecuado de las tecnologías (ordenador y lenguaje de programación). **Medio ambiente**: fomentar la limpieza y reciclaje de los materiales deshechos, y clasificación según el tipo de material.		

Actividades propuestas	**Competencias básicas**			
	1	2	3	4
1. Proyecto de diseño del plano de las Casa de la Ciencias de La Coruña.				
2. Proyecto de diseño de actividades de la recolección de residuos en la Casa de las Ciencias.				

<table>
<tr><td colspan="3">Actividad:
Proyecto de diseño con Squeak Etoys: Conservemos el medio ambiente.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Metodología</th><th>Recursos</th></tr>
<tr><td colspan="2">Estará centrado en el trabajo en equipo de dos estudiantes por ordenador, cada equipo desarrollará el conocimiento mediante el diseño de un proyecto haciendo uso de la tecnología (ordenador) y el lenguaje de programación Squeak Etoys.

Los estudiantes podrán intercambiar información durante y después de la clase. Antes de iniciar las clases cada estudiante elaborará sus diseños. Los estudiantes podrán desarrollar los proyectos dentro y fuera de la clase.

El profesor tiene el papel de apoyar en la construcción del conocimiento de cada estudiante en el proceso de su aprendizaje.</td><td>Se contará con los laboratorios de informática del colegio.

Ordenadores.

El uso del lenguaje de programación Squeak – Etoys.

Pizarra electrónica.

Video filmadora.</td></tr>
<tr><th>Procedimiento de evaluación</th><th colspan="2">Instrumentos de evaluación</th></tr>
<tr><td>▪ Observación sistemática de las actividades, participación, cooperación y actitudes de los alumnos.

▪ Revisión de trabajos, cuaderno de notas y carpetas.

▪ Diálogo y entrevista para evaluar los niveles de constructos mentales alcanzados durante el desarrollo de la unidad.</td><td colspan="2">▪ Indagación previa de conocimientos.

▪ Registro de actividades de clase.

▪ Registro de las entrevistas mantenidas.

▪ Cuestionario final de la Unidad.</td></tr>
</table>

PROYECTO DE DISEÑO DE FRACCIONES

La Casa de las Ciencias

La Coruña.

Justificación del proyecto

El proyecto trata de la reconstrucción de la Casa de las Ciencias que se encuentra ubicada en la ciudad de La Coruña, España. Su presentación geométrica es importante para el estudio del concepto fracción. Los niños y las niñas, utilizando Squeak Etoys realizarán la distribución de la Planta Baja y la Planta 1.

Además, en el proyecto se integran temas de medio ambiente, por tanto se considera necesario introducir el uso de contenedores de residuos que involucre el concepto de fracción.

Descripción

Este proyecto se basa en la distribución en partes iguales de una superficie geométrica de forma octogonal. Los estudiantes relacionan los conceptos matemáticos con las actividades de la arquitectura buscando descubrir que la matemática está involucrada en todas las actividades cotidianas de la vida real.

De acuerdo a la información proporcionada, los estudiantes diseñarán el plano y realizarán las distribuciones de los espacios asignados para cada actividad.

También el concepto de fracción estará presente en las actividades, donde se presenta la recolección de residuos usando dos contenedores (recipientes marcados) dentro de La Casa de las Ciencias. Los estudiantes dividirán los contenedores en cinco partes iguales, luego pintarán para representar la cantidad recolectada y realizar operaciones.

Prerrequisitos	Conceptos relacionados con las matemáticas
▪ Dibujar objetos en Squeak. ▪ Nombrar objetos.	▪ El concepto de números positivos y números negativos. ▪ Tipos de polígonos (triángulo, cuadrado,

▪ Establecer la dirección de avance y giro de un objeto. ▪ Revelar un visor de objeto. ▪ Crear guiones. ▪ Crear controles	octágono y trapecio). ▪ Fracción. ▪ Suma de ángulos de un triángulo es igual a 180°. ▪ El ángulo generado en una vuelta es igual a 360°. ▪ Círculo, diámetro y su radio, triángulo isósceles. ▪ Magnitudes: Altura y longitud ▪ Medida de ángulos de 90° y 180°
Objetivos: ▪ Diseñar un esquema para realizar la construcción. ▪ Diseñar un cuadrado ▪ Diseñar triángulos isósceles haciendo uso de Squeak. ▪ Haciendo uso de Squeak realizar las divisiones de un octágono. ▪ Comparar fracciones (desigualdad de fracciones). ▪ Realizar operaciones de adición y sustracción de fracciones.	

Se iniciará la actividad mostrando fotografías de La Casa de las Ciencias de La Coruña, sus características, historia. ¿Que hay dentro?, ¿qué día se puede visitar? Se les planteará a los niños quien fue el arquitecto y las ideas que tuvo para generar este edificio. Contestar la pregunta: ¿qué base utilizó para su construcción? Buscarán información en Internet, fotografías, etc., que permitan elaborar hipótesis. Responderán a la pregunta: Si fuésemos arquitectos, ¿cómo haríamos para construir La Casa de la Ciencias de la misma manera que lo hizo el arquitecto Peña? Realizarán un primer bosquejo reproduciendo el edificio en la libreta, basándose en las imágenes y en los relatos.

Luego, se trabajará intentando reproducir lo que hicieron en el papel, utilizando el lenguaje Etoys. Antes debe construir un cuadrado, para facilitar su diseño. Sobre la base del primer bosquejo, ya diseñado en Squeak Etoys se mostrará el plano del interior del museo. Los niños tendrán que completar el trabajo del día anterior utilizando el plano.

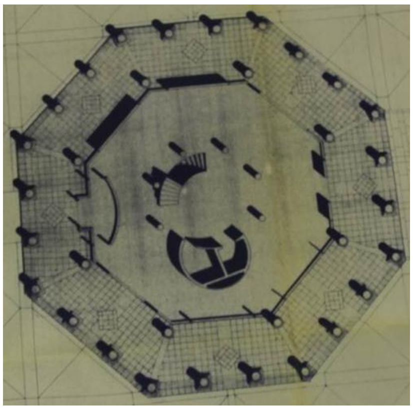


Figura 4.10 Fotografía de plano original. Con el permiso de la Casa de las Ciencias de La Coruña.

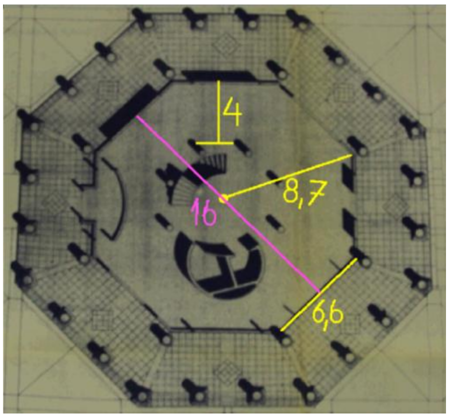


Figura 4.11 Plano original con me aproximadas asignadas para experimento con los niños.

La Figura 4.11 muestra los datos de las medidas que ayudará a los estudiantes en el proceso de su construcción. En la parte central se encuentra un espacio circular para el péndulo de Foucault cuyo radio es de 1,5 metros.

La escalera está ubicada en forma circular alrededor de la cuerda del péndulo.

Las medidas son iguales para la planta baja y la primera planta. En cuanto a la segunda y tercera planta son de exposiciones temporales y actualidad científica.

Según fuentes documentales, la construcción del pórtico se inicia por los años 1950; luego tuvo una serie de modificaciones y muy probable que dicho plano sea una de ellas. Luego al culminar su construcción en 1985[15] inicia su atención al público.

[15] Visitar la página Web: http://www.flickr.com/photos/casaciencias/174398280/

Las distribuciones deberán ser iguales, y los datos permitirán el diseño. La distribución de la planta baja (planta 0) es: Una parte es para la entrada al museo.

a) Una parte es para la venta de billetes y control.
b) Una parte es para la incubadora.
c) Una parte para la TryScience.
d) Una parte para el ascensor y los aseos.
e) El resto es para pasadizos.

Con las mismas dimensiones se ha diseñado la PLANTA 1 denominado "Experiencias". En este espacio se encontrará con instrumentos (físicos) manipulables, donde el estudiante puede realizar sus actividades adecuadas para su edad.

La distribución de la Planta 1 es de la siguiente manera:

a) Una parte es para caída libre, sonido y ondas.
b) Una parte es para Plato giratorio de centrifuga y caídas magnéticas.
c) Una parte es para soplo de aire de Bernoulli y distribución de Gauss.
d) Una parte es para paisajes eólicos.
e) Una parte es para la representación de tormenta.
f) Una parte es para luz - óptica
g) Una parte para magnetismo.
h) Una parte es para el ascensor y los aseos.

ACTIVIDAD

Con la información dada se debe diseñar las distribuciones que hay dentro de la Casa de las Ciencias (dividir los espacios), tanto de la Planta 0 y la Planta 1. Con referencia a la Planta 2 son de exposiciones temporales que no tienen distribuciones, al igual que la Planta 3 que es de actualidad científica.

Preguntas relacionado al proyecto que deben responder

a) ¿Qué parte de la distribución corresponde a la incubadora y el ascensor?

b) ¿Qué parte de la distribución corresponde los pasadizos y la entrada al museo?

c) En el caso de clausurar la incubadora y TryScience, ¿qué parte del plano queda en uso?

d) Dado la distribución,

El pasadizo representa 3/8.

El ascensor representa 1/8.

¿Cuál de los espacios es mayor, los pasadizos o el de aseos y ascensor?

e) Si sumas todas las divisiones de la Planta 0, ¿qué resultado se obtiene?, explique.

f) En un día por coincidencia se estropearon la incubadora en la Planta 0 y en la Planta 1 la sección de Luz-Óptica y paisaje eólico, los técnicos retiraron los equipos dejando sin servicio en las áreas respectivas. Considerando las plantas niveles diferentes:

¿En cuál de los pisos se tuvo mayor área sin atención?

¿Las divisiones hechas en ambas plantas son equivalentes?

Actividades

1. En la fotografía se aprecia el pórtico de la Casa de las Ciencias, y por cada lado hay cuatro columnas.

   a) ¿Cuántas columnas hay en total?, debe ayudarse de Squeak Etoys

   b) Se observa que hay cuatro columnas en un lado ¿qué fracción representa las cuatro columnas?

2. En cada uno de las plantas 0, 1, 2, y 3 están distribuidas dos contenedores de basura por cada planta (una para residuos de papel y otra para plásticos). Los contenedores llevan marcas de división hasta 5. Cada día el personal de servicio recoge, se tiene datos de un día y es el siguiente:

Contenedores / Plantas	Marcas alcanzados en cada uno de los contenedores	
	Papel (azul)	Plástico (amarillo)
Planta 0	4	3
Planta 1	3	2
Planta 2	3	1
Planta 3	2	2

Haciendo uso de Squeak construir los contenedores marcados y colorear la marca encontrada por cada planta (Diseñar un rectángulo similar al cuadrado).

a) Sumar gráficamente los contenedores de papeles haciendo uso de Squeak, luego escribirlo en su cuaderno simbólicamente.

b) Sumar gráficamente los contenedores con plásticos ayudándose de Squeak, luego escribir en su cuaderno simbólicamente.

Desafío

Existe una escalera para subir de la Planta baja a la Planta 1, se tiene 28 peldaños para subir. La altura de cada peldaño mide 15 cm, y de base horizontal 35 cm (para pisar).

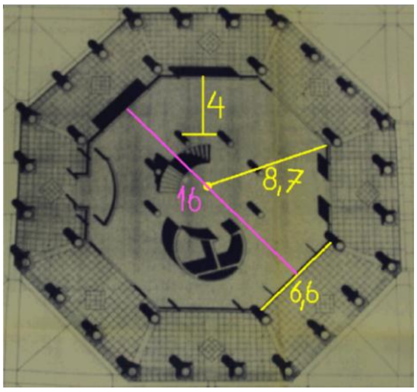
a) Diseñe un guión con Squeak para construir la escalera, y grafique utilizando Squeak.

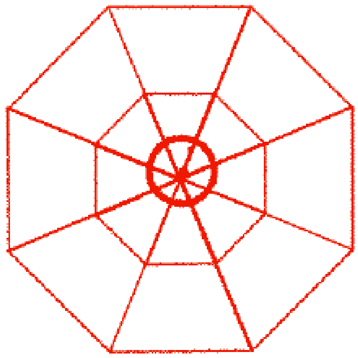
b) ¿Cuánto es la altura de la planta baja?, expresar en metros. (elabore las operaciones en su cuaderno)

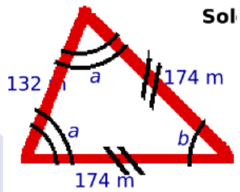
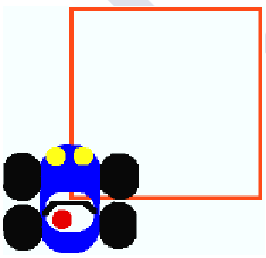
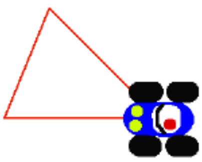
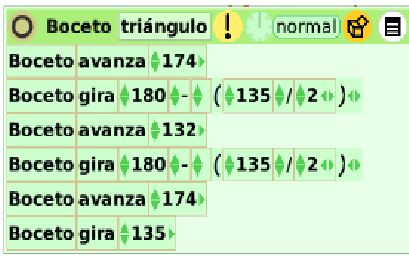
c) ¿Cuánto de altura tiene la Casa de las ciencias?, sabiendo que cada escalera de una planta a otra plata tiene 28 peldaños. No se considera el Planetario que tiene la forma de esfera y está ubicado en la parte superior.

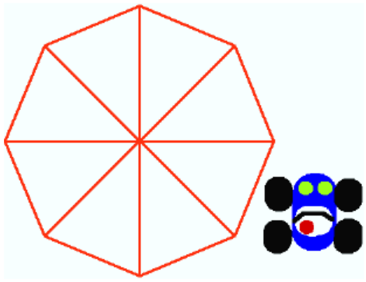
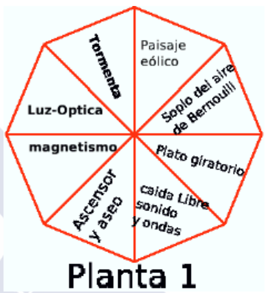
DESARROLLO: QUÉ DEBEN HACER LOS ALUMNOS

Hacer un bosquejo en la libreta de diario sobre la supuesta figura a obtener con la información del radio y el lado de la casa sin considerar el pórtico. Entonces el reto es diseñar la figura de la derecha.





Hacer las divisiones de una vuelta que es 360° en 8 partes, y cada ángulo tiene b = 45°. Los valores de a se pueden encontrar resolviendo que la suma de ángulos internos es 180°. Para obtener valores enteros se multiplicó por 20 a cada uno de los lados (ayuda a los niños).	
Antes de construir el triángulo fue necesario construir el construir un cuadrado, porque permite visualizar de modo sencillo los guiones. Un cuadrado de lados 200 (avanza 200). Luego colapsar haciendo clic en del guion para tener el mosaico como un bloque. 	
Construir un guion que permita generar dicho triángulo, luego colapsar haciendo clic en . 	

<table>
<tr>
<td>Se diseña otro guion que permita utilizar el guion del triángulo para generar el octágono, aquí se utiliza el guion del triángulo que se ha colapsado como un mosaico.
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Ahora colocamos las etiquetas a cada uno de las partes de cada planta, de modo que esté listo para poder cortar y colorear.
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Para tener mejor control sobre las figuras se debe cortar. De la caja de provisiones, hacer clic en Capturar pedazo y realizar el recorte de cada uno de los planos; luego colorear utilizando la paleta de colores.
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Solución a las preguntas relacionados al proyecto

a) ¿Qué parte de la distribución corresponde a la incubadora y el ascensor?

La incubadora es 1/8, y el ascensor es 1/8.

Ambas distribuciones:

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

b) ¿Qué parte de la distribución corresponde los pasadizos y la entrada al museo?

Los pasadizos es 3/8, y la zona de entrada es 1/8.

Ambas distribuciones suman así:

$$\frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

c) En el caso de clausurar (cerrar) la incubadora y TryScience, ¿qué parte del plano queda en uso?

La clausura la sala de presentaciones es: 2/8, y la totalidad representa 1.

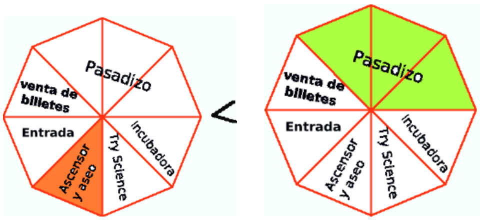
Entonces $1 - \frac{2}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

d) **Dado la distribución**:

- El pasadizo representa 3/8.
- El ascensor representa 1/8.

¿Cuál de los espacios es mayor, los pasadizos o el de aseos y ascensor?

En la gráfica se observa que $\frac{1}{8} < \frac{3}{8}$, cuando los denominadores son iguales.



$$\frac{1}{8} < \frac{3}{8}$$

e) Si sumas todas las divisiones, ¿qué resultado se obtiene?, explique.

Venta de billetes: 1/8, Entrada al museo: 1/8

Pasadizo: 3/8, Ascensor y aseos: 1/8

Incubadora: 1/8, TryScience 1/8.

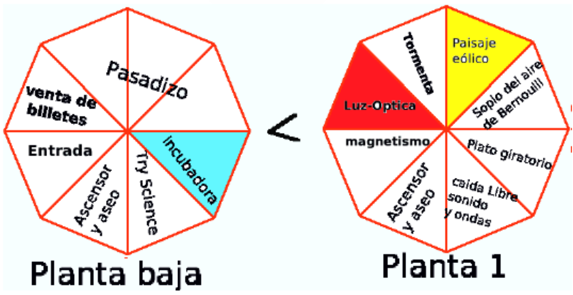
Suma total:

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

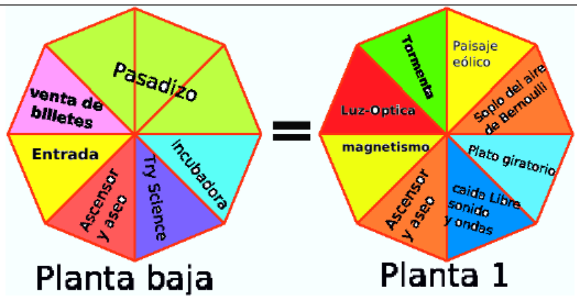
f) En un día por coincidencia se estropearon la incubadora en la Planta 0 y en la Planta 1 la sección de Luz-Óptica y paisaje eólico, los técnicos retiraron los equipos dejando sin servicio en las áreas respectivas.

¿En cuál de los pisos se tuvo mayor área sin atención?

Observando la gráfica, en la Planta 0 se tuvo menor área sin atención; y en la Planta 1 se tuvo mayor área sin atención.



¿Las divisiones en ambas plantas son equivalentes?



Las divisiones realizadas son iguales en ambas plantas, por lo que se considera que ambas plantas son equivalentes

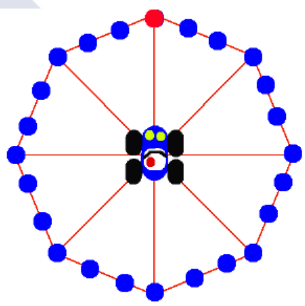
Desarrollo de las actividades

1. El pórtico de la Casa de las Ciencias tiene por cada lado cuatro columnas

a) ¿Cuántas columnas hay en total?, debe ayudarse de Squeak.

Contando los muros del pórtico se tiene 24.

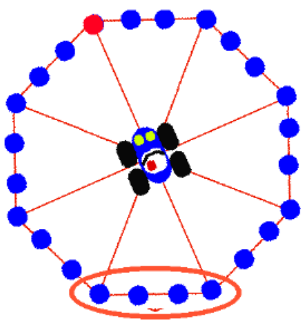
Generalmente las personas al ver un lado inmediatamente generalizan y pueden concluir que tiene 32 muros, porque multiplicaron 4 muros por lado por 8 lados que tiene el edificio. Pero aquí un muro se repite para cada lado, entonces se debe tener en cuenta estos detalles.



b) Se observa que hay cuatro columnas en un lado ¿qué fracción representa las cuatro columnas?

Como el pórtico tiene 24 muros en total y la cara que muestra tiene 4; entonces tiene:

$\frac{4}{24} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ y estas tres fracciones son equivalentes.



2. En cada uno de las plantas 0, 1, 2, y 3 están distribuidas dos contenedores de basura por cada planta (una para residuos de papel y otra para plásticos). Los contenedores llevan marcas de división hasta 5. Cada día el personal de servicio recoge, se tienen los datos de un día y es el siguiente:

Plantas \ Contenedores	Marcas alcanzados en cada uno de los contenedores	
	Papel (azul)	Plástico (amarillo)
Planta 0	4	3
Planta 1	3	2
Planta 2	3	1
Planta 3	2	2

Haciendo uso de Squeak construir los contenedores marcados y colorear la marca encontrada por cada planta. Debe diseñar un rectángulo, similar al diseño del cuadrado que elaboró inicialmente.

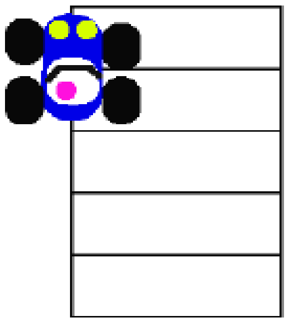
a) Sumar gráficamente los contenedores de papeles; luego escribirlo en su cuaderno simbólicamente.

Para hacer los contenedores de papales, primero tenemos que construir un rectángulo, cuyo guion debe ser completo, para luego usar como un bloque.

Nuevamente construimos un guion que contenga "coche avanza 5" y el guion que se ha convertido en mosaico "coche rectángulo". En "avanza 5" se tiene que modificar el mismo ancho del rectángulo para no aparecer superpuestas, debe ser "avanza 50"

Luego en la categoría "uso de lápiz colocando el mosaico "coche trazar" en verdadero, luego manipular en el signo de exclamación , hasta obtener los 5 niveles de cada contenedor.

Guión del rectángulo



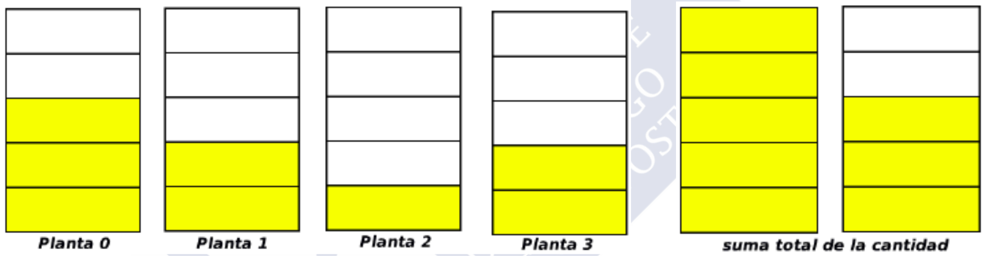
contenedor construido de 5 marcas

Los resultados al sumar la cantidad de residuos de papel en cada tacho se tiene:

$$\frac{4}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 2\frac{2}{5}$$

Luego se tiene 2 contenedores llenos y 2 partes de un tacho con contenidos de residuos de papel.

Los resultados al sumar la cantidad de residuos de papel en cada tacho se tiene:



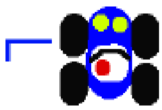
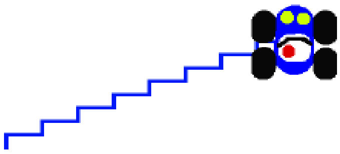
$$\frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = 1\frac{3}{5}$$

El resultado es un tacho lleno de residuos de plásticos y tres partes de un tacho de residuos.

<table>
<tr><th colspan="2">DESAFÍO</th></tr>
<tr><td>Existe una escalera para subir de la Planta baja a la Planta 1, se tiene 28 peldaños para subir. La altura de cada peldaño mide 15 cm y de base horizontal 35 cm (para pisar).

Diseñe un guión con Squeak para construir la escalera.

¿Cuánto es la altura de la planta baja?, expresar en metros.

Si se considera la misma cantidad de peldaños para las otras plantas. ¿Cuánto de altura tiene la Casa de las ciencias?, sin considerar el Planetario que tiene la forma de una esfera que se encuentra en la parte superior.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Para construir la escalera nos ayudamos con Squeak, entonces creamos un guión que nos permita subir el peldaños y hacer el lugar donde pisamos, luego colapsamos dicho guión para generar otro guión</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Luego el resultado del guión debe quedar así.</td><td></td></tr>
<tr><td>Luego haciendo clic en hasta alcanzar los 28 peldaños que tiene la escalera.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Para obtener la altura solo se tiene que multiplicar 15 cm por los 28 peldaños.

Entonces 15×28 = 420 cm. El resultado nos pide en metros. Sólo se tiene que dividir entre 100 cm = 1 m. Entonces el resultado es 4,20 m de altura.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Para obtener la altura de la Casa de las ciencias, solo se tiene que multiplicar 15 cm por los 28 peldaños por 4 plantas

La altura es 15×28×4 = 1680 cm = 16,80 m.</td></tr>
</table>

Este diseño fue el material el trabajo. Los niños rediseñaron el plano de La Casa de las Ciencias poniendo en práctica sus nociones previas y evidenciaran el proceso de construcción del concepto fracción utilizando como herramienta el lenguaje de programación Squeak Etoys.

4.2.3.4 Creando el ambiente de aprendizaje

El proyectos se ejecutó durante dos semanas (8 sesiones); los días lunes, martes, miércoles y viernes, cada sesión de una hora. Las sesiones se llevaron a cabo en el ambiente del laboratorio de informática para primaria con que cuenta el colegio; dicho laboratorio tiene la forma triangular y tiene 27 ordenadores con conexión a internet, de los cuales 26 son para uso de los estudiantes y uno para el profesor/a y una impresora. Al lado del ordenador del profesor de encuentra una pequeña pizarra analógica.

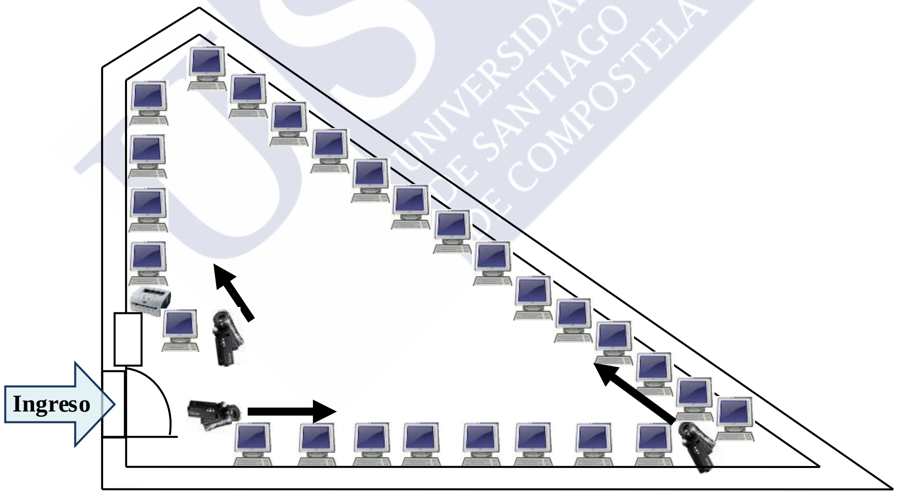


Figura 4.12 Laboratorio de informática de primaria

 Ordenador de mesa

 Impresora

 Cámara de video

Las sesiones se grabaron en video con el objeto de registrar el proceso que llevó a cabo el alumnado. Las cámaras fueron ubicadas en tres lugares tal como muestra la Figura 4.12; la cámara de la derecha cubre todo el lado derecho, la cámara de la izquierda cubre a los 4 estudiantes del lado izquierdo y la tercera cámara que se encuentra ubicada en la esquina cubre la parte frontal más larga.

Se creó una ambiente especial entre los alumnos para trabajar con Squeak Etoys, por un lado, ya existía cierta confianza porque conocían al investigador porque había observado sus clases en el curso anterior (en 4to grado). Y por otro lado, se visualizaba que el uso los ordenadores permitía potenciar los procesos de reflexión y abstracción (Craveri & Anido, 2008). Asimismo, siendo Etoys un ambiente de computadora ayudó a los estudiantes a aprender sobre sus ideas construyendo y jugando. Porque según Fernández (2006, p. 77), “Los Etoys ayudan a un usuario (usualmente un niño) a crear un grato y agradable modelo computacional de la idea y provee pistas sobre cómo la idea puede ser ampliada”.

4.2.4 Desarrollo de las experiencias

Durante dos semanas en ella, los niños y niñas se involucraron en realizar una simulación y realizar la programación para redistribuir las divisiones de la Casa de las Ciencias de la Coruña. El trabajo se realizó en parejas y los estudiantes tenían la libertad de hacer consultas con el compañero designado. Tomando como base el marco conceptual del construccionismo, el rol del profesor-investigador fue de guía y moderador del proceso, ofreciendo pistas, a los alumnos/a que tenían problemas y no encontraban rápida solución. En otros momentos de la experiencia, los mismos niños fueron protagonistas al explicar las decisiones que fueron tomando en las diversas situaciones.

Para seguir adecuadamente el guión del proyecto, se realizó una hoja de ruta con los momentos de la actividad para la puesta en escena.

Momento 1

1. PRESENTACIÓN

   Planteamiento del problema.

   Propuesta de hipótesis a las siguientes preguntas

   a) ¿Conocen la Casa de las Ciencias de la Coruña? ¿quiénes han ido?

   b) ¿Qué forma de figura geométrica tiene la base de La Casa de las Ciencias?

   c) ¿Es posible dividir la base del interior de la Casa de las Ciencias? Si cree que se puede dividir ¿en cuántas partes estará dividido?

   d) ¿será posible realizar la división haciendo uso de Squeak Etoys?

2. Se inicia mostrándole la fotografía de La Casa de las Ciencias.

   Inicio de exploraciones

   Explicar, qué deben hacer para conocer mejor el edificio haciendo uso de internet. Deben guardar en una carpeta las fotografías y la información.

   a) Su historia

   b) ¿Qué hay dentro?

   c) ¿Quién fue el que ideó su construcción?

   d) ¿Quién fue el Arquitecto que diseño?

   e) ¿Qué forma tiene la base de su construcción?

3. Abrir Squeak Etoys, luego de la caja de provisiones sacar LIBRO y colocar sobre él las fotografías. Y hacer un comentario. Guardar en la carpeta

   Conclusión relativa la primera hipótesis.

   Resumen de los elementos matemáticos aprendidos

   Resumen de los elementos de otras materias aprendidos

Momento 2

4. Hacer un bosquejo en el cuaderno el plano de La Casa de las Ciencias basándose en las imágenes y los relatos en internet; luego hacer un consolidado general.

   Prueba de la segunda hipótesis.

   Resumen de los elementos matemáticos aprendidos

   Resumen de los elementos de otras materias aprendidos

Momento 3

5. Luego, se trabajará en Etoys intentando reproducir lo que hicieron en el papel, abriendo un libro para también escribir el proceso de desarrollo. Para ayudar al estudiante se le proveerá del plano.

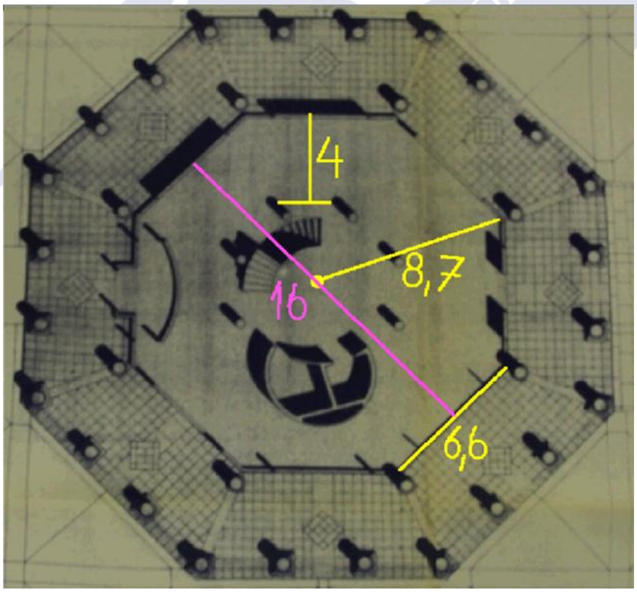


Figura 4.13 Plano de la Casa de las Ciencias de La Coruña, España

Momento 4

6. Sobre la base del primer bosquejo, ya diseñado en Squeak se mostrará el plano del interior del museo. Los niños tendrán que completar el trabajo del día anterior utilizando el plano.

7. Continuarán con el desarrollo con Squeak hasta completar construir las divisiones.

   Prueba de la tercera hipótesis.

   Resumen de los elementos matemáticos aprendidos

   Resumen de los elementos de otras materias aprendidos

Momento 5

8. Propuesta de la construcción de los contenedores de basura.

   Realizar bosquejo en el papel, haciendo uso de los supuestos guiones.

9. Ejecución con Squeak la construcción de los contenedores.

Momento 6

10. Desarrollo de operaciones haciendo uso de Squeak.

Momento 7

Resumen final del trabajo

Resumen de los elementos matemáticos aprendidos

Resumen de los elementos de otras materias aprendidos

Cabe aclarar que el momento 6 no se ha podido desarrollar fundamentalmente por las condiciones temporales. El trabajo llevó más tiempo de lo previsto debido a varios factores, por ejemplo, la manipulación de escritura lenta de los estudiantes al operar con el teclado, así como la lentitud de los ordenadores de que dispone el centro educativo.

El desarrollo de las experiencias con Squeak Etoys en el laboratorio de informática, fue el eje central del trabajo de investigación. En tal sentido, el proceso del análisis se centró en evaluar las experiencias vividas por los estudiantes durante la construcción del concepto de fracción.

a) Se evaluó la secuencia de los procesos de construcción del concepto de fracción como contenido. En este caso nos referimos a los elementos matemáticos básicos que componen la construcción del concepto de fracción (recta, ángulo, cuadrado, triángulo).

b) Se evaluó la secuencia de los procesos de programación con Squeak Etoys (uso de mosaicos y guiones). En esta parte se evaluaron los guiones de recta, cuadrado y triángulo, utilizando los mosaicos de “avanza” y “gira”; luego, la segunda etapa los guiones del octágono, utilizando los mosaicos del triángulo.

c) Se compararon los resultados de cada nivel de los procesos del diseño de los proyectos con la descomposición genética propuesta. Aquí se tomó en cuenta los niveles de los constructos mentales que los niños/as alcanzaron, tanto en la construcción del concepto de fracción, así como los niveles de programación de Squeak Etoys.

d) Se analizaron los archivos digitales para evaluar la construcción del concepto de fracción en función del uso de guiones utilizados durante la programación. Estos archivos son la clave para describir y explicar el proceso ocurrido durante el desarrollo de las experiencias; cada archivo es un enigma, que guarda mucha información, pero, nos centramos solamente en analizar el proceso del desarrollo de los guiones y uso de los mosaicos en la construcción de los conceptos.

e) Se analizaron los archivos digitales guardados, de cada una de las sesiones, y hacer cruce de información con las libretas (cuadernos) y los videos. El cruce de información es relacionado las anotaciones hechas en los cuadernos en contraste con los guiones y uso de mosaicos en la programación durante cada sesión.

f) Se identificaron los conceptos matemáticos aprendidos de acuerdo a unidad curricular, los conceptos interdisciplinarios y los conceptos matemáticos ocultos aprendidos.

Además, se hizo una descripción que luego permitió categorizar las experiencias en función de las teorías propuestas en el marco teórico, el de Jean Piaget considerando los niveles de equilibrio y desequilibrio; también la abstracción reflexiva de la teoría APOS y los niveles de constructos mentales alcanzados por los niños en el momento de la construcción del concepto de fracción. Finalmente, se realizó una evaluación de las filmaciones para valorar la influencia de la teoría de Vigotsky y Bruner en el trabajo en equipo de los niños, apreciar las expresiones de los momentos de alegría, fracasos y otras manifestaciones de los estudiantes.

4.2.5 La observación durante el desarrollo de los proyectos

Las observaciones conducen al investigador hacia una mejor comprensión del caso. El observar con un fin determinado requiere un esquema de trabajo para captar los aspectos y manifestaciones concretas de lo que deseamos estudiar (Pérez Serrano, 1994). En el trabajo de nuestra investigación, por su naturaleza, se propuso realizar las observaciones a los niños/as durante el proceso del diseño de proyectos en el laboratorio de informática. La finalidad de la observación fue obtener información del proceso de construcción del concepto de fracción y captar las expresiones, manifestaciones y actitudes mientras diseñan los proyectos con Etoys.

En este caso concreto, el investigador cubría dos roles, por un lado observador participante; y, por lo tanto estaba inmerso en el escenario elegido por un periodo de tiempo para obtener una perspectiva interna del escenario o la cultura interna (Mayan, 2001). Por otro lado cumplía las funciones de profesor que ayuda, guía, conduce hacia la construcción del aprendizaje y del conocimiento. En este caso, en el marco del construccionismo, el investigador es al mismo tiempo quien realiza dicha actividad de observar y conducir el proceso de aprendizaje de los niños/as dirigiendo, ayudando, moderando (la participación de los niños/as) y promoviendo el ambiente de trabajo durante la construcción del conocimiento.

Siendo necesario las observaciones que sean pertinentes para el estudio de caso (Stake, 2005), se ha diseñado un "Instrumento de observación del diseño de proyectos con Etoys" con un acercamiento al objeto de estudio y que el investigador utilizó durante el proceso de la investigación (ver Anexo C). El procedimiento fue registrar los acontecimientos en cuatro grandes rubros: dominio de Squeak Etoys, construcción del concepto de fracción, interrelación entre compañeros y socialización de la experiencia; cada uno enmarcado dentro de sus respectivas categorías.

Para Squeak Etoys las categorías fueron: formulación de hipótesis de trabajo, elaboración de proyectos, respeta el tiempo establecido, mejora en el uso de herramientas de Squeak Etoys y no logra formular el proyecto. Para la construcción del concepto de fracción las categorías de observación fueron: diseña figuras geométricas, diseña proyectos de fracciones usando las figuras geométricas, realiza construcciones de fracciones con Etoys, explica el proceso de construcción del concepto y contrasta el resultado con el hipótesis propuesto. Para la interrelación entre compañeros las categorías fueron: trabaja solo, trabaja con el grupo, tienen mayor participación y es demasiado inquieto. Finalmente, el instrumento para el momento de la socialización (resumen de la experiencia), cuyas categorías fueron: participa en la lectura de su diario, hace comentarios sobre la lectura, realiza conclusiones y respeta la idea de sus compañeros.

El proceso de registro ha sido complejo, fundamentalmente debido a la doble función de guiar a los niños/as y observar; por esa razón al final de cada sesión se tuvo que hacer un resumen (diario personal). Sin embargo, ha sido muy útil para el análisis de los datos, complementando con los otros instrumentos de observación utilizados. Los registros de las observaciones se han plasmado en las discusiones de los resultados (Capítulo IV) en combinación con las filmaciones, fotografías, los proyectos y las libretas de notas (cuadernos).

4.2.6 Análisis de datos

Es necesario encontrarles significación si queremos que los datos resulten útiles para la investigación (Gil Flores, 1994). La tarea del análisis requiere interpretar y extraer el significado de los datos recogidos.

La particularidad del análisis de información en este trabajo de investigación cualitativo en educación matemática, se refiere a que se enmarca dentro de teorías de aprendizaje consolidadas; considerando como eje central el proceso de construcción del conocimiento y el aprendizaje a través del uso de tecnologías. Nuestra investigación no solo describe, sino que profundiza en el estudio de las construcciones del conocimiento y su relación con los constructos mentales bajo las teorías propuestas.

Ha sido necesario, en primer lugar, organizar la gran cantidad de datos generados durante el proceso de investigación. Ese complejo proceso, implica un trabajo de reducción, organización e interpretación de los datos siguiendo el mecanismo de la perspectiva teórica de Asiala et al. (1996). Para el análisis de la información obtenida en nuestra investigación, recurrimos a las tres teorías que sustentan el construccionismo.

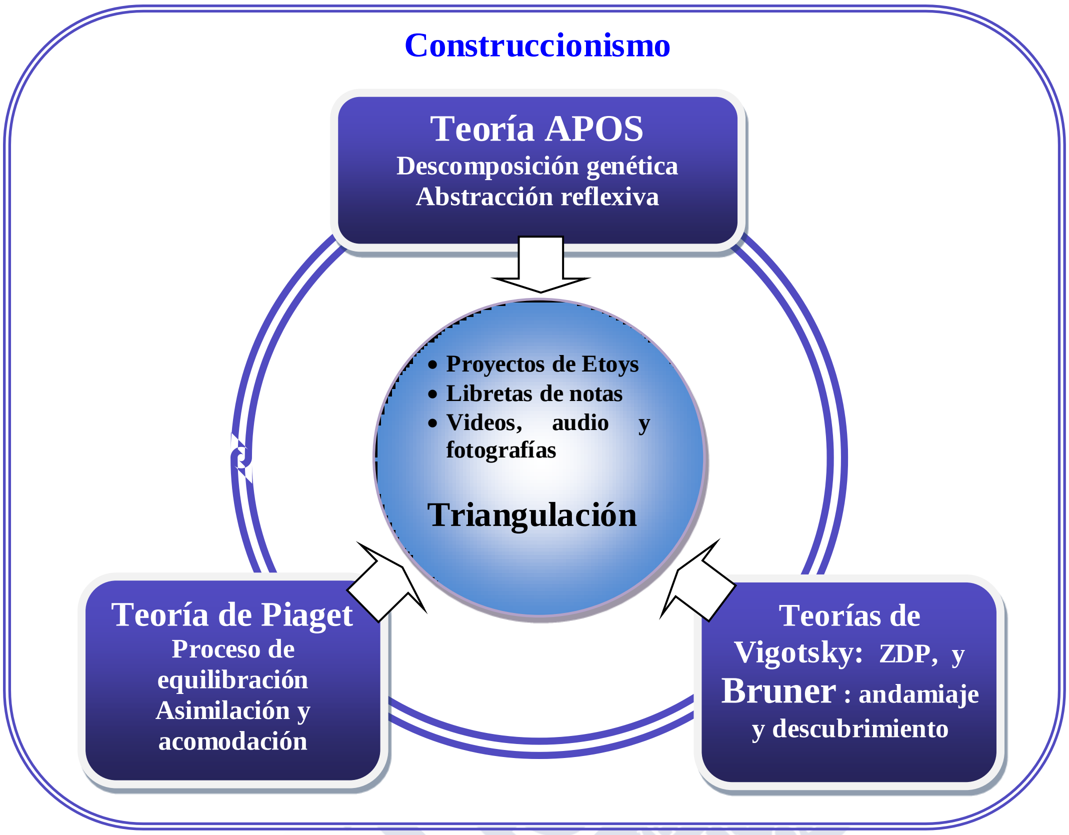


Figura 4.14. Diseño del análisis de la información a través de las teorías que engloba el construccionismo.

De acuerdo a la teoría APOS, nos basamos en los constructos mentales de acuerdo a la descomposición genética: acción, proceso, objeto y esquema. Estos niveles indican las etapas que los niños/as alcanzaron en los dos momentos paralelos, al construir el concepto de fracción y el uso de los mosaicos y guiones de Squeak Etoys. El análisis se centró en explicar los niveles de constructos mentales a través de las abstracciones reflexivas: interiorización, coordinación, encapsulación, generalización y reversibilidad.

La teoría de Jean Piaget, ayudó a explicar el proceso de aprendizaje y el desarrollo de los conocimientos a través de la equilibración, desequilibrio, la asimilación y la acomodación. Se explicó en qué momentos los niños tienen desequilibrios, equilibrios y la reequilibración maximadora. Vale remarcar un aspecto importante; los niños cometen continuamente errores en las programaciones y al verificar su funcionamiento se dan cuenta que es necesario su corrección, en su mayoría asumen la corrección (auto-corrección); a esta acción se les denomina acción proactiva, porque conduce a una corrección o un refuerzo, que según Piaget debe ayudar el profesor, pero en nuestra investigación se detectó que los mismos niños realizaron dichas acciones de corrección.

El enfoque sociocultural de Vigotsky, manifiesta que el desarrollo del niño está bajo condiciones de cambios dinámicos en el organismo (crecimiento, maduración y desarrollo orgánicos) y en el lenguaje como medio de comunicación social. En tal sentido, el análisis se centró en el aprendizaje del niño/a observando la capacidad de resolver problemas de forma independiente o bajo la guía de un compañero capaz. Es decir, el aprendizaje de los niños/as fue analizado en los momentos que los niños pudieran apoyar a sus compañeros (trabajo en equipo) en alcanzar ciertas pistas (la comunicación) para la solución de las programaciones (diseño de proyectos); finalmente, en otros momentos tuvo que intervenir el profesor.

El método de descubrimiento de Bruner, es tácito cuando los niños se enfrentan a situaciones nuevas y a explorar todas las posibilidades, inclusive saliéndose de los formatos del trabajo propuesto. Por lo tanto, la evaluación se llevó a cabo explicando las particularidades que tuvieron durante las experiencias que vivieron los niños/as la diseñar los proyectos con Squeak Etoys. En cuanto al *andamiaje*, los materiales de trabajo mediado con Etoys fueron preparados con anticipación, en tal sentido los efectos son los resultados que se muestran tanto en los archivos digitales y los cuadernos.

Finalmente, se observa la secuencia del análisis de las cuatro dimensiones en el diagrama (ver Figura 4.15). Cada una de las dimensiones se interrelaciona en el proceso de la construcción del concepto.

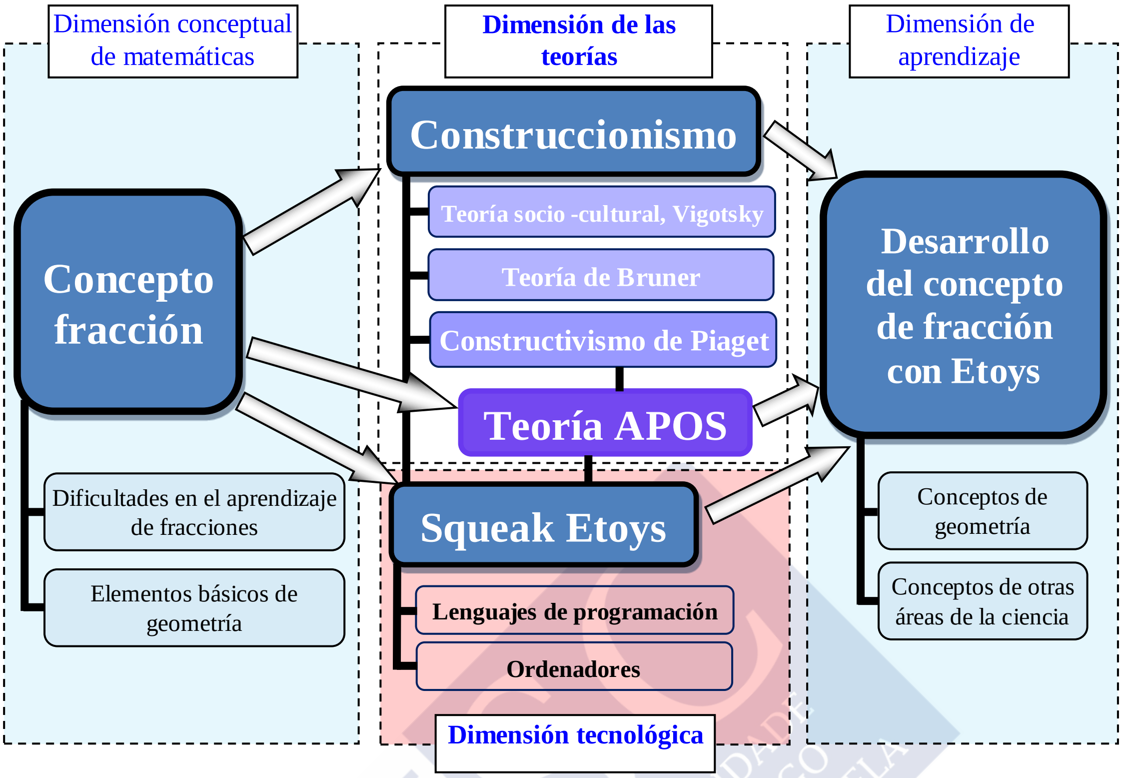


Figura 4.15. La interrelación de las cuatro dimensiones en la construcción del concepto de fracción.

A posteriori se procedió a la interpretación de los datos que es el momento más arriesgado del proceso, dado que interpretar supone integrar, relacionar, establecer conexiones entre las diferentes categorías, así como posibles comparaciones; pues a cada interpretación se le adjuntó la figura realizada por los niños/as como argumento de sustento.

4.2.6.1 Análisis global de estudiantes

En esta parte, se hace hizo un análisis del desarrollo de las experiencias vividas por todos los estudiantes durante el diseño de proyectos con Etoys, reconstruyendo el plano de la Casa de las Ciencias de la Coruña. Los resultados fueron analizados en forma global, y la descripción muestra la secuencia desde el inicio hasta el final de las experiencias.

Se inicia con la revisión de los manuscritos en las libretas, continúa con el análisis de las respuestas a la pregunta ¿qué entienden por el concepto de fracción? Se analizaron cada una de las respuestas para clasificarlas en: simbólico, reparto de tartas, idea de repartir algo y parte de una unidad. Una vez realizada la identificación se hizo realizó el análisis de acuerdo a la descomposición genética, con los niveles de constructos mentales de *acción* y *proceso*.

Seguidamente, se analizaron los procesos de construcción desde el inicio de la programación en forma conjunta, comparando los resultados de los archivos digitales obtenidos de cada uno de los estudiantes y cruzando la información con los escritos realizados en los cuadernos, luego, éstos se confrontaron con las filmaciones que expresan la actitud del alumnado durante el desarrollo de las sesiones. Finalmente, se analizaron los resultados globales y su tendencia en función de los resultados de las programaciones obtenidas.

4.2.6.2 Tres casos específicos

Se ha realizado la evaluación de seguimiento a tres niños/as que fueron seleccionados por el profesor "B": un alumno que tiene dificultades, uno intermedio y otro niño/a que tiene muy buen resultado en cuanto al rendimiento académico. Se hizo el análisis uno por uno de los tres participantes (Jans, Kris y Alice), desde el inicio de la experiencia hasta la finalización, contrastando con las teorías propuestas.

Para el análisis de los resultados se tomaron en cuenta las libretas de notas, haciendo un seguimiento al detalle de cada día; luego estos resultados se contrastaron con los proyectos diseñados con Etoys (archivos digitales) guardados en los lápices de memoria, y que también fueron analizados de acuerdo a los archivos grabados diariamente, en cada archivo muestran los guiones y los mosaicos utilizados en las programaciones, además las gráficas generadas por el coche en el mundo de Etoys nos conducen a comprender mejor el proceso.

Las informaciones obtenidas mediante las fichas de observación, las fotografías y las filmaciones; sirvieron para corroborar las acciones realizadas y los comportamientos de cada uno los niños/as observados. Finalmente, se hizo la comparación de los logros alcanzados en relación a las habilidades matemáticas, las competencias digitales, el manejo de Squeak Etoys y uso de ordenadores que tuvieron los estudiantes; lo más importante del análisis fue describir el desarrollo personal de cada estudiante, que son diferente entre sí, tanto en la construcción del concepto de fracción, manejo de Etoys, comportamiento, organización de sus proyectos, uso de su libreta de notas y rapidez en el progreso del diseño de sus proyectos.

Capítulo V:

Análisis del proceso de desarrollo del concepto de fracción

5. CAPÍTULO V. ANÁLISIS DEL PROCESO DE DESARROLLO DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN

5.1 Análisis del desarrollo de las sesiones y resultados en forma global

Como ya hemos mencionado, las sesiones de trabajo tuvieron lugar en una escuela concertada de Santiago de Compostela durante dos semanas, con un total de 8 horas de clase en el laboratorio de informática de primaria de la escuela, donde previamente, ya se habían instalado las cámaras de video que permitirían el registro de las mismas. Allí los niños y niñas se involucraron en realizar una simulación y realizar la programación ya presentada en capítulos anteriores en donde se planteaba la necesidad de redistribuir las divisiones del plano de la Casa de las Ciencias de la Coruña utilizando Etoys. En lo que sigue se describe el desarrollo de las sesiones que han servido para el análisis de los procesos desarrollados por los niños/as para construir el concepto de fracción.

El profesor "B" del curso acompañó todo el proceso como observador participante, razón por la cual su visión de la propuesta y de cómo se desarrollaron las sesiones resultó de suma importancia. Sus representaciones sobre las actividades y los resultados obtenidos fueron registrados en dos entrevistas, la primera de negociación y la segunda, luego de haber culminado las sesiones. Estas entrevistas se consignan en el análisis de los datos recogidos y en las conclusiones de la investigación.

Primer día: Se inicia el día lunes 14 de noviembre de 2011. Horario de 15:30 a 16:30

Siendo 15:30 horas: el profesor "B" de aula y los estudiantes se trasladaron del salón de clases al laboratorio de informática bajo la supervisión del profesor. Una vez ubicados los alumnos en sus asientos con sus ordenadores se dio inicio a las actividades:

Presentación del profesor/investigador y recomendaciones.

Se solicita que escriban en sus libretas de notas, ¿qué entienden por el concepto de fracción?, pueden hacer algunas gráficas si es necesario (cinco minutos).

Los resultados obtenidos sobre esta pregunta, se relacionan con los conceptos aprendidos en 4to grado, y manifiestan una concepción que se relaciona con las presentaciones clásicas de los libros, así como el reparto de una tarta, o la división de un objeto. Se podría clasificar en cuatro tipos:

Primero, el *Simbólico,* cuando esta expresado en términos numéricos o se explica mediante el símbolo de una fracción.

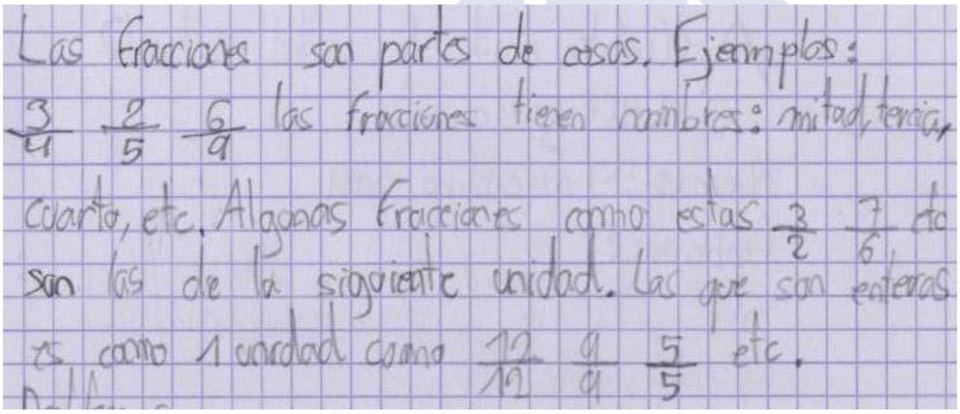


Figura 5.1. Diseño Concepto simbólico de una fracción. **Niño Paúl**.

Segundo, *reparto de tartas,* cuando la expresión de la fracción está referida a la división y reparto de tartas. Ejemplo clásico que se encuentran en los libros de texto.

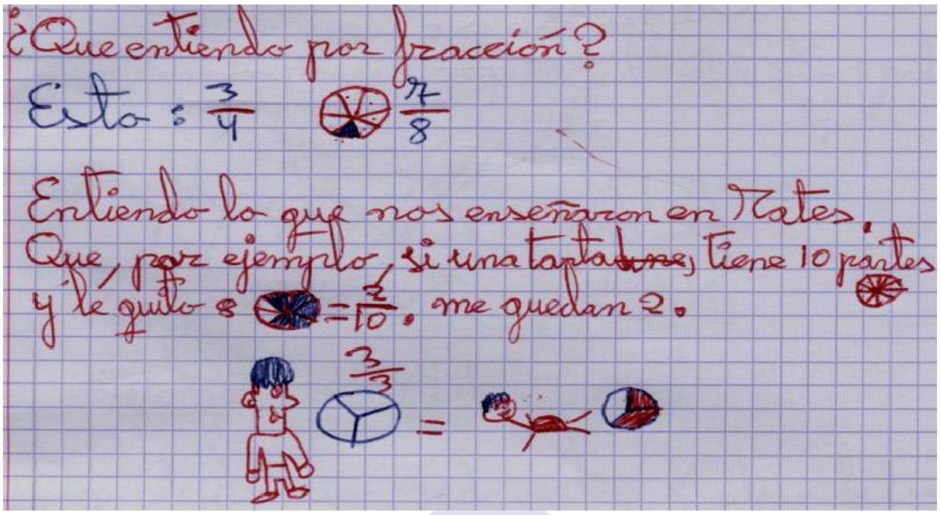


Figura 5.2. Concepto referido al reparto de tartas. **Niño Juan**.

El tercero, es una expresión más amplia que expresa distribución de una cantidad que puede ser un conjunto de cosas o un objeto dividido en *n partes*.

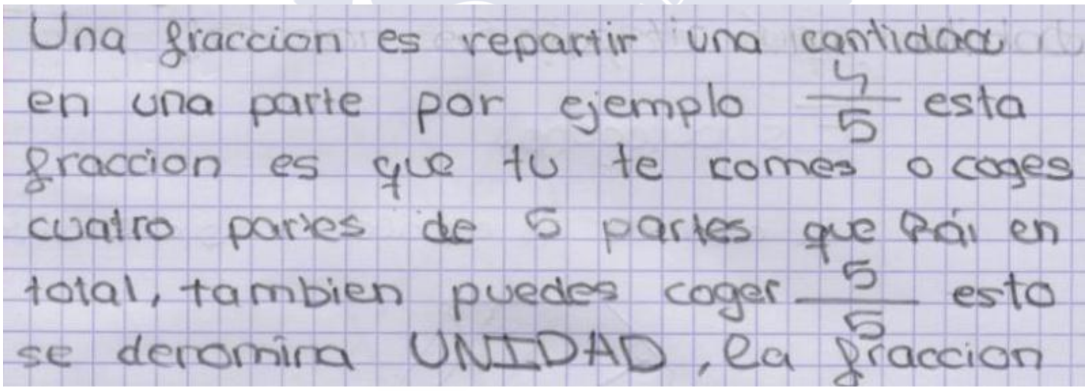


Figura 5.3. Concepto referido a repartir un objeto en varias partes. **Niña Paola**

Finalmente, cuando la expresión puntualiza la división de un objeto, es decir, se considera una unidad que se tiene que dividir en varias partes, siendo una parte la fracción de una unidad.

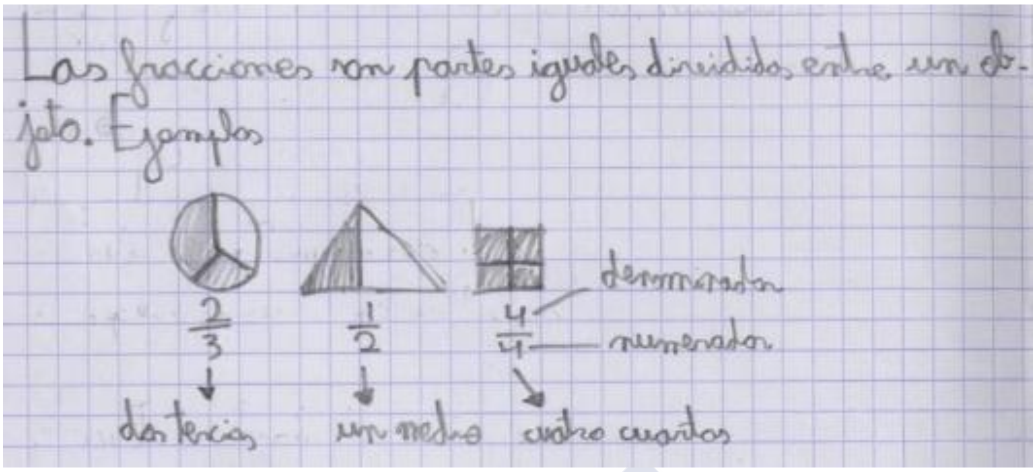


Figura 5.4. Concepto referido a dividir un objeto o unidad en varias partes**. Niño Rubén.**

En la tabla se aprecia las respuestas de los 24 alumnos; cabe indicar, que dos estudiantes no presentaron sus libretas.

Tabla 5.1. *Resultado de la pregunta realizada sobre el concepto de fracción antes del inicio de las sesiones*.

	Simbólico	Reparto de tartas	Idea de repartir algo	Parte de una unidad
f	1	6	8	9
%	4	25	33	38

Las expresiones dadas por los niños y niñas sobre la construcción del concepto fracción dentro de la composición genética propuesta en el Capítulo III (3.3.1), se encuentran en el nivel de constructo mental de *acción*, porque sólo logran identificar o reconocer el concepto fracción en una gráfica (A.1), reparte un conjunto de objetos en porciones (A.2), lee y escribe una fracción sin interpretar (A.3) y considera a la fracción como la división de una circunferencia relacionando a una tarta (A.5). En este contexto se entiende, **acción** como una manipulación mental o física repetible de los objetos (Breidenbach et al., 1992). Además, de acuerdo a la triada, en este etapa los niños/as se ubican en el nivel *intra*, porque centran su atención a un solo objeto en forma aislada de otras acciones u objetos; es decir conciben el concepto de fracción de manera repetitivo, sin relacionar con otros conceptos.

Luego se explicitaron las actividades a desarrollar en un texto escrito que servía como guía al alumnado.

Planteamiento del problema. Se pregunta a los niños por la Casa de las Ciencias de La Coruña, si la conocen y si saben qué figura geométrica tiene en su base. Se expone en la pantalla una fotografía de la misma.

Hubo muchas respuestas a la pregunta, algunos alumnos ya la habían visitado, pero no se habían percatado de la forma geométrica que tiene:

- Un alumno comentó que tiene la forma de un cuadrado, otro que tiene forma hexagonal otra, forma circular y finalmente otro dice que tiene forma hexagonal por fuera y circular por dentro.

Entonces cada alumno propone su hipótesis, escribiendo en sus libretas. Cuyas expresiones extraemos para ilustrar.

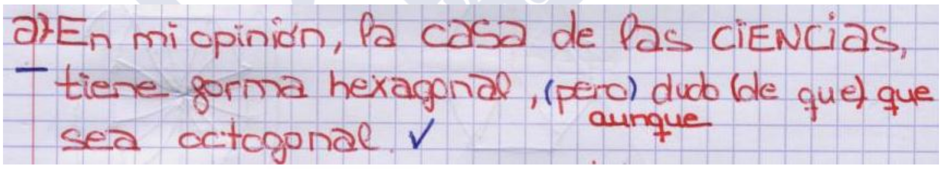


Figura 5.5. Hipótesis sobre la forma geométrica de la Casa de las Ciencias**. Niño Jorge**

En la figura 5.5 se observa que Jorge tiene cierta duda, la información es incompleta, es decir existe una perturbación de tipo laguna que requiere equilibrar (Piaget, 1990).

Luego, iniciaron sus actividades con una exploración por Internet indagando la historia de la Casa de las Ciencias y encontraron algunas fotografías. Utilizando Google Map desde el espacio se pudo apreciar la forma geométrica que tiene la Casa de las Ciencias. Algunos estudiantes tuvieron dificultades con el uso de los ordenadores, entonces se guiaron por las fotocopias que se les proporcionó, donde se podía visualizar fotos y croquis de la Casa de las Ciencias de la Coruña.

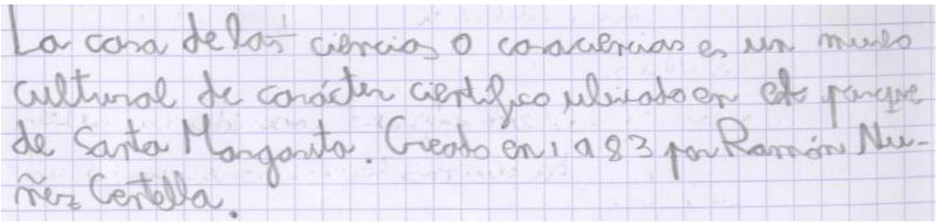

La casa de las ciencias o casaciencias es un museo cultural de carácter científico ubicado en este parque de Santa Margarita. Creado en 1983 por Ramón Nu-ñez Centella.

Figura 5.6. Fragmento de historia de la Casa de las Ciencias. **Niña Karen**.

Posteriormente se solicitó a tres estudiantes que dibujaran en la pizarra lo que habían hecho en sus libretas; los tres primeros estudiantes dibujaron un octágono. Finalmente, el cuarto, también dibujó un octágono colocando el número de lados; pero los números los ubicó en los vértices. Uno de sus compañeros le corrigió y explicó que se llama ángulo al lugar donde colocó los números y otro dijo que no, que se llaman vértices.

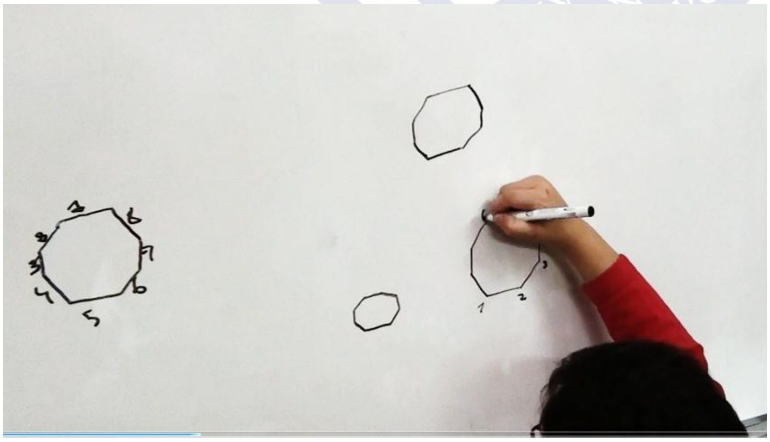


Figura 5.7. Figuras del octágono dibujado por los niños

Aquí se resalta la comunicación y el análisis de los errores cometidos en la solución de problemas (Vigotsky, 1979). En la actividad, éstos se han convertido en temas de conversación, dando como resultado un lenguaje articulado que permite ayudar a comprender lo que anduvo mal (Papert, 1987); los niños así participaron en la corrección y uso adecuado de los conceptos matemáticos.

Luego se hizo la pregunta ¿cuántos conceptos hemos aprendido? Las respuestas fue: ángulos, vértices, lados, hexágono, figuras geométricas, octágono (polígonos).

<u>Segundo día</u>: martes 15 de noviembre de 2011. Horario de 10:00 a 11:00

Se solicita a los alumnos que, en pareja, dibujen la base de la Casa de las Ciencias en su libreta, basándose en las imágenes y los relatos de la sesión anterior. Luego se pregunta a los alumnos si se puede dividir esta base:

¿Es posible dividir la base del interior de la Casa de las Ciencias? Si cree que se puede dividir ¿en cuántas partes podría dividirlo?

Luego de numerosos intentos para realizar divisiones, se rescata que cada uno lo hizo de diferentes maneras, unos guardan relación con el concepto fracción y otros son poco precisos. Los resultados fueron los siguientes:

a) Un alumno dijo que se podría dividir en 4 partes. Otro dice expresa que si es hexagonal se podría dividir en 6 partes. La división se puede hacer de acuerdo al número de lados de la figura.

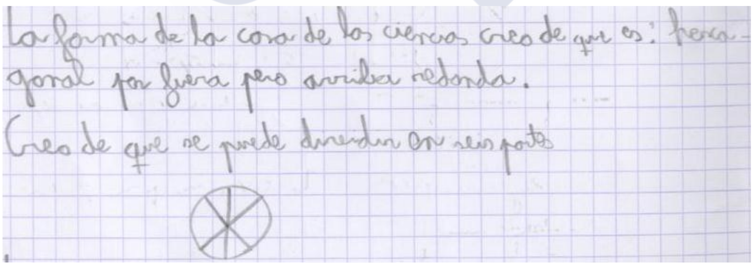


Figura 5.8. División de la Casa de las Ciencias. **Niña Janet**.

En la Figura 5.8, el estudiante conjetura que es hexagonal, luego al realizar la gráfica se confunde con la parte superior de la Casa de las Ciencias que tiene la forma de una semi-esfera; sin embargo la división la realiza adecuadamente de acuerdo a su hipótesis, relacionando con la base.

b) Que se podían repartir en dos partes, en tres partes, en cuatro partes, en cinco partes y en ocho partes, en 16 partes, en 32 partes y otros conjeturaron que podría repartirse en "n" partes siendo n un número par. En esta opción los estudiantes realizan la propuesta sin haber verificado algunos resultados.

c) Otro resultado se obtuvo de hacer cierta división de 8/1, 8/2, 8/4, 8/8 cuyo residuo es cero. La subdivisión en fracciones es exhaustiva, es decir, no queda resto (Holloway, 1969, p. 85). El estudiante no ha considerado los números 3, 5, 6 y 7 en el denominador porque con estos números la división no es exacta, es decir tiene residuo.

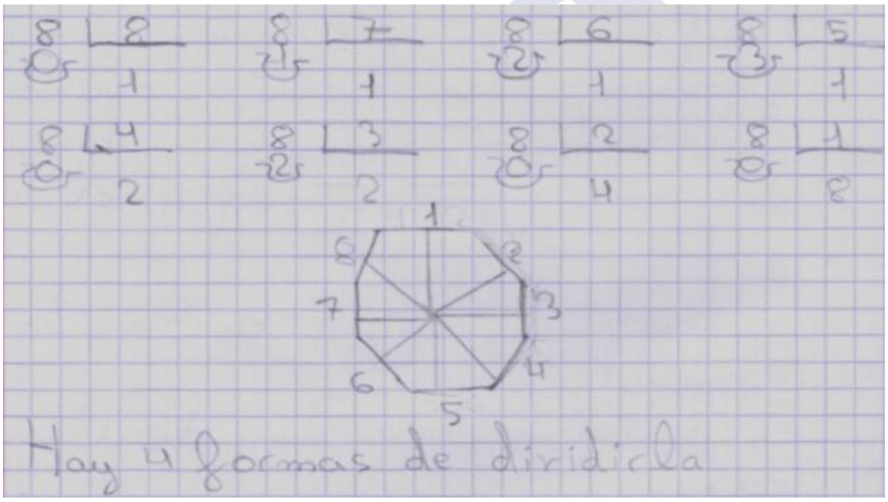


Figura 5.9. Divisiones posibles de la Casa de las Ciencias. Niño Carlos.

En este caso el estudiante se encuentra en el nivel de abstracción seudo-empírica, porque realiza una serie de acciones no físicas, como dividir con los posibles valores del 1 al 8, para verificar los residuos de las divisiones y finalmente asignar ciertas características y concluir. El estudiante, pudo explicar muy correctamente lo sucedido.

d) Algunos estudiantes realizaron divisiones poco precisas, al no ayudarse de una herramienta, como por ejemplo una regla. Se considera que el estudiante no tiene adquirida la idea de igualdad de las partes en una fracción al momento de realizar las divisiones. Este concepto debió ser precisado (cuestión que no fue considerado cuando se realizó el plan de actividades bajo el supuesto que ya formaba parte de la base conceptual del alumnado), porque el concepto de fracción aritmética implica que todas las partes son iguales (Holloway, 1969).

Figura 5.10 Divisiones de la Casa de las Ciencias, sin considerar la igualdad. **Niña Jessica**.

Finalmente para culminar, dos estudiantes expusieron sus dibujos en la pizarra sobre la distribución de la Casa de Las ciencias. El primero realizó una gráfica dividiendo en 16 partes, mientras tanto el segundo estudiante graficó con una división cuadrada no simétrica, es decir no consideró la igualdad, entonces sus compañeros le observaron que algunos cuadrados de la figura no eran iguales con las otras partes (ver Figura 5.11). Clarificando así, la necesidad de tener en cuenta la igualdad.

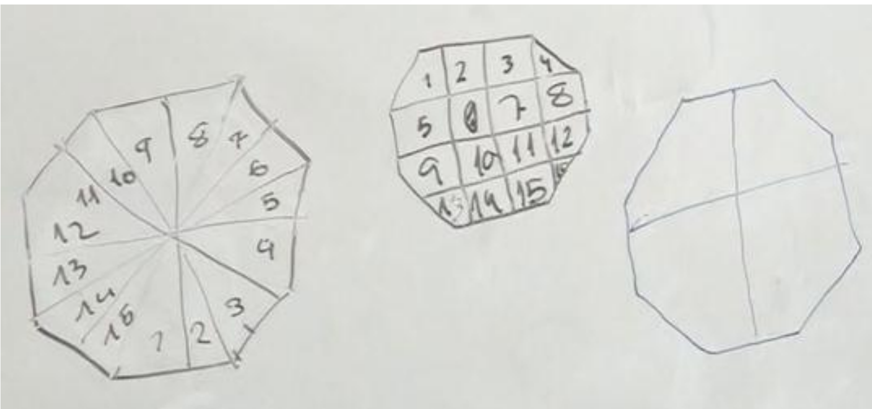


Figura 5.11 Divisiones que dibujaron en la pizarra sobre la Casa de las Ciencias.

Luego se concluyó, que lo ideal sería hacer una distribución de acuerdo al número de lados que tiene, es decir en 8 divisiones iguales (un octágono). Para esta etapa del diseño, los niños se ubicaron en su mayoría a la que según Piaget, denomina abstracción empírica, enfocándose solamente en repetir los conceptos de fracción o describir el fenómeno y pocos alumnos lograron alcanzar la abstracción seudo-empírica

5.1.1 Inicio de la programación con Etoys

¿Será posible realizar la división haciendo uso de Squeak Etoys?

Para responder a la pregunta inician sus proyectos con Etoys, en primer lugar se le solicitó la construcción de un coche sobre el mundo, cuestión que habían trabajado el año anterior.

Los resultados muestran que unos dibujaron sus coches en dos dimensiones (bidimensional), significa que los niños y niñas construyen su representación geométrica del espacio con suma lentitud (Holloway, 1982), porque la figura representa la percepción del espacio. Este tipo de figura no es adecuada para realizar movimientos en un espacio de tres dimensiones, porque cuando avanzan y giran hacia la derecha estarán ubicados con las ruedas hacia arriba.

Figura 5.12. Dibujos de objetos en el plano bidimensional en el mundo de Squeak.

Mientras tanto, otros estudiantes sí pudieron dibujar sus coches visto desde el espacio.

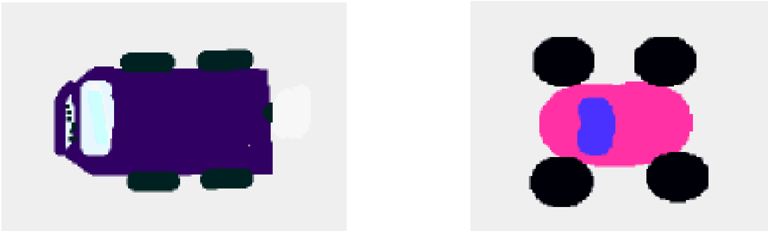


Figura 5.13. Dibujos de objetos en espacio tridimensional en el mundo de Squeak.

Estos representan objetos en tres dimensiones (3D) en el mundo de Etoys permitiendo mejor visualización geométrica espacial; en efecto, en los Principios y Estándares del NCTM (2000) indican entre sus objetivos el desarrollo del sentido espacial y reconocimiento de la geometría como un medio para describir y modelizar en el mundo real.

Finaliza el trabajo del día, quedando para la siguiente clase la construcción de un cuadrado con Squeak Etoys. Se decide comenzar por un cuadrado, porque es más fácil la construcción de un guión y porque ésta contiene conceptos matemáticos básicos como una línea recta y ángulo de 90° le permite comprender la construcción.

<u>**Tercer día**</u>: miércoles 16 de noviembre de 2011. Horario de 10:00 a 11:00

Se le presenta un papel que contiene un *dibujo de un cuadrado*, diciendo que se trata de una zona de la ciudad en la que las calles están diseñadas en forma de cuadrados. Se solicitan entonces que dibujen mediante flechas el recorrido de un coche en ese cuadrado. Luego pasamos a trabajar con Squeak Etoys. Se puede decir que casi la totalidad de los alumnos diseñaron guiones separados sobre el Mundo de Etoys, estos guiones servirían para dibujar el cuadrado; sin embargo, construyeron los guiones iguales a los guiones del proyecto donde construyeron el reloj[16]. Es decir,

[16] Diseño de proyecto es un ambiente de aprendizaje, donde los niños diseñaron una programación para construir un reloj de manecilla y luego poner en funcionamiento.

estuvieron en el nivel de *acción* al aplicar directamente lo que ellos habían aprendido tales como *gira*, *avanza*.

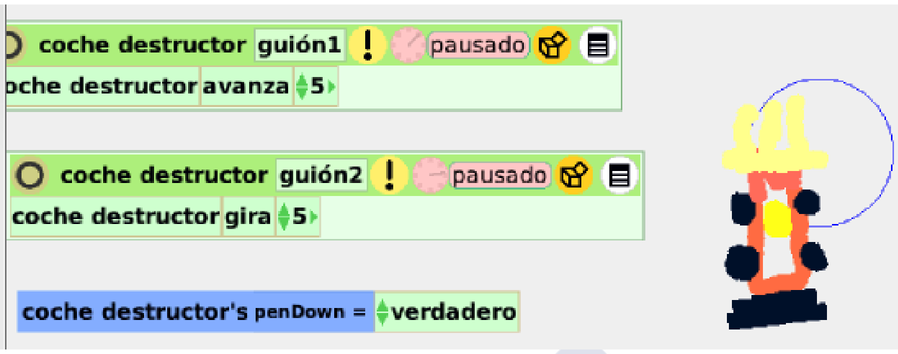


Figura 5.14. Supuestos guiones para el diseño de un cuadrado con Squeak. **Niño Raúl.**

Al construir el cuadrado, los niños y niñas estuvieron centrados en dos guiones por separado, un guion para avanzar y otro guion para girar, algunos no pudieron modificar los valores en los mosaicos de cada guion; esta etapa es denominado ***Intra*** (Piaget y García, 1982), porque el niño/a fija su atención solo en dos objetos *avanza* y *gira*. Otro resultado fue activar el reloj, haciendo que el programa interactúe la operación en forma continua. Lo que debían construir un cuadrado; pero no comprenden que el valor en los mosaicos juega un papel importante, a este proceso Piaget considera como abstracción empírica (Dubinsky, 1991).

En ese momento fue necesario introducir la noción de distancia, ya que ésta es concebida como una forma de movimiento, porque al medir una cierta distancia se traslada la regla varias veces (Piaget, Inhelder, & Szeminska, 1981). El desarrollo de las ideas de medida incluye tanto la capacidad de apreciar la conservación de la longitud como la de agrupar los cambios de posición y referirlos en una estructura espacial (Holloway, 1969, p. 17), en cambio con Etoys el concepto de medida está en relación al movimiento de un objeto (coche) en el micromundo, que se traslada de un lugar a otro, recorriendo una determinada distancia y tomando un punto de referencia (un punto (*x*, *y*) en el plano cartesiano), una dirección, un sentido y una magnitud expresada en pixeles (un vector posición en una coordenada rectangular).

Luego de varios intentos al ver que el coche avanza, logran graficar una línea recta. La estudiante ensaya con mosaicos diferentes.

Figura 5.15. Una línea recta generada por un coche que avanza 10 pixeles por cada pulsación en el signo de exclamación. **Niña Liz.**

Fue necesario ofrecer diferentes pistas para que el alumnado pudiese hacer recorrer una distancia y luego hacer girar el coche 90° a la derecha. Para probar mantenían pulsado sobre el reloj, y pudieron ver que el coche graficó un cuadrado (por iteración), y entonces lograron diseñar el guion del cuadrado. Pero el guion realmente no genera un cuadrado, sino simplemente una línea recta de una determinada magnitud y un ángulo. Aquí apreciamos un guion incompleto que genera un segmento, un ángulo, un segmento y un ángulo.

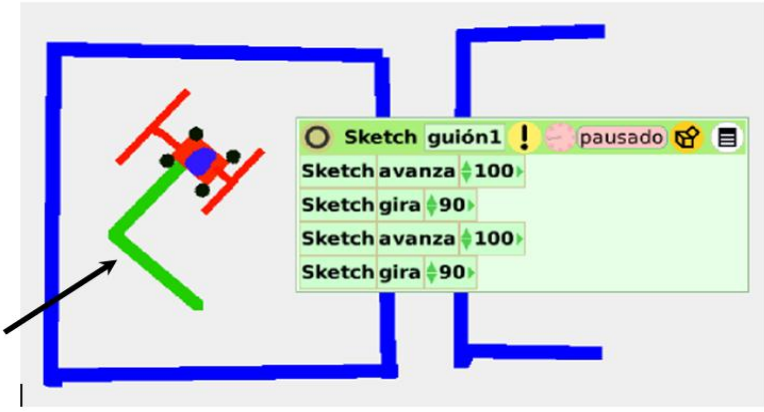


Figura 5.16. Diseño de un guion incompleto para graficar un cuadrado. **Niño Frank.**

Nuevamente, se dio pistas para añadir más mosaicos con las mismas medidas al guión; de este modo se logra diseñar el guión del cuadrado y graficarlo solo con un clic en el signo de exclamación.

La Figura 5.17 muestra cómo un niño trata de construir el ***Diseño del software*** para que grafique un cuadrado, sin embargo persisten los errores en consignar los valores, en gira 90 y avanza 100 (2do y 3er nivel). Estos errores benefician y facilitan el aprendizaje permitiendo conocerlos justo en el momento que se producen y corregirlos (Ferro Soto, Martinez Senra, & Otero Neira, 2009; Kay, 2010; Papert, 1987).

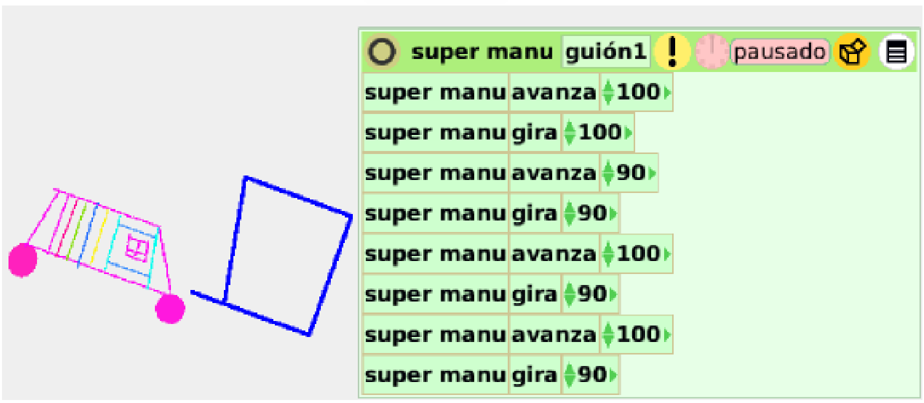


Figura 5.17 Diseño de un guion incompleto para graficar un cuadrado. **Niño Meel**

Por tanto, al diseñar un cuadrado con Squeak Etoys los estudiantes utilizaron diversos conceptos matemáticos muy bien definidos; porque no es igual dibujar un cuadrado en un papel donde no se considera la distancia ni los ángulos, y el cuadrado es idealizado (Papert, 1982).

Se observó que los niños exploran Squeak Etoys y siendo la programación basada en ensayo-error, al manipular los guiones generan figuras que no esperaban, prueba de ello se muestra un pasaje de una estudiante.

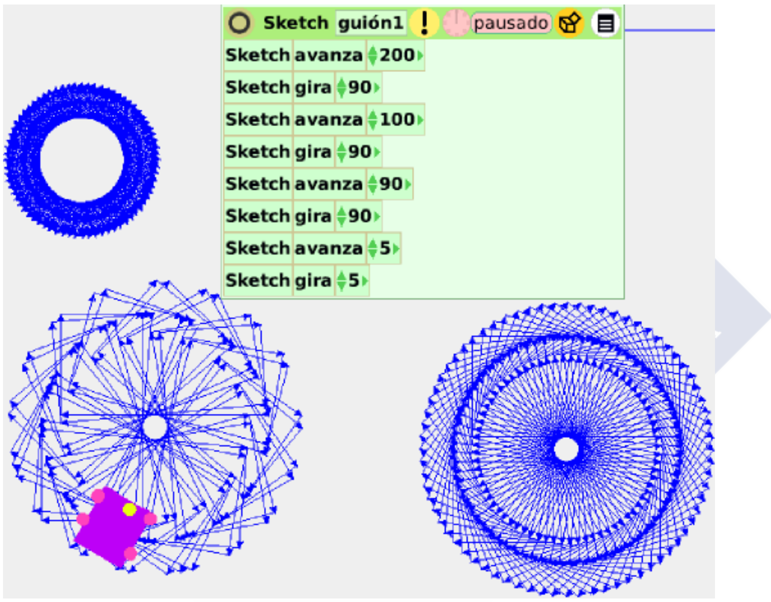


Figura 5.18 Diseño y figura generado con Etoys. **Niña Rosa**.

<u>Cuarto día</u>: viernes 18 de noviembre de 2011. Horario de 12:30 a 13:20

La actividad se inicia con una retrospección de la actividad anterior para su reforzamiento. Participaron tres estudiantes, la primera pasó a escribir sobre la pizarra y dijo “primero hice avanza 100, luego gira 90, y como cuando le das al reloj, grafica el cuadrado”. El segundo dijo “lo hice de otra manera, hice avanza 100 y gira 90, cada uno cuatro veces alternados y luego hice clic al reloj, se tiene el cuadrado y el coche no se mueve del lugar”. El tercer alumno dijo “hice como hicieron los demás compañeros, pero había modificado en *latidos* para medir la velocidad del coche y grafique más rápido” (similar al de la primera). En esta sesión la mayoría de los estudiantes lograron construir el cuadrado; la Figura 5.19 nos muestra el resultado que un estudiante que *diseñó* el *software* para graficar el cuadrado.

Figura 5.19 Diseño de un guion completo para graficar un cuadrado. **Niña Karen**

Esta actividad los niños al participar, se comunican con sus compañeros y refuerza sus conocimientos, y los niños resuelven tareas prácticas con la ayuda del lenguaje para lograr sus metas; y en caso de que el niño/a no ha comprendido, lograr construir sus ideas con la ayuda de sus compañeros (ZDP). Una vez concluida la construcción del cuadrado. Se hace una revisión de las divisiones realizadas al plano de La Casa de las Ciencias, allí se aprecia que resultan triángulos

5.1.2 División del plano de la Casa de las Ciencias con Etoys

Se inicia la sesión con la revisión de las libretas en las que cada estudiante realizó las divisiones del plano de La Casa de las Ciencias en 8 partes, y en donde cada parte es un triángulo. Por tanto es necesaria la construcción de un triángulo, porque el plano está constituido por triángulos.

Se les solicita a los niños intentar encontrar el valor del ángulo central de uno de los triángulos para responder a la pregunta ¿Cuánto mide el ángulo central? Luego de unos 6 minutos nadie pudo responder a la pregunta. Nuevamente se hizo necesario ofrecer pistas explicitando, que una vuelta completa es 360°; un estudiante dijo: entonces hay que dividir 360° entre 8. El resultado es 45° y expresa el valor de un ángulo del triángulo; además el triángulo es isósceles que tiene dos lados iguales y dos ángulos iguales.

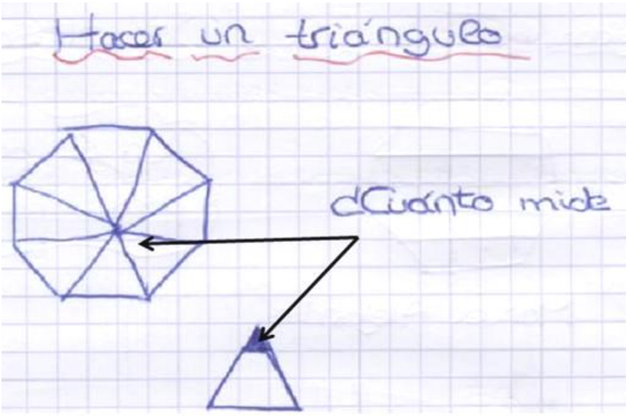


Figura 5.20 Inicio de la construcción de un triángulo, y la incógnita del valor del ángulo central. **Niño Rafael**.

Al explorar el valor del ángulo central, se enfrentan a una nueva definición que ellos desconocían, es decir que carecían del conocimiento de un objeto matemático; esta ausencia es una perturbación de tipo *Laguna* que requiere una regulación (Piaget, 1990). En efecto, según Piaget los niños buscan llenar ese vacío realizando acciones sobre el objeto para encontrar el valor del ángulo central, luego con la ayuda de su compañero por la aclaración logra determinar el valor del ángulo que es de 45°.

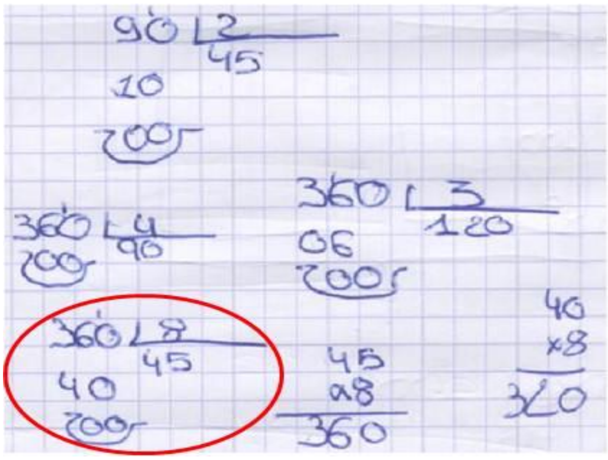


Figura 5.21. Operaciones para encontrar el valor de un ángulo central (en grados sexagesimales). **Niña Mayra**

Al realizar pruebas con ciertos valores numéricos, el estudiante logra identificar el valor del ángulo (ver Figura 5.21), cuyo valor es 360°/8 que equivale a 45°. En consecuencia, los estudiantes logran regular la perturbación en un primer nivel al resolver el problema del ángulo central.

Una vez encontrado el valor del ángulo *b* = 45°, (ver Figura 5.22) es necesario encontrar los otros ángulos para construir el triángulo, cuyo diseño es similar al cuadrado. No fue fácil para los niños identificar el valor de una vuelta completa es 360°. Porque los niños de 8-9 años edad construyen un triángulo ajustando sus tres medidas por ensayo error; a diferencia de los niños de 9 a 10 años que averiguan todas la dimensiones de manera sistemática sin recurrir a la técnica de ensayo error (Holloway, 1969; Piaget et al., 1981).

Sin embargo, el tema se hace más complejo para los niños, porque para realizar la programación con Etoys se necesitan tener los datos precisos. Fue necesario que entregarles un material con el triángulo prediseñado y sus respectivas medidas; luego se ayudó explicando el proceso.

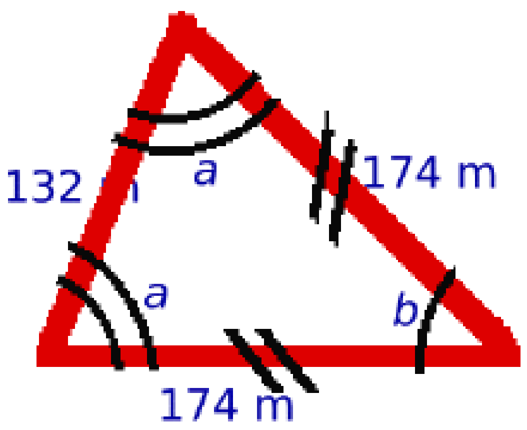
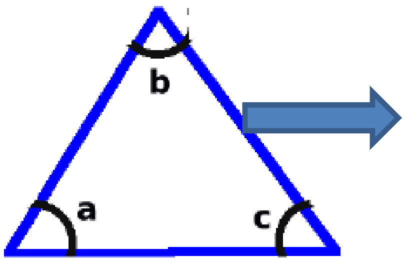


Figura 5.22. Triángulo isósceles de una de las distribuciones de La Casa de las Ciencias rediseñada, con *b*=45°.

Otro valor desconocido en el triángulo (ver Figura 5.22) son los valores de "*a*", y para encontrar esos valores tiene que recurrir a la definición: "la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°"[17]



$$a° + b° + c° = 180° \qquad \text{ec. (5.1)}$$

Remplazando en la ecuación (4.1), se tiene: $a° + a° + b° = 180°$

Como $b° = 45°$; entonces $2a° + 45° = 180° \Rightarrow a° = 135°/2$

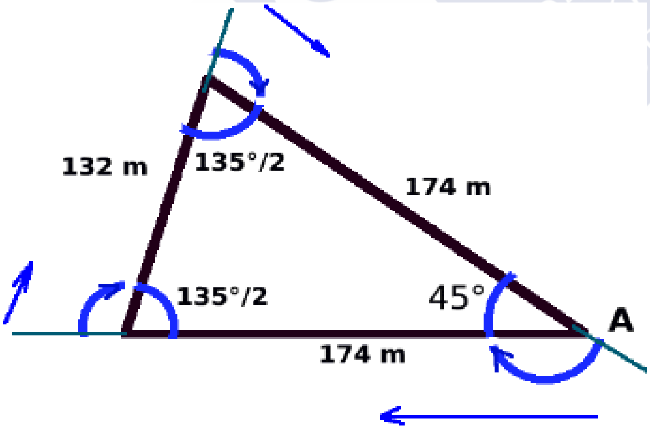


Figura 5.23. Triángulo isósceles de una de las distribuciones de La Casa de las Ciencias con sus medidas respectivas. Se indica con una flecha los ángulos de giro que deben considerar al realizar la programación.

---

[17] El concepto de un triángulo ya se había desarrollado en la penúltima unidad del 4to grado de primaria. Luego en la clase, se ha socializado con la ayuda del profesor de aula para reforzar el concepto de triángulos e incorporar el concepto de la suma de ángulos internos de un triángulo.

Esta fue una de las dificultades para continuar con el desarrollo de las sesiones que luego los niños pudieran realizar la programación del proyecto en curso.

Esto significa, que los niños deberían haber desarrollado con anterioridad los temas: ángulos, ángulos complementarios y suplementarios, polígonos, suma de ángulos internos de un triángulo, perímetro y áreas. Al respecto, en el libro de texto del cuarto grado de (Peña, Santaolalla, & Aransubía, 2010), en la unidad 13 aparece el tema de rectas y ángulos; en esta parte los niños desarrollaron la noción de rectas y ángulos, haciendo uso de las herramientas como el transportador.

Del mismo modo en el libro de texto de quinto grado el tema rectas y ángulos se ubica en la unidad 12, cuando el concepto de fracción se ubica en la unidad 4 y 5; esto nos indica que los niños no tienen conocimiento de las medida de los ángulos, aunque en esta parte si ya se desarrolla la medida de ángulos y sus propiedades, así como los ángulos suplementarios. En tanto, que las figuras geométricas como el triángulo, aparecen en la unidad 13 del libro de texto del quinto grado; sin embargo las medidas de los ángulos no aparecen, solamente se desarrollan las medidas de los lados del polígono para determinar el perímetro.

Los niños descubren la medida de dos ángulos por ensayo-error. Es decir, no pueden medir un ángulo y los ángulos suplementarios con facilidad en el plano euclidiano. Al construir los ángulos con Etoys, es necesario que el niño determine el valor de giro (dirección) para cambiar el sentido de movimiento del coche y generar el ángulo suplementario.

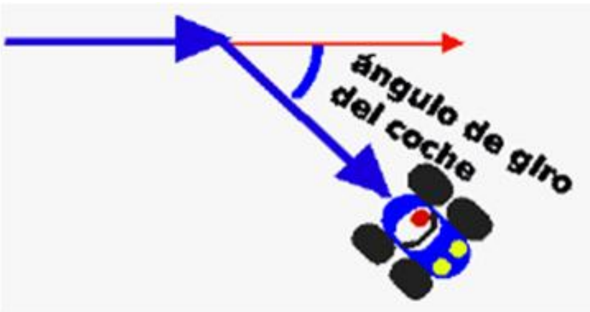
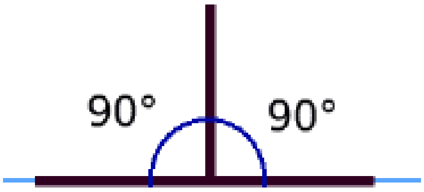


Figura 5.24 Ángulo suplementario diseñado por Etoys.

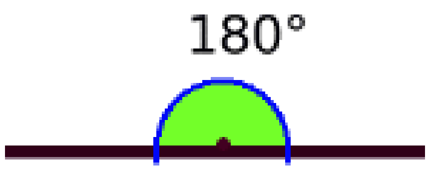
<u>Quinto</u> <u>día:</u> lunes 21 de noviembre de 2011. Horario de 15:30 a 16:30.

Para iniciar con la construcción del triángulo fue necesario conversar con los niños sobre el tema de ángulos y se entregó un folio que contiene información sobre el tema. Se recordó que en el diseño del cuadrado se utilizó un ángulo de 90°; esta vez utilizaron, ángulos suplementarios.

¿Si unimos dos ángulos rectos que forman?

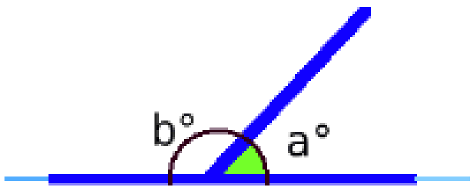
Dos ángulos rectos 

Los niños se callaron y luego respondieron: una recta, ángulo llano, mide 180°

forman un ángulo de 180° 

¿A qué llamamos ángulos suplementarios?

Se apoyaron en la hoja para responder que la suma de dos ángulos es igual a 180°, entonces se dice que son ángulos suplementarios.

De los *ángulos suplementarios* 

se tiene que: $a° + b° = 180°$.

A continuación se explicó que ésta idea es la que tienen que usar para la construcción de un triángulo, partiendo del punto A recorriendo el sentido de la flecha en la Figura 5.25.

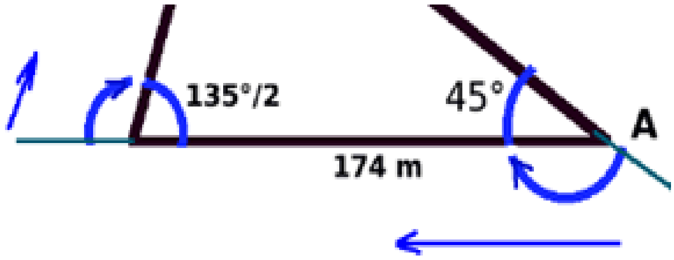


Figura 5.25. Sentido y dirección que debe tomar el coche para graficar el triángulo.

Por lo tanto, es necesario el concepto de ángulos suplementarios, para construir el triángulo (para la Figura 5.24 el coche gira un ángulo hacia la derecha).

En la metodología se ha previsto que durante las sesiones todos los alumnos desarrollen sus proyectos y si había cierta dificultad, el alumno que tiene mayor dominio podría ayudar a otros compañeros. Esto podría haber sucedido mientras se construía los triángulo, sin embargo, como el tema en desarrollo es complejo y el tiempo era limitado, durante la sesión había muchas más preguntas relacionados con diseños de programación de lo que habíamos supuesto y los alumnos más avanzados no pudieron ayudar a los demás.

En el intento de realizar la programación, los alumnos tenían que realizar ciertas operaciones para luego considerar los valores en el mosaico, prueba de sus operaciones se muestra la división que intenta hacer para el ángulo de giro.

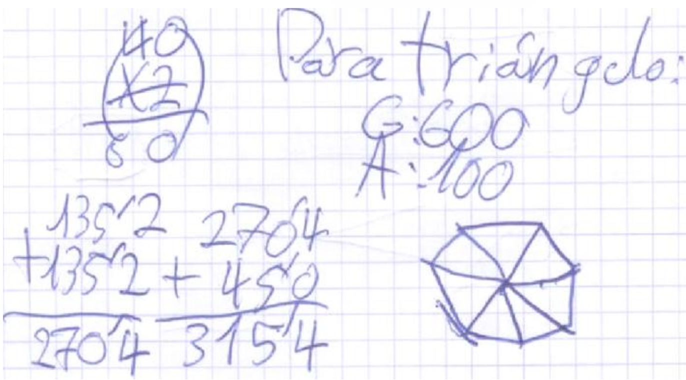


Figura 5.26. Operaciones previas para encontrar los valores de giro para considerar en los mosaicos. **Niño Saúl.**

En el desarrollo de los proyectos se observa que los niños/as diseñaron por ensayo – error, porque presentan diversas formas de programar otorgando valores a los mosaicos y, como resultado, un estudiante logra graficar un triángulo equilátero. En este caso el estudiante intenta reequilibrar la perturbación (tipo laguna), pero permanece la perturbación porque no logra construir el triángulo con las medidas deseadas.

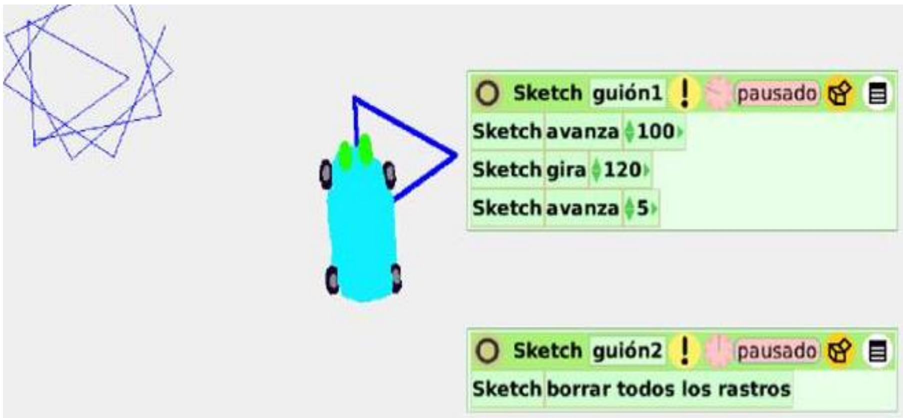


Figura 5.27. Construcción de un triángulo equilátero, en su intento de construir el triángulo de la Casa de las Ciencias. **Niña Raquel.**

Bruner observa que los seres humanos comprender mejor por la estimulación visual y la experiencia de la manipulación de objetos; entonces los niños comprenden las acciones que realizan en el interfaz del ordenador, manipulando los guiones que les permite diseñar, verificar, modificar hasta obtener el resultado, ya que al diseñar puede equivocarse muchas veces hasta obtener el resultado final.

<u>Sexto día</u>: martes 22 de noviembre de 2011. Horario de 10:00 a 11:00

Se inicia la sesión con una pregunta ¿quiénes realizaron el proyecto en su casa? Una estudiante dijo que ya lo había hecho la sesión anterior y luego dos estudiantes dijeron que lo habían desarrollado en su casa. Un estudiante (que según el profesor de aula tenía serias dificultades en su aprendizaje) también dijo que lo hizo en casa; el trabajo que diseñó fue el octágono, que es el perímetro del plano de la Casa de las Ciencias y una programación del triángulo con algunos errores (ver Figura 5.28).

Esta acción del último participante es un acto de emprendimiento, cuestión sumamente importante ya que es considerado un alumno que necesita mucha atención, sin embargo, se va integrando al desarrollo de las sesiones con Squeak Etoys. La Figura 5.28, en el ***guión*** se observa que ha intentado construir el plano (octágono); mientras que en el segundo ***guión*** el estudiante trata de mostrar la programación de un triángulo.

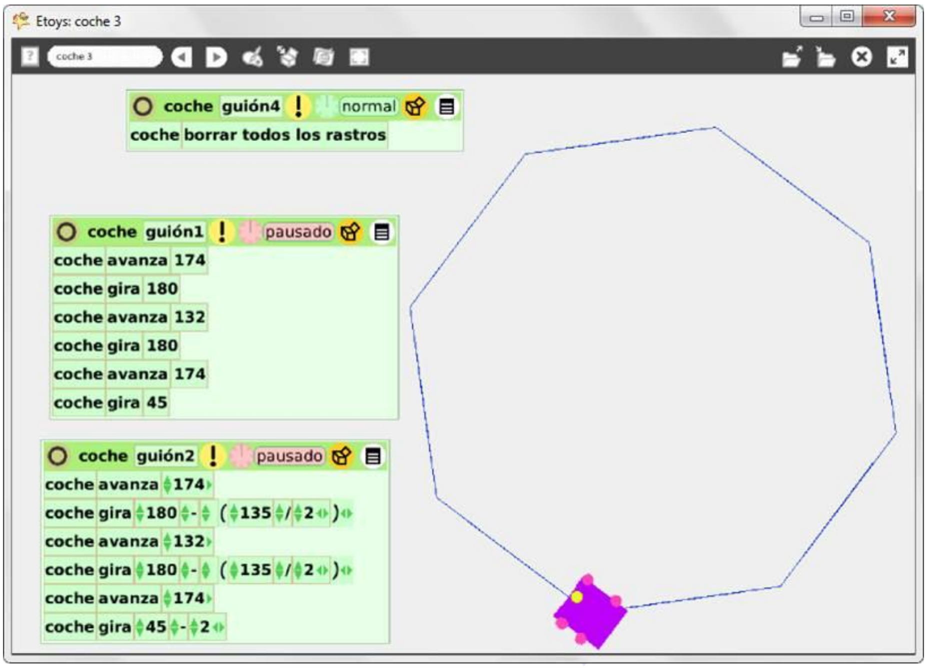


Figura 5.28. El *guión1* muestra la construcción de un octágono de la Casa de las Ciencias y el *guión2* intento de construcción de un triángulo. **Niña Rosa.**

Por otro lado, el estudiante que diseñó su proyecto el día anterior explicó los pasos y guiones que había diseñado, además dijo que “para hacer el octágono hay que colapsar haciendo clic en el botón de la esquina del triángulo. Luego se construye otro guion con el mosaico *gira* 45, y se agrega el guion del triángulo como un mosaico; luego le das varias veces al signo de exclamación ya sale el octágono”. Esta estudiante al explicar con detalle el procedimiento de la construcción del concepto fracción se ubica en el nivel de constructo mental de *esquema* (S.2), porque integra los diferentes sub-esquemas y conceptos matemáticos. Una niña desde su banco dice que lo hizo de otra manera, que primero le dio gira 45, y luego el mosaico del triángulo. Esta programación de la niña varía en el orden que presenta la niña anterior.

A partir de este momento, se explica la actividad a desarrollar durante la sesión: primero, los que no acabaron su programación deberían culminar guiándose de lo que su compañera dejó resuelto en la pizarra; segundo, los que culminaron deben seguir con las actividades propuestas en la Unidad de Aprendizaje (asignar nombres a cada una de las divisiones, luego recortar y colorear), realizar las operaciones para dar respuesta a las preguntas.

Al evaluar las construcciones de los diseños de programación del proyecto en el rediseño de la Casa de las Ciencias se encontraron dos tipos de programaciones.

a) Diseñar el proyecto para construir el triángulo y luego colapsar para reutilizar como un mosaico.

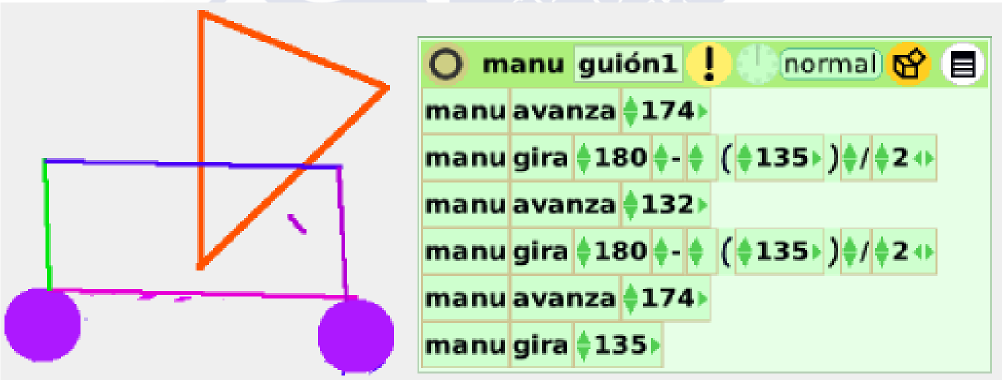


Figura 5.29. Diseño que muestra el guión para construir un triángulo**. Niño Meel**.

Nuevamente diseña otro guión con *gira* 45, y luego agregan el mosaico del triángulo colapsado (guión del triángulo), y finalmente se construye el octágono, a través de sucesivas iteraciones haciendo clic en el signo de exclamación. Es decir, muy similar a poner un sello con un triángulo mientras ésta *gira* 45 (45° de ángulo de giro).

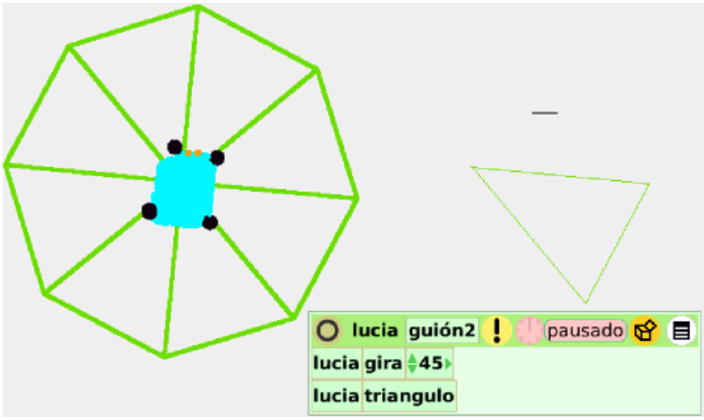


Figura 5.30. Diseño que muestra el guión para construir un triángulo. **Niña Lucy.**

b) Un estudiante diseña un guion en su libreta que permite graficar un triángulo; a esta programación le agrega un mosaico *gira* 45 al guion.

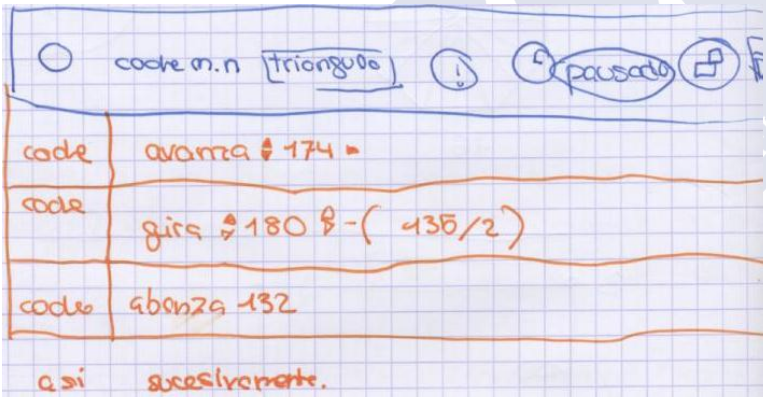


Figura 5.31. Diseño de un guion en papel para programar y construir un triángulo. **Niño Antón**.

La Figura 5.32 muestra la programación y la figura del Diseño del Proyecto final de la Casa de las Ciencias de La Coruña. En efecto, haciendo clic varias veces en el signo de exclamación el estudiante puede graficar el octágono. Con Etoys los niños realizan trabajos no esperados; en consecuencia, “muchos de los procesos del pensamiento matemático avanzado ya se encuentran en el nivel más elemental de las matemáticas” (Tall, 1991, p. 20).

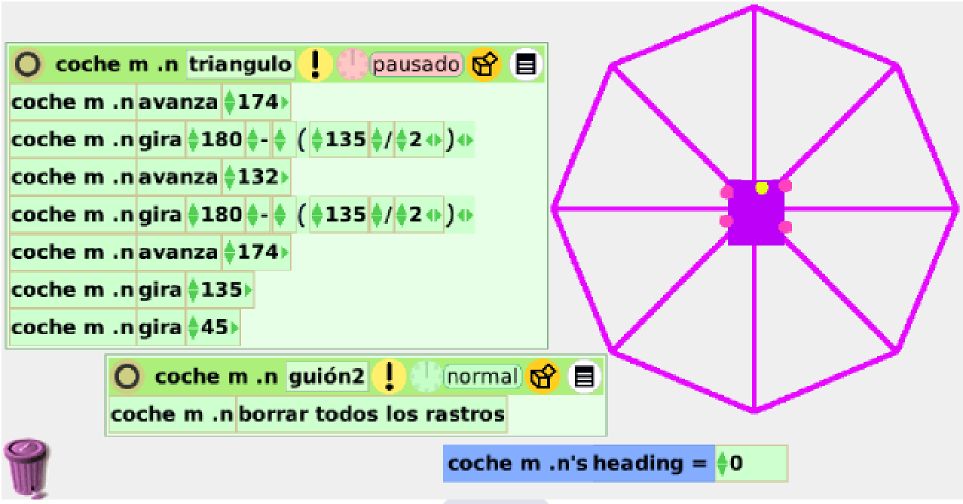


Figura 5.32. Diseño del guión para construir un las divisiones de La Casa de las Ciencias de la Coruña. **Niño Antón**.

El estudiante busca realizar una programación diferente a los demás y logra re-reequilibrar; alcanzando el nivel de constructo mental de *esquema* (S2, S4 y S5), logrando integrar sub-esquemas y objetos matemáticos. Piaget (1990, p. 14) afirma "que en una perspectiva de equilibración una de las fuente del progreso en el desarrollo de los conocimientos ha de buscarse en los desequilibrios como tales, que por sí solos obligan a un sujeto a superar su estado actual y a buscar lo que sea en nuevas direcciones".

Los alumnos/as que lograron construir el rediseño del plano de la casa de las ciencias, se encuentran en el nivel de *coordinación* (Dubinsky, 1991, p. 101), porque utilizan acciones para construir un nuevo proceso u objeto; es decir construyen el triángulo para construir el octágono divido en ocho partes el rediseño del plano de la Casa de las Ciencias. Luego a nivel *inter* los niños/as relacionan ambos objetos matemáticos, tanto los triángulos y la división del plano de la Casa de las Ciencias.

<u>Sétimo día</u>: miércoles 23 de noviembre de 2011. Horario de 10:00 a 11:00

La sesión continúa con el diseño de los proyectos, renombrar y colorear los triángulos que aparecen en las divisiones de La Casa de las Ciencias. Se les recomienda a los estudiantes que recorten las divisiones hechas, y utilizar la paleta de pintar para colorear.

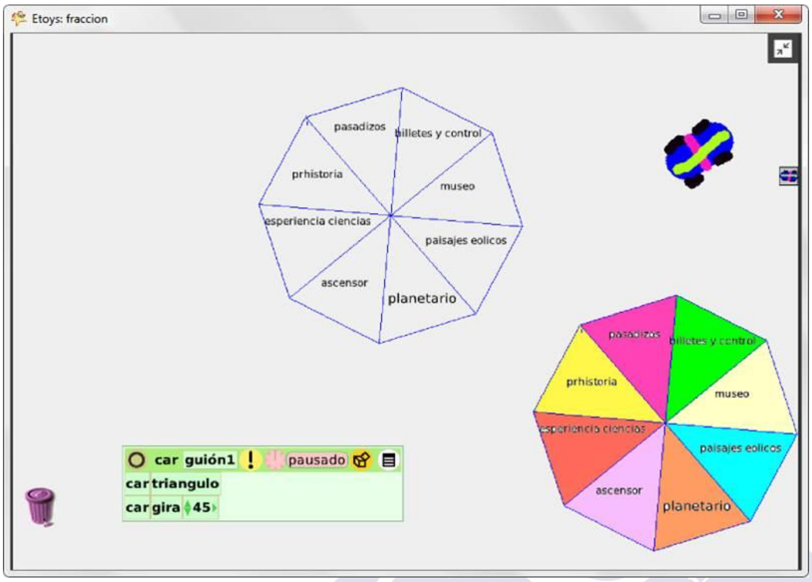


***Figura* 5.33.** El plano redistribuido, renombrado sus divisiones y coloreado de La Casa de las Ciencias de La Coruña. **Niño Paúl.**

Mientras tanto, algunos que todavía no lo hacen se ven muy preocupados. Sin embargo, algunos de sus compañeros/as les brindan ayuda, dándole ciertas indicaciones. Ésta es una especie de "andamiaje" proceso que permite ayudar a un niño o un principiante a resolver un problema, aunque esencialmente es el adulto el que tendría que "controlar" estos elementos de la tarea (Wood, Bruner, & Ross, 1976); y para Vigotsky, implica que el niño/a ubicarse en el nivel de desarrollo potencial, porque la resolución del problema (diseño de programación) debe ser bajo la guía de un adulto o en colaboración de un compañero capaz de realizar el apoyo a sus compañeros (quienes se encuentran en la ZDP) (Vigotsky, 1979), dándole algunas pistas para que logren culminar sus diseños de proyectos.

En la unidad didáctica aparece una serie de preguntas relacionadas a las operaciones con fracciones. Los estudiantes inician sus actividades de cortar y colorear los recortes de las fracciones de acuerdo a las preguntas. Es en este momento la maestra de aula, al ver estos resultados expresa: "*recién se vislumbra el trabajo*"; porque en ese momento podía ver con claridad los resultados.

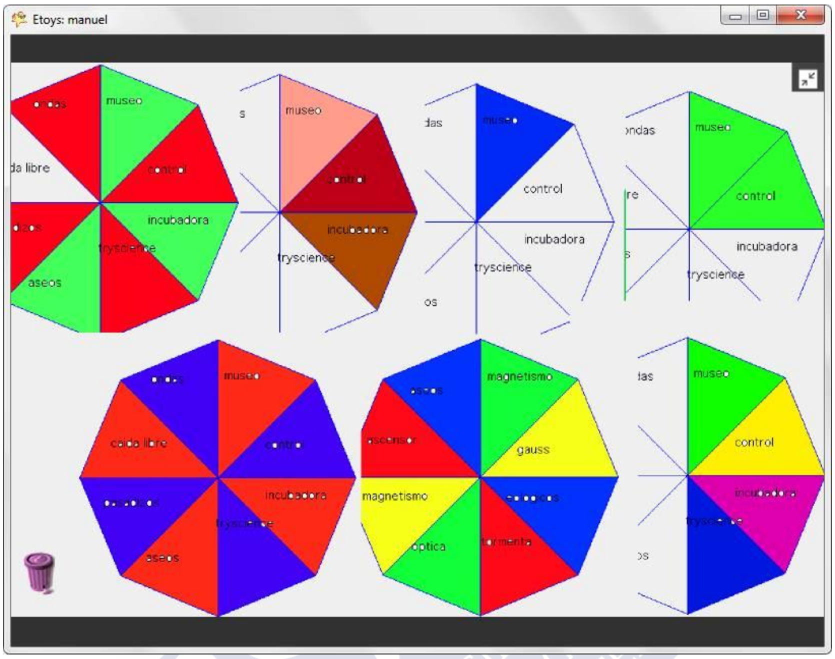


Figura 5.34. El plano de La Casa de las Ciencias de La Coruña, expresado en términos de fracciones de 7/8, 3/8, 1/8, 2/8 y 4/8. **Niño Juan.**

<u>Octavo día</u>: viernes 25 de noviembre de 2011. Horario de 12:30 a 13:20

Antes de iniciar la sesión se realizaron comentarios sobre los diseños realizados, temas y conceptos aprendidos. Los alumnos participaron con sus opiniones, se mencionan las siguientes:

Meel: Hemos aprendido a dibujar fracciones como figuras, solo que, sin los números; presentándolo con Etoys para comprender mejor.

Karen: Hemos aprendido a hacer octógono con Etoys y a saber cómo es la Casa de las Ciencias.

Antón: he aprendido a nombrar fracciones, hacer un octágono, lo divides en triángulos y éstas son como fracciones, luego escribes su nombre y nombrar partes.

Lucy: Hemos aprendido a fraccionar ángulos, porque hemos aprendido a construir un octágono utilizando triángulos. Además las figuras se pueden distribuir en triángulos.

Juan: hemos aprendido a medir las figuras geométricas.

Jorge: Que coloreando se hace fracciones.

Max: hemos aprendido a utilizar Etoys, más de lo que nos había enseñado en los proyectos anteriores.

Carlos: Hemos aprendido a usar mejor Etoys, yo no sabía que servía para repartir una figura en fracciones. También no sabía cómo poner los nombres a las cosas.

Carmen: Hemos aprendido a ponerle nombre y a ocultar guiones y volver a utilizar; también he aprendido a usar correctamente Etoys

Estas respuestas muestran que los niños/as aprendieron conceptos reales y verificables; sin embargo, existen conceptos que ellos no tienen en cuenta o todavía no han reconocido, como por ejemplos, ángulos suplementarios, ángulos rectos y números enteros.

La Figura 5.35 muestra las anotaciones en la libreta de una estudiante acerca de los conceptos aprendidos durante las sesiones.

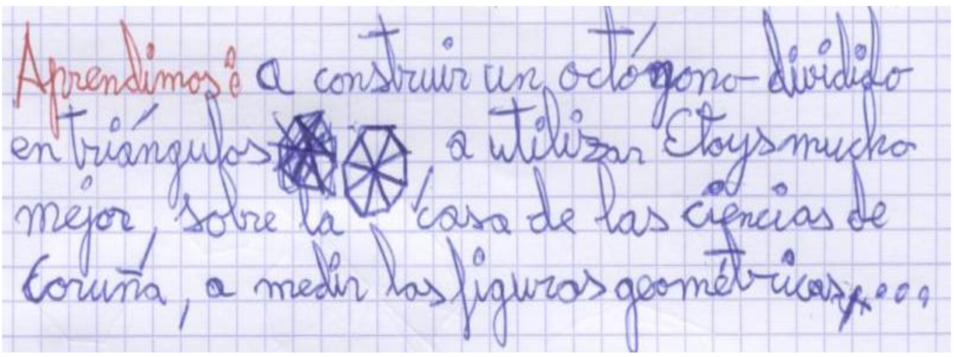


Figura 5.35. Anotación de los conceptos aprendidos en las sesiones. **Niña Karen.**

Cuando analizamos cada una de las respuestas de los estudiantes, encontramos diversas opiniones pero todas centradas en la construcción y el aprendizaje del concepto fracción. Esta última reunión, es importante para darle solidez y fortalecer los conceptos aprendidos durante el proceso de construcción del concepto; asimismo, fijar los diversos conceptos aprendidos que los niños han tratado de resumir.

Además hay ciertos componentes que es necesario discutir como es el caso de las medidas, la triangulación de figuras geométricas, sistema o marco referencia y el uso de Etoys. Un concepto importante son las medidas de una figura geométrica, porque al construir una gráfica con Etoys se tiene que considerar en el diseño todos los elementos o conceptos necesarios para la construcción del guion de dicha figura. Aparece la idea de medida e incluye tanto la capacidad de apreciar la conservación de la longitud como la de agrupar cambios de posición y dar a conocer en una estructura especial coordinada (Holloway, 1969; Piaget et al., 1981). El concepto de medida estuvo presente en el diseño de las programaciones con Etoys, y permitió fijar el aprendizaje de alto nivel, porque no se aíslan los contenidos o conceptos como en una presentación clásica.

La última actividad cuyo propósito fue construir los contenedores de basura de la Casa de las Ciencias. El diseño de los contenedores permitiría construir el concepto de fracciones mixtas y sus operaciones; sin embargo, no se llegó concluir por la falta de tiempo, porque este tipo de actividades no se puede realizar con los diseños curriculares clásicos. Mostramos los pasajes iniciales de la construcción de los contenedores.

Se permitió por un espacio de ocho minutos aproximadamente para que intentaran a realizar el diseño o tener alguna idea. Entonces, se solicitó si alguien tenía alguna propuesta; y un estudiante dijo que sería como la construcción del cuadrado (Diseño de Proyecto del cuadrado) y luego girarle 45 grados. Fue una hipótesis muy cercana a la solución, porque a través de rectángulos se diseña los contenedores. Para facilitar el trabajo se le presentó un rectángulo dividido en cinco (5) partes en la pizarra con sus medidas (150 pxs de largo y 50 pxs de alto), para que los niños pudieran trabajar con los valores, porque les parece difícil manipular los valores en los mosaicos, tal vez era necesario considerar las medidas de los contenedores. Con las indicaciones dadas los niños iniciaron la programación.

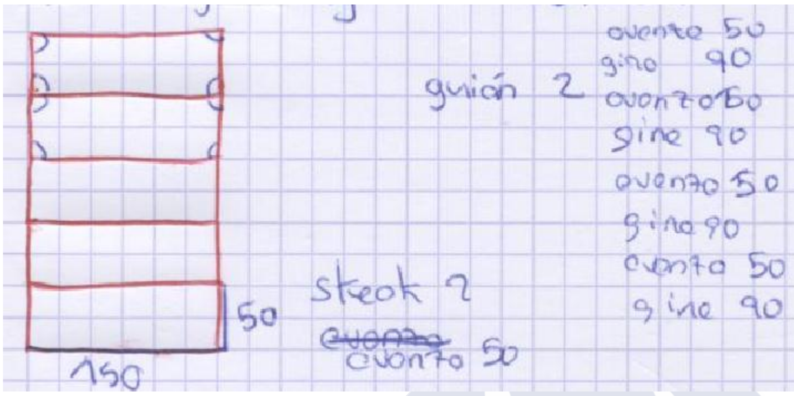


Figura 5.36. Dibujo del contenedor y sus posibles mosaicos para el guion. **Niña Liz**.

Frente al reto, cada estudiante diseña su proyecto de distinta manera, algunos ni siquiera lo escriben en sus libretas pese a que le se ha advertido. La Figura 5.36 muestra un gráfico del contenedor a diseñarse, pueden apreciarse en el lado derecho, los mosaicos para programar el guión.

Ahora bien, con respecto a las programaciones de ésta sesión, muchos niños no habían logrado realizar el diseño. El proyecto propuesto es nuevo y se debe entender que cualquier programación se realiza por ensayo-error; es decir, hay que probar y ver donde se tuvo el error y luego corregir. En la siguiente figura se observa que el estudiante ha avanzado en construir su rectángulo pero no se percata el cambio que realizó en el mosaico avanza50 (no ejecutó, quedo en rojo), luego hizo clic en el signo de exclamación y obtuvo un cuadrado divido en seis.

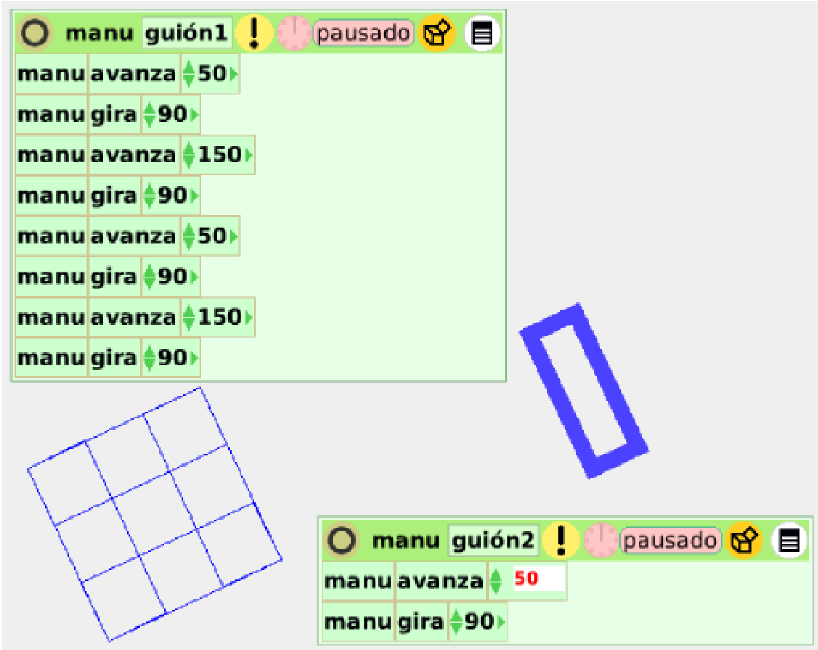


Figura 5.37. Construcción de cuadrado dividido en 6 partes; diseño del contenedor por ensayo – error. **Niña Rosa.**

Luego, otra estudiante que no tuvo mayor participación en las sesiones anteriores pudo diseñar y ejecutar la programación para construir el contenedor (ver Figura 5.38). Cuando un estudiante ya tiene cierta noción de la secuencia en el diseño de una figura geométrica, es fácil diseñar otra figura geométrica por analogía a la anterior, ya que guarda similitud en la construcción del guión.

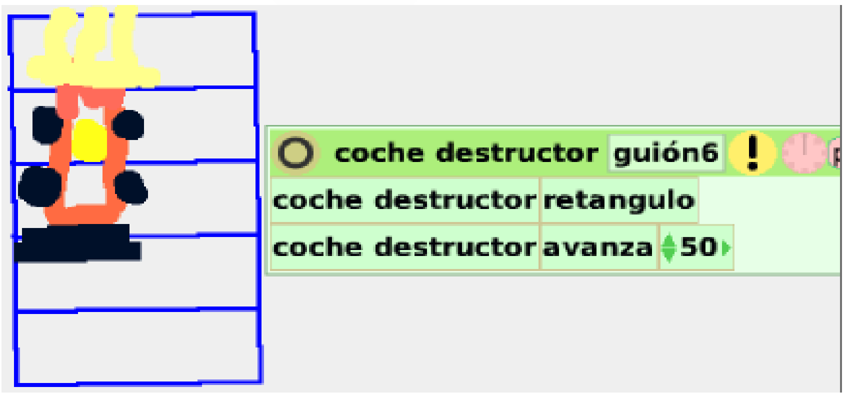


Figura 5.38. Construcción del contenedor de basura. **Niño Carlos**.

5.1.2.1 Comentarios sobre los resultados globales

Hasta aquí se ha seguido la secuencia del proceso de construcción del concepto fracción. Cada estudiante ha podido diseñar su proyecto de programación pasando desde el nivel inferior de *acción*, donde el concepto fracción es visto como algo inerte, donde los niños repiten lo aprendido como algo externo y cuya construcción es inmediata; luego en nivel *proceso* inician la construcción del concepto dando vida al proceso del aprendizaje, al utilizar Etoys para diseñar objetos matemáticos previos a la construcción del concepto de fracción, interiorizando finalmente.

En el nivel de *objeto*, los niños/as diseñan guiones (programación mediante objetos) para incorporar objetos matemáticos mucho más elaborados como el ángulo, el cuadrado y el triángulo. Finalmente, en la culminación del rediseño de La Casa de las Ciencias, mediante la agrupación de triángulos que expresan las fracciones, los niños alcanzan el nivel de *esquema*. Porque para llegar a construir las divisiones tuvieron que utilizar objetivamente, desde los elementos u objetos matemáticos muy elementales, hasta los objetos muy elaborados, como el triángulo (cada objeto matemáticos es un esquema) mediante la programación. Además para llegar a este nivel los niños/as tuvieron que pasar por equilibraciones progresivas continuas (Piaget, 1990).

Es importante remarcar el encapsulamiento que realizaron los niños/as. Para Dubinsky (1991, p. 101) la encapsulación es la conversión de un *proceso* (dinámico) en un *objeto* (estático) cognitivo. Cada estudiante, al diseñar un proyecto, pasa por una de las formas de abstracción reflexiva del pensamiento matemático avanzado (que es el encapsulamiento en cada etapa de construcción de sub-esquemas, en el momento de pasar del nivel de *proceso* al nivel de *objeto*). Comienzan con el diseño de una recta y un ángulo que son pequeños sub-esquemas del nivel básico, luego un cuadrado y un triángulo, hasta finalmente el diseño de proyecto del plano de la Casa de las Ciencias. Luego, se denota que finalizan con el nivel de esquema donde los niños/as convergen concluyendo acerca del concepto de fracción como la agrupación de las partes para formar el todo (la redistribución del plano de la Casa de las Ciencias); aquí una parte del octágono es un triángulo. Asimismo al finalizar, ofrecieron solidez a los diferentes conceptos aprendidos durante la experiencia vivida en el laboratorio.

Con respecto a la triada de Piaget Intra-Inter-Trans, podemos decir que en la etapa *Intra*, los niños/as, generalmente al inicio, se centraron en un solo objeto aislado de otras acciones. En este caso se centraron en la construcción el concepto de fracción enfocados en la presentación clásica, aunque al diseñar con Etoys, ésta permite dinamismo y versatilidad, de tal manera que los niños optan por tomar múltiples opciones para poder diseñar y salir de las dificultades.

En cuanto a la etapa *Inter*, es el nivel que alcanzaron la mayoría de los niños/as al diseñar y completar la redistribución del plano de la Casa de las Ciencias; porque en esta etapa los estudiantes relacionan los diferentes momentos del diseño del proyecto: acciones, procesos, objetos y esquemas. Por ejemplo, la relación entre acción y esquema; en este caso a nivel de acción los estudiantes manipulan los objetos mentales de ángulo y recta para construir un triángulo, y con dichos triángulos diseñan el octágono que es la redistribución de la Casa de las Ciencias; en esta construcción los niños/as diferencian los dos momentos de acción y esquema.

En cuanto a la etapa de *Trans*, los niños/as logran construir una estructura completa de las relaciones descubiertas en la etapa Inter; y son pocos los que lograron explicar que el concepto de fracción es la unión de las partes para construir el todo, como se muestra el diseño del proyecto de la Casa de las Ciencias. En este caso los niños/as a este nivel son capaces de obtener un nuevo proceso invirtiendo el proceso interiorizado, que Piaget denomino reversibilidad (Meel, 2003).

En la Tabla 5.2., presentamos los resultados. Son producto de calificar los diseños de los proyectos que fueron grabados en sus lápices de memoria.

Tabla 5.2. *Proyectos desarrollados de la unidad de fracciones por los alumnos del 5^{to} de primaria.*

Categoría	Total	Diseñaron los proyectos														
		del cuadrado			del triángulo			del octágono			de las operaciones			de los contenedores		
		Si	Inc	No	Si	Inc	No	Si	Inc	No	Si	Inc	No	Si	Inc	No
cant	25	11	4	10	22	0	3	19	0	6	7	3	15	3	12	10
%	100	44	16	40	88	0	12	76	0	24	28	12	60	12	48	40

Si: Diseñaron los proyectos   Inc: Dejaron inconcluso   No: no diseñaron los proyectos

De la Tabla 5.2 se puede extraer los siguientes comentarios. Los cuadros muestran la secuencia desde el inicio de los proyectos hasta la finalización. Se comienza con el diseño del proyecto del cuadrado y se finaliza con el diseño del proyecto de los contenedores. Los resultados más llamativos se aprecian con números en negrita. En el diseño del cuadrado, de los 25 estudiantes, 11 lograron diseñar la programación del cuadrado, y 4 estudiantes se quedaron en la mitad.

Un alto porcentaje de los estudiantes lograron el diseño del triángulo, es decir 22 de los 25. Sin embargo, sin haber diseñado el triángulo, algunos lograron diseñar el octágono, como consecuencia, 19 estudiantes diseñaron la distribución del plano de la Casa de las Ciencias. En cuanto a las operaciones, pocos alumnos lograron este diseño, creemos que por el factor tiempo, ya que algunos requieren más tiempo para el logro de determinadas operaciones. Quienes lo lograron fueron los mismos alumnos que diseñaron el triángulo y el octágono. Finalmente, solo 3 alumnos lograron la construcción de los contenedores en un tiempo aproximado de 20 minutos que es demasiado corto para los niños/as (pero fue el tiempo escolar que se nos asignó para esta tarea).

Los niños elaboraron sus diseños de los proyectos de programación para la construcción del concepto fracción, pasando por diferentes etapas en el uso de Etoys, mostrando los diferentes niveles de constructos mentales al momento de desarrollar las programaciones, pese a los factores externos que pudo afectar el proceso.

5.2 Estudio de casos de tres estudiantes

En esta sección presentamos el estudio realizado a tres estudiantes, que fueron seleccionados de acuerdo al nivel de rendimiento académico en matemáticas. Se solicitó al profesor "B" de aula que señalara, a su juicio, alumnos en función de su rendimiento académico: tres niveles. Reservamos los nombres de estos estudiantes y designaremos con los seudónimos de Jans, Kris y Alice. Iniciamos con el estudio del alumno que tiene menos nivel de rendimiento en la clase de la maestra y culminaremos con el que tiene un alto nivel de rendimiento.

5.2.1 Evaluación a las experiencias de Jans

Jans es un estudiante normal como cualquiera de sus compañeros, y según la maestra es el que tiene un promedio muy bajo. Sin embargo, al haberse ubicado en el uso de los ordenadores por orden alfabético Jans hace pareja con Kris (que es parte del estudio y tiene un nivel de rendimiento medio) para realizar los trabajos en equipo.

Primer día: Se inicia el día lunes 14 de noviembre de 2011. Horario de 15:30 a 16:30.

A la pregunta hecha en la sesión ¿qué entiende por el concepto de fracción?, esta es su respuesta.

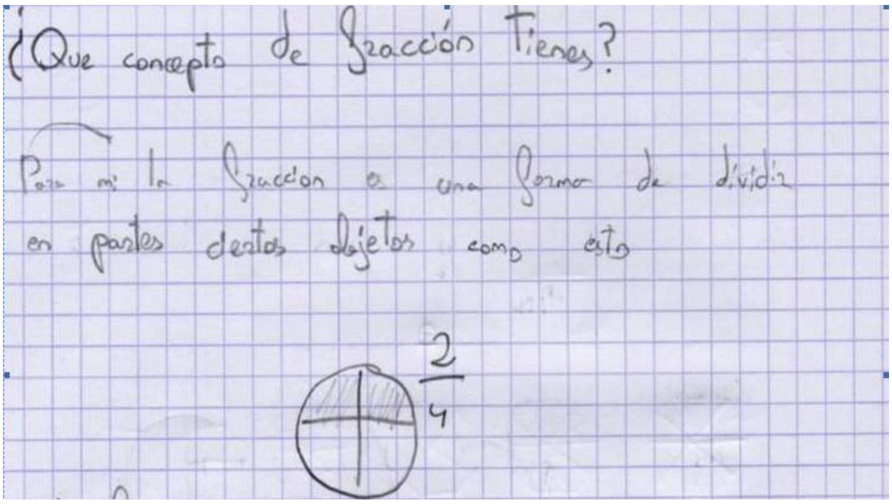
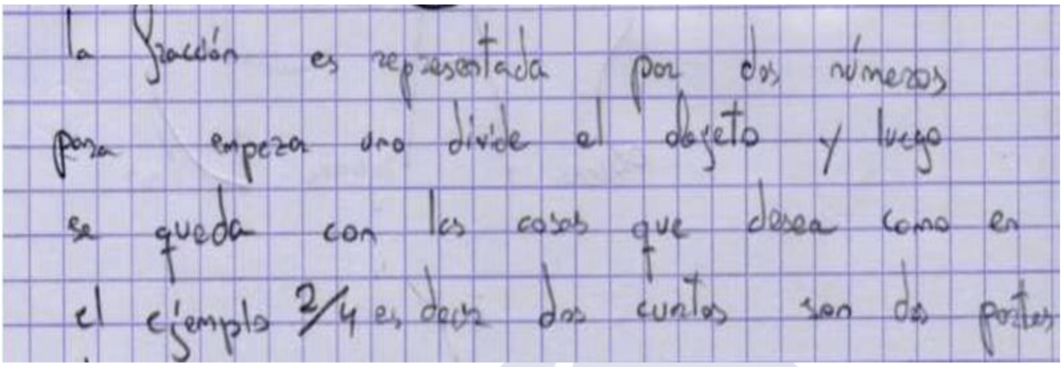


Figura 5.39. Respuesta de **Jans** sobre el concepto de fracción.

Su respuesta a la pregunta le ubica en el nivel de acción de acuerdo a la descomposición genética (A2 y A5), solamente escribe tal como recuerda haber aprendido en sus clases del 4to grado o haber leído en los libros de texto, las cuales tienen las presentaciones clásicas de divisiones de tartas.



la fracción es representada por dos números para empeza uno divide el objeto y luego se queda con las cosas que desea como en el ejemplo 2/4 es decir dos cuartos son dos partes

Figura 5.40. Respuesta de **Jans**, que la fracción está representada por dos números.

Es necesario observar con detenimiento la respuesta de Jans, cuando dice que “la fracción es representada por dos números”. Esta respuesta es muy compleja, porque es difícil de concebir la notación del concepto matemático de fracción, dado que muchos autores definen como: “la división, expresa el número de partes iguales de una unidad”, “la fracción está representada por dos términos”, “la fracción es el cociente de dos números”, “la fracción es un número escrito de la forma $\frac{a}{b}$”, “la fracción es la división de algo en partes”, “la fracción es un número escrito uno sobre otro”, “la fracción son porciones de la unidad”, “la fracción tiene dos componentes: numerador y denominador”, así existen muchas definiciones difíciles de comprender.

Asimismo, en las notaciones simbólicas difieren de acuerdo a cada autor, por ejemplo las fracciones: $\frac{3}{4}$, $^{3}\!/_{4}$, ; así como en la división los símbolos que se utilizan $3 \div 4$, $3\,\underline{|4}$ o expresado como división larga $3\overline{)4}$ y los libros de textos escolares españoles escriben con $3{:}4$, son expresiones que indican el mismo valor, que al final acaban confundiendo a los niños/as. En este sentido los niños solo ven jeroglíficos mientras el profesor trata de enseñar las expresiones que son fracciones; este fenómeno ocurre también en otros conceptos de las matemáticas. Por lo tanto, es difícil que un niño comprenda al mismo tiempo las distintas formas de escribir.

Segundo día: martes 15 de noviembre de 2011. Horario de 10:00 a 11:00

En cuanto a la división del plano de la Casa de las Ciencias, intentó hacer conjeturas sobre la división y generalizar centrándose en los números pares, luego acepta que el plano de la Casa de las Ciencias tiene una forma octagonal.

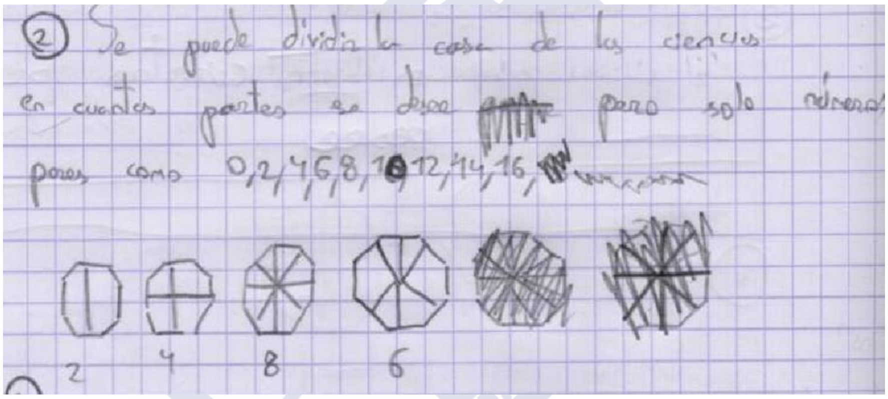


Figura 5.41. Intento de posibles divisiones y su generalización por **Jans**.

En cuanto a las programaciones con Etoys, toma nota en su libreta para luego diseñar. De la propuesta realizada, el octágono, el cuadrado y el triángulo son correctos. Pues con estos guiones el estudiante pudo construir los polígonos mencionados a excepción del círculo y el pentágono. Pero, debemos tener cuenta que esos guiones no realizan las divisiones del octágono, sino, solamente expresan los guiones para graficar los polígonos.

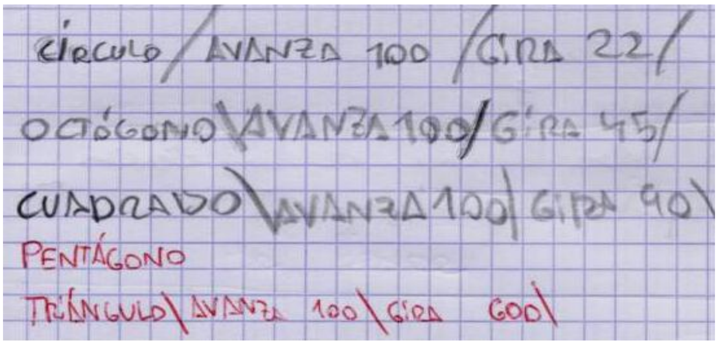


***Figura** 5.42*. Guiones escritos antes de iniciar las sesiones de programación de **Jans.**

Hasta el momento solamente dibujó el coche, intento de colocar algunos mosaicos de valor al mundo. Su concepción de espacio es tridimensional, porque la figura muestra visto el coche desde el espacio.

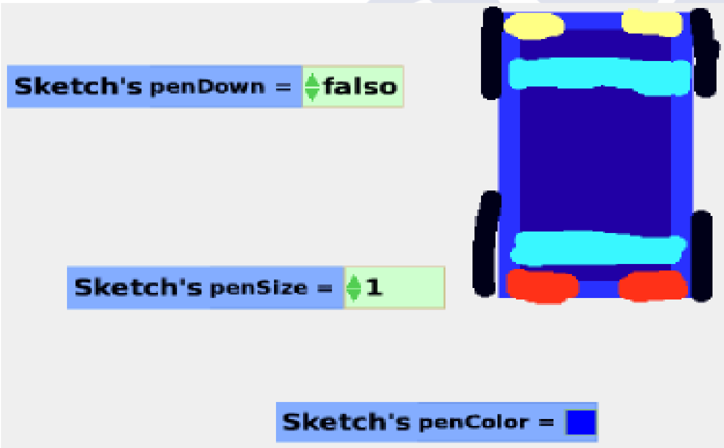
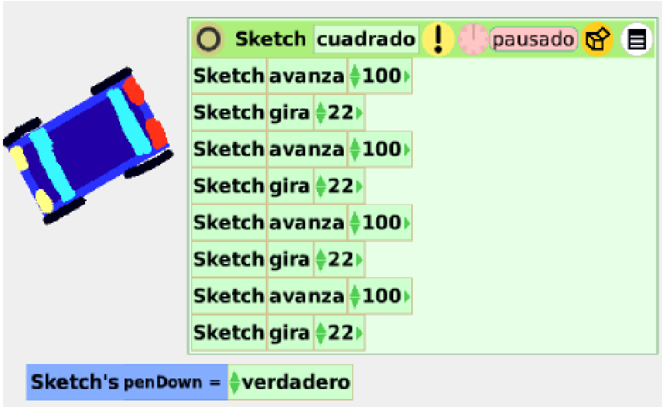


Figura 5.43. Dibujo de un coche sin ninguna programación de **Jans**.

El miércoles 16 del tercer día no asistió a la sesión, los motivos se desconoce.

Cuarto día: viernes 18 de noviembre de 2011. Horario de 12:30 a 13:20

El cuarto día cuando se realiza la revisión de la sesión anterior, Jans no presenta ningún diseño hecho en su libreta. Pero intenta hacer una programación para dibujar el cuadrado, aunque no hace el guión tal como hizo en su libreta (ver Figura 5.42).



Error en gira22, debe ser gira90

Error en gira22, debe ser gira90

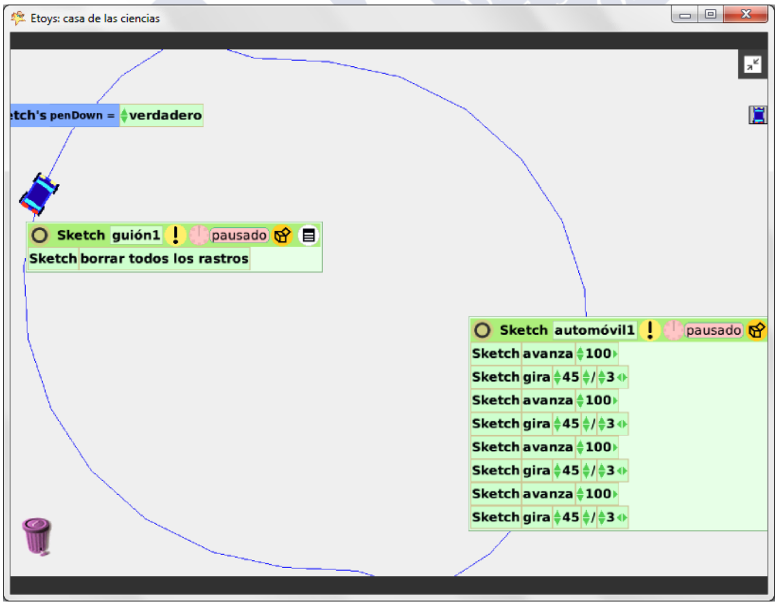
Error en gira22, debe ser gira90

Error en gira22, debe ser gira90

Figura 5.44 Programación de un cuadrado, con el valor del ángulo equivocado de **Jans**

Quinto día: Se inicia el día lunes 21 de noviembre de 2011. Horario de 15:30 a 16:30.

Parece que **Jans** lleva retrasado su información por no haber asistido un día, consecuencia de ello tiene dificultades en la construcción del triángulo. Tiene la información del ángulo central de 45°, es decir un ángulo del triángulo. Al diseñar piensa que al dividir 45°/3 se construye el triángulo.



Error en gira45/3

Figura 5.45. Diseño de un guión del triángulo con error en el mosaico gira de **Jans**.

El quinto día participa en el diseño del triángulo, sin embargo tiene ciertas dificultades; por lo tanto, consulta a su compañera de trabajo, ella hace el papel de mediador y es más capaz para ayudar con ciertas indicaciones (Vigotsky, 1979, p. 133), luego de algunos minutos logra el diseño y muestra su alegría con un abrazo a su compañera. Este tipo de actitudes, donde los niños disfrutan de sus acciones es difícil lograr con las clases tradicionales, donde el centro de atención es el profesor y existe la verticalidad del proceso de enseñanza–aprendizaje (profesor–estudiante).

Al revisar el material guardado referente al logro de Jans, sólo existe un archivo de la experiencia anterior, significa que no logró guardarlo.

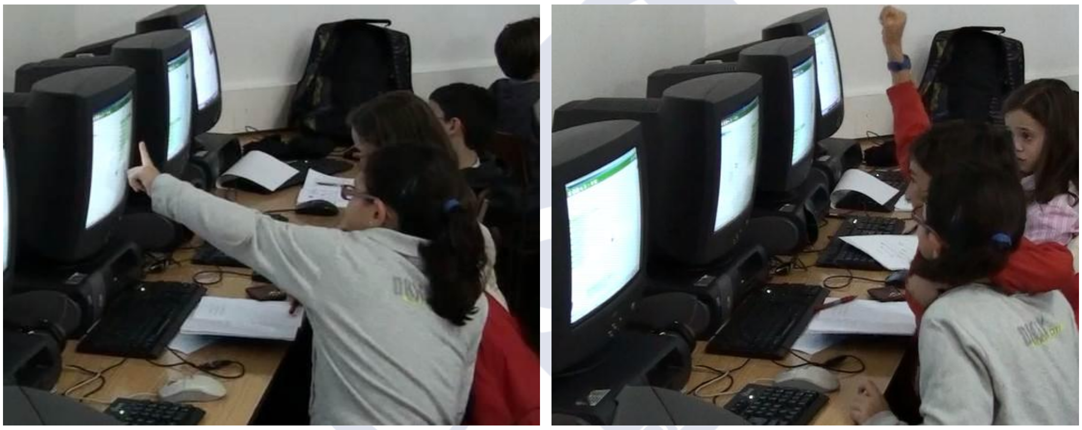


Figura 5.46 La primera fotografía muestra que su compañera le da ciertas instrucciones (aprox. 8 min, 40s de iniciada la sesión), la segunda fotografía muestra la alegría de Jans cuando lograr ejecutar su diseño (aprox. 12 min, 28 s).

Sexto día: martes 22 de noviembre de 2011. Horario de 10:00 a 11:00

Es probable que el sexto día haya construido el triángulo, porque los archivos llevan las fechas que no concuerdan con los días desarrollados.

Sétimo día: miércoles 23 de noviembre de 2011. Horario de 10:00 a 11:00

Al revisar el último trabajo guardado por Jans sobre la redistribución del plano de la Casa de las Ciencias, se observa que realizó la construcción del plano con sus divisiones respectivas, y cada división está etiquetada (ver Figura 5.47). Aunque el guión que diseñó se aparece al de sus compañeros vecinos; significa que el trabajo en equipo ayudó a diseñar el proyecto de su programación.

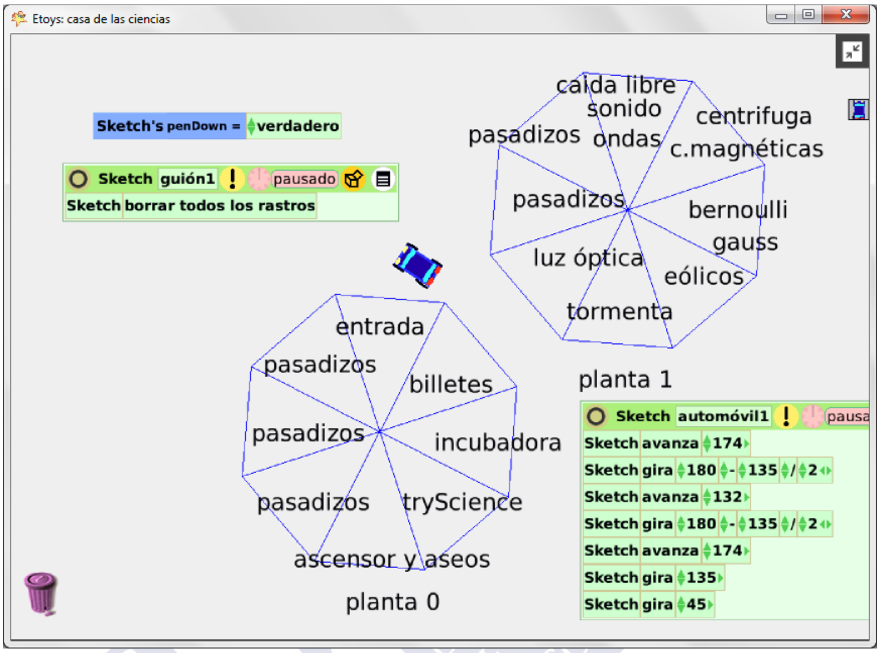
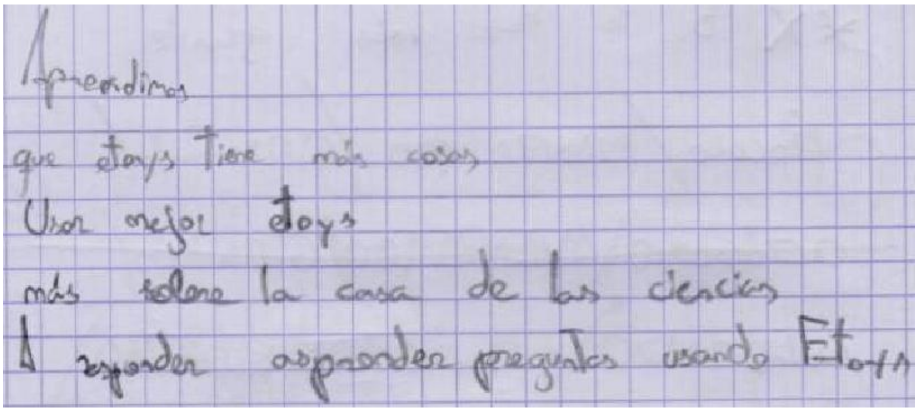


Figura 5.47. Diseño del plano de la Casa de las Ciencias y guión respectivo de **Jans.**

Octavo día: viernes 25 de noviembre de 2011. Horario de 12:30 a 13:20

Del último día, Jans presenta su libreta con algunas anotaciones sobre el consolidado del aprendizaje.



Aprendimos
que etoys tiene más cosas
Usar mejor etoys
más sobre la casa de las ciencias
A reponder asprender pregutas usando Etoys

Figura 5.48 Conceptos aprendidos al diseñar con Etoys de **Jans**

Jans no anotó los conceptos reales que ha aprendido, sus anotaciones están relacionados con el uso de Etoys, y una sola respuesta respecto a la Casa de las Ciencias.

Resumen del caso de Jans

***Programación con Etoys*.** Durante el proceso del diseño de sus proyectos con Squeak Etoys desde el inicio hasta llegar el sétimo día, se aprecia que no tenía cierto conocimiento básico de Squeak Etoys o tuvo dificultades en comprender bien Squeak Etoys en el proyecto anterior; prueba de ello son las programaciones incompletas o algunos con errores en los mosaicos. Por esta razón, desde el inicio no pudo diseñar, tal como ocurre el segundo día donde se inicia la programación. Por ejemplo, falta el diseño del triángulo, y el diseño del cuadrado están incorrectos; sin embargo la grabación de video muestra el ánimo que pone al desarrollar sus diseños de programación.

Al tener un lenguaje de programación asequible para su edad, y siendo esta el andamio que media la construcción de sus diseños, Jans logró desarrollar su proyecto, logrando rediseñar el plano. Por otra parte, añadimos la influencia de tres factores, una que es el lenguaje como un medio de comunicación social que permitió compartir dialogo con el equipo de trabajo y las dos otras funciones que son el DZP y el nivel de desarrollo real; que para Vigotsky estas dos funciones despierta una serie de procesos evolutivos internos capaces de operar solo cuando el niño está en interacción con las personas de su entorno y en cooperación con alguien semejante.

Fracciones. Se aprecia en las figuras 5.39 y 5.40, que el niño ha escrito con mucha facilidad el concepto o idea de fracción, porque lo sabe de memoria, además dibuja una representación de una fracción y escribe el valor respectivo correctamente. También cuando se le solicitó dividir el octágono en varias partes (Figura 5.41), y pudo realizar conjeturas hasta intentar generalizar. Esto implica que Jans conoce los conceptos matemáticos, pero cuando realiza actividades computacionales que involucran la participación de otros elementos así como la creatividad para la creación y diseño de proyectos con Etoys, tiene limitaciones.

Es así que, durante el desarrollo de las experiencias no ha logrado diseñar su proyecto, la programación muestra las limitaciones por las que atravesó, así como la falta de la construcción del triángulo, que es una clave para la construcción del plano. Sin embargo, el trabajo en equipo y el entusiasmo hicieron que diseñara finalmente el plano de la Casa de las Ciencias, es decir el concepto de fracción fue construido con cierto grado de dificultad.

Al escribir en su libreta no muestra los conceptos aprendidos, esto podría significar que no ha entendido por completo los elementos (recta, ángulos, traslación, rotación, medida, sistemas de referencia) del concepto, así como el proceso de su construcción. Consideramos que no es incapacidad de Jans, sino de las limitaciones de tiempo con la que hemos trabajado (solamente de 8 horas para todo el proceso), a diferencia de los trabajos realizados por los niños de Yasmin Kafai (1995) que desarrollaron en 6 meses y con dominio en la programación de LOGO.

En tal sentido, el hecho de haber concluido con el rediseño del plano de la Casa de las Ciencias, según Piaget, Jans no ha logrado una equilibración; es decir, ha logrado asimilar, pero faltaría la acomodación en el sentido real, siendo ésta la etapa de procesos muy complejos.

5.2.2 Evaluación a las experiencias de Kris

Kris fue seleccionada porque el profesor "B" la considera como una alumna con un rendimiento regular en todas las materias. En cuanto al dominio de Squeak Etoys, inicialmente tiene un conocimiento básico como la mayoría de sus compañeros. Lo resaltante de Kris es su sistema de trabajo, es muy ordenada, tomó notas en sus libretas llevando toda secuencia con excepción del 5to día que no aparece. Asimismo, llevó en orden su carpeta de proyectos (archivos digitales). Estos dos elementos nos permitieron realizar una evaluación casi completa del proceso vivido en las experiencias.

Primer día: Se inicia el día lunes 14 de noviembre de 2011. Horario de 15:30 a 16:30.

A la pregunta hecha en la sesión ¿qué entiende por el concepto de fracción?, la respuesta se centra en la idea de: quitar, separar, retirar y coger una parte del total. La idea de Kris está relacionada con la actividad diaria que se enmarca dentro de las explicaciones comunes de los libros.

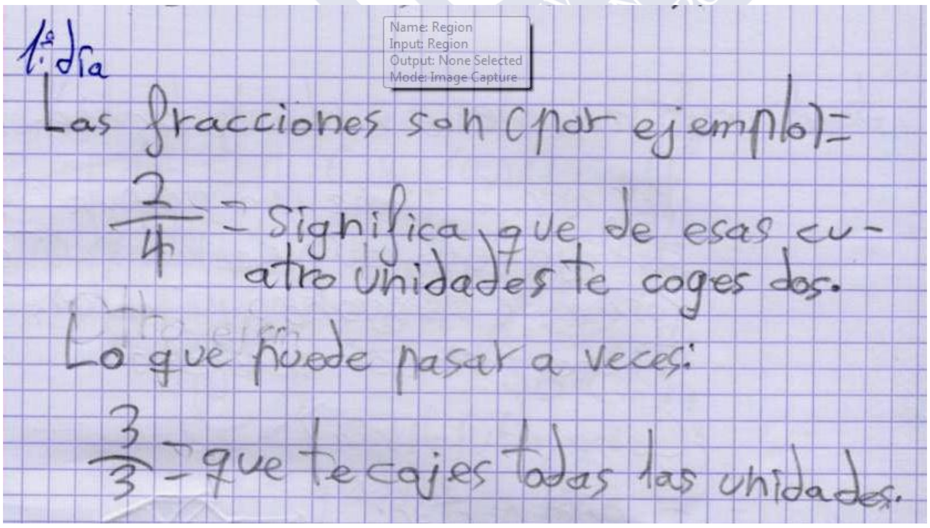


Figura 5.49 Concepto de **Kris** respecto a la fracción.

En cuanto a la hipótesis de la forma geométrica de las Casa de las Ciencias considera que por la parte superior tiene una cúpula cuya forma es circular, en cambio en la parte inferior es diferente porque acaba en vértices (ella lo llama puntas), la figura tiene una forma de hexágono (corregido con octágono). La modificación se debe a que sus compañeros dijeron que es un octágono o luego de la revisión, lo ha corregido.

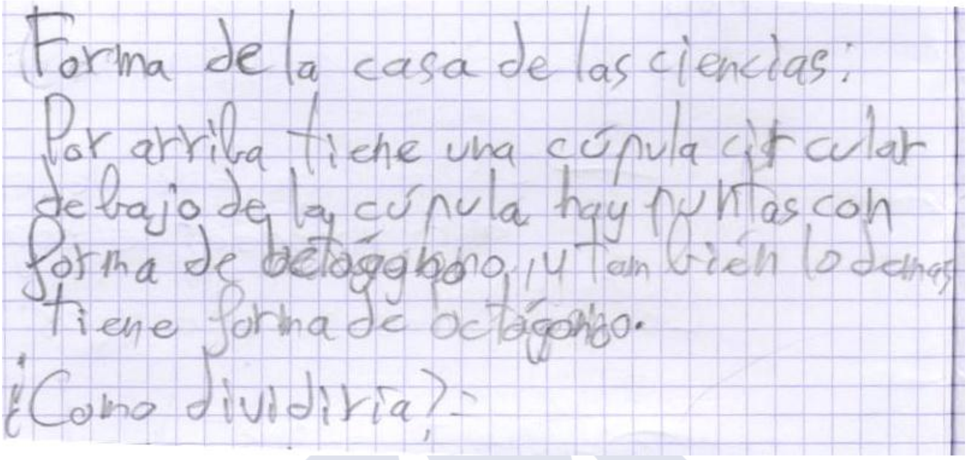


Figura 5.50. Hipótesis sobre la forma de la Casa de las Ciencias de **Kris.**

Según Piaget, la ubicación espacial es un proceso que adquiere dificultades para los niños/as. Esto se ve en Kris cuando confunde círculo con semiesfera. Describe la cúpula de la casa de las ciencias, como de forma circular, cuando en realidad es semiesférica. Otra explicación a esto es que puede que Kris no haya tenido con anterioridad noción de las figuras geométricas en tres dimensiones (geometría del espacio) tales como esfera, cubo o cuerpo sólido. Según la teoría de Piaget en estas circunstancias, Kris se encuentra en el estadío de las operaciones concretas, porque no puede abstraer la ubicación espacial de la cúpula del edificio y tiene ciertos conflictos entre sus propios posiciones (Holloway, 1969, p. 15).

Segundo día: martes 15 de noviembre de 2011. Horario de 10:00 a 11:00

La propuesta de realizar divisiones está en relación con las concepciones de dividir en un círculo o circunferencia (como en el ejemplo de las tartas o pasteles), porque no toma en consideración la igualdad de las partes divididas o el tamaño. En particular, el número de partes de las divisiones son pares, porque guarda relación con el número de lados que tiene la figura geométrica. Las posibles divisiones son en dos, cuatro, seis, ocho, diez, doce, catorce, dieciséis, y dieciocho.

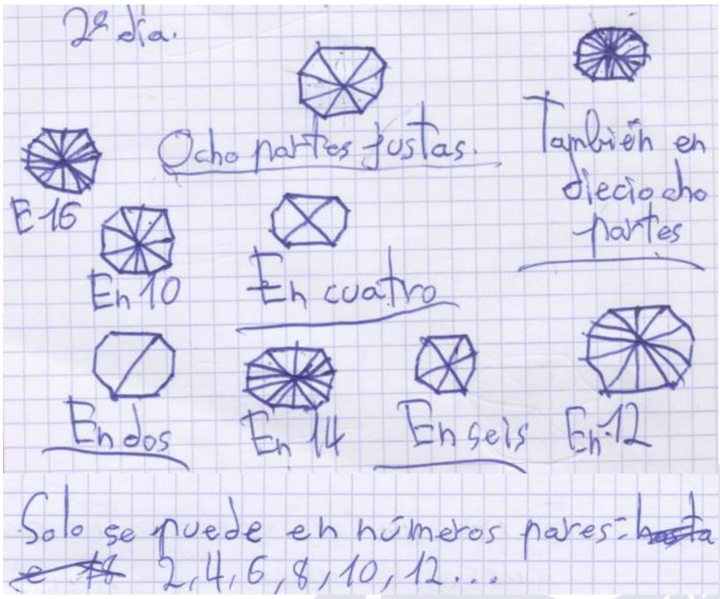


Figura 5.51 Divisiones realizadas por **Kris.**

De las divisiones hechas en las figuras, las correctas son las divisiones en dos, ocho y dieciséis partes. A través de su conjetura intenta realizar una generalización aunque no sea la correcta. Por otra parte, las figuras nos muestran resultados de su aprendizaje en las clases tradicionales; las figuras son trazadas sin tomar en cuenta el folio con recuadros, siendo que éste permite graficar utilizando las líneas.

En cuanto al uso de Etoys, Kris muestra que posee escasas nociones básicas o que necesitaba más tiempo que el resto de sus compañeros, porque solamente dibujó el coche sobre el mundo de Etoys.

Figura 5.52. Un coche dibujado por **Kris**

Tercer día: miércoles 16 de noviembre de 2011. Horario de 10:00 a 11:00

La tercera sesión se inicia con el *dibujo de un cuadrado*. Se solicitan entonces que dibujen mediante flechas el recorrido de un coche en ese cuadrado (presentando un cuadrado en la pizarra). Kris intenta encontrar el ángulo 90° al dividir 360° entre dos; pero no logra hacerlo, es probable que su argumento (que el ángulo "sería 90°"), provenga del comentario de sus compañeros.

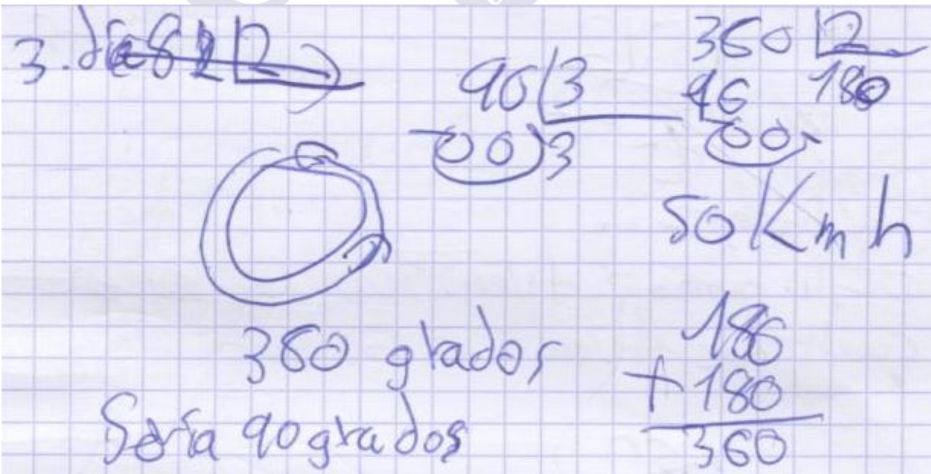


Figura 5.53 Intento de división de 360° por **Kris**, para obtener 90°.

Luego, para construir el cuadrado, intenta realizar ciertos gráficos que le ayuden a diseñar el guión del proyecto. Es importante apreciar que trata de hacer marcas para determinar la distancia (concepto de medida) y el marco de referencia (ubicación en el plano), con el objeto de poner en movimiento el coche de Etoys.

Figura 5.54. Gráfico que muestra cómo debe dibujar en Etoys.

Luego llega realizar el guión, la programación es correcta porque permite trazar de un solo clic en el signo de exclamación para graficar el cuadrado.

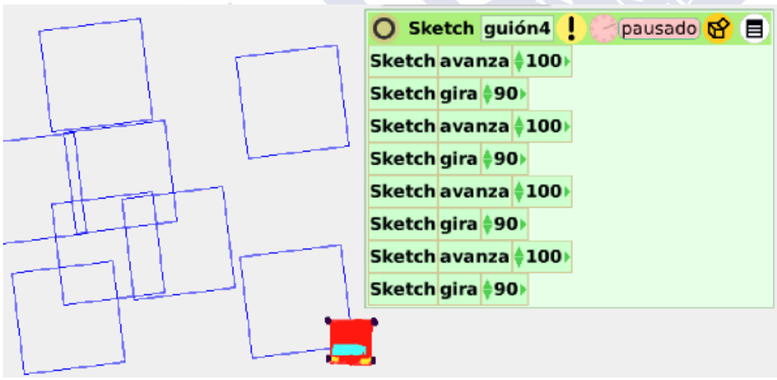


Figura 5.55 Guión que muestra la programación para graficar el cuadrado con Etoys.

Se observan cuadrados ubicados en distintas partes del mundo de Etoys, cada ubicación corresponde a un par ordenado, cada lado del cuadrado mide 100 pixeles de unidad.

Cuarto día: viernes 18 de noviembre de 2011. Horario de 12:30 a 13:20

Una vez construido el cuadrado, esta vez el desafío es construir un triángulo, que es una parte de la Casa de las Ciencias.

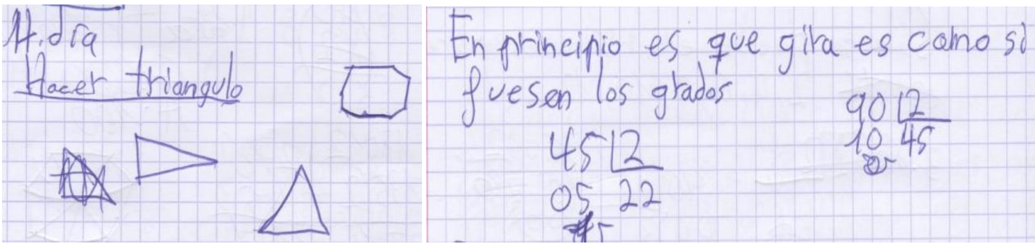


Figura 5.56 Presentación de acciones previas en su libreta para diseñar el triángulo.

Sin embargo, Kris sigue explorando con el guión del cuadrado que modificó cambiando los valores del mosaico *gira* 90 a "*gira* 300", sin continuar con el diseño del proyecto en construir el triángulo. Manteniendo los valores de *avanza*, realiza, por ensayo – error, un hexágono. El mosaico de "*gira* 300°" hace la misma operación que *gira* (-60°). Por supuesto, que ella desconoce esta consecuencia, sólo lo realiza por ensayo-error.

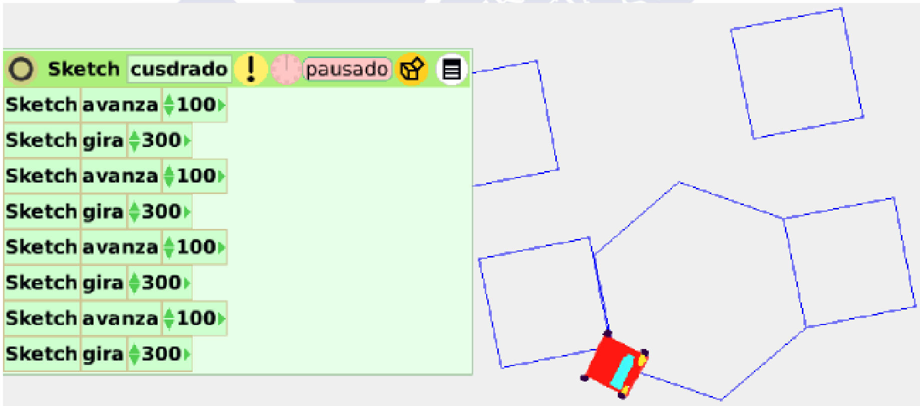


Figura 5.57. Guión que muestra la programación para graficar un hexágono con Etoys.

Presentamos algunas anotaciones de guiones en su libreta. Los guiones son para las construcciones de los polígonos regulares como consecuencia de los resultados anteriores, tales como, el octágono, el cuadrado y el hexágono, a través de la abstracción reflexiva y su diseño con Etoys (ver Figura 5.58).

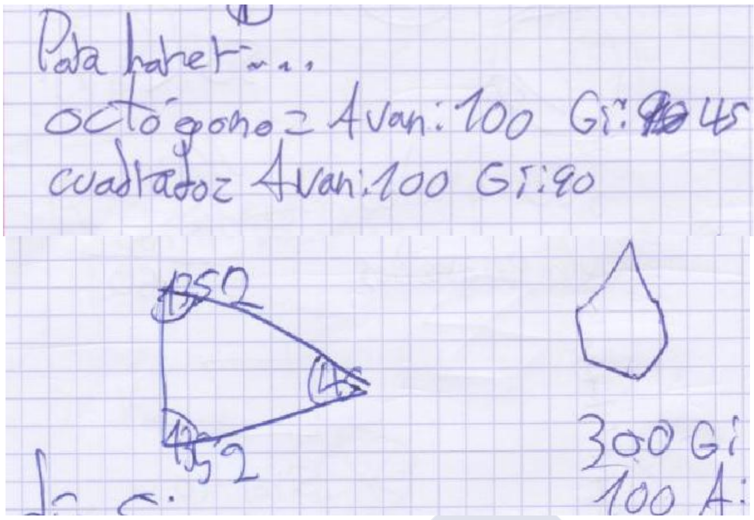


Figura 5.58. Conclusiones sobre las acciones a realizar para diseñar guiones

Sin embargo el triángulo no tiene la misma estructura que los guiones anteriores; por tal razón Kris no hace ninguna afirmación; además, los lados y ángulos del triángulo son diferentes, porque es un triángulo isósceles.

Quinto día: Se inicia el día lunes 21 de noviembre de 2011. Horario de 15:30 a 16:30.

La construcción del guión del triángulo quedó pendiente, y recién este día Kris intenta concretar el trabajo.

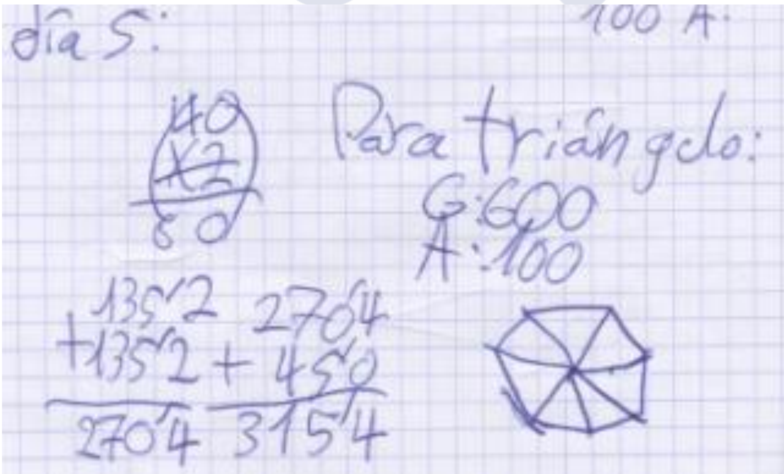


Figura 5.59. Operaciones hechas por **Kris** para obtener los ángulos del triángulo.

Consideramos que el diseño del guión para el proyecto del triángulo es muy complejo, porque es necesario conocer los ángulos de cambio de dirección (suplementario de 45° que es 135°/2). En la Figura 5.59 se muestra el error que cometen los niños al escribir 135’2 (como un decimal), cuestión que hubo que clarificar durante la clase. Por esta razón Kris y los demás niños/as han tenido dificultades en desarrollar sus proyectos.

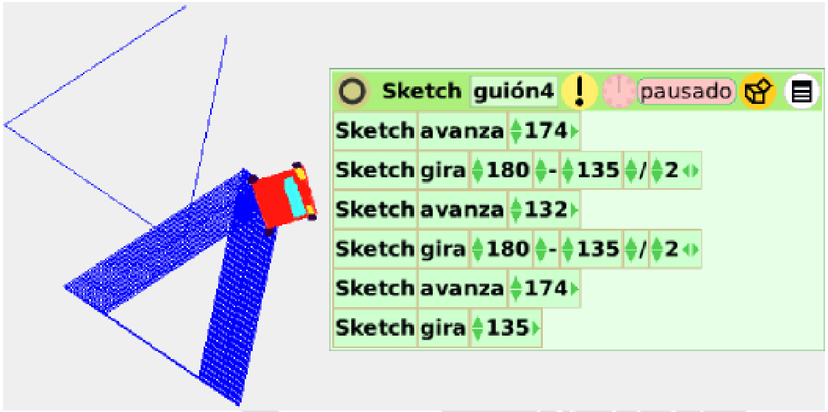


Figura 5.60. Guión de la programación para graficar el triángulo.

Para diseñar el guión, Kris recorre con frecuencia a tomar nota en su libreta antes de realizar las acciones, luego ensaya constantemente con los guiones. Pues es una estudiante muy metódica. En cada etapa, cuando logra diseñar los proyectos, logra encapsular los procesos; en este caso el diseño del triángulo con Etoys es un proceso dinámico; luego cuando el triángulo es concebido como figura geométrica (objeto inerte).

Sexto día: martes 22 de noviembre de 2011. Horario de 10:00 a 11:00

Nuevamente se inicia con la sesión de la construcción del triángulo. Se solicita que quienes habían continuado con el proyecto en casa que lo compartan en clase, algunos niños dijeron que si intentamos hacerlo, una niña dijo que en la sesión anterior había diseñado el triángulo y el octágono; mientras tanto Kris dice que no lo hizo en su casa porque el programa no funciona en su ordenador. Una estudiante pasa a la pizarra para describir el proceso del diseño del guión sobre la construcción del triángulo, y

Kris toma nota del proceso. Luego de la explicación de su compañera Kris intenta nuevamente diseñar un guión para graficar el triángulo. Finalmente lo logra, construyendo las divisiones del plano.

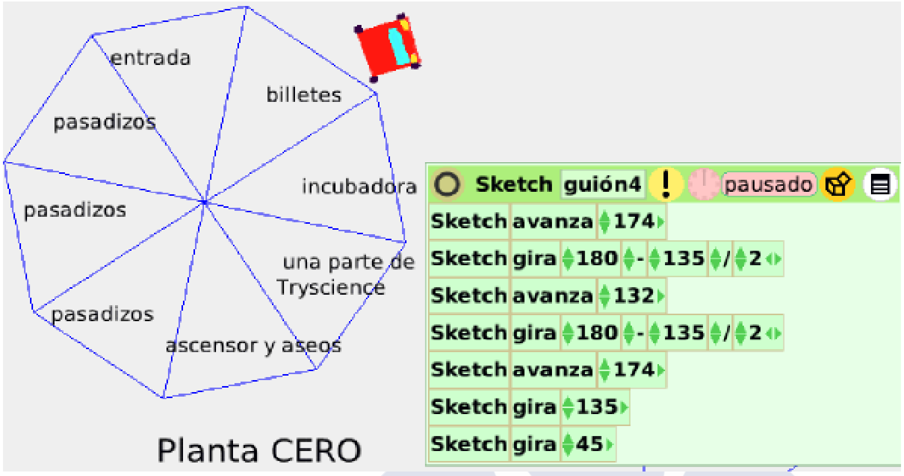


Figura 5.61. Rediseño del plano de la Casa de las Ciencias.

El trabajo de Kris muestra que solo con agregar al guión el mosaico *gira* 45 se puede generara las divisiones para completar de realizar la gráfica del octágono, luego a renombrar cada una de las divisiones. No fue necesario colapsar el guión del triángulo.

Sétimo día: miércoles 23 de noviembre de 2011. Horario de 10:00 a 11:00

Nuevamente, Kris inicia el trabajo escribiendo en su libreta el guión para diseñar las divisiones de la Casa de las Ciencias, aunque parece que lo hace como para recordar, porque la sesión anterior ya lo había programado. La leyenda que se extrae de la libreta dice: **A** significa avanza y **G** significa gira. Ella misma realiza un proceso de reforzamiento, como retroalimentación, que significa que el proceso asimilado logra acomodarse, según Piaget es un proceso de reequilibración maximadora, porque logra reequilibrar el desequilibrio que se generó luego de la equilibración anterior.

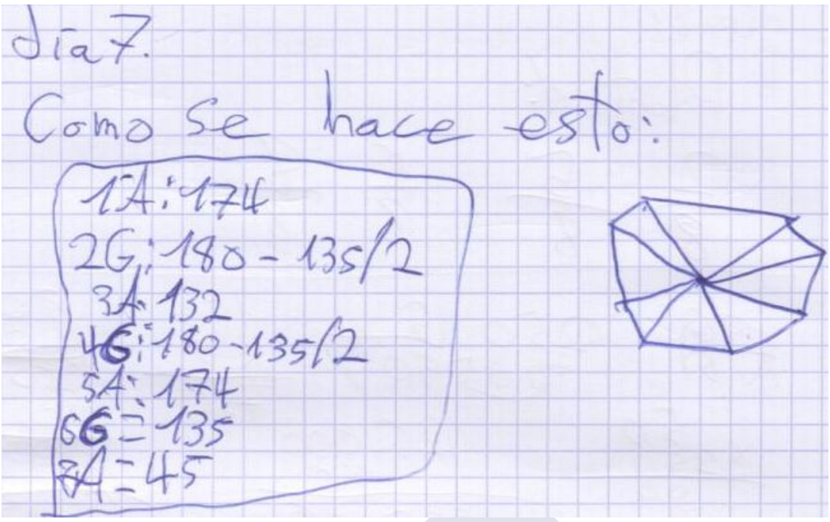


Figura 5.62. Recapitulación del guión del octágono.

Luego continúa con las tareas que tiene pendiente, renombrar las divisiones de la planta uno y luego recortar la figura para colorear y finalmente desarrollar las actividades propuestas.

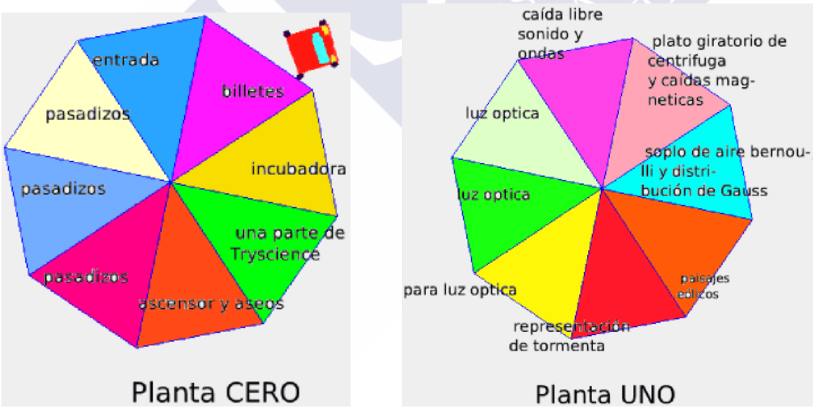
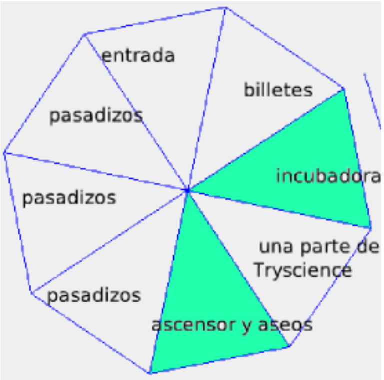
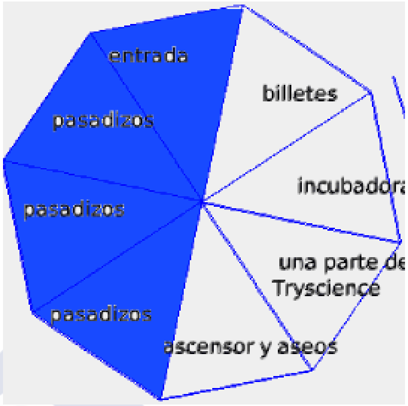


Figura 5.63. Las distribuciones de los octágonos coloreadas que representan las fracciones realizadas con Squeak Etoys.

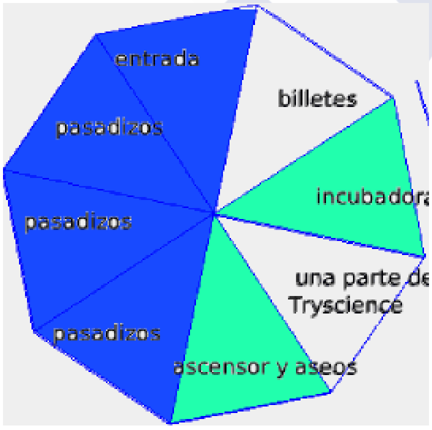
Kris continúa con las actividades, y desarrolla cada una de las preguntas respecto a las fracciones. Una de las cualidades de Etoys, es que permite recortar y colorear las partes de las fracciones que se solicita en el mismo mundo. La parte coloreada las que hizo Kris, y las expresiones en símbolos (*) son las expresiones aclaradas por el investigador; porque Kris no escribió en símbolos, solo pintó las fracciones.





Operación de $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}$ (pregunta a)*	Operación de $\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ (pregunta b)*

Figura 5.64. Solución a las preguntas propuestas en el proyecto.



Operación de $1-\frac{2}{8}=\frac{6}{8}$ (pregunta c)*	$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{8}{8}=1$ (e)*

Figura 5.65. Solución a las preguntas propuestas en el proyecto.

Kris logró solucionar algunas de las preguntas propuestas en el proyecto. Trató directamente cada pregunta sobre una sola figura, coloreando cada región, además no puso etiquetas a los resultados.

Para realizar las operaciones hizo algunas operaciones en su libreta, aunque tiene resultados poco positivos; sin embargo cuando realizamos las operaciones con Etoys gráficamente los resultados son mucho más objetivos (ver Figura 5.64).

Mostramos algunas operaciones básicas sobre las fracciones en la libreta de Kris. La primera y la segunda respuestas son correctas, mientras la tercera y cuarta no son correctas.

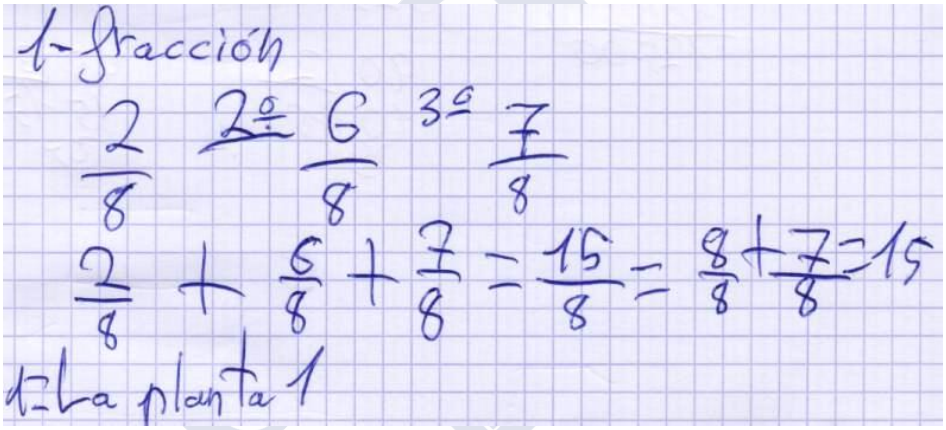


Figura 5.66. Solución a las preguntas propuestas en el proyecto.

Octavo día: viernes 25 de noviembre de 2011. Horario de 12:30 a 13:20

Al inicio de la sesión en el laboratorio de informática se realizó un resumen de los conceptos matemáticos que habían aprendido y que cada estudiante debería escribir en sus libretas. Sin embargo, Kris no atiende la participación de sus compañeros, está ocupado con las figuras generadas con Etoys. Y escribe en su libreta los resultados.

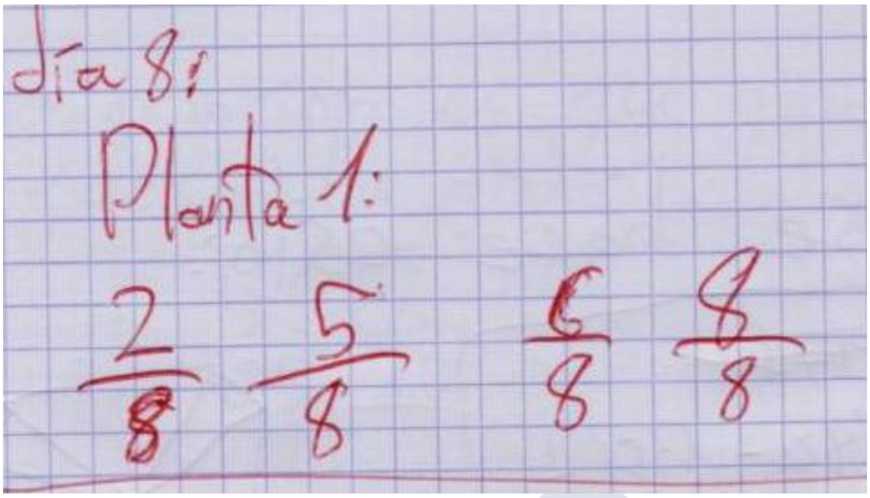


Figura 5.67. Resultados de las actividades realizadas en la sesión anterior.

Como estuvo ocupado con la redistribución del plano de la Casa de las Ciencias, no ha escrito el resumen de lo propuesto por sus compañeros. Mientras se dieron las instrucciones para el diseño de los contenedores de basura de la Casa de las Ciencias, presta atención y luego realiza algunas operaciones para graficar los contenedores.

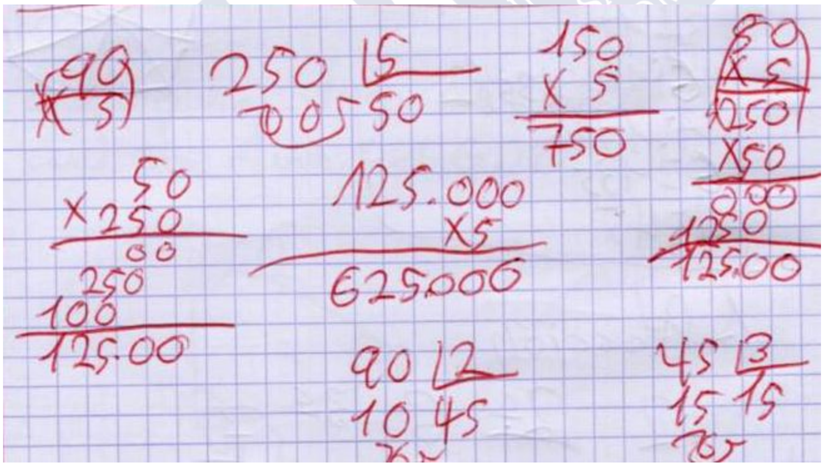


Figura 5.68. Operaciones para encontrar valores que permita diseñar los contenedores.

Luego diseñó un guión que permitiera graficar los contenedores (graficar un rectángulo; ancho 90 y largo 125), sin embargo no acertó con el proceso.

Mosaico correcto

Error en gira45, debe ser gira90

correcto

correcto

Error en avanza 45, debe ser avanza 90

Error debe ser gira90

Figura 5.69. Supuesto guión que permitiera graficar el contenedor de basura.

Resumen del caso de Kris

Programación con Etoys. En el desarrollo de su proyecto es metódica y muy ordenada, lleva anotada cada operación diaria, esto hace que lleve el control de los procesos que realiza con los mosaicos en el guión de Etoys. Cada programación en Etoys es un pequeño esquema, y para diseñar el octágono, Kris tuvo que pasar por diferentes niveles de programación (diseño de guiones básicos hasta el diseño de un guión muy complejo); es decir, pasa por diferentes reequilibraciones en cuanto a la programación con Etoys de un nivel inferior a un nivel superior (proceso helicoidal). Cabe resaltar que Etoys permite construir la información a través de la abstracción reflexiva, por ejemplo (ver Figura 5.56) Kris afirma: “en principio es que ‘gira’ es como si fuesen los grados”.

Kris es una niña que va explorando y modificando constantemente los guiones; en este caso, existen continuos desequilibrios y lagunas, que requieren ser reequilibradas. Este fenómeno ocurre, no porque Kris tenga dificultades en su aprendizaje; sino, porque Squeak Etoys es una herramienta que estimula la creatividad invitando a seguir investigando.

Por otro lado, la cualidad de Kris es que es una persona perseverante y dedicada, se mantiene inquieta al no poder desarrollar el proyecto, por lo tanto no solo interactúa con su compañero designado, sino también con otros compañeros. Mostrando que el trabajo en equipo es muy importante en este tipo de actividades.

Fracciones. En la construcción del concepto, Kris lleva paso a paso la construcción de conceptos previos para alcanzar el nivel más alto. La estructuración del proceso de construcción es ordenado, inicia con la construcción de una recta utilizando un guión *avanza*, luego combina con el mosaico *gira* para construir un cuadrado que es la etapa inicial de un diseño a nivel de esquema en términos de conocimiento matemático. Procede con el diseño del triángulo que es un nivel más complejo que el diseño del cuadrado, alcanzando otro nivel de *esquema*. Finalmente logra diseñar el octágono con la agrupación de triángulos.

En cuanto a las abstracciones, Kris supera las etapas de *interiorización* en el momento de realizar procesos internos y dar sentido a los fenómenos que ocurren (avanza y gira) para generar otros objetos, al mismo tiempo alcanza el nivel de *coordinación* porque utiliza otros procesos para construir un nuevo objeto; por ejemplo, usa la recta y el ángulo para diseñar un cuadrado y un triángulo.

También en este momento se ubica en la etapa *Inter*, porque relaciona entre las diferentes acciones, procesos, objetos y esquemas en el diseño del cuadrado y el triángulo, y éste último conduce a la construcción del concepto de fracción. Asimismo, ocurre con la abstracción de *encapsulación* en cada etapa de sub-esquema (diseño del triángulo y cuadrado); por ejemplo, al construir el triángulo y luego el octágono dividido en 8 partes ve que es un proceso dinámico, y cuando este resultado es concebido como una fracción se convierte en un objeto estático. Finalmente, el nivel *Trans* ocurre cuando Kris logra relacionar dos estructuras diferentes, el diseño de proyectos con Etoys y los conceptos matemáticos para expresar en un nuevo concepto denominado fracción.

Kris construye el concepto de fracción diseñando por etapas los diferentes componentes básicos de las matemáticas tales como recta, ángulo, polígono y circunferencia, utilizando el Lenguaje de programación Etoys. Del mismo modo al construir el concepto de cada componente básico con Etoys, construye un *esquema* que es elemento básico de otros esquemas superiores y así sucesivamente, hasta construir el concepto de fracción que es el nivel más elevado de la propuesta.

En cuanto a los errores en realizar las operaciones, podemos decir que, si bien gráficamente (coloreando las partes) ha resuelto a, b, c y e (excepto d); no ha sido correcta la escritura de cada una de ellas salvo la pregunta a). A la pregunta b) no le ha asignado el valor de 4/8 o su equivalente 1/2, en la Figura 5.66 a la pregunta b) le ha consignado 6/8, cuyo valor corresponde a la pregunta c), que pudo haber sido una equivocación ocasionado por alguna distracción.

Por lo tanto, se puede deducir que Kris, al trabajar en equipo y concluir gráficamente las fracciones, ha institucionalizado los objetos (figura de las fracciones), además ha pasado a los registro semióticos expresando el lenguaje de 2/8, 6/8 y 7/8; sin embargo tiene dificultades en la representación semiótica para asignar correctamente los registros semióticos a cada uno de los objetos (D'Amore, 2006).

5.2.3 Evaluación a la experiencia de Alice

Alice es considerada por el profesor "B" como la estudiante que tiene rendimiento académico alto. Es una estudiante muy activa con rápida reacción en el desarrollo con Etoys, no necesita mucha atención. Ha participado en la ayuda a sus compañeros durante el proceso del diseño de los proyectos.

Primer día: Se inicia el día lunes 14 de noviembre de 2011. Horario de 15:30 a 16:30.

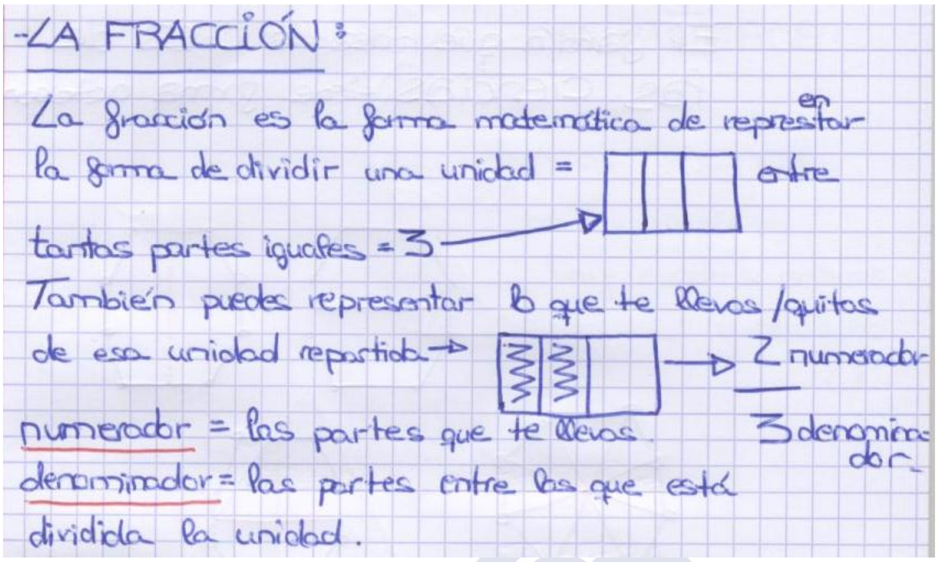


Figura 5.70. Respuesta sobre el concepto de fracción de **Alice**.

A la pregunta sobre el concepto de fracción, explica con un ejemplo de repartir una unidad en partes (ver Figura 5.70), o como quitar una parte de una unidad; Alice también representa en forma simbólica. La respuesta es resultado de lo que aprendió de los libros de texto que utiliza en la escuela.

a) Desde el punto de vista de Piaget, la respuesta se ubica en la abstracción empírica, porque describe los elementos de la fracción. Se le ubica para esta etapa en el nivel Intra, porque se centra solamente en el concepto. Situación de un aprendizaje tradicional.

b) Cuando se le presenta la situación de rediseñar la Casa de las Ciencias, le parece interesante, luego propone su hipótesis.

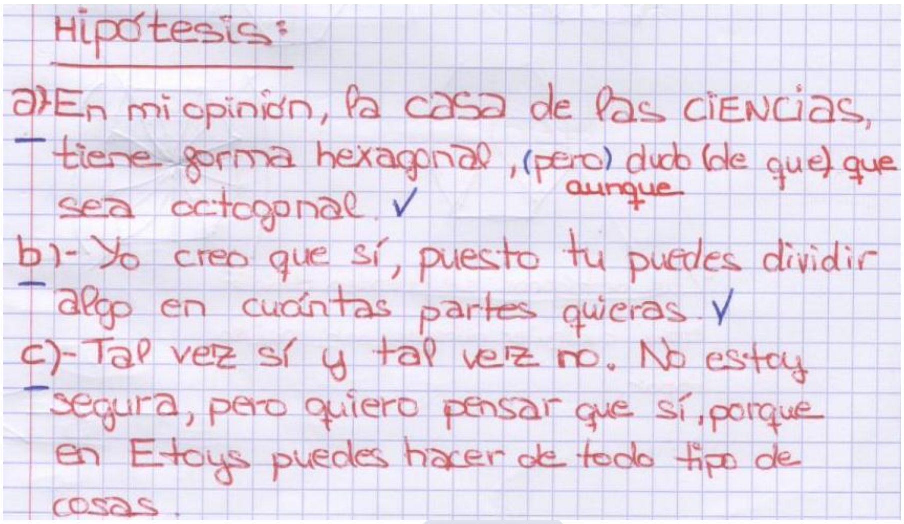


Figura 5.71. Conjetura propuesta sobre la forma geométrica del plano de la Casa de las Ciencias.

La fotografía presentada tiene la apariencia de tener una forma hexagonal, tal vez sea la razón como muchos de sus compañeros conjeturan que la base tiene la forma de un hexágono. Luego de haber verificado por Internet escribe que tiene la forma octogonal. En cuanto a la división, considera que se puede repartir en la cantidad que se desea, y luego verifica que no es cierto. Finalmente, a la pregunta que si con Etoys se podría dividir el plano, afirma que con Etoys se puede realizar todo. La estudiante afirma con mucha soltura porque el año anterior desarrolló igual que sus compañeros el proyecto de un reloj y realmente tiene cierto dominio del manejo de Etoys.

Segundo día: martes 15 de noviembre de 2011. Horario de 10:00 a 11:00

Al realizar las divisiones presenta varias particiones del plano de la Casa de las Ciencias, de los 6 gráficos, uno en particular dividido en tres partes no corresponde porque no son simétricas las partes de la división. Además su conclusión no es correcta, porque no se puede dividir en cualquier número de partes, ya sea par o impar.

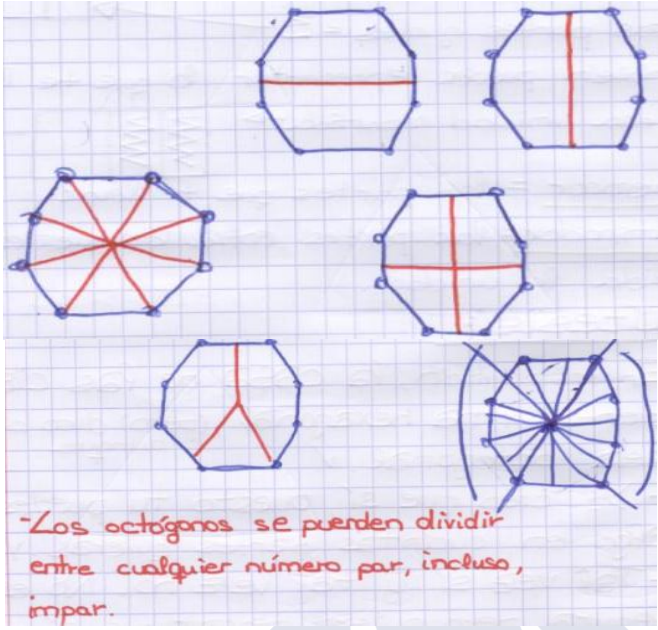


Figura 5.72. Posibles divisiones del plano de la Casa de las Ciencias hecha por Alice.

En este contexto de las divisiones, cuando los niños hacen el resumen de la sesión y discuten sobre el número de divisiones, ingresa el concepto de igualdad, además cuando uno de sus compañeros realiza la gráfica, Alice comenta que se debe dividir en partes iguales, es decir debe haber simetría (un término nuevo); aunque esta afirmación de simetría en una división impar no es cierta; por ejemplo, un pentágono dividido en cinco partes.

Para terminar la sesión, los estudiantes deben diseñar sus coches en el mundo de Etoys, al respecto Alice diseñó su coche y colocó un guión.

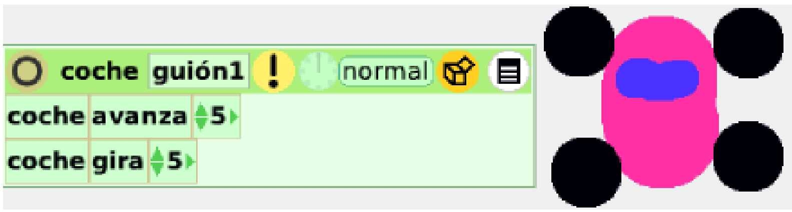


Figura 5.73. Coche dibujado sobre el mundo de Etoys.

Tercer día: miércoles 16 de noviembre de 2011. Horario de 10:00 a 11:00

Para diseñar el cuadrado Alice crea un guión con las acciones que va realizar, y al graficar el cuadrado va construyendo y fijando en su estructura mental patrones de las operaciones de distancia, recta y ángulo.

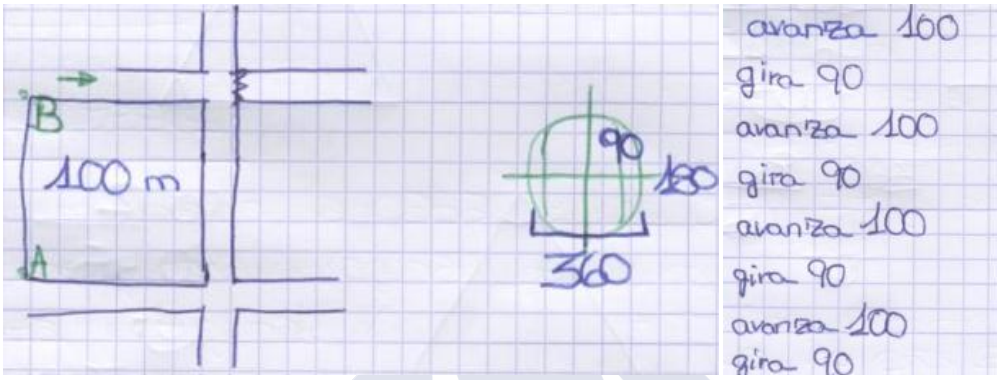


Figura 5.74. Diseño de un bloque de forma cuadrada de una ciudad y un guión con los posibles mosaicos para diseñar en Etoys.

Una vez elaborado el diseño en su libreta, Alice realiza la programación del cuadrado con Etoys y través de la abstracción empírica extrae las características del cuadrado (lado, ángulo, lado, ángulo, lado, ángulo). En cuanto al valor de una vuelta Alice considera que es 360 grados, porque se recuerda muy probablemente, al proyecto anterior que fue la construcción del reloj.

Este es uno de los procesos principales de cada una de las operaciones con Etoys, porque incluye una serie de elementos matemáticos muy bien definidos en la construcción de un concepto.

Figura 5.75. Programación (guión) para graficar un cuadrado, y el resultado sobre el mundo de Etoys.

El diseño del proyecto de la construcción del cuadrado está muy bien realizado.

Cuarto día: viernes 18 de noviembre de 2011. Horario de 12:30 a 13:20

Para iniciar con la construcción del triángulo realiza ciertas operaciones que permite encontrar los valores de los ángulos de los polígonos regulares (360°/8 =45° para el octágono; y 360°/3 =120° para el triángulo). Aunque el triángulo que es parte del octágono no es equilátero, su diseño es más complicado por ser ésta un triángulo isósceles.

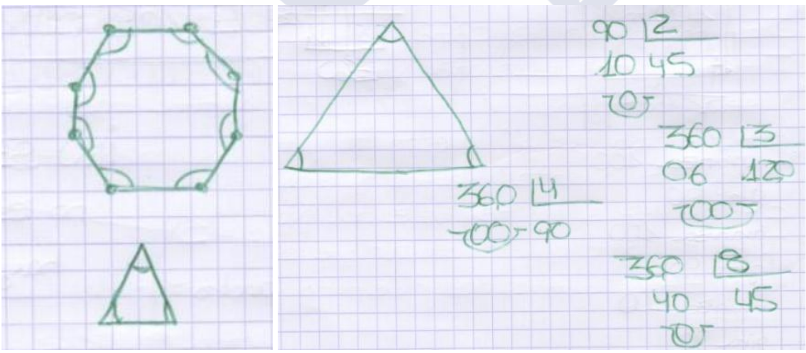


Figura 5.76. Obtención de ángulos de los polígonos regulares.

Prueba de la elaboración de un guión en su libreta para diseñar la programación en Etoys, la primera parte muestra los intentos de considerar los valores de los mosaicos, y la segunda parte muestra una de las formas de diseñar el guión.

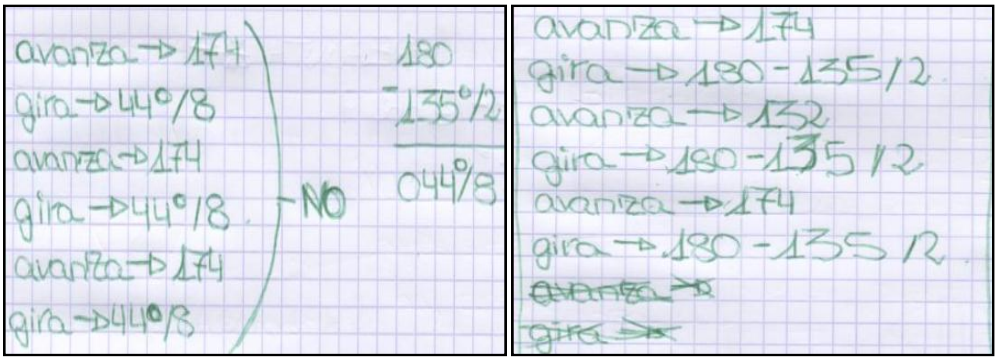


Figura 5.77. Asignación de valores para los mosaicos.

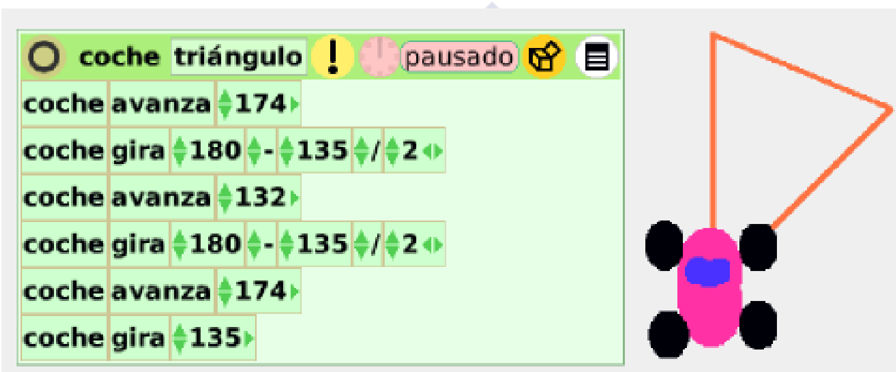


Figura 5.78. Guión para diseñar el triángulo y el resultado de la programación.

Para Alice, el diseñar un guión es muy sencillo, aplica sus conocimientos previos, en este caso, pocas veces trata de ensayo – error, pero antes siempre pregunta al profesor las dudas que tiene, y éste le alcanza una pista, y ella inmediatamente realiza la operación. El conocimiento de las operaciones básicas de Etoys hace que realice con fluidez los diseños de programación. Luego con mucha facilidad construye el guión para realizar el rediseño del octágono que es la redistribución del plano de la Casa de las Ciencias.

Con estas acciones y procesos realizados para alcanzar su objetivo, Alice logra una estructura mental de *esquema* al diseñar el octágono a través de la agrupación de una serie de sub-esquemas (rectas, ángulos, distancias, triángulos), finalmente para visualizar el concepto de fracción. El nivel *Inter* es un proceso continuo en Alice, porque relaciona las estructuras de acción, proceso, objeto y esquema en cada etapa de la construcción de un objeto matemático.

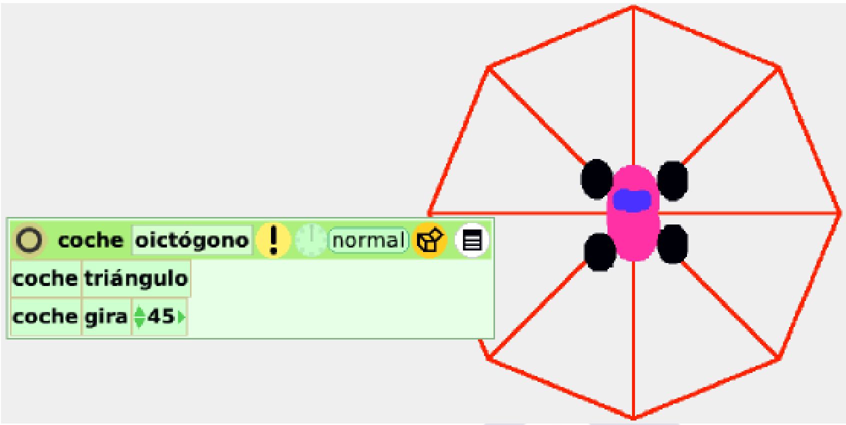


***Figura* 5.79.** Distribución del plano de la Casa de las Ciencias que ilustra el concepto de fracción.

Quinto día: Se inicia el día lunes 21 de noviembre de 2011. Horario de 15:30 a 16:30.

Alice lleva adelantado el trabajo por el hecho de tener cierto dominio de Etoys, y en la sesión anterior ya pudo diseñar la distribución del plano de la Casa de la Ciencias. Además su participación en las sesiones es muy frecuente con opiniones muy centrados en el tema, y compartiendo información con sus compañeros.

Al revisar la carpeta de Alice, faltan los proyectos:

Casa de las Ciencias.004,

Casa de las Ciencias.010,

Casa de las Ciencias.011,

Casa de las Ciencias.012 y

Casa de las Ciencias.013

Es muy probable que Alice haya desarrollado los proyectos en su casa o no se hayan guardado por dificultades en el ordenador y por esta razón no los ha incluido, en la carpeta aparecen sólo los proyectos ya ejecutados directamente en el laboratorio de informática.

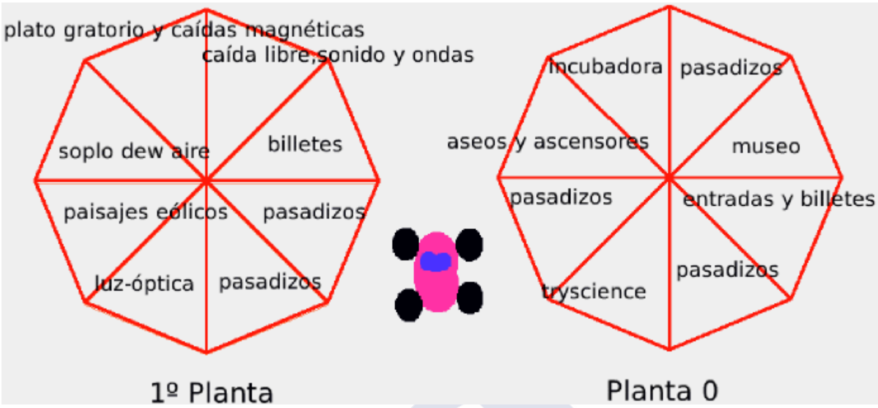


Figura 5.80. Renombrado de la distribución del plano de la Casa de las Ciencias en las plantas 0 y 1, en el mundo de Etoys.

Sexto día: martes 22 de noviembre de 2011. Horario de 10:00 a 11:00

La segunda parte de la actividad se trataba de resolver ciertas preguntas sobre el concepto de fracción, es decir realizar ciertas operaciones gráficamente haciendo uso de Etoys. La facilidad de trabajar con Etoys, le permite a Alice hacer recortes del plano rediseñado y coloreado para responder a las preguntas.

Sin embargo, falta indicar y/o escribir el proceso de cada uno de las operaciones. Consideramos que dentro de su esquema mental construyó las operaciones de las fracciones. En la parte inferior de cada figura señala las ecuaciones de las operaciones (*).

Para las preguntas A y B, Alice pintó directamente el resultado en la gráfica recortada, el primero es 2/8 que es equivalente a 1/4 y el segundo es 4/8 equivalente a 1/2; estos detalles no fueron escritos ni en su libreta.

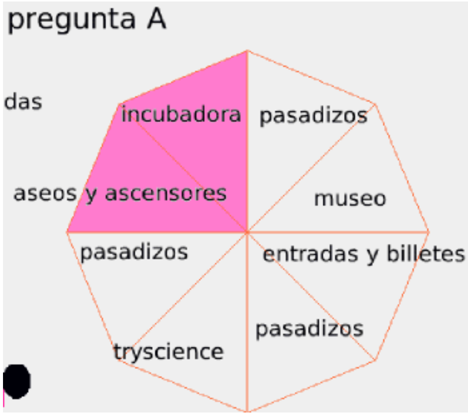
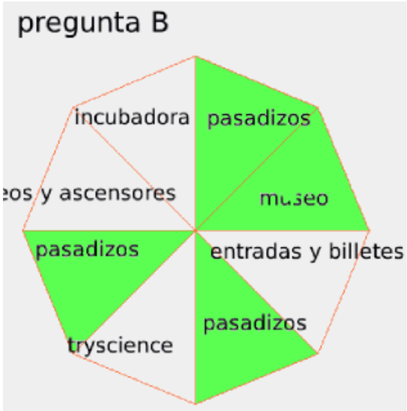
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Operación de $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}$ *</td>
<td>Operación de * $\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$</td>
</tr>
</table>

Figura 5.81. Resultado de las operaciones con fracciones realizadas con Etoys.

La pregunta C, dice, en el caso de clausurar (cerrar) la incubadora y TryScience, ¿qué parte del plano queda en uso? La respuesta es 6/8, pero Alice puso los 2/8 gráficamente que es el complemento de 6/8, parece que lo dejó inconcluso o cree que esa es la respuesta.

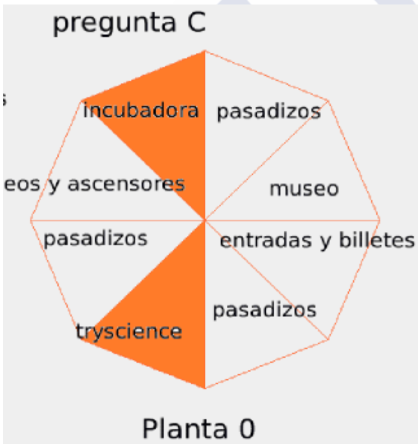
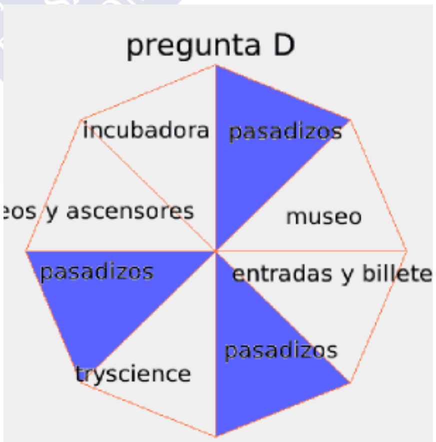
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Operación de $1-\frac{2}{8}=\frac{6}{8}$, debería ser coloreado la parte inversa. *</td>
<td>No aparece la otra figura que debe comparar, el resultado debe ser $\frac{1}{8}<\frac{3}{8}$.*</td>
</tr>
</table>

Figura 5.82. Resultado de las operaciones con fracciones realizadas con Etoys

Para la pregunta D, que dice: si el pasadizo representa 3/8 y el ascensor representa 1/8. ¿Cuál de los espacios es mayor, los pasadizos o el de aseos y ascensor? Una de las respuestas es correcta y se muestra en la Figura 5.82, pero falta la otra respuesta con la que se debe comparar para mostrar la desigualdad. Con respecto a la pregunta E no aparece, es posible que la haya omitido.

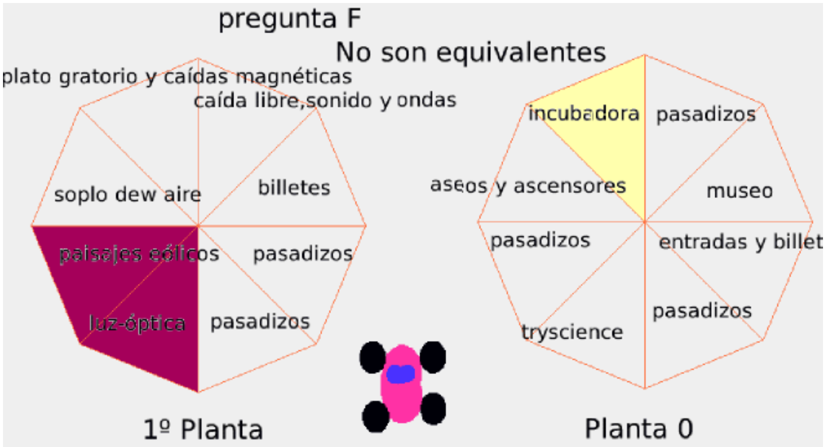


Figura 5.83. Respuesta de fracciones que no son equivalentes con Etoys.

En cuanto a la respuesta de la pregunta F ¿en cuál de los pisos se tuvo mayor área sin atención? (Figura 5.83). Si se estropeaban en la planta baja (0) la *incubadora* y en la planta 1 las áreas de *paisajes eólicos* y de *luz-óptica*. Por supuesto que la mayor área sin atención es la de la planta 1, por tener los dos sectores cerrados (paisajes eólicos y de luz-óptica); la respuesta de Alice es que no son equivalentes, es decir que no son iguales.

Sétimo día: miércoles 23 de noviembre de 2011. Horario de 10:00 a 11:00

Las actividades de este penúltimo día para Alice fueron muy divertidas, porque mientras algunos de sus compañeros/as siguen todavía diseñando la distribución del plano de la Casa de las Ciencias, otros están coloreando las partes de las distribuciones, y Alice ya está a punto de culminar. Sólo le faltan algunas preguntas por desarrollar del segundo grupo de actividad referente al pórtico.

La pregunta es ¿cuántas columnas hay en total?, debe ayudarse de Squeak Etoys. Respondió 32, porque cada frontal tiene 4 columnas aparentemente, sin embargo una columna del vértice corresponde a ambos lados del polígono (ver Figura 5.84). Se debe considerar que por cada lado hay solamente 3 pórticos, entonces el resultado es 3×8 = 24 columnas.

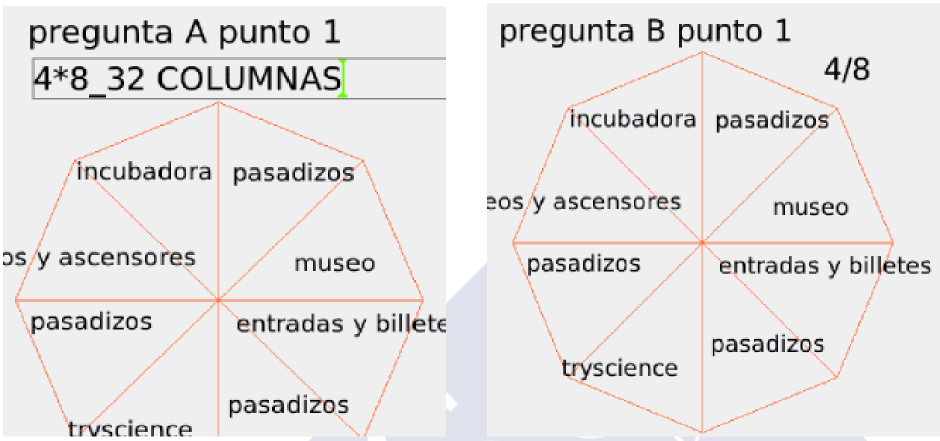


Figura 5.84. Resultado de las operaciones sobre el número total de columnas en el pórtico.

En sus respuestas, Alice se apresura demasiado, no es reflexiva ni observadora, como consecuencia, también la respuesta a la pregunta B es errónea. La respuesta correcta es como se muestra abajo.

Como sabemos que el pórtico tiene 24 muros en total, y en cada cara se observa 4 muros; entonces se tiene:

$\frac{4}{24}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$ y estas tres fracciones son equivalentes.

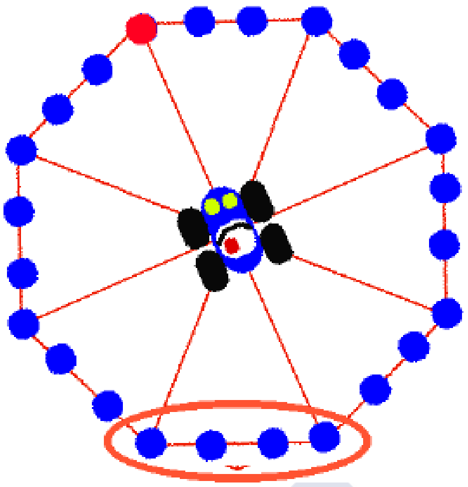


Figura 5.85. Una forma correcta de ver el total de columnas en el pórtico.

Octavo día: viernes 25 de noviembre de 2011. Horario de 12:30 a 13:20

La última actividad es la de diseñar los contenedores de basura en las cuatro plantas: planta 0, planta 1, planta 2 y planta 3 de la Casa de las Ciencias en las cuatro plantas.

Fue similar a la construcción del cuadrado, porque tiene la misma estructura, con la diferencia de que el rectángulo tiene dos lados diferentes. El primer guión muestra el diseño de programación del rectángulo.

Figura 5.86. Guión de programación para graficar un rectángulo.

El segundo diseño muestra cómo se construye el contenedor, pero la figura muestra un contenedor con marcas de medida diferente (siete unidades), porque no controló el avance del coche para construir el contenedor.

Figura 5.87. Un contenedor con 7 niveles de marca.

Es probable que con un poco más de tiempo, lograse encontrar una programación diferente y más pequeña.

Resumen del caso de Alice

Programación con Etoys. Tiene cierto dominio del lenguaje de programación, eso le permite diseñar con mucha facilidad los guiones, otro factor que complementa en el proceso, es el dominio de los contenidos previos y con ello construye los elementos básicos (ángulo, recta y velocidad) para la construcción del cuadrado, el triángulo y el octágono. A diferencia de Jans y Kris, Alice realiza su programación con mayor fluidez, casi directa; en ese sentido las reequilibraciones son inmediatas, alcanzando con facilidad el nivel de constructo mental de *esquema*, porque integra esquemas (recta, ángulos, triángulos) para diseñar otro esquema (el octágono dividido en 8 partes). Generalmente, Alice tiene perturbaciones de tipo laguna que son superadas al realizar las programaciones. De acuerdo a la triada de Piaget, Alice alcanza el nivel *Trans*, porque logra construir un nuevo objeto (el octágono) a partir de otros esquemas (ángulo, recta, triángulo).

Fracciones. El nivel de conocimiento acerca del concepto fue bueno, porque desde el inicio se orienta a explicar adecuadamente el concepto de fracción. Sin embargo, cuando trabaja con Etoys la construcción se hace mucho más evidente porque le permite construir de manera objetiva y dinámica, utilizando elementos matemáticos tales como recta, ángulo recto, medida, ángulos suplementarios, simetría y polígonos. Y al construir en cada etapa los elementos matemáticos, Alice pasa por diversos niveles de constructos mentales; en muchos casos, el paso de un nivel a otro es imperceptible. Finalmente al diseñar el octágono y al desarrollar las preguntas relacionadas al concepto de fracción a través de Etoys ha alcanzado el nivel de esquema.

Por otro lado, es importante considerar la cualidad que tiene Alice, tanto en el dominio de Etoys, como de la matemática. Ella es una estudiante que con frecuencia acude en ayuda de sus compañeros, y al realizar esta actividad muestra el *desencapsulamiento* de los conceptos y acciones realizadas sobre el objeto matemático con anterioridad, y es capaz de reconstruir el proceso (nivel de constructo mental de objeto) y diseñar nuevos guiones en Etoys que permitan explicar el fenómeno.

Conclusiones generales

6. Conclusiones generales

El objetivo global de la investigación fue describir y comprender el proceso de Desarrollo del Concepto de Fracción en niños de 5° de primaria. Esta construcción se ha llevado a cabo mediante el diseño de proyectos usando como herramienta el lenguaje de programación Squeak Etoys.

El ambiente constructivista promueve experiencias de aprendizaje abierto, en el que los métodos y resultados del aprendizaje no son tan fácilmente medibles y son diferentes en cada estudiante (Cruz Pérez & Galeana de la O, 2005, P. 6). Desde el marco del construccionismo, el aprendizaje se produce cuando el estudiante construye su conocimiento a partir de la experiencia y la interacción con el mundo real (Papert, 1996, p. 11). Estas experiencias orientan a establecer las capacidades creativas o aptitudes necesarias para el aprendizaje del estudiante. Por lo tanto, no se trata sólo de resolución de problemas, o de la inducción de lo que se conoce como razonamiento lógico o razonamiento matemático, que es una representación conceptual construida artificialmente del mundo real.

6.1 Conceptos geométricos básicos en la construcción del concepto fracción

Los elementos básicos de la matemática para la construcción del concepto de fracción en una figura plana son: segmento, ángulo, círculo y polígono.

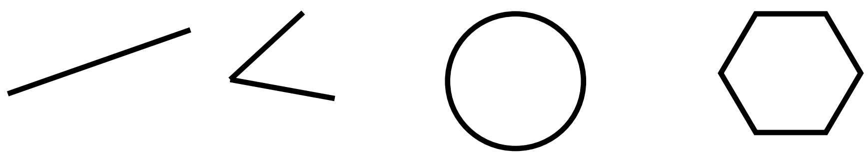


Figura 6.1. Figuras de geometría básica de matemáticas y su construcción.

Con estos elementos se realizan las construcciones de otros objetos matemáticos y se concibe como algo subjetivo (idealizado). En tal sentido, la construcción de cualquier objeto matemático deja de ser manipulable, y puede convertirse en repetitivo y memorístico. Por ejemplo, cuando un niño hace la división del plano de la Casa de las Ciencias, que tiene la forma geométrica octogonal realiza algunos trazos sin considerar las medidas de los lados y de los ángulos, tampoco tiene cuidado de la igualdad de las partes. Un alto porcentaje de niños no hace uso de reglas para medir y trazar.

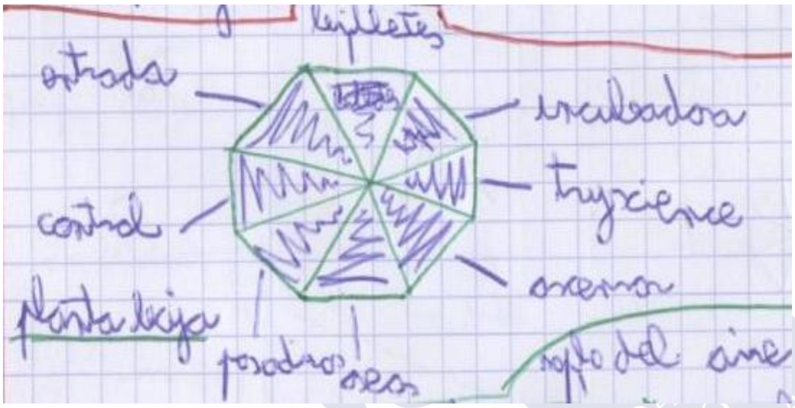


Figura 6.2. Un forma tradicional de graficar el plano de la Casa de las Ciencias.

De la figura se puede deducir que el estudiante logra alcanzar el nivel de constructo mental de *acción* (A1, A2, A3, A4, A5 y A6) en algunos casos al nivel de *proceso* (P1 y P2). Además, su atención está centrada solamente en el concepto de repartir el objeto; es decir se encuentra en la etapa *Intra*, porque concibe el concepto de la fracción de manera aislada sin tener en cuenta los elementos que participan (Clark et al., 1997, p. 352).

6.2 Construcción del concepto fracción en un ambiente construccionista

La teoría construccionista enfoca la construcción del conocimiento a través de actividades basadas en experiencias ricas del mundo real donde el sujeto interactúa con ésta. En este ambiente de aprendizaje el sujeto desarrolla el concepto de fracción interrelacionando con la naturaleza, y como consecuencia pasa por diferentes etapas o niveles de constructos mentales, desde un nivel básico hasta alcanzar un nivel superior. Al pasar por niveles (constructos mentales) en la construcción del concepto integra diferentes áreas o temáticas de las matemáticas.

En la construcción del concepto de fracción con Squeak Etoys, los niños/as desarrollaron una serie de conceptos matemáticos y físicos, competencia digital y aprestamiento de motora fina. La mayoría de ellos, fueron registrados y aprendidos indirecta o inconscientemente durante el proceso. En este tipo de aprendizaje por descubrimiento, entre la interacción de la simulación del mundo real y la abstracción matemática (diseño del plano de la Casa de las Ciencias), los elementos o conceptos matemáticos están jerarquizados y están en estrecha relación con las competencias físicas, lingüística, digital y aprestamiento.

En el primer momento, los niños/as construyen un objeto (coche) en el mundo de Etoys. Al cual le otorga vida a través de la programación. Al dibujar un coche u otro objeto el niño integra la manipulación sensorio motor fina; así como la pintura virtual exponiendo su nivel de creatividad e imaginación en el proceso.

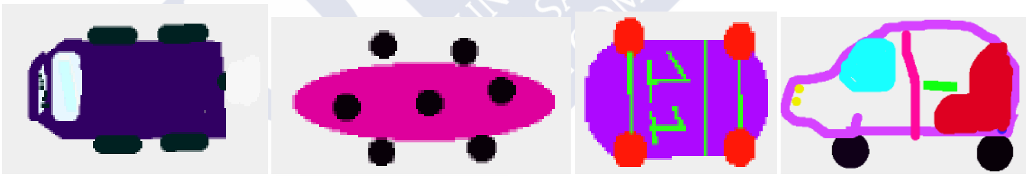


Figura 6.3. Dibujo de coches por los niños/as en el Mundo de Etoys.

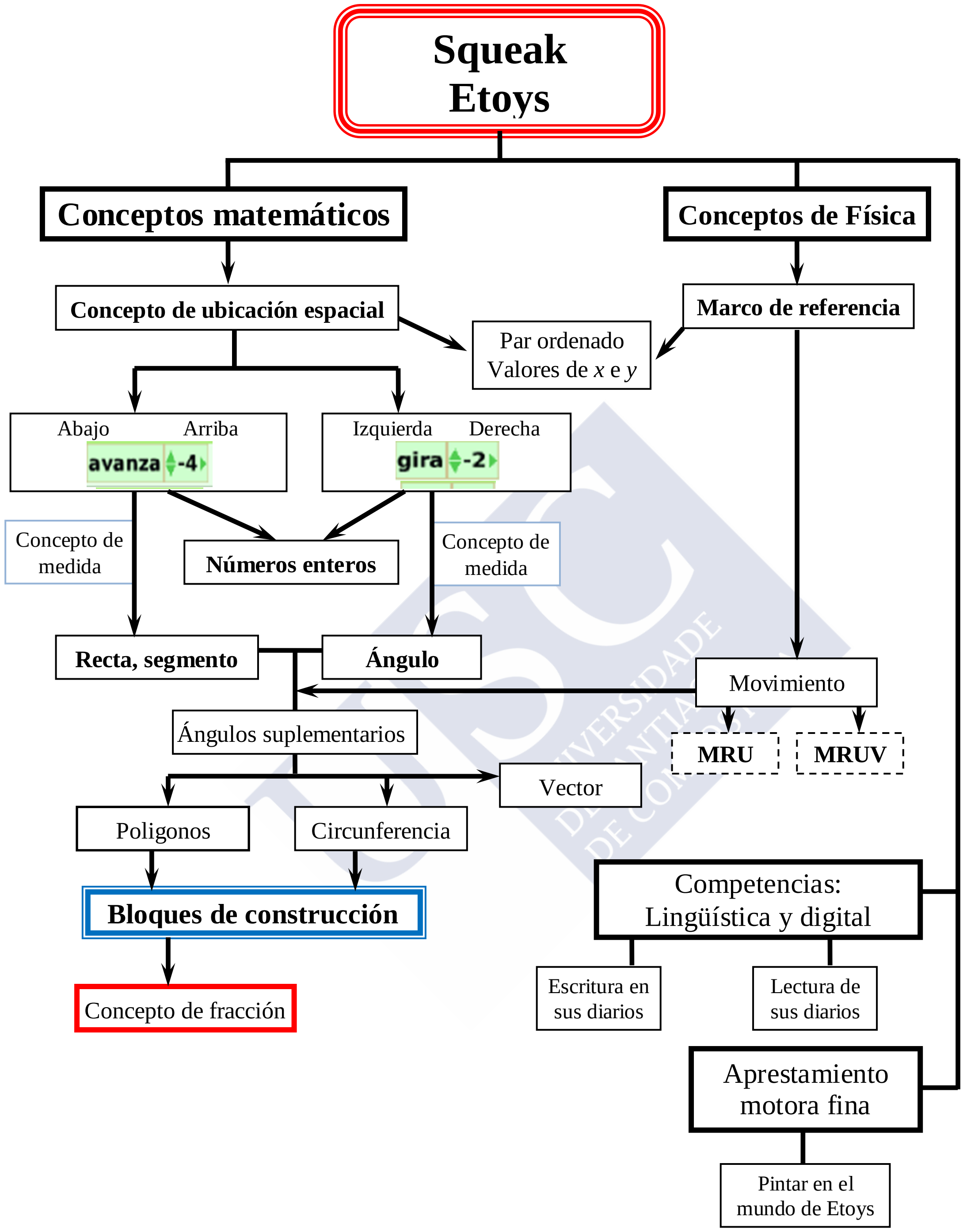


Figura 6.4. Diagrama del proceso de construcción del concepto de fracción. Dos elementos básico *gira* y *avanza* de Etoys dan origen al sistema.

De la investigación realizada se extrae que el mecanismo del proceso de desarrollo del concepto de fracción, inicia con el uso de los mosaicos y guiones para darle vida al objeto dentro del mundo de Etoys, son dos los mosaicos de acción que sirven de base para iniciar la programación: 

(*gira5*) y 

(*avanza5*).

***«gira* 5»**, es el *mosaico*, que accionado por el *guión*, ordena al objeto (coche) que debe girar a la derecha en sentido horario considerado positivo (*gira5*, o cualquier número mayor que cero) o girar hacia la izquierda en sentido anti horario considerado negativo (*gira*(-5), o para cualquier número menor que 0), si el mosaico es *gira*0 el coche no podrá girar a ningún lado (ni a la derecha, ni a la izquierda).

«Avanza 5», es otro mosaico que se encuentra al nivel de *gira5*. La función del mosaico *avanza5* accionado por el guión que lo contiene, hace que el coche avance hacia adelante si el valor es mayor que cero (avanza5, el coche avanza 5 pixeles hacia adelante); en cambio, retrocede si el valor del mosaico que lo contiene es negativo, por ejemplo, *avanza*(-*5*) el coche retrocede; si el mosaico es *avanza*(*0*), el coche no se mueve en el mundo de Etoys. De las acciones de modificar los valores con números positivos y negativos, los sujetos comprenden indirectamente el concepto de números enteros. Estos componentes de ***«avanza»*** y ***«gira»*** están relacionado con el movimiento (velocidad) en el espacio (Papert, 1973).

Aquí es importante comprender el papel del concepto de *medida*, porque al modificar los valores en los mosaicos, el coche modifica su posición, que no solamente cambia la posición del objeto, sino que también el sistema de referencia (Piaget et al., 1981, p. 4). Por lo tanto, el concepto de medida es imprescindible en el diseño de un proyecto, y su interrelación con los conceptos de posición y sistemas de referencia. En este caso específico, se trata de la modificación de los valores de los mosaicos al modificar la distancia recorrida y el ángulo de giro (dirección) realizado por el coche.

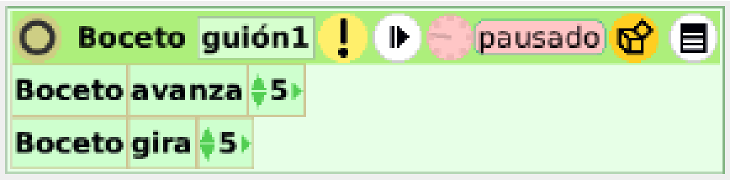


Figura 6.5. Un guión de programación con dos mosaicos: avanza y gira. Los valores 5 de los mosaicos son modificables.

Es importante observar que cuando los dos mosaicos están en el mismo guión *avanza5* y *gira5*, el coche grafica una circunferencia. Esta presentación es aparentemente una circunferencia, lo cierto es que ésta es un polígono de 72 lados, porque el ángulo de giro es 5° sexagesimales (la modificación de los valores más pequeños en ambos mosaicos sería próxima a la gráfica de una circunferencia. Sin embargo, para los niños se muestra como una circunferencia por su apariencia. Según Papert, dibujar un círculo pone al niño en contacto con un racimo de ideas que están en el corazón del cálculo y que puede ser invisible para muchos lectores, […] porque el cálculo equivale a ciertas manipulaciones formales de símbolo; en cambio, el niño en el incidente del círculo de la tortuga (refiriéndose a Logo) no está aprendiendo el formalismo del cálculo, sino su utilización y su *significado* (Papert, 1982, p. 85).

Si cambiamos los valores de *avanza5* y *gira5* por ejemplo a *avanza100* y *gira90* respectivamente, se grafica un cuadrado de 100 pixeles de lado. Aquí, se inicia la geometría de rectas y ángulos para generar otras figuras geométricas. Además al utilizar los dos mosaicos en un solo guión, se genera un polígono; aquí surge el concepto de ángulos complementarios y suplementarios (ver Figura 5.24), porque tiene que ver con el cambio de dirección del coche al desplazarse en un determinado sentido.

Por lo tanto, la división de una figura se puede realizar de dos maneras, una, haciendo divisiones a la figura y, otra, agrupando figuras del mismo tamaño y forma para construir un objeto (el todo). Este es el caso de la investigación que hemos realizado. Para redistribuir el plano de la Casa de las Ciencias los niños/as tuvieron que construir un triángulo con las medidas de una parte; luego tuvieron que hacer con ese modelo varias figuras alrededor de un punto hasta completar el octágono que es el plano deseado.

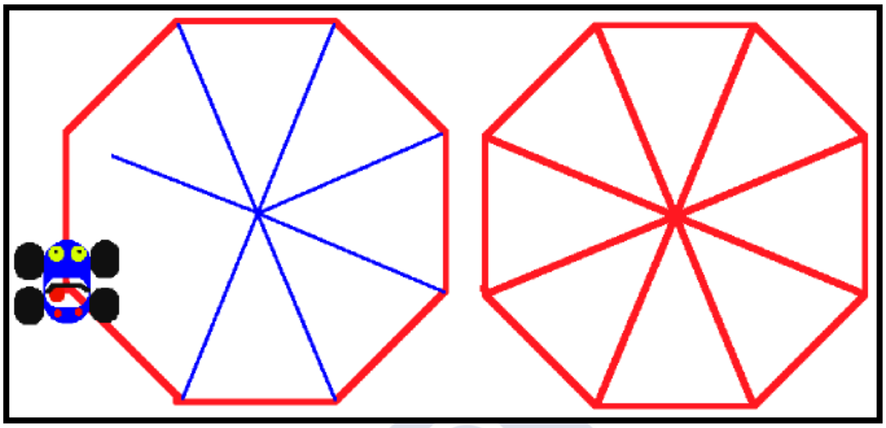


Figura 6.6. La primera (izquierda) muestra que se puede realizar trazos para repartir (con la paleta de dibujo); en la segunda (derecha) se agrupó triángulos para obtener la división (mediante programación).

Otra elemento importante a considerar es la abstracción reflexiva. Según Dubinsky (1991, p. 101) se trata de la reversibilidad propuesta por Piaget, ya que la construcción del concepto de fracción no es necesariamente la división de un objeto; sino la agrupación de las partes para construir el todo (la redistribución del plano de la Casa de las Ciencias). Aquí los estudiantes conciben la construcción del concepto de fracción en las dos acepciones, de repartir o separar y unir o juntar las partes. Esto se explica de la siguiente manera: primero, al dividir un *objeto* en “n” partes, se obtiene que una parte es “1/n”; segundo, el *todo* es la agrupación de las partes, es decir, si una parte es “1/n” el todo está conformado por la agrupación de $\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+...+\frac{1}{n}}_{n\ veces}=1$; con n $\neq$ 0, se observa con claridad la reversibilidad en la concepción del concepto de fracción.

6.3 Secuencia del diseño de guiones con Squeak Etoys en la construcción del concepto de fracción

Para iniciar la secuencia de la construcción, se han tenido en cuenta las etapas que los niños han desarrollado. El proceso muestra dos momentos:

Primero

Proponer una hipótesis para la forma geométrica que tiene la Casa de las Ciencias, se realizó una exploración en Internet con el objeto de ubicar el edificio y visualizar imágenes que permitan determinar su estructura geométrica visto desde el espacio[18] como ya hemos visto en el capítulo V.

La forma geométrica de la Casa de las Ciencias (un octágono), permitió a los niños proponer las posibles divisiones del plano. Como era necesario determinar la forma exacta, se presentó un plano de la Casa de las Ciencias (ver Figura 4.13, Capítulo IV).

[18] Ubicación en Internet de la Casas de las Ciencias, el Parque Santa Margarita de la ciudad de la Coruña, España; visto por Google Earth, que permite visualizar desde el espacio. http://maps.google.com/maps?hl=en&cp=21&gs_id=39&xhr=t&bav=on.2,or.r_gc.r_pw.r_qf.,cf.osb&biw=1210&bih=646&wrapid=tljp1339592306333045&um=1&ie=UTF-8&q=casa+de+las+ciencias+coru%C3%B1a&fb=1&hq=casa+de+las+ciencias+coru%C3%B1a&hnear=casa+de+las+ciencias+coru%C3%B1a&cid=0,0,14276019753596904368&ei=q4DYT6yDMo-U0QXnyNWdBA&sa=X&oi=local_result&ct=image&resnum=4&sqi=2&ved=0CBQQ_BIwAw

Figura 6.7. Vista espacial con Google Earth de la Casa de las Ciencias, ubicado en el parque Santa Margarita de la ciudad de la Coruña, España.

Luego tuvieron que experimentar enfrentándose al desafío de realizar una programación para rediseñar el plano de la Casa de las Ciencias mediante el diseño de un triángulo.

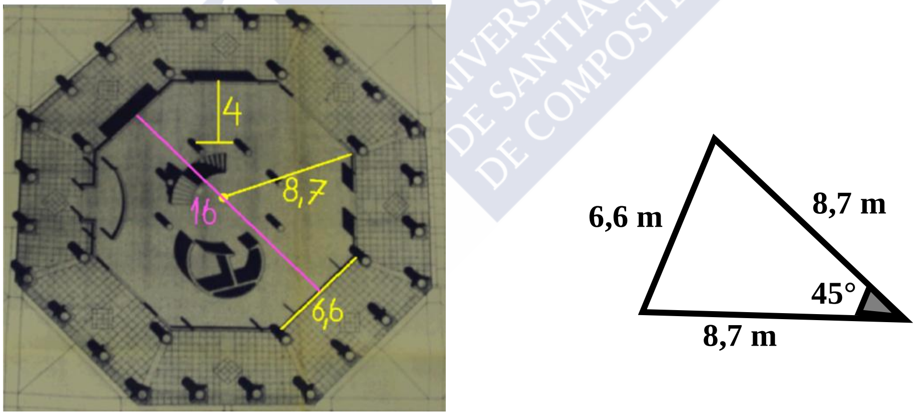


Figura 6.8. Medidas del plano y su presentación en triángulos para programar.

Cuando utilizamos los valores del triángulo con Squeak Etoys (en pixeles) se obtenía un triángulo muy pequeño; entonces fue necesario cambiar los datos de los lados del triángulo multiplicando por 20, y se obtuvo el siguiente triángulo.

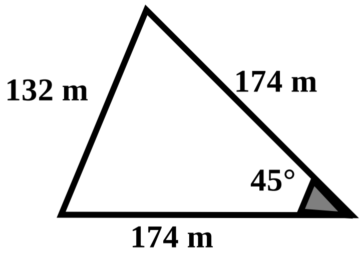
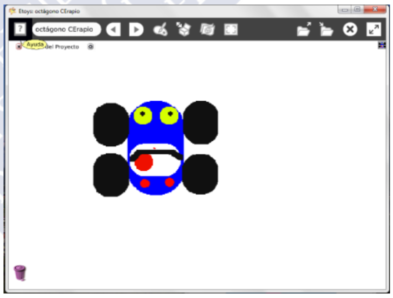
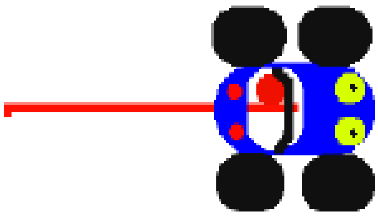


Figura 6.9. Nueva medida del triángulo para simular la redistribución del plano.

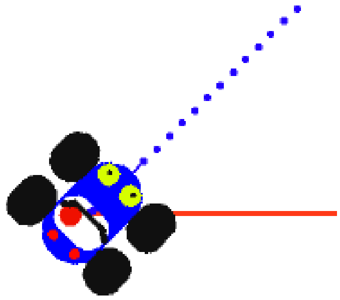
Segundo

Una vez realizado el diseño en el cuaderno, los niños pasaron a diseñar sus programas a través de los guiones con Squeak Etoys.

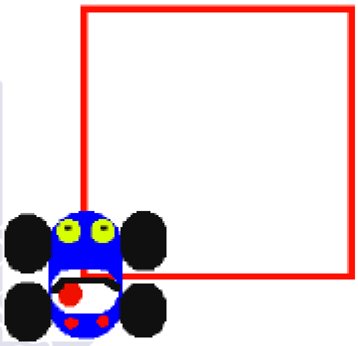
Tabla 6.1. *Programaciones y figuras con Etoys que muestran la redistribución del plano de la Casa de las Ciencias.*

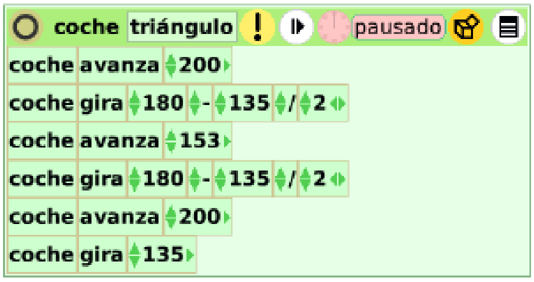
Guiones de la programación	Resultados
Los niños inician creando un objeto inerte en el mundo de Etoys. Luego mediante la programación le convierten en objeto dinámico. Los elementos básicos de la programación para este son *gira* y *avanza*.	
 Avanza5, significa que el coche avanza 5 pixeles por cada clic que se hace en el signo de exclamación. En cambio cuando hace clic en gira, el coche solamente realiza giro sobre su eje.	

La línea roja indica que el coche avanza 200 pixeles en un solo clic; luego cambia su dirección hacia la línea de puntos que indica el ángulo de giro.

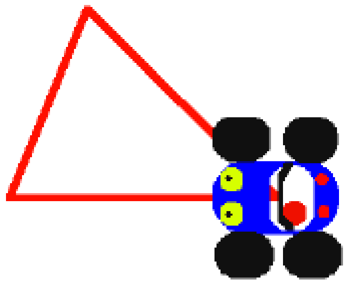


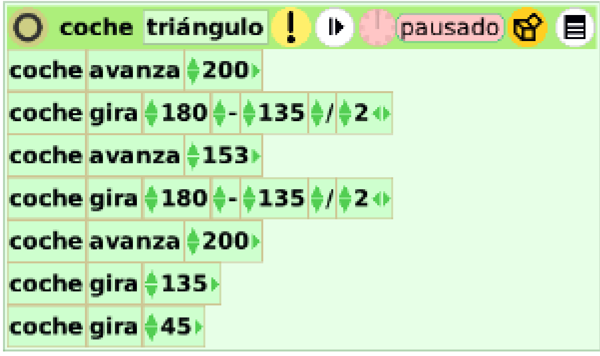
¿Por qué el cuadrado?; porque es fácil comprender el ángulo de giro y su diseño de programación del proyecto.

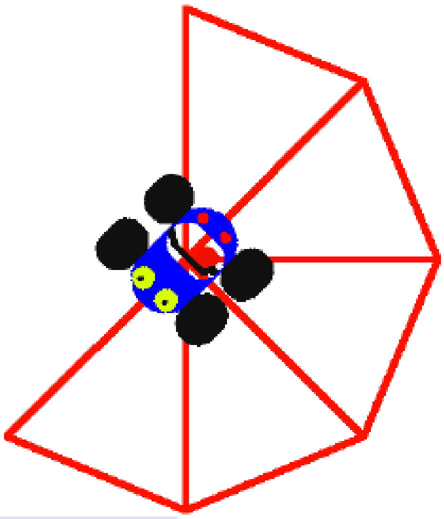




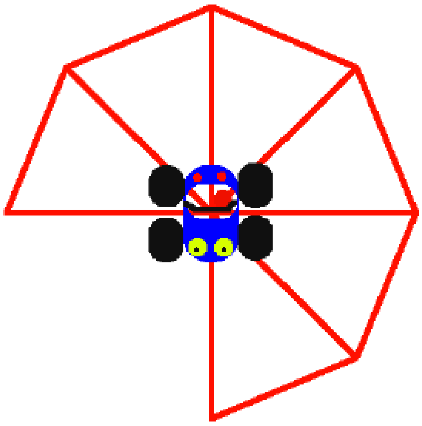
Teniendo como base el diseño del cuadrado se construyó el guión que diseña el guión del triángulo. (Ver Figura 5.29)



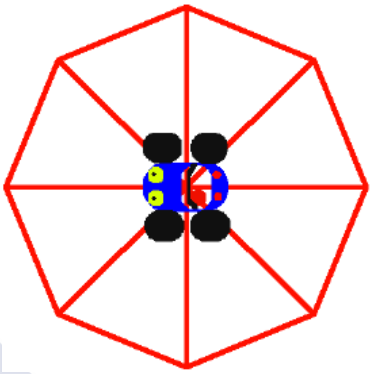
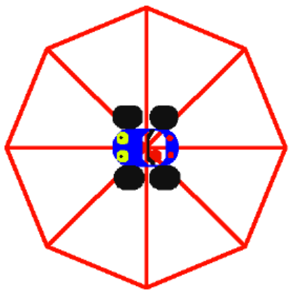
<table>
<tr>
<td>


Los niños realizaron esta programación. Y para construir el octágono hicieron clic 8 veces en  el signo de exclamación.
Una forma de programación realizada por los niños.
</td>
<td>

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>


Otros niños realizaron esta programación. Y para construir el octágono hicieron clic 8 veces en  el signo de exclamación.
¿Por qué ocho veces?
Porque la programación ejecuta un triángulo y un giro de 45 grados. Entonces para completar el octágono tuvieron que realizar ocho veces la ejecución.
</td>
<td>

</td>
</tr>
</table>

Finalmente presentamos otras alternativas de programación para graficar el octágono; una de ellas es extensa, en cambio la otra es una programación simplificada. Esto se debe a que cada programación se utiliza como rutina o sub rutina en la programación; es decir, cada guión vuelve a utilizarse como mosaico. Los niños no llegaron a realizar estas programaciones debido a las limitaciones de nivel y tiempo.

 Programación extensa, que un clic en , se tiene la figura totalmente distribuida.	
 Programación corta y elegante, pero muy sofisticado.	

6.4 El diseño de los proyectos con Squeak Etoys

Según la INECSE (2005, p. 20), para PISA las ideas, estructuras y conceptos matemáticos se han generado y constituido como herramientas para organizar los fenómenos de los mundos natural, social y mental. En tal sentido, para enfrentarse a tales situaciones requiere que el estudiante tenga ciertas competencias: (a) Pensar y razonar. (b) Argumentar. (c) Comunicar. (d) Modelar. (e) Plantear y resolver problemas. (f) Representar. (g) Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones. El estudio PISA considera que los logros de los estudiantes en matemáticas se pueden expresar mediante este conjunto de competencias, ya que describen los procesos que se requieren para un domino matemático general.

Asimismo, el Decreto 130 (2007, p. 8) considera la competencia matemática como la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y especiales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral.

Estas consideraciones, muestran que las clases de matemáticas promueven ciertas competencias para que los alumnos aprendan ciertas habilidades y enfrentarse a situaciones en su quehacer diario. En este modelo clásico de aprendizaje, según Stager (2005, p. 7) los niños y niñas usan los proyectos y temas (contenidos) para aprender ciertas habilidades o conceptos. Es decir que “El aprendizaje es la adquisición de nuevos conocimientos y habilidades” (Kelly, 2001, p. 1).

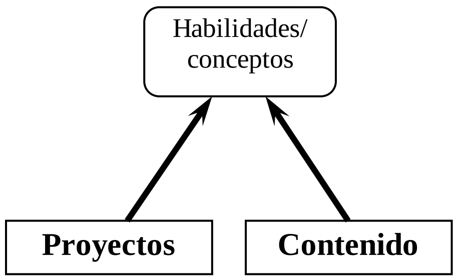


Figura 6.10. Modelos de aprendizaje clásico. **Fuente**: (Stager, 2005, p. 7)

Esta propuesta del aprendizaje está relacionada con las clases que desarrollan los profesores considerando experiencias, desarrollo de ejercicios, resolución de problemas, etc., con la finalidad de desarrollar competencias de los estudiantes (habilidades, destrezas, razonamiento lógico).

Desde la corriente del construccionismo, se sugiere que la mejor forma de aprendizaje se genera a través de la construcción de objetos o cosas compatibles, los proyectos no son los medios para llegar al fin, sino que son, los mismos proyectos esos objetivos. Los proyectos poseen un sistema de depuración, experimentación, investigación, colaboración, perspectiva, creatividad e ingenio (Stager, 2005, p. 7). Por lo tanto, los niños y niñas, al momento de realizar las experiencias, tuvieron presente los componentes básicos del concepto de fracción, así como sus habilidades y capacidades para diseñar sus proyectos con Squeak Etoys.

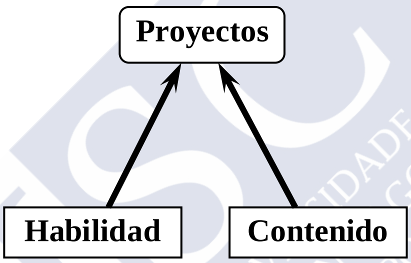


Figura 6.11. Modelo de aprendizaje construccionista. **Fuente**:(Stager, 2005, p. 7)

Sin embargo, la propuesta de Stager no es dinámica, muestra solamente una direccionalidad para la utilización de las habilidades y destrezas necesarias para desarrollar los proyectos. Significa que no hay progreso en el desarrollo de las capacidades luego de haber realizado el diseño de los proyectos. ¿Dónde nace la creatividad, las habilidades y otras competencias en el sujeto? ¿O el aprendizaje es la adquisición de nuevos conocimientos, habilidades y destrezas, es decir, un cambio adaptativo, ya sea de conducta o la creencia, como sostienen la propuesta más clásica? (Kelly, 2001, p. 1).

Consideramos que al iniciar una interacción con un objeto, el sujeto pone en juego las competencias que posee; sin embargo, estas habilidades y destrezas no son suficientes cuando se enfrenta a nuevos problemas, entonces el sujeto intenta buscar en distintas direcciones y reformular dicha interacción con el objeto. En esta nueva interacción, el sujeto mejora sus habilidades y destrezas o desarrolla nuevas habilidades y destrezas, pasando de las competencias iniciales (H) a un nivel superior de competencias (H') (ver Figura 6.12). En tal sentido, al realizar sus experiencias (simulaciones), y diseñar los proyectos (interacción con el mundo real) los niños/as desarrollan también sus competencias. Este proceso es dinámico, porque cada interacción constituye un nuevo desafío, una nueva fuente que facilite la adquisición de nuevas competencias de orden superior.

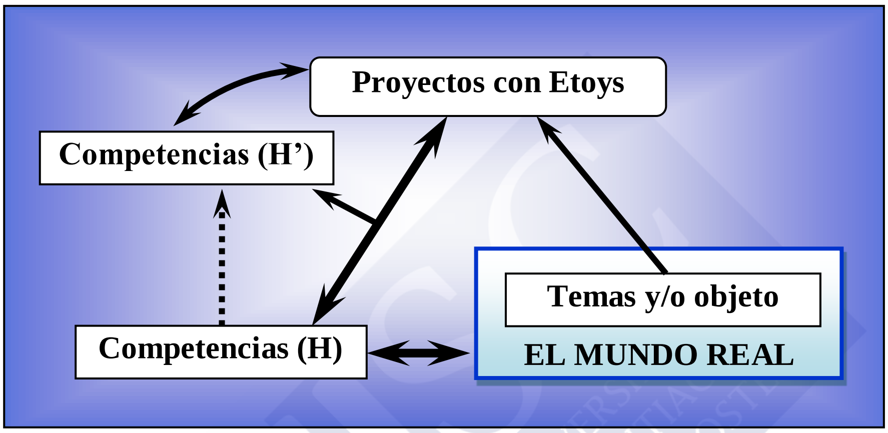


Figura 6.12. Modelo del desarrollo de las competencias en función de la interacción con el mundo real.

Por otra parte, al diseñar los proyectos, los niños/as realizaron la simulación de situaciones como la Casa de las Ciencias; a este fenómeno Jean Piaget (1984) le denomina imitación diferenciada; entendiéndose como la capacidad de reproducir un patrón muy complejo de acciones en la ausencia de un modelo. Este aspecto abre las puertas para que otras manifestaciones de función simbólica aparezcan, como los juegos de simulación, o monólogos que se transfieren a otras formas de reconstrucciones verbales con compañeros reales e imaginarios (Ackermann, 1993, p. 6).

A través de las acciones virtuales en el micromundo de Etoys, los alumnos negocian la simulación de la manera más sofisticada abstrayéndose del mundo real. Siendo estos escenarios los laboratorios donde acontece un aprendizaje real.

6.5 Roles del profesor investigador y del profesor de la escuela

El profesor investigador ha pasado por diferentes roles durante el proceso con el objeto de sostener y llevar adelante los objetivos de la investigación. En el primer momento de la entrada en el campo, el rol ha sido el de observador, participante y no participante durante todo el proceso de trabajo. Sin embargo, también ha actuado como diseñador de la propuesta de enseñanza y como profesor de los niños orientando el proceso de ejecución del proyecto. Esta triple función ha ocasionado la necesidad de realizar un trabajo exhaustivo, tanto teórico, como actitudinal. Al llevar adelante la propuesta se asumía una posición de enseñanza que se suponía internalizada y esto propició la posibilidad de vivir en primera persona las contradicciones y problemas que puede tener un docente en el día a día de las clases con niños de esa edad cuando llevan adelante un proyecto de estas características. Por otra parte, sin perder de vista en ningún momento el rol de observador del proceso, podemos decir que se produjo, sin proponerlo explícitamente, un proceso de investigación sobre la acción. Después de cada clase, se revisaban los avances de los niños, se observaban los videos, se analizaba el proceso y se reprogramaba la propuesta en función de las respuestas de los niños y del análisis crítico del trabajo realizado. Así es como aparecen algunas cuestiones que ya se han incorporado en el punto referido a las limitaciones que ha tenido el trabajo y que se producen cuando un proyecto pasa del papel a la realidad y requiere ajustes y reajustes. El trabajo realizado se puede resumir en lo siguiente:

a) Se inicia con el diseño de varios proyectos de situaciones construccionistas (diseño de experiencias que implican ideas poderosas), luego se selecciona uno que permita poner a prueba el ansiado proyecto mediado por Etoys. Para tal efecto, se adaptaron las unidades didácticas al proyecto curricular de centro (los contenidos de fracciones) y al proyecto educativo de centro (propuesta de competencias). Finalmente, se eligió la escuela donde se desarrollaron las experiencias.

b) Durante el desarrollo de las experiencias en el laboratorio de informática:

- Se inicia con reuniones de coordinación con el Profesor A y el Profesor B para el inicio de las experiencias.

- Antes del inicio de cada sesión en el laboratorio se colocaron tres cámaras de video que filmaron las sesiones; luego se recogieron al finalizar cada sesión.

- En la primera sesión, se hizo la presentación del profesor investigador (PI), luego se entregó a cada estudiante la libreta de notas (cuaderno) donde anotaron todas las ocurrencias (se explicó todo los detalles de uso), también se explicó que los diseños de proyectos deberían guardarse en una carpeta del ordenador cada determinado tiempo y luego copiar en un lápiz de memoria.

- Al inicio de cada una de las sesiones se ofrecieron recomendaciones para las tareas a realizar durante la sesión de una hora, en algunos casos, los niños/as realizaron exposiciones durante 10 minutos sobre las actividades realizadas en la sesión anterior, las mismas tenían como objetivo resumir los resultados obtenidos o aclarar algunas dificultades en la programación. En este espacio, cada niño/a tuvo la oportunidad de participar y expresar libremente lo que ha comprendido o las dificultades encontradas.

- En otros momentos, ante cierta dificultad por parte de la mayoría de los niños/as, el rol del PI fue de guiar, orientar y ofrecer algunas pistas, para tal efecto en el momento preciso se trazaron gráficos (cuadrado y el triángulo) en un papel grande que se pegó en la pizarra, con la finalidad de ayudar a orientar la programación.

- Durante el desarrollo de las sesiones, el PI esperaba observar cómo los niños trabajaban en pareja sus proyectos ‘en silencio’; pero la experiencia demostró que esto no era posible, ya que casi todo los niños/as levantaban la mano para solicitar alguna ayuda o necesitaba explicación durante el proceso; entonces la función del PI fue la de ofrecer algunas «pistas» para que continúen con el proceso; porque existía una diversidad de preguntas (que el coche había desaparecido, que los números de los mosaicos no funcionaban, que la figura que el coche generaba era muy bonita, etc). en algunos momentos inclusive el Profesor B trataba de ayudar a los niños; en otros casos discutían entre parejas sobre cómo diseñar o proponer sus actividades.

- Se esperaba que si un niño tenía dificultad, se hacía un alto en la sesión y luego otro compañero de clase podía explicar la solución o en caso contrario el PI ofrecía pistas; este fenómeno no ha ocurrido por dos razones: (a) porque cada niño/a diseñaban sus proyectos, unos ya habían avanzado y otros realizaban exploraciones con Etoys (les resultaba muy divertido); es decir, había actividades heterogéneas; y (b) el tiempo era realmente escaso para los niños, debido a estas exploraciones y a algunas dificultades técnicas algunos se sentían incapaces de avanzar con sus proyectos.
- Al finalizar la experiencia en la octava clase, se recogieron los lápices de memoria y los cuadernos para su procesamiento. Fue un momento difícil, porque algunos niños preguntaban si continuábamos con una próxima experiencia, decían porque "era divertido hacer investigaciones con Etoys".

c) Finalizada las clases, se concreta una cita con el Profesor B para realizar una entrevista de opinión de las experiencias realizadas, ya que el profesor B fue partícipe y testigo de cada una de las sesiones.

Mientras tanto el rol del Profesor B de aula fue de:

a) Conducir a los niños/as del salón de clases al laboratorio de informática.

b) Apoyar en el desarrollo las actividades explicando o aclarando frente a la dificultad del investigador.

c) Resolver y dar pistas a las inquietudes y preguntas de los niños y niñas.

d) Ayudar, desde su punto de vista, a guardar cierto orden en el laboratorio.

e) Al finalizar la sesión, conducir a los niños a su salón de clases.

Este tipo de actividades realizadas rompe con los esquemas tradicionales, cuestión que podría ser una hipótesis explicativa de que en ciertos momentos, el profesor “B”, tuvieses dudas sobre los logros de la propuesta a pesar de su entusiasmo ante la potencialidad de la experiencia. En algunos momentos le quedaba la duda de si realmente los niños estaban aprendiendo acerca de fracciones, según declara en la entrevista. Esto ha ocasionado que a espaldas del PI, haya realizado clases paralelas para que los niños/as no tengan dificultades en los exámenes propuestos en la escuela. Esta acción del profesor “B” no ha afectado en el proceso del desarrollo del concepto de fracción, ya que los niños han desarrollado actividades (operaciones básicas de fracciones) y resolución de problemas propuestos en los libros de texto, muy diferentes a las trabajadas en las sesiones con Squeak-Etoys.

Sin embargo, resulta un incidente crítico de la investigación muy interesante que nos permite analizar algunas cuestiones relativas a lo que sucede en una escuela cuando se pretende llevar a cabo propuestas como las que se han desarrollado en esta investigación. El análisis de esta situación podríamos resumirlo en lo siguiente:

1- Motivos de aceptación de la propuesta. De las entrevistas se desprenden motivos explícitos e implícitos que llevan a este docente a aceptar participar en la propuesta. Por un lado, sus propias limitaciones con respecto a propuestas que implican el uso de ordenadores en el aula, le llevan a pensar que esto podría significar un apoyo importante sin que signifique mucho esfuerzo por su parte. Cabe destacar, sin embargo, en algún sentido, una idea implícita con respecto a este uso, como la necesidad de estar a la moda, o de adaptarse necesariamente a las circunstancias, sin cambiar sustancialmente la manera en que hasta el momento se desarrollan las clases. Además del status que puede tener en un centro concertado como el seleccionado, el conocimiento y uso de herramientas informáticas en el aula.

2- Conocimiento de la propuesta: Cuando se le presenta la propuesta a la profesora se le ofrece tiempo para su análisis y se trabajan con ella los pros y contras que contiene, además de estar abiertos a cualquier aportación que pueda realizar. Sin embargo, se produce una aceptación rápida, sin profundizar en el significado profundo de un proyecto como el que iban a realizar los niños, tampoco ha hecho hincapié en los conceptos matemáticos que estaban en juego a la hora de construir el concepto de fracción. Una hipótesis explicativa a esta cuestión podría estar apoyada en la idea de que los niños ya habían desarrollado actividades con Squeak Etoys el año anterior y ella no había sido capaz de continuar con la experiencia, quizás quería ver con sus propios ojos, qué significaba eso y que consecuencias podría tener en el aprendizaje de los niños. Por otro lado, se ha colocado en todo momento, en el lugar de observador-evaluador de la propuesta. Analizando el proceso de los niños y tomando decisiones al margen, sin comentárselas al PI, lo cual indica que jugaron allí algunas preconcepciones significativas. Entre ellas, quizás la más relevante es la presión que viven los docentes por la evaluación de los niños. El docente siente que será evaluado él mismo, en base a los resultados de sus alumnos. Si la evaluación está centrada en los resultados de los ejercicios que los niños muestran en un examen, sin preocuparse por la comprensión que éstos tienen de los conceptos ni de que las respuestas sean mecánicas y no razonadas, es comprensible su actitud y el "miedo" a que los niños no hayan reforzado la "mecánica" de los ejercicios sobre fraccionas durante las sesiones de clase en el laboratorio de informática y, por lo tanto, la decisión de realizar clases de apoyo y de refuerzo con ejercicios que posibiliten el éxito en las pruebas de sus alumnos. Así es como en la entrevista expresa: "*Pues si lo iba a comentar a usted; no tuve problemas, porque yo vine trabajando en forma paralela con* *ellos. Pues trabajé el tema de fracciones con ellos, aparte de lo que trabajó usted, para que llegaran a concretar sus conocimientos"* (2EB: p. 2. Preg. 5).

3- Su preocupación por los resultados y por lo que denomina "concretar" le impidió visualizar el proceso de los niños. Así es como le pasa desapercibido, por ejemplo, el avance de una niña, que ella misma considera muy atrasada, pero que en el trabajo con Squeak, logra avances significativos.

4- La estructura curricular rígida planteada en la escuela (dos semanas por unidad didáctica) ha entrado en plena contradicción con la propuesta, limitando claramente los resultados conseguidos. Los niños necesitan más tiempo para construir por si mismos los conocimientos y confrontar hipótesis sobre sus ideas previas. Un tiempo que la escuela no le asigna, pensando que es más importante avanzar sin tener en cuenta la comprensión. Sin embargo, la experiencia ha sido sumamente provechosa para el alumnado que en reiteradas ocasiones ha solicitado volver a este tipo de actividades. Una propuesta como la que se ha presentado, entra en contradicción con las formas habituales de hacer en la escuela y puede ser considerada como una "pérdida de tiempo" según el enfoque desde donde mire el proyecto.

.

Conclusiones específicas

7. CONCLUSIONES ESPECÍFICAS

El principal objetivo de la tesis ha sido el de identificar el proceso de desarrollo del concepto de fracción por parte de los niños de 5to de primaria, haciendo uso de la tecnología Squeak Etoys. Proceso que se enmarcó dentro de un ambiente del aprendizaje construccionista, en una experiencia realizada en una Escuela Concertada de Santiago de Compostela. El proyecto siguió las pautas de la unidad de aprendizaje del 5to grado de primaria propuesta en el proyecto curricular de centro de la escuela, y la experiencia que los niños diseñaron fue a través de proyectos (programación en Etoys), para tal efecto se simuló la redistribución de la Casa de las Ciencias de la Coruña que tiene una forma geométrica octogonal. Como resultado, se presentan en este capítulo, la secuencia de la construcción del concepto de fracción y los elementos matemáticos que se involucran en esta construcción, haciendo uso de la herramienta tecnológica Squeak Etoys.

Otro propósito de esta tesis, fue la implementación de la *descomposición genética* del concepto de fracción. El objetivo fue identificar, analizar y comprender los niveles de constructos mentales que alcanzaron los estudiantes al construir el concepto; es decir, desde el nivel muy elemental de *acción* hasta llegar el nivel superior de *esquema*. El proyecto también ofreció la oportunidad para investigar y revalorar, las bondades, ventajas y desventajas del lenguaje de programación Squeak Etoys como una herramienta educacional.

Conclusión 1

Génesis del aprendizaje del concepto de fracción en estudiantes de 5to grado de educación primaria.

Siendo el proceso del aprendizaje del concepto fracciones muy complejo como cualquier concepto de las matemáticas, consideramos que el primer momento de su aprendizaje se encuentra en la interacción del sujeto con los objetos del entorno real, ya sean primitivas (abstracciones empíricas) o interacciones iniciales (cuando ya tienen cierto conocimiento previo del objeto). Al realizar las interacciones los niños/as extraen las propiedades del objeto, luego le asignan ciertas categorías; en este momento se podría decir que nace el concepto.

Por ejemplo, si el niño tiene una manzana y desea compartirla con alguien, necesita partir la manzana; entonces, el niño introduce la idea de dividir la manzana y realiza tal acción. Otro ejemplo, si el niño tiene una cierta cantidad de caramelos y comparte unos cuantos con su compañero; aquí es menos visible el concepto de fracción, porque no se está dividiendo, pero el concepto está implícito. Entonces, el concepto de una fracción tiene su origen en las acciones e interacciones que realiza el sujeto con su entorno, pasando a ser construcciones mentales en interrelación con otros conceptos, inclusive conceptos primitivos y que finalmente son materializados mediante símbolos.

El análisis ha seguido el proceso de construcción del concepto de fracción desarrollado por los niños/as, quienes simularon haciendo diseños de programación con Squeak Etoys. Los resultados más sobresalientes muestran con claridad que cada niño/a tiene diferente estilo de aprendizaje, pero en este tipo de trabajo, lo que marca diferencia es su abordaje en equipo; aunque algunos estudiantes prefirieron trabajar solos.

Se sabe que los niños ya conocían el concepto de fracción desde el 4^{to} grado, sin embargo, en este caso, construyeron el concepto desarrollando una programación con Squeak Etoys etapa por etapa hasta llegar a rediseñar el plano de la Casa de las Ciencias.

En la simulación con Etoys, el niño/a, introduce una serie de conceptos iniciales al proyecto. Como el proyecto está orientado a la redistribución del plano de la Casa de las Ciencias, y en la idea de que los niños/as construyan y reconstruyan, mediante la interacción directa con el medio. El resultado es la construcción de conocimiento (Ackermann, 1996), sobre los elementos básicos geométricos que son:

recta y ángulo. Estos elementos son fundamentales porque sirven para trazar y medir; así como para diseñar otros objetos como el triángulo y el cuadrado y luego con ellos realizar las construcciones del concepto de fracción.

En este tipo de aprendizaje, el conocimiento no se logra mediante un simple recuerdo de la información exterior, sino que proviene de dos tipos de actividades: la coordinación de las acciones y la interrelación entre los objetos.

Conclusión 2

Diseño de proyectos para desarrollar el concepto de fracción utilizando Squeak Etoys, como un ambiente de aprendizaje dentro del paradigma del construccionismo

En el proceso de desarrollo del concepto de fracción, los estudiantes del 5to de primaria por un período de dos semanas, se involucraron en diseñar proyectos de programación con Squeak Etoys para rediseñar el plano de la Casa de las Ciencias de la Coruña. Cada etapa de diseño del proyecto resultaba una etapa previa para la construcción del concepto, respetando una secuencia de objetos matemáticos, tales como el concepto de medida (*avanza*), números enteros, recta, ángulo (*giro*), circunferencia, cuadrado, triángulo y octágono dividido en ocho partes. Y de otros conceptos matemáticos que denominamos secundarios que no se perciben directamente, éstos son: ángulos suplementarios, suma de ángulos de un triángulo es 180°, pares ordenados y conceptos vectoriales tales como distancia (módulo), dirección, sentido, traslación; así como el marco de referencia. Finalmente, completaron el diseño del proyecto de programación rediseñando el plano de la Casa de las Ciencias que permitió avanzar en la construcción del concepto de fracción. Los estudiantes en éste tiempo también lograron aprender a programar con Squeak Etoys, desarrollando ciertas habilidades en el uso del programa.

Para redistribuir el plano de la Casa de las Ciencias de la Coruña, los niños/as diseñaron proyectos secuenciados en cada sesión y elaboraron un software que permitió realizar dicha redistribución, esta experiencia ilustra el proceso de construcción del concepto de fracción haciendo uso de Squeak Etoys; proceso profundamente inspirado en la programación del Logo, y los trabajos realizados por Papert, Harel y Kafai.

Figura 7.1. Alumnos finalizando el diseño de los proyectos en sus ordenadores.

Al realizar el diseño de software con Etoys para construir el concepto de fracción, los niños/as tuvieron que recurrir a conceptos matemáticos previos, estos elementos son secuenciados en su construcción siendo el punto de partida el segmento y el ángulo (dos conceptos geométricos claves); luego la circunferencia, el cuadrado y el triángulo. La triangulación es otro concepto nuevo iniciado indirectamente al rediseñar el plano de la Casa de las Ciencias; porque "triangular es descomponer un polígono en triángulos" (Abásolo, 2002, p. 24), concepto que es utilizado en las ingenierías para levantar planos.

Es importante introducir este concepto de sistema de referencia (generalmente usado en física), porque un espacio, como en el mundo de Etoys, permite describir la ubicación de un objeto en un punto denominado par ordenado. Un marco de referencia es el fundamento para describir la posición y el movimiento de los objetos (Rena, 2008). Este concepto fue utilizado constantemente por los niños/as para ubicar el objeto (coche) en movimiento dentro del mundo de Etoys y describir su posición y ubicación.

A diferencia de los trabajos realizados por Piaget que se basaron en dividir objetos, como es el caso de una tarta de pequeñas partes iguales (Piaget, Inhelder, & Szeminska, 1981, p. 333), donde los niños no pudieron relacionar las partes con el todo. Los niños/as que trabajaron con Squeak Etoys al ver el resultado final de la construcción del concepto de fracción, comprendieron que este concepto no solamente implica dividir, sino que también se puede comprender como agrupar partes para formar el todo, en donde cada una de las partes es una fracción.

Con esta experiencia, los niños/as se encuentran en condiciones de continuar con nuevos proyectos, porque vivieron y fueron actores de un proceso de trabajo con Squeak Etoys. Para cualquier situación de entorno real, primero propondrán una hipótesis y luego pueden verificarla haciendo el diseño de programación.

Por lo tanto, concluimos que existe una fuerte evidencia para apoyar el trabajo de los niños, ya que el diseño de proyecto se presenta como un vehículo poderoso para el aprendizaje y desarrollo cognitivo mediado por Squeak Etoys. Para I. Harel, (1991) el diseño de proyectos y el enfoque interdisciplinario representan las bases del construccionismo de Papert, que permite el aprendizaje en acción.

Conclusión 3

Niveles de constructos mentales que alcanzan los estudiantes en la concepción del concepto de fracción al diseñar proyectos de fracciones con Squeak Etoys.

La descomposición genética diseñada por Asiala et al. (1996) fue concebida con el propósito de evaluar la comprensión del aprendizaje de las matemáticas en el nivel universitario desde la óptica del pensamiento matemático avanzado. Sin embargo, para Harel y Sowder (2005, p. 27), el pensamiento matemático avanzado no solo puede darse en los niveles más altos de las matemáticas, sino que también es potencialmente concebido en la escuela elemental. Por consiguiente, como la investigación se llevó a cabo haciendo uso de Squeak Etoys, y teniendo en cuenta que ésta promueve un aprendizaje constructivista mediante la abstracción reflexiva; se propuso el diseño de la descomposición genética para realizar el estudio de la compresión del concepto de fracción con niños de la escuela elemental.

Al diseñar los proyectos para realizar las distribución del plano de la Casa de las Ciencias y con ellos construir el concepto de fracción, los niños/as pasaron por diferentes niveles de constructos mentales, desde el nivel de *acción*, *proceso*, *objeto* y *esquema*; siendo la estructura de *esquema* (S1, S2, S3, S4 y S5) el nivel más alto en la construcción del concepto de fracción y al que un alto porcentaje de niños/as lograron alcanzar. Algunos niños/as no lograron alcanzar este nivel quedándose en el de *proceso* o en el de *objeto* (O1, O2, O3 y O4), eso no significa que los niños/as sean incapaces, sino que en el desarrollo del diseño de proyectos cada niño/a trabajó de acuerdo a su capacidad; es decir que cada uno tienen diferentes velocidades en el procesamiento intelectual, así como en el dominio de hardware y software.

El resultado nos muestra que 19 alumnos de 25 en total diseñaron la redistribución del plano de las Casa de las Ciencias, quienes alcanzaron el nivel de constructo mental de *esquema* del siguiente modo:

S.1. Concibe el concepto de una fracción como la división de un objeto en varias partes iguales mediante el uso de Squeak Etoys.

S.2. Construye fracciones con el elemento triángulo (la distribución de la Casa de las Ciencias), y otros fracciones haciendo uso de Etoys.

S.3. Construye las fracciones con el elemento rectángulo (contenedor de basura), u otras divisiones haciendo uso de Etoys (pocos alcanzaron).

S.4. Concibe el concepto de una fracción como la unión de varias partes iguales para formar un objeto dividido, haciendo uso de Squeak Etoys.

S.5. Diseña y explica las diversas situaciones del contexto de la vida que involucran al concepto de fracciones.

No obstante, no basta decir que simplemente se alcanzó el nivel de esquema; en este nivel los niños/as conciben el concepto de una fracción no solamente como dividir, repartir en varias partes, sino también los niños/as generalizan que se puede construir un objeto dividido como la agrupación de partes y formar un todo y viceversa. Meel (2003) considera que la *generalización* es la forma más simple y familiar de la abstracción reflexiva, debido a que se relaciona con la aplicación de un esquema ya existente para un nuevo conjunto de objetos.

En este nivel, los niños/as se ubican en las etapas de *Inter* y *Trans*. En la etapa *Inter*, los niños y niñas relacionan las diferentes acciones, procesos y objetos que involucran la construcción. Por ejemplo, la interrelación entre el diseño de rectas y ángulos y el diseño del triángulo; la interrelación del proceso de construcción del triángulo con el proceso de construcción del octágono; es decir, que se interrelacionan entre sub-esquemas. En cuanto al nivel *Trans*, los niños/as diseñaron sus proyectos llegando a una estructura coherente; no solo diseñaron y relacionaron entre sub-esquemas, sino que comprendieron que todo es una estructura interrelacionada; siendo éste un nivel de comprensión del pensamiento matemático avanzado. A diferencia del nivel *Intra* que solamente el alumno/a centra su atención en el concepto en forma aislada; El siguiente Figura ilustra el proceso.

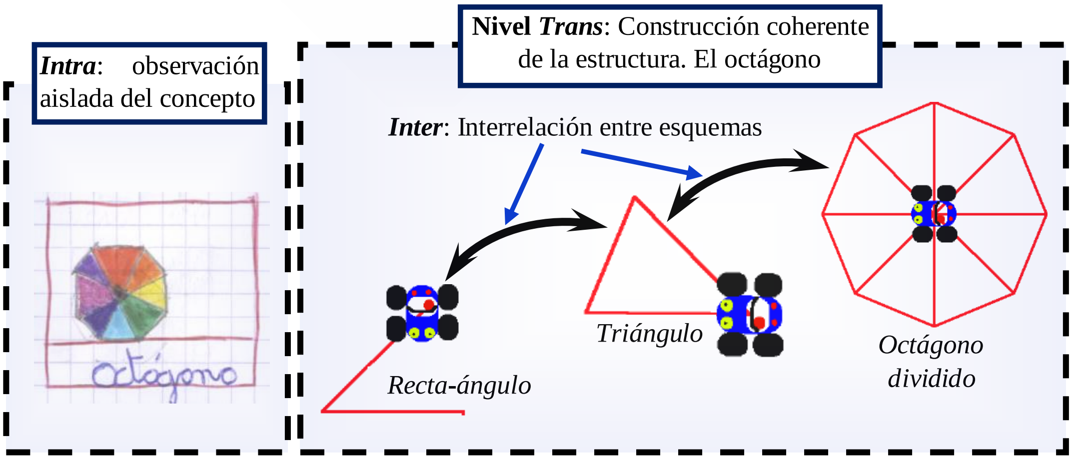


Figura 7.2. Los niveles Intra, Inter y Trans en la construcción del concepto de fracción.

Además los niños/as conjugan los resultados, de tal modo que el concepto de fracción se puede construir dividiendo un objeto en partes iguales o agrupándolo en pequeñas partes, que son las fracciones para formar el objeto dividido. Para Piaget, este tipo de resultado se denomina coordinación porque está caracterizado por inferencias, implícitas o explícitas, realizados por el alumno/a (Piaget, 1990), además ellos puede realizar ambas operaciones (dividir o agrupar) para expresar el concepto de fracción (Meel, 2003).

Finalmente, la descomposición genética, permitió identificar los niveles de constructos mentales que los niños/as alcanzaron en el proceso de desarrollo y construcción del concepto de fracción. Y la triada de Piaget muestra la interrelación de los sub-esquemas en la construcción del concepto.

Conclusión 4

Las características y cualidades de Squeak Etoys como un ambiente de aprendizaje dentro de paradigma del Construccionismo.

Los actores directos ligados al aprendizaje de los niños son los profesores y los mismos niños, a través de diferentes medios. El trabajo de investigación diseñado desde el paradigma del construccionismo, tiene como principal medio al lenguaje de programación orientado a objetos Squeak Etoys como un ambiente de aprendizaje, cuyas características se resumen en: es una herramienta, un laboratorio virtual, un espacio virtual de la robótica (Quintanilla Cóndor, Fraga Varela, & Gewerc Barujel, 2012, p. 247), un libro, y finalmente es un procesador de ideas.

Uno de los propósitos del estudio estuvo centrado en mostrar los desafíos que los niños/as se enfrentan al construir el concepto de fracción en un ambiente basado en el construccionismo de Papert. Han trabajado en un laboratorio virtual, porque los niños/as realizaron simulaciones al rediseñar el plano de la Casa de las Ciencias, así como la construcción de los contenedores de basura. En tal sentido, fue durante el proceso de construcción de las simulaciones que pudieron comenzar a comprender conceptos muy complejos como el de fracción. Del mismo modo han concluido F. Fraga y A. Gewerc (2006) al sostener que el estudiante es el que construye la simulación y en ese proceso descubre, pone en marcha y articula conceptos potentes que le permiten comprender el mundo real. También Valente de Sousa (2011) considera que es una herramienta innovadora, poderosa y activa "ya que la herramienta cubre una necesidad detectada. Asimismo, podrían diseñarse experimentos de física, tales como velocidad, aceleración, caída libre, entre otros (Conn & Rose, 2003).

Se considera como un libro, porque los niños pueden utilizarlo para escribir cuentos u otros aspectos del área de lenguaje, o para diseñar proyectos de las simulaciones; como un espacio virtual de la robótica, porque los niños ordenan un objeto inanimado (coche u otros) para poner en movimiento dicho objeto en el mundo de Etoys mediante programación (Quintanilla Cóndor et al., 2012, p. 247). Squeak Etoys y la robótica son perfectos aliados para propósitos educativos ya que intersecan el mundo real con el mundo virtual a fin de crear un ambiente propicio para el aprendizaje (Zabala, Morán y Blanco, 2009, p. 24).

El proceso de aprendizaje con Squeak Etoys es mucho más concreto, porque los niños proponen una hipótesis a las intuiciones de las situaciones del mundo real a las que se enfrentan, luego realizan las simulaciones para verificar éstas hipótesis. A este aspecto Papert denominó “ideas poderosas” a la “herramienta intelectual” (Conn & Rose, 2003), porque de esta manera el software y el hardware es un procesador de ideas, es un lenguaje, un herramienta, un medio creador de entornos e ideas.

Por otro lado Squeak Etoys, permite a los niños/as visualizar en el preciso momento, las acciones que realiza sobre los objetos en el mundo de Etoys; asimismo, los niños comprendieron con facilidad el uso de los guiones y mosaicos para realizar la programación, lo que les permitió corregir los errores en el momento oportuno, o explorar otras situaciones encontrando resultados sorprendentes ajenos al tema de trabajo. Por lo tanto, el error no debe ser entendido como un fracaso, el error forma parte del proceso de aprendizaje.

Squeak Etoys es dinámico, porque permite dar vida los objetos (coche) dentro del mundo de Etoys y permite realizar diversas simulaciones. Lo importante de este tipo de actividades es que permite a los niños interactuar entre compañeros y desarrollan claramente un aprendizaje colaborativo basado en la efectividad de las interacciones personales frente a los entornos competitivos (Fraga & Gewerc, 2004). Cuando los alumnos construyen el concepto de fracción, se observa la intervención de las propuestas de Vigotsky y Bruner como el desarrollo de la zona próxima y el andamiaje, porque durante el desarrollo de las sesiones existe el apoyo de los compañeros con más dominio a los compañeros que tienen cierta dificultad en el diseño de sus proyectos. (Vigotsky, 1979; Wood et al., 1976). El profesor "B" de aula, considera que "este tipo de trabajo así como 'el trabajo en iguales' ofrece buenos resultados".

En tal sentido, la investigación muestran que el uso de Squeak Etoys, como herramienta educacional dentro del paradigma del construccionismo, promueve un aprendizaje dinámico y mucho más significativo e interdisciplinario; porque los niños/as diseñan proyectos que se construyen a partir de los conceptos que se introducen integrando diversos objetos matemáticos mucho más complejos, cuyos conceptos corresponden a planes curriculares superiores. Asimismo, se muestra a Squeak Etoys como herramienta educacional muy poderosa promoviendo y potenciando la creatividad de los niños.

El fin de la Didáctica de las matemáticas, como campo de investigación, es el estudio de los factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo de programas de mejora de dichos procesos visto en su totalidad como un sistema interactivo (Godino, Batanero y Font, 2007; Steiner et al., 1984); asimismo, la matemática por su naturaleza es muy compleja y su comprensión dificultosa para niños de edad escolar, complejidad que se hace más evidente en el concepto de fracción. En tal sentido, consideramos que el camino recorrido por la investigación, podría ser un primer paso para acercar conceptos complejos a los niños haciendo uso de recursos tecnológicos, estimulando estilos de aprendizaje y representación del conocimiento, más que acentuar la memorización y la mecanización.

Conclusión 5

Dificultades y limitaciones que encuentran los alumnos de 5º de primaria para la construcción de concepto de fracción.

Contrariamente a lo que podría suponerse, dada la complejidad del concepto de fracción para niños/as de primaria, la mayor parte de las dificultades durante el proceso se focalizaron en dos grupos. El primero de ellos hace referencia, a que el proyecto desde el inicio planteó su desarrollo en una escuela real, por lo tanto, esto exigió una adaptación a las condiciones institucionales en donde se desarrolló la propuesta (duración de la experiencia y tiempo de dedicación en cada día; diseño curricular con tendencia a la tradicional, condiciones de infraestructura de la institución). El segundo grupo, se refiere a los conocimientos previos del alumnado en el manejo de hardware y software.

En relación al primer grupo de dificultades: duración de la experiencia y tiempo de dedicación en cada día; diseño curricular con tendencia a la tradicional, condiciones de infraestructura de la institución. Podríamos decir que en conjunto se conjugaron para dar como resultado serias dificultades para poder llevar adelante el proyecto en su totalidad. Aunque esto no invalidó la experiencia y los resultados extraídos que tienen contundencia, esta situación es una muestra de las dificultades de las escuelas para adaptar sus condiciones organizativas a propuestas que pretenden un tipo de aprendizaje que no se amolda a las reglas generales. El horario mosaico y la secuencia de contenidos establecidos han condicionado para que no lleguen oportunamente a su fin, debido fundamentalmente a la falta de tiempo.

Una propuesta de este tipo, requiere respetar a la secuencia del aprendizaje más que a las condiciones de orden impuestas por la cultura organizacional de los sistemas educativos. Cuando la tecnología está mediando estos procesos requiere de tiempos más dilatados que permitan la reflexión, el ensayo y el error y la confrontación de hipótesis. Por otro lado, los ritmos y el cansancio que se puede experimentar son totalmente diferentes cuando hay actividades que desafían a la mente, como está demostrado en el uso de los videojuegos. En este caso, el propio proceso de pensamiento de los niños y niñas establecía una secuencia de contenidos que transgredió el orden impuesto (aparentemente lógico) por el diseño curricular. Hubo necesidad de recurrir a conceptos que no se corresponden con el periodo planteado. Pero esto, en vez de ser una dificultad, resulta una vía natural para resolver el proyecto.

Tenemos también que mencionar, que una fuente de dificultades también provenía de las condiciones de infraestructura (hardware) de la institución que dificultó sobre todo la recogida de datos a través de la grabación de los proyectos. Algunos de los ordenadores funcionaban con mucha lentitud y el tiempo con el que contábamos no permitió culminar la totalidad del proyecto por la naturaleza del diseño. Como enfatiza el profesor "B", "para tener efecto en este tipo de actividades es necesario tener una estructura con un currículo diferente, que permita trabajar desde otra perspectiva, porque no se puede, cuando estamos condicionados al tiempo y al currículo (Entrevista 2, preg. 3, p. 1).

Con respecto a los conocimientos previos de los alumnos, es de reconocer, que el diagnóstico previo, asentado en la experiencia que los alumnos desarrollaron el año anterior, nos proporcionó algunos datos erróneos. En primer lugar, porque pasado un año, y sin que el nuevo profesor "B" del curso haya recuperado en algún sentido la experiencia, muchos de los niños habían olvidado algunos elementos de Squeak Etoys. Además, el hecho que en este curso concurran con poca frecuencia al aula de informática, hizo que sus destrezas en el manejo del teclado para la escritura (que ya habían desarrollado el año anterior) disminuyeran.

En el diseño de los proyectos en sí mismo no se visualizaron dificultades; en contraste se percibió mucha emoción y expectativa de parte de los estudiantes al descubrir nuevas situaciones, aunque cada estudiante avanzó a un ritmo individual dependiendo de su destreza con las herramientas de trabajo.

Sin embargo, en los registros semióticos y de representación del objeto generado con Etoys en el micromundo, se observa que los niños, luego de realizar la redistribución del plano de la Casa de las Ciencias, la recortaron (considerada unidad) y colorearon correctamente para responder a las preguntas, pero asignaron valores incorrectos a las fracciones o dejaron sin expresarlas.

Conclusión 6

Metamorfosis del investigador

Es necesario también incorporar, como parte de la investigación, el análisis del propio proceso sufrido por el investigador. En un primer momento, al iniciar el trabajo de investigación, aún existía poca claridad acerca del efecto que generaría el uso de Squeak Etoys como herramienta educacional bajo el marco del construccionismo. Sobre todo, en el trabajo de la construcción del concepto de fracción con los niños/as del 5to grado de educación primaria.

Como profesor de matemáticas, luego de haber pasado toda esta experiencia, fundamentalmente en el trabajo con los niños, he cambiado mi punto de vista, y el modo de ver la educación matemática tanto en su contexto particular (cómo construyen los conceptos de los objetos matemáticos), como en su contexto global visto en la interrelación con otras áreas de conocimiento. De allí que esta reflexión es significativa, por el aprendizaje que supuso y la aplicabilidad que puede tener esta experiencia, en el uso de las Tecnologías de Información y Comunicación en el proceso de aprendizaje de las matemáticas en el nivel secundario y universitario.

Sugerencias, limitaciones y futuras investigaciones

USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

SUGERENCIAS LIMITACIONES Y FUTURAS INVESTIGACIONES

Sugerencias

Como consecuencia del trabajo de investigación y las dificultades que se han vivenciado durante su desarrollo, vemos la necesidad de sugerencias con respecto al uso de Etoys como herramienta educacional.

Si bien es cierto que dentro del marco construccionista se puede introducir Etoys con proyectos especialmente diseñados para el aprendizaje de las matemáticas, esto requiere una adecuada orientación. En tal sentido:

a) Se sugiere la introducción y uso de Etoys como herramienta educacional cuando el profesor se encuentre capacitado para conducir actividades bajo la filosofía del construccionismo.

b) Los diseños de los proyectos deberían estar enmarcados en una *secuencia* de conceptos matemáticos básicos (geometría de Etoys) que vayan de menor a mayor dificultad. Los elementos básicos, representados por la línea recta (*avanzar5*) y el giro (*gira5*); son fundamentales para construir diseños de proyectos en distintas situaciones.

c) Los proyectos deben estar interrelacionados con diversas áreas de las ciencias, los niveles deben introducirse progresivamente con experiencias de menor a mayor grado de dificultades de acuerdo al dominio que alcanzan los niños.

d) La inserción de Etoys en los currículos actuales es compleja si se mantiene una temporalización y estructura como la que hemos observado en la escuela concertada donde se realizó la experiencia; sin embargo, se podría trabajar en actividades complementarias paralelas a las curriculares y con proyectos transversales. Se puntualiza que las mismas podrían ser secuenciados para que los niños se familiaricen y tengan dominio de Etoys así como del uso de los ordenadores.

Limitaciones del estudio

Somos conscientes de las limitaciones que este proceso del trabajo ha tenido, y de que muchas de estas limitaciones pudieron haber influido en el buen resultado. Sin embargo, su análisis y reflexión nos permite proponer futuras acciones e investigaciones y ese es el objetivo de este apartado.

a) En primer lugar, una limitación estuvo dada porque al inicio se dio por supuesto de que los niños tenían ya dominio en el manejo de Squeak Etoys. Este supuesto nació, porque en el curso anterior los niños realizaron experiencias en el diseño de un reloj a manecillas durante dos meses de una hora por semana. Pero cuando se inició la experiencia, los niños tuvieron dificultades en ejecutar los mosaicos y los guiones. El tiempo transcurrido entre la experiencia anterior y la que estábamos desarrollando actuó en nuestra contra, y por un periodo de una semana tuvimos que retomar aspectos básicos de Etoys para que volvieran a familiarizarse, luego se adaptaron lentamente en el uso del lenguaje de programación.

b) En la misma línea que el anterior se suma el hecho de que, aún no tenían fluidez en el manejo de escritura en los ordenadores. Quizás esto se deba al escaso trabajo con ordenadores que aún se realiza en las escuelas, con predominio de la escritura en papel.

c) De los párrafos (a) y (b) se sugiere que los niños deben estar en constante actividad tanto con los ordenadores así como en el uso de Etoys, ya que, en este último caso, deben diseñar situaciones secuenciados para no romper con el proceso evolutivo en la construcción de conceptos y de un nivel óptimo de complejidad de los proyectos.

d) Limitación del factor tiempo. Las actividades fueron programadas según el proyecto curricular de centro y con una duración de dos semanas. Sin embargo, en este tipo de actividades de naturaleza experimental y simulaciones desarrolladas con Squeak Etoys, es muy difícil predecir el tiempo que los niños necesitarán para sus diseños y casi siempre se modifica el tiempo previsto. Recordemos que no es un simple proceso de clases, sino que implica realizar un complejo proceso de diseños de proyectos en interacción con diferentes áreas de las matemáticas y otras disciplinas. Después de la experiencia vivida, pensamos que el proyecto completo debería realizarse en, por lo menos, un mes con una periodicidad de 4 horas semanales.

e) Finalmente, pese a tener cuidado en preparar el material de trabajo, existieron ciertas limitaciones al utilizar términos que los niños no conocen o no tienen mucho dominio.

f) Por último añadir que existe escasez de material bibliográfico como guía para la elaboración de los diseños de proyectos en Etoys. Si bien desde la perspectiva del construccionismo se puede construir todo. La falta de algún libro como guía o base para elaborar proyectos Etoys fue una limitación importante. Esto implicó un proceso de construcción de la propuesta desde la base, pero, los libros que se elaboraron para el programa Logo fueron de gran utilidad en la ejecución del trabajo de investigación dada la similitud y parentesco con que Logo tiene con Etoys.

Futuras investigaciones

Al finalizar el trabajo de investigación, se visualizó con claridad la posibilidad de futuras investigaciones relacionadas con el concepto de fracción y con conceptos matemáticos en el nivel primario haciendo uso de Etoys y los currículos. Se proponen los siguientes:

a) Realizar un estudio sobre el efecto del uso de Etoys en el aprendizaje de las operaciones de fracciones: adición, sustracción, multiplicación y división de fracciones. Una investigación de este tipo podría realizarse en dos etapas, la primera para la adición y sustracción; y la segunda para la multiplicación y la división.

b) Como consecuencia de (a), realizar estudio sobre el efecto del uso de Etoys en los errores, dificultades y obstáculos en el aprendizaje de las fracciones.

c) Realizar estudio sobre equivalencia de fracciones haciendo uso de Etoys.

d) Estudio sobre las concepciones que los niños tienen a cerca de las fracciones. El estudio podría realizarse en diversos contextos simulando con Etoys.

e) Consideramos necesario diseñar una estructura curricular diferente a las actuales, cuyos contenidos sean integrados con diversas áreas o materias de acuerdo al contexto actual tecnológico; y las materias clásicas sean integradas transversalmente en las líneas del nuevo plan de estudios. Para ello se requiere hacer otros trabajos de investigaciones que permita identificar las materias necesarias para el momento histórico en el que vivimos y el uso de las tecnologías de información, en función de lo que piensan y hacen los niños (Kay, 2007b). Esta propuesta surge, porque en la actualidad hay una nueva cultura de aprendizaje, cuya característica difiere radicalmente del currículo actual. Ésta cultura está en relación al uso de Internet, redes sociales, ambiente de juegos virtuales y otras formas de cultura digital que ofrecen diversas posibilidades.

Existen prerrequisitos que son necesarios y fundamentales para que los niños elaboren sus diseños de proyectos directamente relacionados a las matemáticas y tengan fundamento para posteriores actividades:

a) Introducción a la geometría de Etoys. Uso del elemento básico de recta (***avanza5***): segmento, medida de segmento, traslación (movimiento), posiciones (arriba, abajo), laterales (derecha, izquierda), avanza-retrocede, vectores (uso de flechas) y números positivos y negativos (números enteros). Es importante visualizar que los proyectos deben ser integrados con situaciones del entorno real, por ejemplo, para ver las trayectorias rectilíneas se podría proponer la caída de una gota de agua o la lluvia, luego, los niños deben simular dicha situaciones.

b) Introducción a la geometría de Etoys. Uso del elemento básico de ángulo (***gira5***): girar derecha – izquierda, números positivos y negativos (números enteros), rotación y número de vueltas.

c) Introducción a la geometría de Etoys. Uso de los elementos básicos de «avanza5» y «gira5»: ángulos (positivos y negativos), medida de ángulos, circunferencia, ángulos de 90°, ángulos complementarios, ángulos de 180°, ángulos suplementarios y polígonos.

Como consecuencia de (a), (b) y (c) los investigadores/as y profesores/as pueden generar una diversidad de proyectos integrados, incluyendo ciencias biológicas, ciencias físicas, ciencias sociales y otras áreas.

Bibliografía

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

Ackermann, E. (1993). Ferramentas para um aprendizado construtivo: repensando a interação. *10° aniversario da NIED no Seminário «Informática e Educação: Os Desafios do Futuro»* (pp. 1–15). Unicamp, SP, Brasil: Universidad de Campinas. Recuperado a partir de http://web.media.mit.edu/~edith/publications/in%20portugese/1993.Ferramentas.pdf

Ackermann, E. (1996). Perspective-Taking and Object Construction: Two Keys to Learning. En Y. Kafai & M. Resnick (Eds.), *Constructtionism in Practice: Designing, thinking, and learning in a digital world* (pp. 25–35). New Jersey: LAWRENCE ERLBAUM ASSOCIATES, PUBLISHERS.

Ackermann, E. (2001). Piaget's constructivism, Papert's constructionism: What's the difference? *Constructivism: uses and perspective in Education* (Vol. 1, pp. 85–94). Geneve: Research Center Education. Recuperado a partir de http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.132.4253

Ackermann, E. (2004). Constructing Knowledge and Transforming the World. En L. Steels & M. Tokoro (Eds.), *A Learning zone of one´s own: sharing representations and flow collaborative learning environments* (pp. 15–37). Amsterdam, Berlin, Oxford, Tokyo, Washington, DC: IOS Press. Recuperado a partir de http://web.media.mit.edu/~edith/publications/2004-Constructing_Knowledge.pdf

Aguilera, A., & García, I. (2003). El concepto de dificulatdes de aprendizaje. En A. Aguilera Jiménez (Ed.), *Introducción a las dificultades del aprendizaje* (pp. 39–82). Madrid: McGraw-Hill.

Anghel, B., & Cabrales, A. (2010). Los determinantes del éxito en la Educación Primaria en España. Departamento Académico de Economía de la Universidad

Carlos III de Madrid. Recuperado a partir de http://www.eco.uc3m.es/~acabrales/research/Primaria.pdf

Anglin, W. S. (1994). *Mathematics: A Concise History and Philosophy*. New York: Springer Verlag.

Angrosino, M., & Rosenberg, J. (2011). Observations on observation. En N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *The SAGE Handbook of Qualitative Research* (Fourth Edition., pp. 467–478). Los Angeles: Sage Publications, Inc.

Aquino, H. (2006). Squeak. Un Smalltalk Del Siglo XXI. Universidad Católica Nuestra Señora de la Asunción. Recuperado a partir de http://es.scribd.com/doc/39366741/Squeak-Un-Smalltalk-Del-Siglo-XXI

Aramburu Oyarbide, M. (2004). Jerome Seymour Bruner: de la percepción al lenguaje. *Revista Iberoamericana de Educación*, *33*(7), 1–19.

Area, M. (2007, mayo 13). Historia de la informática educativa en España (I). Los años ochenta o la edad de la inocencia. *ORDENADORES EN EL AULA*. Página educativo. Recuperado a partir de http://ordenadoresenelaula.blogspot.com/2007/05/historia-de-la-informtica-educativa-en.html

Ariza, M. (2007). Hacia una interpretación semiótica de los signos matematicos. *Mathesis*, *III*(2). Recuperado a partir de https://docs.google.com/viewer?a=v&q=cache:MTbxYwqGOnEJ:www.unav.es/gep/InterpretacionSemiotica.pdf+Hacia+una+interpretaci%C3%B3n+semi%C3%B3tica+de+los+signos+matematicos&hl=en&pid=bl&srcid=ADGEESg50cRwOx2beiygvvS7DtOSZoWN9TV0GO0OZ_bpCHU8EMs62koaNhZ2_aefZ3gmJHNtbO7VpClNfw6fiuo1Po6Z8hcj766XnPv7-YlOfn5nfh1axbhOtris0oqLvc6LNxTkn3zr&sig=AHIEtbQWCBUJA6XcMd6sA8UK26A7Uq9pWg

Arnon, I. (1998). *In the mind's eye: How children develop mathematical concepts - extending Piaget's theory. The case of fractions in grade four* (Doctoral Thesis). University of Haifa, Isarael. Recuperado a partir de http://digitool.haifa.ac.il/view/action/singleViewer.do?dvs=1333050706185~494&locale=es_ES&VIEWER_URL=/view/action/singleViewer.do?&DELIVERY_RULE_ID=3&search_terms=SYS%20=%20000020998&adjacency=N&application=DIGITOOL-3&frameId=1&usePid1=true&usePid2=true

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 33–60). Bogota, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana S.A. Recuperado a partir de http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf

Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en educación matemática: ¿qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos? *Educación Matemática «Santillana»*, *16*(003), 5–28.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *CBMS. Issues in Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education*, *6*, 1–32.

Ayers, T., Davis, G., Dubinsky, E., & Lewin, P. (1988). Computer Experiences in Learning Composition of Functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(3), 246–259. doi:10.2307/749068

Back, L., & Goldsmiths. (2012). How many qualitative interviews is enough? En S. E. Baker & R. Edwards (Eds.), *How many qualitative interviews is enough?* (pp. 12–14). UK: National Center for Research Methods. Recuperado a partir de http://eprints.ncrm.ac.uk/2273/4/how_many_interviews.pdf

Badilla, E., & Chacón, A. (2004). Construccionismo: Objetos con el cual pensar, entidades públicas y micromundos. *Revista Actualidades Investigativas en Educación*, *4*(1), 1–12.

Baquero, R. (2001). *Vigotsky y el aprendizaje escolar*. Buenos Aires: Aique Editor S. A.

Barbosa, K. (2003). La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *6*(003), 199–219.

Barbosa, K. (2006). *Inecuaciones: Un análisis de las construcciones mentales de estudiantes universitarios* (Tesis doctoral). Instituto Politécnico Nacional, México. Recuperado a partir de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/barbosa_2006.pdf

Barrera-Osorio, F., & Linden, L. L. (2009). The use and misuse of computers in education : evidence from a randomized experiment in Colombia. *The World Bank*, IE 29, *1*, 1–43.

Beato Sirvent, J. (2010). Errores «correctos» en la simplificación de fracciones: reflexión sobre algunas prácticas docentes en matemáticas. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (63), 35–41.

Bennahum, D. (1996). ¿Las Escuelas están Out? *¿Las Escuelas están Out?* Recuperado febrero 3, 2011, a partir de http://neoparaiso.com/logo/escuelas-out.html

Bentley, T., Fairley, C., & Wright, S. (2001). *Design for Learning*. London: The Sorell Foundation & Demos. Recuperado a partir de http://www.demos.co.uk/files/designforlearning.pdf

Berger, C., & Kam, R. (1996). Definitions of Instructional Design. Penn State University. Applied Research Laboratory. Recuperado a partir de http://www.umich.edu/~ed626/define.html

Berland, M. (2009). Constructionist Collaborative Engineering: PVBOT. University of Texas at San Antonio. Recuperado a partir de http://berland.org/files/berland-aera06.pdf

Black, A., Ducasse, S., Nierstrasz, O., Pollet, D., Cassou, D., & Denker, M. (2009). *Squeak by Example*. Switzerland: Square Bracket Associates. Recuperado a partir de http://stephane.ducasse.free.fr/FreeBooks/ByExample/

Blanco Pérez, M. (2007). *Dificultades específicas del aprendizaje de las matemáticas en los primeros años de la escolaridad: detección precoz y características evolutivas*. España: MEC, Instituto de Formación del Profesorado, Investigación e Innovación Educativa. Recuperado a partir de http://www.doredin.mec.es/documentos/00820112013529.pdf

Bliss, J. (1999). Learning with and by Machines. En J. Bliss, R. Säljö, & P. Light (Eds.), *Learning Sites: Social and Technological Resources for Learning* (pp. 165–171). Oxford: Pergamon.

Blumer, H. (1982). *El Interaccionismo simbólico: perspectiva y método*. Barcelona: Hora.

Booth, C. (2006). Alan Kay and the Graphical User Interface. Essay. Recuperado mayo 17, 2012, a partir de http://www.lottiebooth.com/pdf/essay.pdf

Bosch Casabó, M. (2000). Un punto de vista antropológico: la evolución de los «instrumentos de presentación» en la actividad matemática. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent, & M. Sierra (Eds.), *Actas de IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 15–28). Huelva, España: Universidad de Huelva. Recuperado a partir de http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas04SEIEM/IVsimposio.pdf

Bouras, C., Poulopoulos, V., & Tsogkas, V. (2010). Squeak Etoys: Interactive and Collaborative Learning Environments. En Management Association, USA, I

(Ed.), *Gaming and Simulations: Concept, Methodologies, Tools and Applications* (Vol. 3, pp. 898–909). IGI Global. Recuperado a partir de http://www.igi-global.com/chapter/gaming-simulations-concepts-methodologies-tools/49425

Boyce, C., & Neale, P. (2006). *Conducting in-depth interviews: A guide for designing and conducting in-depth interviews for evaluation input*. PATHFINDER INTERNATIONAL TOOL SERIES. Watertown, USA: Pathfinder International. Recuperado a partir de http://www.esf-agentschap.be/uploadedFiles/Voor_ESF_promotoren/Zelfevaluatie_ESF-project/m_e_tool_series_indepth_interviews.pdf

Boyer, C. B. (1991). *A History of Mathematics* (2.ª ed.). New York: Wiley & Sons INC.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, *23*(3), 247–285. doi:10.1007/BF02309532

Brigham, F. J., Wilson, R., Jones, E., & Moisio, M. (1996). Best Practices: Teaching Decimals, Fractions, and Percents to Students with Learning Disabilities. *LD Forum*, *21*(3), 10–15.

Brooks-Gunn, J., & Hirschhorn Donahue, E. (2008). Introducing the Issue. *Children and Electronic Media* (Vols. 1-1, Vol. 18, pp. 3–10). Princeton, University: The Future of Children, PRINCETON - BROOKINGS. Recuperado a partir de http://futureofchildren.org/futureofchildren/publications/docs/18_01_FullJournal.pdf

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990*. (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Eds.) (Softcover reprint of hardcover 1st ed. 1997.). Dordrecht / The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum: Part 1: Rationals as measurement. *The Journal of Mathematical Behavior*, *23*(1), 1–20. doi:10.1016/j.jmathb.2003.12.001

Bull, G. (2005). Children, Computers, and Powerful Ideas. *Comtemporary Issues in Technologyand Teacher Education*, *5*(3/4), 349–352.

Cajaraville Pegito, J. A. (1989). *Ordenador y educación matemática: algunas modalidades de uso*. Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Síntesis.

Cajaraville Pegito, J. A. (2012). *La fracción como operador («máquina transformadora»)*. Santiago de Compostela.

Camacho Ríos, A. (2006). Socioepistemología y prácticas sociales. *Educación Matemática*, *18*(001), 133–160.

Camilloni, A. W. de. (2001). *Los obstáculos epistemológicos en la enseñanza*. (A. W. de Camilloni, Ed.). Barcelona: Gedisa.

Campos, A. (2007). Acerca de la epistemología de la matemática. *Actas de XV Encuentro de Geometría y III de Aritmética* (pp. 93–95). Bogotá: Universidad Nacional de Colombia. Recuperado a partir de http://www.sectormatematica.cl/articulos/epistemologia.pdf

Cantoral, R. (1998). approccio socioepistemologico alla ricerca in matematica educativa: un programma emergente. En B. D'Amore (Ed.), *Diversi Aspetti e Diversi Ámbiti della Didattica della matematica* (pp. 15–24). Bologna: Pitagora Editrice. Recuperado a partir de http://biblioteca.cinvestav.mx/indicadores/texto_completo/cinvestav/1998/77942_21.pdf

Cantoral, R. (1999). Approccio socioepistemologico alla ricerca in Matematica Educativa: Un programma emergente. En B. D'Amore (Ed.), *La matematica e la sua didattica* (Vol. 3, pp. 258–270). Bologna: Pitagora Editrice. Recuperado a partir de http://cimate.uagro.mx/cantoral/Publicaciones/pub.htm

Cantoral, R., & Farfán, R. M. (2003). Mathematics education a vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics*, *53*(3), 255–270.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J., & Martínez Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *Número Especial*, 83–102.

Cantoral, R., & Ferrari, M. (2004). Uno studio socioepistemologico sulla predizione. *La matematica e la sua didattica. Pitagora Editrice Bologne*, (2), 33–70.

Cantu Garza, M. (2012, mayo 8). Revisión de la literatura sobre errores matemáticos. Una aproximación a la investigación en Latinoamérica. *Red de colaboración de la OEI para las Metas Educativas 2021*. Recuperado agosto 2, 2012, a partir de http://redesoei.ning.com/profiles/blogs/revisi-n-de-la-literatura-sobre-errores-matem-ticos-una

Carrol, L. (2003). *Alicia en el pais de las maravillas*. España: Ediciones del sur. Recuperado a partir de http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/docencia/carroll-alicia_en_el_pais_de_las_maravillas.pdf

Centeno Pérez, J. (1988). *Números decimales ¿Por qué? ¿Para qué?* Matemáticas: Cultura y aprendizaje. Madrid: Síntesis.

CEPIndalo. (2008, marzo 27). Squeak: una herramienta para construir proyectos. Un mundo para aprender. *Elaboración de recursos TIC en primaria*. Educativo. Recuperado a partir de http://recursos.cepindalo.es/mod/resource/view.php?id=3730

Cerda Quintero, J. (2010). *Hacia un programa de autorregulación del pensamiento lógico-formal en el aprendizaje de las matemáticas* (Tesis doctoral). Universidad de Valladolid, Valladolid. Recuperado a partir de http://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=21619

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2005). Revisiting a Theoretical Model n Fractions: Implications for Teaching and Research. En H. L. Chick & J. l Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 233–240). Melbourne, Australia: PME: Melbourne: PME. Recuperado a partir de http://www.emis.de/proceedings/PME29/PME29RRPapers/PME29Vol2CharalambousEtAl.pdf

Chavarría, J. (2006). Teoría de las situaciones didácticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *1*(2), 1–10.

Chevallard, Y. (2000). *La Transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado* (3ª ed.). Buenos Aires: Aique.

Cid, E., Godino, J. D., & Batanero, C. (2003). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros*. Granada, España: Proyecto Edumat-Maestros. Recuperado a partir de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/2_Sistemas_numericos.pdf

CIDETYS. (2011). *Catálogo de Software Educativo Libre*. Panamá: Centro Internacional de Desarrollo Tecnológico y Software Libre. Recuperado a partir de http://www.etnassoft.com/biblioteca/catalogo-de-software-educativo-libre/

Clark, J. M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D. J., St. John, D., Tolias, G., et al. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule. *Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 345–364. doi:10.1016/S0732-3123(97)90012-2

CNICE-MEC. (2006). Contenidos Multimedia Interactivos al Servicio de la Educación. *Revista de Tecnologías de la Información y Comunicación Educativas*, *6*, 1–6.

Codes, M., & Sierra, M. (2005). *Entorno computacional y educación matemática: Una revisión del estado actual* (Informe de Investigación. SEIEM). Córdoba: Grupo de investigación:Didáctica del Análisis. Recuperado a partir de http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/comunicacionesgrupos/cd/grupos/grupoanalisis/codessierra.pdf

Collins, A., & Halverson, R. (2009). *Rethinking education in the age of technology: the digital revolution and schooling in America*. New York: Teachers College Press.

Conn, A., & Rose, K. (2003). *Ideas poderosas en el aula: El uso de Squeak para la mejora del aprendizaje de las matemáticas y de las ciencias*. California: Viewpoints Research Institute, Inc. Recuperado a partir de https://docs.google.com/viewer?a=v&q=cache:defMkgP-ga0J:stellae.usc.es/red/mod/file/download.php%3Ffile_guid%3D2503+ideas+poderosas+en+el+aula&hl=en&gl=es&pid=bl&srcid=ADGEESj9xJg5ApEoGC-iHIlmx4m0RD7jCVSgmDA00rTx9U1GUnWIBdqQS4zWhXqRtNhhp1E2Sh06S-7R6B5b6dhRdA9oUijufSTutPVa7PgDSqv6tdIDdtU1zWJZYw_MVUaVYRRyBCI-&sig=AHIEtbQmKKC2snGwougfXe6TSnViiVA06w

Cramer, K., Post, T., Doerr, H., & Zawojewski, J. (2003). Using a translation model for curriculum development and classroom instruction. En R. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism. Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 449–465). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. Recuperado a partir de http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/03_1.html

Cramer, K., Wyberg, T., & Leavitt, S. (2008). Role of respresentation in fraction addition and subtraction. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(8), 490–406.

Craveri, A. M., & Anido, M. (2008). El aprendizaje de matemática con herramienta computacional en el marco de la teoría de los estilos de aprendizaje. *Revista Estilos de Aprendizaje*, *1*(1), 4–26.

Cruz Mendoza, E. (2008). *Diseño de una secuencia didáctica, donde se generaliza el método de factorización en la solución de una ecuación cuadrática* (Tesis Maestría). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México. Recuperado a partir de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/cruz_2008.pdf

Cruz Pérez, G., & Galeana de la O, L. (2005). los fundamentos bilogicos del aprendizaje para el diseño y aplicación de objetos de aprendizaje. *Revista CEUPROMED*, 1–41.

Cuban, L. (2012, abril). Integrating technology into a math lesson. *Larry Cuban on School Reform and Classroom Practice*. Recuperado julio 20, 2012, a partir de http://larrycuban.wordpress.com/2012/04/04/integrating-technology-into-a-math-lesson/

D'Amore, B. (2001). Influencias del contrato didáctico y de sus claúsulas en las actividades matemáticas en la escuela primaria. En M. del C. Chamorro Plaza (Ed.), *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas* (pp. 51–61). Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, Secretaría General Técnica, Subdirección General de Información y Publicaciones.

D'Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno. Barcelona, España*, *0*(35), 90–106.

D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semeóticas y sentido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, (Número especial), 177–195.

D'Amore, B. (2007). Mathematical objects and sense: how semiotic transformations change the sense of mathematical objects. *Acta Didactica Universitatis Comenianae*, *7*, 23–45.

D'Amore, B. (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza. *Enseñanza de la matematica. Revista de la ASOVEMAT (Asociación Venezolana de Educación Matemática)*, *17*(1), 87–106.

D'Amore, B., & Godino, J. (2007). El enfoque ontosemiotico como el desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(2), 191–218.

Da Silva, P. R. D. S. (2008). Instrumentação para o ensino de ciências. *Revista Brasileira em Promo*, 19–28. doi:10.5020/18061230.2008.p19

Dantel, J. (2003). Las nuevas tecnologías: ¿Espejismo o milagro? *Educación Hoy, UNESCO*, (7), 4–8.

De Faria Campos, E. (2006). Ingeniería didáctica. *CUADERNOS DE INVESTIGACIÓN Y FORMACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, *1*(2), 1–9.

De León, H., & Fuenlabrada, I. (1996). Procedimiento de solución de niños de primaria en problemas de reparto. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *1*(2), 268–282.

Decreto 130. (2007). Decreto 130/2007, de 28 de junio, por el que se establece el currículo de la educación primaria en la Comunidad Autónoma de Galicia. Diario Oficial de Galicia; lunes, 9 de julio de 2007. Recuperado a partir de http://www.xunta.es/Doc/Dog2007.nsf/FichaContenido/23F6A?OpenDocument

Del Río, J. L. (1992). Los hipertexto, hipermedia, hiperdocumento: una revolución creativa en la informática documental. *Revistas Científicas Complutenses*, *15*, 83–89. doi:-

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (Eds.). (2011). *The SAGE Handbook of Qualitative Research* (Fourth Edition.). California: Sage Publications, Inc.

Denzin, N., & Lincoln, Y. (2011). Introduction: The discipline and practice of quealitative research. En N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *The SAGE Handbook of Qualitative Research* (Fourth Edition., pp. 1–19). California: Sage Publications, Inc.

Dey, I. (2005). *Qualitative data analysis: A user friendly guide for social scientists*. eBook. London & New York: Routledge. Recuperado a partir de http://www.drapuig.info/files/Qualitative_data_analysis.pdf

Douady, R. (1994). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir: une chronique en calcul mental, un projet en algèbre à l'articulation collège-seconde. *Topiques Éditions. IREM*, (15), 37–61.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95–126). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (2000a). De la investigación en la matemática teórica a la investigación en la matemática educativa: Un viaje personal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *3*(1), 47–70.

Dubinsky, E. (2000b). Writing Programs to Learn Mathematics. Recuperado a partir de http://www.math.kent.edu/~edd/ICMITechPpr.pdf

Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U., & Zazkis, R. (1994). On Learning Fundamental Concepts of Group Theory. *Educational Studies in Mathematics*, *27*, 267–305.

Dubinsky, E., & Lewin, P. (1986). Reflective Abstraction and Mathematics Education: The Genetic Decomposition of Induction and Compactness. *The Journal of Mathematical Behavior*, (5), 55–92.

Duzenli-Gokalp, N., & Devi Sharma, M. D. (2010). A study on addition and subtraction of fractions: The use of Pirie and Kieren model and hands-on activities. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *2*(2), 5168–5171. doi:10.1016/j.sbspro.2010.03.840

EACEA/Eurydice. (2011). *Mathematics Education in Europe: Common Challenges and National Policies*. Brucelas: EACEA/Eurydice. Recuperado a partir de http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/thematic_reports/132EN.pdf

Engler, A., Gregorini, M. I., Müller, D., Vrancken, S., & Hecklein, M. (2004). Los errores en el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Premisa, SOAREM*, *6*(23), 23–32.

Escolano Vizcarra,, R., & Gairín Sallán, J. M. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, (1), 17–35.

Escudero, J. M., & Guarro, A. y otros. (1989). *Informe de progreso: fase exploratoria : (proyecto Atenea) : Programa de Nuevas Tecnologías de la Información y de la Comunicación* (España. Secretaría de Estado de Educación.). Secretaría de Estado de Educación.

Esteban, M. (2009). Las ideas de Bruner: «de la revolución cognitiva» a la «revolución cultural». *EDUCERE . Ideas y personajes*, *13*(44), 235–241.

Falbel, A. (1993). Construccionismo. Enlaces 2001. Abriendo las Fronteras del Aula. Recuperado a partir de http://llk.media.mit.edu/projects/panama/lecturas/Falbel-Const.pdf

Fernández García, J. R. (2006). SQUEAK ¿La herramienta que hará la revolución educativa? *Revista Linux User . Educación*, (16), 76–80.

Ferro Soto, C., Martinez Senra, A. I., & Otero Neira, M. (2009). Ventajas del uso de las TICs en el proceso de enseñanza-aprendizaje desde la óptica de los docentes universitarios españoles. *Edutec: Revista electrónica de tecnología educativa*, (29), 1–12.

Feurzeig, W. (2010). Toward a culture of creativity: A personal perspective on Logo's early years and ongoing potential. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *15*(3), 257–265.

Filep, L. (2001). The Development, and the Developing of, the Concept of a Fraction. *Proceeding of the International Journal for Mathematical Teaching and Learning* (pp. 1–17). Hungary: College of Nyiregyháza. Institute of Mathematics and Informatics. Recuperado a partir de http://www.cimt.plymouth.ac.uk/Journal/lffract.pdf

Flyvbjerg, B. (2000). Case study. En N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *The SAGA handbook of qualitative research* (4th ed., pp. 301–316). California: Sage.

Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. En A. Maz, B. Gómez, & M. Torralbo (Eds.), *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 111–128). Córdoba, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. Recuperado a partir de http://funes.uniandes.edu.co/1303/1/Font2005Una_SEIEM_111.pdf

Fontana, A., & Frey, J. H. (2005). The interview: From neutral stance to political involvement. En N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *The SAGE Handbook of Qualitative Research* (Third Edition., pp. 695–728). California: Sage Publications, Inc.

Fraga, F., & Gewerc, A. (2004). Una experiencia interdisciplinar en Ed. Primaria mediante el uso de Squeak. *Innovación educativa, Universidad de Santiago de Compostela*, (15), 1–20.

Fraga, F., & Gewerc, A. (2006). Profesorado y Squeak ¿Una oportunidad para romper los mitos sobre la tecnología en la escuela? *Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa (RELATEC)*, *5*(2), 465–482.

Fraser, C., Murray, H., Hayward, B., & Erwin, P. (2004). The development of the common fraction concept in grade three learners. *Pythagoras*, *59*, 26–33.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Netherlands: Reidel Publishing Company.

Friz Carrillo, M., Sanhueza Henríquez, S., Sánchez Bravo, A., Belmar Mellado, M., & Figueroa Manzi, E. (2008a). Propuestas didácticas para el desarrollo de competencias matemáticas en fracciones. *Horizontes Educacionales, Universidad de Bío Bío*, *13*(2), 87–98.

Friz Carrillo, M., Sanhueza Henríquez, S., Sánchez Bravo, A., Belmar Mellado, M., & Figueroa Manzi, E. (2008b). PROPUESTAS DIDÁCTICAS PARA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS EN FRACCIONES. *Horizontes Educacionales*, (2), 87–98.

Gaelli, M., Nierstrasz, O., & Stinckwich, S. (2006). Idioms for Composing Games with EToys. *Proceedings of the Fourth International Conference on Creating, Connecting and Collaborating through Computing* (pp. 222–231). BERKELEY, CA: IEEE Computer Society. doi:10.1109/C5.2006.20

Gargarian, G. (1996). The art of design. En Y. Kafai & M. Resnick (Eds.), *Constructionism in practice: Designing, thinking and learning in a digital world* (pp. 125–159). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en didactique des mathématiques*, *18/1*(52), 7– 33.

Gash, S. (2003). Alan Kay. *ALAN KAY*. Recuperado mayo 25, 2011, a partir de http://ei.cs.vt.edu/~history/GASCH.KAY.HTML

Gewerc, A., & Montero, L. (2013). Culturas, formación y desarrollo profesional. La integración de las TIC en las instituciones educativas. *Revista de Educación, 362*(setiembre-deciembre). doi:10-4438/1988-592X-RE-2011-362-163

Gil Flores, J. (1994). *Análisis de datos cualitativos: Aplicaciones a la investigación educativa*. Barcelona: PPU.

Godino, J., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 0*(3), 325–355.

Godino, J.D., Font, V., & Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones,. 38, 25, 49*.

Godino, Juan D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2/3), 237–284.

Godino, Juan D. (2003). Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado a partir de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf

Godino, Juan D. (2004). Didáctica de las matemáticas para maestros. Universidad de Granada. Proyecto Edumat-Maestros. Recuperado a partir de http://redes-cepalcala.org/inspector/DOCUMENTOS%20Y%20LIBROS/MATEMATICAS/DIDACTICA%20DE%20LAS%20MATEMATICAS%20PARA%20MAESTROS.pdf

Godino, Juan D. (2010). Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina tecnocientífica. Departamento de Didáctica de la matemática. Recuperado a partir de http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/perspectiva_ddm.pdf

Godino, Juan D, Batanero, C., & Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática para maestros. Universidad de Granada. Proyecto Edumat-Maestros. Recuperado a partir de http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Godino, Juan D, Batanero, C., & Font, V. (2007a). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127–135. doi:10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, Juan D, Batanero, C., & Font, V. (2007b). un enfoque ontosimiótico del conocimiento y la instruccion matemática. (Juan D. Godino, Trans.)*ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127–135.

Godino, Juan D. (1991). Hacia una teoria de la didactica de la matematica. En A. Gutierrez (Ed.), *Area de conocimiento: Didáctica de la Matemática* (pp. 105–148). Madrid: Editorial Síntesis S.A. Recuperado a partir de http://www.profepavez.cl/4didactica/masdidactica/1_Hacia_teoria_didactica_matematica_Godino.pdf

Gómez, B., & Contreras, M. (2006). Sobre problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. En M. del P. Bolea, M. Moreno, & M. Gonzales (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, (pp. 171–184). Huesca: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Simposio. Recuperado a partir de http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2264763

Gómez Deck, D. (2006). *Programando con Smalltalk*. Creative Commons: Edit Lin Editorial S. L. Recuperado a partir de http://stephane.ducasse.free.fr/FreeBooks/Programando/ProgramandoConSmalltalk-BORRADORFINAL07-Febrero-2006.pdf

Gould, P. (2010). Fraction Notation and Textbooks in Australia. *Proceedings of the Fourth APEC - Tsukuba International Conference: Innovation of Mathematics*

Teaching and Learning through Lesson Study - Connection between Assessment and Subject Matter (pp. 1–8). Tokyo: University of Tsukuba. Recuperado a partir de http://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2009/doc/pdf_20-21/PeterGould-paper.pdf

Gould, P., & Outhred, L. (2006). One-Third is Three-Quarters of One-Half. En P. Grootenboer, R. Zevenberg, & M. Chinnappan (Eds.), *20th annual conference of the Matehmatics Education Research Group of Australasia* (Vol. 1, pp. 262–269). Australasia: MERGA. Recuperado a partir de http://www.merga.net.au/documents/RP282006.pdf

Griffiths, D., & Blat, J. (2005). éTui: Robots basados en la conducta como andamiaje para la reflexión infantil. *Nuevas tecnologías para la educación infantil y primaria* (pp. 52–71). Madrid: Morata.

Gurdián-Fernández, A. (2007). *El paradigma cualitativo en la investigación socio-educativa*. Costa Rica: Colección IDER. Recuperado a partir de http://search.mywebsearch.com/mywebsearch/GGmain.jhtml?searchfor=El+Paradigma+Cualitativo+en+la+Investigaci%C3%B3n+Socio-Educativa&id=GRxdm057BBES&n=77ed07b0&ptnrS=GRxdm057BBES&ss=sub&st=hp&ptb=YxxaOnhL_zTS96CTBUJtmA&tpr=sbt&si=98850&ps=The+Qualitative+Report%2C+Volume+3%2C+Number+3%2C+September%2C+1997

Hancock, B. (1998). Trent Focus for research and development in primary health care: An introduction to qualitaitive research. Trent Focus, University of Nottingham. Recuperado a partir de http://faculty.cbu.ca/pmacintyre/course_pages/MBA603/MBA603_files/IntroQualitativeResearch.pdf

Hardt, M. (2006). Design the term design. University of Lapland, Rovaniemi, Finland. Recuperado a partir de http://www.michael-hardt.com/PDF/lectures/design-definition.pdf

Harel, G., & Sowder, L. (2005). Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development. *Mathematical Thinking & Learning: An International Journal*, *7*(1), 27–50.

Harel, I. (1991). *Children designers: interdisciplinary constructions for learning and knowing mathematics in a computer-rich school*. The Media Laboratory Massachusetts of Technology. New Jersey: Ablex Publishing.

Harel, I., & Papert, S. (1990). Software design as a learning environment. *Massachusetts Institute Technology. Epistemology and Learning Group. Interactive Learning Environments*, *1*(1), 1–36.

Herrera Batista, M. Á. (2006). Consideraciones para el diseño didáctico de ambientes virtuales de aprendizaje: una propuesta basada en las funciones cognitivas del aprendizaje. *Revista Iberoamericana de Educación*, *38*(5), 1–20.

Hidalgo Alonso, S., Maroto Sáez, A., & Palacios Picos, A. (2004). ¿Por qué se rechazan las matemáticas? Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las matemáticas. *Revista de educación*, (334), 75–98.

Holloway, G. E. . (1969). *Concepción de la geometría en el niño según Piaget*. Biblioteca del Educador Contemporáneo. Buenos Aires: Editorial Paidós.

Holloway, G. E. . (1982). *Concepción del espacio en el niño según Piaget*. Barcelona - Buenos Aires: Ediciones Paidós.

Hutchins-Korte, L. (2008). *Learning by Game-Building in Theoretical Computer Science Education* (Tesis doctoral). University of Edinburgh, Edinburgh. Recuperado a partir de http://lac-repo-live7.is.ed.ac.uk/bitstream/1842/3162/1/Hutchins-Korte%20L%20PhD%20thesis%2008.pdf

I - TECH. (2008). Qualitative Interviews: A technical implementation guide. I-TECH, University of Washington. Recuperado a partir de http://www.go2itech.org/resources/technical-implementation-guides/TIG%205.QualIviews.pdf/view

INECSE. (2005). *PISA 2003: Prueba de matematicas y de solución de problemas*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia. Recuperado a partir de http://www.educacion.gob.es/dctm/ievaluacion/internacional/pisa2003liberados.pdf?documentId=0901e72b801106c6

Ingalls, D., Kaehler, T., Maloney, J., Wallace, S., & Kay, A. (1997). *Back to the future: the story of Squeak, a practical Smalltalk written in itself* (VPRI Technical Report No. TR-1997-001) (pp. 1–15). California: Viewpoints Research Institute. Recuperado a partir de http://www.vpri.org/pdf/tr1997001_backto.pdf

Inhelder, Bârbel, García, R., & Vonèche, J. (1978). *Epistemología genética y equilibración: Homenaje a Jean Piaget*. Buenos Aires: Editorial Huemul S.A.

Inhelder, Bärbel, Garcia, R., & Vonèche, J. (1978). *Epistemología genética y equilibración: homenaje a Jean Piaget*. Buenos Aires: Editorial Huemul S.A.

Instituto Internacional de Planeamiento de la Educación. (2003). *Cómo se enseña matemática* (INFORMES PERIODISTICOS PARA SU PUBLICACIÓN No. 15) (p. 9). Buenos Aires: UNESCO. Recuperado a partir de http://www.iipe-buenosaires.org.ar/system/files/documentos/informe15_matematica.pdf

Jachewatzky-Hashaviah, G. A. (2011, 09). Construccionismo. Recuperado a partir de https://snt123.mail.live.com/default.aspx?rru=inbox&wlexpid=5316D87BB0294FBC9B90CED779CD14C9&wlrefapp=2#n=1433409431&rru=inbox&qvid=7&pdir=NextPage&paid=68f5445e-26dd-11e1-bc98-00237de41794&pad=2011-12-

15T05%3A27%3A09.963Z&pidx=2&mid=5268b94e-e7d7-11e0-bd1d-00237de3fe36&fv=1

Kafai, Y. B. (1995). *Minds in Play: Computer Game Design As A Context for Children's Learning*. New Jersy: LAWRENCE ERLBAUM ASSOCIATES, PUBLISHERS.

Kafai, Y. B., & Resnick, M. (1996). *Constructionism in Practice: Designing, Thinking, and Learning in A Digital World*. New Jersy: Lawrence Erlbaum Asociates, Publishers.

Katz, V. J. (1998). *A History of Mathematics: An Introduction* (2.ª ed.). USA: Addison Wesley.

Kay, A. (2002). *Squeakers*. Squeakers. In Viewpoints Research Institute. A documentary film celebrating a new way of teaching math and science to young children using computers. Ball State University. Recuperado a partir de http://www.squeak.org/Community/SqueakersDVD/

Kay, A. (2003). Background on how Children Learn. Viewpoints Research Institute. VPRI Memo M-2003-002. Recuperado a partir de http://www.vpri.org/pdf/m2003002_how.pdf

Kay, A. (2004). The Power Of The Context. Viewpoints Research Institute. VPRI Memo M-2004-001. Recuperado a partir de http://www.vpri.org/pdf/m2004001_power.pdf

Kay, A. (2007a). Children Learning by Doing: Squeak Etoys on the OLPC XO. Viewpoints Research Institute. VPRI Research Note RN-2007-006-a. Recuperado a partir de http://www.vpri.org/pdf/rn2007006a_olpc.pdf

Kay, A. (2007b). Squeak / eToy Philosophy. *Etoys Philosophy*. Editado por PBworks. Recuperado marzo 5, 2012, a partir de http://squeak.pbworks.com/w/page/10713925/eToy%20Philosophy

Kay, A. (2010). Programming and Programming Languages. Viewpoints Research Institute. VPRI Research Note RN-2010-001. Recuperado a partir de http://www.vpri.org/pdf/rn2010001_programm.pdf

Kayton, B., Vosloo, S., & Sparks, B. (2008). Kusasa: Developing Analytical Thinking Skills through Peertaught Software Programming. En D. Remenyi (Ed.), *Proceedings of the 3rd International Conference on e-Learning*. Cape Town, South Africa: Academic Conferences Limited.

Keijzer, R., & Terwel, J. (2000). Learning for mathematical insight: A longitudinal comparison of two Dutch curricula on fractions. *Proceedings of the Annual Meeting of the American Educational Research Association* (pp. 1–36). New Orleans: American Educational Research Association. Recuperado a partir de http://dspace.ubvu.vu.nl/bitstream/1871/10762/1/L%26I2003Keijzer%26Terwel.pdf

Kelly, K. T. (2001). Learning Theory and Epistemology. *Department of Philosophy. Paper 376*, 1–20.

Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. (R. A. Lesh & D. Bradbard, Eds.)*Number and Measurement. Papers from a Research Workshop*, 101–144.

Kieren, T. (1980). The rational numbers construct: Its elements and mechanisms. (T. Kieren, Ed.)*Recent Research on Number Learning.*, 128–152.

Kline, M. (1976). *El fracaso de da datemática moderna: ¿Por qué Juanito no sabe sumar?* México, D.F.: Siglo Veintiuno.

Lamon, S. J. (1996). The Development of Unitizing: Its Role in Children's Partitioning Strategies. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(2), 170–193. doi:10.2307/749599

Lang, S. (1988). *Basic Mathematics*. New York: Springer-Verlag.

Laperrière, A. (1997). La théorisation ancrée (grounded theory): démarche analytique et comparaison avec d'autres approches apparentées. En J. Poupart, J. P. Deslauriers, L.-H. Groulx, A. Laperrière, R. Mayer, & A. Pires (Eds.), *La recherche qualitative. Enjeux épistémologiques et méthodologiques* (pp. 309–340). Boucherville, Québec: Gaëtan Morin.

Larcombe, A. (1985). *Mathematical learning difficulties in the secondary school: pupil needs and teacher roles*. Milton Keynes [etc.]: Open University Press.

Lee, C. (2009). *El lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas: la evaluación formativa en la práctica*. Madrid: Morata.

Leung, C.-K. (2009). A preliminary study on hong kong students' understanding of fraction. *Proceeding of the 3rd Redesigning Pedagogy International Conference* (pp. 1–13). Singapur: Redesigning Pedagogy. Recuperado a partir de http://conference.nie.edu.sg/2009/papers_pdf/PAP499.pdf

Levis, D. (2007). Aprender y enseñar hoy: el desafío informático. *Revista Novedades Educativas*, (203), 1–13.

Llinares, S., & Sánchez, M. (1988). *Fracciones : la relación parte-todo*. Madrid: Editorial Síntesis S.A.

LOE2/2006. (2006). Ley Orgánica de Educación 2/2006 L.O.E. BOE 4/5/2006. Boletín Oficial del Estado N° 106, de 4 de mayo de 2006. España. Recuperado a partir de http://www.madrid.org/dat_capital/loe/pdf/loe_boe.pdf

López Martínez, O., Prieto Sánchez, M. D., & Hervás Avilés, R. (1998). Creatividad, superdotación y estilos de aprendizaje: hacia un modelo integrador. *FAISCA. Revista de Altas Capacidades*, *6*, 86 – 108. doi:-

Lyon, G. R. (1996). Learning desabilities. *The future children SPECIAL EDUCATION FOR STUDENTS WITH DISABILITIES*, *6*(1), 54–76.

Lyon, G. R., Fletcher, J. M., Shaywitz, S. E., Shaywitz, B. A., Torgesen, J. K., Wood, F. B., Schulte, A., et al. (2001). Rethinking learning disabilities. En C. E. Finn, R. A. J. Rotherham, & C. R. Hokanson (Eds.), *Rethinking special education for a new century* (pp. 259–287). Washington, DC: Thomas B. Fordham Foundation. Foundation and Progressive Policy Institute. Recuperado a partir de http://www.dss.nrru.ac.th/download/ld/SpecialEd_ch12.pdf

Mack, N., Woodsong, C., MacQueen, K., Guest, G., & Namey, E. (2005). *Qualitative Research Methods: A Data Collector's Field Guide*. California: USAID, Family Health International. Recuperado a partir de http://www.fhi.org/en/RH/Pubs/booksReports/QRM_datacoll.htm

Macnab, D. ., & Cummine, J. . (1992). *La enseñanza de las matemáticas de 11 a 16: Un enfoque centrado en la dificultad*. Madrid: Aprendizaje Visor.

Magnus Enzenberger, H. (1997). *El diablo de los números*. Múnich-Viena: Cari Hanser Verlag.

Maloney, J., Resnick, M., Rusk, N., Silverman, B., & Eastmond, E. (2010). The Scratch Programming Language and Environment. *Trans. Comput. Educ.*, *10*(4), 16:1–16:15. doi:10.1145/1868358.1868363

Manade, E., Nunez, T., & Bryant, P. (2005). The equivalence and ordering of fractions in partwhole and quotient situations. En Helen L Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 281–288). Melbourne, Australia. Recuperado a partir de http://www.emis.de/proceedings/PME29/PME29RRPapers/PME29Vol3MamedeEtAl.pdf

Mankiewicz, R. (2000). *Historia de las Matematicas: del Calculo al Caos*. Barcelona: Editorial Paidós.

Martin, L., & Pirie, S. (2003). Making images and noticing properties: the role of the computer in mathematical generalisation. *Mathematics Education Research Journal*, *15*(2), 171–186.

Martínez Miguélez, M. (2004). *La investigación cualitativa etnográfica en educación: manual teórico-práctico* (3ra ed.). México, D.F.: Trillas.

Massot Lafon, I., Dorio Alcaraz, I., & Sabariego Puig, M. (2004). Estrategias de recogida y análisis de la información. En R. Bisquerra Alzina (Ed.), *Metodología De La Investigación Educativa* (pp. 327–366). Madrid: La Muralla.

Mateos Ponce, T. G. (2008). Una aproximación a las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Un punto de vista psicogenético. *Ethos Educativo*, *41*, 193–208.

Matsuoka, M., Okumura, H., Sasaki, T., Shimamura, H., Shimomura, T., & Kameoka, T. (2007). Global Environmental Education using Squeak and Field Servers. *Proceeding of the Fifth International Conference on Creating, Connecting and Collaborating through Computing* (pp. 3–7). Kyoto University: IEEE. doi:10.1109/C5.2007.19

Mayan, M. (2001). Una introducción a los métodos cualitativos: Módulo de entrenamiento para estudiantes y profesionales. (C. Cisneros Puebla, Trans.). Universidad Autónoma Metropolitan - Iztapalapa, México. Recuperado a partir de http://www.ualberta.ca/~iiqm/pdfs/introduccion.pdf

Maza, C. (2000). *Las matemáticas de la antigüedad y su contexto histórico*. Sevilla: Universidad de Sevilla. Manuales Universitarios.

Meel, D. E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *6*(003), 221–278.

Miguel Miguel, E., & Chamoso Sánchez, J. M. (1995). Materiales y recursos didácticos para la enseñanza de las Matemáticas: El cuenta-drez. *Aula: Revista de Pedagogía de la Universidad de Salamanca*, (7), 317–330.

Mochon, S., & López Jarquín, I. (2006). The development of mathematical understanding in classrooms with computers. En S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 856–862). Mérida, México: PME-NA : Universidad Pedagógica Nacional. Recuperado a partir de http://www.pmena.org/2006/cd/TECHNOLOGY/TECHNOLOGY-0001.pdf

Montero Mesa, M. L., Gewerc Barujel, A., Alvarez Núñez, Q., Fernández Tilve, M. D., González Fernández, R., González Guisande, O. M., Malvar Méndez, M. L., et al. (2007). *O valor do envoltorio: Un estudo da influencia das TIC nos centros educativos*. Xerais Universitaria - Grupo Stellae USC. Vigo: Edicións Xerais de Galicia.

Morales, L. (2002). Las matemáticas en el antiguo Egipto. *Apuntes de Historia de las Matemáticas*, *1*(1), 1–8.

Moyer, P. S. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *47*(2), 175–197.

Murray-Lasso, M. . (2005). Sobre el uso de Logo en inteligencia artificial. *INGENIERÍA Investigación y Tecnología*, *6*(3), 177–186.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM. Recuperado a partir de http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=16909

National Mathematics Advisory Panel. (2008). *The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel* (Final Report) (p. 120). Washington, DC: U.S.

Department of Education. Recuperado a partir de http://www2.ed.gov/about/bdscomm/list/mathpanel/report/final-report.pdf

Niekerk, T. van, Newstead, K., Murray, H., & Oliver, A. (1999). Successes and obstacles in the development of grade 6 learners' conceptions of fractions. *Proceedings of the Third National Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa* (Vol. 1, pp. 221–232). Port Elizabeth Technikon. MALATI. Recuperado a partir de http://academic.sun.ac.za/mathed/malati/Files/Fractions993.pdf

Nunes, T., Bryant, P., Hurry, J., & Pretzlik, U. (2006). Fractions: difficult but crucial in mathematics learning. *Teaching and Learning Research Programm*, (13), 1–4.

Olaz, Á. (2008). *La entrevista en profundidad: justificación metodológica y guía de actuación práctica*. Oviedo, España: Septem ediciones. Recuperado a partir de http://home.mywebsearch.com/index.jhtml?n=77DE8857&ptnrS=GRxdm057BBES&ptb=YxxaOnhL_zTS96CTBUJtmA&si=98850

Ortega Dato, J. F., & Ortega Dato, J. Á. (2001). Matemáticas: ¿Un problema de lenguaje? *Actas de las IX Jornadas de ASEPUMA* (Vol. Actas 9, pp. 1–10). Canarias, España: Rect@. Recuperado a partir de http://150.214.55.100/asepuma/laspalmas2001/laspalmas/Doco06.PDF

Ortiz González, M. del R. (2004). *Manual de dificultades de aprendizaje*. Madrid: Pirámide.

Ortiz Lázaro, I. (1994). El papel del profesor tutor ante las dificultades de aprendizaje escolar: propuesta de intervención. *ENSAYOS. Revistas de la Escuela Universitaria de Magisterio de Albacete*, (9), 143–157.

Papert, S. (1973). Uses of technology to enhance education. *Massachusetts Institute Technology*, Memo 298, 1–109.

Papert, S. (1980a). Constructionism vs. Instructionism. *Conference of educators in Japan*. Japan. Recuperado a partir de http://www.papert.org/articles/const_inst/const_inst3.html

Papert, S. (1980b). Computer-based microworlds as incubators for powerful ideas. En R. Taylor (Ed.), *The computer in the school: Tutor, tool, tutee* (pp. 203–210). New York: Teacher's College Press.

Papert, S. (1982). *Desafío a la mente: computadoras y educación*. (L. Espinoza de Matheu, Trans.) (2da ed.). Buennos Aires: Galápagos.

Papert, S. (1986). *Constructionism: A new opportunity for elementary science education*. Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, Media Laboratory, Epistemology and Learning Group.

Papert, S. (1987). *Desafio a la mente: Computadoras y Educación*. Buenos Aires: Galápagos.

Papert, S. (1995). *La Máquina de los niños: replantearse la educación en laera de los ordenadores*. Barcelona: Paidós.

Papert, S. (1996). A word for learning. En Y. Kafai & M. Resnick (Eds.), *Constructionism in practice: designing, thinking and learning in a digital world* (pp. 9–24). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Papert, S., & Harel, I. (1991). Situating Constructionism. En I. Harel (Ed.), *Construccionism* (pp. 1–11). Massachusetts Institute of Technology. Epistemology & Learning Research Group: Ablex Publishing Corporation. Recuperado a partir de http://www.papert.org/articles/SituatingConstructionism.html

Parra, M. D., & Luengo, C. (2006). Squeak, la programación del siglo XXI. *Actas de XI Congreso Internacional de Informática Educativa* (pp. 1–10). UNED: Madrid. Recuperado a partir de http://www.apimadrid.org/media/libros/squeak.pdf

Penalva Buitrago, J. (2007). Análisis crítico de los aspectos teóricos del currículum flexible y abierto. Consecuencias educativas. *Profesorado: Revista de curriculum y formación del profesorado*, *11*(3), 1–14.

Peña, M., Santaolalla, E., & Aransubía, V. (2010). *Matemáticas. 4 Primaria. Proyecto Tirolina*. España: Ediciones SM.

Peña, M., Santaolalla, E., Aransubía, V., & Sanz, B. (2010). *Matemáticas. 5 Primaria. Proyecto Timonel*. España: Ediciones SM.

Pérez Serrano, G. (1994). *Investigación cualitativa: Retos e interrogantes* (Vol. II). Madrid: La Muralla.

Perkins, D. (1999). ¿Qué es la comprensión? En M. Stone Wiske (Ed.), *La Enseñanza para la comprensión: vinculación entre la investigación y la práctica* (pp. 69–93). Buenos Aires ; Barcelona: Paidós.

Perkins, D. N. (1986). *Knowledge as design*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Piaget, J. (1976). *La construcción de lo real en el niño*. Buenos Aires: Ediciones Nueva Visión.

Piaget, J. (1984). *La formación del símbolo en el niño: Imitación, juego y Sueño. Imagen y representación* (1ª ed. en español, 8ª reimp.). México: Fondo de Cultura Económica.

Piaget, J. (1985). *Psicología y epistemología*. Colección: Obras Maestras del Pensamiento Contemporáneo. Barcelona: Editorial Planeta De Agostini. Recuperado a partir de http://books.google.es/books?id=63JkzgAACAAJ&dq=psicolog%C3%ADa+y+epistemolog%C3%ADa&hl=en&ei=LVDpTvvCL8rQhAfVuoTICg&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=1&ved=0CCwQ6AEwAA

Piaget, J. (1990). *La equilibración de las estructuras cognitivas: Problema central del desarrollo*. Madrid: Siglo XXI, Editores S.A.

Piaget, J., & Beth, E. W. (1980). *Epistemologia matemática y psicológica* (2da ed.). Barcelona: Editorial Critica, S.A.

Piaget, J., & García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Siglo Veintiuno.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1967). *Childs Conception Of Space*. New York: W. W. Norton and Company, Inc.

Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1981). *Childs Conception Of Geometry*. New York - London: W. W. Norton and Company, Inc.

Pirie, S., & Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the Learning of Mathematics*, *9*(3), 7–11.

Pirie, S., & Kieren, T. (1992). Creating Constructivist Environments and Constructing Creative Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *23*(5), 505–528.

Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in Mathematical Understanding: How Can We Characterise It and How Can We Represent It? *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2), 165–190.

Pirie, S., & Martin, L. (2000). The role of collecting in the growth of mathematical understanding. *Mathematics Education Research Journal*, *12*(2), 127–146.

Piscitelli, A. (2011, marzo 14). El mundo educativo necesita adaptarse a la realidad virtual de los alumnos. Recuperado a partir de http://www.fundacion.telefonica.com/es/que_hacemos/noticias/detalle/04_03_2011_esp_1416

Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery: on understanding, learning and teaching problem solving*. New York, NY, USA: John Wiley.

Quintanilla Cóndor, C., Fraga Varela, F., & Gewerc Barujel, A. (2012). La construcción del concepto de fracciones con Etoys. En A. Lago Ferreiro, M.

Llamas Nistal, & A. A. Nogueiras Meléndez (Eds.), *Actas del X Congreso de Tecnologías Aplicadas en la Enseñanza de la Electrónica 2012* (pp. 244–247). Vigo, España: Escuela de Ingeniería Industrial Universidad de Vigo. Recuperado a partir de http://www.taee2012.es/index.php/es/actas

Radford, L. (2004). Semiótica cultural y cognición. *decimoctava reunión Latinoamericana de Matemática educativa* (pp. 1–21). México: Universidad Autónoma de Chiapas, Tuxtla Gutiérrez. Recuperado a partir de http://www.activitephysique.laurentienne.ca/NR/rdonlyres/808730CD-2FF4-45A3-AB1B-06BAFF87B51B/0/Tuxtla3.pdf

Radford, L. (2006). Introducción. Semiótica y educación matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, (Número especial), 7–21.

Real Academia Española. (2001). Fracción. *Diccionario de la Lengua Española*. Madrid. Recuperado a partir de http://buscon.rae.es/draeI/SrvltGUIBusUsual

Real Decreto 1513. (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. BOE número 293. Recuperado a partir de http://www.boe.es/aeboe/consultas/bases_datos/doc.php?id=BOE-A-2006-21409

Reig, D. (2012, junio 15). 16 cosas que nadie nos había contado sobre creatividad (e innovación). Recuperado a partir de http://www.dreig.eu/caparazon/2012/06/15/16-tips-creatividad/

Reigeluth, C. M. (2000). *Diseño de la instrucción : teorías y modelos, un nuevo paradigma de la teoría de la instrucción*. Madrid: Mc Graw Hill Aula XXI Santillana.

RENa. (2008). Movimiento y sistema de referencia. *Red Escolar Nacional, Venezuela*. Portal educativo. Recuperado enero 18, 2012, a partir de http://www.rena.edu.ve/cuartaEtapa/fisica/Tema2a.html

Resnick, M. (2001). Closing the Fluency Gap. *MIT*, *Comunication of the ACM*, *44*(3), 144–145.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico, & P. Gomez (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia.* (pp. 69–108). Bogota, Colombia: Una empresa docente. Recuperado a partir de http://funes.uniandes.edu.co/486/

Rico, L. (2000). Representación y comprensión sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. En L. C. Contreras Gonzales, J. Carrillo Yañez, & N. Climent Rodríguez (Eds.), *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 217–230). Huelva, España: IV SIMPOSIO DE LA SEIEM. Recuperado a partir de http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas04SEIEM/IVsimposio.pdf

Rico, L., Castro, E., & Romero, I. (2000). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado a partir de http://funes.uniandes.edu.co/470/1/RicoL00-39.PDF

Rieber, W. C. (2004). Microworlds. En D. H. Jonassen (Ed.), *Handbook of Research for Educational Communications and Technology*, AECT (2.ª ed., pp. 583–603). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. Recuperado a partir de http://www.aect.org/edtech/39.pdf

Ríos García, Y. J. (2011). Concepciones sobre las fracciones en docentes en formación en el área de matemática. *Revista Omnia*, *17*(1), 11–33.

Rodriguez, I. (2011). Del saber a enseñar al saber enseñado: una interpretación de la Transposicón Didáctia en la Matemática. *Cuadernos de Educación y Desarrollo*, *3*(26). Recuperado a partir de http://www.eumed.net/rev/ced/26/ir.htm

Rodríguez Quintana, E. (2005). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de matemáticas una propuesta integradora desde el enfoque antropológico* (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid, Madrid. Recuperado a partir de http://eprints.ucm.es/tesis/edu/ucm-t28687.pdf

Román, J., & Pérez, G. A. (2008). *matemáticas, 4 Educación Primaria*. *Proyecto Mundo Agua*. (C. Arribas, Ed.). Granada: Edelvives.

Rumelhard, G. (2001). Trabajar los obstáculos para asimilar los conocimientos científicos. En A. W. de Camilloni (Ed.), *Los Obstáculos Epistemológicos En La Enseñanza* (pp. 31–62). Barcelona: Gedisa.

Sabariego Puig, M., Massot Lafon, I., & Dorio Alcaraz, I. (2009). Métodos de Investigación Cualitativa. En R. Bisquerra Alzina (Ed.), *Metodología de la investigación educativa* (2da ed., pp. 293–328). Madrid: Editorial La Muralla.

Salazar, M. C., Martinic Valencia, S., & Maz Machado, A. (2011). Diseño de una investigación para identificar los significados de fracción que ponen de manifiesto los profesores de primaria en Chile (CO). *XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA* (pp. 1–11). Recife, Brasil: Comité Interamericano de Educación Matemática. Recuperado a partir de http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/2472/997

Salinas Muñoz, M. E. (2010). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. *Revista Q, Universidad Pontifica Bolivariana*, *5*(9), 1–7.

Sammet, J. E. (1972). Programming languages: History and future. *Association for Computing Machinery, Inc*, *15*(7), 601–610.

Sánchez García, M. V. (2001). Dificultades específicas en el aprendizaje de las fracciones. Estudio de casos. Implicaciones para la formación de maestros. En M. del C. Chamorro Plaza (Ed.), *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas* (pp. 11–27). Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, Secretaría General Técnica, Subdirección General de Información y Publicaciones.

Sandín, M. P. (2003). *Investigación cualitativa en educación: fundamentos y tradiciones*. Madrid: McGraw Hill.

Sandoval Casilimas, C. A. (1996). *Investigación cualitativa*. Especialización en teoía, métodos y técnicas de investigación social. Bogota, Colombia: Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior, ICFES. Recuperado a partir de http://desarrollo.ut.edu.co/tolima/hermesoft/portal/home_1/rec/arc_6667.pdf

Sangrá, A., & Guàrdia, L. (2005). Diseño instruccional y objetos de aprendizaje: hacia un modelo para el diseño de actividades de evaluación del aprendizaje on-line. *RED: Revista de Educación a Distancia*, (4), 1–14.

Sankaran, S., Sampath, H., & Sivaswamy, J. (2009). Learning fractions by making patterns – An Ethnomathematics based approach. En S. . Kong, H. . Ogata, C. . Chang, T. Hirashima, J. H. . Klett, C. . Liu, C. . Looi, et al. (Eds.), *Proceedings of the 17 th International Conference on Computers in Education* (pp. 341–345). Hong Kong: Asia_Pacific Society for Computer in Education. Recuperado a partir de http://www.apsce.net/ICCE2009/pdf/C2/proceedings341-345.pdf

Savenye, W. C., & Robinson, R. S. (2004). Qualitative research issues and methods: an introduction for educational technology. En D. H. Jonassen (Ed.), *Handbook* *of Research for Educational Communications and Technology*, AECT (2.ª ed., pp. 1045–1071). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. Recuperado a partir de http://www.aect.org/edtech/39.pdf

Schacter, J. (1999). *The Impact of Education Technology on Student Achievement: What the Most Current Research Has To Say*. (pp. 1–12). Virginia: Milken Exchange on Education Technology. Recuperado a partir de http://www.eric.ed.gov/ERICWebPortal/contentdelivery/servlet/ERICServlet?accno=ED430537

Selander, S. (2008). Designs for Learning – A Theorical Perspective. *Designs for Learning*, *1*(1), 10–22.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1–36.

Smith, L. (1994). B. F. SKINNER (1904 - 1990). *UNESCO International Bureau of Education*, *24*(2/4), 519–532.

Socas Robayna, M. (2000). Jean Piaget y su influencia en la educación. *Números Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *43 - 44*(74), 369–372.

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales», & National Council of Teachers of Mathematics (Estados Unidos). (2003). *Principios y estándares para la educación matemática* (1ª ed. en castellano.). Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Solarte E, M. C. (2006). Los conceptos científicos presentados en los textos escolares: son consecuencia de la transposición didáctica. *Revista ieRed*, *1*(4), 1–12.

Stager, G. (2005). Papertian constructionism and the design of productive contexts for learning. *Proceeding of the Plennary Sesion - EuroLogo X* (pp. 1–10). Poland, Warsaw: Centre for Informatics and Technology in Education. Recuperado a partir de http://stager.org/articles/eurologo2005.pdf

Stake, R. E. (2000). The Case Study and Generalizability. *Case Study Method: Key Issues, Key Texts* (pp. 19–26). London: Sage Publications Ltd.

Stake, R. E. (2005). *Investigación con estudio de casos* (3.ª ed.). Madrid: Ediciones Morata.

Steinmetz, J. (2001). Computer and Squeak as Environment Learning. En M. J. Guzdial & K. M. Rose (Eds.), *Squeak: Open Personal Computing and Multimedia* (pp. 453–482). New Jersey: Prentice Hall.

Stewart, I. (2007). *Historia de las matemáticas: en los últimos 10.000 años*. Barcelona: Editorial Critica.

Swanborn, P. G. (2010). *Case Study Research: What, Why and How?* Thousand Oaks, CA: SAGE Publications.

Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers.

Tellis, W. (1997). Application of a case study methodology. *The Qualitative Report: An online journal dedicated to qualitative research and critical inquiry*, *3*(3). Recuperado a partir de http://www.nova.edu/ssss/QR/QR3-3/tellis2.html

Thomas, D., & Brown, J. S. (2011). *A New Culture of Learning: Cultivating the Imagination for a World of Constant Change*. USA: CreateSpace.

Tinio, V. L. (2002). *ICT in Education*. New York: Stephe Browne. Recuperado a partir de http://www.saigontre.com/FDFiles/ICT_in_Education.PDF

Tomaz Henriques Serrano Caldeira, M. F. (2009). A importância dos materiais para uma aprendizagem significativa da Matemática. *X Congresso Internacional Galego Português de Psicopedagogia* (pp. 3306–3321). Braga, Portugal: Universidad do Minho. Recuperado a partir de http://www.educacion.udc.es/grupos/gipdae/congreso/Xcongreso/pdfs/t7/t7c244.pdf

Törner, G., & Sriraman, B. (2005). Issues and tendencies in german mathematics-didáctics: An epochal perspective. En Helen L Chick & J. L. Vincent (Eds.), *29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, RFO4 (Vol. 1, pp. 197–202). Melbourne, Australia: PME. Recuperado a partir de http://www.emis.de/proceedings/PME29/PME29ResearchForums/PME29RFEnglishSriraman.pdf

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación matemática*, *17*(1), 5–32.

Turkle, S., & Papert, S. (1990). Epistemological Pluralism: Styles and Voices within the Computer Culture. *Signs: Journal of Women in Culture and Society*, *16*(1), 128–157.

Turner, D. W. (2010). Qualitative interview design: A practical guide for novice investigators. *The Qualitative Report*, *15*(3), 754–760.

Valente de Sousa, A. L. V. de S. (2011). *Integração das TIC na educação : o caso do Squeak Etoys* (Doctoral Thesis). Universidade do Minho, Minho. Recuperado a partir de http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/14206

Vera C, A., & Vollalón C, M. (2005). La triangulación entre métodos cuantitativos y cualitativos en el proceso de investigación. *Ciencia & Trabajo*, *7*(16), 85–87.

Vicario, M. (2009). El aporte papertiano a la teoría informática educativa. *XXV Simposio Internacional de Computación en la Educación* (pp. 1–12). México, D.F.: SOMECE.

Vigotsky, L. S. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Grupo Editorial Grijalbo.

Vinagre, M. (2010). *teoria y practica del aprendizaje colaborativo asistido por ordenador*. Madrid: Editorial Síntesis S.A. Recuperado a partir de http://www.sintesis.com/tecnologia-educativa-73/teoria-y-practica-del-aprendizaje-colaborativo-asistido-por-ordenador-ebook-1551.html

Vygotsky, L. S. (1989). *Thought and language*. USA: MIT Press.

Wood, D., Bruner, J. S., & Ross, G. (1976). The Role of Tutoring in Problem Solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, *17*(2), 89–100. doi:10.1111/j.1469-7610.1976.tb00381.x

Xunta de Galicia. (2012). espazoAbalar : Proyecto Abalar. *espazoAbalar*. Institucional. Recuperado septiembre 10, 2012, a partir de http://www.edu.xunta.es/espazoAbalar/es/espazo/proxecto-abalar/introducion

Yatim, M. H. M., & Masuch, M. (2007). Educating Children Through Game Making Activity. University of Magdeburg.Dept. of Simulation and Graphics, Faculty of Computer Science Otto-von-Guericke. Recuperado a partir de http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.108.4871

Yin, R. K. (1984). *Case Study Research: Design and Methods*. Applied Social Research Methods Series (Vol. 5). California: Sage Publications.

Yin, R. K. (1994). *Case Study Research: Design and Methods* (2nd ed.). California: Sage Publications, Inc.

Yusof, J. (2003). *Mathematical errors in fractions work: a longitudinal study of primary level pupils in Brunei* (Doctoral Thesis). Curtin University of Technology, Australia. Recuperado a partir de http://espace.library.curtin.edu.au/view/action/nmets.do?DOCCHOICE=15027.xml&dvs=1343670928996~444&locale=en_US&search_terms=SYS%20=%20000020240&adjacency=N&VIEWER_URL=/view/action/nmets.do?&DELIVERY_RULE_ID=4&usePid1=true&usePid2=true

Yusof, J., & Malone, J. (2003). Mathematical errors in fractions: A case of Bruneian primary 5 pupils. En L. Bragg, C. Campbell, G. Herbert, & J. Mousley (Eds.), *Mathematics education research: Innovation, networking, opportunity* (Vols. 1-1–1-2, pp. 783–790). Australasia: Proceedings of the 26th annual conference of the mathematics education research group of Australasia. Geelong, Vic: MERGA. Recuperado a partir de http://www.merga.net.au/documents/RR_yusof.pdf

Zabala, A. (2011). Un curriculum per a láprenentatge de les competencies. En A. Zabala (Ed.), *Qué, quan i com ensenyar les competències básiques a primària: Proposta de desplegament curricular*, Biblioteca de Guix (Graó) (pp. 9–14). Barcelona: Graó.

Zabala, G., Morán, R., & Blanco, S. (2009). Robotica educativa con Etoys. Presentado en Squeakfest 2009, Porto Alegre, Brasil. Recuperado a partir de http://caeti.uai.edu.ar/archivos/258_ROBOTICA_EDUCATIVA_CON_ETOYS.PDF

Zabala, G., Morán, R., & Blanco, S. (2010). Physical Etoys: una herramienta libre para el aprendizaje de tecnología con material concreto. *Acta de V Congreso de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología (TE&ET 2010)*. Santa Cruz, Argentina: Universidad Abierta Interamericana. Recuperado a partir de http://caeti.uai.edu.ar/archivos/261_PHYSICAL_ETOYS_(TEYET_2010).PDF

Zapata Cardona, L. (2009). Cómo abordar la multiplicación y la división de fracciones. *Ethos Educativo*, *45*, 223–234.

Anexos

ANEXO A: PRIMERA FICHA DE OBSERVACIÓN EN LABORATORIO DE INFORMÁTICA

Nombre del docente:... *Fecha:* ....

Tema de la clase:... *Grado:* ....

	Excelente	Bueno	Regular	Deficiente
Inicio de la clase				
1. Da explicaciones y recomendaciones				
2. Explica los objetivos de la clase				
4. Hace memoria de la clases anterior				
Desarrollo de la clase				
1. Imparte la clase a través del ordenador				
2. Los alumnos trabajan en sus ordenadores lo que el profesor propone				
3. Usa adecuadamente el programa Etoys				
4. Comparte información con sus compañeros				
5. El profesor explica la duda de sus alumnos				
6. El estudiante cumple el proyecto en el tiempo establecido				
Cierre de la clase				
1. El profesor fija los contenidos				
2. El profesor verifica los proyectos de los niños/as				
3. Realizó evaluación para verificar el logro de los objetivos				

Sugerencias

....

ANEXO B: OBSERVACIÓN DE CLASES

Nombre del docente:.. *Fecha:* ....

Tema de la clase:.. *Grado:* ....

	Excelente	Bueno	Regular	Deficiente
Inicio de la clase				
1. Motivó al iniciar la clase				
2. Muestra los objetivos de la clase a los alumnos				
3. Los alumnos muestran interés por la clase				
4. Hizo sondeo de los conocimientos previos del tema				
Desarrollo de la clase				
1. El desarrollo del tema es claro, efectivo y ordenado				
2. El nivel del contenido es adecuado para los alumnos				
3. Las situaciones presentadas fueron las adecuadas al objetivo de la clase				
4. Estimula la participación de los alumnos y que expresen sus opiniones				
5. Los alumnos trabajan organizada y productivamente				
6. El docente presenta variedad de recursos y/o de técnicas				
7. El profesor usa materiales didácticos adecuadamente				
8. El profesor está atento a los alumnos que presentan dificultades en el aprendizaje				
9. Las actividades de la clase permitieron el aprendizaje de los contenidos				
10. El tiempo asignado para cada actividad es suficiente para el logro del objetivo				
Cierre de la clase				
1. El docente realizó actividades de fijación				
2. Se ha logrado una buena síntesis conceptual del tema trabajado				
3. Realizó evaluación para verificar el logro de los objetivos				

ANEXO C: INSTRUMENTOS DE OBSERVACIÓN DEL DISEÑO DE PROYECTOS CON ETOYS

Observador: Cerapio Quintanilla	**Fecha:** 14 de nov. Al 25 nov. de 2012	**Total de niños 26**

	Categoría	**Observación durante el desarrollo de los proyectos**
Dominio de Squeak Etoys	• Formula hipótesis de trabajo • Elaboración de proyectos. • Respeta el tiempo establecido. • Mejora en el uso de herramientas de Squeak • No logra formular	a. Formula hipótesis en sus proyectos. b. Elabora los proyectos con cierta facilidad. c. Cumple con el tiempo establecido en la elaboración del proyecto. d. Explora diferentes herramientas durante el proceso de programación y desarrolla el proyecto con cierta soltura tomando diferentes alternativas en la construcción e. No logra formular el proyecto, tampoco las actividades con Squeak Etoys
Construcción del concepto de fracción	• Diseña figuras geométricas • Diseña proyectos de fracciones usando las figuras geométricas. • Realiza construcciones de fracciones con Etoys • Explica el proceso del concepto creado. • Contrasta el resultado con su hipótesis.	a. Realiza la construcción de las figuras geométricas usando el lenguaje de programación Squeak. b. Diseña figuras geométricas relacionadas con los conceptos de fracción usando Squeak. c. Diseña proyectos de fracciones, con situaciones del contexto real. d. Explica con facilidad el concepto matemático de fracción. e. Verifica los resultados y contrasta la hipótesis planteado.
Interacción entre compañeros	• Trabaja solo. • Trabaja con el grupo • Participación • Es inquieto	a. El estudiante no está en interacción con sus demás compañeros (se aísla). b. El niño interactúa con dos o más compañeros en simultáneo, se mueve por la clase y comparte información. c. Participa y explica las dudas y dificultades de sus compañeros en el ordenador. d. Se muestra inquieto.

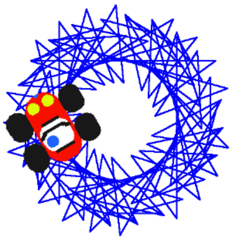
INSTRUMENTOS DE OBSERVACIÓN DE SOCIALIZACIÓN DE PROYECTOS

	Categoría	Observación de la actividad de los niños durante el desarrollo de las experiencias
Socialización	• Participa en la lectura de su diario. • Hace comentarios sobre la lectura. • Realiza conclusiones • Respeta la idea de sus compañeros	a. Participa con la lectura de su diario para explicar a sus compañeros. b. Comenta sobre la lectura de sus compañeros agregando su aporte. c. Realiza las conclusiones sobre el hipótesis propuesto en la lectura. d. Promueve el respeto con sus compañeros. e. Tiene una comunicación fluida.

Sugerencias

....

ANEXO D: MANUAL BÁSICO DE SQUEAK ETOYS



Por ***Cerapio Quintanilla* /USC**

1. El mundo de Etoys

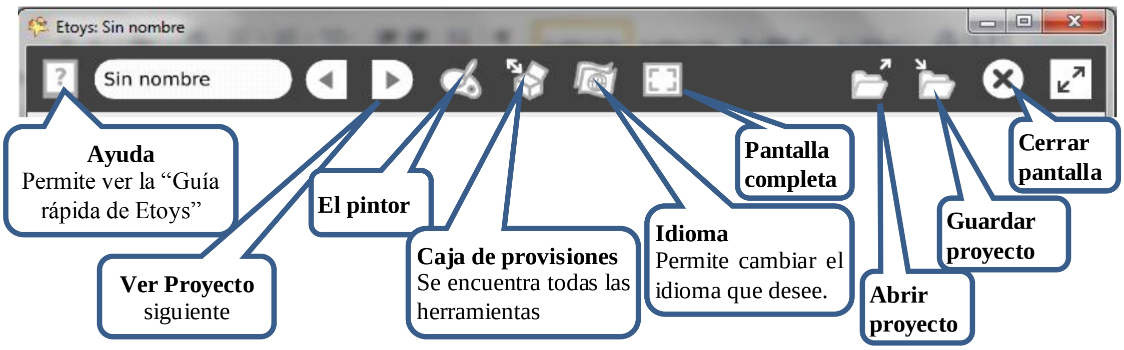
Para iniciar el programa debemos hacer doble clic en ícono de Squeak, luego aparece la pantalla que se muestra a la derecha.

Para iniciar un proyecto, hacer clic en *comenzar un proyecto*. Si desea explorar hacer clic en *Clases y Ejemplos*, y se desea ver otros proyectos hacer clic en *Galería de Proyectos*.

2. Etoys

"Un proyecto "electrónico" o "educacional" basado en Squeak que bien podría ser una simulación, un modelo una historia o un juego creado por un niño o por un adulto. Un eToy puede ayudar a ilustrar o mejorar la percepción de un concepto o de una idea poderosa" (Conn y Rose, 2003).

3. Barra de menú



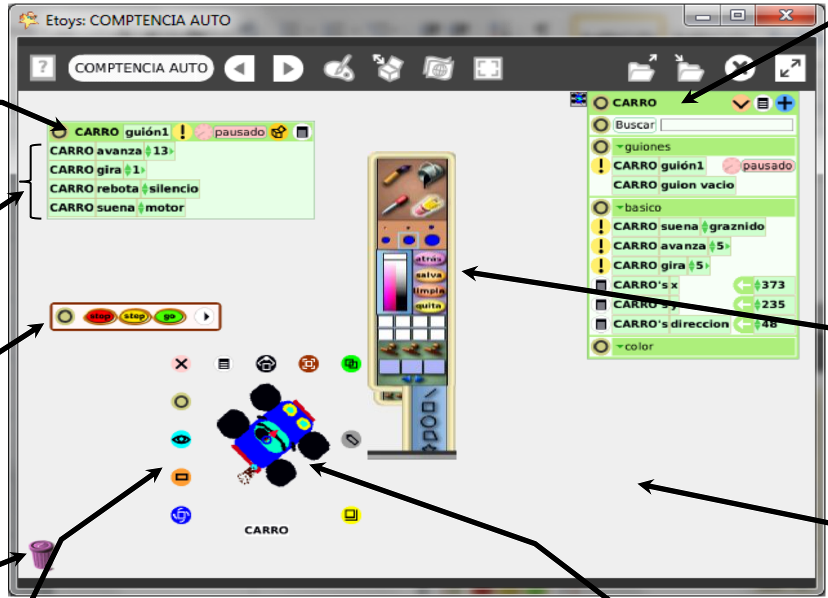
4. Principales elementos básicos de Squeak

Guión / Editor de guiones
Aquí se trasladan del panel las instrucciones que desea ordenar al objeto

Mosaicos
Un conjunto de cintas con ciertas características, propiedades y variables del objeto; a través de los mosaicos se dan órdenes y instrucciones.

Botones de control
Aquí se ubica todos los guiones para controlar. **Stop** (detener), **step** (ejecutar haciendo clic) y **go** (iniciar la actividad, el objeto se mueve)

Basura
Sitio para guardar objetos inútiles.



Panel / Visor
Cuando se hace clic en el cián "ojo", aparece el panel del objeto. El visor muestra las diferentes categorías, propiedades e instrucciones para el objeto representado por los mosaicos. Haciendo clic en punto amarillo de exclamación del visor ejecutará esa instrucción.

Herramientas de dibujo
Contiene los pinceles con los distintos tamaños de brochas, el cubo de pintura para rellenar espacios y figuras geométricas.

Observador
Se encuentra observadores (simples y detallados) en el visor de objetos haciendo clic en el pequeño menú a la izquierda de su propiedad. Un observador "simple" sólo muestra el valor numérico.

Halo
Cuando se selecciona cualquier objeto (boceto) haciendo clic derecho del ratón aparece un "halo" de manipuladores.
Los **manipuladores** son iconos coloreados que rodean un objeto. Cada uno permite realizar diferentes manipulaciones y cambios a dicho objeto.

Boceto
Cualquier objeto dibujado antes de ser nombrado es un boceto. Es aconsejable dar nombre a tus bocetos cuando hayas terminado de dibujarlos

5. El Pintor de Squeak Etoys

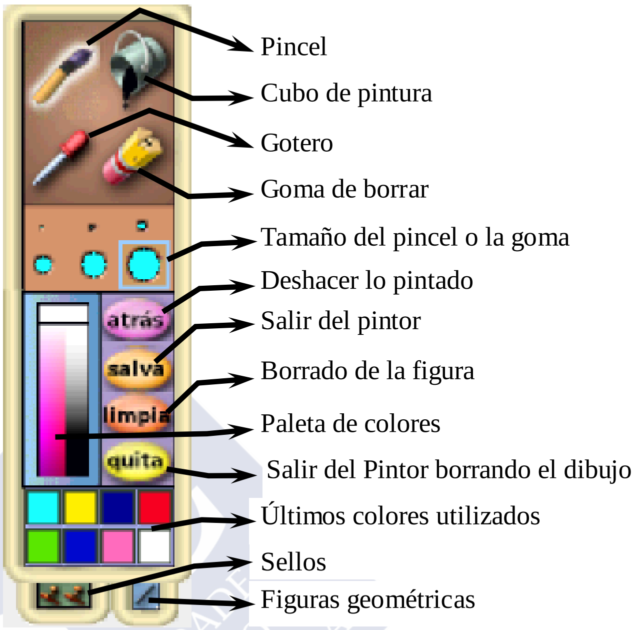
Para iniciar se hace clic en  de la pestaña navegador, luego aparece el “*Pintor”* que es una herramienta que permite hacer *dibujos* dentro del mundo de Squeak, los cuales pueden ser tratados como cualquier objeto (boceto).

a) Una vez terminado el dibujo, hay que hacer clic sobre el botón ***salva*** para salir del Pintor, y el dibujo automáticamente se guarda y queda en el mundo.

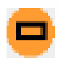
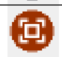
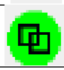
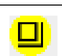
b) Para deshacer el último cambio en el dibujo, hay que hacer clic sobre el botón ***atrás***.

c) Cuando se hace clic en el botón ***limpia*** se borra el dibujo entero, pero no se sale del Pintor.

d) Si hace clic en el botón ***quita*** se cierra el Pintor y se borra el dibujo realizado.

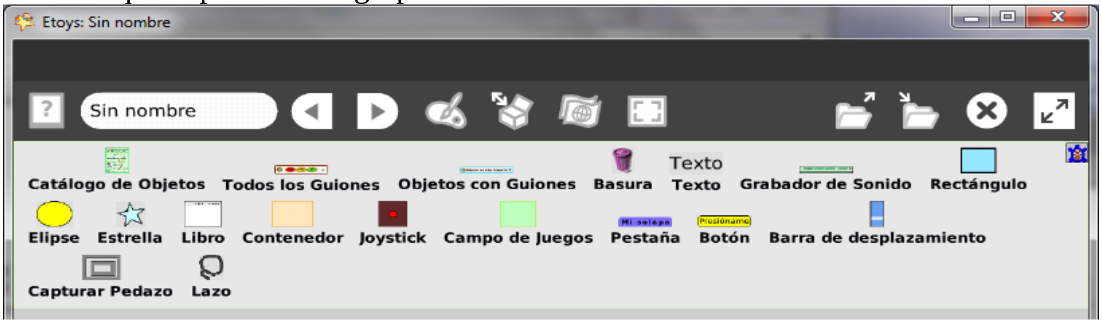


6. Halo de un boceto (manipuladores)

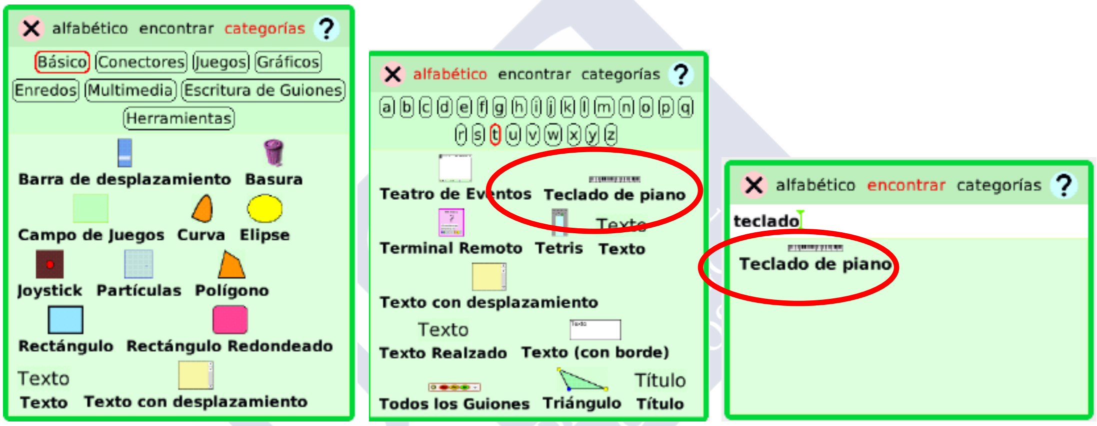
Un objeto y su halo	Icono	Nombre	Función de los halos
		Rotar	Permite, mediante la técnica de arrastre, girar el objeto seleccionado. Cuando el giro sea de cero grados su color vuelve azul pálido.
		Mosaico	Transforma el objeto en una etiqueta, un rectángulo con el nombre del objeto en su interior. Su propósito es poder utilizar el objeto en un eToy o en un script de botón.
		Ojo	Un clic sobre el ícono permite ver el ***panel de los guiones*** del objeto, y podemos realizar acciones.
		Colapsar	Minimiza el objeto dentro del mundo
		Cerrar	Elimina el objeto colocándolo en el cubo de la basura.
		Menú	Se obtiene el menú contextual del objeto seleccionado.
		Levantar	Permite levantar y trasladar el objeto seleccionado.
		Mover	Traslada un objeto de un lugar a otro dentro del mundo.
		Duplicar	Duplica el objeto seleccionado.
		Color	Al hacer clic aparece el Pintor y permite modificar el color del objeto seleccionado.
		Tamaño	Permite modificar el tamaño del objeto mediante el arrastre del objeto seleccionado.

7. Pestaña de catálogos

Aquí se presenta un grupo de herramientas.

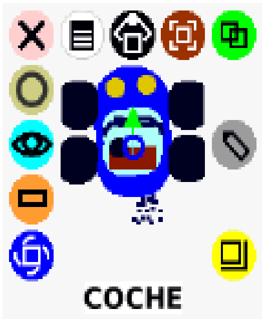


Al seleccionar **Catálogo de objetos** se obtiene por defecto el menú de *categorías* y categoría *básico*; luego se puede seleccionar diferentes **objetos**.



Categorías	Alfabético	Encontrar
Haciendo clic en cada recuadro de las categorías (*básico*, *conectores*, *juegos*, *Gráficos*, *Enredos*, *Multimedia*, *Escritura de Guiones* y *Herramientas*)	Al hacer clic en un alfabeto aparece los objetos que tienen la primera letra. Ejemplo "**t**" y aparecen los objetos cuyos nombre inician con la letra **t.**	Se escribe el nombre del objeto que se busca y aparece el objeto deseado. Ejemplo, **teclado,** aparece **Teclado de piano.**

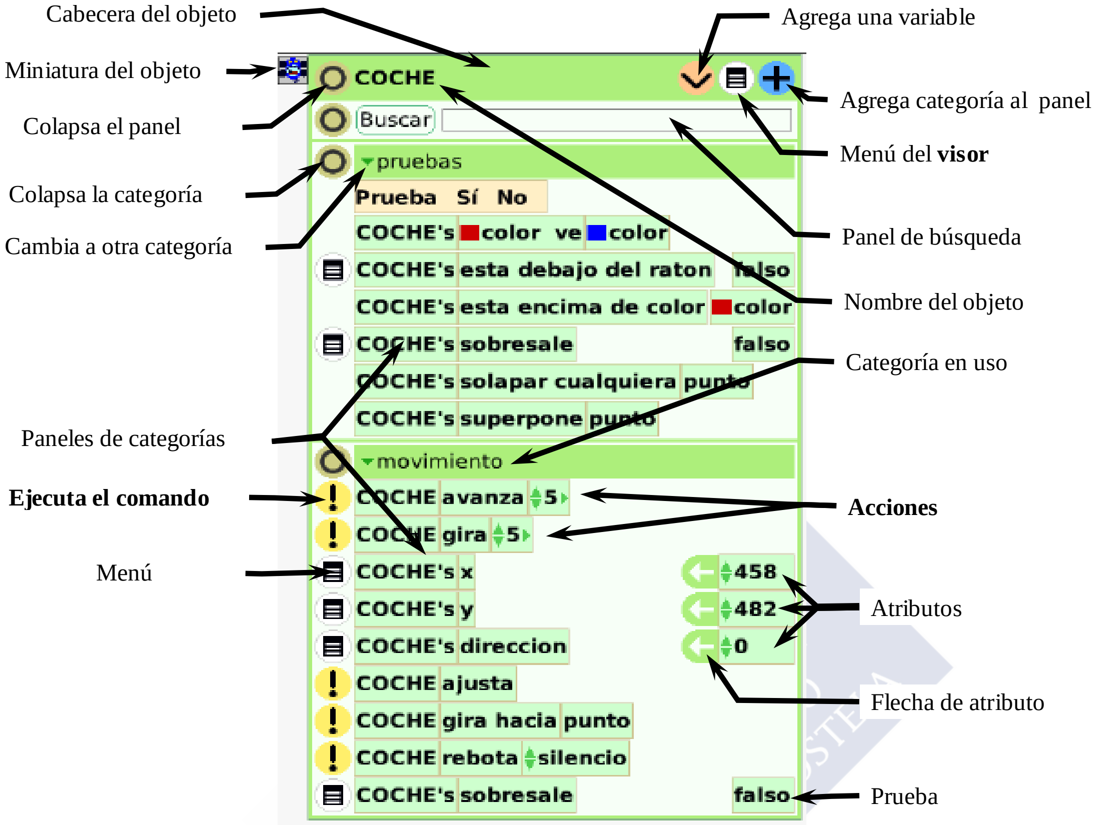
8. Panel / Visor



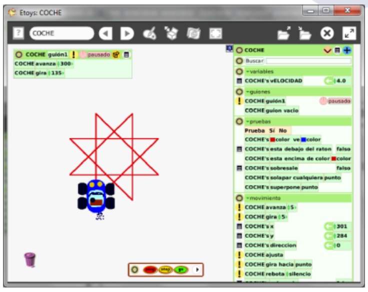
Para abrir el ***Visor*** de un objeto es hacer clic en ícono ***ojo***  del **halo** del objeto seleccionado.

El visor está compuesto por la "miniatura del objeto" situada al lado izquierdo del panel. Además es el espacio donde se puede ubicar todas las ***categorías*** de órdenes que debe ejecutarse para que el **objeto** del mundo tenga vida. Las categorías a encontrarse son: *Guiones, variables; básico, geometría, más geometría, uso de lápiz, movimiento, relleno y borde, manejo de guiones, sonido, observación, arrastrar y soltar, misceláneo, gráficos, entrada y burbujas de discurso*.

9. Partes del panel / visor



10. Proyecto

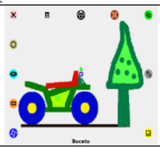
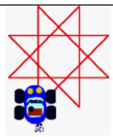
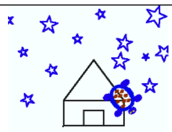


Un proyecto en Squeak es un documento de actividades, cuya extensión es **".PR"**

Un proyecto está compuesto por un **Mundo**, **objetos** y **guiones**.

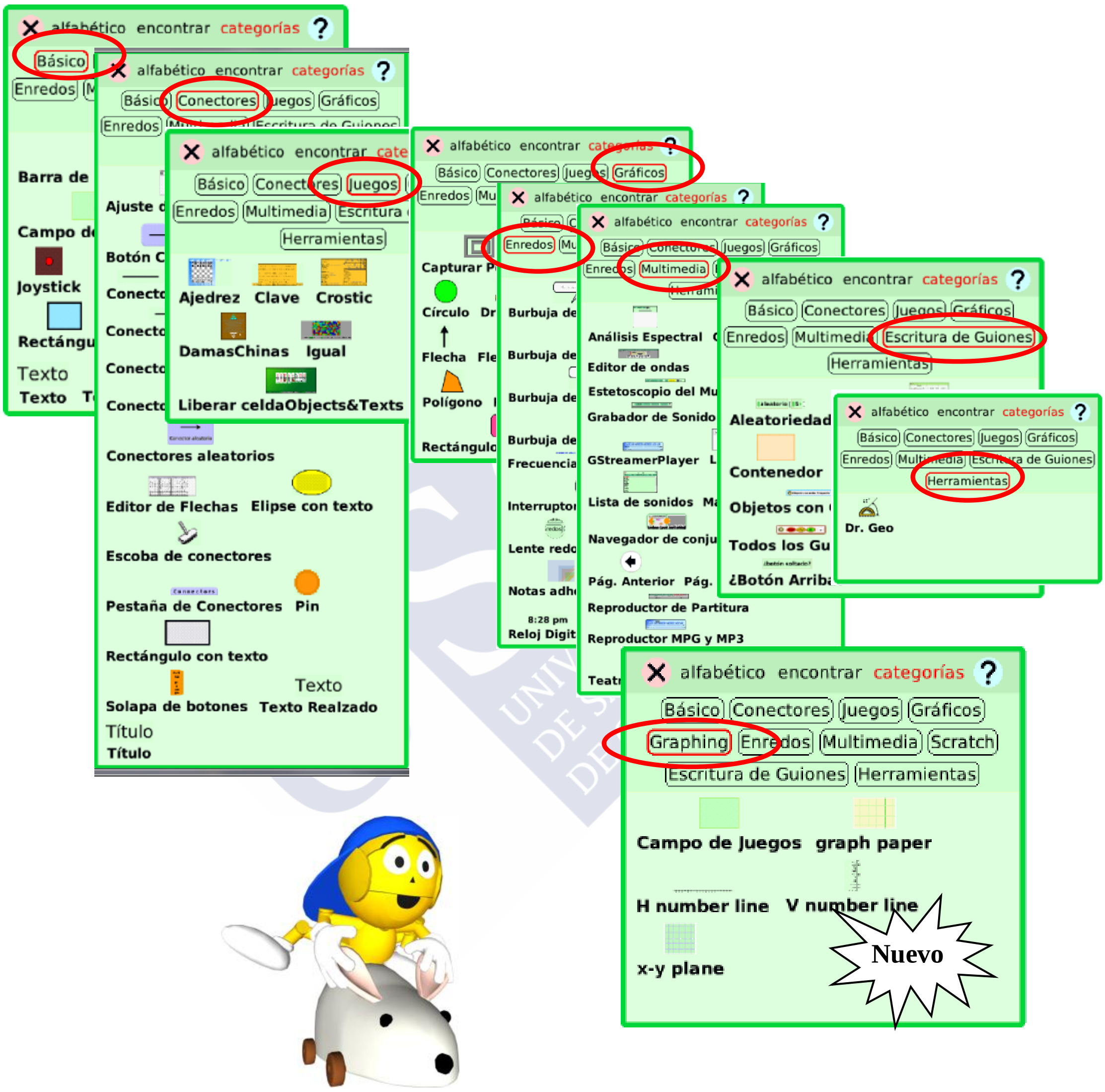
Al abrir Squeak, en el "Mundo" se encuentran unas ventanas que corresponden a proyectos incluidos en la "imagen que se está utilizando.

Ejemplos

		
Objeto (moto y árbol) fue construido utilizando el Pintor.	El objeto (figura geométrica) fue trazado por el *coche*.	Las estrellas y la tortuga fueron pintadas con el Pintor y la casa trazada por la tortuga.

11. El catálogo de objetos

Está compuesto por: *Básico*, *Conectores*, *Juegos*, *Graphing*, *Gráficos*, *Enredos*, *Multimedia*, *Escritura de Guiones* y *Herramientas*.



Caricatura de Squeak Etoys, del libro Ideas Poderosas en el Aula.

12. Bibliografía

Conn, A. & Rose, K. (2003). Ideas Poderosas en el Aula: El Uso de Squeak para la Mejora del Aprendizaje de las Matemáticas y de las Ciencias. *Viewpoints Research Institute, Inc*. California.

Fueyo, J., Pizarro, A., Prudencio, M., Roldan, V. y Torres, F. (2004). Manual de Squeak. Badajoz; Centro de Fomento de Nuevas Iniciativas.