

Tese de Doutoramento



*Modelos de regresión non lineais con erros nos regresores:
unha aplicación á xestión de recursos pesqueiros*

Juan Carlos Estévez Niñez

**Universidade de Santiago de Compostela
Departamento de Economía Cuantitativa**

D. José Carlos de Miguel Domínguez, Catedrático da Universidade de Santiago de Compostela e D. Manel Antelo Suárez, Profesor Titular da Universidade de Santiago de Compostela

Autorizan a presentación da memoria adxunta, titulada *Modelos de regresión non lineais con erros nos regresores: unha aplicación á xestión de recursos pesqueiros*, realizada por D. Juan Carlos Estévez Núñez baixo a dirección de ambos, para optar ao grao de Doutor en Economía.

E para que así conste, expídese a presente autorización en Santiago de Compostela, o 29 de Nadal de 2011.

Asdo: D. José Carlos de Miguel Domínguez

Asdo: D. Manel Antelo Suárez

Agradecementos

Facer público nun traballo como é unha Tese de Doutoramento, o meu agradecemento a aquelas persoas que dun ou doutro xeito tiveron unha participación directa ou indirecta na súa elaboración, quizais non debera entenderse só como un xesto que reflicte un sentimento de gratitude, senón tamén como un exercicio de honestidade e xustiza.

Por iso de xustiza e gratitude é recoñecer a axuda dos directores, Manel Antelo, revisor incansable de ingratas versións previas deste traballo e exemplo de amizade radicalmente comprometida, e José Carlos de Miguel, orixe do cerne desta investigación e alentador entusiasta nos momentos máis críticos. Grazas.

Tamén é de gratitude e xustiza, nomear ao profesor Xosé Luís Quiñoá, polas súas ensinanzas e pola súa axuda desinteresada, así como aos meus outros compañeiros e compañeiras do Departamento de Economía Cuantitativa da USC, tantos anos xa embarcados na mesma travesía con inesquecibles mostras de aprecio persoal mesmo na diferenza. En especial, a inspiración emocional de Isabel, a amizade de Agustín, Ánxela, Chus, Fernando, Luciano, Rosalía e Xulio, e a axuda no terreo docente de Ana, Carmen, Mila, Xosé Antón, Xulia e as demais compañeiras da sección de Econometría, foron ventos que axudaron neste navegar. Igualmente é de xustiza lembrarme dos profesores Luís Lamas e Conchita del Valle, mestres sempre presentes na miña memoria. Grazas a todas elas e a todos eles.

Aos profesores Carlos Ricoy, Fidel Martínez, Manolo Xordán e Xan Carmona lles agradezo terme permitido compartir a gran calidade humana que todos eles desbordan, e dar-me forzas e ánimos cando o mal tempo obriga a vogar. Agradecido tamén.

Amoso a miña gratitude ás sucesivas xeracións de estudantes que teñen sufrido ás miñas desventuras docentes pola deferencia con que sempre me teñen tratado e a paciencia que teñen demostrado coas miñas manías e eivas profesionais.

Á miña familia máis achegada, Ari, Flora, Manuel, Manolo, Begoña e Fran, e aos amigos Anxo Doval, Blas Charlín, Rafa Trelles e Abel Losada, lles debo simplemente cada segundo de vida que ven acubillarse ao meu humilde corazón. Mar de fondo. Dicar grazas é mesmo insuficiente ...

E finalmente expresar, non só gratitude senón tamén emocionada admiración, polo guaje profesor Eduardo ‘Manosiempreabiertas’, alma inqueda que como o noso mar é fonte inesgotable de novos achados académicos, científicos e culturais que sempre está disposto a compartir. ‘Gracies’.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
1. O ESTADO DA ARTE	11
1.1 Introdución	13
1.2 O modelo de xestión de Gordon-Schaefer-Munro no marco do paradigma tradicional	15
1.3 A estimación de modelos con erros nas variables	18
1.3.1. <i>O caso linear</i>	19
1.3.2. <i>O caso non linear</i>	21
Bibliografía	23
2. ESTIMACIÓN DUN MODELO SIMPLE DE CRECEMENTO CON ERROS NO REGRESOR	27
2.1 Introdución	29
2.2 Modelos sigmoidais na xestión de recursos pesqueiros: unha proposta de formalización	31
2.3 Estimación co método de mínimos cadrados cando existen perturbacións pero non erros de medida no regresor	39
2.4 Estimación co método de mínimos cadrados se non existen perturbacións pero si existen erros de medida no regresor	46
2.5 Estimación co método de mínimos cadrados se existen perturbacións e erros de medida no regresor	49
2.5.1. <i>Simulacións con información centrada no punto de inflexión do modelo latente</i>	60
2.5.1.1. <u>Modelo simulado I</u>	61
2.5.1.2. <u>Modelo simulado II</u>	67
2.5.2. <i>Simulacións con información non centrada no punto de inflexión do modelo latente</i>	70
2.5.2.1. <u>Modelo simulado III</u>	71
2.5.2.2. <u>Modelo simulado IV</u>	72
2.6 Conclusións	75
Bibliografía	77

3. ESTIMACIÓN DE MODELOS CUADRÁTICOS CON ERROS NO REGRESOR	79
3.1 Introducción	81
3.2 Modelos cuadráticos na xestión de recursos pesqueiros: unha proposta de formalización	82
3.3 A estimación do modelo cuadrático xeral co método de mínimos cadrados (MC)	85
3.3.1. Consistencia dos estimadores de mínimos cadrados con información do regresor centrada no parámetro β_2	88
3.3.1.1. <u>Disposición simétrica da información</u>	88
3.3.1.2. <u>Propiedades das mostras de observacións con disposición simétrica</u>	90
3.3.1.3. <u>Consistencia do estimador b_1</u>	92
3.3.1.4. <u>Consistencia do estimador b_0</u>	102
3.3.2. Consistencia dos estimadores de mínimos cadrados con información do regresor non centrada no parámetro β_2	104
3.3.2.1. <u>Disposición simétrica da información</u>	104
3.3.2.2. <u>Consistencia do estimador b_1</u>	104
3.3.2.3. <u>Consistencia do estimador b_2</u>	107
3.3.2.4. <u>Consistencia do estimador b_0</u>	110
3.4 A estimación dun modelo cuadrático particular	113
3.4.1. <i>Estimadores MC dispoñendo dos valores verdadeiros da biomasa</i>	115
3.4.2. <i>Consistencia dos estimadores MC cando o regresor ten erros de medida</i>	119
3.4.3. <i>Simulación</i>	127
3.4.4. <i>Información sobre a biomasa latente non centrada no valor que maximiza a variación natural</i>	131
3.5 Implicacións que se derivan da inconsistencia dos estimadores MC cando o regresor ten erros de medida, sobre o modelo de Gordon-Schaefer-Munro	136
3.5.1. <i>Ecuacións do modelo teórico orixinal</i>	136
3.5.2. <i>Simulacións comparativas</i>	138
3.5.3. <i>Consecuencias económicas</i>	143
3.6 Conclusións	145
Bibliografía	147

4. HIPÓTESE DE DISTRIBUCIÓN ASIMÉTRICA DE PROBABILIDADE DO REGRESOR NUN MODELO CUADRÁTICO PARTICULAR	149
4.1 Introducción	151
4.2 Distribucións de probabilidade asimétricas de variables con valores non negativos	154
4.3 Distribución de probabilidade de tipo Gamma (α, β, δ) para a biomasa latente e os erros de medida	155
4.4 Distribución de probabilidade da suma de dúas variables con distribución Gamma con tres parámetros	162
4.5 Momentos da convolución de dúas distribucións de probabilidade particulares Gamma con tres parámetros	166
4.6 Distribución de probabilidade de tipo Beta (α, β, t_1, t_2) para a biomasa latente e os erros de medida	168
4.7 Conclusións	174
Bibliografía	176

INTRODUCCIÓN

Dende ese punto de vista resulta imprescindible revisar minuciosamente cada un dos detalles que caracterizan os modelos que se propoñen, e con máis razón se eses detalles están enunciados como hipóteses ou representados como parámetros que é necesario determinar.

Na medida na que este tipo de modelo biolóxico de crecemento loxístico (ou sigmoidal) utiliza ecuacións non lineais nos parámetros e/ou nas variables para representar as relacións entre as variables que considera, demostrar as implicacións de estimar ese tipo de ecuacións sen ter en conta a posible existencia de erros de medida, é o detalle que se converte en pedra angular sobre a que xira a idea principal desta Tese de Doutoramento. A outra, non menos importante é a necesidade de reflexionar sobre a validez estatística das inferencias que se derivan dos modelos así estimados, así como tamén sobre as consecuencias que comporta ese proceder á hora de xestionar os recursos pesqueiros.

Creemos que estas reflexións son pertinentes pois con demasiada frecuencia a investigación nalgúns campos da ciencia se contenta coa utilización de técnicas e métodos de investigación que no seu momento deron bos resultados en determinados eidos, pero dos que non está acreditada a súa validez en outras áreas de investigación. Por outra banda tamén é frecuente acudir a metodoloxías que son especialmente engaiolantes pola súa novidade, sen facer previamente un serio exercicio de reflexión sobre a súa idoneidade.

Relevancia

Neste último senso debe terse en conta a profusión con que se vén utilizando o modelo antes mencionado para representar os aspectos máis salientables tanto do comportamento biolóxico de certos recursos renovables como son os pesqueiros, como das liñas de actuación que se propoñen para a súa xestión tendo en conta criterios económicos e de sustentabilidade. Así, a constante alusión ao mesmo tanto na investigación teórica como en informes técnicos auspiciados por entidades de gran prestixio internacional (FAO, ICES, etc.), sitúao como chanzo de obrigado paso no proceso de deseño de calquera política

pesqueira, cando menos como punto de referencia.

Agora ben, o nivel de atención que se ten prestado ata agora á mellora deste tipo de modelos mediante a utilización de diferentes ecuacións alternativas que se adapten mellor a cada caso particular, ou mediante o intento de enriquecer a información estatística dispoñible, non foi parello á análise da idoneidade do método de estimación das ecuacións que os constitúen no contexto que aquí se propón. E iso a pesar de que é habitual atoparse comentarios nos informes técnicos que evidencian dúbidas sobre a información estatística dispoñible ou sobre o papel que desempeña a incerteza na determinación de liñas estratéxicas de política de xestión de recursos como os pesqueiros, como se comenta no Capítulo 1.

Aínda que as decisións políticas que se observan a cotío fan pensar que, na práctica, os postulados e intereses ‘pseudo-científicos’ son os que tenden a ter máis peso á hora de planificar a xestión destes recursos, cabe pensar que o esforzo por formalizar e racionalizar ese proceso de xestión non é obviado nin polos axentes que toman esas decisións nin polos que poden influír en que se tomen. Nese senso, é de supoñer que os informes técnicos de organismos como a FAO ou o ICES, ou o traballo de moitos grupos de investigación especializados no eido que nos ocupa, non caen en saco baleiro. E desde ese punto de vista, resulta evidente a importancia estratéxica de todo aquilo que poida facer máis eficiente e sustentable a xestión dos recursos pesqueiros, como pretende o obxectivo último desta Tese de Doutoramento.

Outra cuestión de especial relevancia é a de dilucidar ata qué punto resulta aconsellable refinar un aspecto dun modelo cando, por definición, este refinamento supón sempre unha solución de compromiso entre a necesidade de representar de xeito simplificado unha realidade (tendo en conta uns criterios de corrección, verosimilitude, intuición...) e o intento de recoller os matices máis relevantes desa realidade. A este respecto cómpre enfocar esta cuestión tendo en conta a relación entre o custo adicional de mellorar un modelo sobre o comportamento dun determinado recurso renovable e os beneficios que isto reportará. E desde ese punto de vista, as propostas que se ofrecen nesta Tese de Doutoramento probablemente suporían un escaso custo adicional en termos de tempo e

outros recursos, e permitirían corrixir un aspecto deste tipo de modelos bastante descoidado, en aras de acadar unha mellora na súa precisión e exactitude, e unha utilización máis axeitada dos mesmos, un aspecto que consideramos da máxima importancia. A análise custo-beneficio ofrece, pois, unha clara indicación: corrixir esta eiva dos modelos é claramente unha opción que debemos acometer sen dilación e sen vacilación de ningún tipo. Así que mans á obra!

Organización

Na procura de expoñer as liñas de investigación que xustifican a necesidade de revisar o xeito en que se estiman as ecuacións do modelo ao que se fixo referencia nos apartados anteriores, esta Tese de Doutoramento está estruturada en catro capítulos. O Capítulo 1, titulado “O estado da arte”, revisa de forma selectiva o estatus actual da investigación acerca de varios aspectos do modelo biolóxico de crecemento loxístico; nomeadamente (i) a utilización que se fai actualmente do mesmo, (ii) a súa formalización matemática e (iii) os problemas que implica en xeral o feito de estimar ecuacións non lineais con erros nas variables.

En primeiro lugar, trátase de expoñer as grandes liñas da metodoloxía que se constituíu en paradigma na investigación encamiñada a conseguir unha xestión racional dos recursos pesqueiros e a utilidade que supón incorporar novas metodoloxías que teñan en conta o papel das institucións ou o papel da cooperación á hora de xestionalos cando a súa explotación é compartida. Tamén destacamos o papel central que ocupa a hipótese que recolle o crecemento natural dos recursos nese tipo de modelos.

As dúas versións nas que se formaliza matematicamente esa hipótese obriga a introducir a análise do papel das ecuacións non lineais nese proceso de formalización e o estudo da importancia tanto da súa correcta “parametrización” como da súa estimación con técnicas de regresión. Considérese neste contexto a relevancia de representar correctamente as características que se cren fundamentais da relación entre as variables dos modelos, mediante parámetros que permitan identificalas inequivocamente, evitando así o consabido

problema da identificación cando se procede a estimalos. Igualmente téñase en conta neste punto que esa estimación faise habitualmente aplicando o método de mínimos cadrados e este método só garante resultados óptimos en circunstancias moi especiais, polo que de non cumprirse estas, as inferencias que se fagan a partir dos resultados poden non ser correctas.

En segundo lugar, faise especial fincapé na revisión da metodoloxía que se vén propoñendo para estimar ecuacións con erros, partindo do paradigma por excelencia que representa o caso linear, aínda co hándicap de non ter sido aplicado ata o de agora ao eido científico que nos ocupa. Este aspecto será básico para establecer un punto de similitude entre o coñecido resultado que demostra a existencia dun nesgo atenuante no estimador de mínimos cadrados do coeficiente angular dun modelo de regresión linear que teña erros no regresor, e as proposicións e resultados acadados na presente Tese de Doutoramento.

No Capítulo 2, titulado “Estimación dun modelo simple de crecemento con erros no regresor”, expónse o modelo de crecemento biolóxico que está na base da proposta de Gordon-Schaefer, e que supón que a biomasa de certas poboacións (por exemplo de recursos pesqueiros), ten unha senda de crecemento ao longo do tempo que se pode representar mediante unha ecuación sigmoidal. E aínda que a utilización deste tipo de modelo ocupa un papel intermedio na investigación actual como paso previo para a estimación de magnitudes que son utilizadas á súa vez para estimar outras magnitudes máis importantes desde o punto de vista da xestión, é un punto de partida interesante para reflexionar sobre algúns conceptos que se consideran fundamentais nos capítulos 3 e 4 desta Tese de Doutoramento.

De aí o afán nese segundo capítulo por interpretar correctamente as restricións implícitas neste tipo de ecuacións, así como por prestar atención a conceptos importantes para a comprensión deste traballo tales como o de ‘tramo informativo’ en referencia a unha parte caracterizada dunha función non linear en xeral.

Tamén se fai un esforzo por explicar intuitivamente e, sobre todo, por demostrar matematicamente cáles son as consecuencias de estimar un modelo de regresión sigmoidal xeral no que estean presentes erros na variable explicativa cando utilizamos un método de

estimación que descoide esa presenza. Así demostrase que a estimación MC proporciona estimadores en xeral nesgados dos parámetros máis relevantes deste tipo de modelos cando se aplica baixo condicións nada infrecuentes na práctica, polo que nos permite concluír que este método de estimación non é recomendable por si só neses casos, senón que esixe facer correccións nas estimacións que propón, para obter resultados que podan considerarse estatisticamente consistentes.

Nesa tarefa xoga un papel fundamental a simulación de modelos que cumpran as hipóteses que caracterizan de xeito máis relevante o comportamento das variables implicadas nos mesmos. Por iso propónse unha forma de simular o comportamento que no límite terían variables con distribución de probabilidade simétrica como é o caso da distribución Normal.

No Capítulo 3, titulado “Estimación de modelos cuadráticos con erros no regresor”, formulamos a ecuación concreta que explica o crecemento da biomasa no modelo de Gordon-Schaefer propiamente dito, e expresamos unha xeneralización da mesma, recordando brevemente as principais hipóteses nas que esta se apoia. A continuación analizamos (como tamén facemos no Capítulo 2) as consecuencias que se derivan de que unha ecuación cuadrática xeral sexa estimada sen ter en conta a posible existencia de erros na variable explicativa. A relevancia deste aspecto radica en que podemos demostrar que a non consideración de posibles erros na variable explicativa pode provocar nesgos na estimación destas ecuacións, que invalidarían seriamente a metodoloxía utilizada para acadar a solución técnica dos mesmos, e consecuentemente afectarían de xeito relevante á toma de decisións sobre a xestión do recurso en cuestión. E tamén investigamos as consecuencias de pasar por alto a posibilidade da existencia do erro de medida no modelo cuadrático particular que utiliza o modelo de Gordon-Schaefer-Munro, demostrando as condicións, na práctica moi habituais, nas que a estimación MC propón estimadores que realmente non son estatisticamente consistentes.

Finalmente, no Capítulo 4, titulado “Hipótese de distribución asimétrica de probabilidade do regresor nun modelo cuadrático particular”, propóñense dúas vías de mellora e solución dos problemas de inconsistencia dos estimadores MC do modelo

cuadrático de Gordon-Schaefer achados no Capítulo 3. Por un lado propónse revisar a hipótese de simetría no regresor latente dese tipo de modelos para investigar ata qué punto os nesgos demostrados no Capítulo 3 dependen da mesma. E polo outro expóñense as dificultades que xorden ao pretender utilizar un método de estimación alternativo, como é o da máxima-verosimilitude asumindo a hipótese que consideramos máis coherente sobre a distribución de probabilidade do regresor latente.

A revisión da hipótese de simetría da primeira vía de mellora concretámola na elección de funcións de distribución Gamma para representar o comportamento probabilístico tanto do regresor 'latente' como dos propios erros, en substitución das funcións de distribución Normal. O principal resultado nesa dirección que derivamos é a demostración de que o regresor que inclúe erros de medida pode entón representarse mediante unha función de distribución de probabilidade de tipo K-distribución, resultante da convolución das funcións Gamma. Ademais, os momentos desta K-distribución resultan claramente identificables, o que facilitaría a súa estimación.

En canto á segunda vía de mellora mediante a procura da estimación máximo-verosímil propoñemos investigar as consecuencias de utilizar o tipo de distribución de probabilidade que nos parece máis coherente, isto é, unha función Beta con catro parámetros, e tentamos determinar unha función de distribución convencional para as variables observables baixo este suposto. Verificamos que este é un proceso non carente de dificultade, a cal tamén é extensiva a os casos nos que se pretenda utilizar case calquera función de distribución de probabilidade convencional. A razón é que o estado actual da teoría matemática sobre convolución de funcións non ten atopado solucións que resulten viables para aplicar na práctica, ben porque o produto de convolución non resulta definido en termos dunha función de distribución convencional, ben porque non está incorporado ás aplicacións informáticas máis ao uso.

Capítulo 1

O ESTADO DA ARTE

1.1 Introdución

Na descrición do obxectivo principal desta Tese de Doutoramento que se expuxo no capítulo precedente, subliñábanse varios aspectos fundamentais que son foco de liñas particulares de investigación e que, no caso que nos ocupa, conflúen suscitando os resultados que se exporán ao longo da mesma. Así, o reto que supón deseñar a forma máis axeitada posible de xestionar un determinado recurso natural renovable como as pesquerías convida a facer explícitos os principios ético-filosóficos que se van seguir, así como a metodoloxía concordante cos mesmos.

Un deses principios que é aceptado con xeneralidade é o da xestión *responsable* dos recursos pesqueiros, entendendo por tal a que pon especial énfase no sostemento temporal dos mesmos para que poidan tamén ser aproveitados por vindeiras xeracións. Tamén se considera que un principio importante é que a súa explotación se faga de forma *racional*, asumindo que as directrices para isto se podan perfilar en grande medida utilizando un *modelo*.

Unha metodoloxía acorde con estes dous principios, e que co paso dos anos acabou utilizándose habitualmente como paradigma, é a que propón unha representación matemática do modelo mediante un conxunto de ecuacións, variables e parámetros que recollen os aspectos máis salientables que se deben considerar, sen esquecer que o feito de decidir cales son eses aspectos comporta inevitablemente certa carga de subxectividade. De entre estes aspectos, cabe mencionar catro fundamentais. En primeiro lugar, a avaliación da capacidade que pode ter un ecosistema para *producir* ese recurso, o mecanismo que regula o sostemento biolóxico do mesmo e o efecto que ten a intervención humana sobre el. En segundo lugar, a selección das magnitudes que se utilizarán para formular *o modelo* e as características do mesmo que se representarán con parámetros. En terceiro lugar, a forma de determinar o seu valor económico, tanto no presente como no futuro. En cuarto lugar, a súa dimensión espacio-temporal.

Tendo en conta estes aspectos, na seguinte etapa da análise recompílese información sobre as variables coa esperanza de que permitan estimar os parámetros do modelo de forma que ofrezan unha descrición simplificada, pero axustada, das características que representan. E, finalmente, indícanse as propostas que se deriven da aplicación do mesmo en exercicios de predición e/ou simulación.

A liña discursiva desta breve exposición correspóndese co perfil das investigacións que se desenvolveron a partir da II Guerra Mundial e que serviron de base para a toma de decisións de política pesqueira en países como Canadá ou os EEUU ata os anos 70 do século pasado, e aínda están presentes nos fundamentos de moitos dos documentos técnicos da Organización Mundial para a Alimentación e a Agricultura (FAO) dende que publicou o seu código de conduta para a pesca responsable en 1995 (FAO, 1995) e nas recomendacións da Organización para a Cooperación e o Desenvolvemento Económico (OECD, 1997) para unha pesca sostible. O modelo de Gordon-Schaefer-Munro segue esa tradición.

Pero aínda coa boa intencionalidade desta metodoloxía, compre resaltar o relativo fracaso na xestión dos recursos pesqueiros dende que se tomou conciencia da importancia de xestionalos responsablemente. Se ben é certo que os informes de organismos como a FAO (2002), o Servizo Nacional de Pesca Marítima dos EEUU (NMFS, 1998) ou o Consello Internacional para a Explotación do Mar (ICES, 2003) evidencian exemplos de sobreexplotación e mesmo colapso de recursos deste tipo a pesar de xestionarse de acordo con directrices de explotación baseadas na metodoloxía que se indicou antes, non é menos certo que non permiten concluír que tería pasado cos recursos se non se tiveran seguido as mesmas para así poder facer unha comparación. De todas formas, os feitos son contundentes e obrigan a facer una revisión das razóns deses fracasos, cualifíquense de absolutos ou de relativos.

As pretensións económicas á hora de xestionar estes recursos vense habitualmente enfrontadas ás restricións que propoñen os axentes que teñen unha perspectiva puramente biolóxica da xestión, e os que en última instancia realizan a explotación do recurso acostuman a ceder a argumentos económicos case sempre moi simplistas. E isto débese en parte a razóns existenciais do propio ser humano como ser que asume a necesidade

primitiva de vivir un presente. Por iso quizais sexan razóns máis ben de tipo ético as que permiten relativizar esa actitude, subliñando a importancia de non ter en conta só o presente, determinando cando se pode cualificar unha xestión como éxito ou fracaso, ou contextualizándoa nun determinado momento histórico.

Agora ben, aínda deixando de lado as actitudes éticas dos axentes involucrados na explotación dos recursos pesqueiros, tamén está claro que as investigacións científicas non dan acadado propostas que funcionen como se agardaba. E ante esta situación caben cando menos dúas actitudes: a que descarta a validez do paradigma científico tradicional cos seus modelos defectuosos, e a que trata de revisalo aportando novos matices. Esta Tese de Doutoramento pretende aportar coñecemento a este segundo punto de vista.

O resto do capítulo está organizado da seguinte forma. Na sección 1.2 revisamos o modelo de xestión de Gordon-Schafer-Munro. Na sección 1.3. analizamos a problemática relacionada coa estimación de modelos con erros nas variables, diferenciando entre o caso linear e o caso non linear.

1.2 O modelo de xestión de Gordon-Schafer-Munro no marco do paradigma tradicional

O modelo Gordon-Schafer-Munro (de aquí en adiante, GSM) (Gordon, 1953; Schaefer, 1954; Munro, 1979) é un modelo *bioeconómico* porque integra unha parte que describe o comportamento de variables biolóxicas con outra parte que representa variables de tipo económico. Ademais trátase dun modelo dinámico pois sitúa nun primeiro plano o papel que xoga o tempo na especificación do mesmo tanto na vertente biolóxica como na económica.

Os seus primeiros antecedentes atópanse nos modelos que Lotka (1925) e Volterra (1926) utilizaron para analizar a evolución de poboacións biolóxicas. Esa clase de modelos denomínanse modelos xeneralizados de produción, modelos globais ou modelos de biomasa dinámica. Posteriormente Gordon (1953) e Schaefer (1954) utilizaron outros modelos deste

tipo para unha pesquería sometida a capturas e representaron con ecuacións as relacións existentes entre variables biolóxicas e variables tecnolóxicas. Entre estas están a abundancia do recurso (medida cun indicador do seu peso total e que denomínase biomasa), a presión á que se ve sometido o recurso por causa da acción humana (medida cun indicador chamado esforzo pesqueiro) e a produtividade do recurso (recollida nos indicadores de capturas). Unha hipótese pola que os seus modelos son distinguidos é a da relación non linear que propoñen para recoller as variacións na biomasa do recurso, apoiada na expresión matemática de Verhulst-Pearl (1838) coñecida como función loxística.

Na actualidade existen outras alternativas ao modelo de Schaefer. Por un lado están os modelos que propoñen unha ecuación diferente para representar as variacións na biomasa. Cabe citar aquí o modelo de Pella e Tomlinson (1969) que propón unha función matemática que xeneraliza á de Schaefer, e o modelo de Fox (1970) que propón substituír a función loxística por unha función de Gompertz. Ambos os dous, en xeral propoñen puntos de referencia biolóxicos menos restritivos que os que se derivan do modelo de Schaefer.

Por outro lado, a forte simplificación que supoñen as hipóteses destes modelos fixo que os biólogos amosasen preferencia por utilizar os chamados modelos analíticos (modelos estruturados por idades ou modelos de rendemento por recruta) para explicar mellor a dinámica das poboacións de recursos renovables. Pero, segundo Munro e Scott (1985) a complexidade deste tipo de modelos fai polo de agora que a súa integración coa parte económica sexa moi complicada. Ademais, tamén pódense atopar recentes investigacións que se cuestionan a ‘superioridade’ destes modelos analíticos (FAO, 2006).

En canto á dimensión económica do modelo, esta recóllese na incorporación de variables que pretenden axudar a medir a rendibilidade da explotación do recurso. Entre estas están as valoracións das capturas (utilizando indicadores de prezos), as valoracións dos medios de produción utilizados (con indicadores de custos de produción), e as actualizacións dos beneficios acadados durante un horizonte temporal (usando indicadores de taxas de desconto). Tamén se considera a necesidade de facer explícitos cales son os obxectivos económicos prioritarios e os mecanismos para conseguilos. Isto habitualmente faise coa perigosa simplificación de que o obxectivo é unicamente obter uns beneficios e os

mecanismos ideais son os que permiten maximizalo.

En consonancia con isto, o aspecto dinámico é fundamental. De aí que se preste especial coidado tanto en representar a evolución temporal do stock biolóxico, como en atopar unha solución de xestión que optimice o beneficio descontado da explotación do recurso durante un período finito de tempo utilizando técnicas de optimización dinámica como propón Munro (1979).

As últimas tendencias respecto da revisión do paradigma tradicional fan explícitos dous aspectos adicionais. Por unha parte a importancia de incorporar unha reflexión sobre o papel tanto dos axentes que interveñen na explotación directa do recurso, como das institucións con soberanía para decidir as políticas de xestión, estean ou non arraigadas en sociedades democráticas e estruturadas. Co fin de incorporar ese novo aspecto aos modelos "bioeconómicos" tense acudido na última década do século pasado á incorporación formal, como parte dos mesmos, do xeito en que se adoptan decisións racionais nun contexto de conflito de intereses utilizando a teoría de xogos. Deste xeito é posible facer unha comparación simplificada entre a solución que se acada ao tratar de lograr o obxectivo prioritario nun entorno cooperativo e a que se consegue nun entorno non cooperativo. Nesa liña desenvólvense investigacións de Munro (1990), Armstrong (1994, 2001), Sumaila (1997, 1999) e Domínguez e Surís (2007).

Por outra banda tamén é crecente a preocupación pola presenza de incerteza na xestión deste tipo de recursos renovables, tanto respecto ás variables de tipo económico ou institucionais tal como expoñen autores como Lewis (1981) ou Andersen (1982), como tamén respecto ás variables biolóxicas tal como indican Rosenberg e Restrepo (1994), Clark et al. (1995) ou Francis e Shotton (1997).¹ Seguindo o criterio máis simplista (Ulltang, 1997), clasifícanse en incertezas obxectivas e incertezas subxectivas. E seguindo un criterio algo máis detallado (Rosenberg e Restrepo, 1994), distínguense os seguintes tipos de incertezas:

¹ En Cerviño (2004) atópase unha recompilación dos tipos de incerteza que foron identificando estes últimos autores.

- de *observación*, que está presente cando se miden as magnitudes que forman parte do modelo, e xustifica o temor a que estas estean medidas con erro, de aí que resulte neste punto fundamental entender como podería afectar este feito ás conclusións que se podan derivar do manexo dese modelo,
- de *proceso*, que se refire á aleatoriedade da dinámica das poboacións naturais, na maior parte debida á variabilidade nas condicións ambientais,
- de *modelo*, que recolle a idea da mala especificación dos modelos,
- na *estimación*, que fai referencia ao erro que se comete ao estimar as magnitudes que son obxecto de interese,
- de *aplicación*, que indica a posibilidade de que se produzan erros no control das medidas de xestión, como sucede por exemplo cando non se declaran as capturas reais realizadas, e
- *institucional*, derivada da relación entre individuos ou grupos involucrados na xestión.

O noso interese ao longo dos seguintes capítulos radica en analizar as consecuencias das incertezas de observación, combinadas coas incertezas na estimación, pois como se verá poden provocar que se apliquen métodos de estimación dos parámetros que non sexan apropiados si se dan certos supostos.

1.3 A estimación de modelos con erros nas variables

No contexto no que nos estamos a desenvolver, as variables que forman parte do modelo GSM vincúlanse mediante ecuacións que inclúen parámetros de importancia capital no mesmo. Coas medicións dispoñibles desas variables, estímense os parámetros desas ecuacións mediante métodos de estimación que habitualmente redúcense a aplicar a metodoloxía de mínimos cadrados facendo unha regresión con cada unha delas. Normalmente a estimación obtida serve como guía para que os axentes involucrados tomen decisións.

Se como consecuencia da incerteza de observación aludida antes, resultase que as

variables estivesen medidas con erros, sería conveniente analizar as consecuencias disto, de cara a conseguir os obxectivos de xestión que se pretenden. Que a variable dependente dunha regresión estea medida con erros non supón ningunha novidade que non estea contemplada xa nas hipóteses de partida dos modelos que tratan de estimar. Pero non sucede o mesmo se as variables que están medidas con erros son as variables explicativas (regresores ou preditores).

A problemática da regresión na que os preditores están medidos con erros estúdase nos chamados *modelos con erros nas variables (EVM)* e ata moi recentemente centrouse nos modelos lineais de regresión. Con esa denominación recóllese un tópico que na literatura econométrica forma parte de análises que se denominan de xeito moi diverso: modelos con variables latentes, modelos con variables instrumentais, modelos con erros de medida²...

1.3.1. O caso linear

O punto que serviu de inicio ao desenvolvemento do tópico dos erros de medida nas variables nas investigacións econométricas é a demostración da existencia dun nesgo atenuante no estimador de mínimos cadrados do coeficiente angular dun modelo de regresión linear simple, cando o regresor presenta erros aditivos.³

Con posterioridade foi Frisch (1934) quen demostrou que nos EVM lineais e baixo certas condicións, o nesgo atenuante cometido pola regresión *directa* da variable explicada observable sobre a variable explicativa observada con erros vai nunha dirección, respecto

² Para conseguir unha visión xeral do papel que representan este tipo de modelos na investigación econométrica pode consultarse Aigner et al. (1983). Unha visión máis detallada e completa dos mesmos no ámbito máis xenérico da estatística recóllese en Fuller (1987) e o caso especial dos modelos nos que se incumpre a hipótese de linearidade está estudado por Carroll et al. (1995).

³ Segundo apunta Leamer (1987), a constatación desta propiedade débese a Gini (1921).

do verdadeiro parámetro, oposta ao nesgo amplificador provocado pola regresión *inversa*. Polo tanto, os estimadores acadados con ambos os dous tipos de estimación acoutan consistentemente o verdadeiro coeficiente angular. Posteriormente, tamén publicaron interesantes resultados outros autores como Koopmans (1937), Wald (1940), Geary (1942), Neyman e Scott (1948), e Reiersøl (1950).

Os modelos lineais con erros de medida clasifícanse segundo un criterio principal que distingue entre o modelo funcional e o modelo estrutural (Kendall e Stuart, 1961). A diferenza entre ambos os dous atinxe ao suposto que se fai sobre a existencia ou non existencia dunha distribución probabilística a priori das variables explicativas verdadeiras (variables inobservables ou variables latentes).

No *modelo funcional linear* (EVM-f), considerando por interese expositivo aquel que ten só un regresor, non se introduce ningún suposto a priori sobre a distribución do regresor⁴. Neste senso a estimación do modelo faise considerando os posibles valores da variable explicativa como parámetros descoñecidos; de aí que se lles chame habitualmente *parámetros incidentais* (Neyman e Scott, 1948), e que resulte preciso estimalos ao igual que a varianza das perturbacións (σ_e^2), a varianza dos erros de medición (σ_e^2), a ordenada na orixe (β_0) e o coeficiente angular (β_1). Pero a súa estimación máximo-verosímil non permite acadar estimadores consistentes debido a que no espazo paramétrico o punto obtido das condicións de primeira orde correspóndese cun punto de cadeira da superficie de verosimilitude, provocado pola existencia dos parámetros incidentais (Neyman e Scott, 1948; Malinvaud, 1970).

Pola contra, no *modelo estrutural linear* (EVM-e), supoñéndoo tamén con un só regresor, ás hipóteses asumidas no *modelo funcional linear* engádesse un novo suposto acerca da distribución do regresor, en xeral de tipo Normal. De aí que o proceso xerador dos datos sexa agora lixeiramente diferente ao que resulta no *modelo funcional linear*, e o número de parámetros a estimar resulte moito menor pois xa non é preciso estimar para cada valor do regresor observado, cal sería o valor da magnitude latente que o xeraría con

⁴ Simplemente non se consideran as implicacións que tería esa posibilidade, o cal non quere dicir necesariamente que se supoña que non ten distribución algunha.

maior probabilidade. Por desgraza, o cálculo dos estimadores máximo-verosímiles non é posible neste caso, polo que só engadindo algún suposto novo será viable. Isto faise incorporando información adicional sobre a varianza dos erros de medida, sobre a varianza das perturbacións aleatorias ou sobre o ratio entre ambas as dúas varianzas.

1.3.2. O caso non linear

Aínda que o estudo de modelos de regresión nos que os conceptos de interese están representados mediante variables con erros⁵ xa ten unha dilatada traxectoria, a especificación non linear da forma funcional deste tipo de modelos non se ten utilizado ata agora con profusión no eido da economía. Esta circunstancia débese principalmente ao mesmo motivo que desalentou o seu uso en outros campos da ciencia, é dicir, á dificultade - só recentemente superada- para estimar modelos non lineais cun razoable custo en termos de medios e de tempo. Nunha segunda orde de importancia tamén se deben apuntar outros dous motivos a considerar: o aceptable comportamento da simplificación linear para representar comportamentos claramente estilizados como non lineais, así como a falta de estudos que detallen a relación existente entre as variables observables (proxys, instrumentos...) e as magnitudes que estas representan (magnitudes inobservables ou latentes). Isto explica por qué a literatura sobre este tópico dificilmente vai máis alá da análise dos distintos tipos de información dispoñibles para estimar modelos lineais con erros nas variables. A pesar da desalentadora perspectiva que isto supón de cara a acadar o obxectivo principal desta Tese de Doutoramento, os enfoques metodolóxicos utilizados no caso linear resultan ser técnicas de análise igualmente axeitadas para o caso non linear.

A formalización non linear con variables explicativas medidas con erros tomou corpo a partir dos anos 80 do século pasado cos traballos de Prentice (1982), Stefanski e Carrol (1985), Armstrong (1985), Amemiya (1985) e Stefanski (1985). No traballo de Carroll et al. (1995) repásase este tipo de modelos partindo do caso xeral no que a variable que se pretende explicar faise depender de variables *latentes* (γ) expresadas mediante

⁵ O propio modelo de regresión clásico pódese considerar, dende certa óptica, un caso particular deste tipo de modelos con erros de medida pois a perturbación pódese interpretar como un tipo de erro na terminoloxía que aquí se adopta para estes.

variables observadas (x) que poden ter erros (e) e de variables que se observan directamente (Z) sen erros. Ademais, considerando o tipo e a natureza dos erros de medición ou observación, consideran fundamental especificar un *submodelo* que aproxime o proceso de xeración do erro de medición. Carroll et al. (1995) distinguen dous tipos de submodelos. Por unha parte, os Modelos de Erro (Modelos Clásicos do Erro de Medición e Modelos de Calibrado do Erro) nos que se formaliza a distribución dos regresores observables condicionada respecto das magnitudes latentes que pretenden representar e do resto de regresores sen erros. No caso no que se utiliza soamente un regresor (x) medido con erros e un regresor (Z) sen erros, o Modelo Clásico do Erro de Medición fai referencia a xénese de erros non sistemáticos cando se tenta medir o regresor verdadeiro ($x = \chi + e$), namentres que no Modelo de Calibrado do Erro pode recollese un proceso de xeración sistemática de erros ($x = a + b\chi + cZ + e$). Por outra parte, nos Modelos de Calibrado da Regresión (Modelos de variable controlada ou Modelos de Erro de Berkson, por exemplo) se formaliza a distribución das magnitudes latentes (χ) condicionada respecto das observacións das mesmas (x) e do resto de regresores medidos sen erro (Z).

Carroll et al. (1995) tamén destacan a importancia de distinguir entre o caso da existencia do *erro non diferencial de medida*, no que as observacións relacionadas co verdadeiro regresor non conteñen información adicional sobre a variable explicada (é dicir que se trata de meras substitutas do verdadeiro regresor) e o caso contrario do *erro diferencial*, que si a engaden.

Xa máis recentemente, Hong e Tamer (2003) describen o xeito de atopar un estimador consistente dos parámetros en calquera tipo de modelo non linear, baixo certos supostos. E Chen et al. (2009) fan unha clasificación dos diferentes tipos de modelos de erro, e prestan especial atención á utilización de variables instrumentais lembrando os resultados de Amemiya (1985) nos que se demostra que, en xeral, os estimadores de variables instrumentais non son consistentes en modelos non lineais salvo que a orde da magnitude dos erros de medida decreza cara a cero a medida que a mostra tenda a infinito.

Bibliografía

- AIGNER, D.J.; HSIAO, C.; KAPTEYN, A.; WANSBEEK, T. (1983): “Latent variable models in Econometrics”. Griliches, Z.; Intriligator, M.D. (ed.): *Handbook of Econometrics*, cap. 23. Ed. North-Holland.
- AMEMIYA, Y. (1985): “Instrumental variable estimator for the nonlinear errors in variables model”. *Journal of Econometrics*, 28: pp. 273-289.
- ANDERSEN, P. (1982): “Commercial fisheries under price uncertainty”. *Journal of Environmental Economic Management*, vol. 9, nº 1: pp. 11-28.
- ARMSTRONG, B. (1985): “Measurement error in generalized linear models”. *Communications in Statistics, Series B*, 14: pp. 529-544.
- ARMSTRONG, C.W. (1994): “Co-operative solutions in a transboundary fishery: the Russian-Norwegian co-management of the Arcto-Norwegian Cod Stock”. *Marine Resource Economics*, 9: pp. 329-351.
- ARMSTRONG, C.W.; SUMAILA, U.S. (2001): “Optimal allocation of TAC and the implications of implementing an ITQ management system for the North-East Arctic cod”. *Land Economics*, 77 (3): pp. 350-359.
- CARROLL, R. J.; RUPPERT, D.; STEFANSKI, L.A. (1995): *Measurement Error in Nonlinear Models*, Ed. Chapman & Hall.
- CERVIÑO, S. (2004): *Estudio sobre la incertidumbre asociada a los métodos de evaluación de las poblaciones de peces*. Tese doutoral. Universidade de Vigo.
- CHEN, X.; HONG, H.; NEKIPELOV, D. (2009): *Nonlinear Models of Measurement Errors*. Stanford University Working Paper.
- CLARK, C.W.; LAUCK, T.; MUNRO, G.R. (1995), *Managing Uncertain Fishery Resources: The Case for Protected Reserves*. British Columbia University Working Paper.
- DOMÍNGUEZ, M.; SURÍS, J.C. (2007): “Cooperation and Non-cooperation in the Ibero-Atlantic Sardine Shared Stock Fishery”. *Fisheries Research*, 83: pp. 1-10
- FAO (1995): *Code of Conduct for Responsible Fisheries*. FAO.
- FAO (2002): *The State of World Fisheries and Aquaculture*. Dirección WEB en http://www.fao.org/sof/sofia/index_en.htm
- FAO (2006): *Stock assessment for fishery management*. FAO. Technical Paper 487.

- FOX, W.W. (1970): "An exponential surplus–yield model for optimizing exploited fish populations". *Transactions of the American Fisheries Society*, 99: pp. 80-88.
- FRANCIS, R.I.C.C.; SHOTTON, R. (1997): "Risk in fisheries management: a review". *Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences*, 54: pp. 1699-1715.
- FRISCH, R. (1934): *Statistical Confluence Analysis by Means of Complete Regression Systems*. Oslo University Institute of Economics, Publ. n° 5.
- FULLER, W.A. (1987): *Measurement Error Models*. Ed. John Wiley & Sons.
- GEARY, R.C. (1942): "Inherent relations between random variables". *Proceedings of the Royal Irish Academy*, sect. A, 47: pp. 63-76.
- GINI, C. (1921): "Sull'interpolazione de una retta quando i valori della variable indipendente sono affetti da errori accidentali". *Metroeconomica*, 1: pp. 63-82.
- GORDON, H.S. (1953): "An economic approach to the optimum utilisation of fishery resources". *Journal of Fisheries Researchs Board of Canada*, 10: pp. 442-457.
- HONG, H.; TAMER, E. (2003): "A simple estimator for nonlinear error in variable models". *Journal of Econometrics*, 117: pp. 1-19.
- ICES (2003): "Environmental status of the european seas". *German Federal Ministry for the Environment, Nature Conservation and Nuclear Safety*. ICES.
- KENDALL, M.G.; STUART, A. (1961): *The Advanced Theory of Statistics*, Ed. Hafner.
- KOOPMANS, T.C. (1937): *Linear Regression Analysis of Economics Time Series*. Ed. De Erven F. Bohn N.V.
- LEAMER, E.E. (1987): "Errors in variables in linear systems", *Econometrica*, 55: pp. 893-909.
- LEWIS, T.R. (1981): "Exploitation of a renewable resource under uncertainty". *Canadian Journal of Economics*, vol. 14, n° 3: pp. 422-439.
- LOTKA, A.J. (1925): *Elements of Physical Biology*, Ed. Williams and Wilkins.
- MALINVAUD, E. (1970): *Statistical Methods of Econometrics*, Ed. North-Holland.
- MUNRO, G.R. (1979): "The optimal management of transboundary fisheries". *Canadian Journal of Economics*, vol. 12, n° 3: pp. 355-376.
- MUNRO, G.R.; SCOTT, A.D. (1985): "The economics of fisheries management". A.V. Kneese & J. L. Sweeney (ed.): *Handbook of Natural Resource and Energy Economics*, vol. II, cap. 14: pp. 623-676, North-Holland.

- MUNRO, G.R. (1990): "The optimal management of transboundary fisheries: game theoretic considerations". *Natural Resource Modeling*, 4 (4): pp. 403-426.
- NEYMAN, J.; SCOTT, E.L. (1948): "Consistent estimates based on partially consistent observations". *Econometrica*, 16: pp. 1-32.
- NMFS (1998). *Improving Fish Stocks Assessments*. U.S. National Marine Fisheries Service. Ed. National Academy Press.
- OECD (1997): *Towards Sustainable Fisheries: Economic Aspects of the Management of Living Marine Resources*. OECD.
- PELLA, J.J.; TOMLINSON, P.K. (1969): "A generalized stock production model". *Bulletin, Inter American Tropical Tuna Commission*, 13: pp. 419-496.
- PRENTICE, R.L. (1982): "Covariate measurement errors and parameter estimation in a failure time regression model". *Biometrika*, 69: pp. 331-342.
- REIERSØL, O. (1950): "Identifiability of a linear relation between variables which are subject to error". *Econometrica*, 18: pp. 375-389.
- ROSENBERG, A.A.; RESTREPO, V.R. (1994): "Uncertainty and risk evaluation in stock assessment advice for U.S. marine fisheries". *Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences*, 51: pp. 2715-2720.
- SCHAEFER, M.B. (1954). "Some aspects of the dynamics of populations important to the management of the commercial marine fisheries". *Bulletin, Inter American Tropical Tuna Commission*, 1(2): pp. 27-56.
- STEFANSKI, L.A. (1985): "The effects of measurement error on parameter estimation". *Biometrika*, 72: pp. 583-592.
- STEFANSKI, L.A.; CARROL, R.J. (1985): "Covariate measurement error in logistic regression". *Annals of Statistics*, 13: pp. 1335-1351.
- SUMAILA, U.R. (1997): "Cooperative and non-cooperative exploitation of the Arcto-Norwegian Cod Stock". *Environmental and Resource Economics*, 10: pp. 147-165.
- SUMAILA, U.R. (1999): "A review of game-theoretic models of fishing". *Marine Policy*, 23 (1): pp. 1-10.
- ULLTANG, O. (1977): "Sources of errors in and limitations of Virtual Populations Analysis (Cohort Analysis)". *Journal du Conseil permanent International pour l'Exploration de la Mer*, 37(3): pp. 249-260.
- VERHULST, P.F. (1838): "Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement". *Corresp. Math. Phys.* 10: pp. 113-121.

VOLTERRA, V. (1926): “Variazioni e fluttuazioni del numero d’individui in specie animali conviventi”, *Mem. Acad. Lincei Roma*, 2: pp. 31-113.

WALD, A. (1940): “The fitting of straight lines if both variables are subject to error”, *Annals of Mathematical Statistics*, vol 11: pp. 284-300.

Capítulo 2

ESTIMACIÓN DUN MODELO SIMPLE DE CRECEMENTO CON ERROS NO REGRESOR

2.1 Introdución

Neste capítulo reflexionamos sobre a calidade do método de estimación de mínimos cadrados para estimar un modelo de regresión non linear con un regresor moi particular. Imos propoñer unha formulación dunha ecuación sigmoidal para relacionar as variables que, utilizando terminoloxía econométrica, permite cualificar o modelo como non linear nas variables e non linear nos parámetros.

Nos modelos bioeconómicos máis actuais que se adoitan empregar para facer propostas de xestión de recursos pesqueiros, como é o caso do modelo que demos en chamar de Gordon-Schaefer-Munro (GSM), o comportamento biolóxico do recurso simplifícase enormemente propoñendo unha función que expresa a variación entre dous momentos de tempo da biomasa do mesmo, en función da súa magnitude no primeiro dos dous, utilizando para elo unha ecuación cuadrática.

Para determinar as magnitudes da biomasa en cada momento de tempo discreto utilízanse diversos modelos e métodos de estimación, dependendo do organismo ou institución que faga a avaliación, dos medios materiais e técnicos dos que se dispoña, das preferencias dos investigadores e, por suposto, da especie que se trate de estudar. Unha das metodoloxías que se utilizan consiste en estimar modelos de crecemento dos individuos dunha especie. Destes, o máis coñecido é o de Von Bertalanffy (1938), pero tamén se teñen utilizado outras formulacións alternativas como a que propoñen Schnute e Richards (1990) que utiliza un modelo sigmoidal con catro parámetros. Estas estimacións serven como datos intermedios que permiten facer estimacións do montante total da biomasa (ou da biomasa reprodutora). Outra posibilidade parte de estruturar por idades a poboación da especie en cuestión, e estimar parámetros que recollan as súas características biolóxicas máis relevantes en cada tramo de idade considerado (Haddon, 2001). Recentemente Simmonds et al. (2010) propuxeron estimar as taxas de mortalidade por idade dos membros con un modelo loxístico de dous parámetros, e incorporalas nas ecuacións axeitadas para estimar o volume total da biomasa.

Estas consideracións fannos apreciar que aínda que a estimación de modelos loxísticos máis ou menos simples, e que en xeral denominaremos modelos sigmoidais, non interveñen directamente na avaliación da rendibilidade da xestión dun determinado recurso pesqueiro, si que o fan de xeito indirecto. De aí que neste capítulo nos propoñamos demostrar cáles son as consecuencias de estimar un modelo sigmoidal xeral de catro parámetros, cando se utiliza o método de estimación de mínimos cadrados (MC) sen ter en conta a posibilidade de que a variable explicativa observada poida incluír erros de medida.

Poderemos comprobar como, baixo certos supostos de distribución da información dispoñible e dos erros de medida, aínda na situación máis favorable que nos podamos atopar, isto é, cando estamos no caso no que dispoñemos de observacións sobre todos os tramos relevantes da función loxística, a estimación MC nese caso tende a subestimar a rapidez coa que medra a función. É dicir que o estimador MC do parámetro que recolle en certa medida a ‘velocidade’ de crecemento do modelo sigmoidal que propoñemos será un estimador inconsistente, con nesgo atenuante. Tamén presentaremos evidencias que fan conxecturar a relación entre a magnitude do nesgo que se produce e a varianza do erro de medida.

Ao longo dese proceso de demostración tamén concluiremos que a estimación MC do modelo sigmoidal xeral pode resolverse solucionando un sistema de dúas ecuacións implícitas de dúas incógnitas. Ademais demostraremos unha condición suficiente para que a estimación MC proporcione un modelo estimado que teña o mesmo punto de inflexión que o modelo latente. E neste caso, demostraremos que se pode solucionar o problema da minimización resolvendo unha ecuación implícita dunha incógnita.

Na sección 2.2 facemos unha proposta de formalización dun modelo sigmoidal que xeneraliza a función loxística dun parámetro pois racha coa limitación de que teña que ter só valores positivos entre cero e un, e elimina a restrición de que o punto de inflexión se acade cando se anula a variable explicativa¹. Tamén indicamos as propiedades matemáticas deste

¹ Esta extensión farase co único propósito de que poida ser aplicable incluso a outros contextos máis xerais que os mencionados nos parágrafos anteriores.

tipo de ecuación, e propoñemos unha formulación que nos permita distinguir nas seguintes seccións entre o que daremos en chamar variables latentes (e os modelos subxacentes que as relacionarán) e as variables observadas.

Na sección 2.3 deducimos as expresións dos estimadores de MC para o caso no que existan perturbacións aleatorias con distribución normal na variable explicada do modelo sigmoidal latente, e na sección 2.4 indicamos o modelo a estimar e a función obxectivo no caso de que existan erros normais de medida no regresor, así como unha interesante intuición xeométrica.

Por último, na sección 2.5 deducimos os estimadores MC cando existen perturbacións e erros de medida, e demostramos a aparición de nesgos nos estimadores MC de algúns dos parámetros mediante métodos de simulación. Tamén demostramos a influencia que ten o feito de dispoñer de información de todos os tramos relevantes que caracterizan a función, sobre a magnitude dos nesgos de algúns parámetros.

2.2 Modelos sigmoidais na xestión de recursos pesqueiros: unha proposta de formalización

Como se indicou no Capítulo 1, a ecuación do crecemento da biomasa do modelo de Gordon-Schaefer-Munro ten como precedente a proposta de Verhulst (1838) para representar de xeito sinxelo o crecemento natural dunha poboación mediante unha ecuación matemática de tipo sigmoidal: a función loxística ou función de Verhulst-Pearl.

A función loxística se ten utilizado en infinidade de análises sobre o crecemento de todo tipo de poboacións, e Schaefer (1954) adoptouna para representar a evolución da biomasa dun recurso pesqueiro a medida que pasa o tempo. Coa notación que se utiliza habitualmente, a evolución temporal da biomasa, B_t , pódese representar mediante a expresión

$$B_t = \frac{K}{1 + e^{-rt}}, \quad (2.1)$$

onde K , $K > 0$, denota a capacidade de carga máxima, r , $r > 0$, indica a taxa de crecemento, e representa a base do logaritmo neperiano e t fai referencia ao tempo.

A representación gráfica da función definida en (2.1) é a que aparece na Figura 2.1:

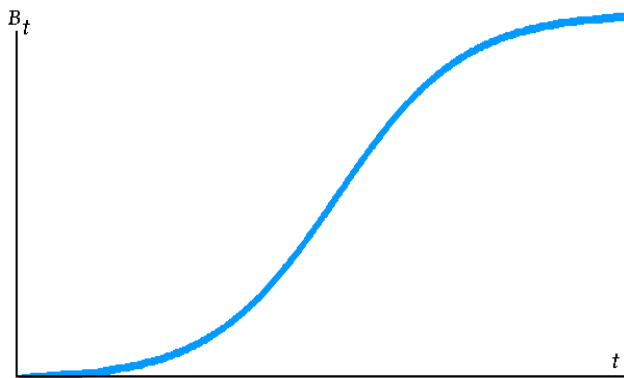


Figura 2.1. Representación gráfica do crecemento da biomasa ao longo do tempo.

A estimación da función (2.1) para avaliar a biomasa dun recurso pesqueiro non chegou a acadar excesiva importancia dentro do paradigma de investigación tradicional sobre a xestión dese tipo de recursos. As razóns son varias. En primeiro lugar porque o seu comportamento dinámico facía moi complicado dispoñer de datos que permitisen facer dita estimación. En segundo lugar porque a estimación de modelos non lineais foi unha tarefa moi laboriosa durante moitos anos, ata o relativamente recente desenvolvemento dos algoritmos de estimación do tipo Gauss-Newton, Newton-Raphson, Levenberg-Marquardt, Davidon-Fletcher-Powell, gradiente conxugado e outros. E en terceiro lugar porque bastou con facer unha leve modificación da función definida en (2.1) para poder recoller a dinámica do comportamento biolóxico de xeito máis operativo que con esa función.

A modificación aludida consistiu en representar a mesma hipótese de crecemento loxístico que en (2.1), pero utilizando a expresión que recolle a variación temporal da biomasa de xeito que

$$\frac{\partial B_t}{\partial t} = r \left(B_t - \frac{1}{K} B_t^2 \right). \quad (2.2a)$$

No caso de que o recurso estea sometido a explotación e polo tanto teñamos que introducir as capturas en cada período t , Y_t , a expresión (2.2a) convértese en

$$\frac{\partial B_t}{\partial t} = r \left(B_t - \frac{1}{K} B_t^2 \right) - Y_t, \quad (2.2b)$$

se asumimos un contexto temporal continuo, ou ben en

$$B_{t+1} - B_t = r \left(B_t - \frac{1}{K} B_t^2 \right) - Y_t, \quad (2.2c)$$

se admitimos un contexto temporal discreto. A expresión con forma de S do modelo loxístico tense utilizado en moitos casos. Por exemplo, en Hannah et al. (2009) utilízase para estimar a probabilidade de que os peixes sexan adultos, coñecida a súa idade ou lonxitude. E tamén pódese atopar unha xeneralización deste tipo de expresión, con tres parámetros, en Simmonds et al. (2010) para estimar a mortalidade por capturas dunha cohorte de peixes dunha especie nun determinado momento de tempo en función da idade relativa dos mesmos.

Un aspecto que consideramos de vital importancia nesta formalización dos modelos sigmoidais é analizar as consecuencias de que este tipo de modelos poidan ter erros de observación na variable explicativa. Este aspecto non está contemplado nestes modelos, ou o que é o mesmo, a distorsión que poida haber na estimación non se ten en conta. Ademais, con esta análise preténdese introducir algúns conceptos relevantes para unha mellor comprensión dos resultados acadados nesta investigación.

Así, se consideran de seguido as consecuencias de utilizar métodos paramétricos de estimación dun modelo sigmoidal de crecemento simétrico moi xeral, do que a función loxística tradicional é un caso particular. Concretamente, propónse un modelo que utiliza catro parámetros. Para elo, resulta fundamental clarificar o obxectivo que se persegue, así como lembrar algúns conceptos relativos aos procesos que poden estar xerando os datos así como outros relacionados coa propia función sigmoidal.

En primeiro lugar, e dado que se pretende analizar se existe algún tipo de paralelismo entre as consecuencias que ten a introdución de erros de medida no regresor no caso linear e as que se derivan de introducilos no caso sigmoidal, comezamos avaliando os métodos de estimación. De aí que sexa comprensible supoñer a dispoñibilidade de suficientes observacións como para que ofrezan información sobre todos os tramos relevantes da función. Así, supónse que a información observable sobre o modelo abonda para poder obter estimadores cando menos consistentes dos coeficientes do mesmo, pero dita obtención depende obviamente de que se escolla un método de estimación axeitado; é dicir, supónse que a mostra observable proporciona información sobre todos os tramos relevantes da función sigmoidal (tramo convexo, tramo cuasi-linear e tramo cóncavo) para evitar que a falta de información sobre algún deles poida condicionar os resultados das simulacións. Ademais é conveniente establecer unha metodoloxía de análise que comece propoñendo un modelo básico de referencia con respecto ao cal poder realizar comparacións cos resultados acadados. Deste xeito introducirase máis adiante o suposto de que os valores observables do regresor están centrados no punto de inflexión da función que expresa o modelo latente, para que sirva de referencia ao que sucedería cando esa información estivese centrada en puntos doutros tramos significativos da función sigmoidal.

En segundo lugar, e tendo en conta os conceptos manexados nos capítulos precedentes, cando se formula o conxunto de expresións que describen o proceso que xera os datos, facemos os seguintes supostos:

Hipótese 2.1: O comportamento esperado da variable explicada, por exemplo a mortalidade por capturas, depende dun único regresor (a idade, por exemplo) e

representábase mediante unha ecuación sigmoidal de catro parámetros con crecemento simétrico respecto ao punto de inflexión, do que o modelo habitual recollido en (2.1) é un caso particular con dous parámetros. A variable explicada latente representábase coa notación habitual: Y_t .

Hipótese 2.2: As diferenzas entre os valores observados da variable explicada, y_t , e os valores verdadeiros correspondentes, Y_t , recóllense mediante variables aleatorias (perturbacións representadas mediante ξ_t) con distribución normal de probabilidade.

Hipótese 2.3: As diferenzas entre os valores observados da variable explicativa, x_t , e os valores verdadeiros correspondentes, χ_t , recóllense mediante variables aleatorias (erros de medida representados por e_t) con distribución normal de probabilidade e independentes das perturbacións.

Hipótese 2.4a²: Non se establece ningún suposto en canto á distribución de probabilidade do regresor latente (se propón entón un modelo funcional do erro de medición), polo que tanto o regresando como o regresor observables recollen as propiedades que se derivan do feito de que as perturbacións e os erros, respectivamente, teñan distribucións de probabilidade normais.

Tendo en conta as Hipóteses 2.1-2.4a, as variables observables

$$y_t = Y_t + \xi_t \tag{2.3}$$

e

$$x_t = \chi_t + e_t \tag{2.4}$$

así como a distribución de erros e perturbacións

² A Hipótese 2.4a será reformulada posteriormente nas Hipóteses 2.4b e 2.4c nas seccións 2.5 e 2.5.2 respectivamente. Véxanse as páxinas 58 e 70, respectivamente.

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_T \\ \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_T \end{pmatrix} \rightarrow NID \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_e^2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_e^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_\zeta^2 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \sigma_\zeta^2 \end{pmatrix} \right], \quad (2.5)$$

o modelo latente xeral de catro parámetros que propoñemos queda representado da seguinte forma:

$$Y_t = \beta_0 + \frac{1}{\beta_2 + e^{-(\beta_3 + \beta_1 \chi_t)}} \quad (2.6)$$

ou ben

$$\begin{aligned} Y_t &= \beta_0 + \frac{1}{\beta_2} \left(\frac{1}{1 + e^{-(\beta_3 + \ln \beta_2 + \beta_1 \chi_t)}} \right) \\ &= \beta_0 + \frac{1}{\beta_2} Z_t \\ &= \beta_0 + A_t. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Con este xeito de representar a función latente, os coeficientes ou parámetros β_0 , β_1 , β_2 e β_3 capturan as seguintes características da mesma:

- β_0 é o mínimo valor que se supón que podería tomar a variable explicada, Y_t , e recolle en exclusiva o efecto que se produce ante unha posible translación vertical da función;
- β_1 é proporcional á distancia entre os dous puntos de inflexión da primeira derivada

da función (coa mediación dunha constante), polo que canto maior sexa ese parámetro, o paso do valor mínimo da variable explicada ata o seu valor máximo se produce máis rapidamente;

- β_2 indica a inversa da distancia entre o mínimo e o máximo valor da variable explicada, polo que canto maior sexa, menor será a amplitude de posibles valores da mesma;
- β_3 recolle en exclusiva o efecto que se produce ante unha posible translación horizontal da función.

En terceiro lugar, resulta importante establecer as seguintes definicións respecto das características do modelo latente co fin de clarear algunhas demostracións matemáticas que se fan máis adiante:

Definición 1 (Punto de inflexión). O punto de inflexión da función latente ven dado por

$$\left(\chi_{INFLEX}, Y_{INFLEX} \right) = \left(-\frac{\beta_3 + \ln(\beta_2)}{\beta_1}, \beta_0 + \frac{1}{2\beta_2} \right). \quad (2.8)$$

Definición 2 (Máximo valor de Y_t). O máximo valor de Y_t é

$$MaxY_t = \beta_0 + \frac{1}{\beta_2}. \quad (2.9)$$

Definición 3 (Mínimo valor de Y_t). O mínimo valor de Y_t é

$$MinY_t = \beta_0. \quad (2.10)$$

Definición 4 (Diferenza entre Y_t e $\text{Min}Y_t$). A diferenza entre Y_t e $\text{Min}Y_t$ ven dada por

$$\begin{aligned}
 A_t &= \frac{1}{\beta_2} \left(\frac{1}{1 + e^{-(\beta_3 + \ln(\beta_2) + \beta_1 \chi_t)}} \right) \\
 &= \frac{1}{\beta_2} \left(\frac{1}{1 + e^{-\beta_1(\chi_t - \chi_{\text{INFLEX}})}} \right) \\
 &= \frac{1}{\beta_2} Z_t.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Definición 5 (Diferenza entre $\text{Max}Y_t$ e Y_t). A diferenza entre $\text{Max}Y_t$ e Y_t ven dada por

$$\begin{aligned}
 B_t &= \frac{1}{\beta_2} \left(\frac{e^{-(\beta_3 + \ln(\beta_2) + \beta_1 \chi_t)}}{1 + e^{-(\beta_3 + \ln(\beta_2) + \beta_1 \chi_t)}} \right) \\
 &= \frac{1}{\beta_2} \left(\frac{e^{-\beta_1(\chi_t - \chi_{\text{INFLEX}})}}{1 + e^{-\beta_1(\chi_t - \chi_{\text{INFLEX}})}} \right) \\
 &= \frac{1}{\beta_2} (1 - Z_t).
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Definición 6 (Outras relacións).

$$\begin{aligned}
 A_t + B_t &= \frac{1}{\beta_2} \\
 &= \text{Max}Y_t - \text{Min}Y_t,
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} \frac{A_t}{B_t} &= e^{-(\beta_3 + \ln(\beta_2) + \beta_1 \chi_t)} \\ &= e^{-\beta_1(\chi_t - \chi_{INFLEX})} \end{aligned} \quad (2.14)$$

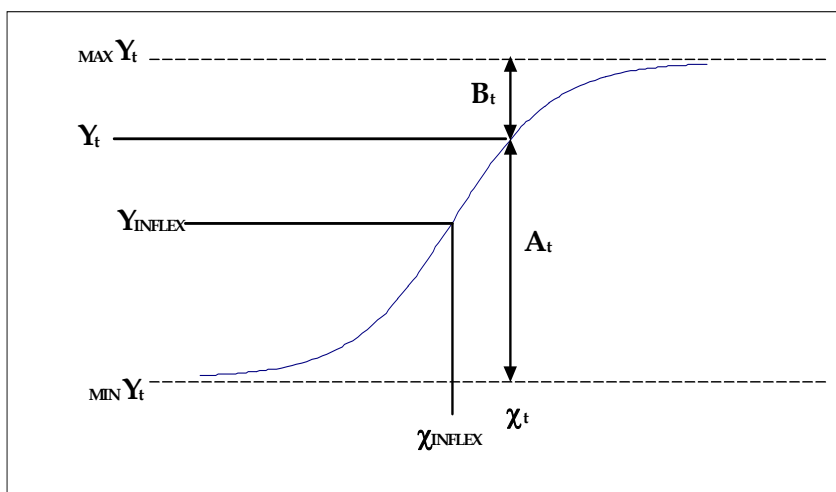


Figura 2.2. Características do modelo sigmoidal.

Para analizar o efecto que produce a existencia de erros de medida no regresor sobre as propiedades dos estimadores de mínimos cadrados do modelo, é necesario analizar previamente as propiedades da estimación en dous contextos diferentes: en primeiro lugar, cando existen perturbacións pero non erros de medición; en segundo lugar, cando non hai perturbacións pero hai erros de medida.

2.3 Estimación co método de mínimos cadrados cando existen perturbacións pero non erros de medida no regresor

Se existen perturbacións pero non existen erros de medida no regresor ($e_t=0$), o modelo quedaría constituído polas Hipóteses 2.1, 2.2 e 2.4a xunto coas expresións (2.3),

(2.6), (2.7), e unha versión reducida de (2.5). Polo tanto as variables observables son:

$$(\chi_t, y_t) = [\chi_t, (Y_t + \xi_t)] \quad (2.15)$$

e a distribución das perturbacións é:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_T \end{pmatrix} \rightarrow NIID \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_\xi^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_\xi^2 \end{pmatrix} \right]. \quad (2.16)$$

Neste caso o modelo latente (2.6) escríbese como:

$$\begin{aligned} y_t &= \beta_0 + \frac{1}{\beta_2 + e^{-\beta_3 - \beta_1 \chi_t}} \\ &= \beta_0 + \frac{1}{\beta_2} \left(\frac{1}{1 + e^{-(\beta_3 + \ln(\beta_2) + \beta_1 \chi_t)}} \right) \\ &= \beta_0 + \frac{1}{\beta_2} Z_t \\ &= \beta_0 + A_t. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Como é sabido, a estimación dos parámetros β_0 , β_1 , β_2 e β_3 de (2.17) polo método de mínimos cadrados (MC) trata de atopar a relación

$$\begin{aligned} \hat{y}_t &= b_0 + \frac{1}{b_2 + e^{-b_3 - b_1 \chi_t}} \\ &= b_0 + \frac{1}{b_2} \hat{z}_t \\ &= b_0 + \hat{a}_t \end{aligned} \quad (2.18)$$

resolvendo o problema

$$\begin{aligned}
 \min \text{ SCE} &= \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t)^2 \\
 &= \sum_{t=1}^T \left(y_t - \hat{\beta}_0 - \frac{1}{\hat{\beta}_2 + e^{-\hat{\beta}_3 - \hat{\beta}_1 \chi_t}} \right)^2 \\
 &= \sum_{t=1}^T \left(y_t - \hat{\beta}_0 - \frac{\hat{Z}_t}{\hat{\beta}_2} \right)^2 \\
 &= \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{A}_t)^2 \tag{2.19}
 \end{aligned}$$

suxeito ás restricións $\hat{\beta}_1 > 0$, $\hat{\beta}_2 > 0$, e onde *SCE* denota a suma dos cadrados dos residuos³.

Alternativamente, en lugar de resolver (2.19), podemos reformular o modelo de xeito que non aparezan restricións sobre os parámetros. Así definindo

$$\hat{\beta}_2 = e^{\hat{\gamma}_2}, \tag{2.20}$$

$$\hat{\beta}_1 = e^{\hat{\gamma}_1} \tag{2.21}$$

e

$$\begin{aligned}
 \text{SCE} &= \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t)^2 \\
 &= \sum_{t=1}^T \left(y_t - \hat{\beta}_0 - \frac{1}{e^{\hat{\gamma}_2} + e^{-\hat{\beta}_3 - (e^{\hat{\gamma}_1}) \chi_t}} \right)^2, \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

³ Ou erros da estimación.

ao derivar SCE respecto de cada un dos catro parámetros obtemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial SCE}{\partial \hat{\beta}_0} &= -2 \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t) \\
 &= -2 \sum_{t=1}^T \left(y_t - \hat{\beta}_0 - \frac{1}{e^{\hat{\gamma}_2} + e^{-\hat{\beta}_3 - (e^{\hat{\gamma}_1}) \chi_t}} \right) \\
 &= -2 \sum_{t=1}^T \left(y_t - \hat{\beta}_0 - \frac{1}{\hat{\beta}_2 + e^{-\hat{\beta}_3 - \hat{\beta}_1 \chi_t}} \right), \tag{2.23a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial SCE}{\partial \hat{\gamma}_2} &= 2 \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t) \left(\frac{1}{e^{\hat{\gamma}_2} + e^{-\hat{\beta}_3 - (e^{\hat{\gamma}_1}) \chi_t}} \right)^2 \\
 &= 2 \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t) \left(\frac{1}{\hat{\beta}_2 + e^{-\hat{\beta}_3 - \hat{\beta}_1 \chi_t}} \right)^2, \tag{2.23b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial SCE}{\partial \hat{\beta}_3} &= -2 \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t) \left(\frac{1}{e^{\hat{\gamma}_2} + e^{-\hat{\beta}_3 - (e^{\hat{\gamma}_1}) \chi_t}} \right)^2 e^{-\hat{\beta}_3 - (e^{\hat{\gamma}_1}) \chi_t} \\
 &= -2 \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t) \left(\frac{1}{\hat{\beta}_2 + e^{-\hat{\beta}_3 - \hat{\beta}_1 \chi_t}} \right)^2 e^{-\hat{\beta}_3 - \hat{\beta}_1 \chi_t} \tag{2.23c}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial SCE}{\partial \hat{\gamma}_1} &= -2 \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t) \left(\frac{1}{e^{\hat{\gamma}_2} + e^{-\hat{\beta}_3 - (e^{\hat{\gamma}_1}) \chi_t}} \right)^2 \left(e^{-\hat{\beta}_3 - (e^{\hat{\gamma}_1}) \chi_t} \right) \chi_t \\
 &= -2 \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t) \left(\frac{1}{\hat{\beta}_2 + e^{-\hat{\beta}_3 - \hat{\beta}_1 \chi_t}} \right)^2 \left(e^{-\hat{\beta}_3 - \hat{\beta}_1 \chi_t} \right) \chi_t \quad (2.23d)
 \end{aligned}$$

Finalmente, do proceso de minimización tanto coa formalización inicial dada en (2.19) como coa alternativa dada en (2.22), se deducen as seguintes catro condicións de primeira orde:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial SCE}{\partial \hat{\beta}_0} = 0 &\Rightarrow \sum_{t=1}^T y_t = \sum_{t=1}^T \hat{y}_t \\
 &= Tb_0 + \sum_{t=1}^T \left(\frac{1}{b_2 + e^{-b_3 - b_1 \chi_t}} \right) = Tb_0 + \sum_{t=1}^T \hat{a}_t \quad (2.24a)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial SCE}{\partial \hat{\gamma}_2} = 0 \Rightarrow \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t) \left(\frac{1}{b_2 + e^{-b_3 - b_1 \chi_t}} \right)^2 = \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t) \hat{a}_t^2 = 0 \quad (2.24b)$$

$$\frac{\partial SCE}{\partial \hat{\beta}_3} = 0 \Rightarrow \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t) \left(\frac{1}{b_2 + e^{-b_3 - b_1 \chi_t}} \right)^2 e^{-b_3 - b_1 \chi_t} = \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t) \hat{a}_t^2 \left(\frac{1}{\hat{a}_t} - b_2 \right) = 0 \quad (2.24c)$$

e

$$\frac{\partial SCE}{\partial \hat{\gamma}_1} = 0 \Rightarrow \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t) \left(\frac{1}{b_2 + e^{-b_3 - b_1 \chi_t}} \right)^2 e^{-b_3 - b_1 \chi_t} \chi_t = \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t) \hat{a}_t^2 \left(\frac{1}{\hat{a}_t} - b_2 \right) \chi_t = 0. \quad (2.24d)$$

As ecuacións (2.24a)-(2.24d) poden reescribirse de xeito que:

$$\bar{y} = b_0 + \frac{1}{Tb_2} \sum_{t=1}^T \hat{z}_t = b_0 + \frac{1}{b_2} \bar{\hat{z}}, \quad (2.25a)$$

$$\sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t) \hat{z}_t^2 = 0, \quad (2.25b)$$

$$\sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t) \hat{z}_t = 0 \quad (2.25c)$$

e

$$\sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t) (\hat{z} - \hat{z}_t^2) \chi_t = 0. \quad (2.25d)$$

A matriz hessiana correspondente definida por as condicións de segundo orde do problema de minimización de SCE e que garante a suficiencia das condicións de primeira orde para minimizar a SCE, é

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 SCE}{\partial \hat{\beta}_0^2} & \frac{\partial^2 SCE}{\partial \hat{\beta}_0 \partial \hat{\beta}_2} & \frac{\partial^2 SCE}{\partial \hat{\beta}_0 \partial \hat{\beta}_3} & \frac{\partial^2 SCE}{\partial \hat{\beta}_0 \partial \hat{\beta}_1} \\ \dots & \frac{\partial^2 SCE}{\partial \hat{\beta}_2^2} & \frac{\partial^2 SCE}{\partial \hat{\beta}_2 \partial \hat{\beta}_3} & \frac{\partial^2 SCE}{\partial \hat{\beta}_2 \partial \hat{\beta}_1} \\ \dots & \dots & \frac{\partial^2 SCE}{\partial \hat{\beta}_3^2} & \frac{\partial^2 SCE}{\partial \hat{\beta}_3 \partial \hat{\beta}_1} \\ \dots & \dots & \dots & \frac{\partial^2 SCE}{\partial \hat{\beta}_1^2} \end{pmatrix}, \quad (2.26a)$$

ou ben

$$2 \times \begin{pmatrix} T & -\sum_{t=1}^T \hat{a}_t^2 & \sum_{t=1}^T \hat{a}_t (1-b_2 \hat{a}_t) & \sum_{t=1}^T \hat{a}_t (1-b_2 \hat{a}_t) \chi_t \\ \dots & -2 \sum_{t=1}^T \left(y_t - b_0 - \frac{3}{2} \hat{a}_t \right) \hat{a}_t^3 & 2 \sum_{t=1}^T \left(y_t - b_0 - \frac{3}{2} \hat{a}_t \right) \hat{a}_t^2 (1-b_2 \hat{a}_t) & 2 \sum_{t=1}^T \left(y_t - b_0 - \frac{3}{2} \hat{a}_t \right) \hat{a}_t^2 (1-b_2 \hat{a}_t) \chi_t \\ \dots & \dots & -2 \sum_{t=1}^T \left(y_t - b_0 - \frac{3}{2} \hat{a}_t \right) \hat{a}_t (1-b_2 \hat{a}_t)^2 & -2 \sum_{t=1}^T \left(y_t - b_0 - \frac{3}{2} \hat{a}_t \right) \hat{a}_t (1-b_2 \hat{a}_t)^2 \chi_t \\ \dots & \dots & \dots & -2 \sum_{t=1}^T \left(y_t - b_0 - \frac{3}{2} \hat{a}_t - \frac{y_t - b_0 - \hat{a}_t}{2(1-b_2 \hat{a}_t)} \right) \hat{a}_t (1-b_2 \hat{a}_t)^2 \chi_t^2 \end{pmatrix}$$

(2.26b)

se a expresamos en función dos estimadores MC dos parámetros e de \hat{a}_t . Pode comprobarse facilmente que a solución da minimización da SCE é a mesma que a obtida minimizando a expresión (con restricións) antes da reformulación e que está dada por (2.19).

A teoría asintótica da estimación por mínimos cadrados de modelos de regresión non lineais baseada nos traballos de Jennrich (1969), Malinvaud (1970) e Wu (1981) permite concluir que os estimadores resultantes cumpren a propiedade de consistencia, tal como é doado de entender intuitivamente tendo en conta o tipo de distribución de probabilidade das perturbacións. A este respecto debe lembrarse que a propiedade de simetría da distribución normal implica que a medida que aumenta o tamaño da mostra aumenta a probabilidade de que, para cada valor χ_t^* do regresor, a media dos valores observados da variable endóxena coincida co valor esperado $E \left[y_t \mid \chi_t = \chi_t^* \right]$, facilitando así a aproximación das estimacións aos verdadeiros valores dos parámetros. Os seguintes gráficos mostran como sería a distribución de probabilidade conxunta dos pares (χ_t, y_t) :

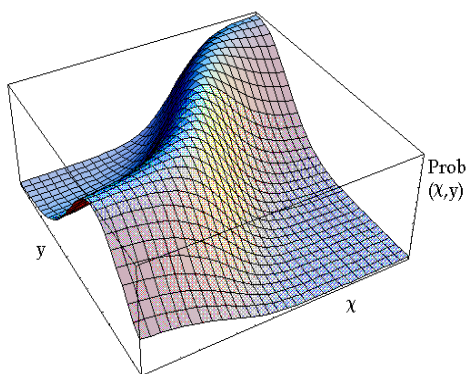


Figura 2.3a

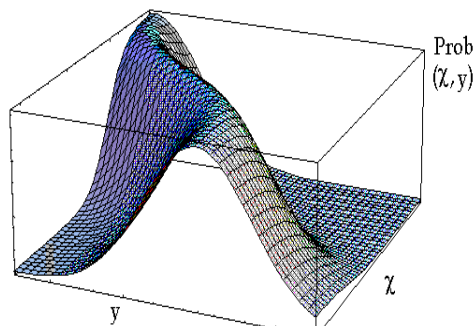


Figura 2.3b

Na Figura 2.3a obsérvase como nos pares de puntos (χ_i, y_i) que se corresponden co modelo latente sigmoidal, a probabilidade é maior ca no resto. E ao xirar ese gráfico cara á dereita chegamos á Figura 2.3b na que pode apreciarse que, para un valor dado do regresor latente, os posibles valores observables do regresando teñen unha distribución de probabilidade normal como consecuencia da Hipótese 2.2 sobre a distribución das perturbacións.

2.4 Estimación co método de mínimos cadrados se non existen perturbacións pero si existen erros de medida no regresor

Se non existen perturbacións ($\xi_i=0$), pero si existen erros de medida no regresor, o modelo quedaría constituído polas Hipóteses 2.1, 2.3 e 2.4a, as expresións (2.4), (2.6), (2.7) e unha versión reducida de (2.5). Polo tanto as variables observables representáanse como

$$(x_i, Y_i) = [(\chi_i + e_i), Y_i], \quad (2.27)$$

a distribución de erros como

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_T \end{pmatrix} \rightarrow NIID \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_e^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_e^2 \end{pmatrix} \right] \quad (2.28)$$

e o modelo latente é o dado por:

$$\begin{aligned} Y_t &= \beta_0 + \frac{1}{\beta_2 + e^{-\beta_3 - \beta_1 x_t}} \\ &= \beta_0 + \frac{1}{\beta_2} \left(\frac{1}{1 + e^{-\beta_3 - \ln(\beta_2) - \beta_1 x_t}} \right) \\ &= \beta_0 + \frac{1}{\beta_2} \\ &= \beta_0 + A_t. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Neste caso, a estimación MC dos parámetros trata de atopar a relación

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t &= b_0 + \frac{1}{b_2 + e^{-b_3 - b_1 x_t}} \\ &= b_0 + \frac{1}{b_2} \hat{Z}_t \\ &= b_0 + \hat{A}_t, \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, a partir da solución do problema

$$\min SCE = \sum_{t=1}^T (Y_t - \hat{Y}_t)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{t=1}^T \left(Y_t - \hat{\beta}_0 - \frac{1}{\hat{\beta}_2 + e^{-\hat{\beta}_3 - \hat{\beta}_1 x_t}} \right)^2 \\
&= \sum_{t=1}^T (Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{A}_t)^2
\end{aligned} \tag{2.31}$$

suxeita ás dúas restricións correspondentes.

Do proceso de minimización de SCE resultan expresións equivalentes ás propostas na sección 2.3. A distribución de probabilidade dos pares (x_t, Y_t) graficamente sería a das Figuras 2.4a e 2.4b:

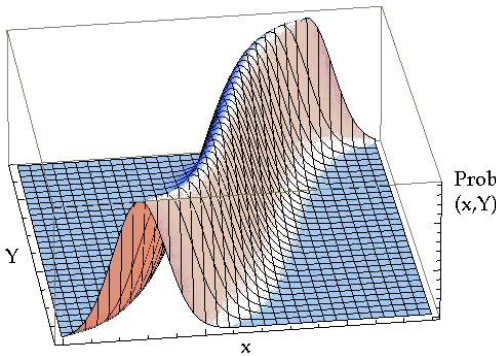


Figura 2.4a

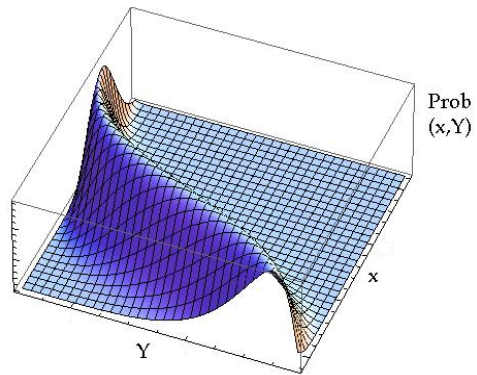


Figura 2.4b

En particular, a perspectiva da Figura 2.4b con relación á Figura 2.4a revela como no límite que suporía ter un tamaño da mostra que tende a infinito, non se produce un efecto como o do apartado anterior pois para cada valor observable do regresor (x_t^*) , a media dos valores observables do regresando non ten por que coincidir co valor esperado dada a evidente asimetría dos mesmos, percibida na forma do arco da superficie de probabilidade desa figura. Polo tanto, resulta intuitivo que a regresión de Y sobre x non ten por que proporcionar estimadores nin sequera consistentes.

2.5 Estimación co método de mínimos cadrados se existen perturbacións e erros de medida no regresor

Nesta sección retómanse as Hipóteses 2.1-2.4a da sección 2.2 e as igualdades (2.3)-(2.7), e estúdase a estimación dos parámetros polo método de mínimos cadrados. Trátase deste xeito de atopar a relación

$$\begin{aligned}
 \hat{y}_t &= b_0 + \frac{1}{b_2 + e^{-b_3 - b_1 x_t}} \\
 &= b_0 + \frac{1}{b_2} \hat{z}_t \\
 &= b_0 + \hat{a}_t,
 \end{aligned}
 \tag{2.32}$$

onde $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, a partir da minimización da seguinte expresión

$$\begin{aligned}
 SCE &= \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t)^2 \\
 &= \sum_{t=1}^T \left(y_t - \hat{\beta}_0 - \frac{1}{\hat{\beta}_2 + e^{-\hat{\beta}_3 - \hat{\beta}_1 x_t}} \right)^2 \\
 &= \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{A}_t)^2
 \end{aligned}
 \tag{2.33}$$

suxeita ás dúas restricións correspondentes. A función obxectivo (2.33) tamén se pode expresar como

$$SCE = \sum_{t=1}^T \left[y_t - \hat{\beta}_0 - \frac{1}{\hat{\beta}_2} \left(\frac{1}{1 + e^{-\hat{\beta}_3 - \ln \hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_1 x_t}} \right) \right]^2$$

$$= \sum_{t=1}^T \left(y_t - \hat{\beta}_0 - \frac{1}{\hat{\beta}_2} \hat{Z}_t \right)^2. \quad (2.34)$$

Agora, do proceso de minimización de SCE resultan as seguintes expresións:

$$\begin{aligned} \frac{\partial SCE}{\partial \hat{\beta}_0} &= -2 \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t) \\ &= -2 \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{A}_t) \\ &= -2 \sum_{t=1}^T \left(y_t - \hat{\beta}_0 - \frac{1}{\hat{\beta}_2} \hat{Z}_t \right), \end{aligned} \quad (2.35a)$$

$$\frac{\partial SCE}{\partial \hat{\beta}_2} = 2 \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t) \left(\frac{1}{\hat{\beta}_2 + e^{-\hat{\beta}_3 - \hat{\beta}_1 x_t}} \right)^2, \quad (2.35b)$$

$$\frac{\partial SCE}{\partial \hat{\beta}_3} = -2 \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t) \left(\frac{1}{\hat{\beta}_2 + e^{-\hat{\beta}_3 - \hat{\beta}_1 x_t}} \right)^2 \left(e^{-\hat{\beta}_3 - \hat{\beta}_1 x_t} \right) \quad (2.35c)$$

e

$$\frac{\partial SCE}{\partial \hat{\beta}_1} = -2 \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t) \left(\frac{1}{\hat{\beta}_2 + e^{-\hat{\beta}_3 - \hat{\beta}_1 x_t}} \right)^2 \left(e^{-\hat{\beta}_3 - \hat{\beta}_1 x_t} \right) x_t. \quad (2.35d)$$

En (2.35a)-(2.35d), e tras anular estas primeiras derivadas, obtense:

$$\begin{aligned} \frac{\partial SCE}{\partial \hat{\beta}_0} = 0 &\Rightarrow \sum_{t=1}^T y_t = Tb_0 + \frac{1}{b_2} \sum_{t=1}^T \left(\frac{1}{1 + e^{-b_3 - \ln(b_2) - b_1 x_t}} \right) \\ &= Tb_0 + \frac{1}{b_2} \sum_{t=1}^T \hat{z}_t, \end{aligned} \quad (2.36a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial SCE}{\partial \hat{\beta}_2} = 0 &\Rightarrow \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t) \frac{1}{b_2^2} \left(\frac{1}{1 + e^{-b_3 - \ln(b_2) - b_1 x_t}} \right)^2 = \dots \\ &\dots = \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t) \frac{1}{b_2^2} \hat{z}_t^2 = 0, \end{aligned} \quad (2.36b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial SCE}{\partial \hat{\beta}_3} = 0 &\Rightarrow \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t) \left(\frac{1}{b_2 + e^{-b_3 - b_1 x_t}} \right)^2 \left(e^{-b_3 - b_1 x_t} \right) = \dots \\ &\dots = \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t) \hat{a}_t^2 \left(\frac{1}{\hat{a}_t} - b_2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.36c)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial SCE}{\partial \hat{\beta}_1} = 0 &\Rightarrow \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t) \left(\frac{1}{b_2 + e^{-b_3 - b_1 x_t}} \right)^2 \left(e^{-b_3 - b_1 x_t} \right) x_t = \dots \\ &\dots = \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t) \hat{a}_t^2 \left(\frac{1}{\hat{a}_t} - b_2 \right) x_t = 0. \end{aligned} \quad (2.36d)$$

Por último, manipulando (2.36a) e (2.36b) os estimadores MC dos catro parámetros deste modelo son os que resultan das catro expresións seguintes:

$$\bar{y} = b_0 + \frac{1}{b_2} \bar{\hat{z}}, \quad (2.37a)$$

$$\sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t) \hat{z}_t^2 = \sum_{t=1}^T \left(y_t - b_0 - \frac{\hat{z}_t}{b_2} \right) \hat{z}_t^2 = 0, \quad (2.37b)$$

$$\sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t) \hat{z}_t = \sum_{t=1}^T \left(y_t - b_0 - \frac{\hat{z}_t}{b_2} \right) \hat{z}_t = 0 \quad (2.37c)$$

e

$$\sum_{t=1}^T \left(y_t - b_0 - \frac{\hat{z}_t}{b_2} \right) \hat{z}_t x_t = \sum_{t=1}^T \left(y_t - b_0 - \frac{\hat{z}_t}{b_2} \right) \hat{z}_t^2 x_t. \quad (2.37d)$$

Respecto das condicións (suficientes) de segundo orde, non parece existir ningunha garantía a priori de que a matriz hessiana que as recolle sexa definida positiva para así garantir a existencia dun mínimo na solución do sistema formado por (2.37a)-(2.37d). Todo depende da información dispoñible sobre a función. En efecto, a matriz hessiana correspondente é a dada por⁴

$$2 \times \begin{pmatrix} T & -\sum_{t=1}^T \hat{a}_t^2 & \sum_{t=1}^T \hat{a}_t (1 - b_2 \hat{a}_t) & \sum_{t=1}^T \hat{a}_t (1 - b_2 \hat{a}_t) x_t \\ \dots & -2 \sum_{t=1}^T \left(y_t - b_0 - \frac{3}{2} \hat{a}_t \right) \hat{a}_t^3 & 2 \sum_{t=1}^T \left(y_t - b_0 - \frac{3}{2} \hat{a}_t \right) \hat{a}_t^2 (1 - b_2 \hat{a}_t) & 2 \sum_{t=1}^T \left(y_t - b_0 - \frac{3}{2} \hat{a}_t \right) \hat{a}_t^2 (1 - b_2 \hat{a}_t) x_t \\ \dots & \dots & -2 \sum_{t=1}^T \left(y_t - b_0 - \frac{3}{2} \hat{a}_t \right) \hat{a}_t (1 - b_2 \hat{a}_t)^2 & -2 \sum_{t=1}^T \left(y_t - b_0 - \frac{3}{2} \hat{a}_t \right) \hat{a}_t (1 - b_2 \hat{a}_t)^2 x_t \\ \dots & \dots & \dots & -2 \sum_{t=1}^T \left(y_t - b_0 - \frac{3}{2} \hat{a}_t - \frac{y_t - b_0 - \hat{a}_t}{2(1 - b_2 \hat{a}_t)} \right) \hat{a}_t (1 - b_2 \hat{a}_t)^2 x_t^2 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

e da análise dos seus menores principais non se pode desprender ningunha conclusión inequívoca a menos que se engada algunha nova hipótese ou se modifique algunha das anteriores.

⁴ A matriz é igual que a dada en (2.26b) pero cambiando χ por x .

A solución do sistema formado por (2.37a)-(2.37d), que constitúen as catro ecuacións do vector gradiente, pode enfocarse analizando de preto o concepto definido por Z_t , e que se relacionou co punto de inflexión da función cando en (2.11) se indicou a diferenza entre Y_t e $\text{Min } Y_t$, é dicir,

$$\frac{1}{1 + e^{-\hat{\beta}_1(\chi_t - \chi_{INFLEX})}} = Z_t. \quad (2.39)$$

Á vista da expresión (2.39), podemos resolver ás catro ecuacións (2.37a)-(2.37d) determinando os catro parámetros que se denotan como β_0 , β_1 , β_2 e β_3 , ou estimando tres deles e tamén o valor do regresor no punto de inflexión (en lugar de estimar β_3).

Así, tomando a expresión (2.37a), e despexando resulta

$$b_0 = \bar{y} - \frac{1}{b_2} \bar{\hat{z}} \quad (2.40)$$

e substituíndo (2.40) en (2.37c) chegamos a

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{t=1}^T \left[y_t - \left(\bar{y} - \frac{1}{b_2} \bar{\hat{z}} \right) - \frac{\hat{z}_t}{b_2} \right] \hat{z}_t \\ &= \sum_{t=1}^T \left[(y_t - \bar{y}) - \frac{1}{b_2} (\hat{z}_t - \bar{\hat{z}}) \right] \hat{z}_t \\ &= \sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y}) \hat{z}_t - \frac{1}{b_2} \sum_{t=1}^T (\hat{z}_t - \bar{\hat{z}}) \hat{z}_t \end{aligned} \quad (2.41)$$

ou tamén

$$\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y}) \hat{z}_t = \frac{1}{b_2} \sum_{t=1}^T (\hat{z}_t - \bar{\hat{z}}) \hat{z}_t. \quad (2.42)$$

Finalmente despejando b_2 , resulta

$$b_2 = \frac{\sum_{t=1}^T (\hat{z}_t - \bar{\hat{z}}) \hat{z}_t}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y}) \hat{z}_t}, \quad (2.43)$$

e tendo em conta as propriedades da media aritmética chegamos a

$$b_2 = \frac{\sum_{t=1}^T (\hat{z}_t - \bar{\hat{z}})(\hat{z}_t - \bar{\hat{z}})}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})(\hat{z}_t - \bar{\hat{z}})}. \quad (2.44)$$

Dado que o numerador do cociente de (2.44) coincide co numerador do estimador da varianza mostral de \hat{z}_t , que representamos como $S_{\hat{z}}^2$, e o denominador coincide co numerador do estimador da covarianza entre y_t e \hat{z}_t , que podemos denotar por $S_{y, \hat{z}}$, podemos expresar (2.44) como

$$b_2 = \frac{S_{\hat{z}}^2}{S_{y, \hat{z}}}. \quad (2.45)$$

Iso significa que (2.40) pódese expresar como

$$b_0 = \bar{y} - \left(\frac{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})(\hat{z}_t - \bar{\hat{z}})}{\sum_{t=1}^T (\hat{z}_t - \bar{\hat{z}})^2} \right) \bar{\hat{z}} \quad (2.46)$$

ou, alternativamente, como

$$b_0 = \bar{y} - \left(\frac{S_{y, \hat{z}}}{S_{\hat{z}}^2} \right) \bar{\hat{z}}. \quad (2.47)$$

Por outra parte, substituíndo agora (2.40) en (2.37b) resulta

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{t=1}^T \left[y_t - \left(\bar{y} - \frac{1}{b_2} \bar{\hat{z}} \right) - \frac{\hat{z}_t}{b_2} \right] \hat{z}_t^2 \\ &= \sum_{t=1}^T \left[(y_t - \bar{y}) - \frac{1}{b_2} (\hat{z}_t - \bar{\hat{z}}) \right] \hat{z}_t^2 \\ &= \sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y}) \hat{z}_t^2 - \frac{1}{b_2} \sum_{t=1}^T (\hat{z}_t - \bar{\hat{z}}) \hat{z}_t^2 \end{aligned} \quad (2.48)$$

ou tamén

$$\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y}) \hat{z}_t^2 = \frac{1}{b_2} \sum_{t=1}^T (\hat{z}_t - \bar{\hat{z}}) \hat{z}_t^2. \quad (2.49)$$

Despexando b_2 chegamos a

$$b_2 = \frac{\sum_{t=1}^T (\hat{z}_t - \bar{\hat{z}}) \hat{z}_t^2}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y}) \hat{z}_t^2}, \quad (2.50)$$

polo tanto, igualando (2.43) e (2.50) temos

$$\frac{\sum_{t=1}^T (\hat{z}_t - \bar{\hat{z}}) \hat{z}_t}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y}) \hat{z}_t} = \frac{\sum_{t=1}^T (\hat{z}_t - \bar{\hat{z}}) \hat{z}_t^2}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y}) \hat{z}_t^2}. \quad (2.51)$$

Ademais, tendo en conta as propiedades da media aritmética, (2.50) queda como

$$b_2 = \frac{\sum_{t=1}^T (\hat{z}_t - \bar{\hat{z}}) (\hat{z}_t^2 - \bar{\hat{z}}^2)}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y}) (\hat{z}_t^2 - \bar{\hat{z}}^2)}. \quad (2.52)$$

Dado que o numerador do cociente de (2.52) coincide co numerador do estimador da covarianza mostral de \hat{z}_t e \hat{z}_t^2 , que representamos como $S_{\hat{z}^2}^2$, mentres que o denominador coincide co numerador do estimador da covarianza entre y_t e \hat{z}_t^2 , que podemos denotar como S_{y, \hat{z}^2} , podemos expresar (2.52) como

$$b_2 = \frac{S_{\hat{z}^2}^2}{S_{y, \hat{z}^2}}. \quad (2.53)$$

Polo tanto, atopando a solución para o parámetro β_1 e para o valor do regresor no punto de inflexión, xa se poden determinar as estimacións MC dos dous parámetros β_0 e β_2 . E esa solución pasa por reducir o sistema que forman as catro ecuacións (2.37a)-(2.37d) a un sistema de dúas no que a primeira é (2.51) ou, alternativamente, o resultado de igualar as expresións (2.45) e (2.53), mentres que a segunda é o resultado de substituír (2.40) e (2.45) en (2.37d). Chegados a este punto pódese formular a seguinte proposición:

Proposición 2.1. *Asumindo as Hipóteses 2.1-2.4a, a solución da estimación polo método de mínimos cadrados do modelo sigmoidal de catro parámetros de (2.6)*

pódese facer solucionando un sistema de dúas ecuacións coas incógnitas de dous estimadores, b_1 e x_{INFLEX} . En particular:

(i) A primeira das ecuacións pode representarse coa igualdade

$$\left(\frac{S_{y, \hat{z}}}{S_{\hat{z}}^2} \right) = \left(\frac{S_{y, \hat{z}^2}}{S_{\hat{z}^2}^2} \right). \quad (2.54)$$

(ii) A outra ecuación é a que resulta da igualdade

$$\sum_{t=1}^T \left[(y_t - \bar{y}) - \left(\frac{S_{y, \hat{z}}}{S_{\hat{z}}^2} \right) \cdot (\hat{z}_t - \bar{\hat{z}}) \right] \hat{z}_t x_t = \sum_{t=1}^T \left[(y_t - \bar{y}) - \left(\frac{S_{y, \hat{z}^2}}{S_{\hat{z}^2}^2} \right) \cdot (\hat{z}_t^2 - \bar{\hat{z}^2}) \right] \hat{z}_t^2 x_t. \quad (2.55)$$

A relevancia da Proposición 2.1 radica en que nos permite simplificar de maneira moi importante a estimación do modelo sigmoidal de (2.32) xa que para determinar dous dos seus estimadores (b_0 e b_2), basta con estimar previamente os outros dous (b_1 e x_{INFLEX}). Dende o punto de vista da precisión no cálculo, iso facilita enormemente a procura de solucións que fan os algoritmos cando tratan de minimizar a función obxectivo. En concreto, a SCE ten unha sensibilidade a pequenos cambios nos decimais do estimador b_2 moi diferente á que ten respecto a pequenas variacións nos decimais do estimador b_1 , por iso calcular con precisión os dous estimadores a un mesmo tempo é algo laborioso para os algoritmos de estimación non linear.

As ecuacións (2.54) e (2.55) da Proposición 2.1 son funcións implícitas dos estimadores b_1 e x_{INFLEX} , polo que non semella posible determinar con exactitude de que dependen, se non é mediante a utilización de técnicas de simulación e algún suposto adicional.

Por iso, chegados a este punto analizamos que consecuencias tería a estimación MC do modelo sigmoidal, supoñendo que se cumpren as Hipóteses 2.1, 2.2 e 2.3 da sección

2.2, e modificando a Hipótese 2.4a para propoñer a seguinte alternativa que recollería a situación máis favorable.

Hipótese 2.4b: A información dispoñible sobre a variable explicativa está disposta de xeito simétrico respecto do valor do regresor no punto de inflexión da función latente; é dicir, que se existe información con erros en torno ao punto $\chi_t = \chi_{INFLEX} + D_t$, tamén existe un bloque de información con erros en torno ao punto $\chi_t' = \chi_{INFLEX} - D_t$.

Admitir esta Hipótese 2.4b xunto coa Hipótese 2.3 de normalidade dos erros implica que no límite tamén se tería información simétrica respecto de cada un deses valores, polo que serían observables tanto os $x_{t,i} = \chi_t + e_{t,i} = \chi_{INFLEX} + D_t + e_{t,i}$, coma os $x_{t,i}^* = \chi_t - e_{t,i} = \chi_{INFLEX} + D_t - e_{t,i}$. Esa idea é a que tratamos de representar na Figura 2.5:

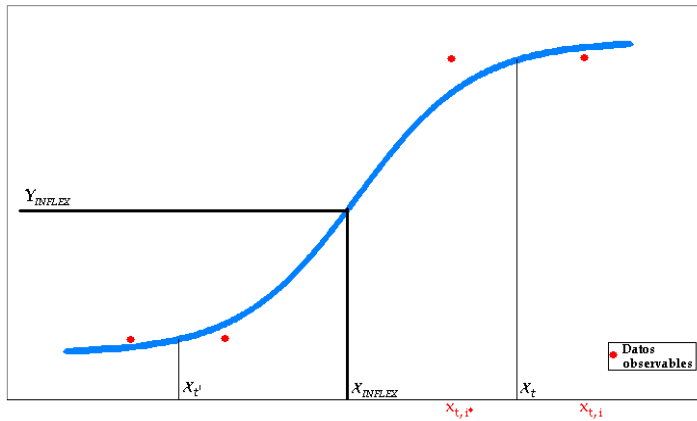


Figura 2.5. Disposición simétrica dos datos observables respecto do regresor latente.

Por outro lado, admitir tamén a Hipótese 2.2 de normalidade nas perturbacións implica que tamén no límite teríase información simétrica respecto de cada valor de Y_t , tal como se indica na Figura 2.6.

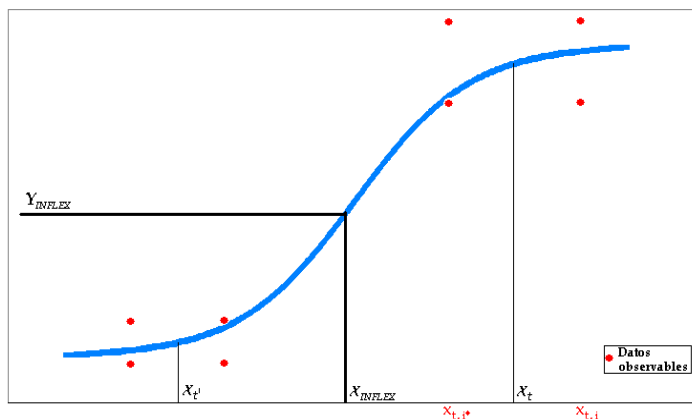


Figura 2.6. Disposición simétrica dos datos observables respecto do modelo latente.

No contexto que nos ocupa, a estimación MC pode interpretarse como un método inxenuo porque realmente obvia (ou simplemente pasa por alto) a existencia de erros no regresor; polo tanto cabe esperar que os resultados que ofrezca non sexan os máis recomendables dende o punto de vista das propiedades desexables dos estimadores. Algo similar demóstrase que ocorre no caso linear, pois resulta un estimador do coeficiente angular con nesgo atenuante; é dicir, que aínda dispoñendo de moita información mostral, o propio método de estimación amósase incapaz de ofrecer información non nesgada sobre o coeficiente angular. Isto débese a que no procedemento de estimación non se incorpora información relevante sobre o proceso que está xerando os datos observables pois, como é ben sabido, a estimación MC trata de analizar a variabilidade condicionada do regresando unha vez “fixados” os valores dos regresores, e isto último resulta insuficiente para determinar os verdadeiros parámetros ao obviar a posibilidade de que os propios valores observados dos regresores puideran estar ofrecendo información “falseada”.

Por outra banda, o feito de que os modelos non lineais esixan un gran aporte de información mostral para que a estimación resulte minimamente fiable fai pensar que para poder ofrecer algunha orientación sobre as propiedades dos estimadores, e dada a imposibilidade de atopar resultados analíticos que as determinen, débense propoñer mecanismos de simulación do tipo Monte Carlo, por exemplo, nos que a información estea estruturada de determinada forma. Así, no afán de aproximar as propiedades do método de estimación MC, minimízanse os posibles efectos de factores que obviamente estarán

presentes na aplicación práctica deste tipo de modelos como é o feito de dispoñer de pouca información sobre as variables, de que esta non se centre no punto de inflexión da relación latente, de que a varianza das perturbacións non sexa constante, etc.

2.5.1. *Simulacións con información centrada no punto de inflexión do modelo latente*

Nesta sección presentamos os resultados dunhas simulacións feitas para tratar de establecer a influencia da varianza dos erros de medida sobre os estimadores MC, pois se esta puidese determinarse con exactitude, cabería a posibilidade de ‘corrixir’ as posibles deficiencias destes para acadar estimacións máis fiables ou apropiadas. As simulacións estruturáronse de xeito inspirado na proposta do algoritmo do SIMEX tal como aparece en Carroll et al. (1995).

En primeiro lugar créanse valores aleatorios para simular o regresor latente (χ_t) co xerador de números aleatorios de Microsoft Excel[®], e modificáronse lixeiramente para que cumprisen determinados valores de media ($\bar{\chi}$) e varianza (\hat{v}_χ) que servisen como punto de referencia.

A continuación xeráronse os valores simulados da variable explicada latente (Y_t) partindo de valores concretos dos parámetros β_0 , β_1 , β_2 e β_3 coa restrición de que cumprisen a relación de (2.8) para garantir así a disposición da información arredor do punto de inflexión do modelo latente.

O seguinte paso consistiu en xerar dúas novas series de números aleatorios (ξ_t) e (e_t) para que representasen as perturbacións e os erros de medida respectivamente, e modificalas lixeiramente para que cada unha cumprise as propiedades de:

- (i) ter media aritmética nula;
- (ii) presentar simetría perfecta respecto desa media; e
- (iii) ter un coeficiente de curtose igual a 3.

Xa finalmente simuláronse os valores observables do regresor e do regresando engadindo os erros de medida e as perturbacións simuladas a un e outro respectivamente.

A estimación do modelo non linear cos valores observables simulados das variables realizouse en poucos segundos nun ordenador de sobremesa, con microprocesador Intel® Pentium® 4 CPU 3.40GHz, facendo uso para elo do complemento Pop Tools⁵ para Microsoft Excel® que no apartado de Likelihood Tools permite utilizar o método do Simplex para estimar ecuacións non lineais. O número máximo de iteracións proposto foi de 10.000 e a tolerancia de 10^{-12} . O método aplicouse varias veces para poder conseguir unha maior precisión no resultado dada a evidente sensibilidade de algúns parámetros.

2.5.1.1. Modelo simulado I

Os gráficos seguintes (Figura 2.7a, Figura 2.7b e Figura 2.7c) representan unha primeira simulación dunha nube de puntos mostral. A Figura 2.7a representa unha función sigmoideal de catro parámetros que recollería a relación entre as variables latentes. A Figura 2.7b ilustra como serían os valores observables das variables (en cor verde), se unicamente hai erros no regresor, dispostos de xeito simétrico como se dixo antes. Por último, a Figura 2.7c representa tamén a nube de puntos mostral (en cor azul celeste) cando engadimos as perturbacións da variable explicada, e a sigmoide que resultaría estimada (en cor azul mariño) utilizando o método de MC.

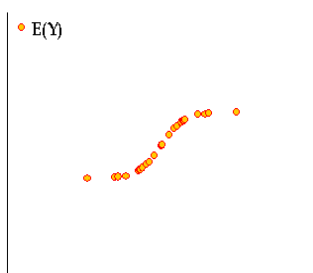


Figura 2.7a

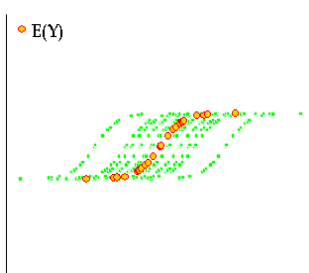


Figura 2.7b

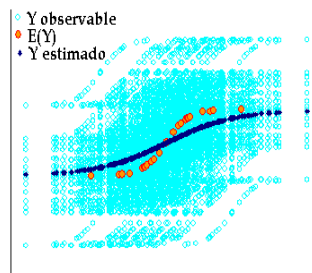


Figura 2.7c

⁵ Hood, G. M. (2010) PopTools version 3.2.3. Disponible en internet. URL <http://www.poptools.org>

Como pode apreciarse na Figura 2.7c a curva axustada se “suaviza” respecto da curva verdadeira ou latente, aínda que mantén o mesmo punto de inflexión. Quere isto dicir que a velocidade de crecemento da función axustada (que neste tipo de modelo é proporcional ao estimador b_1) é menor ca velocidade de crecemento da función latente, dando a entender así que tamén se produce un nesgo atenuante no parámetro que acompaña ao regresor, coma no caso linear. Este exemplo foi simulado supoñendo a situación extrema na que os erros no regresor teñen unha varianza moi elevada, pois estableceuse que a súa desviación típica (dos erros) era aproximadamente igual á distancia entre os dous puntos de inflexión da primeira derivada da función latente, o que xa pode considerarse un erro con varianza suficientemente grande como para equiparala a unha situación límite. E en canto as perturbacións, neste exemplo supúxose que a súa varianza era igual á varianza máxima posible do modelo latente, o que tamén pode considerarse unha situación suficientemente extrema.

Para comprobar as consecuencias da estimación MC cos datos do exemplo representado nas Figuras 2.7a-2.7c preséntanse na Táboa 2.1 as propiedades das variables latentes, na Táboa 2.2 as propiedades dos erros e das perturbacións simulados, e na Táboa 2.3 os valores iniciais da función latente e os resultados da estimación, para poder comparalos.

Regresor (χ)	Media na mostra	200
	Varianza na mostra	1.000
Variable explicada (Y)	Media	125
	Varianza máxima $\left(\frac{1}{4\beta_2^2}\right)$	625
	Varianza na mostra	325,99503392

Táboa 2.1. Propiedades das variables do modelo latente simulado I.

Dado o xeito en que foron simulados os valores de erros e perturbacións, xerándoos de forma que cumprisen as propiedades que no límite deberían satisfacer variables con distribución normal, é dicir, perfectamente simétricas e con un coeficiente de

curtose igual a 3, os tests de normalidade⁶ que se lles aplican presentan probabilidades asociadas obviamente moi elevadas.

Erros en χ	Media	0
	Varianza	900
	Asimetría	0
	Curtose	3
Perturbacións en Y	Media	0
	Varianza	625
	Asimetría	0
	Curtose	3

Táboa 2.2. Propiedades dos erros e das perturbacións simulados do modelo I.

Os resultados da estimación do modelo simulado I son os que se presentan na seguinte táboa:

Parámetro	Característica	Valor	Estimación
β_0	Mínimo da variable explicada	100	100,46559053
β_1	Velocidade de crecemento da variable explicada	0,09	0,03087325
β_2	Inversa da amplitude da variable explicada	0,02	0,02037954
β_3	Desprazamento horizontal da función	-14,08797699	-2,28142526
$\beta_0 + \frac{1}{\beta_2}$	Máximo da variable explicada	150	149,53440971
$\beta_0 + \frac{1}{2\beta_2}$	Valor da variable explicada no punto de inflexión	125	125,00000012
$\frac{-\ln(\beta_2) - \beta_3}{\beta_1}$	Valor do regresor no punto de inflexión	200	199,99999998
$\frac{2.63391579}{\beta_1}$	Distancia entre os puntos inflexión da 1ª derivada	29,26573104	85,31386241

Táboa 2.3. Resultados da estimación do modelo simulado I.

⁶ Jarque-Bera, Shapiro-Wilk e Kolmogorov-Smirnov (revisión de Lilliefors).

Como xa se pode apreciar neste caso, cando se estima por MC o parámetro $\beta_1=0,09$, o seu estimador $b_1=0,03087325$ presenta un nesgo atenuante no contexto que estamos a supoñer, confirmando así a intuición enunciada no comentario á Figura 2.7c. Outros datos da estimación serían:

	Valores observables		Estimación
Regresor (x)	Media	200	--
	Varianza	1.900	--
Variable explicada (y)	Media	125	125,00000013
	Varianza	950,99503392	154,45076102

Táboa 2.3 (continuación). Resultados da estimación do modelo simulado I.

Dos resultados acadados, cabe mencionar en especial que se mantén o mesmo punto de inflexión na función estimada que no modelo latente. E isto estase vendo que acontece na situación extrema na que os erros e as perturbacións teñen varianzas moi grandes.⁷ Polo tanto, establecemos o resultado da seguinte proposición:

Proposición 2.2. *Baixo as Hipóteses 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4b, o punto de inflexión da función estimada á que fai referencia a Proposición 2.1, coincide co punto de inflexión da función latente; e dicir coincide cando:*

- (i) *as perturbacións na variable explicada e os erros da variable explicativa son independentes e teñen distribución normal;*
- (ii) *a información dispoñible sobre as variables está disposta de xeito simétrico entorno a ese punto de inflexión.*

⁷ Ao tratar de simular exemplos nos que algún dos parámetros teña valores moi pequenos pode darse a circunstancia de que aos algoritmos lles resulte moi dificultoso poder acadar os mínimos porque a non linearidade de algúns deles, fai moi sensible a suma de cadrados dos residuos a lixeiras modificacións nestes.

De todo o dito se deduce que, para estimar o valor do regresor no punto de inflexión, bastará con tomar a media mostral do mesmo. Deste xeito pode expresarse

$$\begin{aligned}\hat{z}_t &= \frac{1}{1 + e^{-b_1(x_t - x_{INFLEX})}} \\ &= \frac{1}{1 + e^{-b_1(x_t - \bar{x})}}.\end{aligned}\tag{2.56}$$

Polo tanto, realmente a solución do sistema de catro ecuacións (2.37a)-(2.37d) pode acadarse resolvendo unha calquera das dúas expresións que resultan de substituír (2.56) en calquera das dúas igualdades (2.53) ou (2.54) da Proposición 2.1, e que resultan ser ecuacións implícitas que dependen só do estimador (b_1) e da información dispoñible das variables.

Proposición 2.3. *Asumindo as Hipóteses 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4b, para acadar a minimización de SCE (2.33) basta con resolver unha ecuación implícita dun único estimador: b_1 . Coa condición expresada en (2.56), dita ecuación admite a expresión dada en (2.54) ou a expresión dada en (2.55).*

A relación entre o estimador de mínimos cadrados b_1 e a SCE pode verificarse observando as Figuras 2.8a e 2.8b que revelan como varía SCE a medida que se modifica o valor dese estimador, unha vez fixadas as medias, varianzas e asimetrías das variables latentes, das perturbacións e dos erros. Os datos utilizados para realizar os cálculos son os do exemplo descrito nas Táboas 1-3 e ilustrado nas Figuras 2.7a-2.7c, polo que loxicamente o mínimo atópase preto do valor $b_1=0,03087325$.

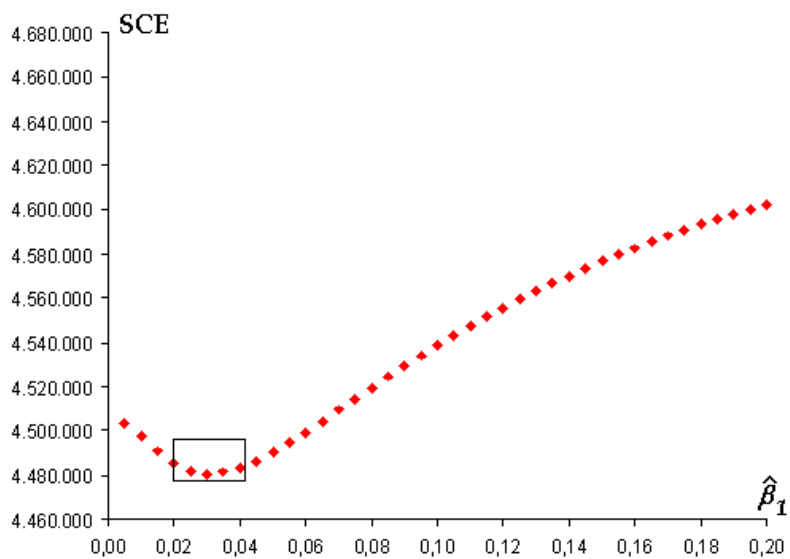


Figura 2.8a. Influência de $\hat{\beta}_1$ na soma de cadrados dos resíduos.

ou ampliando a zona delimitada polo rectángulo,

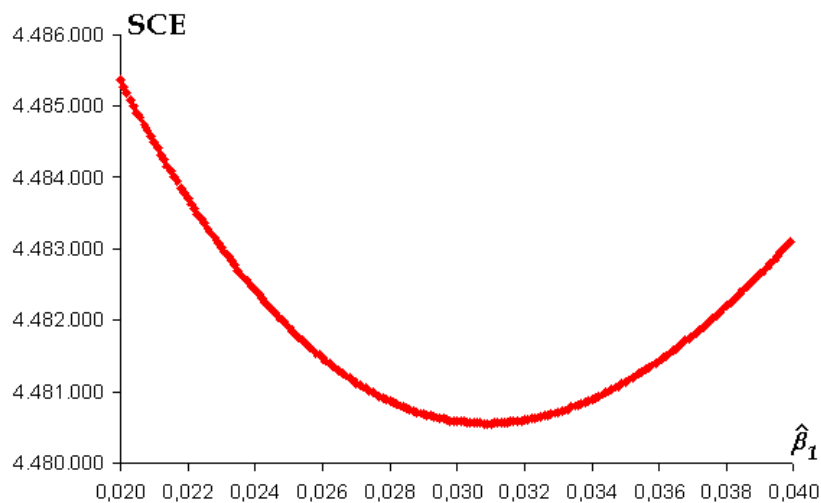


Figura 2.8b (continuação). Influência de $\hat{\beta}_1$ na soma de cadrados dos resíduos.

2.5.1.2. Modelo simulado II

No exemplo que se presenta de seguido, se analiza a posibilidade de que a información sobre a variable explicativa do modelo latente estea tamén centrada no punto de inflexión do modelo latente como no modelo simulado I, pero concentrada no tramo case linear da función. Deste xeito haberá pouca información observable sobre os posibles límites inferior e superior da variable explicada. As Figuras 2.9a, 2.9b e 2.9c mostran como estaría agora disposta a información nesta segunda simulación.

Como era de agardar, ante ese tipo de nube de puntos, a estimación MC propón unha sigmoide que máis ben semella unha recta no tramo que se estima, como se aprecia na Figura 2.9c.



Figura 2.9a

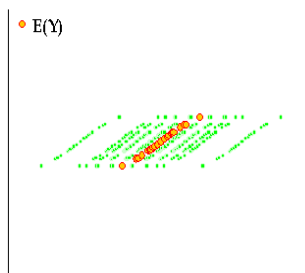


Figura 2.9b

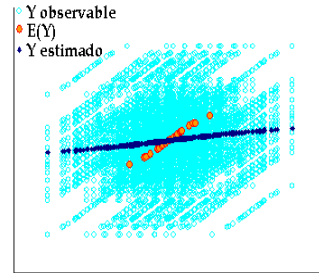


Figura 2.9c

Os valores simulados das variables do modelo latente cumpren neste caso as propiedades indicadas na Táboa 2.4. É dicir que abonda con reducir a varianza do regresor latente simulado para ter os datos necesarios para realizar estimación desta segunda simulación.

Regresor (χ)	Media na mostra	200
	Varianza na mostra	50
Variable explicada (Y)	Media	125
	Varianza máxima $\left(\frac{1}{4\beta_2^2}\right)$	625
	Varianza na mostra	52,99703725

Táboa 2.4. Propiedades das variables do modelo latente simulado II.

Os valores que expresan os erros e as perturbacións teñen que cumprir as mesmas características de asimetría e curtose que na simulación anterior, polo que se poden utilizar os descritos polas propiedades ás que fai referencia a Táboa 2.2. Pois ben, os resultados da simulación son agora os seguintes:

Parámetro	Característica	Valor	Estimación
β_0	Mínimo da variable explicada	100	113,08447940
β_1	Velocidade de crecemento da variable explicada	0,09	0,03019973
β_2	Inversa da amplitude da variable explicada	0,02	0,04196208
β_3	Desprazamento horizontal da función	-14,08797699	-2,86895785
$\beta_0 + \frac{1}{\beta_2}$	Máximo da variable explicada	150	136,91551941
$\beta_0 + \frac{1}{2\beta_2}$	Valor da variable explicada no punto de inflexión	125	124,99999941
$\frac{-\ln(\beta_2) - \beta_3}{\beta_1}$	Valor do regresor no punto de inflexión	200	199,99999487
$\frac{2,63391579}{\beta_1}$	Distancia entre os puntos inflexión da 1ª derivada	29,26573104	87,21652100

Táboa 2.5. Resultados da estimación do modelo simulado II.

E tamén verificanse os seguintes resultados

	Valores observables		Estimación
Regresor (x)	Media	200	--
	Varianza	950	--
Variable explicada (y)	Media	125	125,00000025
	Varianza	950,99450339	12,85919777

Táboa 2.5 (continuación). Resultados da estimación do modelo simulado II.

nos que pode observarse de novo que, ao estimar o parámetro β_1 , prodúcese un nesgo atenuante no estimador b_1 , neste caso máis acusado que no primeiro modelo. Polo tanto, chegados a este punto e considerando que os dous modelos simulados que expuxemos son só unha mostra de moitos outros que simulamos e nos que obtivemos sempre o mesmo tipo de resultado, formulamos a seguinte:

Proposición 2.4. *Baixo as Hipóteses 2.1, 2.2, 2.3 e as igualdades (2.3)-(2.7), o estimador MC do parámetro β_1 que é proporcional á velocidade de crecemento da función sigmoideal non se garante que sexa consistente, nin sequera asumindo o caso máis favorable expresado na Hipótese 2.4b. Pola contra, nese caso presenta sempre un nesgo atenuante.*

Chegados a este punto, a conxectura que propoñemos é que este nesgo atenuante depende dalgún tipo de relación non linear entre o parámetro β_1 , a varianza do regresor latente e a varianza dos erros de medida. Agora ben, neste momento aínda non estamos en disposición de poder confirmar este extremo nin de formular matematicamente esa relación se existe. No caso de que iso fose posible, abondaría con incorporar o dato da varianza dos erros de medida do regresor á estimación de b_1 , para corrixila de forma apropiada.

A falta da demostración que permita relacionar formalmente o estimador b_1 coa varianza dos erros de medida presentamos, na Figura 2.10, cómo evoluciona aquel a medida que se modifica a varianza destes no modelo simulado I, , lembrado que o parámetro que se trata de estimar é $\beta_1=0,09$.

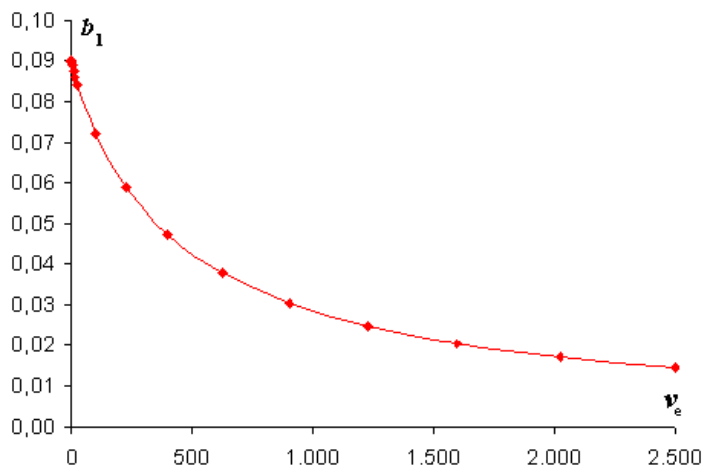


Figura 2.10. Evolución de b_1 a medida que cambia la varianza de los errores de medida.

2.5.2. *Simulaciones con información non centrada no punto de inflexión do modelo latente*

Como derradeiro apuntamento, outra cuestión a ter en conta é cómo se comportan os estimadores MC do modelo definido polas Hipóteses 2.1-2.3 se asumimos a hipótese de simetría pero a información observable sobre o regresor non está centrada no punto de inflexión. É dicir:

Hipótese 2.4c: A información dispoñible sobre a variable explicativa está disposta de xeito simétrico respecto dun valor do regresor que non coincide co que lle corresponde ao punto de inflexión da función latente.

Para observar as consecuencias diso, presentamos dúas simulacións feitas cos mesmos datos do modelo simulado I, pero con unha lixeira modificación. O que damos en chamar modelo simulado III terá as observacións do regresor centradas nun punto que queda por debaixo do punto de inflexión da función latente. E o modelo simulado IV, as terá centradas nun punto que queda por riba, pero equidistante ao do modelo simulado III.

2.5.2.1. Modelo simulado III

Os valores simulados das variables do modelo latente cumpren as propiedades indicadas na Táboa 2.6, onde anotamos que a media do regresor latente é 130, cando no modelo simulado I era 200.

Regresor (χ)	Media na mostra	130
	Varianza na mostra	1000
Variable explicada (Y)	Media	101,69092203
	Varianza máxima $\left(\frac{1}{4\beta_2^2}\right)$	625
	Varianza na mostra	29,97333421

Táboa 2.6. Propiedades das variables do modelo latente simulado III.

Os resultados da simulación son agora

Parámetro	Característica	Valor	Estimación
β_0	Mínimo da variable explicada	100	99,86228425
β_1	Velocidade de crecemento da variable explicada	0,09	0,03829079
β_2	Inversa da amplitude da variable explicada	0,02	0,03282918
β_3	Desprazamento horizontal da función	-14,08797699	-5,36099572
$\beta_0 + \frac{1}{\beta_2}$	Máximo da variable explicada	150	130,32298904
$\beta_0 + \frac{1}{2\beta_2}$	Valor da variable explicada no punto de inflexión	125	115,09263664
$\frac{-\ln(\beta_2) - \beta_3}{\beta_1}$	Valor do regresor no punto de inflexión	200	229,23090864
$\frac{2,63391579}{\beta_1}$	Distancia entre os puntos inflexión da 1ª derivada	29,26573104	68,78718379

Táboa 2.7. Resultados da estimación do modelo simulado III.

E tamén

	Valores observables		Estimación
Regresor (x)	Media	200	--
	Varianza	950	--
Variable explicada (y)	Media	101,69092203	101,69092215
	Varianza	654,97333421	9,53680310

Táboa 2.7 (continuación). Resultados da estimación do modelo simulado III.

As Figuras 2.11a, 2.11b e 2.11c ilustran como se comporta o modelo estimado neste caso, considerando as mesmas premisas que nas figuras similares indicadas nas seccións precedentes.



Figura 2.11a

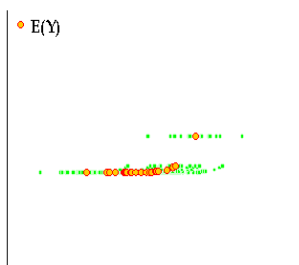


Figura 2.11b

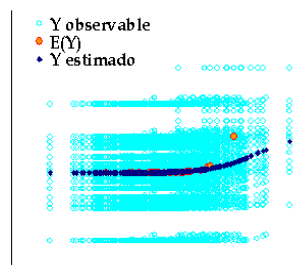


Figura 2.11c

2.5.2.2. Modelo simulado IV

Os valores simulados das variables do modelo latente cumpren neste caso as propiedades indicadas na Táboa 2.8. Advertimos que a media aritmética do regresor latente establecemos aquí que sexa igual a 270, mentres que no modelo simulado I propuxemos que fora igual a 200, e no modelo simulado III o determinamos que fora igual a 130. E a varianza da mostra de observacións simuladas da variable explicada é a mesma que a proposta no modelo simulado III pois estamos situando as variables observables nun lugar

do plano esquidistante respecto do punto de inflexión da ecuación latente simulada.

Regresor (χ)	Media na mostra	270
	Varianza na mostra	1000
Variable explicada (Y)	Media	148,30907797
	Varianza máxima $\left(\frac{1}{4\beta_2^2}\right)$	625
	Varianza na mostra	29,97333420

Táboa 2.8. Propiedades das variables do modelo latente simulado IV.

Os resultados da simulación son agora os seguintes:

Parámetro	Característica	Valor	Estimación
β_0	Mínimo da variable explicada	100	119,6770313 7
β_1	Velocidade de crecemento da variable explicada	0,09	0,03829079
β_2	Inversa da amplitude da variable explicada	0,02	0,03282920
β_3	Desprazamento horizontal da función	14,08797699	-3,12244814
$\beta_0 + \frac{1}{\beta_2}$	Máximo da variable explicada	150	150,1377166 1
$\beta_0 + \frac{1}{2\beta_2}$	Valor da variable explicada no punto de inflexión	125	134,9073739 9
$\frac{-\ln(\beta_2) - \beta_3}{\beta_1}$	Valor do regresor no punto de inflexión	200	170,7691266 5
$\frac{2,63391579}{\beta_1}$	Distancia entre os puntos inflexión da 1ª derivada	29,26573104	68,78718637

Táboa 2.9. Resultados da estimación do modelo simulado IV.

Outros resultados son

	Valores observables		Estimación
Regresor (x)	Media	200	--
	Varianza	950	--
Variable explicada (y)	Media	148,30907797	148,30907788
	Varianza	654,97333421	9,53680473

Táboa 2.9 (continuación). Resultados da estimación do modelo simulado IV.

Nas Figuras 2.12a, 2.12b e 2.12c apréciase como se comporta este modelo IV unha vez estimado.

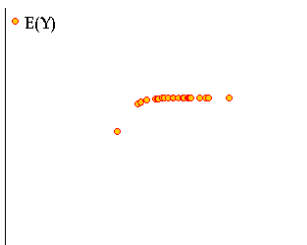


Figura 2.12a

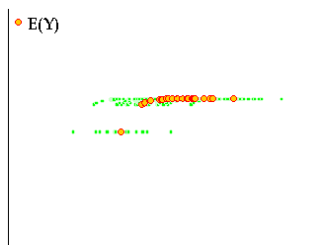


Figura 2.12b

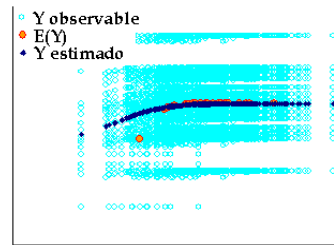


Figura 2.12c

Obsérvese que os estimadores dos parámetros β_1 e β_2 presentan case os mesmos valores no modelo simulado III e no modelo simulado IV, e unicamente se ven alterados de xeito significativo o estimador de β_0 e o estimador de β_3 . O estimador de β_0 intúese que se ve alterado debido a que a medida que a información está máis lonxe do punto de inflexión, máis difícil resulta estimar correctamente o límite superior da función latente (no modelo simulado III) e inferior (no modelo simulado IV). Por outra parte, o estimador de β_3 tamén se ve alterado pois non en van recolle o desprazamento horizontal do modelo latente. Estes resultados indican que os nesgos que se producen nos estimadores MC dos parámetros β_1 e β_2 dependen da distancia da información observable do regresor latente, con independencia do signo positivo ou negativo desta.

2.6 Conclusións

Do exposto neste capítulo podemos tirar como conclusión xeral que non é recomendable estimar un modelo de regresión sigmoidal con un regresor que poda incluír erros de medida no mesmo, mediante a utilización do método de mínimos cadrados cando pretendemos manexar estimadores cando menos consistentes.

No procedemento que se seguiu para acadar esa conclusión xeral, tamén puideron determinarse outras cuestións máis concretas.

En primeiro lugar que o proceso de minimización da suma de cadrados dos erros da estimación (SCE) mediante o método de mínimos cadrados dunha función sigmoidal de catro parámetros, que xeneraliza a función loxística, pode acometerse solucionando un sistema de dúas ecuacións implícitas de dous deses parámetros e resolver a continuación os outros dous.

En segundo lugar que no caso de que o regresor latente teña unha distribución simétrica centrada no valor que determina o punto de inflexión da función sigmoidal, e os valores observables do mesmo inclúan erros de medida con distribución de probabilidade Normal e independentes das perturbacións do regresando, tamén con distribución Normal, a minimización de SCE proporcionou un modelo estimado cuxo punto de inflexión coincide co do modelo latente.

En terceiro lugar que cos mesmos supostos do anterior parágrafo, para acadar o mínimo da función obxectivo abondou con solucionar unha ecuación implícita do parámetro que expresa a ‘velocidade’ de crecemento da función.

E en cuarto lugar que o método de estimación analizado ao longo deste capítulo non garante a consistencia de todos estimadores cando están presentes erros de medida no regresor observado, nin sequera no caso máis favorable. De feito puido demostrarse mediante modelos simulados, a existencia dun nesgo atenuante no estimador do parámetro de crecemento.

Bibliografía

- CARROLL, R. J.; RUPPERT, D.; STEFANSKI, L.A. (1995): *Measurement Error in Nonlinear Models*, Ed. Chapman & Hall.
- HADDON, M. (2001): *Modelling and Quantitative Methods in Fisheries*, Ed. Chapman & Hall
- HANNAH, R.W.; BLUME, M.T.O.; THOMPSON, J.E. (2009): “Length and age at maturity of female yelloweye rockfish (*Sebastes ruberimus*) and cabezon (*Scorpaenichthys marmoratus*) from Oregon waters based on histological evaluation of maturity”, *Oregon Department of Fish and Wildlife Information Reports*, nº 2009-04.
- JENNRICH, R.I. (1969): “Asymptotic properties of nonlinear least squares estimators”. *Annals of Mathematical Statistics*, 40: pp. 633-643.
- LEVENBERG, K. (1944): “A method for the solution of certain non-linear problems in least squares”. *The Quarterly of Applied Mathematics*, 2: pp. 164–168.
- MALINVAUD, E. (1970): *Statistical Methods of Econometrics*, Ed. North-Holland.
- MARQUARDT, D. (1963): “An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters”. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 11 (2): pp. 431–441.
- SCHAEFER, M.B. (1954). “Some aspects of the dynamics of populations important to the management of the commercial marine fisheries”. *Bulletin, Inter American Tropical Tuna Commission*, 1(2): pp. 27-56.
- SCHNUTE, J.T.; RICHARDS, L.J. (1990): “A unified approach to the analysis of fish growth, maturity, and survivorship data”. *Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Science*, 47: pp. 24-40.
- SIMMONDS, E.J.; PORTILLA, E.; SKAGEN, D.; BEARE, D.; REID, D.G. (2010): “Investigating agreement between different data sources using Bayesian state-space models: an application to estimating NE Atlantic mackerel catch and stock abundance”. *ICES Journal of Marine Science*, 67: pp. 1138-1153.
- VERHULST, P.F. (1838): “Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement”. *Corresp. Math. Phys.* 10: pp. 113–121.
- Von BERTALANFFY, L. (1938): “A quantitative theory of organic growth”. *Human Biology*, 10: pp. 181-213.

WU, C.F. (1981): "Asymptotic theory of non-linear least squares estimation. *Annals of Statistics*, 9: pp. 501-513.

Capítulo 3

ESTIMACIÓN DE MODELOS CUADRÁTICOS CON ERROS NO REGRESOR

3.1 Introducción

Coa denominación de modelos de regresión cuadráticos nos referimos a un tipo xeral de modelo non linear tanto nas variables como nos parámetros, aínda que con determinadas restricións ten versións que só son non lineais nas variables, como se verá máis adiante neste capítulo.

Non sería pertinente a discusión sobre a utilidade deste tipo de modelo en moi diversos eidos da investigación científica, pois está fora de toda dúbida razoable. No campo que nos resulta de especial interese ao desenvolver esta Tese de Doutoramento utilízase habitualmente para formular unha ecuación que exprese a variación natural da biomasa dun recurso pesqueiro, ou para formalizar a relación entre o esforzo pesqueiro ao que se somete ese recurso e o rendemento que se acada del. Neste senso podemos atopar referencias a este tipo de modelo en múltiples informes técnicos da FAO, en investigacións dos grupos de traballo do ICES, ou mesmo en manuais do Fisheries Training Programme da United Nations University.

Ao noso xuízo a forma en que se estiman estas ecuacións cuadráticas é de importancia capital á hora de establecer a fiabilidade dos resultados que ofrecen e ás consecuencias que permiten inferir. Por iso vaise demostrar ao longo deste capítulo que aplicar o método de estimación de mínimos cadrados (MC) pode non ser recomendable se asumimos que a biomasa preditora ou o esforzo pesqueiro son variables medidas con erros que poden ter unha variabilidade significativa. En particular, veremos que ao aplicar ese método de estimación a un modelo cuadrático coas especificacións que se propoñen neste capítulo, os estimadores MC non serán consistentes e mesmo poderá determinarse nalgúns casos o nesgo das estimacións que ofrecen.

Na sección 3.2 facemos unha proposta de formalización xeral dos modelos cuadráticos utilizando tres parámetros lle concedan certa flexibilidade. Na sección 3.3 deducimos as expresións que permitirían estimar eses parámetros co método de MC, para a

continuación demostrar no apartado 3.3.1 a aparición de nesgos atenuantes en dous dos estimadores cando supoñemos a información do regresor centrada no terceiro, e demostrar no apartado 3.3.2 que eses nesgos non dependen do tramo na función sobre o que se dispón de información.

Na sección 3.4 propoñemos o modelo cuadrático particular que se emprega habitualmente para representar a variación da biomasa, e que na terminoloxía econométrica se considera un tipo de modelo non linear só nas variables. No apartado 3.4.1 dedúcense os estimadores MC do modelo latente correspondente, para pasar a analizar as propiedades que terían eses estimadores cando se asume a existencia de erros de medida no regresor centrado nun punto moi particular, nos apartados 3.4.2 e 3.4.3. E continuaremos no apartado 3.4.4 coa análise das propiedades dos estimadores MC cando a información sobre o regresor está centrada en calquera outro punto do tramo de valores razoables do mesmo.

Finalmente, na sección 3.5 exporemos as implicacións que se poden derivar da utilización dun método de estimación sobre o modelo GSM que resulte pouco axeitado, e as consecuencias económicas que previsiblemente tería.

3.2 Modelos cuadráticos na xestión de recursos pesqueiros: unha proposta de formalización

Na sección 2.2 do Capítulo 2 destacou a importancia da función loxística para representar o crecemento da biomasa dun recurso pesqueiro no modelo de Gordon-Schaefer, e como a dita función acaba formalizándose mediante unha expresión cuadrática. Neste Capítulo 3 analizamos cales son as consecuencias que se derivan de estimar ese tipo de expresións co método de mínimos cadrados, se non se ten en conta a posibilidade de que existan erros na variable explicativa do mesmo.

Para facer máis intelixibles esas consecuencias, comezamos propoñendo unha formalización moi xeral dos modelos cuadráticos, de tal xeito que a utilizada no modelo de Gordon-Schaefer pode considerarse un caso particular, que se analizará polo miúdo máis

adiante. Os supostos de partida máis relevantes neste contexto serían os seguintes:

Hipótese 3.1: No modelo latente a variable explicada depende dun único regresor e esa relación recóllese cunha función matemática cuadrática con 3 parámetros.

Hipótese 3.2: A diferenza entre cada un dos valores observados da variable explicada (que se representa mediante y_t) e o valor verdadeiro correspondente recóllese cunha variable aleatoria (ou perturbación, ξ_t) que ten distribución normal de probabilidade.

Hipótese 3.3: A diferenza entre un dos valores observados da variable explicativa (representada con x_t) e o valor latente correspondente, recóllese cunha variable aleatoria (denominada erro de medida e representada mediante e_t) que ten distribución normal de probabilidade, e que é independente das perturbacións.

Hipótese 3.4a¹: Non se establece ningún suposto explícito en canto á distribución de probabilidade do regresor latente, polo que na terminoloxía dos modelos con erros nas variable se trataría dun modelo funcional.

O modelo latente que relaciona as dúas variables ao que se refire a Hipótese 3.1 decidimos formalizalo dun xeito algo particular, co obxectivo de que cada un dos tres parámetros puidese ser interpretado inmediatamente de forma intuitiva. Por iso propónse a expresión,

$$Y_t = \beta_0 - \frac{\beta_1}{2}(\chi_t - \beta_2)^2 \quad (3.1)$$

onde $\beta_1 > 0$. Y_t representa o valor verdadeiro ou latente da variable explicada nun momento de tempo t , e χ_t o valor latente do regresor no mesmo momento t .

¹ A Hipótese 3.4a será reformulada máis adiante nas Hipóteses 3.4b e 3.4c nas seccións 3.3.1.1 e 3.3.2.1 respectivamente. Véxanse as páxinas 90 e 104, respectivamente.

Na Figura 3.1 representase este tipo de función e destácase o papel que representan dous dos parámetros, β_0 e β_2 .

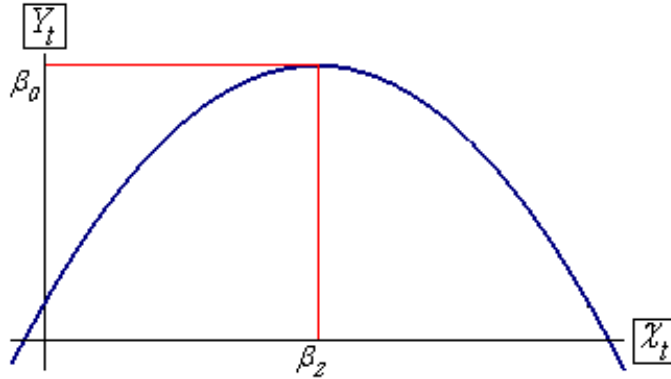


Figura 3.1. Modelo cuadrático con tres parámetros.

Os coeficientes β_0 , β_1 e β_2 expresan as seguintes peculiaridades da función:

- β_0 recolle o máximo valor que se admite que podería tomar a variable explicada;
- β_1 indica o maior ou menor grao de curvatura da función, dado que $\beta_1 = -\frac{\partial^2 Y_t}{\partial X_t^2}$ mide a súa concavidade;
- β_2 expresa o valor do regresor que se corresponde co valor máximo da variable explicada.

As Hipóteses 3.2 e 3.3 sobre as distribucións de probabilidade dos erros e das perturbacións se recollerían nas seguintes expresións

$$y_t = Y_t + \xi_t \quad (3.2)$$

$$x_t = \chi_t + e_t \quad (3.3)$$

e

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_T \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_T \end{pmatrix} \xrightarrow{s.d.} NID \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_e^2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_e^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_\xi^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_\xi^2 \end{pmatrix} \right]. \quad (3.4)$$

Por outro lado, a densidade de probabilidade conxunta das variables observables (y_t, x_t) ilústrase na Figura 3.2

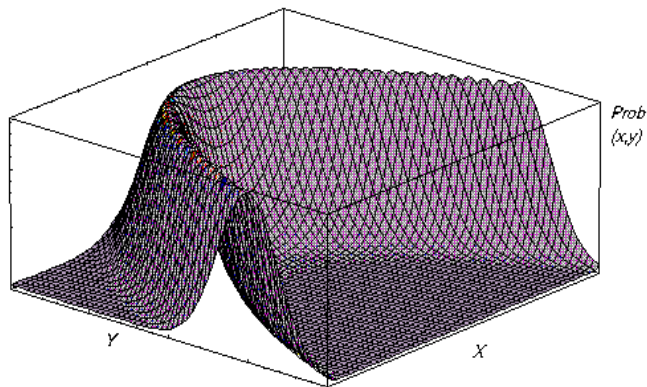


Figura 3.2. Densidade conxunta de (y_t, x_t) .

3.3 A estimación do modelo cuadrático xeral co método de mínimos cadrados (MC)

Cando se estima o modelo (3.1) utilizando o método de mínimos cadrados, tratase de atopar a seguinte relación

$$\hat{y}_t = b_0 - \frac{b_1}{2} (x_t - b_2)^2, \quad (3.5)$$

onde $b_1 > 0$, a partir da minimización da expresión

$$SCE = \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t)^2 = \sum_{t=1}^T \left[y_t - \hat{\beta}_0 + \frac{\hat{\beta}_1}{2} (x_t - \hat{\beta}_2)^2 \right]^2, \quad (3.6)$$

onde $\hat{\beta}_1 > 0$.

Do proceso de minimización de (3.6) resultan as seguintes expresións:

$$\frac{\partial SCE}{\partial \hat{\beta}_0} = -2 \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t) = -2 \sum_{t=1}^T \left[y_t - \hat{\beta}_0 + \frac{\hat{\beta}_1}{2} (x_t - \hat{\beta}_2)^2 \right], \quad (3.7a)$$

$$\frac{\partial SCE}{\partial \hat{\beta}_1} = \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t) (x_t - \hat{\beta}_2)^2 = \sum_{t=1}^T \left[y_t - \hat{\beta}_0 + \frac{\hat{\beta}_1}{2} (x_t - \hat{\beta}_2)^2 \right] (x_t - \hat{\beta}_2)^2 \quad (3.7b)$$

e

$$\frac{\partial SCE}{\partial \hat{\beta}_2} = -2 \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t) (x_t - \hat{\beta}_2) = -2 \sum_{t=1}^T \left[y_t - \hat{\beta}_0 + \frac{\hat{\beta}_1}{2} (x_t - \hat{\beta}_2)^2 \right] (x_t - \hat{\beta}_2). \quad (3.7c)$$

A matriz hessiana correspondente é:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 SCE}{\partial \hat{\beta}_0^2} & \frac{\partial^2 SCE}{\partial \hat{\beta}_0 \partial \hat{\beta}_1} & \frac{\partial^2 SCE}{\partial \hat{\beta}_0 \partial \hat{\beta}_2} \\ \dots & \frac{\partial^2 SCE}{\partial \hat{\beta}_1^2} & \frac{\partial^2 SCE}{\partial \hat{\beta}_1 \partial \hat{\beta}_2} \\ \dots & \dots & \frac{\partial^2 SCE}{\partial \hat{\beta}_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2T & -\sum_{t=1}^T (x_t - \hat{\beta}_2)^2 & 2\hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^T (x_t - \hat{\beta}_2) \\ \dots & \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (x_t - \hat{\beta}_2)^4 & -\hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^T (x_t - \hat{\beta}_2)^3 \\ \dots & \dots & 2\hat{\beta}_1^2 \sum_{t=1}^T (x_t - \hat{\beta}_2)^2 \end{pmatrix}.$$

(3.7d)

Como é sabido, a solución pasa por anular as expresións (3.7a), (3.7b) e (3.7c); isto é

$$\frac{\partial SCE}{\partial \hat{\beta}_0} = 0 \Rightarrow \sum_{t=1}^T \left[y_t - b_0 + \frac{b_1}{2} (x_t - b_2)^2 \right] = 0, \quad (3.8a)$$

$$\frac{\partial SCE}{\partial \hat{\beta}_1} = 0 \Rightarrow \sum_{t=1}^T \left[y_t - b_0 + \frac{b_1}{2} (x_t - b_2)^2 \right] (x_t - b_2) = 0 \quad (3.8b)$$

e

$$\frac{\partial SCE}{\partial \hat{\beta}_2} = 0 \Rightarrow \sum_{t=1}^T \left[y_t - b_0 + \frac{b_1}{2} (x_t - b_2)^2 \right] (x_t - b_2) = 0. \quad (3.8c)$$

Considerando (3.8a), concluímos

$$\sum_{t=1}^T y_t = T \cdot b_0 - \frac{b_1}{2} \sum_{t=1}^T (x_t - b_2)^2 \Rightarrow \bar{y} = b_0 - \frac{b_1}{2} \frac{\sum_{t=1}^T (x_t - b_2)^2}{T} \quad (3.9)$$

e tamén

$$\begin{aligned}\bar{y} &= b_0 - \frac{b_1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{[(x_t - \bar{x}) + (\bar{x} - b_2)]^2}{T} \\ &= b_0 - \frac{b_1}{2} [\hat{v}_x + (\bar{x} - b_2)^2],\end{aligned}\tag{3.10}$$

onde \bar{y} representa a media mostral da variable explicada observada, \bar{x} a media mostral do regresor observado e \hat{v}_x a varianza mostral do mesmo.

Para aclarar a influencia das hipóteses que implican simetría en erros, perturbacións e regresores sobre a estimación deste modelo, presentamos de seguido un caso particular que sirva como punto de referencia. Este consiste en supoñer que a información observable sobre a variable explicativa está centrada no valor do mesmo que maximiza o valor da variable explicada. Deste xeito, dentro do problema que supón non dispoñer dos valores verdadeiros do regresor latente, esa situación pode considerarse a ‘menos mala’. Pero a continuación se demostra que, aínda así, o método MC proporciona estimadores que non cumpren a propiedade de consistencia.

3.3.1. Consistencia dos estimadores de mínimos cadrados con información do regresor centrada no parámetro β_2

3.3.1.1. Disposición simétrica da información

Baixo as hipóteses de normalidade, cando a mostra tenda a infinito, as observacións das variables do modelo tenderán a disporse xeometricamente arredor do modelo latente de xeito similar ao representado nas Figuras 3.3 e 3.4, e no límite esa disposición sería perfectamente simétrica.

Na Figura 3.3 ilústrase a disposición dos pares de valores observables das variables do modelo, representados con puntos de cor vermella, en relación aos valores latentes debuxados na liña continua de cor turquesa, no caso de que a variable explicada latente puidera observarse directamente sen erros:

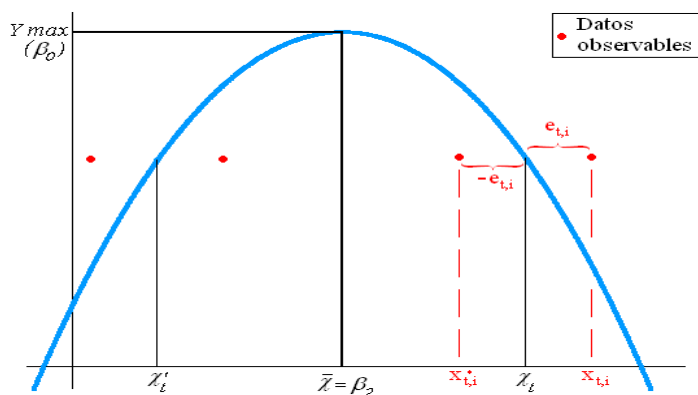


Figura 3.3. Función cuadrática latente e pares (Y_t, x_t) .

De igual xeito na Figura 3.4, preséntase a disposición dos pares de valores observables das variables do modelo cando estean tamén presentes perturbacións no regresando:

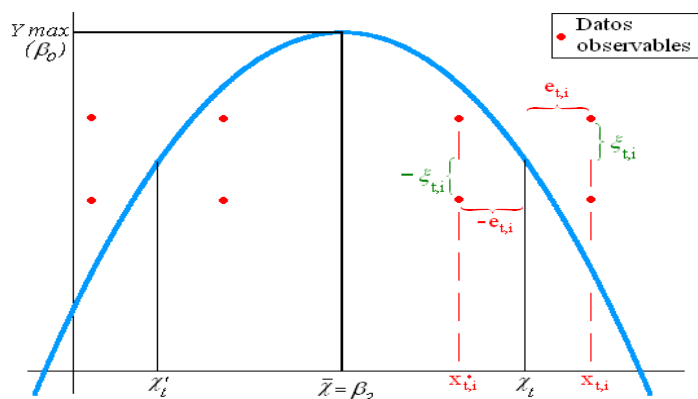


Figura 3.4. Función cuadrática latente e pares (y_t, x_t) .

Entón, as propiedades dos estimadores MC nun modelo deste tipo con información simétrica, tamén as cumprirán no límite se admitimos a hipótese de normalidade.

Hipótese 3.4b: A información dispoñible sobre a variable explicativa está disposta de xeito simétrico en torno ao punto no que a función acada o seu máximo; é dicir que se existe información con erros en torno ao punto $\chi_t = \bar{\chi} + s_t$, entón tamén existe un bloque de información con erros en torno ao punto $\chi_t' = \bar{\chi} - s_t$.

3.3.1.2. Propiedades das mostras de observacións con disposición simétrica

Chegados a este punto é conveniente facer un inciso para indicar algunhas propiedades dos momentos centrados de variables con distribución simétrica, que será necesario ter en conta en vindeiras demostracións cando se utilicen propiedades do comportamento no límite de variables con distribución normal.

Dadas tres variables N_t , P_t e Q_t con unha distribución simétrica respecto das súas respectivas medias \bar{N} , \bar{P} e \bar{Q} , con varianzas respectivas \hat{v}_N , \hat{v}_P e \hat{v}_Q , e que están incorreladas, entón anuláanse os momentos centrados cruzados entre elas con algún expoñente positivo impar, se esgotamos toda a información. É dicir:

Propiedade I: Coa condición suficiente de que n ou p ou q sexan un número enteiro positivo impar entón

$$\sum_{t=1}^T (N_t - \bar{N})^n \cdot (P_t - \bar{P})^p \cdot (Q_t - \bar{Q})^q = 0. \quad (3.11)$$

Propiedade II:

$$\sum_{t=1}^T (N_t - \bar{N})^2 \cdot (P_t - \bar{P})^2 = T \cdot \hat{v}_N \cdot \hat{v}_P. \quad (3.12)$$

Por outro lado, se asumimos que a variable N_t segue unha distribución normal de probabilidade,

$$N_t \rightarrow Normal(\bar{N}, \sigma_N^2), \quad (3.13a)$$

entón unha mostra suficientemente grande da variable N_t cumpre as seguintes cinco propiedades:

Propiedade III:

$$\sum_{t=1}^T N_t \approx T \cdot \bar{N}. \quad (3.13b)$$

Propiedade IV:

$$\sum_{t=1}^T (N_t - \bar{N}) \approx 0. \quad (3.13c)$$

Propiedade V:

$$\sum_{t=1}^T (N_t - \bar{N})^2 \approx T \cdot \hat{v}_N^2. \quad (3.13d)$$

Propiedade VI:

$$\sum_{t=1}^T (N_t - \bar{N})^3 \approx 0. \quad (3.13e)$$

Propiedade VII:

$$\sum_{t=1}^T (N_t - \bar{N})^4 \approx T \cdot 3 \cdot \hat{v}_N^4. \quad (3.13f)$$

3.3.1.3. Consistencia do estimador b_1

Cos supostos que se estableceron nas páxinas precedentes e que se ilustraron coas Figuras 3.3 e 3.4, cumprírase

$$\frac{\chi_t + \chi_t'}{2} = \bar{\chi}, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \sum_{t=1}^T \frac{x_t}{T} \\ &= \sum_{t=1}^T \frac{\chi_t + e_t}{T} \\ &= \sum_{t=1}^T \frac{\chi_t}{T}, \\ &= \bar{\chi} \\ &= \beta_2 \end{aligned} \quad (3.15a)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \sum_{t=1}^T \frac{y_t}{T} \\ &= \sum_{t=1}^T \frac{Y_t + \xi_t}{T} \\ &= \sum_{t=1}^T \frac{Y_t}{T} \\ &= \bar{Y}, \end{aligned} \quad (3.15b)$$

polo que obviamente o mellor estimador do parámetro β_2 vai ser a media mostral do

regresor, é dicir,

$$b_2 = \bar{x} . \quad (3.16)$$

En consecuencia, o sistema de ecuacións (3.8a)-(3.8c) queda agora

$$\frac{\partial SCE}{\partial \hat{\beta}_0} = 0 \Rightarrow \sum_{t=1}^T \left[y_t - b_0 + \frac{b_1}{2} (x_t - \bar{x})^2 \right] = 0 \quad (3.17a)$$

$$\frac{\partial SCE}{\partial \hat{\beta}_1} = 0 \Rightarrow \sum_{t=1}^T \left[y_t - b_0 + \frac{b_1}{2} (x_t - \bar{x})^2 \right] (x_t - \bar{x})^2 = 0 \quad (3.17b)$$

$$\frac{\partial SCE}{\partial \hat{\beta}_2} = 0 \Rightarrow \sum_{t=1}^T \left[y_t - b_0 + \frac{b_1}{2} (x_t - \bar{x})^2 \right] (x_t - \bar{x}) = 0, \quad (3.17c)$$

e a matriz hessiana correspondente é a dada por:

$$\begin{pmatrix} 2T & -\sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2 & 2b_1 \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x}) \\ \dots & \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^4 & -b_1 \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^3 \\ \dots & \dots & 2b_1^2 \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2T & -T \cdot \hat{v}_x & 0 \\ \dots & \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^4 & 0 \\ \dots & \dots & 2T b_1^2 \cdot \hat{v}_x \end{pmatrix}, \quad (3.17d)$$

que evidentemente é definida positiva coa única condición de que os elementos da diagonal principal non sexan nulos, garantíndose con elo que os estimadores que resolven as ecuacións (3.17a), (3.17b) e (3.17c) fan mínima a función obxectivo.

Antes de continuar con posteriores demostracións abramos unha paréntese para

propoñer as dúas seguintes definicións:

Definición 1. A desviación do regresor observado respecto da súa media defínese como

$$d_t = x_t - \bar{x} . \quad (3.18a)$$

Definición 2. A desviación do regresor latente respecto da súa media ven dado por

$$D_t = \chi_t - \bar{\chi} . \quad (3.18b)$$

A vinculación entre ambas despréndese tendo en conta por un lado a igualdade (3.3) que relaciona o regresor observable, o regresor latente e os erros de medida e , polo outro, a parte da expresión (3.4) na que se asume que os erros teñen esperanza nula, obtendo así

$$\begin{aligned} d_t &= \chi_t + e_t - \bar{\chi} \\ &= D_t + e_t \end{aligned} \quad (3.19a)$$

e

$$d_t^2 = D_t^2 + 2D_t e_t + e_t^2 . \quad (3.19b)$$

Isto significa que

$$\sum_{t=1}^T d_t^2 = \sum_{t=1}^T D_t^2 + 2 \sum_{t=1}^T D_t e_t + \sum_{t=1}^T e_t^2 , \quad (3.20)$$

e, asumindo as hipóteses de simetría e de incorrelación do regresor latente cos erros de medida, unha mostra suficientemente grande cumpre

$$\hat{v}_x \approx \hat{v}_\chi + \hat{v}_e . \quad (3.21)$$

Por outro lado as Propiedades I-VII, enunciadas anteriormente, cúmprense aquí polo que en adiante debemos ter en conta que

$$\sum_{t=1}^T d_t^i \approx 0 \quad (3.22a)$$

cando i é un enteiro positivo impar, e

$$\sum_{t=1}^T D_t^j \approx 0 \quad (3.22b)$$

cando j é un enteiro positivo impar.

Da expresión (3.17a) dedúcese que para obter o estimador b_0 é suficiente con calcular previamente o estimador b_1 , e utilizar a información observable das variables, en termos da media aritmética do regresando e da varianza estimada do regresor, pois

$$\begin{aligned} \bar{y} &= b_0 - \frac{b_1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{d_t^2}{T} \\ &\approx b_0 - \frac{b_1}{2} \cdot \hat{v}_x, \end{aligned} \quad (3.23)$$

e

$$b_0 \approx \bar{y} + \frac{b_1}{2} \cdot \hat{v}_x. \quad (3.24)$$

Con ese resultado, a expresión (3.17c) convértese en

$$\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y}) d_t \approx -\frac{b_1}{2} \sum_{t=1}^T d_t^3 + \frac{b_1 \hat{v}_x}{2} \sum_{t=1}^T d_t, \quad (3.25)$$

permitindo así confirmar que a variable dependente e o regresor estarán incorrelados xa que o lado dereito da igualdade (3.25) anúlase por (3.22a).

Ademais, a igualdade (3.17b) queda reducida a

$$\sum_{t=1}^T \left[y_t - \left(\bar{y} + \frac{b_1 \hat{v}_x}{2} \right) + \frac{b_1}{2} d_t^2 \right] d_t^2 \approx 0 \quad (3.26)$$

ou, o que é o mesmo,

$$\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y}) d_t^2 \approx \frac{b_1 \hat{v}_x}{2} \sum_{t=1}^T d_t^2 - \frac{b_1}{2} \sum_{t=1}^T d_t^4, \quad (3.27)$$

é dicir,

$$\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y}) \cdot d_t^2 \approx -\frac{b_1}{2} \left(\sum_{t=1}^T d_t^4 - T \cdot \hat{v}_x^2 \right). \quad (3.28)$$

Finalmente, despexando en (3.28) é posible deducir a seguinte ecuación que expresa a dependencia explícita do estimador b_1 respecto dos valores observables das variables,

$$b_1 \approx -2 \cdot \frac{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y}) \cdot d_t^2}{\sum_{t=1}^T d_t^4 - T \cdot \hat{v}_x^2} \quad (3.29)$$

ou tamén

$$b_1 \approx -2 \cdot \frac{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y}) \cdot (d_t^2 - \bar{d}^2)}{\sum_{t=1}^T (d_t^2 - \bar{d}^2)^2}. \quad (3.30)$$

É dicir, b_1 é proporcional ao cociente entre a covarianza da variable explicada e as desviacións cadradas do regresor respecto da súa media, por un lado, e a varianza desas desviacións cadradas, polo outro.

É evidente que se non existisen erros nin perturbacións a expresión (3.29), tendo en conta (3.18b), transformárase en

$$\beta_1 \approx -2 \cdot \frac{\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y}) \cdot D_t^2}{\sum_{t=1}^T (D_t^2 - \bar{D}^2)^2}, \quad (3.31)$$

polo que xa só resta atopar unha relación entre as expresións (3.29) e (3.31).

Para atopar esta relación lembramos a igualdade (3.2) que relaciona o regresando observable, o regresando latente e as perturbacións, consideramos tamén a parte da expresión (3.4) na que se asume que as perturbacións teñen esperanza nula, e substituímos (3.20) e (3.21) en (3.29). De todo elo resulta

$$b_1 \approx -2 \cdot \frac{\sum_{t=1}^T (Y_t + \zeta_t - \bar{Y}) \cdot (D_t^2 + 2D_t e_t + e_t^2)}{\sum_{t=1}^T (D_t^2 + 2D_t e_t + e_t^2 - \bar{D}^2 - \hat{v}_e)^2}, \quad (3.32)$$

ou, alternativamente,

$$b_1 \approx -2 \cdot \frac{\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y}) \cdot (D_t^2 + 2D_t e_t + e_t^2) + \sum_{t=1}^T \xi_t \cdot (D_t^2 + 2D_t e_t + e_t^2)}{\sum_{t=1}^T [(D_t^2 - \bar{D}^2) + (e_t^2 - \hat{v}_e) + 2D_t e_t]^2}. \quad (3.33)$$

No lado dereito de (3.33) pódese simplificar o primeiro agregado de produtos do numerador. En efecto, considerando (3.1) e (3.23) chegamos a

$$\begin{aligned} (Y_t - \bar{Y}) &\approx \left(\beta_0 - \frac{\beta_1}{2} D_t^2 \right) - \left(\beta_0 - \frac{\beta_1}{2} \hat{v}_x \right), \\ &\approx -\frac{\beta_1}{2} (D_t^2 - \hat{v}_x), \end{aligned} \quad (3.34)$$

o que permite utilizar a Propiedade I dos momentos cruzados de (3.11) para concluír que

$$\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y}) \cdot 2D_t e_t + \sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y}) \cdot e_t^2 \approx 0, \quad (3.35)$$

que xunto coa nulidade do segundo agregado de produtos do numerador de (3.33), virtude tamén da Propiedade I,

$$\sum_{t=1}^T \xi_t \cdot (D_t^2 + 2 \cdot D_t \cdot e_t + e_t^2) \approx 0 \quad (3.36)$$

permite concluír finalmente que o único termo que non se anula no numerador de (3.33) é

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y}) \cdot D_t^2 &\approx \sum_{t=1}^T \left[-\frac{\beta_1}{2} (D_t^2 - \hat{v}_x) \right] \cdot D_t^2 \\ &\approx -\frac{\beta_1}{2} \sum_{t=1}^T (D_t^4 - \hat{v}_x \cdot D_t^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\approx -\frac{\beta_1}{2} \left(\sum_{t=1}^T D_t^4 - \hat{v}_\chi \cdot \sum_{t=1}^T D_t^2 \right) \\
 &\approx -\frac{\beta_1}{2} (T \cdot 3 \hat{v}_\chi^2 - T \hat{v}_\chi^2) \\
 &\approx -\beta_1 \cdot T \hat{v}_\chi^2
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Por outra parte, a análise do denominador do lado dereito de (3.33) esixe detallar os seis sumandos das ecuacións (3.38a)-(3.38f) que se expoñen de seguido. Tendo en conta a Propiedade VII establecida en (3.13f) resulta, en primeiro lugar,

$$\begin{aligned}
 \sum_{t=1}^T (D_t^2 - \bar{D}^2)^2 &\approx \sum_{t=1}^T \left[(\chi_t - \bar{\chi})^2 - \hat{v}_\chi \right]^2 \\
 &\approx \sum_{t=1}^T (\chi_t - \bar{\chi})^4 - T \hat{v}_\chi^2 \\
 &\approx 3T \hat{v}_\chi^2 - T \hat{v}_\chi^2 \\
 &\approx 2 \cdot T \hat{v}_\chi^2,
 \end{aligned} \tag{3.38a}$$

en segundo lugar,

$$\begin{aligned}
 \sum_{t=1}^T (e_t^2 - \hat{v}_e)^2 &\approx \sum_{t=1}^T e_t^4 - T \hat{v}_e^2 \\
 &\approx 3T \hat{v}_e^2 - T \hat{v}_e^2 \\
 &\approx 2 \cdot T \hat{v}_e^2,
 \end{aligned} \tag{3.38b}$$

e para os restantes catro sumandos, considerando as Propiedades I e II establecidas en (3.11) e (3.12), respectivamente, resulta

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^T (2D_t e_t)^2 &= 4 \sum_{t=1}^T D_t^2 e_t^2 \\ &\approx 4 \cdot T \cdot \hat{v}_\chi \cdot \hat{v}_e,\end{aligned}\tag{3.38c}$$

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^T 2(D_t^2 - \bar{D}^2)(e_t^2 - \hat{v}_e) &\approx \sum_{t=1}^T 2[(\chi_t - \bar{\chi})^2 - \hat{v}_\chi](e_t^2 - \hat{v}_e) \\ &\approx 0,\end{aligned}\tag{3.38d}$$

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^T 4(D_t^2 - \bar{D}^2)D_t e_t &\approx 4 \sum_{t=1}^T D_t^3 e_t - 4\bar{D}^2 \sum_{t=1}^T D_t e_t \\ &\approx 0,\end{aligned}\tag{3.38e}$$

e

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^T 4(e_t^2 - \hat{v}_e)D_t e_t &\approx 4 \sum_{t=1}^T e_t^3 D_t - 4\hat{v}_e \sum_{t=1}^T D_t e_t \\ &\approx 0.\end{aligned}\tag{3.38f}$$

Entón o denominador de (3.33) redúcese a

$$2 \cdot T \cdot \hat{v}_\chi^2 + 2 \cdot T \cdot \hat{v}_e^2 + 4 \cdot T \cdot \hat{v}_\chi \cdot \hat{v}_e\tag{3.39a}$$

ou ben

$$2 \cdot T \cdot (\hat{v}_\chi + \hat{v}_e)^2,\tag{3.39b}$$

o cal permite concluír que a expresión final que demostra a relación entre o estimador e o

parámetro que trata de estimar é

$$\begin{aligned} b_1 &\approx -2 \cdot \frac{(-\beta_1 \cdot T \cdot \hat{v}_x^2)}{2 \cdot T \cdot (\hat{v}_x + \hat{v}_e)^2} \\ &\approx \beta_1 \frac{\hat{v}_x^2}{(\hat{v}_x + \hat{v}_e)^2}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Demóstrase deste xeito que o estimador mínimo cuadrático do parámetro que representa o grao de curvatura da función cuadrática da presente sección, presentará un nesgo atenuante cando a información de que se dispoña cumpra as condicións expresadas con anterioridade. E isto sucederá, por exemplo, cando o número de observacións tenda a infinito e as distribucións do regresor e dos erros tendan a ser simétricas. É dicir, que este estimador non será consistente, de xeito similar ao que acontece co estimador de mínimos cadrados do coeficiente angular dun modelo de regresión linear con erros no regresor, tal como demostrou Gini (1921). En consecuencia, propoñemos os resultados establecidos nas dúas seguintes proposicións:

Proposición 3.1. *O estimador de mínimos cadrados do parámetro β_1 do modelo definido en (3.1) non é consistente cando existen erros de medida no regresor observable, nin sequera na situación máis favorable na que as observacións dese regresor estean distribuídas de xeito simétrico en torno ao punto no que a función acada o seu máximo.*

Proposición 3.2. *Baixo as Hipóteses 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4b, o estimador ao que fai referencia a Proposición 3.1 presenta un nesgo atenuante dado polo cociente entre o cadrado da varianza do regresor latente e o cadrado da suma de varianzas do regresor latente e do erro de medida.*

3.3.1.4. Consistencia do estimador b_0

O comportamento do estimador b_0 no contexto de información sobre o regresor centrada no parámetro β_2 , dedúcese doadamente tendo en conta dous aspectos. Por un lado que a media da variable dependente observable coincide coa media da variable latente correspondente como se demostrou en (3.15b). Por outro lado, se non existen erros de medida, as expresións (3.23) e (3.24) quedarían

$$\beta_0 \approx \bar{Y} + \frac{\beta_1}{2} \cdot \hat{v}_x \quad (3.41)$$

e

$$\bar{Y} \approx \beta_0 - \frac{\beta_1}{2} \cdot \hat{v}_x, \quad (3.42)$$

respectivamente. Entón substituíndo sucesivamente na expresión (3.24), as igualdades (3.15b), (3.42), (3.40) e (3.21), temos

$$\begin{aligned} b_0 &\approx \left(\beta_0 - \frac{\beta_1}{2} \cdot \hat{v}_x \right) + \frac{b_1}{2} \cdot \hat{v}_x \\ &\approx \left(\beta_0 - \frac{\beta_1}{2} \cdot \hat{v}_x \right) + \frac{\beta_1}{2} \cdot \frac{\hat{v}_x^2}{(\hat{v}_x + \hat{v}_e)^2} \cdot \hat{v}_x, \end{aligned} \quad (3.43)$$

expresión que se pode simplificar de modo que

$$b_0 \approx \beta_0 - \frac{\beta_1}{2} \cdot \hat{v}_x \cdot \left[1 - \frac{\hat{v}_x^2}{(\hat{v}_x + \hat{v}_e)^2} \right]. \quad (3.44)$$

Tendo en conta que o parámetro β_1 é positivo por definición do modelo (3.1), a varianza \hat{v}_x tamén é sempre positiva e o termo entre corchetes tamén é sempre positivo, podemos enunciarse o seguinte resultado.

Proposición 3.3. *Baixo as Hipóteses 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4b, o estimador de mínimos cadrados do parámetro β_0 da función (3.1) presenta un nesgo atenuante. A magnitude dese nesgo é maior ou menor segundo o grao da curvatura desa función, medida co parámetro β_1 , e as varianzas do regresor latente e do erro de medida.*

Nos seguintes gráficos trátase de ilustrar o contido das anteriores proposicións. A Figura 3.5a representa unha función cuadrática coa relación entre as variables latentes. A Figura 3.5b permite apreciar como estarían dispostos xeometricamente nun plano os valores observables das variables (en cor verde), coa hipótese de simetría e se unicamente hai erros no regresor. Por último, a Figura 3.5c representa tanto a nube de puntos mostral (en cor azul celeste) cando engadimos as perturbacións da variable explicada, como a ecuación cuadrática que resultaría estimada (en cor azul mariño) utilizando o método de mínimos cadrados.

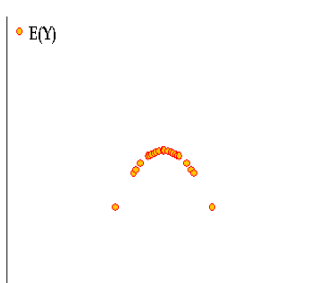


Figura 3.5a. Función latente

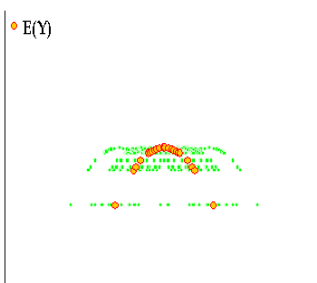


Figura 3.5b. Valores observables

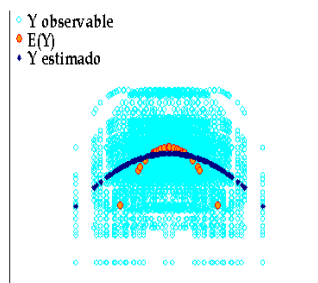


Figura 3.5c. Estimación MC

3.3.2. *Consistencia dos estimadores de mínimos cadrados con información do regresor non centrada no parámetro β_2*

Na estimación de modelos non lineais con erros no regresor resulta de especial relevancia, tal como se indicou no Capítulo 2, sobre qué tramo concreto da función se ten información observable. Por iso na anterior sección 3.3.1 analizouse o que pode interpretarse como a situación máis favorable no tipo de modelos cuadráticos con erros de medida. Na presente sección se completan os resultados da sección 3.3.1 establecendo o suposto de que as observacións do regresor están dispostas arredor de outro punto calquera da función que non ten por que ser necesariamente o punto no que esta acada o seu máximo valor.

3.3.2.1. Disposición simétrica da información

Nesta sección retomamos o modelo xeral exposto nas ecuacións (3.1)-(3.4) cuxa estimación polo método MC permitiu definir as igualdades (3.5)-(3.10), asumimos as Hipóteses 3.1-3.3 e reformulamos a Hipótese 3.4b da sección 3.3.1.1.

Hipótese 4c: A información dispoñible sobre o regresor está disposta de xeito simétrico.

Nestas condicións pasamos a analizar en primeiro lugar a consistencia do estimador b_1 , e a continuación a dos estimadores b_2 e b_0 que dependen del.

3.3.2.2. Consistencia do estimador b_1

Asumindo as Hipóteses 3.1-3.3 e 3.4c as expresións (3.8a), (3.8b) e (3.8c) poden representarse, respectivamente, como

$$\sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}) = 0, \quad (3.45a)$$

$$\sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}) [(x_t - \bar{x}) + (\bar{x} - b_2)]^2 = 0 \quad (3.45b)$$

e

$$\sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}) [(x_t - \bar{x}) + (\bar{x} - b_2)] = 0. \quad (3.45c)$$

O agregado da esquerda de (3.45c) pode reescribirse como

$$\sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y})(x_t - \bar{x}) + (\bar{x} - b_2) \left[\sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}) \right], \quad (3.46)$$

o cal, tendo en conta (3.45a), convértese en

$$\sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y})(x_t - \bar{x}) = 0. \quad (3.47)$$

Finalmente, desenvolvendo (3.45b) e utilizando as igualdades (3.45a) e (3.47) quedará

$$\sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y})(x_t - \bar{x})^2 = 0. \quad (3.48)$$

Co obxecto de atopar expresións explícitas dos estimadores b_0 , b_1 e b_2 , comezamos por lembrar que de (3.10) podemos obter

$$b_0 = \bar{y} + \frac{b_1}{2} \left[\hat{v}_x + (\bar{x} - b_2)^2 \right] \quad (3.49)$$

e que en (3.18a) definimos d_t como as desviacións do regresor observable respecto da súa media. Polo tanto a igualdade (3.48) pódese escribir como

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T \left[y_t - b_0 + \frac{b_1}{2} (x_t - b_2)^2 \right] d_t^2 &= \sum_{t=1}^T \left[y_t - \bar{y} - \frac{b_1}{2} \left[\hat{v}_x + (\bar{x} - b_2)^2 \right] + \frac{b_1}{2} (x_t - b_2)^2 \right] d_t^2 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

ou

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y}) d_t^2 &= -\frac{b_1}{2} \sum_{t=1}^T \left[(x_t - b_2)^2 - \hat{v}_x - (\bar{x} - b_2)^2 \right] d_t^2 \\ &= -\frac{b_1}{2} \sum_{t=1}^T \left[(x_t - \bar{x} + \bar{x} - b_2)^2 - \hat{v}_x - (\bar{x} - b_2)^2 \right] d_t^2 \\ &= -\frac{b_1}{2} \sum_{t=1}^T \left[d_t^2 + 2d_t (\bar{x} - b_2) - \hat{v}_x \right] d_t^2. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Finalmente basta ter presente a socorrida Propiedade I de (3.11) que no límite cumpren as mostras de variables con distribucións simétricas, para concluír que

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y}) d_t^2 &\approx -\frac{b_1}{2} \sum_{t=1}^T (d_t^4 - \hat{v}_x d_t^2) \\ &\approx -\frac{b_1}{2} \left[\left(\sum_{t=1}^T d_t^4 \right) - T \hat{v}_x^2 \right] \end{aligned} \quad (3.52)$$

é dicir,

$$b_1 \approx -2 \cdot \frac{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y}) d_t^2}{\sum_{t=1}^T (d_t^2 - \bar{d}^2)^2}, \quad (3.53)$$

que ven a coincidir coa expresión (3.29) da sección 3.3.1.3 na que se supoñía que a información observable do regresor estaba centrada arredor do valor deste onde a función acadada o máximo. Por iso a relación que se expuxo en (3.40) entre este estimador e o seu correspondente parámetro segue a manterse. Isto permítenos formular o seguinte resultado.

Proposición 3.4. *Baixo as Hipóteses 3.1-3.3 e 3.4c, o nesgo que presenta no límite o estimador de mínimos cadrados do parámetro β_1 do modelo conformado polas expresións (3.1)-(3.3), e cuxa magnitude foi establecida na Proposición 3.2, non depende do tramo da función sobre o que se dispoña de información. Só depende do suposto de simetría do regresor e dos cadrados das varianzas do regresor latente e dos erros.*

3.3.2.3. Consistencia do estimador b_2

Seguindo o mesmo procedemento de substitucións pero agora sobre a igualdade (3.48), obteríamos unha expresión equivalente a (3.52) pero sen que o último elemento entre parénteses estea elevado ao cadrado; é dicir,

$$\begin{aligned}
 \sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})(x_t - \bar{x}) &\approx -\frac{b_1}{2} \sum_{t=1}^T \left[(x_t - \bar{x})^2 + 2(x_t - \bar{x})(\bar{x} - b_2) - \hat{v}_x \right] (x_t - \bar{x}) \\
 &\approx -\frac{b_1}{2} \left[\sum_{t=1}^T d_t^3 + \sum_{t=1}^T 2(\bar{x} - b_2) d_t^2 - \sum_{t=1}^T \hat{v}_x d_t \right], \\
 &\approx -\frac{b_1}{2} \sum_{t=1}^T \left[2d_t^2 (\bar{x} - b_2) \right] \\
 &\approx -b_1 \cdot (\bar{x} - b_2) \cdot \sum_{t=1}^T d_t^2 \tag{3.54}
 \end{aligned}$$

posto que se anulan dous dos sumandos en virtude das propiedades de simetría establecidas

en (3.13b)-(3.13f). Despexando obtense

$$\begin{aligned}
 b_2 &\approx \bar{x} + \frac{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y}) d_t}{b_1 \cdot \sum_{t=1}^T d_t^2} \\
 &\approx \bar{x} + \frac{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y}) d_t}{b_1 \cdot T \cdot \hat{v}_x}.
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Finalmente, tendo en conta (3.53), podemos obter unha expresión para o estimador b_2 que dependa explicitamente das observacións das variables:

$$b_2 \approx \bar{x} - \frac{\left[\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y}) d_t \right] \cdot \left[\sum_{t=1}^T (d_t^2 - \bar{d}^2)^2 \right]}{2 \cdot \left[\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y}) d_t^2 \right] \cdot \left(\sum_{t=1}^T d_t^2 \right)}. \tag{3.56}$$

Por outro lado, tratando de buscar a relación deste estimador co parámetro que trata de aproximar, β_2 , notemos que naturalmente no modelo latente a expresión equivalente a (3.55) será

$$\beta_2 \approx \bar{\chi} + \frac{\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y}) D_t}{\beta_1 \cdot T \cdot \hat{v}_\chi}. \tag{3.57}$$

Considerando por un lado a relación, xa comentada, entre a media da variable explicada observable e a media da latente correspondente indicada en (3.15b) e por outro lado (3.19a), o numerador do cociente do lado dereito de (3.55) equivale a

$$\begin{aligned}
 \sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y}) d_t &\approx \sum_{t=1}^T [(Y_t - \bar{Y}) + \xi_t] (D_t + e_t) \\
 &\approx \sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y}) (D_t + e_t) + \sum_{t=1}^T \xi_t (D_t + e_t) \\
 &\approx \sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y}) D_t + \sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y}) e_t + \sum_{t=1}^T \xi_t D_t + \sum_{t=1}^T \xi_t e_t \\
 &\approx \sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y}) D_t, \tag{3.58}
 \end{aligned}$$

dada a nulidade de tres dos sumandos.

Tendo en conta (3.58), así como a igualdade entre a media dos valores observables do regresor e a media dos seus valores latentes demostrada en (3.15a), a descomposición da varianza do regresor observable demostrada en (3.21), e a relación entre b_1 e o parámetro que estima, β_1 , indicada en (3.40), e substituíndoas en (3.55) chégase a

$$b_2 \approx \bar{\chi} + \frac{\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y}) D_t}{\beta_1 \frac{\hat{v}_\chi^2}{(\hat{v}_\chi + \hat{v}_e)^2} \cdot T \cdot (\hat{v}_\chi + \hat{v}_e)}. \tag{3.59}$$

Tan só queda retomar (3.57), expresar

$$\beta_2 - \bar{\chi} \approx \frac{\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y}) D_t}{\beta_1 \cdot T \cdot \hat{v}_\chi} \tag{3.60}$$

e substituír en (3.60), para concluír que

$$b_2 \approx \bar{\chi} + (\beta_2 - \bar{\chi}) \frac{\hat{v}_x + \hat{v}_e}{\hat{v}_x}. \quad (3.61)$$

En definitiva, queda así demostrado que a diferenza entre este estimador e o parámetro que trata de estimar será

$$b_2 - \beta_2 \approx (\bar{\chi} - \beta_2) \left(1 - \frac{\hat{v}_x + \hat{v}_e}{\hat{v}_x} \right). \quad (3.62)$$

E en consecuencia podemos afirmar que formalmente, obtemos o resultado que se enuncia na seguinte proposición.

Proposición 3.5. *Baixo as Hipóteses 3.1-3.3 e 3.4c, o estimador de mínimos cadrados do parámetro β_2 do modelo conformado polas expresións (3.1)-(3.3), presentará un nesgo positivo (negativo) se a media das observacións dispoñibles do regresor é menor (maior) que o valor do regresor latente que fai máxima a función cuadrática, e verase afectado polas varianzas do regresor latente e dos erro de medida.*

Este resultado interprétase dependendo de que a media das observacións do regresor sexa menor ou maior que o valor do regresor latente que fai máxima a función cuadrática. Se é menor, entón o estimador b_2 sobreestimarán ao parámetro que recolle, e se é maior o subestimarán.

3.3.2.4. Consistencia do estimador b_0

Para analizar que acontece co estimador que aproxima o valor máximo da función é útil ter en conta os resultados acadados para b_1 e b_2 . Así de (3.49) deducimos

$$\bar{y} \approx b_0 - \frac{b_1}{2} \left[\hat{v}_x + (\bar{x} - b_2)^2 \right], \quad (3.63)$$

unha relación que no modelo latente é

$$\bar{Y} \approx \beta_0 - \frac{\beta_1}{2} \left[\hat{v}_x + (\bar{\chi} - \beta_2)^2 \right]. \quad (3.64)$$

Dado que as hipóteses do modelo fan que se igualem (3.63) e (3.64) como se demostrou en (3.15b), substituíndo b_1 e b_2 segundo de desprende de (3.40) e (3.61) resulta

$$\begin{aligned} b_0 &\approx \beta_0 - \frac{\beta_1}{2} \left[\hat{v}_x + (\bar{\chi} - \beta_2)^2 \right] + \frac{b_1}{2} \left[\hat{v}_x + (\bar{x} - b_2)^2 \right] \\ &\approx \beta_0 - \frac{\beta_1}{2} \left[\hat{v}_x + (\bar{\chi} - \beta_2)^2 \right] + \frac{\beta_1}{2} \frac{\hat{v}_x^2}{(\hat{v}_x + \hat{v}_e)^2} \left[(\hat{v}_x + \hat{v}_e) + (\bar{\chi} - b_2)^2 \right] \\ &\approx \beta_0 - \frac{\beta_1}{2} \left[\hat{v}_x + (\bar{\chi} - \beta_2)^2 \right] + \frac{\beta_1}{2} \frac{\hat{v}_x^2}{(\hat{v}_x + \hat{v}_e)^2} \left[(\hat{v}_x + \hat{v}_e) + (-\beta_2 + \bar{\chi})^2 \frac{(\hat{v}_x + \hat{v}_e)^2}{\hat{v}_x^2} \right] \\ &\approx \beta_0 - \frac{\beta_1}{2} \left[\hat{v}_x + (\bar{\chi} - \beta_2)^2 \right] + \frac{\beta_1}{2} \frac{\hat{v}_x^2}{(\hat{v}_x + \hat{v}_e)^2} \left[(\hat{v}_x + \hat{v}_e) + (-\beta_2 + \bar{\chi})^2 \frac{(\hat{v}_x + \hat{v}_e)^2}{\hat{v}_x^2} \right] \\ &\approx \beta_0 - \frac{\beta_1}{2} \hat{v}_x + \frac{\beta_1}{2} \frac{\hat{v}_x^2}{(\hat{v}_x + \hat{v}_e)}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Pódese comprobar entón que este resultado coincide co xa exposto en (3.44), de aí que se poda enunciar a seguinte proposición.

Proposición 3.6. *Baixo as Hipóteses 3.1-3.3 e 3.4c, o estimador de mínimos cadrados do parámetro β_0 do modelo conformado polas expresións (3.1)-(3.3) presentará un nesgo atenuante igual ao exposto na Proposición 3.3; é dicir, non depende do tramo da función cuadrática sobre a que se dispoña de observacións.*

O contido das Proposicións 4, 5 e 6 pódese ilustrar a través das seguintes figuras nas que a interpretación é similar á das figuras anteriores.

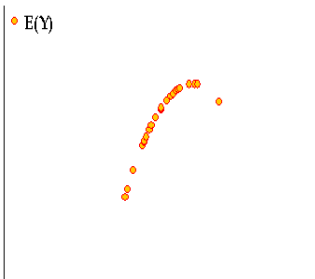


Figura 3.6a. Función latente

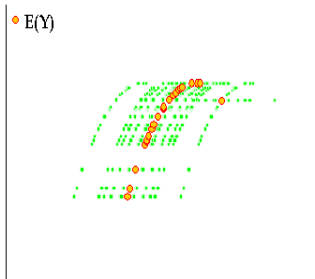


Figura 3.6b. Valores observables

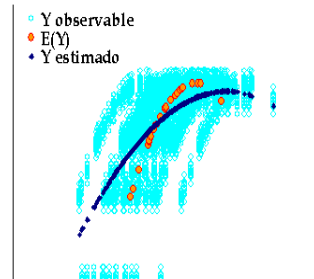


Figura 3.6c. Estimación MC

Na Figura 3.6a represéntase un exemplo cos valores das variables latentes cando o regresor está centrado nun valor que é menor que o parámetro β_2 . Na Figura 3.6b recóllese ademais os valores observables das variables se existen erros de medida, pero non perturbacións. E finalmente na Figura 3.6c, ilústrase a nube de puntos mostral (en cor azul celeste) cando engadimos as perturbacións da variable explicada, e a ecuación cuadrática que resultaría estimada (en cor azul mariño) utilizando o método de mínimos cadrados.

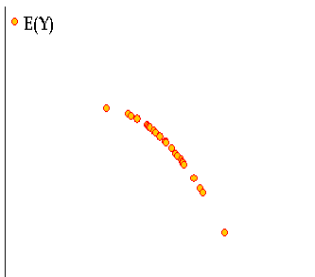


Figura 3.7a. Función latente

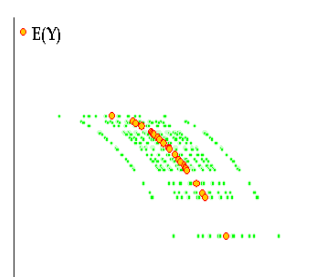


Figura 3.7b. Valores observables

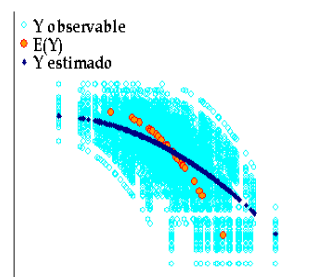


Figura 3.7c. Estimación MC

As Figuras 3.7a-3.7c representan un exemplo similar ao das Figuras 3.6a-3.6c pero cos valores do regresor latente centrados nun valor que é maior que o parámetro β_2 .

3.4 A estimación dun modelo cuadrático particular

Nesta sección do Capítulo 3 imos demostrar que, cando se aplica o método de estimación de mínimos cadrados á ecuación cuadrática que utiliza o modelo de Gordon-Schaefer para representar a variación natural da biomasa, e o regresor desa ecuación presenta erros de medida, prodúcese un nesgo aínda no caso favorable de ter un gran número de observacións e de que estas estean centradas onde a función acada o seu máximo.

Como xa se indicou no Capítulo 2, a mencionada ecuación ten unhas características especiais. Estas se recollen coa linguaxe matemática mediante unha formulación que representa un caso particular do modelo cuadrático xeral que se expuxo ata agora neste capítulo.

Desenvolvendo o modelo (3.1) queda

$$Y_t = \beta_0 - \frac{\beta_1}{2}(\chi_t)^2 + \beta_1\beta_2(\chi_t) - \frac{\beta_1}{2}(\beta_2)^2 \quad (3.66)$$

e da ecuación do modelo de Gordon-Schaefer de (2.4) dedúcese que, coa hipótese de crecemento sigmoidal da biomasa, a variación natural desta (V_t) exprésase como

$$\begin{aligned} V_t &= r \left(B_t - \frac{1}{K} B_t^2 \right) \\ &= rB_t - \frac{r}{K} B_t^2, \end{aligned} \quad (3.67)$$

onde $r > 0$, $K > 0$, e B_t denota a biomasa no período t .

Entón formalmente, a expresión (3.67) é un caso particular de (3.66) no cal se cumpren as tres restricións que se detallan:

$$\frac{\beta_1}{2} = \frac{r}{K} \Rightarrow \beta_1 = \frac{2r}{K} \quad (3.68a)$$

$$r = \beta_1 \beta_2 \Rightarrow \beta_2 = \frac{K}{2}, \quad (3.68b)$$

$$\beta_0 - \frac{\beta_1}{2} (\beta_2)^2 = 0 \Rightarrow \beta_0 = \frac{rK}{4}, \quad (3.68c)$$

onde $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$.

Co obxectivo de facilitar a comprensión do resto deste capítulo e evitar confusións coa sección anterior, propoñemos reformular a ecuación (3.67) utilizando a expresión

$$V_t = \rho_1 B_t - \rho_2 B_t^2, \quad (3.69)$$

onde $\rho_1 = r$ e $\rho_2 = \frac{r}{K}$.

Na Figura 3.8 que representa a ecuación (3.69), apreciase a importante restrición da mesma que a obriga a pasar pola orixe de coordenadas.

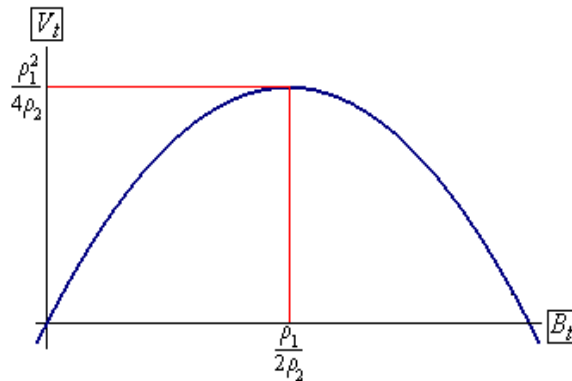


Figura 3.8. Función de crecemento natural da biomasa.

Esa restricción condiona en grande medida a análise que se vai facer de seguido, e impide que se poidan utilizar exactamente os mesmos resultados acadados na sección anterior para explicar este caso, aínda que, como veremos, existen evidentes paralelismos entre ambos casos.

Os parámetros da ecuación (3.69) expresan as seguintes peculiaridades da función:

- ρ_1 é a taxa de crecemento da función sigmoideal implícita no modelo;
- ρ_2 indica o maior ou menor grao de curvatura da ecuación cuadrática dado que

se cumpre a igualdade $\rho_2 = -\frac{\partial^2 V_t}{\partial B_t^2}$.

3.4.1. Estimadores MC dispoñendo dos valores verdadeiros da biomasa

A continuación imos deducir as expresións que permitirían obter os estimadores MC dos parámetros da ecuación (3.69) se as observacións dispoñibles fosen as do modelo latente. Por suposto, ao supoñer que non hai perturbacións na variación natural nin erros de medida na biomasa, estes estimadores serán os verdadeiros parámetros, pero precisamos definir esas expresións para demostracións posteriores. Trataríase nese caso de acadar o modelo estimado

$$\hat{V}_t = r_1 B_t - r_2 B_t^2, \quad (3.70)$$

onde r_1 representa o estimador MC de ρ_1 e r_2 expresa o estimador MC de ρ_2 , mediante a minimización da expresión

$$\begin{aligned} SCE &= \sum_{t=1}^T (V_t - \hat{V}_t)^2 \\ &= \sum_{t=1}^T (V_t - \hat{\rho}_1 B_t + \hat{\rho}_2 B_t^2)^2 \end{aligned} \quad (3.71)$$

respecto dos estimadores, que deben cumprir $\hat{\rho}_1 > 0$ e $\hat{\rho}_2 > 0$.

Resulta así:

$$\begin{aligned}\frac{\partial SCE}{\partial \hat{\rho}_1} &= -2 \sum_{t=1}^T (V_t - \hat{V}_t) B_t \\ &= -2 \sum_{t=1}^T (V_t - \hat{\rho}_1 B_t + \hat{\rho}_2 B_t^2) B_t ,\end{aligned}\tag{3.72a}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial SCE}{\partial \hat{\rho}_2} &= 2 \sum_{t=1}^T (V_t - \hat{V}_t) B_t^2 \\ &= 2 \sum_{t=1}^T (V_t - \hat{\rho}_1 B_t + \hat{\rho}_2 B_t^2) B_t^2\end{aligned}\tag{3.72b}$$

xunto coa matriz hessiana

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 SCE}{\partial \hat{\rho}_1^2} & \frac{\partial^2 SCE}{\partial \hat{\rho}_2 \partial \hat{\rho}_1} \\ \frac{\partial^2 SCE}{\partial \hat{\rho}_1 \partial \hat{\rho}_2} & \frac{\partial^2 SCE}{\partial \hat{\rho}_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \sum_{t=1}^T B_t^2 & -2 \sum_{t=1}^T B_t^3 \\ -2 \sum_{t=1}^T B_t^3 & 2 \sum_{t=1}^T B_t^4 \end{pmatrix}.\tag{3.72c}$$

Avaliando (3.72a) e (3.72b) na solución, obtemos

$$\frac{\partial SCE}{\partial \hat{\rho}_1} = 0 \Rightarrow \sum_{t=1}^T (V_t - r_1 B_t + r_2 B_t^2) B_t = 0\tag{3.73a}$$

o que implica, por un lado,

$$\sum_{t=1}^T (V_t \cdot B_t) = \sum_{t=1}^T (r_1 B_t^2 - r_2 B_t^3),\tag{3.73b}$$

e, por outro lado,

$$\frac{\partial SCE}{\partial \hat{\rho}_2} = 0 \Rightarrow \sum_{t=1}^T (V_t - r_1 B_t + r_2 B_t^2) B_t^2 = 0 \quad (3.73c)$$

que leva a

$$\sum_{t=1}^T (V_t \cdot B_t^2) = \sum_{t=1}^T (r_1 B_t^3 - r_2 B_t^4). \quad (3.73d)$$

Despexando os estimadores r_1 e r_2 das igualdades (3.73b) e (3.73d) obtemos

$$r_1 = \frac{\left(\sum_{t=1}^T B_t^4 \right) \cdot \left(\sum_{t=1}^T B_t V_t \right) - \left(\sum_{t=1}^T B_t^3 \right) \cdot \left(\sum_{t=1}^T B_t^2 V_t \right)}{\left(\sum_{t=1}^T B_t^4 \right) \cdot \left(\sum_{t=1}^T B_t^2 \right) - \left(\sum_{t=1}^T B_t^3 \right) \cdot \left(\sum_{t=1}^T B_t^3 \right)} \quad (3.74a)$$

e

$$r_2 = \frac{\left(\sum_{t=1}^T B_t^3 \right) \cdot \left(\sum_{t=1}^T B_t V_t \right) - \left(\sum_{t=1}^T B_t^2 \right) \cdot \left(\sum_{t=1}^T B_t^2 V_t \right)}{\left(\sum_{t=1}^T B_t^4 \right) \cdot \left(\sum_{t=1}^T B_t^2 \right) - \left(\sum_{t=1}^T B_t^3 \right) \cdot \left(\sum_{t=1}^T B_t^3 \right)}, \quad (3.74b)$$

que como indicamos anteriormente coincidem neste caso com ρ_1 e ρ_2 , respectivamente.

Considerando (3.69), no modelo latente a variación natural acaba o seu máximo no punto no que o valor da biomasa (B_{RMS}) cumpre a seguinte relación

$$\frac{\partial V_t}{\partial B_t} = 0 \Rightarrow B_{RMS} = \frac{\rho_1}{2\rho_2}, \quad (3.75)$$

tal como xa se ilustrou na Figura 3.8.

Vexamos agora algunhas propiedades se admitimos que a biomasa ten unha distribución normal.

Hipótese 3.5: A variable B_t segue unha distribución normal de probabilidade

$$B_t \rightarrow Normal \left[E(B), \sigma_B^2 \right]. \quad (3.76)$$

Entón con unha mostra suficientemente grande cumpriranse as Propiedades I a VII, polo que tamén poderían deducirse as seguintes propiedades, onde \bar{B} indica a media mostral da biomasa e \hat{S}_B a súa desviación típica.

Propiedade VIII:

$$\sum_{t=1}^T B_t^2 \approx T \cdot (\bar{B}^2 + \hat{S}_B^2). \quad (3.77a)$$

Propiedade IX:

$$\sum_{t=1}^T B_t^3 \approx T \cdot (\bar{B}^3 + 3\bar{B}\hat{S}_B^2). \quad (3.77b)$$

Propiedade X:

$$\sum_{t=1}^T B_t^4 \approx T \cdot (\bar{B}^4 + 6\bar{B}^2\hat{S}_B^2 + 3\hat{S}_B^4). \quad (3.77c)$$

Propiedade XI:

$$\sum_{t=1}^T B_t V_t \approx T \cdot (\rho_1 \bar{B}^2 + \rho_1 \hat{S}_B^2 - \rho_2 \bar{B}^3 - 3\rho_2 \bar{B} \hat{S}_B^2). \quad (3.77d)$$

Propiedade XII:

$$\sum_{t=1}^T B_t^2 V_t \approx T \cdot (\rho_1 \bar{B}^3 + 3\rho_1 \bar{B} \hat{S}_B^2 - \rho_2 \bar{B}^4 - 6\rho_2 \bar{B}^2 \hat{S}_B^2 - 3\rho_2 \hat{S}_B^4). \quad (3.77e)$$

Coas substitucións correspondentes das Propiedades VIII a XII en (3.74a) e (3.74b), o denominador dos dous estimadores cumpre

$$\left(\sum_{t=1}^T B_t^4 \right) \cdot \left(\sum_{t=1}^T B_t^2 \right) - \left(\sum_{t=1}^T B_t^3 \right)^2 \approx T^2 \cdot [\bar{B}^4 \hat{S}_B^2 + 3\hat{S}_B^6], \quad (3.78)$$

o numerador de (3.74a) resulta

$$\left(\sum_{t=1}^T B_t^4 \right) \cdot \left(\sum_{t=1}^T B_t V_t \right) - \left(\sum_{t=1}^T B_t^3 \right) \cdot \left(\sum_{t=1}^T B_t^2 V_t \right) \approx T^2 \cdot \rho_1 \cdot [\bar{B}^4 \hat{S}_B^2 + 3\hat{S}_B^6], \quad (3.79a)$$

e, finalmente, o numerador de (3.74b) cumpre

$$\left(\sum_{t=1}^T B_t^3 \right) \cdot \left(\sum_{t=1}^T B_t V_t \right) - \left(\sum_{t=1}^T B_t^2 \right) \cdot \left(\sum_{t=1}^T B_t^2 V_t \right) \approx T^2 \cdot \rho_2 \cdot [\bar{B}^4 \hat{S}_B^2 + 3\hat{S}_B^6]. \quad (3.79b)$$

3.4.2. *Consistencia dos estimadores MC cando o regresor ten erros de medida*

Na práctica, cando se decide estimar un modelo do tipo (3.69) co método de mínimos cadrados, estase dando por suposto que os valores observables (u_t) da variación natural, se relacionan cos valores verdadeiros (V_t) mediante a expresión

$$u_t = V_t + \zeta_t, \quad (3.80)$$

onde ζ_t é a perturbación aleatoria. E si se admite que os valores observables da biomasa teñen erros de medida aditivos, temos

$$w_t = B_t + e_t. \quad (3.81)$$

Tendo en conta ademais que a Hipótese 3.2 asume a distribución normal de probabilidade das perturbacións, e que a Hipótese 3.3 asume a distribución normal de probabilidade dos erros de medida e a súa independencia das perturbacións tal como se expresa en (3.4), a estimación do modelo (3.69) será agora

$$\hat{u}_t = r_1 w_t - r_2 w_t^2, \quad (3.82)$$

onde cumprírase

$$r_1 = \frac{\left(\sum_{t=1}^T w_t^4\right) \cdot \left(\sum_{t=1}^T w_t u_t\right) - \left(\sum_{t=1}^T w_t^3\right) \cdot \left(\sum_{t=1}^T w_t^2 u_t\right)}{\left(\sum_{t=1}^T w_t^4\right) \cdot \left(\sum_{t=1}^T w_t^2\right) - \left(\sum_{t=1}^T w_t^3\right)^2} \quad (3.83a)$$

e

$$r_2 = \frac{\left(\sum_{t=1}^T w_t^3\right) \cdot \left(\sum_{t=1}^T w_t u_t\right) - \left(\sum_{t=1}^T w_t^2\right) \cdot \left(\sum_{t=1}^T w_t^2 u_t\right)}{\left(\sum_{t=1}^T w_t^4\right) \cdot \left(\sum_{t=1}^T w_t^2\right) - \left(\sum_{t=1}^T w_t^3\right)^2}. \quad (3.83b)$$

Polo tanto, no modelo estimado con erros de medida na biomasa e perturbacións na variación natural temos

$$\frac{\partial u_t}{\partial w_t} = 0 \Rightarrow w_{RMS} = \frac{r_1}{2r_2}, \quad (3.84)$$

onde w_{RMS} representa o valor da biomasa observable no que a función estimada é máxima.

Retomando a expresión (3.78) e substituíndo a biomasa latente (B_t) pola biomasa observable (w_t) e a variación natural latente (V_t) pola variación natural observada (u_t), apreciamos que os dous denominadores das expresións (3.83a) e (3.83b) cumprirían

$$\begin{aligned} \left(\sum_{t=1}^T w_t^4 \right) \cdot \left(\sum_{t=1}^T w_t^2 \right) - \left(\sum_{t=1}^T w_t^3 \right)^2 &\approx T^2 \cdot (\bar{B}^4 \hat{s}_w^2 + 3\hat{s}_w^6) \\ &\approx T^2 \cdot (\bar{B}^4 \hat{s}_B^2 + \bar{B}^4 \hat{s}_e^2 + 3\hat{s}_B^6 + 9\hat{s}_B^4 \hat{s}_e^2 + 9\hat{s}_B^2 \hat{s}_e^4 + 3\hat{s}_e^6) \end{aligned} \quad (3.85)$$

onde \hat{s}_w representa a desviación típica da biomasa observada e \hat{s}_e a desviación típica dos erros de medida que incorpora a biomasa observada.

Coa aplicación das Propiedades de (3.77a)-(3.77e) aos sumandos indicados nos denominadores de (3.83a) e (3.83b), considerando (3.75) e tras sucesivas substitucións chégase finalmente a

$$\begin{aligned} \left(\sum_{t=1}^T w_t^4 \right) \cdot \left(\sum_{t=1}^T w_t u_t \right) - \left(\sum_{t=1}^T w_t^3 \right) \cdot \left(\sum_{t=1}^T w_t^2 u_t \right) &\approx \\ \approx T^2 \cdot \left[\rho_1 \cdot (\bar{B}^4 \hat{s}_B^2 + 2\bar{B}^4 \hat{s}_e^2 + 6\hat{s}_B^4 \hat{s}_e^2 + 3\hat{s}_B^2 \hat{s}_e^4 + 3\hat{s}_B^6) - \rho_2 \cdot (2\bar{B}^5 \hat{s}_e^2 + 2\bar{B}^3 \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^2 + 6\bar{B} \hat{s}_B^4 \hat{s}_e^2 + 6\bar{B} \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^4) \right] \\ \approx T^2 \cdot \rho_1 \cdot \left[(\bar{B}^4 \hat{s}_B^2 + 2\bar{B}^4 \hat{s}_e^2 + 6\hat{s}_B^4 \hat{s}_e^2 + 3\hat{s}_B^2 \hat{s}_e^4 + 3\hat{s}_B^6) - \frac{2\rho_2}{\rho_1} (\bar{B}^5 \hat{s}_e^2 + \bar{B}^3 \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^2 + 3\bar{B} \hat{s}_B^4 \hat{s}_e^2 + 3\bar{B} \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^4) \right] \\ \approx T^2 \cdot \rho_1 \cdot \left[(\bar{B}^4 \hat{s}_B^2 + 2\bar{B}^4 \hat{s}_e^2 + 6\hat{s}_B^4 \hat{s}_e^2 + 3\hat{s}_B^2 \hat{s}_e^4 + 3\hat{s}_B^6) - \frac{1}{B_{RMS}} (\bar{B}^5 \hat{s}_e^2 + \bar{B}^3 \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^2 + 3\bar{B} \hat{s}_B^4 \hat{s}_e^2 + 3\bar{B} \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^4) \right] \end{aligned} \quad (3.86a)$$

e

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{t=1}^T w_t^3 \right) \cdot \left(\sum_{t=1}^T w_t u_t \right) - \left(\sum_{t=1}^T w_t^2 \right) \cdot \left(\sum_{t=1}^T w_t^2 u_t \right) \approx \\
& \approx T^2 \left[\rho_1 \left(\bar{B}^3 \hat{s}_e^2 - \bar{B} \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^2 - \bar{B} \hat{s}_e^4 \right) - \rho_2 \left(\bar{B}^4 \hat{s}_e^2 + \bar{B}^2 \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^2 - \bar{B}^4 \hat{s}_B^2 - 3 \hat{s}_B^6 - 4 \hat{s}_B^4 \hat{s}_e^2 - \bar{B}^2 \hat{s}_e^4 - \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^4 \right) \right] \\
& \approx T^2 \cdot \rho_2 \left[\frac{\rho_1}{2\rho_2} \left(2\bar{B}^3 \hat{s}_e^2 - 2\bar{B} \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^2 - 2\bar{B} \hat{s}_e^4 \right) - \left(\bar{B}^4 \hat{s}_e^2 + \bar{B}^2 \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^2 - \bar{B}^4 \hat{s}_B^2 - 3 \hat{s}_B^6 - 4 \hat{s}_B^4 \hat{s}_e^2 - \bar{B}^2 \hat{s}_e^4 - \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^4 \right) \right] \\
& \approx T^2 \cdot \rho_2 \left[B_{RMS} \left(2\bar{B}^3 \hat{s}_e^2 - 2\bar{B} \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^2 - 2\bar{B} \hat{s}_e^4 \right) - \left(\bar{B}^4 \hat{s}_e^2 + \bar{B}^2 \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^2 - \bar{B}^4 \hat{s}_B^2 - 3 \hat{s}_B^6 - 4 \hat{s}_B^4 \hat{s}_e^2 - \bar{B}^2 \hat{s}_e^4 - \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^4 \right) \right].
\end{aligned} \tag{3.86b}$$

Das igualdades precedentes 3.83a-3.86b podemos deducir a seguinte relación:

$$\begin{aligned}
w_{RMS} &= \frac{r_1}{2r_2} \\
&= \frac{\rho_1 \left[\left(\bar{B}^4 \hat{s}_B^2 + 2\bar{B}^4 \hat{s}_e^2 + 6\hat{s}_B^4 \hat{s}_e^2 + 3\hat{s}_B^2 \hat{s}_e^4 + 3\hat{s}_B^6 \right) - \frac{1}{B_{RMS}} \left(\bar{B}^5 \hat{s}_e^2 + \bar{B}^3 \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^2 + 3\bar{B} \hat{s}_B^4 \hat{s}_e^2 + 3\bar{B} \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^4 \right) \right]}{2\rho_2 \left[B_{RMS} \left(2\bar{B}^3 \hat{s}_e^2 - 2\bar{B} \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^2 - 2\bar{B} \hat{s}_e^4 \right) - \left(\bar{B}^4 \hat{s}_e^2 + \bar{B}^2 \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^2 - \bar{B}^4 \hat{s}_B^2 - 3 \hat{s}_B^6 - 4 \hat{s}_B^4 \hat{s}_e^2 - \bar{B}^2 \hat{s}_e^4 - \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^4 \right) \right]} \\
&= B_{RMS} \frac{\left(\bar{B}^4 \hat{s}_B^2 + 2\bar{B}^4 \hat{s}_e^2 + 6\hat{s}_B^4 \hat{s}_e^2 + 3\hat{s}_B^2 \hat{s}_e^4 + 3\hat{s}_B^6 \right) - \frac{1}{B_{RMS}} \left(\bar{B}^5 \hat{s}_e^2 + \bar{B}^3 \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^2 + 3\bar{B} \hat{s}_B^4 \hat{s}_e^2 + 3\bar{B} \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^4 \right)}{\left[B_{RMS} \left(2\bar{B}^3 \hat{s}_e^2 - 2\bar{B} \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^2 - 2\bar{B} \hat{s}_e^4 \right) - \left(\bar{B}^4 \hat{s}_e^2 + \bar{B}^2 \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^2 - \bar{B}^4 \hat{s}_B^2 - 3 \hat{s}_B^6 - 4 \hat{s}_B^4 \hat{s}_e^2 - \bar{B}^2 \hat{s}_e^4 - \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^4 \right) \right]} \\
&= B_{RMS} \cdot \frac{B_{RMS} \left(\bar{B}^4 \hat{s}_B^2 + 2\bar{B}^4 \hat{s}_e^2 + 6\hat{s}_B^4 \hat{s}_e^2 + 3\hat{s}_B^2 \hat{s}_e^4 + 3\hat{s}_B^6 \right) - \left(\bar{B}^5 \hat{s}_e^2 + \bar{B}^3 \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^2 + 3\bar{B} \hat{s}_B^4 \hat{s}_e^2 + 3\bar{B} \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^4 \right)}{B_{RMS}^2 \left(2\bar{B}^3 \hat{s}_e^2 - 2\bar{B} \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^2 - 2\bar{B} \hat{s}_e^4 \right) - B_{RMS} \left(\bar{B}^4 \hat{s}_e^2 + \bar{B}^2 \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^2 - \bar{B}^4 \hat{s}_B^2 - 3 \hat{s}_B^6 - 4 \hat{s}_B^4 \hat{s}_e^2 - \bar{B}^2 \hat{s}_e^4 - \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^4 \right)}
\end{aligned} \tag{3.87}$$

Chegados a este punto, asumimos o seguinte suposto, que revisaremos máis adiante:

Hipótese 3.6: O valor medio do regresor latente (\bar{B}) coincide con aquel que fai máxima a función cuadrática (B_{RMS}).

Coa Hipótese 3.6 e a aplicación das Propiedades de (3.77a)-(3.77e) aos sumandos indicados no numerador de (3.83a) chégase finalmente a

$$\left(\sum_{t=1}^T w_t^4\right) \cdot \left(\sum_{t=1}^T w_t u_t\right) - \left(\sum_{t=1}^T w_t^3\right) \cdot \left(\sum_{t=1}^T w_t^2 u_t\right) \approx T^2 \cdot \rho_1 \cdot (\bar{B}^4 \hat{s}_B^2 + \bar{B}^4 \hat{s}_e^2 + 3\hat{s}_B^6 + 3\hat{s}_B^4 \hat{s}_e^2 - \bar{B}^2 \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^2). \quad (3.88a)$$

Seguindo o mesmo procedemento co numerador de (3.83b), queda

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{t=1}^T w_t^3\right) \cdot \left(\sum_{t=1}^T w_t u_t\right) - \left(\sum_{t=1}^T w_t^2\right) \cdot \left(\sum_{t=1}^T w_t^2 u_t\right) \approx \\ &\approx T^2 \cdot \rho_2 \cdot (\bar{B}^4 \hat{s}_B^2 + \bar{B}^4 \hat{s}_e^2 + 3\hat{s}_B^6 + 4\hat{s}_B^4 \hat{s}_e^2 + \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^4 - \bar{B}^2 \hat{s}_e^4 - 3\bar{B}^2 \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^2). \end{aligned} \quad (3.88b)$$

Con estes resultados pódese xa establecer a relación entre os estimadores MC e os parámetros que tratan de aproximar. Así, considerando (3.83a), (3.85) e (3.88a) concluímos

$$r_1 = \rho_1 \cdot \frac{\bar{B}^4 \hat{s}_B^2 + \bar{B}^4 \hat{s}_e^2 + 3\hat{s}_B^6 + 3\hat{s}_B^4 \hat{s}_e^2 - \bar{B}^2 \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^2}{\bar{B}^4 \hat{s}_B^2 + \bar{B}^4 \hat{s}_e^2 + 3\hat{s}_B^6 + 9\hat{s}_B^4 \hat{s}_e^2 + 9\hat{s}_B^2 \hat{s}_e^4 + 3\hat{s}_e^6}. \quad (3.89)$$

Dado que todos os sumandos do numerador e do denominador da igualdade son positivos, o numerador vai ser sempre igual ou menor ao denominador. Deste xeito se demostra que o estimador r_1 non é consistente no contexto descrito nesta sección, polo que no límite vai presentar un comportamento que tenderá a subestimar o verdadeiro valor do parámetro se existen erros de medida na biomasa; terá polo tanto un nesgo atenuante. Podemos formular entón a seguinte proposición.

Proposición 3.7. *Baixo as Hipóteses 3.2, 3.3, 3.5 e 3.6, o estimador de mínimos cadrados do parámetro ρ_1 do modelo configurado polas expresións (3.69), (3.80) e (3.81) presentará un nesgo atenuante definido na expresión (3.87).*

Por outra parte, tendo en conta (3.83b), (3.85) e (3.88b) concluímos

$$r_2 = \rho_2 \cdot \frac{\overline{B}^4 \hat{s}_B^2 + \overline{B}^4 \hat{s}_e^2 + 3\hat{s}_B^6 + 4\hat{s}_B^4 \hat{s}_e^2 + \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^4 - \overline{B}^2 \hat{s}_e^4 - 3\overline{B}^2 \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^2}{\overline{B}^4 \hat{s}_B^2 + \overline{B}^4 \hat{s}_e^2 + 3\hat{s}_B^6 + 9\hat{s}_B^4 \hat{s}_e^2 + 9\hat{s}_B^2 \hat{s}_e^4 + 3\hat{s}_e^6}. \quad (3.90)$$

Polo tanto, se existen erros de medida na biomasa, no límite o estimador r_2 non é consistente pois vai a tender a subestimar o verdadeiro valor do parámetro, ρ_2 . Formulamos por iso o seguinte resultado.

Proposición 3.8. *Baixo as Hipóteses 3.2, 3.3, 3.5 e 3.6, o estimador de mínimos cadrados do parámetro ρ_2 do modelo conformado polas expresións (3.69), (3.80) e (3.81) presentará un nesgo atenuante definido na expresión (3.88).*

Por outro lado, se consideramos a igualdade (3.87) conxuntamente coa Hipótese 3.6, queda

$$\begin{aligned} w_{RMS} &= \frac{r_1}{2r_2} \\ &= B_{RMS} \cdot \frac{\overline{B}^4 \hat{s}_B^2 + \overline{B}^4 \hat{s}_e^2 + 3\hat{s}_B^6 + 3\hat{s}_B^4 \hat{s}_e^2 - \overline{B}^2 \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^2}{\overline{B}^4 \hat{s}_B^2 + \overline{B}^4 \hat{s}_e^2 + 3\hat{s}_B^6 - 3\overline{B}^2 \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^2 - \overline{B}^2 \hat{s}_e^4 + 4\hat{s}_B^4 \hat{s}_e^2 + \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^4} \end{aligned} \quad (3.91)$$

e na expresión (3.91) a diferenza entre o numerador e o denominador ven dada por

$$\begin{aligned} \text{Diferenza} &\approx 2\overline{B}^2 \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^2 + \overline{B}^2 \hat{s}_e^4 - \hat{s}_B^4 \hat{s}_e^2 - \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^4 \\ &\approx \hat{s}_e^2 \left[\overline{B}^2 (2\hat{s}_B^2 + \hat{s}_e^2) - \hat{s}_B^2 (\hat{s}_B^2 + \hat{s}_e^2) \right]. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Polo tanto, para que a diferenza sexa positiva será necesario que se cumpra

$$\begin{aligned} \frac{\bar{B}^2}{\hat{\sigma}_B^2} &> \frac{\hat{\sigma}_B^2 + \hat{\sigma}_e^2}{2\hat{\sigma}_B^2 + \hat{\sigma}_e^2} \\ &> 1 - \frac{\hat{\sigma}_B^2}{2\hat{\sigma}_B^2 + \hat{\sigma}_e^2}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

E dicir que será suficiente con que se verifique a relación

$$\frac{\bar{B}^2}{\hat{\sigma}_B^2} > 1 \Rightarrow CV < 1, \quad (3.94)$$

onde CV indica o coeficiente de variación da biomasa, $CV = \frac{\hat{\sigma}_B}{\bar{B}}$, para que o numerador de (3.91) resulte positivo e maior que o denominador.

Tendo en conta que as situacións límite razoables que contempla o modelo (3.69) son aquelas nas que a biomasa é nula ($B_{\min}=0$) e aquelas nas que é máxima ($B_{\max}=2\bar{B}$), e que a información dispoñible supoñémola centrada no valor medio, está claro que a varianza máxima que contempla o modelo sería a que se dera no hipotético (e improbable) caso no que só houbera valores extremos. Isto significa que o máximo valor da varianza mostrada da biomasa sería

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_B^{2*} &= \frac{\left[(B_{\min} - \bar{B}) + (B_{\max} - \bar{B}) \right]^2}{2} \\ &= \bar{B}^2. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Para confirmar este punto, na Táboa 3.1 presentamos os valores medios das series temporais das biomásas estimadas polo ICES para diferentes tipos de especies en diversas áreas do océano Atlántico, así como as desviacións típicas e os coeficientes de variación correspondentes.

ESPECIE (Área)	Período		BIOMASA TOTAL			BIOMASA REPRODUCTORA		
			Media	Desv. típ.	C.V.	Media	Desv. típ.	C.V.
	Inicio	Fin	(Tm)	(Tm)		(Tm)	(Tm)	
Abadexo (Div. Va)	1979	2011	158.831	61.149	0,38	101.899	38.537	0,38
Abadexo (Div. Vb)	1957	2011	86.756	31.887	0,37	57.266	20.532	0,36
Abadexo (Div. Vlb)	1991	2011	36.249	12.805	0,35	17.998	5.930	0,33
Abadexo (Subár. I e II)	1950	2011	391.918	219.735	0,56	141.048	69.712	0,49
Abadexo (Subár. IV e Div. IIIa)	1963	2011	1.840.561	1.336.185	0,73	273.719	166.388	0,61
Arenque (Div. Va)	1987	2011	547.920	170.395	0,31	415.280	139.060	0,33
Arenque (Div. Via)	1957	2011	413.355	309.969	0,75	167.919	116.892	0,70
Arenque (Div. VIIj)	1958	2011	106.593	43.923	0,41	63.291	28.329	0,45
Arenque (Subár. IV, Div. VIId e IIIa)	1960	2011	2.543.977	1.210.192	0,48	876.549	609.411	0,70
Arenque (Subdiv. 22-24 e Div. IIIa)	1991	2011	313.780	114.216	0,36	172.623	66.982	0,39
Arenque (Subdiv. 25 a 29 e 32)	1974	2011	1.465.959	761.449	0,52	879.094	441.701	0,50
Arenque (Subdiv. 30)	1973	2011	409.331	183.634	0,45	305.962	144.843	0,47
Arenque en Noruega	1950	2011	7.138.620	5.720.974	0,80	4.385.726	3.749.487	0,85
Arenque no Golfo de Riga	1977	2011	115.720	33.877	0,29	75.387	21.860	0,29
Bacallao (Div. Va)	1955	2011	1.050.731	407.277	0,39	296.931	203.854	0,69
Bacallao (Div. Via)	1978	2011	26.122	15.626	0,60	16.370	9.878	0,60
Bacallao (Div. VIIa)	1968	2010	15.905	8.234	0,52	9.256	5.572	0,60
Bacallao (Div. VIIe-k)	1971	2011	15.590	6.216	0,40	9.844	3.863	0,39
Bacallao (Subár. I e II)	1946	2011	2.019.178	878.827	0,44	438.690	294.830	0,67
Bacallao (Subár. IV, Div. VIId e Div. IIIa)	1963	2011	503.551	276.226	0,55	129.287	78.672	0,61
Bacallao (Subdiv. 25 a 32)	1966	2011	413.192	278.631	0,67	262.691	183.458	0,70
Bacallao (Subdiv. Vb1)	1961	2011	85.255	35.676	0,42	58.258	26.054	0,45
Espadín (Subdiv. 22 a 32)	1974	2011	1.532.784	617.331	0,40	841.026	385.797	0,46
Faneca noruega (Area IV e IIIa)	1983	2011	827.613	357.302	0,43	174.696	87.127	0,50
Faneca prateada (Div. Va)	1980	2011	252.194	79.407	0,31	116.158	31.598	0,27
Faneca prateada (Div. Vb)	1961	2011	198.088	57.858	0,29	98.194	23.631	0,24
Faneca prateada (Subár. I e II)	1960	2011	697.840	231.435	0,33	351.864	172.671	0,49
Fodón (V XIV Ila)	1979	2011				428.121	139.184	0,33
Lanzón en Dogger Bank Area (SA 1)	1983	2011	1.005.685	509.566	0,51	331.750	202.145	0,61
Lanzón en Mar do Norte (SA 2)	1983	2011	311.688	134.261	0,43	130.966	68.108	0,52
Lanzón en Mar do Norte (SA 3)	1983	2011	506.154	336.264	0,66	174.267	100.625	0,58
Linguado (Div. VIIa)	1970	2011	4.963	1.939	0,39	4.025	1.599	0,40
Linguado (Div. VIId)	1982	2011	15.470	3.263	0,21	10.365	1.770	0,17
Linguado (Div. VIIe)	1969	2011	4.722	1.022	0,22	3.421	799	0,23
Linguado (Div. VIIf e g)	1971	2011	4.888	1.352	0,28	3.475	1.314	0,38
Linguado (Div. VIIa,b)	1984	2011	16.491	2.161	0,13	13.226	1.856	0,14
Lirio (Subár. I-X, XII e XIV)	1981	2011	5.223.892	2.922.080	0,56	3.341.062	1.697.401	0,51
Pescada (Subár. IV e Div. VIId)	1990	2011	396.831	113.969	0,29	210.047	61.942	0,29
Rapante (Div. VIIIc e IXa)	1986	2011	1.499	676	0,45	1.280	569	0,44
Rapante (Divisions VIIIc e IXa)	1986	2011	5.661	1.431	0,25	4.929	1.288	0,26
Sardiña (Div. VIIIc e IXa)	1978	2011				438.235	137.890	0,31
Solla (Div. VIId)	1980	2011	10.640	3.572	0,34	5.138	1.954	0,38
Solla (Div. VIIe)	1980	2011	5.765	1.599	0,28	3.079	969	0,31
Xarda	1972	2011	3.479.419	654.138	0,19	2.483.563	540.535	0,22
Xurelo (Div. IXa)	1992	2011				278.146	19.922	0,07
Xurelo (IIa,IVa,Vb,Vla,VIIa-c,e-k,VIIIa-e)	1982	2011	3.213.737	1.030.468	0,32	2.311.497	851.829	0,37

Táboa 3.1. Propiedades das biomases de distintas especies.

Fonte: Elaboración propia a partir de datos do ICES.

Como pode comprobarse os coeficientes de variación estimados das series temporais de biomasa cumpren a condición expresada en (3.94).

Polo tanto nas condicións nas que se utiliza habitualmente este tipo de modelo, se existen erros de medida no regresor e si se admiten as hipóteses da Proposición 3.9, o método MC ten tendencia a sobreestimar o valor da biomasa que permite acadar o rendemento máximo sostible.

Este resultado permítenos formular a seguinte proposición.

Proposición 3.9. *Baixo as Hipóteses 3.2, 3.3, 3.5 e 3.6, a estimación MC do modelo definido polas expresións (3.69), (3.80) e (3.81) sobreestima o valor do regresor que fai máximo o valor da variable explicada. Nomeadamente,*

$$w_{RMS} > B_{RMS}.$$

3.4.3. Simulación

A continuación preséntanse algúns resultados acadados mediante simulación do modelo definido polas Hipóteses 3.2, 3.3, 3.5 e 3.6, e as expresións (3.69), (3.80) e (3.81) coa metodoloxía descrita na sección 2.5.1 do Capítulo 2.

Na Táboa 3.2 indícanse as propiedades estatísticas máis relevantes das variables latentes desta simulación.

Regresor (B)	Media na mostra	100
	Varianza na mostra	1.000
Variable explicada (V)	Media na mostra	450
	Varianza na mostra	5.000

Táboa 3.2. Propiedades das variables simuladas do modelo latente cuadrático.

De igual xeito, na Táboa 3.3 indicamos as propiedades dos erros e das perturbacións utilizados nesta simulación.

Erros en B	Media	0
	Varianza	400
	Asimetría	0
	Curtose	3

Perturbacións en V	Media	0
	Varianza	100
	Asimetría	0
	Curtose	3

Táboa 3.3. Propiedades dos erros e das perturbacións simulados.

Finalmente na Táboa 3.4 mostramos os valores iniciais do modelo latente da simulación e os resultados da estimación para poder comparalos.

Parámetro	Característica	Valor	Estimación
ρ_1	Taxa de crecemento da función sigmoideal implícita	10	9,45814669
ρ_2	Grao de curvatura da ecuación cuadrática	0,05	0,04424146
$\frac{\rho_1}{2\rho_2}$	Valor de B_t que maximiza a variable explicada	100	106,89234523
$\frac{\rho_1^2}{4\rho_2}$	Máximo da variable explicada	500	505,50174054

Táboa 3.4. Resultados da estimación do modelo simulado.

Na Táboa 3.4, ademais da evidente constatación dos resultados das Proposicións 7 e 8 sobre o comportamento dos estimadores r_1 e r_2 , cabe destacar especialmente o comportamento do punto onde a función acada o seu valor máximo. En este particular modelo latente simulado (modelo I), ese punto é $(B_t, V_t) = (100, 500)$ e no modelo estimado correspondente resulta $(w_t, \hat{u}_t) = (106,89234523, 505,50174054)$. Isto quere dicir que se está sobreestimando tanto o valor da biomasa no que se produce a máxima variación natural do recurso, como o propio crecemento máximo do mesmo.

Outros datos da estimación serían:

	Valores observables		Estimación
Regresor (w)	Media	100	--
	Varianza	1.400	--
Variable explicada (u)	Media	450	441,46203249
	Varianza	5.100	8.193,33442389

Táboa 3.4 (continuación). Resultados da estimación do modelo simulado.

A Figura 3.9a representa cómo se dispersan os valores das variables latentes na función cuadrática (3.69) supoñendo que se cumpren as Hipóteses 3.5 e 3.6. A Figura 3.9b ilustra como serían os valores observables das variables (en cor verde), se unicamente hai erros no regresor. Por último, a Figura 3.9c representa tamén a nube de puntos mostral (en cor azul celeste) cando engadimos as perturbacións da variable explicada, e a función cuadrática que resultaría estimada (en cor azul mariño) utilizando o método de MC e que, como xa se indicou, debe cumprir a restrición de pasar pola orixe de coordenadas.

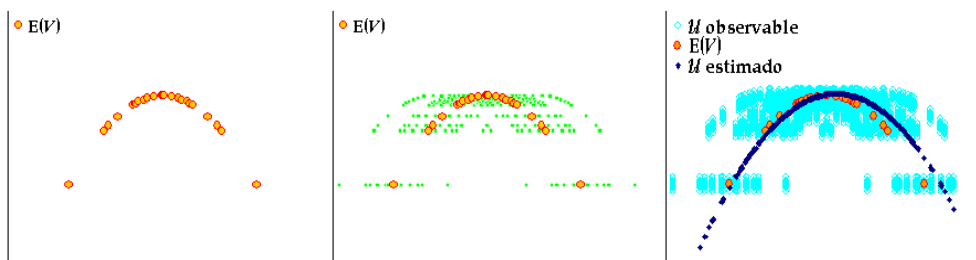


Figura 3.9a. Función latente **Figura 3.9b.** Valores observables **Figura 3.9c.** Estimación MC

Como pode apreciarse na Figura 3.9c a curva axustada ‘estírase’ cara á dereita respecto da curva verdadeira ou latente, polo que o valor da biomasa no que a súa variación natural acada o seu máximo resulta sobreestimado. E isto pode ter importantes consecuencias á hora de decidir como xestionar a biomasa dun recurso pesqueiro.

En efecto, a reiteración con que os organismos que deciden as políticas pesqueiras que desenvolven institucións nacionais e internacionais, acoden aos informes técnicos do

Departamento de Pesca e Acuicultura da FAO, e aos principios propostos no seu código de conduta (FAO, 1995), entre os cales destacamos o principio de precaución, veríase así seriamente afectada pola posible sobreestimación dos puntos de referencia que estes informes conteñen.

No informe técnico de Cadima (2003) para a FAO explicase con detalle como este principio materialízase na práctica na determinación duns puntos de referencia²:

(i) *Puntos obxectivo* das funcións de rendemento da biomasa ou de rendemento das capturas por unidade de esforzo (CPUE) que habitualmente son aqueles que permiten determinar o rendemento máximo sostible (B_{RMS})³,

(ii) *Puntos límite* que dependen da mínima biomasa observada, e

(iii) *Puntos de referencia de precaución* (BPA, no caso da biomasa), que dependen dos puntos límite e da incerteza por mortalidade por pesca.

Se as estimacións das funcións cuadráticas de rendemento tenden a sobreestimar o valor de B_{RMS} cando existen erros de medida na biomasa observada⁴, obviamente provocarán que os xestores deste tipo de recursos excedan os límites que se derivarían de aplicar o principio de precaución á biomasa sen eses erros (ou con erros con varianza máis pequena).

No seguinte apartado imos analizar ata que punto é precisa a Hipótese 3.6 para acadar os resultados da Proposición 3.9 dada a evidente importancia que semella ter á hora de asumir o principio de precaución na xestión do tipo de recursos que se analizan nesta Tese de Doutoramento.

² En Nakken et al. (1996) se describe a forma en que se relacionaron os puntos de referencia óptimos cos Totais Admisibles de Capturas (TAC) na pesca de bacallau.

³ Son os denominados puntos RMS (Rendemento Máximo Sostible) ou MSY (Maximum Sustainable Yield)

⁴ Con unha determinada varianza.

3.4.4. Información sobre a biomasa latente non centrada no valor que maximiza a variación natural

A función de crecemento da biomasa de (3.69) raramente se estima con series temporais da mesma cumbran exactamente a Hipótese 3.6, sobre a disposición de información arredor do punto que permite acadar o máximo rendemento sostible. De aí que analicemos neste apartado cáles son as consecuencias de que non se cumpra.

Na expresión (3.87) podemos establecer a seguinte relación

$$B_{RMS} = \bar{B} - \delta, \quad (3.96)$$

de xeito que a diferenza δ será negativa se a información sobre o regresor latente esta centrada nun valor que se corresponde ao tramo crecente da función, δ será positiva se está centrada nun valor do tramo decrecente, e δ será nula no caso contemplado na Hipótese 3.6. Se consideramos o cociente da última expresión de (3.69),

$$\frac{B_{RMS} \left(\bar{B}^4 \hat{s}_B^2 + 2\bar{B}^4 \hat{s}_e^2 + 6\hat{s}_B^4 \hat{s}_e^2 + 3\hat{s}_B^2 \hat{s}_e^4 + 3\hat{s}_B^6 \right) - \left(\bar{B}^5 \hat{s}_e^2 + \bar{B}^3 \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^2 + 3\bar{B} \hat{s}_B^4 \hat{s}_e^2 + 3\bar{B} \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^4 \right)}{B_{RMS}^2 \left(2\bar{B}^3 \hat{s}_e^2 - 2\bar{B} \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^2 - 2\bar{B} \hat{s}_e^4 \right) - B_{RMS} \left(\bar{B}^4 \hat{s}_e^2 + \bar{B}^2 \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^2 - \bar{B}^4 \hat{s}_B^2 - 3\hat{s}_B^6 - 4\hat{s}_B^4 \hat{s}_e^2 - \bar{B}^2 \hat{s}_e^4 - \hat{s}_B^2 \hat{s}_e^4 \right)} \quad (3.69a)$$

e logo dun proceso moi laborioso de substitución, chegamos a que a diferenza entre o numerador e o denominador pode escribirse como

$$\begin{aligned} \text{Numerador} - \text{Denominador} &\approx \hat{s}_e^2 \left\{ \bar{B} \left[\bar{B}^2 \hat{s}_B^2 + \left(\bar{B}^2 - \hat{s}_B^2 \right) \left(\hat{s}_B^2 + \hat{s}_e^2 \right) \right] \right. \\ &\quad + \delta \left(\bar{B}^4 - 5\bar{B}^2 \hat{s}_B^2 - 3\bar{B}^2 \hat{s}_e^2 - 2\hat{s}_B^4 - 2\hat{s}_B^2 \hat{s}_e^2 \right) \\ &\quad \left. + 2\delta^2 \bar{B} \left(\hat{s}_e^2 + \hat{s}_B^2 - \bar{B}^2 \right) \right\}, \quad (3.97) \end{aligned}$$

aínda que non podemos determinar se esta expresión ten signo positivo ou negativo sen considerar algún caso particular.

Na literatura máis recente existe unha crecente preocupación pola fiabilidade das medicións das variables que indican aspectos como a taxa de mortalidade natural, o esforzo pesqueiro ou a propia biomasa reprodutora. Neste senso xa no traballo de Cotero e Green (1997) advírtese de que as estimacións de biomasa de bocarte no Golfo de California teñen un coeficiente de variación (CV) de ata 0.44 por causa da imprecisa estimación que obteñen da mortalidade das ovas, que é un elemento fundamental do seu método de estimación da biomasa. Máis recentemente podemos atopar numerosos estudos nos que se fan explícitos os coeficientes de variación da biomasa estimada nun determinado ano, dando así un indicio dunha das compoñentes do erro de medida que pode estar incorporado na estimación da biomasa. E tamén, en Hill et al. (2009) pódese atopar unha comparación de varios métodos que se utilizan para estimar a biomasa de sardiña no Pacífico que, entre outros resultados, constata as discrepancias entre eses métodos de ata un 30% no montante total estimado de biomasa. Á súa vez, Simmonds et al. (2010) analizan a concordancia entre diferentes modelos para estimar a biomasa de xarda no nordés atlántico usando métodos baesianos.

Estas referencias xustifican en certa medida que as Hipóteses 3.7, 3.8a e 3.8b que propoñemos de seguido, podan considerarse razoables para representar o comportamento tanto da biomasa anual dun recurso pesqueiro como o da sucesión de valores de biomasa que van sucedéndose no tempo, sen perder de vista que estamos establecendo un modelo coas eivas inevitables nas simplificacións que implican os modelos globais, é dicir os modelos que non consideran a estrutura por idades da poboación como o proposto por Beverton-Holt (1957).

Con estas consideracións propoñemos os seguintes supostos:

Hipótese 3.7: A varianza do erro de medida asociado a cada valor de biomasa, non é maior ca varianza da propia biomasa latente.

Iso significa que se $M \geq 1$, temos

$$\hat{s}_B = M \cdot \hat{s}_e. \quad (3.98)$$

Hipótese 3.8a: Se a variable biomasa está centrada nun punto superior ao que determina o máximo da función cuadrática, a súa desviación típica non é maior que a distancia da súa media coa biomasa máxima, tal como se ilustra na Figura 3.10a.

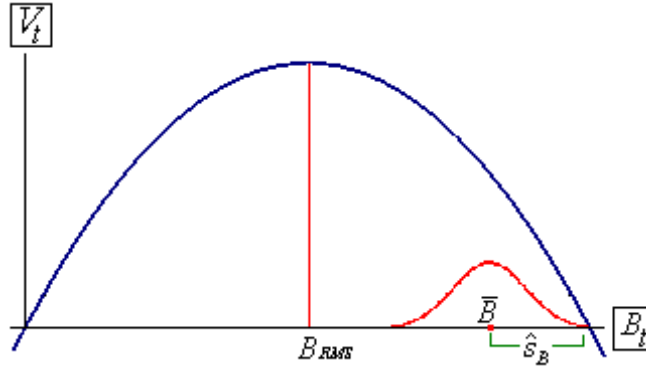


Figura 3.10a. Información centrada nun valor de biomasa do tramo decrecente

Se $\bar{B} > B_{RMS}$ e $K \geq 1$, cúmprese

$$\bar{B} - 2\delta = K \cdot \hat{s}_B. \quad (3.99)$$

Nesta situación, a diferenza entre o numerador e o denominador de (3.97) pódese expresar mediante

$$\begin{aligned} \text{Numerador} - \text{Denominador} \approx \hat{s}_e^3 \{ & 8\delta^4 KM + 12\hat{s}_e \delta^3 K^2 M^2 + 2\hat{s}_e^2 \delta^2 KM (1 + 3M^2 + 3K^2 M^2) \\ & + \hat{s}_e^3 \delta M^2 [(3K^2 - 3) + (7K^2 M^2 - 4M^2) + (K^4 M^2 - 1)] \\ & + \hat{s}_e^4 \delta KM^3 [(K^2 - 1) + (2K^2 M^2 - M^2)] \} \quad (3.100) \end{aligned}$$

que resulta sempre positiva dadas as restricións de (3.98) e (3.99).

Isto significa que tamén nesta situación a estimación MC do modelo con erros

sobreestima o valor da biomasa onde se acada o rendemento máximo sostible. Polo que podemos enunciar a seguinte proposición:

Proposición 3.10. *Baixo as Hipóteses 3.2, 3.3, 3.5, 3.7 e 3.8a, a estimación MC do modelo definido polas expresións (3.69), (3.80) e (3.81) sobreestima o valor do regresor que maximiza o valor da variable explicada.*

E finalmente, propoñemos tamén unha hipótese alternativa á Hipótese 3.8a, que consideramos razoable naquelas situación nas que a biomasa estea centrada nun punto inferior.

Hipótese 3.8b: Se a variable biomasa está centrada nun punto inferior ao que determina o máximo da función cuadrática, a súa desviación típica non é maior que a súa media, tal como se ilustra na Figura 3.10b.

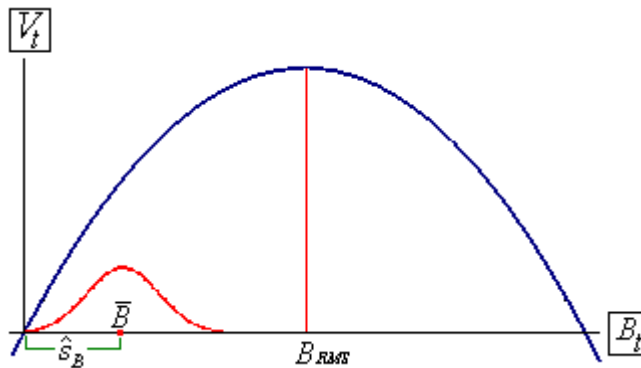


Figura 3.10b. Información centrada nun valor de biomasa do tramo crecente

Entón, se $\bar{B} < B_{RMS}$ e $K \geq 1$, temos

$$\bar{B} = K \cdot \hat{s}_B. \quad (3.101)$$

Neste contexto, a diferenza entre o numerador e o denominador de (3.87) é agora:

$$\begin{aligned}
 \text{Numerador} - \text{Denominador} = & \hat{\sigma}_e^5 \left\{ 2\delta^2 KM (1 + M^2 - K^2 M^2) \right. \\
 & + \hat{\sigma}_e M^2 (2\delta + 3\delta K^2 + 2\delta M^2 + 5\delta K^2 M^2 - \delta K^4 M^2) \\
 & \left. + \hat{\sigma}_e^2 KM^3 (2K^2 M^2 - M^2 + K^2 - 1) \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{3.102}$$

Os catro parámetros ($\hat{\sigma}_e$, δ , K e M) que definen o valor desta expresión dan lugar a múltiples combinacións que non semellan permitir enunciar un resultado inequívoco sobre o comportamento do signo de (3.102) se admitimos a Hipótese 3.8b. Agora ben, mediante un exercicio de simulación con unha folla de cálculo pódese deducir que, como norma xeral, o signo da diferenza de (3.102) virá determinado polas relacións recollidas na Táboa 3.5.

		Relación entre \bar{B} e B_{RMS} , sendo $\bar{B} < B_{RMS}$								
		$\bar{B} \approx 0$			$\bar{B} \approx \frac{B_{RMS}}{2}$			$\bar{B} \rightarrow B_{RMS}$		
Desviación típica da biomasa \rightarrow		$\hat{\sigma}_B \approx 0$	$\hat{\sigma}_B \approx \frac{\bar{B}}{2}$	$\hat{\sigma}_B \approx \bar{B}$	$\hat{\sigma}_B \approx 0$	$\hat{\sigma}_B \approx \frac{\bar{B}}{2}$	$\hat{\sigma}_B \approx \bar{B}$	$\hat{\sigma}_B \approx 0$	$\hat{\sigma}_B \approx \frac{\bar{B}}{2}$	$\hat{\sigma}_B \approx \bar{B}$
Desviación típica do erro de medida	$\hat{\sigma}_e \approx 0$	-	-	+	-	-	+	-	-	+
	$\hat{\sigma}_e \approx \frac{\hat{\sigma}_B}{2}$	-	-	+	-	-	+	-	+	+
	$\hat{\sigma}_e \approx \hat{\sigma}_B$	-	-	+	-	+	+	-	+	+

Táboa 3.5. Signo da diferenza definida en (3.102).

Da análise da Táboa 3.5, despréndese que só pode garantirse que a estimación MC subestima o valor de B_{RMS} cando a varianza da biomasa é excesivamente reducida.

3.5 Implicacións que se derivan da inconsistencia dos estimadores MC cando o regresor ten erros de medida, sobre o modelo de Gordon-Schaefer-Munro

Da análise das seccións anteriores deste capítulo tíranse dúas conclusións. En primeiro lugar, a estimación de ecuacións cuadráticas xerais presenta nesgos atenuantes nos estimadores dos parámetros de crecemento. En segundo lugar, ese tipo de nesgos tamén aparecen cando se utiliza a ecuación (3.69) que se propón habitualmente para representar a variación natural da biomasa.

Non quixéramos deixar de comentar, chegados a este punto, que as propiedades matemáticas da análise desenvolvida na sección 3.4 son tamén aplicables á ecuación que se utiliza frecuentemente para explicar o rendemento dunha pesquería en función do esforzo pesqueiro, pois formalmente é o mesmo tipo de expresión que se propuxo en (3.69). Polo tanto, se supoñemos que ás variables que expresan o esforzo pesqueiro teñen as propiedades que se lle atribuíron na sección 3.4 á biomasa, e tamén admitimos a posibilidade de que estean medidas con erros, poderemos tirar conclusións equivalentes ás indicadas nas Proposicións 3.7-3.10 pero nese outro contexto.

Como expuxemos no apartado 2 do Capítulo 1, o modelo de Gordon-Schaefer é parte integral da proposta que G. Munro fixo para analizar a xestión bioeconómica dunha pesquería pero localizada nunha zona xeográfica compartida, o cal permite incorporar a metodoloxía da teoría de xogos (Munro, 1979). Nesa proposta se utiliza unha ecuación⁵ que, formalmente, equivale ao tipo de ecuacións expresado en (3.69), para representar o comportamento dinámico da biomasa dun recurso pesqueiro, polo que é moi verosímil que xurdan nesgos nos estimadores MC cando se aplique na práctica. Co obxecto de analizar esta posibilidade, presentamos a continuación o modelo orixinal GSM.

3.5.1. Ecuacións do modelo teórico orixinal

O modelo orixinal de GSM inclúe dúas ecuacións básicas. Unha ecuación

⁵ Trátase da ecuación que expresamos máis adiante na expresión (3.104).

representa a produción medida en termos de capturas⁶,

$$C_{i,t} = q_i E_{i,t} B_t, \quad (3.103)$$

onde as variables están referidas a un momento de tempo t que habitualmente indica o ano, $C_{i,t}$ representa o nivel de capturas da flota dun país i no momento t , q_i indica o coeficiente de posibilidade de captura como indicador da tecnoloxía empregada, $E_{i,t}$ expresa o esforzo pesqueiro da flota do país i en t , e B_t indica a biomasa en t do recurso pesqueiro compartido.

A outra ecuación incluída no modelo GSM expresa a variación do stock como

$$B_{t+1} - B_t = \rho_1 B_t - \rho_2 B_t^2 - \sum_i C_{i,t}, \quad (3.104)$$

onde os parámetros ρ_1 e ρ_2 deben ser positivos.

Engadindo as variables que incorporan os aspectos económicos da xestión a (3.103) e (3.104), propónse a solución a un problema de optimización dinámica nun contexto discreto e nun entorno cooperativo entre dous países (os países 1 e 2), sen posibilidade de pagos bilaterais, coa expresión

$$\underset{E_1, E_2}{\text{Max}} \sum_{t=0}^{T-1} \left[\delta \varphi_1^t (p_1 C_{1,t} - \omega_1 E_{1,t}) + (1 - \delta) \varphi_2^t (p_2 C_{2,t} - \omega_2 E_{2,t}) \right], \quad (3.105)$$

suxeita ás restricións

$$\left. \begin{aligned} B_{t+1} - B_t &= \rho_1 B_t - \rho_2 B_t^2 - C_t \\ 0 &\leq E_{i,t} \leq E_{i\max} \\ 0 &\leq B_t \\ B(0) &= B_0 \end{aligned} \right\}, \quad (3.106)$$

onde p_i indica o prezo por unidade das capturas que foron feitas pola flota do país i , $i=1,2$,

⁶ Henderson e Tugwell (1979) propoñen unha variante desta expresión con parámetros no expoñente das variables explicativas.

ω_i representa o custe por cada unidade de esforzo empregada pola flota pesqueira do país i , φ_i expresa o factor de desconto en cada país, δ , $0 < \delta < 1$, é un parámetro que mide o poder de negociación do país 1, $E_{i \max}$ indica a capacidade máxima de esforzo do país i , e B_0 indica o nivel de biomasa no momento inicial.

Alternativamente, nun entorno non cooperativo, o comportamento de cada flota é o que resulta de

$$\text{Max}_{E_i} \sum_{t=0}^{T-1} \left[\varphi_i^t (p_i C_{i,t} - \omega_i E_{i,t}) \right], \quad i=1,2, \quad (3.107)$$

suxeita ás mesmas restricións de (3.106), polo que as solucións en ambos os dous casos pasan por estimar unha ecuación cuadrática do tipo proposto en (3.69).

3.5.2. *Simulacións comparativas*

Diversos autores fixeron unha aplicación práctica de modelos teóricos para investigar a xestión de recursos pesqueiros compartidos. Así, Armstrong e Flaaten (1991) e Sumaila (1997)⁷ investigaron a xestión do bacallau na área do mar de Barents, do que Noruega e Rusia se repartían aproximadamente o 90% das capturas. Agüero e González (1996) analizaron a pesca conxunta de bocarte e sardiña no océano Pacífico entre Chile e Perú utilizando un modelo moi similar ao modelo GSM. E Villasante e Sumaila (2009) aplicaron o modelo de GSM para investigar a xestión conxunta da lura na zona das illas Malvinas entre Arxentina e o Reino Unido.

O traballo de Domínguez e Surís (2007) é o que nos merece maior interese⁸. Nel estúdase a xestión compartida entre España e Portugal dos recursos de sardiña nas divisións

⁷ No seu modelo o comportamento biolóxico do recurso se estrutura por idades.

⁸ Varela e Surís (1994) utilizaron un enfoque similar, pero sen considerar a cooperación ou non entre países, senón só a posibilidade de que existise libre acceso ou un único dono do recurso. E Aliaga et al. (2001) estimaron os puntos de referencia biolóxicos e económicos para a pesca conxunta de bocarte e sardiña no norte de Chile.

VIIIc e IXa do ICES partindo dos datos de informes do propio ICES. As características máis salientables da serie temporal de biomasa que utilizaron son as indicadas na Táboa 3.6, na que destacamos que os contrastes de normalidade permiten considerar que a biomasa observable pode aceptarse que segue unha distribución Normal de probabilidade.

Período: 1978-1999		
Media	\bar{B}	437.666 toneladas
Desviación típica	\hat{s}_B	116.340 toneladas
Coefficiente de variación	CV	0,27
Test de Shapiro-Wilk	S-W	0,9505 (p=0.32)
Test de Jarque-Bera	J-B	1,2155 (p=0.54)
Test K-S (Lilliefors)	K-S	0,1470 (p≈0.24)

Táboa 3.6. Características da serie temporal da biomasa utilizada por Domínguez e Surís (2007).

A estimación da ecuación que representa o crecemento natural fíxose nese interesante traballo aplicando o método de mínimos cadrados indirectamente á expresión (3.104), o cal permite acadar os resultados da Táboa 3.7.

Modelo estimado: $\hat{V}_t = 0,9167872B_t - 0,0000011844B_t^2$		
Biomasa para RMS	\hat{B}_{RMS}	387.028 toneladas
Variación natural en RMS	\hat{V}_{RMS}	177.411 toneladas

Táboa 3.7. Características do modelo estimado.

Na Táboa 3.7 salientamos que o valor estimado da biomasa que permite conseguir o rendemento máximo sostible é inferior á media mostral da serie ($B_{RMS} < \bar{B}$), polo que neste caso cúmprese a Hipótese 3.8a que representamos anteriormente mediante a Figura 3.10a. Isto ten como consecuencia que a estimación de B_{RMS} mediante MC sería inconsistente de existir erros de medida aleatorios con distribución normal na biomasa, segundo a Proposición 3.10.

A representación gráfica dos valores observados das variables e da ecuación estimada é a que aparece na Figura 3.11.

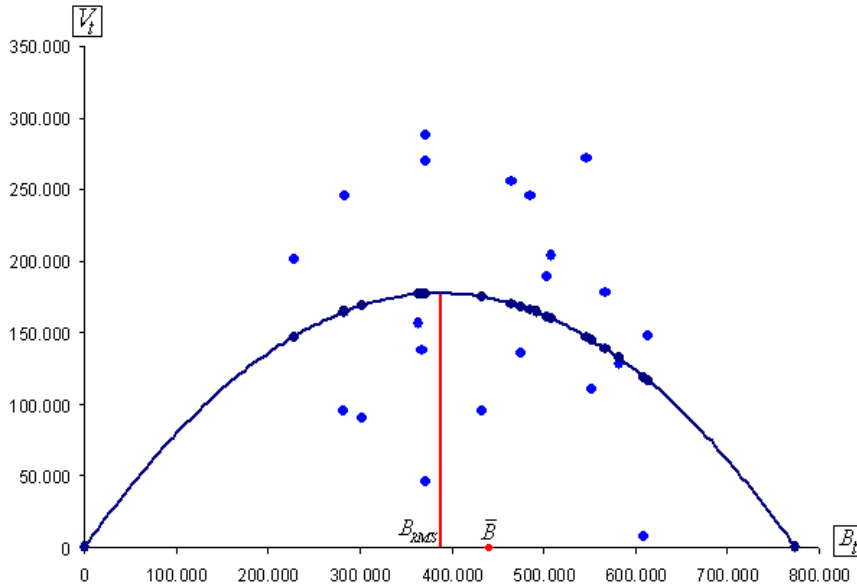


Figura 3.11. Axuste do modelo estimado da Táboa 3.7.

Sen que a nosa intención sexa cuestionar os resultados de Domínguez e Surís (2007), presentamos a continuación os resultados que se obterían nunha simulación que ilustra que acontecería ao estimar un modelo latente no que a serie temporal da biomasa tivese a mesma media e a mesma desviación típica da Táboa 3.5, pero baixo o suposto de que os valores observados inclúsen o tipo de erro de medida definido na Hipótese 3.3. E dicir, imos expoñer cal sería o modelo latente que se ‘ocultaría’ detrás dun modelo estimado que cumpriase as hipóteses sobre a distribución de perturbacións, erros e biomasa que se utilizaron na sección 3.4, supoñendo que se puidese dispoñer dun tamaño da mostra suficientemente grande.

Sendo minimamente rigorosos debemos indicar agora que os valores simulados deben ter as características da Táboa 3.8 que, expresados coa notación que utilizamos con

anterioridade para as variables observadas con erros, serían:

Media	\bar{w}	437.666 toneladas
Desviación típica	$\hat{s}_w = \sqrt{\hat{s}_B^2 + \hat{s}_e^2}$	116.340 toneladas
Coefficiente de variación	CV	0,27

Táboa 3.8. Características da biomasa observada simulada.

Admitindo que a desviación típica dos erros de medida é proporcional á desviación típica da biomasa latente a través do parámetro M de (3.98), obtemos os resultados da Táboa 3.9 cando $\hat{s}_e^2 = 10\% \cdot \hat{s}_B^2$. Neles se confirma a sobreestimación do valor da biomasa que permite acadar o máximo rendemento sostible, tal como se indicou na Proposición 3.10.

É dicir, que a estimación MC proporía un valor para a biomasa no punto de rendemento máximo sostible (RMS), igual ao calculado no traballo de Domínguez e Surís (2007) cando realmente a biomasa no punto RMS do modelo latente sería 7.529 toneladas inferior nese hipotético caso, isto é, un 2% menor.

Modelo latente con $\hat{s}_e^2 = 0,1 \cdot \hat{s}_B^2$		
Modelo simulado latente: $V_t = 0,93847707B_t - 0,00000123647B_t^2$		
Biomasa para RMS	B_{RMS}	379.499 toneladas
Variación natural en RMS	V_{RMS}	178.075 toneladas
Modelo simulado estimado: $\hat{u}_t = 0,9167872w_t - 0,0000011844w_t^2$		
Biomasa para RMS	\hat{w}_{RMS}	387.028 toneladas
Variación natural en RMS	\hat{u}_{RMS}	177.411 toneladas

Táboa 3.9. Características do modelo simulado.

A Figura 3.12 ilustra a situación descrita na Táboa 3.9.

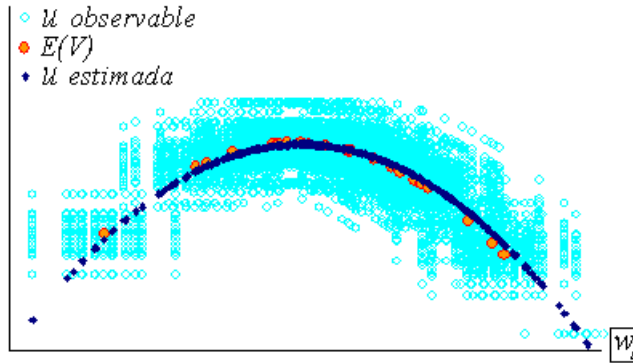


Figura 3.12. Axuste do modelo estimado da Táboa 3.9.

Se admitimos un erro con unha varianza maior, teríamos os resultados da Táboa 3.10 cando $\hat{s}_e^2 = 25\% \cdot \hat{s}_B^2$, e que son representados na Figura 3.13. Nesa situación a sobreestimación de B_{RMS} sería de 17.391 toneladas, o que equivale a un 4,7%.

Modelo latente con $\hat{s}_e^2 = 0,25 \cdot \hat{s}_B^2$		
Modelo simulado latente: $V_t = 0,97035166 B_t - 0,0000013125741 B_t^2$		
Biomasa para RMS	B_{RMS}	369.637 toneladas
Variación natural en RMS	V_{RMS}	179.339 toneladas
Modelo simulado estimado: $\hat{u}_t = 0,9167872 w_t - 0,0000011844 w_t^2$		
Biomasa para RMS	\hat{w}_{RMS}	387.028 toneladas
Variación natural en RMS	\hat{u}_{RMS}	177.411 toneladas

Táboa 3.10. Características do modelo.

A Figura 3.13 ilustra a situación representada na Táboa 3.10.

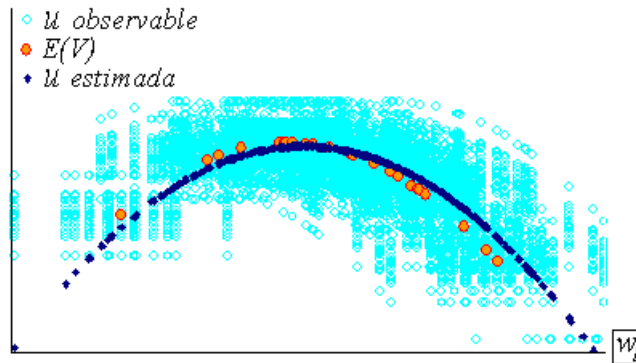


Figura 3.13. Axuste do modelo estimado da Táboa 3.10.

Naturalmente, estes resultados non dan unha idea exacta sobre si existe unha alta ou baixa probabilidade de que se estean a producir comportamentos como os verificados nestas simulacións cando se fan aplicacións prácticas do modelo GSM ou de algunha das súas variantes. Non obstante, cremos que si xustifican a necesidade de ter en conta os posibles efectos dos erros de medida na variable explicativa á hora de determinar os puntos de referencia aos que se fixo alusión no apartado 3.4.3. Ter en conta os nesgos que provoca a estimación MC nos estimadores dos parámetros (e consecuentemente no valor de B_{RMS}) e que foron determinados nas Proposicións 7-10, sería certamente de gran axuda nesa tarefa.

3.5.3. Consecuencias económicas

Dado que non é posible establecer unha dirección inequívoca do nesgo na estimación MC do modelo de (3.69) con erros de medida no regresor, salvo cando a información está centrada no valor de B_{RMS} ou nalgún punto superior, tampouco é posible determinar inequívocamente a repercusión económica deste feito no modelo GMS. Pero do que non cabe ningunha dúbida é de que, de utilizar esa metodoloxía de estimación con este tipo de modelos, será frecuente a tendencia da mesma a suxerir valores de rendemento máximo sostible do recurso maiores aos que se obterían se tivésemos información sen erros.

Previsiblemente cabe agardar que os rendementos económicos actualizados da xestión do recurso pesqueiro veranse máis afectados canto máis sensibles sexan estes aos parámetros da ecuación (3.69). Dado que se demostrou analiticamente a dimensión do nesgo que se produce ao realizar a estimación MC, tamén será posible determinar en cada caso unha avaliación do rendimento máximo latente que pode ser maior ou menor que o inferido do modelo estimado. Pódese conxecturar que, en caso de ser menor, os rendementos económicos do modelo estimado van tender a sobreestimar aos que se obterían cos valores dos parámetros estimados con un método que dispuxese de estimadores consistentes. A razón é que podemos dar por suposto que tanto os niveles de biomasa nos que o recurso é sostible, como os límites máximos dos mesmos, son maiores do que o principio da precaución suxeriría polo que as capturas do modelo latente tenderán a ser menores.

Así e todo, non é banal a posibilidade de que a estimación MC poda estar sobreestimando o valor da biomasa que maximiza a variación natural da biomasa (ou o nivel de capturas que permite acadar o rendimento máximo sostible) e, ao mesmo tempo, subestimando o propio valor do rendimento máximo. Isto dependerá da relación entre o nesgo do estimador r_1 e o nesgo do estimador r_2 . Quérese dicir que pode darse a situación na que o modelo latente propoña un valor da biomasa que maximiza a variación natural que sexa menor que o proposto polo modelo estimado, pero que simultaneamente supoña unha maior velocidade de crecemento do recurso.

Por outra banda, é ben coñecido que nos modelos de optimización que comparan as solucións cooperativas coas solucións non cooperativas como acontece co modelo GSM, a solución cooperativa comporta beneficios en xeral maiores que a solución non cooperativa. Agora ben, habería que determinar se a vantaxe dunha solución sobre a outra, en termos de beneficios, é moi sensible ou non á posibilidade de que as estimacións dos parámetros da ecuación da variación temporal da biomasa poidan presentar nesgos, sobre todo se estes implican unha sobreestimación de B_{RMS} , que como se indicou é a posibilidade máis verosímil.

3.6 Conclusións

Podemos concluir a análise feita neste capítulo dicindo que o método de estimación de mínimos cadrados non é recomendable para estimar modelos cuadráticos con unha única variable preditora, que inclúan erros de medida na mesma (salvo que se corrixan os resultados que proporciona). En efecto, ao estimar co método MC unha ecuación cuadrática xeral con información sobre o regresor simétrica e centrada no valor deste que a fai máxima, demostramos dous importantes resultados. En primeiro lugar, o estimador do parámetro que representa a concavidade da función non é consistente, pois presenta un nesgo atenuante dado pola relación entre o cadrado da varianza do regresor latente e o cadrado da suma desa varianza e a varianza do erro de medida. En segundo lugar, o estimador do parámetro que representa o valor máximo que pode tomar a función, tampouco é consistente, pois presenta un nesgo atenuante que ven dado pola relación entre o parámetro que expresa a concavidade da función, a varianza do regresor latente e a varianza do erro de medida.

Adicionalmente, se a información sobre o regresor latente non está centrada no valor do regresor latente que maximiza a función, obtivemos dúas conclusións. Por unha parte, os estimadores dos parámetros que representan a concavidade da función e o valor máximo da mesma manteñen o mesmo nesgo atenuante que se produce na situación enunciada no parágrafo anterior. Por outra parte, o estimador que permite calcular o valor do regresor onde a función se fai máxima ten un nesgo que o esaxera (atenúa) se a información está centrada no tramo crecente (decrecente) da función latente.

Por último, verificouse que cando se estima con MC unha función cuadrática moi particular que se utiliza habitualmente para representar o crecemento natural da biomasa ou o rendemento dunha pesquería en termos de capturas, os estimadores MC da concavidade da función cuadrática, do valor do regresor que fai máxima esa función e da taxa de crecemento da función sigmoidal implícita na mesma, presentan nesgos cando o regresor ten distribución normal de probabilidade e os valores observables do mesmo incorporan erros de medida estatisticamente independentes do regresor e con distribución normal de

probabilidade. Aínda que a dirección deses nesgos depende do tramo da función sobre o que se dispoña de información observable, en xeral son nesgos que convidan a subestimar a curvatura da función cuadrática latente e a taxa de crecemento da función sigmoidal implícita, e a sobreestimar o valor do regresor latente que maximiza a función cuadrática, coa excepción de que a información do regresor latente teña pouca dispersión.

Bibliografía

- AGÜERO, M.; GONZÁLEZ, E. (1996): “Managing Transboundary Stocks of Small Pelagic Fisheries: Problems and Options”. *World Bank Fisheries Series*. Discussion Paper n° 329.
- ALIAGA, B.; GÓMEZ, D.; NEIRA, S. (2001): “Análisis bioeconómico de la pesquería de sardina (*Sardinops sagax*) y anchoveta (*Engraulis ringens*) de la zona norte de Chile”. *Investigaciones Marinas*, vol. 29, n° 2: pp. 15-23.
- ARMSTRONG, C.W.; FLAATEN, O. (1991): “The Optimal Management of a Transboundary Resource: The Arcto-Norwegian Cod Stock”. Arnson, R.; Bjørndal, T. (ed.): *Essays on the Economics of Migratory Fish Stocks*, Ed. Springer-Verlag: pp. 137-152.
- BEVERTON, R.J.H.; HOLT, S.J. (1957): “On the Dynamics of Exploited Fish Populations”. *Fishery Investigations, Ministry of Agriculture, Fisheries and Food, Great Britain*, series II, vol. XIX.
- CADIMA, E.L. (2003): *Manual de evaluación de recursos pesqueros*. Fisheries Technical Paper 383. FAO.
- CERDÁ, E. (2001): *Optimización dinámica*, Ed. Prentice Hall.
- CHOW, G.C. (1997): *Dinamic Economics: optimization by the Lagrange method*, Ed. Oxford Univ. Press.
- CONRAD, J.M. (1999): *Resource Economics*, Ed. Cambridge Univ. Press.
- COTERO, C.E.; GREEN, Y. (1997): “Spawning Biomass of the Northern Anchovy (*Engraulis mordax*) in the Gulf of California during 1991”. *Col COFI Rep.*, 38: pp. 171-179.
- DOMÍNGUEZ, M.; SURÍS, J.C. (2007): “Cooperation and non-cooperation in the Iberoatlantic sardine shared stock fishery”. *Fisheries Research*, 83: pp. 1-10.
- FAO (1995): *Code of Conduct for Responsible Fisheries*. FAO.
- GINI, C. (1921): “Sull'interpolazione de una retta quando i valori della variable indipendente sono affetti da errori accidentali”. *Metroeconomica*, 1: pp. 63-82.
- HADDON, M. (2001): *Modelling and Quantitative Methods in Fisheries*, Ed. Chapman & Hall.

- HENDERSON, J. V.; TUGWELL, M. (1979): "Exploitation of the lobster fishery: Some empirical results". *Journal of Environmental Economics and Management*, vol. 6(4): pp. 287-296.
- HILL, K.T.; LO, N.C.H; MACEWICZ, B.J.; CRONE, P.R.; URAGA, R.F. (2009): "Assessment of the Pacific Sardine Resource in 2009 for U.S. Management in 2010". *NOAA Technical Memorandum NMFS*, SWFSC-452.
- LÓPEZ VEIGA, E.C. (200): *Manual de política pesqueira*, Ed. Xunta de Galicia.
- MUNRO, G. R. (1979): "The Optimal Management of Transboundary Renewable Resources". *Canadian Journal of Economics*, 12 (3): pp. 355-376.
- NAKKEN,O.; SANDBERG, P.; STEINSHAMM; S.I. (1996). "Reference points for optimal fish stock management: A lesson to be learned from the Northeast Arctic cod stock". *Marine Policy*, vol. 20, nº 6: pp. 447-462.
- ROMERO, C. (1994): *Economía de los recursos ambientales y naturales*. Ed. Alianza Editorial.
- SIMMONDS, E. J.; PORTILLA, E; SKAGEN, D.; BEARE, D.; REID, D.G. (2010): "Investigating agreement between different data sources using Bayesian state-space models: an application to estimating NE Atlantic mackerel catch and stock abundance". *ICES Journal of Marine Science*, nº 67: pp. 1138-1153.
- SUMAILA, U.R. (1997): "Cooperative and non-cooperative exploitation of the Arcto-Norwegian Cod Stock". *Environmental and Resource Economics*, 10: pp. 147-165.
- SURÍS, J. C. (1993): "Regulation of the Iberoatlantic Sardine". *Environmental and Resource Economics*, vol. 3, nº 5: pp. 457-470.
- TRENKEL, V. M. (2008): "A two-stage biomass random effects model for stock assessment without catches: what can be estimated using only biomass survey indices?". *Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences*, 65: pp. 1024-1035.
- VARELA, M.M.; SURÍS, J.C. (1994): "Modelo de explotación de recursos pesqueros". AZQUETA, D.; FERREIRO, A. (eds): *Análisis económico y gestión de recursos naturales*, Ed. Alianza Editorial.
- VILLASANTE, S.; SUMAILA, R. (2009): "Estimating the economic benefits of cooperative and non-cooperative management of the *Illex argentinus* fishery in South America". *Latin American and Caribbean Environmental Economics Working Paper Series*, nº 2009-WP14.

Capítulo 4

HIPÓTESE DE DISTRIBUCIÓN ASIMÉTRICA DE PROBABILIDADE DO REGRESOR NUN MODELO CUADRÁTICO PARTICULAR

4.1 Introducción

Tal e como vimos polo miúdo nos capítulos anteriores, a estimación polo método MC dos parámetros dos modelos non lineais considerados nos mesmos non garante en absoluto que se estean a utilizar estimadores que cumpran cando menos a propiedade de consistencia. En efecto, no Capítulo 2 demostramos, mediante simulacións, que é suficiente con que a variable explicativa dun modelo sigmoideal siga unha distribución simétrica de probabilidade, independente das variables de erro e de perturbación, para que se produzan nesgos atenuantes no estimador do fundamental parámetro que representa a taxa de crecemento da sigmoide. Tamén comprobamos a influencia que ten o tramo da función sobre o que se dispón de información na determinación dos nesgos nos estimadores MC.

Baixo condicións similares, no Capítulo 3 verificamos que se produce tamén un comportamento semellante nos modelos cuadráticos, e mesmo puidemos determinar con precisión como se poden calcular os nesgos que se producen nos estimadores. Igualmente, analizamos con detalle un modelo cuadrático particular que se utiliza tradicionalmente na formulación de Gordon-Schaefer do crecemento natural da biomasa dun recurso pesqueiro.

Do antedito despréndese que sería recomendable buscar algunha vía de solución ao problema que supón esa falta de consistencia dos estimadores MC, pois defendemos que é preferible utilizar metodoloxías que sexan acordes coas hipóteses máis realistas que sustentan os modelos¹ e coherentes cos principios que están na base da súa proposta e utilización. Nese sentido, cremos que a solución podería seguir dúas vías.

Unha primeira vía de solución é operativa se podemos coñecer con precisión de antemán o nesgo que se produce nos estimadores MC. Neste caso podería ‘corrixirse’ a estimación con esa información, sempre e cando esa corrección permitise á súa vez obter resultados consistentes. Esa vía de solución é posible investigala cos resultados que acadamos no Capítulo 3, no que se detallaron as expresións matemáticas dos nesgos tanto no

¹ Como é o caso da hipótese de que a variable explicativa poda estar medida con erros.

modelo cuadrático con tres parámetros como no caso particular do modelo de crecemento loxístico de (3.69) de Gordon-Schaefer. Para elo é preciso dispoñer de información sobre a relación entre a varianza dos erros de medida e a varianza do regresor observado, así como garantir que se poidan soste as hipóteses sobre as distribucións normais de probabilidade das variables. Respecto a este último punto, indicamos neste capítulo un primeiro paso para investigar no futuro as consecuencias que se derivarían de utilizar outra distribución de probabilidade quizais máis razoable que a distribución normal no modelo de (3.69). Propoñemos unha función de distribución Gamma con tres parámetros que recollan o valor mínimo da variable, a escala da función e a forma da mesma. A súa utilización obrigaría, como veremos, a investigar as propiedades dun tipo de funcións de distribución relativamente que non foron propostas na literatura científica ata hai pouco máis de vinte anos e que se denominan K-distribucións².

Esta primeira vía non sería posible nos modelos sigmoidais analizados no Capítulo 2, ata atopar unha expresión que determine ou aproxime con suficiente precisión os nesgos que se producen en función de algúns momentos das variables como poderían ser:

- a media do regresor latente e a súa distancia respecto do valor que se corresponde co punto de inflexión da función;
- a varianza do regresor observado; e
- a varianza dos erros de medida.

Unha segunda vía de solución podería pasar por propoñer un método de estimación alternativo a MC. Cremos que sería posible avanzar nesta dirección, investigando a viabilidade da estimación máximo-verosímil dos modelos que se formularon nesta Tese de Doutoramento. Isto esixe determinar as funcións de distribución das variables observables e, consecuentemente, propoñer previamente as hipóteses sobre cómo se distribúe o regresor latente, os erros de medida e as perturbacións. A partir desas hipóteses se debería investigar se é posible atopar funcións de densidade de probabilidade que poidan ser razoablemente manexables e estimables para:

² Ver Jakeman e Pusey (1978).

Capítulo 4. Hipótese de distribución asimétrica de probabilidade do regresor nun modelo cuadrático particular

- a suma do regresor latente e do erro de medida,
- a variable dependente latente, e
- a suma da variable dependente latente e da perturbación aleatoria.

Isto non é sempre posible a curto prazo, polo que esta vía de solución supón facer un investimento en tempo e recursos que pode tardar anos en ofrecer resultados, dependendo da evolución de novos achados relacionados coa teoría das distribucións de probabilidade e da súa implantación en aplicacións informáticas que permitan o seu manexo. Na última sección do presente capítulo consideramos que a proposta dunha distribución de probabilidade Beta con catro parámetros para o regresor latente, sería unha hipótese interesante como punto de partida desta segunda vía de solución.

O resto do capítulo está organizado da seguinte forma. Na sección 4.2 enunciámos o tipo de distribucións que nos parecen máis sensatas para expresar o comportamento probabilístico dos indicadores de biomasa, coa restrición de que non podan tomar valores negativos. Na sección 4.3 describimos as propiedades da función de densidade Gamma definida con tres parámetros que decidimos escoller como alternativa á función normal e que cremos que permitirá nun futuro detallar os nesgos que se poidan producir ao utilizar o método de estimación MC con ese outro suposto distributivo. Tamén propoñemos algunhas hipóteses que nos parecen razoables nese contexto sobre a función de distribución dos erros de medida. Na sección 4.4 demostramos cal é a distribución de probabilidade da biomasa observada que inclúe erros de medida aditivos, supoñendo que unha e outro seguen distribucións Gamma, aplicando unha convolución de funcións. Na sección 4.5 demostramos cáles son os momentos centrados e non centrados máis representativos da función achada na sección 4.4, pois con esa información xa sería posible investigar as propiedades dos estimadores MC da ecuación expresada en (3.69) no suposto de que a variable explicativa se mida con erros aditivos. Por último, na sección 4.6 propoñemos un exemplo das dificultades que xorden ao pretender estimar un modelo non linear como o expresado en (3.69) mediante o método da máxima verosimilitude, asumindo a hipótese de que o regresor latente poida ter unha distribución de probabilidade alternativa á Normal, de tipo Beta con catro parámetros.

4.2 Distribucións de probabilidade asimétricas de variables con valores non negativos

Entre as alternativas que consideramos máis realistas que a función Normal para representar a distribución de probabilidade da biomasa podemos considerar algunha das funcións da Táboa 4.1 ou a xeneralización dalgunha delas, posto que son apropiadas para variables que unicamente poden tomar valores non negativos:

	Media	Varianza
Beta (α, β)	$\frac{\alpha}{\alpha + \beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2 (1 + \alpha + \beta)}$
Chi (n)	$\sqrt{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$	$2 \cdot \left[\frac{\Gamma\left(\frac{2+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)^2} \right]$
Chi ² (n)	n	$2n$
Erlang (α, β)	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$
F de Fisher (α, β)	$\frac{\beta}{\beta - 2}$	$\frac{2\beta^2 (\alpha + \beta - 2)}{\alpha (\beta - 4) (\beta - 2)^2}$
Gamma (β, δ)	$\beta\delta$	$\beta^2\delta$
Log-normal (α, β)	$e^{\left(\alpha + \frac{\beta^2}{2}\right)}$	$e^{(2\alpha + \beta^2)} (e^{\beta^2} - 1)$
Triangular (α, β, δ)	$\frac{\alpha + \beta + \delta}{3}$	$\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 - \alpha\beta - \alpha\delta - \beta\delta}{18}$
Weibull (α, β)	$\beta \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha + 1}{\alpha}\right)$	$\beta^2 \left\{ \Gamma\left(\frac{\alpha + 2}{\alpha}\right) - \left[\Gamma\left(\frac{\alpha + 1}{\alpha}\right) \right]^2 \right\}$

Táboa 4.1. Media e varianza de funcións de distribución de probabilidade.

Se decidimos escoller unha destas funcións para representar o comportamento da biomasa latente e admitimos que os valores observables da biomasa teñen incorporados

Capítulo 4. Hipótese de distribución asimétrica de probabilidade do regresor nun modelo cuadrático particular

erros de medida, sería lóxico supoñer que a distribución de probabilidade deses erros mantivese tamén certa coherencia. E isto tamén quere dicir que haberá que analizar cómo será a distribución de probabilidade da biomasa observada.

4.3 Distribución de probabilidade de tipo Gamma (α, β, δ) para a biomasa latente e os erros de medida

A definición dos momentos centrados das funcións de densidade da sección 4.2, animounos a escoller unha delas pola simplicidade e manexabilidade dos mesmos. Trátase dunha xeneralización da función de distribución Gamma³ que utiliza tres parámetros, de tal xeito que se unha variable χ ten unha distribución de probabilidade de tipo Gamma (α, β, δ) estamos a supoñer que a súa función de densidade de probabilidade pode representarse coa ecuación⁴

$$f(\chi) = \frac{(\chi - \alpha)^{(\delta-1)}}{\beta^\delta \cdot \Gamma(\delta)} \cdot e^{-\frac{\chi-\alpha}{\beta}}, \quad (4.1)$$

onde se cumpre $\alpha \leq B \leq \infty$ (B denota a biomasa) o parámetro de escala é estritamente positivo, $\beta > 0$, e o parámetro de forma é tamén estritamente positivo, $\delta > 0$.

Nas Figuras 4.1a e 4.1b representamos as funcións de densidade (PDF)⁵ e de densidade acumulada (CDF)⁶ correspondentes a varias variables con este tipo de distribución de probabilidade con diversos valores para os parámetros de escala e de forma, nas que destacamos o feito de que están acoutadas por un límite inferior expresado mediante o parámetro α .

³ Non confundir coa función Gamma que se representa habitualmente co símbolo Γ .

⁴ Na investigación estatística utilízanse frecuentemente outras alternativas de formulación desta función de densidade nas que os parámetros represéntanse de forma lixeiramente diferente.

⁵ Probability Density Function.

⁶ Cumulative Density Function.

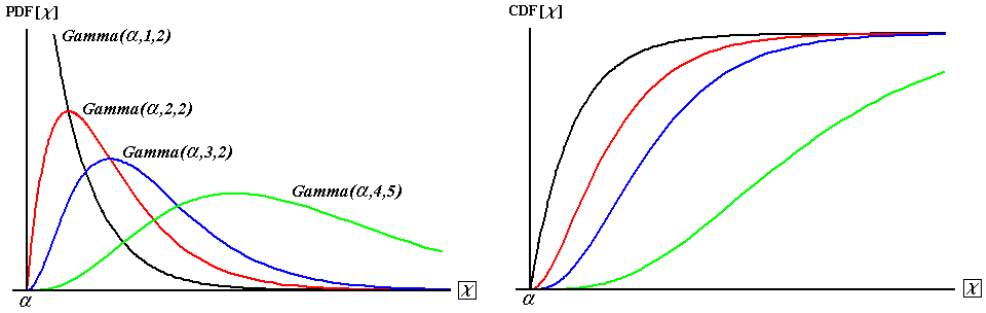


Figura 4.1a. Funcions de densidade Gamma (α, β, δ) .

Figura 4.1b. Densidade acumulada.

As propiedades máis salientables deste tipo de función de distribución son:

Propiedade I: A función característica é

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\chi}(t) &= E(e^{it\chi}) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\chi} \cdot f_{\chi}(\chi) \cdot d\chi \\
 &= \int_{\alpha}^{\infty} e^{it\chi} \cdot \frac{(\chi - \alpha)^{(\delta-1)}}{\beta^{\delta} \cdot \Gamma(\delta)} \cdot e^{-\frac{(\chi-\alpha)}{\beta}} \cdot d\chi \\
 &= (1 - it\beta)^{-\delta} e^{it\alpha}.
 \end{aligned} \tag{4.2a}$$

Propiedade II: O primeiro momento ou valor medio ven determinado por

$$m_1 = E(\chi) = \alpha + \beta \cdot \delta. \tag{4.2b}$$

Propiedade III: O segundo momento non centrado é

$$m_2 = \alpha^2 + 2\alpha \cdot \beta \cdot \delta + \beta^2 \cdot \delta \cdot (\delta + 1). \tag{4.2c}$$

Propiedade IV: A varianza ven dada por

$$\begin{aligned}
 V(\chi) &= E[\chi - E(\chi)]^2 \\
 &= m_2 - m_1^2 \\
 &= \beta^2 \cdot \delta.
 \end{aligned} \tag{4.2d}$$

Propiedade V: O terceiro momento non centrado é igual a

$$m_3 = \alpha^3 + 3\alpha^2 \cdot \beta \cdot \delta + 3\alpha \cdot \beta^2 \cdot \delta \cdot (\delta + 1) + \beta^3 \cdot \delta \cdot (\delta + 1) \cdot (\delta + 2). \quad (4.2e)$$

Propiedade VI: A asimetría da variable pode indicarse mediante

$$\begin{aligned} A(\chi) &= \frac{E[\chi - E(\chi)]^3}{[V(\chi)]^{3/2}} \\ &= \frac{m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3}{(m_2 - m_1^2)^{3/2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\delta}}. \end{aligned} \quad (4.2f)$$

Propiedade VII: O cuarto momento non centrado exprésase como

$$\begin{aligned} m_4 &= \alpha^4 + 4\alpha^3 \cdot \beta \cdot \delta + 6\alpha^2 \cdot \beta^2 \cdot \delta \cdot (\delta + 1) \\ &\quad + 4\alpha \cdot \beta^3 \cdot \delta \cdot (\delta + 1) \cdot (\delta + 2) + \beta^4 \cdot \delta \cdot (\delta + 1) \cdot (\delta + 2) \cdot (\delta + 3). \end{aligned} \quad (4.2g)$$

Propiedade VIII: A curtose da variable pode representarse mediante

$$\begin{aligned} K(\chi) &= \frac{E[\chi - E(\chi)]^4}{[V(\chi)]^2} \\ &= \frac{m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4}{(m_2 - m_1^2)^2} \\ &= 3 + \frac{6}{\delta}. \end{aligned} \quad (4.2h)$$

Propiedade IX: A moda da variable ven dada por

$$M(\chi) = \alpha + \beta \cdot (\delta - 1). \quad (4.2i)$$

Considerando que este tipo de función de densidade é aplicable á biomasa (B) e que esta non pode tomar valores negativos, podemos asumir que a súa distribución será de tipo Gamma ($0, \beta, \delta$) ou tamén chamada Gamma (β, δ), que é a utilizada habitualmente con este tipo de distribución. Establecemos así o seguinte suposto:

Hipótese 4.1: A biomasa B segue unha distribución de probabilidade cuxa función de densidade é ⁷

$$f(B) = \frac{B^{(\delta-1)}}{\beta^\delta \cdot \Gamma(\delta)} \cdot e^{-\frac{B}{\beta}}. \quad (4.3)$$

Unha vez establecido este suposto, necesitamos tamén determinar cómo se distribúen os erros de medida pero tendo en conta unha importante restrición: se non é lóxico que a biomasa latente poda ter valores negativos, tampouco é lóxico que os teña a biomasa observada. Qué implica isto?

Se existen erros de medida aditivos na biomasa (Z_B), a relación entre os valores observados (w) e os valores latentes (B) da mesma se recolle coa expresión

$$w = B + Z_B, \quad (4.4)$$

e se o cero é o mínimo valor que poden tomar w e B , entón a variable que expresa os erros de medida ten un valor mínimo que depende de cada valor de B . Por exemplo, se a biomasa latente de sardiña é de 500.000 toneladas, o erro de medida podería tomar un valor límite inferior que sería igual a esa mesma cantidade con signo negativo. E se decidimos utilizar tamén unha función de distribución Gamma de tres parámetros para recoller o comportamento dos erros, podemos propoñer o seguinte suposto.

Hipótese 4.2: O erro de medida Z_B segue unha distribución de probabilidade Gamma (a_*, b_*, d_*), onde $b_* > 0$, $d_* > 0$, cuxa función de densidade é a indicada nas expresións (4.5)-(4.7), nas que destacamos que os parámetros van variar por cada valor da biomasa latente, de aí o subíndice ' B ' de cada parámetro.

⁷ En adiante prescindimos de indicar o subíndice t por cuestións de comodidade na representación.

Capítulo 4. Hipótese de distribución asimétrica de probabilidade do regresor nun modelo cuadrático particular

$$\text{Dado } B \Rightarrow g(Z_B) = \frac{(Z_B - a_*)^{(d_*-1)}}{b_*^{d_*} \cdot \Gamma(d_*)} \cdot e^{-\frac{Z_B - a_*}{b_*}} \quad (4.5)$$

$$\text{Dado } B \Rightarrow g(Z_B) = \frac{(Z_B - a_B)^{(d_B-1)}}{b_B^{d_B} \cdot \Gamma(d_B)} \cdot e^{-\frac{Z_B - a_B}{b_B}} \quad (4.6)$$

$$\text{Dado } B \Rightarrow g(Z_B) = \frac{[Z_B - (-B)]^{(d_B-1)}}{b_B^{d_B} \cdot \Gamma(d_B)} \cdot e^{-\frac{Z_B - (-B)}{b_B}} \quad (4.7)$$

Isto significa que para cada valor da biomasa latente (B) temos unha función de densidade Gamma (a_B, b_B, d_B) ou Gamma ($-B, b_B, d_B$) particular para os posibles erros. Graficamente represéntase na Figura 4.2.

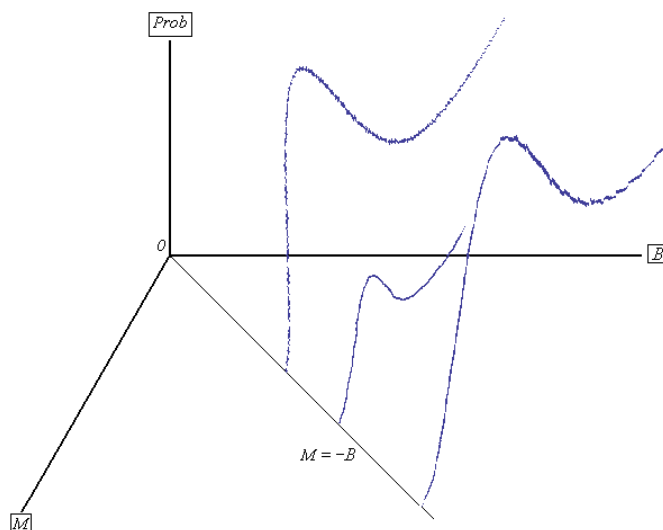


Figura 4.2. Densidade do erro de medida para cada valor da biomasa.

Neste punto semella razoable supoñer que o conxunto de todas as funcións de densidade dos erros de medida podan ter características comúns. Así, se a biomasa latente é de 1 tonelada, o erro de medida desa biomasa poderá ser como mínimo igual a (-1) tonelada, e ter unha varianza acorde ao rango de posibles valores que ten. Pero se a biomasa latente fose de 1 millón de toneladas, o valor mínimo do erro poderá ser de (-1) millón de toneladas

polo que o seu rango de variación é moito maior, por iso a varianza do erro para ese valor debería ser tamén moito maior. Por esa razón propoñemos establecer unha relación entre a varianza dos erros de medida e o valor da biomasa correspondente que expoñemos na Hipótese 4.3.

Hipótese 4.3: A varianza do erro de medida Z_B é proporcional ao cadrado da biomasa correspondente, é dicir,

$$V(Z_B) = k \cdot B^2 . \quad (4.8)$$

A Hipótese 4.3 ten como consecuencia que, considerando a propiedade equivalente a (4.2d), resulta

$$V(Z_B) = b_B^2 \cdot d_B . \quad (4.9)$$

Ademais, temos que decidir se é razoable supoñer que o valor agardado da variable que expresa o erro de medida é nulo ou non. Neste traballo consideramos que o máis razoable é considerar que na vida real, de existir erros de medida coas características que estamos propoñendo, o valor máis probable deses erros será cero. Nótese a diferenza cos supostos que se establecen cando se propón que os erros teñen distribución normal de probabilidade, pois nese caso o valor probable da variable, a súa moda, coincide co valor agardado ou medio. No caso das distribucións Gamma que estamos analizando neste capítulo iso non acontece, polo que temos que decidir se é máis plausible supoñer que teñen media nula, moda nula ou unha solución de compromiso entre ambas as dúas. Nós decantámonos por supoñer que a moda é nula, e dicir, que se observamos un valor w de biomasa, este conterà un erro de medida con posibles valores que van dende $(-B)$ ata infinito, pero dos que o máis probable será o cero.

Formalmente, estamos a propoñer o seguinte suposto:

Hipótese 4.4: O valor mais probable do erro de medida Z_B que ten distribución de probabilidade Gamma (a_B, b_B, d_B) é o cero.

Capítulo 4. Hipótese de distribución asimétrica de probabilidade do regresor nun modelo cuadrático particular

Iso vai significar que se consideramos o equivalente a (4.2i) resulta

$$\begin{aligned}M(Z_B) &= a_B + b_B \cdot (d_B - 1) \\ &= -B + b_B \cdot (d_B - 1) \\ &= 0,\end{aligned}\tag{4.10}$$

e

$$B = b_B \cdot (d_B - 1).\tag{4.11}$$

ou, alternativamente,

$$d_B = 1 + \frac{B}{b_B}.\tag{4.12}$$

Substituíndo (4.12) en (4.9) podemos rematar expresando os parámetros que caracterizan a función de densidade de probabilidade de cada variable de erro Z_B en función da razón (k) que a súa varianza representa respecto do cadrado da biomasa latente, e do propio valor (B) desa biomasa. Por un lado resulta

$$\begin{aligned}k \cdot B^2 &= b_B^2 \cdot d_B \\ &= b_B^2 \cdot \left(1 + \frac{B}{b_B}\right) \\ &= b_B^2 + B \cdot b_B,\end{aligned}\tag{4.13}$$

que permite deducir

$$b_B = B \cdot \frac{-1 + \sqrt{1 + 4k}}{2}\tag{4.14}$$

ou tamén

$$b_B = B \cdot K, \quad (4.15)$$

onde K debe ser necesariamente un número non negativo, $K \geq 0$, polo que tomamos o valor positivo da radicación de (4.14).

Por outro lado, substituíndo (4.14) en (4.12) resulta

$$d_B = 1 + \frac{1 + \sqrt{1 + 4k}}{2k}, \quad (4.16)$$

que deba ser necesariamente sempre maior ou igual a un, $d_B \geq 1$, polo que tomamos o valor positivo da radicación.

4.4 Distribución de probabilidade da suma de dúas variables con distribución Gamma con tres parámetros

A procura das dúas distribucións da sección 4.4 para expresar de xeito razoable a probabilidade con que a biomasa poda tomar un valor calquera e a variable de erro de medida calquera outro tamén, ten como finalidade establecer unha función de densidade de probabilidade para a suma de ambas as dúas, é dicir, para a biomasa observable. Se iso fora posible, e ademais se puidesen determinar algúns dos momentos que se correspondesen a ese tipo de distribución, teríase dado un primeiro paso que permitiría no futuro deseñar un modelo simulado que axudase a investigar dous aspectos de suma importancia: se os estimadores MC con ese tipo de supostos de distribución (que xa non implicarían necesariamente simetría nin normalidade como no Capítulo 3), tamén presentan nesgos, e se eses nesgos se poden acoutar, polo menos en determinadas condicións.

Ademais, ese paso pode ser un punto de partida para investigar se sería posible aplicar outro método de estimación que proporcionase estimadores con mellores

Capítulo 4. Hipótese de distribución asimétrica de probabilidade do regresor nun modelo cuadrático particular

propiedades que o método de MC, por exemplo o método de máxima verosimilitude⁸.

Para deducir cómo se distribúe unha variable aleatoria que resulta da suma de outras dúas, temos que acudir á teoría da convolución de distribucións que foi desenvolvida principalmente pola escola matemática francesa, de entre cuxos principais expoñentes merece sen dúbida destacarse o talento de Laurent Schwartz (1954, 1966)⁹.

No contexto que nos ocupa, aparte de pequenos matices técnicos, podemos solucionar esta cuestión calculando a función integral do produto das funcións de densidade das variables que se suman. Xeometricamente, isto equivale a asignar a cada posible valor da biomasa observable (w), o agregado das probabilidades asignadas a cada par (B, Z_B) situados nas rectas paralelas que cumpren a condición $w = B + Z_B$.

O produto das dúas funcións de densidade é o dado por:

$$f(B) \times g(Z_B) = \left(\frac{B^{(\delta-1)}}{\beta^\delta \cdot \Gamma(\delta)} \cdot e^{-\frac{B}{\beta}} \right) \cdot \left(\frac{(Z_B + B)^{(d_B-1)}}{b_B^{d_B} \cdot \Gamma(d_B)} \cdot e^{-\frac{Z_B+B}{b_B}} \right) \quad (4.17)$$

ou, alternativamente,

$$f(B) \times g(w - B) = \left(\frac{B^{(\delta-1)}}{\beta^\delta \cdot \Gamma(\delta)} \cdot e^{-\frac{B}{\beta}} \right) \cdot \left(\frac{w^{(d_B-1)}}{b_B^{d_B} \cdot \Gamma(d_B)} \cdot e^{-\frac{w}{b_B}} \right), \quad (4.18)$$

pero coas importantes condicións que propuxemos nas Hipóteses 4.3 e 4.4 e que permitiron expresar os parámetros de escala (b_B) e de forma (d_B) da densidade de probabilidade do erro, en función do valor latente da biomasa (B) e da razón (k), en (4.14) e (4.16).

⁸ Lembremos que, como xa apuntamos anteriormente, para poder aplicar este método de estimación é conveniente definir as funcións de densidade de probabilidade das variables observables.

⁹ Sen desmerecer por suposto a investigación da escola matemática soviética, que tivo un precedente neste campo en Sergei Sobolev.

Nas Figuras 4.3a e 4.3b preséntase un exemplo da función de densidade conxunta que resulta de considerar a Hipótese 4.1 en relación á biomasa e a Hipótese 4.2 sobre os erros de medida.

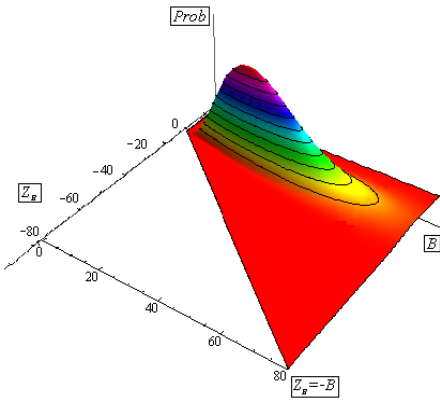


Figura 4.3a. Densidade conxunta

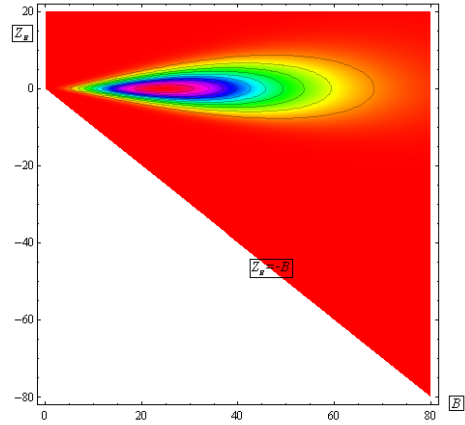


Figura 4.3b. Perspectiva das zonas de maior densidade

O cálculo da función integral realizouse coas aplicacións informáticas Maple® 13 de Maplesoft™ e Mathematica® 7 de Wolfram Research Inc., acadándose nas dúas o mesmo resultado. Calculamos

$$\begin{aligned}
 h(w) &= \int_0^{\infty} [f(B) \cdot g(w - B)] dB \\
 &= \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{B^{(\delta-1)}}{\beta^{\delta} \cdot \Gamma(\delta)} \cdot e^{-\frac{B}{\beta}} \right) \cdot \left(\frac{w^{(d_B-1)}}{b_B^{d_B} \cdot \Gamma(d_B)} \cdot e^{-\frac{w}{b_B}} \right) \right] dB \\
 &= \int_0^{\infty} \left[\left(\left(\frac{B}{\beta} \right)^{\delta} \cdot \frac{e^{-\frac{B}{\beta}}}{B \cdot \Gamma(\delta)} \right) \cdot \left(\left(\frac{w}{K \cdot B} \right)^{\left(1+\frac{1}{K}\right)} \cdot \frac{e^{-\frac{w}{K \cdot B}}}{w \cdot \Gamma\left(1+\frac{1}{K}\right)} \right) \right] dB \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

e as aplicacións informáticas ofreceron o seguinte resultado

Capítulo 4. Hipótese de distribución asimétrica de probabilidade do regresor nun modelo cuadrático particular

$$h(w) = 2 \cdot \frac{\left(\frac{w}{\beta K}\right)^{\left(\frac{1-K+\delta K}{2K}\right)}}{\beta \cdot \Gamma(\delta) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{K}\right)} \cdot \text{BesselK}\left[\frac{1}{K} + 1 - \delta, 2\sqrt{\frac{w}{\beta K}}\right], \quad (4.20)$$

que graficamente ilústrase na Figura 4.4, supoñendo $\beta=5$, $\delta=10$, $K=0,1$:

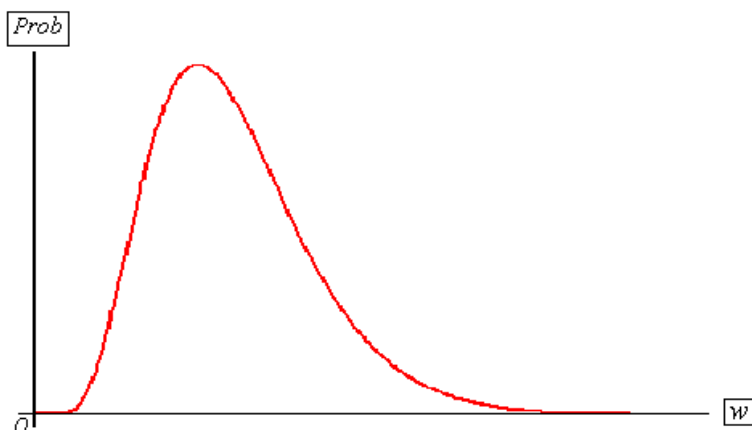


Figura 4.4. Densidade de w .

A función definida en (4.20) cumpre as condicións para poder ser considerada unha función de densidade de probabilidade. En Dupraz (1977) demóstrase que o produto de convolución de dúas funcións do espazo constituído polas denominadas *funcións de decrecemento rápido*, pertence tamén a ese espazo¹⁰, e as funcións de densidade Gamma son un exemplo dese tipo de funcións. Por outra banda, Jakeman e Pusey (1978) nas súas investigacións sobre a detección de radiación electromagnética cos sistemas de radar, introducen un novo tipo de funcións de densidade que denominan K-distribucións por estar baseadas nas funcións Bessel K modificadas. A expresión de (4.20) equivale formalmente a ese tipo de funcións de distribución.

¹⁰ Ver páxina 42 e páxina 80 de Dupraz (1977).

4.5 Momentos da convolución de dúas distribucións de probabilidade particulares Gamma con tres parámetros

Os cálculos realizados coas aplicacións informáticas mencionadas na sección precedente sobre a función $h(w)$ de (4.20) permiten afirmar que esa función cumpre as seguintes propiedades:

$$\int_0^{\infty} h(w) dw = 1, \quad (4.20a)$$

$$\begin{aligned} E(w) &= \int_0^{\infty} w \cdot h(w) \cdot dw \\ &= (1 + K) \cdot \beta \cdot \delta, \end{aligned} \quad (4.20b)$$

$$\begin{aligned} E(w^2) &= \int_0^{\infty} w^2 \cdot h(w) \cdot dw \\ &= (1 + K) \cdot (1 + 2K) \cdot \beta^2 \cdot \delta \cdot (1 + \delta), \end{aligned} \quad (4.20c)$$

$$\begin{aligned} E(w^3) &= \int_0^{\infty} w^3 \cdot h(w) \cdot dw \\ &= (1 + K) \cdot (1 + 2K) \cdot (1 + 3K) \cdot \beta^3 \cdot \delta \cdot (1 + \delta) \cdot (2 + \delta), \end{aligned} \quad (4.20d)$$

e

$$\begin{aligned} E(w^4) &= \int_0^{\infty} w^4 \cdot h(w) \cdot dw \\ &= \frac{K^5 \cdot \beta^4 \cdot \Gamma\left(5 + \frac{1}{K}\right) \cdot \Gamma(4 + \delta)}{\Gamma\left(\frac{1}{K}\right) \cdot \Gamma(\delta)}. \end{aligned} \quad (4.20e)$$

Capítulo 4. Hipótese de distribución asimétrica de probabilidade do regresor nun modelo cuadrático particular

Entón tomando (4.20b) e (4.20c) podemos definir

$$\begin{aligned} v(w) &= E(w^2) - E(w)^2 \\ &= (1+K) \cdot \beta^2 \cdot \delta \cdot [1+K(2+\delta)], \end{aligned} \quad (4.21a)$$

$$\begin{aligned} A(w) &= \frac{E[w - E(w)]^3}{[v(w)]^{3/2}} \\ &= 2 \cdot \frac{(1+K) \cdot \beta^3 \delta \cdot (1+5K+3K\delta+6K^2+6K^2\delta+K^2\delta^2)}{[(1+K) \cdot \beta^2 \delta \cdot (1+2K+K\delta)]^2}, \end{aligned} \quad (4.21b)$$

e

$$\begin{aligned} K(w) &= \frac{E[w - E(w)]^4}{[v(w)]^2} \\ &= 3 \cdot \frac{2+\delta+K[18+\delta(17+2\delta)+K(52+66\delta+18\delta^2+\delta^3)+K^2(48+72\delta+28\delta^2+3\delta^3)]}{[(1+K) \cdot \delta \cdot (1+2K+K\delta)]^2}. \end{aligned} \quad (4.21c)$$

Chegados a este punto, e tendo en conta a distribución da variable latente B , dos erros de medida Z_B e as oito expresións (4.20a)-(4.21c), poderíamos seguir a mesma liña de demostracións exposta nas seccións 3.3 e 3.4 para tratar de demostrar a posible existencia de nesgos nos estimadores MC baixo a hipótese de distribución Gamma. De non ser isto posible analiticamente, tamén cabería a posibilidade de seguir o esquema de simulación exposto na sección 5.1 do Capítulo 2, para tratar de comprobalo numericamente. Esa é unha das tarefas que quedan pendentes para continuar co traballo de investigación que se desenvolveu nesta Tese de Doutoramento.

4.6 Distribución de probabilidade de tipo Beta (α, β, t_1, t_2) para a biomasa latente e os erros de medida

Na introdución do presente capítulo adiantamos as dificultades que supón tratar de estimar un modelo non linear mediante o método de estimación da máxima verosimilitude como alternativa ao método MC. Nesta sección nos introduciremos no sinuoso camiño que representa ese proxecto tomando como exemplo a estimación do modelo de crecemento da biomasa dun recurso pesqueiro que expresamos en (3.69), para definir as liñas que consideramos máis coherentes a desenvolver en futuras investigacións.

En primeiro lugar, un aspecto básico que se debe decidir é o tipo de función de distribución que pode ser máis razoable para representar o regresor latente. Nesta sección imos expoñer as dificultades que implica o feito de propoñer unha función de distribución alternativa á función Normal que manexamos no Capítulo 3.

Como demostramos nas seccións 4.3-4.5 é posible atopar un tipo de función de distribución Gamma con tres parámetros que permite representar tanto a biomasa latente como os erros de medida e que, se levanta menos suspicacias que a utilización da distribución Normal¹¹, pode utilizarse para avaliar ata qué punto os nesgos dos estimadores MC expresados no Capítulo 3 dependen da hipótese de simetría do regresor. Este tipo de función de distribución ten a virtude de facultar a definición dunha función de distribución particular para a biomasa estimada con momentos que permitirían mesmo facer exercicios de simulación de ser preciso.

Pero se o obxectivo é buscar un método de estimación alternativo, sería máis razoable ter en conta a forma da función loxística que representa a biomasa latente na expresión (2.1), e que evidencia que esa variable esta acoutada por dous límites: pois non é razoable supoñer que poida tomar valores negativos e tampouco debería tomar valores superiores á capacidade de carga do recurso no ecosistema no que se desenvolve¹².

¹¹ Aínda que esta pode ser unha boa aproximación como se comprobou no apartado 3.5.2 cando consideramos o exemplo da estimación do crecemento da biomasa de sardiña nas divisións VIIIc e IXa do ICES.

¹² Nas seccións anteriores deste capítulo, coa distribución Gamma cabía esta última posibilidade aínda que fose con unha probabilidade insignificante.

Capítulo 4. Hipótese de distribución asimétrica de probabilidade do regresor nun modelo cuadrático particular

En consecuencia, sería coherente representar a distribución de probabilidade da biomasa mediante unha función acoutada, e a función de distribución Beta con catro parámetros, α , β , t_1 e t_2 , podería xogar ese rol¹³. Os dous primeiros parámetros, α e β , determinan a forma da distribución e os dous últimos, t_1 e t_2 , indican os seus límites mínimo e máximo respectivamente.

A función Beta (α, β, t_1, t_2) ten unha densidade de probabilidade para unha variable χ que pode representarse coa ecuación

$$f(\chi) = \frac{(\chi - t_1)^{(\alpha-1)} \cdot (t_2 - \chi)^{(\beta-1)}}{\text{Beta}(\alpha, \beta) \cdot (t_2 - t_1)^{(\alpha+\beta-1)}}, \quad (4.22)$$

onde $t_1 \leq \chi \leq t_2$, e os parámetros de forma cumpren $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Nas Figuras 4.5a e 4.5b ilustramos as funcións de densidade (PDF) e de densidade acumulada (CDF) correspondentes a varias variables con este tipo de distribución de probabilidade con diversos valores dos parámetros de forma.

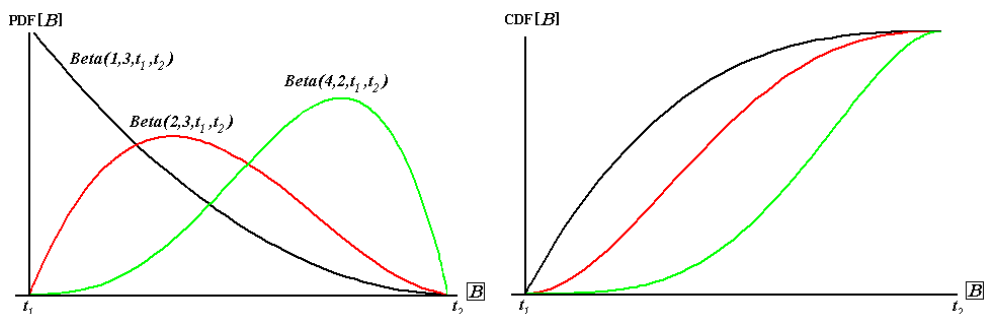


Figura 4.5a. Funcións de densidade Beta (α, β, t_1, t_2).

Figura 4.5b. Densidade acumulada.

Co fin de utilizar funcións de densidade da variable que sexan cóncavas, propoñemos restrinxir os parámetros de forma de maneira que cumpran $\alpha > 1$ e $\beta > 1$. As propiedades que nos interesa resaltar deste tipo de función de distribución serían entón:

¹³ Esta é unha xeneralización da función de distribución Beta con dous parámetros, que como é sabido está acoutada no intervalo $[0,1]$.

Propiedade X: O primeiro momento ou valor medio ven determinado por

$$m_1 = E(\chi) = \frac{\alpha \cdot t_2 + \beta \cdot t_1}{\alpha + \beta}. \quad (4.23a)$$

Propiedade XI: O segundo momento non centrado é

$$m_2 = \frac{\alpha(1 + \alpha) \cdot t_2^2 + 2\alpha\beta \cdot t_2 t_1 + \beta \cdot (1 + \beta) \cdot t_1^2}{(\alpha + \beta)(1 + \alpha + \beta)}. \quad (4.23b)$$

Propiedade XII: A varianza ven dada por

$$V(\chi) = \frac{\alpha\beta \cdot (t_2 - t_1)^2}{(\alpha + \beta)^2 (1 + \alpha + \beta)}. \quad (4.23c)$$

Propiedade XIII: A moda da variable é o valor que cumpre

$$M(\chi) = \frac{(\alpha - 1) \cdot t_2 + (\beta - 1) \cdot t_1}{\alpha + \beta - 2}. \quad (4.23d)$$

En consecuencia, establecemos o seguinte suposto en relación á biomasa latente:

Hipótese 4.5: A biomasa B segue unha distribución de probabilidade cuxa función de densidade é

$$f(B) = \frac{B^{(\alpha-1)} \cdot (t_2 - B)^{(\beta-1)}}{\text{Beta}(\alpha, \beta) \cdot t_2^{(\alpha+\beta-1)}}, \quad (4.24)$$

onde $\alpha > 1, \beta > 1$, e $0 \leq B \leq t_2$.

Con respecto ás variables que recollen os erros de medida, podemos seguir un razoamento similar ao da sección 4.3. Para cada valor da biomasa supoñemos que se poden dar erros de medida tamén acoutados e, polo tanto, poden representarse mediante unha

Capítulo 4. Hipótese de distribución asimétrica de probabilidade do regresor nun modelo cuadrático particular

función de densidade de probabilidade Beta con catro parámetros, a^* , b^* , t_1^* e t_2^* . Teríamos así a seguinte hipótese:

Hipótese 4.6: Para cada posible valor de biomasa B , o erro de medida Z_B que se pode dar segue unha distribución de probabilidade con función de densidade definida por

$$g(Z_B) = \frac{(Z_B - t_1^*)^{(a^*-1)} \cdot (t_2^* - Z_B)^{(b^*-1)}}{\text{Beta}(a^*, b^*) \cdot t_2^{*(a^*+b^*-1)}}, \quad (4.25)$$

onde $a^* > 1$, $b^* > 1$, $t_1^* \leq Z_B \leq t_2^*$.

De xeito similar ao indicado nas expresións (4.5)-(4.12) que xurdiron a partir de enunciar as Hipóteses 4.2, 4.3 e 4.4, e nas que se estableceron as relacións entre os parámetros da función de densidade do erro de medida e os valores do regresor latente, chegados a este punto propoñemos tamén establecer algunhas hipóteses que permitan relacionar uns e outros no contexto das distribucións de probabilidade de tipo Beta con catro parámetros. Neste senso consideramos que o máis apropiado será restrinxir a función de densidade de Z_B de tal xeito que cumprise as seguintes hipóteses nas que os parámetros a^* , b^* , t_1^* e t_2^* os facemos variar para cada valor da biomasa polo que os indicamos mediante a_B , b_B , $t_{1(B)}$ e $t_{2(B)}$, respectivamente.

Hipótese 4.7a: Para cada posible valor que poda tomar a variable biomasa B , o límite inferior do erro de medida Z_B asociado ao mesmo é o propio valor da biomasa, polo que temos $t_{1(B)} = B$.

Hipótese 4.7b: Para cada posible valor que poda tomar a variable biomasa B , o límite superior do erro de medida Z_B asociado ao mesmo é igual ao límite superior do regresor latente menos o propio valor da biomasa, e consecuentemente temos $t_{2(B)} = t_2 - B$.

Hipótese 4.7c: Para calquera valor do regresor latente, o valor máis probable do erro de medida asociado ao mesmo é o cero.

Hipótese 4.7d: A varianza dos erros de medida vai decrecendo a medida que o regresor latente se achega a calquera dos seus dous valores límite.

Tendo en conta as Hipóteses 4.7a-4.7b podemos reescribir a función de densidade do erro de medida mediante:

$$\begin{aligned}
 g(Z_B) &= \frac{(Z_B - t_1^*)^{(a_*-1)} \cdot (t_2^* - Z_B)^{(b_*-1)}}{\text{Beta}(a_*, b_*) \cdot (t_2^* - t_1^*)^{(a_*+b_*-1)}} \\
 &= \frac{[Z_B - (-B)]^{(a_B-1)} \cdot [(t_2 - B) - Z_B]^{(b_B-1)}}{\text{Beta}(a_B, b_B) \cdot [(t_2 - B) - (-B)]^{(a_B+b_B-1)}} \\
 &= \frac{(Z_B + B)^{(a_B-1)} \cdot (t_2 - Z_B - B)^{(b_B-1)}}{\text{Beta}(a_B, b_B) \cdot t_2^{(a_B+b_B-1)}}.
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Da Hipótese 4.7c na que establecemos que o valor modal da variable é o cero, deducimos que un dos parámetros de forma pode expresarse en función do outro, por exemplo,

$$\left. \begin{aligned}
 M(Z_B) &= \frac{(a_B - 1) \cdot t_{2(B)} + (b_B - 1) \cdot t_{1(B)}}{a_B + b_B - 2} \\
 &= \frac{(a_B - 1)(t_2 - B) + (b_B - 1)(-B)}{a_B + b_B - 2} \\
 &= 0
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_B = 1 + (b_B - 1) \frac{B}{t_2 - B}.$$

(4.27)

Capítulo 4. Hipótese de distribución asimétrica de probabilidade do regresor nun modelo cuadrático particular

E a partir da Hipótese 4.7d sobre a varianza dos erros deducimos que as expresións

$$V(Z_B) = \frac{\left[b_B + (b_B^2 - b_B) \frac{B}{t_2 - B} \right] \cdot t_2^2}{\left[1 + (b_B - 1) \frac{B}{t_2 - B} + b_B \right]^2 \left[2 + (b_B - 1) \frac{B}{t_2 - B} + b_B \right]} \quad (4.28a)$$

e

$$V(Z_B) = b_B \cdot t_2^2 \cdot \frac{\left[1 + (b_B - 1) \frac{B}{t_2 - B} \right]}{\left[2 + (b_B - 1) \frac{t_2}{t_2 - B} \right]^2 \left[3 + (b_B - 1) \frac{t_2}{t_2 - B} \right]}, \quad (4.28b)$$

deberán facerse menores a medida que o valor latente do regresor se achegue a cero ou a t_2 .

Unha posibilidade que temos considerado, consiste en supoñer que se poda cumprir a relación

$$\frac{(b_B - 1)}{t_2 - B} = k. \quad (4.28b)$$

Con esa condición a distribución de probabilidade conxunta da biomasa latente e dos erros de medida se ilustraría mediante unha gráfica do tipo representado nas Figuras 4.6a-4.6c.

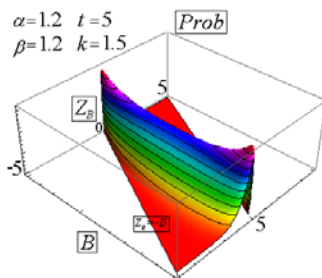


Figura 4.6a

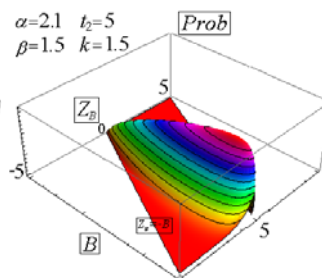


Figura 4.6b

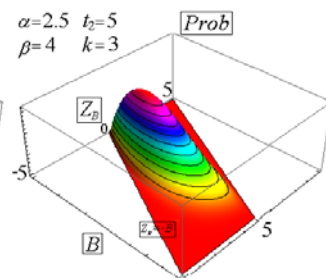


Figura 4.6c

Pero comprobamos a función que resulta do produto de convolución da función de densidade do regresor latente, $f(B)$, e a función de densidade do erro de medida, $g(Z_B)$, non resulta claramente definida mediante unha función de distribución coñecida e manexable en termos de cómputo.

Chegados a este punto, temos que recoñecer que a formalización da expresión (4.28b) representa un obstáculo, polo de agora insuperable, no afán por buscar a posibilidade de estimar a variable dependente do modelo de crecemento cuadrático de (3.69) co método da máxima verosimilitude. Temos comprobado que relaxar o suposto de que a varianza do erro de medida teña que decrecer ao achegármonos aos límites do regresor latente, substituíndoo polo de que a varianza sexa constante, tampouco nos ofrece a posibilidade de acadar unha función de densidade definida e manexable. En definitiva, consideramos que esta é outra das vías de investigación que quedan abertas con esta Tese de Doutoramento.

4.7 Conclusións

Neste capítulo propuxemos substituír a hipótese de distribución Normal de probabilidade do regresor latente do modelo (3.69) utilizado para estimar o crecemento natural da biomasa, por algunha hipótese que supoña unha distribución acoutada, non necesariamente simétrica. En primeiro lugar investigamos cáles son as posibilidades que ofrece utilizar funcións de tipo Gamma con tres parámetros como alternativa ao tipo Normal, para revisar a estimación de mínimos cadrados. En segundo lugar, tamén propuxemos analizar qué consecuencias se derivan de deseñar a estimación máximo-verosímil do modelo (3.69) asumindo a hipótese de distribución que nos parece máis coherente de todas as que ofrece a literatura estatística paramétrica tradicional: a da función de distribución de tipo Beta con catro parámetros.

Respecto á primeira liña de investigación, demostramos que o comportamento probabilístico da biomasa observable é posible definilo mediante unha K-distribución baixo o suposto de que tanto a biomasa latente como os erros de medida da mesma, teñan funcións de distribución Gamma con certas restricións, e comprobamos que é posible determinar os

Capítulo 4. Hipótese de distribución asimétrica de probabilidade do regresor nun modelo cuadrático particular

principais momentos de dita K-distribución. Polo tanto, sería posible replicar a análise das seccións 3.4.2 e seguintes (do Capítulo 3) para investigar o comportamento dos estimadores de mínimos cadrados supoñendo que o regresor latente ten unha distribución de probabilidade diferente á distribución Normal.

E respecto da segunda liña de traballo, expuxemos as dificultades de afrontar a estimación máximo-verosimil do modelo (3.69). En particular, comprobamos que sería preciso achar unha función de distribución de probabilidade da biomasa observable, baixo o suposto de que tanto o regresor latente como os erros de medida seguen unha distribución de tipo Beta, pero isto último non nos resultou posible conseguilo polo momento. De ser posible no futuro, o seguinte paso consistiría en tratar de determinar a función de distribución, tanto da variable explicada latente como da observable, para finalmente configurar a distribución conxunta do regresor e da variable explicada observables e proceder á análise das propiedades dos estimadores máximo-verosímiles da mesma.

Bibliografía

- DUPRAZ, J. (1977): *La théorie des distributions et ses applications*. Ed. Cépaduès.
- JAKEMAN, E.; PUSEY, P. N. (1978): "Significance of K-Distributions in Scattering Experiments", *Physical Review Letters*, 40: pp. 546–550
- JOHNSON, N. L.; KOTZ, S. (1970): *Continuous univariate distributions: distributions in statistics*. Ed. Houghton Mifflin
- LELONG-FERRAND, J. ; ARNAUDIÈS, J.M. (1972): *Cours de mathématiques: Analyse, vol. 2*. Ed. Dunod.
- ROBERTS, W.J.J.; FURUI, S (2000): "Maximum Likelihood Estimation of K-Distribution Parameters via the Expectation–Maximization Algorithm". *IEEE Transactions on signal processing*, vol. 48, n° 12: pp. 3303-3306
- SCHWARTZ, L. (1957): "Convolution". *Les Cours de Sorbonne. Methodes mathematiques de la physique, 3*. Centre de Documentation Universitaire, Paris.
- SCHWARTZ, L. (1966): *Théorie des distributions*. Ed. Hermann, Paris.
- WEISSTEIN, E. W.: "Modified Bessel Function of the Second Kind".
From MathWorld A Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/ModifiedBesselFunctionoftheSecondKind.html>