SIGNIFICADO REFERENCIAL Y PERSONAL DE NOCIONES ALGEBRAICAS EN EDUCACIÓN SECUNDARIA. EL CASO DEL NÚMERO ÁUREO

José Antonio Cajaraville Pegito
Universidade de Santiago de Compostela (España)

Tânia C. Rocha Silva Gusmão
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (Brasil)

Francisco M. Rodríguez Mayo
I.E.S. M. A. González Estévez. Carril-Pontevedra (España)

RESUMEN

En este trabajo, enmarcado en el proyecto de investigación "*Problemática didáctica del estudio del álgebra en educación secundaria*"[1], presentamos un estudio sobre el significado de referencia y el significado personal, atribuido al número áureo, ϕ, respectivamente por un libro de texto de matemáticas de 1º de bachillerato y por estudiantes de secundaria y de la licenciatura de matemáticas en la Universidad de Santiago de Compostela (USC). El análisis del contraste de ambos significados, se realiza utilizando las herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS).
Palabras clave: Didáctica de la Matemática, significado referencial y personal, estudio del álgebra, configuraciones epistémica y cognitiva.

ABSTRACT

In this paper, framed in the research project "Educational Problems of the study of algebra in secondary education", we present a study of the reference meaning and the personal meaning attributed to the golden ratio, ϕ, respectively by a textbook of secondary mathematics education and high school students and undergraduate mathematics at the University of Santiago de Compostela (USC). The analysis of the contrast of the two meanings, is performed using the theoretical tools of onto-semiotic approach of mathematical cognition and instruction (EOS).
Keywords: Mathematics Education, referential and personal meaning, study of algebra, epistemic and cognitive configurations.

Recibido: 10/XI/09. Aceptado: II/2010

[1] Proyecto subvencionado por el MCYT-FEDER: SEJ2004-07346, Ministerio de Ciencia y Tecnología, Plan Nacional de Investigación Científica. Desarrollo e Innovación Tecnológica. Madrid.
Investigador principal: José A. Cajaraville Pegito. Investigadores: Luis Cachafeiro Chamosa, Teresa Fernández Blanco, Patricia Ferro Jove, Tania, C.R.S. Gusmão, Humberto Gusmão de Moura, Pedro A. Labraña Barrero, Aurora Plata Casais, Manuel Rodriguez Mayo, Julio Rodríguez Taboada y Mª Jesús Salinas Portugal.

1. INTRODUCCIÓN

Si el reconocimiento de ϕ, como número, fue problemático para los grandes matemáticos griegos enfrentados al problema del cálculo de la razón entre el lado y la diagonal del pentágono regular, por su carácter irracional, resulta verosímil que también plantee dificultades de significado para los estudiantes de enseñanza secundaria.

Es necesario, por tanto, el estudio de dicha problemática. Para ello debemos presentar algunas nociones centrales para la didáctica de la matemática, como son las de significado referencial y personal de un objeto matemático, de las que sólo haremos una breve referencia, dentro del marco teórico conocido como Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemáticas (EOS).

Posteriormente, tomando como referencia el libro de texto de Matemáticas (Colera, García, Gaztelu y Oliveira, 2002) para el nivel de 1º curso de bachillerato, opción de Ciencias Sociales, para la comunidad autónoma de Galicia (en cuyos centros escolares dicho texto goza de amplia implantación) analizaremos el significado referencial del *número áureo*, que estos autores presentan dentro de la unidad temática "Números Reales", y la problemática didáctica que puede desencadenar dicho significado de cara a la comprensión, por parte de los estudiantes de este nivel (e incluso de nivel universitario), que estudian este objeto matemático, a partir de la información que les ofrece dicho texto. Mostramos los conflictos semiótico/cognitivos que se derivan de dicho estudio, a través de la noción de "dualidad expresión/contenido", que considera las disparidades entre la *expresión* que pone en juego un emisor (profesor, texto, etc.) y el *contenido* que interpreta el receptor (estudiante, lector, etc.) que quiere decir el emisor.

2. NOCIONES TEÓRICAS

2.1. Algunos estudios sobre dificultades de aprendizaje de nociones algebraicas

Como se señala en el Diseño Curricular Base del Ministerio de Educación y Ciencia español (1989) el aprendizaje del álgebra resulta un escollo importante para un buen número de alumnos, debido —entre otras cosas— al mayor grado de abstracción que requiere la utilización de símbolos —significantes—, a menudo sin significado inmediato. Las investigaciones sobre pensamiento algebraico se circunscriben a diferentes marcos teóricos entre los que destacamos:

a) El marco de la psicología cognitiva, bajo el que se identifican los factores que influyen sobre la enseñanza-aprendizaje del álgebra, que ponen de manifiesto las consecuencias limitativas de considerar el álgebra como aritmética generalizada (Kieran y Filloy, 1989; Kieran, 1992), prescindiendo de su potencial como modelo de organización de otras obras matemáticas (Bolea, Bosch y Gascón, 2001).

b) El enfoque lingüístico, que considera al lenguaje algebraico como el lenguaje básico de las matemáticas, centrando el interés en el estudio de los sistemas de representación semióticos (Kaput, 1987; Janvier, 1987; Duval, 1993) que constatan la necesidad de aceptar que la apropiación de un objeto matemático difícilmente se logra sin la adquisición de diversas representaciones semióticas del mismo.

c) El enfoque antropológico y ontosemiótico (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997; Bolea, Bosch y Gascón, 2001; Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002), que, adoptando un punto de vista pragmático, centran su atención en el análisis del significado de los objetos matemáticos tanto a nivel personal como institucional, estudiando los fenómenos derivados de la transposición didáctica escolar tratando de integrar los aspectos sintácticos, semánticos, pragmáticos y socioculturales. Como problemas específicos del proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra se identifican:

- Dificultades asociadas a los procesos de evolución del pensamiento algebraico en los estudiantes, que provocan que los conocimientos adquiridos, en una determinada etapa, se conviertan en modelos implícitos inadecuados para la adquisición de nuevos conocimientos. Esto origina obstáculos epistemológicos y didácticos (Brousseau, 1983) que constituyen una fuente de errores sistemáticos y persistentes que deben superarse para lograr nuevos aprendizajes.
- Se identifican tres grupos de errores (Palarea y Socas, 1994): a) los que se originan por la existencia de obstáculos cognitivos; b) los errores del álgebra que se derivan de errores procedentes del estudio de la aritmética y c) los debidos a las características propias del lenguaje algebraico. Socas (1997), identifica, asimismo, tres grupos de errores que tienen su origen en: a) un obstáculo cognitivo; b) ausencia de sentido de los sistemas de representación; y c) actitudes afectivas y emocionales.

2.2. El Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS)

El análisis didáctico de significados de nociones matemáticas, constituye el núcleo del marco teórico conocido por Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemáticas (EOS). Este programa de investigación viene siendo desarrollado por Godino y colaboradores, desde hace más de una década, (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero y Roa, 2005; Font, 2005; Godino, Batanero y Font, 2006, Godino y Font, 2004, 2007). Propone un análisis de la noción de “significado” desde un punto de vista didáctico, dirigido, entre otras cosas, a apoyar los estudios sobre la evaluación de los conocimientos matemáticos. Para este análisis, el modelo teórico desarrollado se basa en los supuestos pragmáticos del significado de los objetos matemáticos desde una triple perspectiva: institucional, personal y temporal. Por *significado* de un objeto matemático (*lenguaje, problema, concepto, propiedad, procedimiento, argumento*), entendemos, de acuerdo con Godino y Batanero (1994, pág. 332), “el sistema de prácticas operativas y discursivas que un sujeto (persona o institución) realizan para resolver campos de problemas de los cuales emerge dicho objeto matemático, comunicar a otros la solución, validarla y generalizarla a otros contextos y problemas”. Estos sistemas de prácticas constituyen el objeto básico para de análisis (Godino, 2002). En esa perspectiva, el EOS considera que, para la realización de cualquier práctica matemática, es necesario activar un conglomerado de objetos formado por algunos o todos los elementos citados. Este conglomerado se denomina *configuración.* Estas configuraciones pueden ser *cognitivas* (conglomerado de objetos personales) o *epistémicas* (conglomerado de objetos institucionales) según se considere la práctica desde la perspectiva personal o institucional (Godino, 2002, Godino y Font, 2007).

Godino y Font (2007, p. 2) distinguen entre diversos tipos de significado:

- Tipos de significados institucionales:
  - *Referencial:* sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico (o "sabio") del objeto matemático. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico – epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto.
  - *Pretendido*: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.
  - *Implementado:* en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.
  - *Evaluado:* el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.

- Tipos de significados personales:
  - *Global*: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático.
  - *Declarado*: da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
  - *Logrado:* corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen".

Por otra parte diremos que una persona "comprende" un determinado objeto matemático si ha "captado su significado", es decir, si es capaz de interpretar y/o realizar las prácticas adecuadas para resolver los problemas asociados a dicho objeto. La noción de comprensión es evolutiva en el tiempo. En un momento dado una persona posee una comprensión más o menos parcial de un determinado objeto matemático, pero es muy difícil que no comprenda nada o lo comprenda todo en relación con dicho objeto. La institución escolar tiene como uno de sus objetivos nucleares acercar, paulatinamente, el significado que un determinado estudiante posee de un objeto matemático, al significado que dicho objeto tiene para la "matemática sabia", es decir, para la comunidad de los matemáticos. Para intentar lograr este objetivo, la institución escolar (escuela infantil, primaria y secundaria, universidad) pone en juego una serie de dispositivos que se concretan en lo que llamamos proceso de instrucción. En este proceso entran en juego muchos elementos que interaccionan entre sí, configurando un ambiente de estudio socialmente compartido: curriculum, profesor(a), estudiantes, libros de texto, nuevas tecnologías, etc.

Los libros de texto constituyen un elemento importante en el proceso de estudio, pues presentan el significado referencial escolar de un conjunto de conocimientos, socialmente demandados para la formación de sus ciudadanos. La manera concreta de presentar los conocimientos a aprender, su idoneidad cognitiva y didáctica, pueden favorecer o dificultar el aprendizaje de los estudiantes.

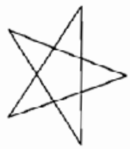
3. SIGNIFICADO REFERENCIAL (ESCOLAR) DEL NÚMERO ÁUREO

En este apartado vamos a analizar, a la luz del EOS, el significado referencial que sobre el número áureo (objeto de nuestro interés) plasma el libro de texto de Matemáticas I (Colera, García, Gaztelu y Oliveira, 2002), citado anteriormente. Tras una breve presentación de la unidad "Números reais":

Figura 1

1 **NÚMEROS REAIS**

Os gregos pitagóricos (século V a.C.) crían que todo o universo se rexía polos números naturais e as súas relacións (fraccións). Formaban unha especie de secta místico-matemática, que tiña como símbolo a estrela de cinco puntas (pentágono estrelado).



Pois ben, cando os pitagóricos descubriron que a relación que existe entre o lado do pentágono estrelado e o lado do correspondente pentágono convexo non se pode expresar como cociente dos dous números enteiros, sufriron unha enorme conmoción nas súas crenzas.

Tan contraria a toda lóxica lles pareceu a existencia dunha relación así, que ó número correspondente chamáronlle *irracional* (contrario á razón).

Pasaron moitos séculos desde entón. Actualmente os *irracionais* son números tan *razoables* que, xunto cos racionais, forman o chamado conxunto dos **números reais**.

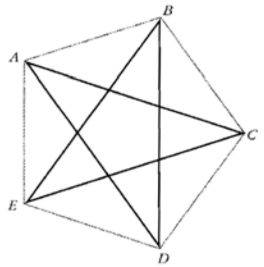
plantean inmediatamente, al lector, la siguiente tarea, a resolver por los estudiantes:

Figuras 2-3

PARA EMPEZAR, REFLEXIONA E RESOLVE

O pentágono estrelado

Se nun pentágono regular, que ten por lados *AB*, *BC*, *CD*, *DE* e *EA*, trazas todas as súas diagonais, obtés un **pentágono estrelado**:

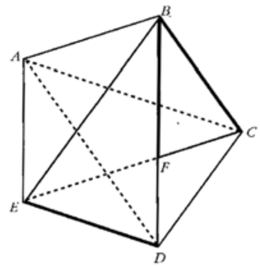


Os seus lados son: *AC*, *CE*, *EB*, *BD* e *DA*.

O número áureo

Para establecer a relación entre a diagonal e o lado do pentágono regular, dá os seguintes pasos:

a) Demostra que os triángulos *BED* e *BCF* son semellantes.

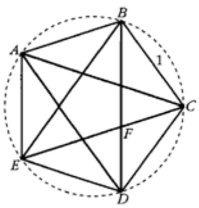


(Para iso é suficiente probar que teñen dous ángulos respectivamente iguais).

b) Chamando $l = \overline{BE} = \overline{BD} = \overline{EC}$ e tomando como unidade o lado do pentágono, $\overline{BC} = \overline{BF} = \overline{ED} = \overline{EF} = 1$, a partir da semellanza anterior tes que chegar á seguinte ecuación:

$$\frac{l}{1} = \frac{1}{l-1}$$

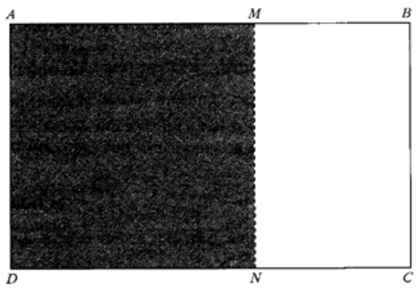
Despexando l obterás o seu valor.



A relación entre a diagonal do pentágono e o seu lado desígnase pola letra grega Φ $\left(\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ e chámase **número áureo** porque os propios gregos consideraron especialmente harmonioso o rectángulo que tiña os lados na relación $l : 1$ (rectángulo áureo).

O rectángulo áureo

O rectángulo adxunto ten a peculiaridade de que se lle suprimimos un cadrado, o rectángulo que queda, *MBCN*, é semellante ó rectángulo inicial, *ABCD*.

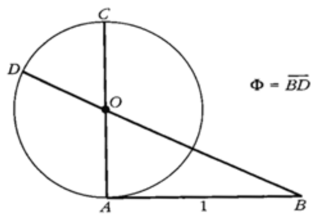


Comproba que, efectivamente, en tal caso o rectángulo é áureo, é dicir:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \Phi \quad \text{(número de ouro)}$$

Dos páginas más adelante, el texto presenta una información sobre una propiedad geométrica del número áureo, cuya interpretación considera "transparente" para dichos estudiantes:

Figura 4



CONSTRUCCIÓN DO NÚMERO ÁUREO

A continuación vamos a realizar un análisis de este texto, siguiendo el modelo onto-semiótico de Godino (2002). En esta presentación del significado referencial del número áureo, se encomiendan al estudiante *cinco tareas*:

a) *Demostrar* la semejanza de dos triángulos, con la sugerencia de que "basta con probar que tienen dos ángulos respectivos iguales";

b) *Construir el modelo matemático* de la relación entre la longitud de la diagonal del pentágono y la longitud de su lado (tomada como unidad de longitud), utilizando la semejanza anterior,

c) Obtener el valor de *l* (a continuación figura un texto que parece no enlazar con esta tarea. De hecho se habla de una relación que se simboliza por $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que es el valor obtenido para *l*, al resolver la tarea, es decir, se comete un abuso de lenguaje que identifica a *l* con ϕ (cambio de símbolo de representación, que los autores consideran "transparente")

d) *Demostrar* que, en el rectángulo áureo, $\frac{AB}{AD} = \phi$

e) *Probar* que, en la construcción, BD = ϕ

Vamos a evidenciar la complejidad epistemológica y semiótica (onto-semiótica) de la propuesta del libro de texto, para mostrar las hipotéticas dificultades de interpretación del significado referencial por parte de los estudiantes de este nivel educativo (conflictos derivados de la dualidad "expresión/contenido").

3.1. Resolución de la tarea a) por un experto

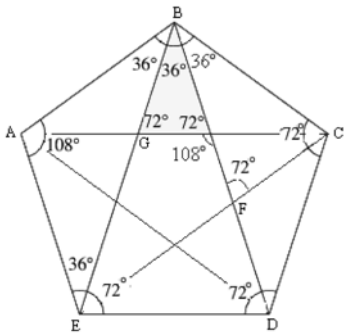
La posición de los triángulos BDE y BCF "no es de Thales". Si se acepta la sugerencia que se da en el texto, existen varias formas de probar que ambos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales. Consideraremos aquí dos modelos de prueba.

Prueba 1: Como AB es paralelo a EC, el ángulo B del triángulo BDA es igual al ángulo F de BCF (alternos internos entre paralelas), pero el triángulo BDA es igual al BDE, por construcción, así que el ángulo B anterior es igual al ángulo E de BDE, por tanto $\widehat{E} = \widehat{F}$; a su vez, el ángulo C de BCF es el mismo ángulo de BCE. Como los triángulos BCE y BDE son iguales, por construcción, se deduce que $\widehat{C} = \widehat{D}$.

Prueba 2. En el interior del polígono estrellado se forma un pentágono regular, su ángulo central es 360/5 = 72º, El ángulo interior es su suplementario 180-72 =108º. Así que (ver figura siguiente) las diagonales trazadas en el pentágono regular *trisecan cada ángulo interior* de dicho pentágono. Los ángulos de la figura *E, D, F* y *C*, valen todos 72º. Por tanto hemos demostrado de dos formas distintas que los triángulos *BDE* y *BCF* son *semejantes* por tener sus ángulos respectivos iguales.

Un resolutor experto, para resolver esta tarea, eligiendo por ejemplo la forma de prueba 2 —que consideramos más potente, explicativamente— ha tenido que llevar a cabo las siguientes acciones:

Figura 5



a) Leer con detenimiento la información textual y gráfica que se le ofrece en el texto; b) diseñar una figura para establecer relaciones entre ángulos; c) calcular el ángulo interior del pentágono regular mediante la operación 360/5 = 72º; d) deducir que el ángulo interior (*I*) del pentágono y su ángulo central son suplementarios puesto que 72 +*I*/2+*I*/2 = 180º; 72+*I* = 180º, y, por tanto dicho ángulo interior vale 180-72 = 108º; e) puesto que los ángulos interior y exterior son suplementarios (por construcción), deducir que el ángulo exterior vale 72º y, por tanto, el ángulo formado por dos diagonales del pentágono estrellado que confluyen en un mismo vértice (p. e. en A) es de 36º; f) deducir que los otros dos ángulos que se forman en A, valen, cada uno, 36º, ya que en el triángulo isósceles AGB, el ángulo G vale 108º por ser opuesto por el vértice al ángulo interior del pentágono regular; g) deducir, en consecuencia que las diagonales del pentágono estrellado que confluyen en un mismo vértice *trisecan* el ángulo interior del pentágono regular; h) deducir que, debido a la propiedad anterior los ángulos E y D del triángulo BDE y el C del triángulo BCF valen 72º, y que el ángulo F del triángulo BCF también vale 72º, por ser suplementario del ángulo interior del pentágono regular; k) argumentar, finalmente, que puesto que los triángulos BDE y BCF tienen dos ángulos respectivos iguales, también tendrán igual el tercero y, por tanto, tienen todos los ángulos respectivos iguales, lo que demuestra la semejanza de estos dos triángulos.

La diversidad de técnicas que se manejan para realizar las acciones que se han descrito para resolver la tarea, así como su planificación, secuenciación y verificación, ponen de manifiesto la *complejidad onto-semántica* de esta tarea. Postulamos que un estudiante medio de este nivel educativo tendrá serias dificultades para resolver esta tarea por sí solo, sin más ayudas que las facilitadas en el texto.

3.1.1. Configuración epistémica (ideal) de la tarea a)

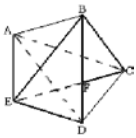
En este apartado, y a título de ejemplo, vamos a realizar, el análisis de los conocimientos (tipos de objetos y relaciones entre los mismos) puestos en juego en la resolución de una tarea por un sujeto ideal (experto). En el marco del EOS esto equivale a elaborar la *configuración epistémica* asociada a la resolución de dicha tarea.

La comparación entre los significados atribuidos a los objetos matemáticos por determinadas instituciones (escolares, sociales) o por una persona y un referente institucional ("matemática sabia") nos permite identificar *conflictos semióticos* entre dichos agentes. Dichos conflictos se refieren a toda disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas. La configuración epistémica se usará como referencia para estudiar las configuraciones cognitivas de los sujetos y formular hipótesis sobre conflictos semióticos potenciales.

Se identifican los objetos y relaciones primarias (lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos puestos en juego), lo que podemos describir como un análisis semántico.

TABLA I

SITUACIONES/ PROBLEMAS:
Situación inicial:
1. Para establecer la relación entre la diagonal y el lado del pentágono regular, da los siguientes pasos:
a) Demuestra que los triángulos BED y BCF son semejantes.



(para esto es suficiente probar que tienen dos ángulos respectivamente iguales)

Motivan

Resuelven

CONCEPTOS/ DEFINICIONES:
Conceptos previos:
Pentágono regular, diagonal, lado, pentágono estrellado, relación, triángulo, semejanza de triángulos, ángulos respectivos, igualdad de ángulos, ángulos opuestos por el vértice, ángulo central, ángulo interior y ángulo exterior de un polígono regular, ángulos suplementarios.

Conceptos emergentes
Demostrar, probar, condición suficiente.

PROPIEDADES/ PROPOSICIONES:
1. En un pentágono regular, la amplitud del ángulo central de es de 72º (360/5). Su ángulo interior es suplementario del central y mide, por tanto, 108º. La amplitud de su ángulo exterior es igual a la de su ángulo central.
2. En un pentágono regular, las diagonales que confluyen en un mísmo vértice, *trisecan* el ángulo interior del pentágono.
3. Los ángulos opuestos por el vértice tienen igual amplitud.

PROCEDIMIENTOS:
1. Partiendo del gráfico de la situación, construir otro gráfico para estudiar las medidas de los ángulos que se forman en un pentágono estrellado.
2. Calcular la medida del ángulo central de un pentágono regular: (360/5)=72º
3. Calcular la medida del ángulo interior mediante la observación de que: 72+*I* = 180º, *I* = 108º.
4. Calcular la medida del ángulo exterior: 72º
5. Observar que, los tres ángulos que se forman en A son iguales y miden 36º
6. Determinar que, en consecuencia, los ángulos E, D, C y F, miden 72º y, por tanto, son iguales, lo que prueba la semejanza de los triángulos BDE y BCF.

Justifican

ARGUMENTOS:
a) A partir del gráfico de la situación, se deduce que el ángulo central del pentágono regular mide 360/5=72º, ya que se forman 5 ángulos iguales cuya suma vale 360º.
b) el ángulo interior (*I*) del pentágono y su ángulo central son suplementarios ya que72 +*I*/2+*I*/2 = 180º; 72+*I* = 180.
c) Los ángulos interior y exterior son, por construcción, suplementarios. El ángulo exterior del pentágono regular mide, entonces, 72º.
d) El ángulo que forman las diagonales que confluyen en un vértice del pentágono regular, mide 36º, ya que es el ángulo de un triángulo isósceles cuyos otros dos ángulos iguales miden 72º. Así que estas diagonales trisecan el ángulo interior del pentágono.
f) Por la propiedad anterior, los ángulos E, D, C y F miden 72º y, por tanto, son iguales.
g) Se demuestra así que los triángulos BDE y BCF son semejantes, pues tienen dos ángulos respectivos iguales.

Expresa

Ayuda

LENGUAJE:

Términos y expresiones:
relación entre la diagonal y el lado de un pentágono regular, demostrar que los triángulos BED y BCF son semejantes, es suficiente con probar que tienen dos ángulos respectivos iguales.

Gráficos:
Dibujo de un pentágono regular y trazado de sus diagonales.

Notaciones:
ABCDE, para representar el pentágono regular de vértices: *A,B,C,D,E.*

F para denotar un vértice que permita identificar un triángulo determinado.

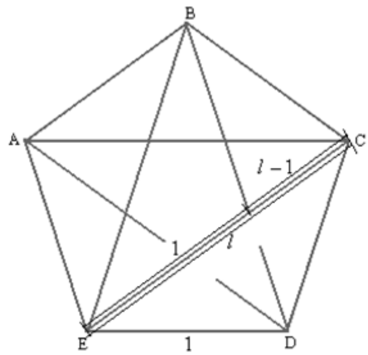
BCF y *BDE*, para identificar dos triángulos objetivo de comparación.

A continuación mostramos cómo un sujeto ideal (experto) resolvería el resto de las tareas:

3.2. Resolución de la tarea b)

La resolución de esta tarea se apoya en gran medida en la prueba anterior: si los triángulos BDE y BCF son semejantes, entonces sus lados respectivos son proporcionales. Si, como se propone en el texto, elegimos como unidad de longitud la del lado del pentágono regular, llamamos l a la longitud del lado del pentágono estrellado, y construimos la figura que sigue:

Figura 6



la igualdad entre las razones de los lados "largos" y "cortos" respectivamente de ambos triángulos nos lleva a la ecuación —propuesta en el texto—

$$\frac{l}{1} = \frac{1}{l-1}$$

que sería el modelo matemático de la relación entre el lado del pentágono estrellado y el del pentágono regular generatriz. Un resolutor experto, para resolver esta tarea, tendría que realizar las siguientes acciones: a) leer el enunciado de la misma; b) construir una figura (como la anterior, p. e.) que permita identificar las longitudes de los lados a relacionar por semejanza de los triángulos BCF y BDE; c) Establecer la proporción entre los lados "largos" de ambos triángulos (l : 1), y los lados "cortos" (1 : l-1); d) determinar el modelo matemático mediante la igualdad de ambas razones, basándose en la semejanza de triángulos, lo que prueba que dicho modelo es: $\frac{l}{1} = \frac{1}{l-1}$.

Las dificultades de esta tarea para los alumnos de este nivel educativo, pueden aparecer en las acciones b) y c), debido a la necesidad de interpretar la semejanza de triángulos como igualdad entre las razones de los lados respectivos, algunas de cuyas longitudes hay que determinar previamente.

3.3. Resolución de la tarea c)

a) Si despejamos l, obtenemos la ecuación de 2º grado: $l^2 - l - 1 = 0$, con soluciones: $l = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

b) Como l (cantidad de longitud) tiene que ser positiva, la única solución factible es $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

El llamar ϕ a este número, puede crear conflictos semióticos a los estudiantes, pues este valor es el obtenido para l. Luego deben aceptar el cambio de notación. También podría llevar a la confusión de que, en un pentágono estrellado cualquiera, la longitud de su lado es el *número áureo*, lo que es falso si no se adopta el convenio de que la longitud del lado del pentágono regular base es la unidad. Quizás no hubiera estado de más que, en el texto, se generalizara la tarea a una cantidad de longitud arbitraria c para el lado del pentágono, lo que llevaría a plantear la ecuación: $\frac{l}{c} = \frac{c}{l - 1}$ que conduciría a la ecuación de 2º grado $l^2 - cl - c^2 = 0$, cuya única solución factible, tomando c como parámetro, es $l = c\ (\frac{1 + \sqrt{5}}{2})$, es decir: $\frac{l}{c} = \phi$. Es decir, *la razón que hay entre la longitud del lado del pentágono estrellado y la del lado del pentágono regular generatriz es el número áureo*.

3.4. Resolución de la tarea d)

a) Se puede partir de las proporciones (por semejanza): $\frac{AB}{AD} = \frac{MN}{MB} = \frac{\mathbf{AD}}{\mathbf{MB}} = \frac{AM + MB}{AD} = \frac{\mathbf{AD + MB}}{\mathbf{AD}}$, de donde: $AD^2 - AD.MB - MB^2 = 0$ y, resolviendo en AD: $AD = MB\ (\frac{1 + \sqrt{5}}{2})$, de dónde: $\phi = \frac{AD}{MB} = \frac{AB}{AD}$.

b) Pero podría partir, análogamente, de: $\frac{AB}{AD} = \frac{AM + MB}{AD} = \frac{AD + MB}{AD} = 1 + \frac{MB}{AD} = 1 + \frac{AD}{AB}$, de donde $AB^2 - AD.AB - AD^2 = 0$, para llegar a la misma conclusión.

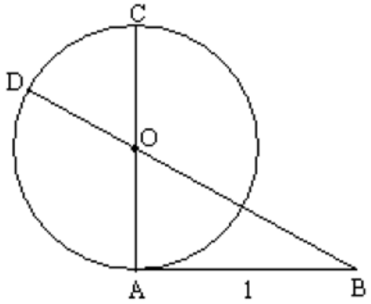
Si no se ha generalizado, en la tarea *b)*, la relación entre lado y diagonal del pentágono regular, a valores arbitrarios de la longitud del lado ($\frac{l}{c} = \phi$), es de esperar que los estudiantes de este nivel tengan dificultades para resolver la tarea d) sin ayuda externa. P. e., en la ecuación de segundo grado $AD^2 - AD.MB - MB^2 = 0$, *hay que decidir cuál es la incógnita y cuál el parámetro*[2]. Además, hay que elegir adecuadamente los segmentos que deben ponerse en relación. Esto nos lleva a pensar que se trata de una tarea compleja para dichos estudiantes.

---

[2] En Bolea, Bosch y Gascón (2001) se interpreta una *incógnita* como "un valor desconocido que se manipula como si fuese conocido" y *parámetro* como "un valor conocido que se manipula como si fuese desconocido".

3.5. Resolución de la tarea e)

TABLA II

 	Como tarea d) (ejercicio 3), se afirma $BD = \phi$, lo que supone *probar* que si $AB=AC=1$, entonces $BD = \phi$. Para ello, el estudiante, debe (usando el teorema de Pitágoras) establecer las relaciones: $DO = AO$ y $AO^2 + 1 = DO^2 + 1 = OB^2$ $BD = DO + OB = DO + \sqrt{1 + DO^2}$ Si $DO = ½$, entonces: $BD = \frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$ De nuevo postulamos dificultades y conflictos en los estudiantes para resolver esta tarea.

4. EVIDENCIA DE CONFLICTOS SEMIÓTICO-COGNITIVOS, A PARTIR DEL SIGNIFICADO REFERENCIAL

Conscientes de los conflictos semióticos que podían generarse, a partir del enunciado decidimos someterlo a la consideración de una muestra de 19 estudiantes de 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales, (y aprovechar la disponibilidad de alumnos para pasarlo también en 4º de ESO (29 estudiantes), del IES "M.A. González Estévez" de Carril-Pontevedra. Para ello se les entrega el enunciado del problema, reproduciendo literalmente la propuesta del citado libro, proponiéndoles como tarea principal la demostración de la semejanza de triángulos, y animándoles a que, a continuación, siguieran resolviendo las demás tareas propuestas, según sus posibilidades cognitivas y temporales.

De acuerdo con comentarios anteriores, habíamos postulado "a priori" que:

• La diversidad de técnicas que se manejan para realizar las acciones que se han descrito para resolver la tarea a) así como su planificación, secuenciación y verificación, ponen de manifiesto su complejidad ontosemiótica, postulando que un estudiante medio de estos niveles educativos podría tener dificultades para resolver esta tarea por sí solo, sin más ayudas que las facilitadas en el texto.

• Las dificultades pueden aparecer en las tareas a) y b), debido a la necesidad de interpretar la semejanza de triángulos como igualdad entre las razones de los lados respectivos, algunas de cuyas longitudes hay que determinar previamente.

• Obtenida la solución de la ecuación: $l^2 - l - 1=0$ cuyas soluciones son: $l = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, los estudiantes primero han de decidir que sólo la solución positiva es admisible, por tratarse de una medida de longitud. Llamar ϕ a este número, puede crear conflictos semióticos a los estudiantes, pues este valor es el obtenido para l, debiendo aceptar e interpretar el cambio de notación. En caso contrario, podría llevarlos al conflicto de que en un pentágono estrellado cualquiera, la longitud de su lado es el *número áureo*, lo que es falso si no se adopta el convenio de que la longitud del lado del pentágono es la unidad.

• Se espera que, en 1º de Bachillerato (16-17 años), al menos una parte representativa de los estudiantes, puedan resolver con éxito la tarea a), pero el cambio de notación y la generalización que se efectúa a partir de b), puede ocasionar conflictos semióticos a estos alumnos.

La situación, en relación a la dinámica de clase, en la que se encontraban los dos cursos era muy diferente:

- En 4º se estaba estudiando trigonometría, en especial problemas de semejanza de triángulos similares al propuesto pero con un nivel de dificultad inferior. Los principales argumentos que se empleaban eran la igualdad de ángulos en base a las relaciones entre los ángulos que se forman cuando una recta corta a dos rectas paralelas y la posibilidad de situar las figuras en posición de Thales.
- En 1º bachillerato se estaban tratando problemas de resolución de sistemas de ecuaciones lineales empleando en método de Gauss, muy alejados del problema propuesto.
- En todos los cursos se les recordó cómo puede calcularse la medida de los ángulos de un polígono regular y, en 4º ESO, después de transcurrir la mitad del tiempo de la prueba, se indicó que quizás fuese posible calcular la medida de todos los ángulos implicados.
- En 1º de bachillerato fue necesario recordar los criterios de semejanza de triángulos, en particular la igualdad de ángulos.
- En algunos casos, ante preguntas directas de alumnos, el profesor hizo algún comentario sobre la validez de las argumentaciones que proponían, en general del tipo *"eso no puedes suponerlo"*.
- A todos los alumnos se les "informó" de que la prueba tenía relevancia para su calificación, si bien los alumnos de bachillerato no llegaron a creérselo del todo.

4.1. Resultados

4.1.1. En 4º de ESO

TABLA III

Argumentos	Frec.	Comentarios
Respuesta correcta	1	Calcula todos los ángulos del pentágono estrellado y deduce la igualdad de los dos ángulos pedidos.
Supone recto el ángulo EBC y que se divide en dos iguales	1	No llega a demostrar nada y se limita a dar una respuesta "matemática".
Giran el triángulo BFC sobre el triángulo EBD y supone que quedan en posición de Thales	6	Demostración basada en "evidencia visual".
Intenta calcular la medida de los ángulos de un pentágono sin conseguirlo	1	Un estudiante añade (sin demostrar) que los ángulos EBD y FBC son iguales
Razonamientos incorrectos sobre la igualdad de ángulos	6	En un caso intenta demostrar la igualdad de EBD e FBC
Asumen, sin demostrar, la igualdad de los ángulos que comparten el vértice B.	5	Un estudiante calcula la medida de los ángulos del pentágono, sin completar la tarea propuesta.

TABLA III (continuación)

Argumentos	Frec.	Comentarios
Argumenta que, de no darse la semejanza, no podría formarse una "estrella perfecta"	1	
Razonamientos correctos sobre la igualdad de ángulos empleando la igualdad del triángulo EBD con el BEC y asumiendo, sin demostración, que el triángulo BFC es isósceles	1	Es una demostración casi correcta de la semejanza, a falta de la demostración de ser isósceles.
Calculan la medida de los ángulos del pentágono pero no establecen la semejanza.	2	La mayoría de los alumnos de 4º conocían la medida de ese ángulo
Parece calcular los ángulos pero no está claro si realmente prueba o supone la trisección del ángulo B	1	De ser así (los comentarios hechos al profesor ante la observación *"no puedes asumir, de entrada, que el ángulo B se divida en tres iguales"* así lo sugieren), la demostración sería correcta.
No dan ninguna respuesta	4	
Total	29	

Análisis:

Manuel (un alumno con un gran tesón y que intenta por todos los medios llegar al final en cada problema) fue el único alumno que formuló una respuesta correcta. Lo hace apoyándose en cálculos aritméticos de las medidas de los ángulos y no en razonamientos geométricos. Su éxito se basa en que la figura central también es un pentágono regular (algo que nadie más utilizó), lo que le permite calcular la medida de los ángulos ADE y CED[3]:

También está muy cerca de conseguirlo Javier (un alumno con muy buenas ideas pero calificaciones no muy brillantes), con una formulación realmente original:

- Establece la igualdad entre los ángulos BCF y BED por ser iguales los triángulos BDE y BEC y tener en común el ángulo C los triángulos BCE y BCF.
- El ángulo BCF es igual al ángulo BFC y a los ángulos BED y BDE (sin argumentar para el ángulo BFC).
- Intenta resolver la ecuación.

Otro alumno que estuvo cerca de la respuesta correcta fue Damián (un deportista entre los mejores alumnos en matemáticas):

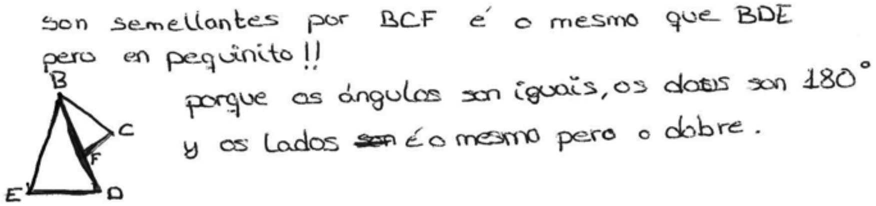
- Calcula correctamente la medida de los ángulos de un pentágono regular (como otros 7).
- Establece la igualdad de los triángulos BCE y EDB, pero no llega a establecer la igualdad de los ángulos BFC y BED.
- Resuelve la ecuación y calcula el valor del número áureo (solo dos alumnos se enfrentaron a la ecuación y él es el único que llega a resolverla).

---

3 Realmente no es necesario utilizar la regularidad del pentágono central. Podemos calcular los ángulos CBD y CDB en el triángulo isósceles BCD pues sabemos que el ángulo BCD mide 108º.

Marcos (el alumno con mejores calificaciones en Matemáticas) construye un complicado razonamiento geométrico, sin llegar a un resultado correcto. En general, las respuestas son mucho menos elaboradas, como las de Esperanza (una buena alumna):

Figura 7



En otros casos, las respuestas son bastante confusas. José Luis (un alumno que este curso está realizando un gran esfuerzo en la materia): *"porque si no son semejantes los triángulos, no puedes llegar a formar una estrella perfecta como esa. O sea, que si el triángulo BDE no puedes hacer la estrella perfecta. Mi teoría es que si lo traslado tiene que ser semejante, o sea igual en proporción para formar la estrella perfecta. Los ángulos son iguales porque se puede formar la estrella perfecta"*

4.1.2. En 1º de Bachillerato

TABLA IV

Argumentos	Frec.	Comentarios
Calculan correctamente los ángulos de los triángulos y demuestran la semejanza	6	Utilizan la técnica de calcular los ángulos centrales, interiores y exteriores de un pentágono regular.
Suponen la trisección del ángulo B	4	Calculan los ángulos del pentágono y algún otro ángulo. Además, alguno resuelve la ecuación
Calcula la medida del ángulo de un pentágono	1	
Son semejantes por ser isósceles y sumar 180º (fue un argumento que aparece también en 4º a pesar de que en clase fuera desmentido)	1	Posiblemente existiese un cierto "intercambio de información" entre los alumnos de este grupo que, curiosamente, se dieron por satisfechos en cuanto fueron capaces de escribir algo "matemático" , suponiendo, ingenuamente, que así queda justificada una respuesta correcta.
Los ángulos son iguales por sumar 180º	3	
Los ángulos son iguales por sumar 180º y calcula la medida del ángulo de un pentágono	1	
Los ángulos son iguales por sumar 180º y resuelven la ecuación	2	
Pasa directamente a resolver la ecuación sin intentar demostrar la semejanza	1	Este estudiante mostró una enorme frustración cuando el profesor indicó la necesidad de contestar siguiendo el orden de las preguntas.
Total	19	

Análisis:

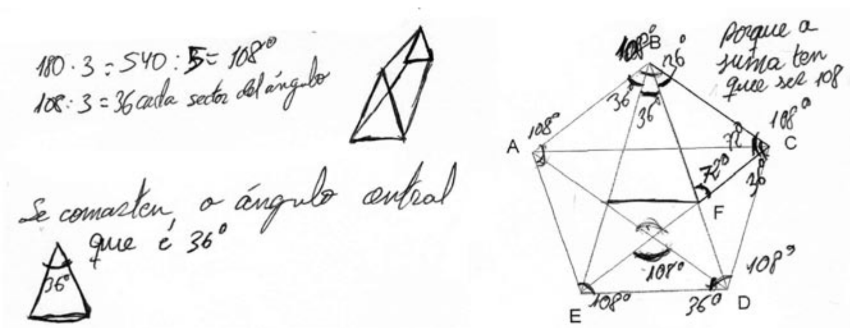
Como era de esperar, en este curso los alumnos utilizan menos argumentaciones geométricas pero todos los alumnos intentan alguna respuesta.

Marta (notable), respondió correctamente al apartado a), empleando un razonamiento aritmético, basado en el cálculo de los ángulos central e interior de un pentágono regular. Leticia (notable) realiza un proceso similar a Marta y determina la respuesta al apartado a).

Aldo (sobresaliente) —y otros 3 alumnos— calcula la medida de los ángulos del pentágono y resuelve la ecuación para determinar el número áureo.

Aldo:

Figura 8



Algunos alumnos se mostraron satisfechos con una respuesta claramente incompleta. Manuel (sobresaliente): "*FCB es igual a EBD porque ABC es simétrico. Entonces al dividir el ángulo A en tres partes también es simétrico*".

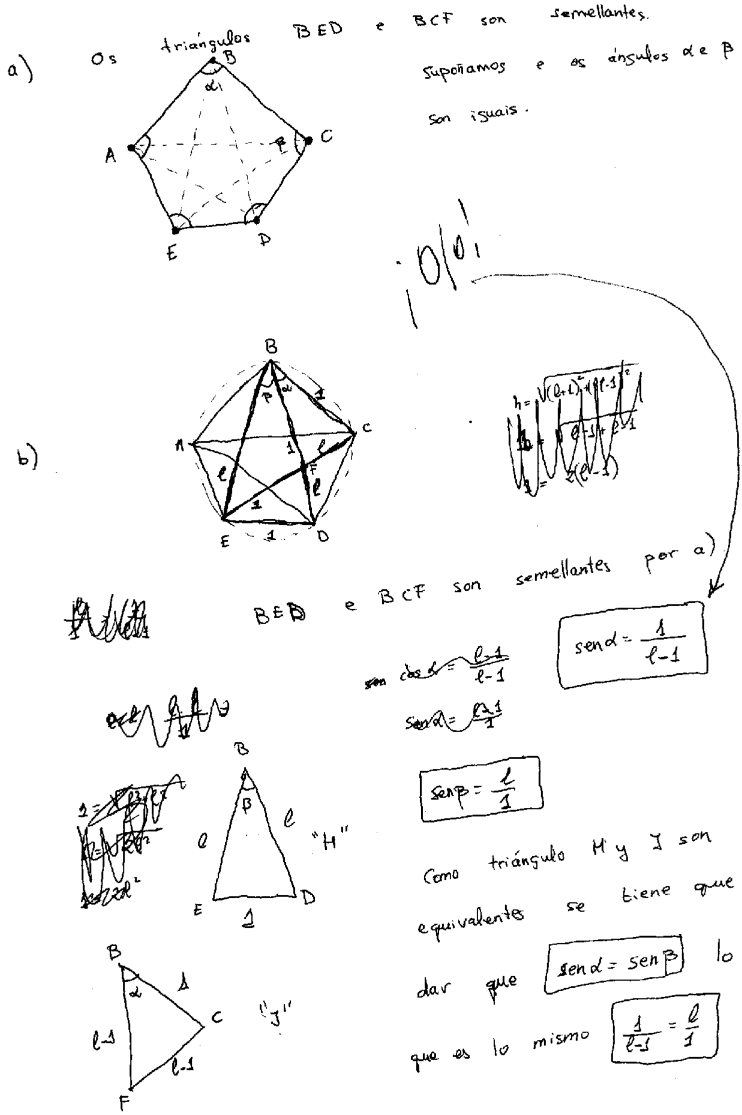
En varios casos, la respuesta hace referencia a la "semejanza de triángulos isósceles" Vanessa (bien): *"son semejantes porque los dos son triángulos isósceles"*.

En general, los alumnos de 1º de bachillerato dieron respuestas más coherentes pero también más conservadoras, en muchos casos sin intentar responder, realmente, a las cuestiones formuladas. Solo en seis casos (31,6%) se aprecia la aplicación de conocimientos adecuados a la obtención de una respuesta.

5. CONFIGURACIÓN COGNITIVA DE UN ESTUDIANTE DE LA LICENCIATURA DE MATEMÁTICAS, RELACIONADAS CON LAS TAREAS A), B) Y C).

A la vista de los conflictos semióticos y cognitivos apreciados en estas dos muestras de estudiantes, se decide proponer la misma tarea a 17 estudiantes de 2º, 3º y 4º cursos de la licenciatura de matemáticas, que estudian la materia, de libre configuración, Didáctica de la Matemática en Secundaria en la USC. En general las respuestas de dichos estudiantes concuerdan bastante con la respuesta de un resolutor experto, por lo que podemos concluir que, en general, el significado referencial propuesto en el libro de texto analizado, forma parte de los conocimientos de estos estudiantes. Sin embargo, mostramos aquí, por resultarnos muy sorprendente, la respuesta de un estudiante de 3º curso.

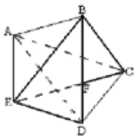
Figura 9



Para una mayor claridad a la hora de realizar el análisis ontosemiótico, elaboramos la configuración cognitiva de este estudiante. En el EOS, dicha configuración, al compararla con la configuración epistémica de referencia, nos permitirá detectar coincidencias o discrepancias entre significados personales e institucionales, postulando sus posibles causas.

TABLA V

SITUACIONES/ PROBLEMAS:
Situación inicial:
1. Para establecer la relación entre la diagonal y el lado del pentágono regular, da los siguientes pasos:
a) Demuestra que los triángulos BED y BCF son semejantes.



(para esto es suficiente probar que tienen dos ángulos respectivamente iguales)

Motivan | Resuelven

CONCEPTOS/ DEFINICIONES:
<u>Conceptos previos</u>
triángulo, semejanza de triángulos, triángulos "equivalentes", igualdad de ángulos, seno y coseno de un ángulo.

<u>Conceptos emergentes</u>
formulación de hipótesis, probar,

PROPIEDADES/ PROPOSICIONES:
1.En cualquier triángulo se cumplen las razones trigonométricas elementales (errónea)
2. $\alpha = \beta \Rightarrow$ sen α = sen β
3. En un pentágono regular, las diagonales que confluyen en un mismo vértice, *trisecan* el ángulo interior del pentágono. (propiedad supuesta, pero no demostrada)

PROCEDIMIENTOS:
1. Partiendo del gráfico de la situación, construir otro gráfico para estudiar las medidas de los ángulos que se forman en un pentágono estrellado.
2. Suponiendo que α y β son iguales, interpretar (erróneamente) que BFC y BED son triángulos rectángulos
3. Suponer que *sen* $\alpha = 1/(l-1)$ (error sorprendente ya que el dibujo que presenta el estudiante, muestra un triángulo rectángulo BCF, que **no es** el triángulo del enunciado de la tarea.(isósceles no rectángulo) y, aunque lo fuera, comete otro error grave con la noción de seno de un ángulo.
4. Suponer que sen $\beta = l/1$ (cuando no se aprecia que *1* y l sean "catetos" ni hipotenusa de BED, ya que dicho triángulo no es rectángulo).
5. Como $\alpha = \beta$ se deduce que *sen* α = *sen* β
6. Obtiene finalmente que de la igualdad anterior deriva la ecuación que se propone.

Justifican

ARGUMENTOS:
a) Suposición ingenua de que los triángulos BED y BCF son semejantes (dar por supuesto lo que hay que probar)
b) Suposición ingenua (sin probar) de que $\alpha = \beta$
c) Igualdad de ángulos significa igualdad de senos de estos ángulos
d) Suposición ingenua (sin probar) que los triángulos H y J son "equivalentes".

Expresa

Ayuda

LENGUAJE:

Términos y expresiones:

-"Los triángulos BED y BCF son semejantes",
- "Supongamos que los ángulos α y β son iguales"
-"Triángulos equivalentes H, J" etc.

Gráficos:
Dibujo de un pentágono regular y trazado de sus diagonales.
Dibujo de triángulos

Notaciones:
-*ABCDE,* para representar el pentágono regular de vértices *A,B,C,D,E.*
-*F* para denotar un vértice que permita identificar un triángulo.
-*BCF* y *BDE*, para identificar dos triángulos objetivo de comparación.
- 1 y *l* para representar la medida de lados.
-H,J para identificar dos triángulos de apoyo semiótico.

Análisis semiótico-cognitivo de la solución de este estudiante:

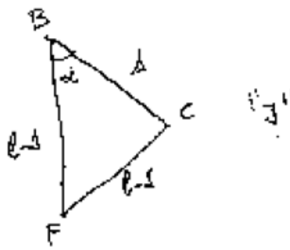
Si comparamos la configuración epistémica con la configuración cognitiva anterior, observamos que este estudiante (en nivel universitario avanzado) tiene grandes lagunas de comprensión de conocimientos matemáticos, que se supone deben alcanzarse en los estudios de secundaria, así como otros que son nucleares en estudios de la licenciatura de matemáticas. Los *conflictos semióticos* que se observan son:

1º: Establecer como hipótesis de trabajo propiedades matemáticas que se pide (explícita o implícitamente) que demuestre: "a) los triángulos BED y BCF son semejantes"; "los triángulos BED y BCF son semejantes por a)"; "supongamos que los ángulos α y β son iguales"

2º. Suponer que las razones trigonométricas básicas (seno-coseno), aplicables sólo a triángulos rectángulos, pueden generalizarse a cualquier otro tipo de triángulo.

3º. "Adaptar" el enunciado del problema a sus posibilidades cognitivas, "convirtiendo" un triángulo isósceles no rectángulo BCF, en un triángulo rectángulo, al que pueda aplicar sus conocimientos de trigonometría. Este conflicto revela que este estudiante no es consciente de la importancia de las condiciones que impone un determinado problema (dilema "expresión/contenido"), y a las que debe sujetarse para intentar buscar una solución al mismo. Por otra parte, resulta particularmente sorprendente que, este estudiante, cometa un error tan espectacular como construir (ingenuamente) un triángulo rectángulo isósceles, cuyo ángulo recto (C) no está formado por los dos catetos iguales del mismo:

Figura 10



u otro, no menos dramático, como considerar que $sen\alpha = \dfrac{cateto\ contiguo}{cateto\ opuesto}$

Estos conflictos semióticos, pero también cognitivos, ponen de manifiesto las profundas carencias comprensivas de dicho estudiante, muy alejadas de los conocimientos que se le suponen, dado el nivel educativo en que se encuentra.

5. REFLEXIONES FINALES

- La principal y más evidente es la distancia entre los planteamientos didácticos de la propuesta de los autores y las capacidades reales de interpretación y acción del alumnado al que supuestamente va dirigida. Este hecho es el origen de numerosos conflictos semiótico-cognitivos potenciales, que condicionan la posibilidad de alcanzar un "aprendizaje con comprensión".
- La gran dificultad de los estudiantes para realizar un razonamiento deductivo y su escasa fluidez en la aplicación de conocimientos previos que se les suponen, pero a los que, como mínimo, no han dotado de los suficientes "sentidos" (Font, 2005) para ser capaces de aplicarlos a contextos concretos.
- Da la impresión de que frente a un problema como el propuesto, la mayoría de los alumnos no intentan responder a las preguntas formuladas, limitándose a dar una respuesta que, ingenuamente, consideran "matemática". Esto pone de manifiesto la falta de comprensión de una de las reglas nucleares de la matemática: la necesidad de sujeción a las condiciones del problema.
- Para un estudiante medio, enfrentarse a un problema que difícilmente podrá resolver, supone un gran desgaste emocional sin recompensa alguna, un resultado nefasto, totalmente contrario al supuestamente perseguido de "motivar" al alumno.
- Por otra parte, se muestra la potencia de la técnica que nos ofrece el EOS, para realizar un análisis microscópico de los conocimientos y conflictos de un sujeto (ante una determinada tarea matemática), frente al marco cognitivo según el cual el conocimiento matemático se reduce básicamente a conceptos y procedimientos, entendidos como entidades mentales. No se distingue el papel específico de las proposiciones y argumentaciones y, sobre todo, no se explicita el papel clave de las situaciones – problemas, como origen y razón de ser de tales entidades, cuya construcción está, además, mediada por los recursos lingüísticos y tecnológicos disponibles. Todo ello pone de manifiesto que el "saber matemático" no puede ser considerado "transparente" en las investigaciones en didáctica de la matemática, como parece derivarse de las investigaciones en el marco cognitivo. Por el contrario, dicho saber es la variable más problemática de cualquier investigación en esta área del conocimiento.

RECONOCIMIENTO:

Trabajo realizado en el marco del proyecto MCYT-FEDER: SEJ2004-07346, Ministerio de Ciencia y Tecnología, Plan Nacional de Investigación Científica. Desarrollo e Innovación Tecnológica. Madrid.

6. REFERENCIAS

BOLEA, P.; BOSCH, M. y **GASCÓN, J**. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: el caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 21(3), 247-304.

BROUSSEAU, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 4 (2) 165-198.

CHEVALLARD, G.; BOSCH, M. y **GASCÓN, J (1997)**. Estudiar matemáticas. *El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Barcelona. ICE-Horsori.

COLERA, J.; GARCÍA, R. y **OLIVEIRA, Mª J. (2002)**. *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I*. Madrid: Anaya.

DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitive de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciencies Cognitives*. 5, 37-65.

FONT, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada en A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (eds): *Investigación en Educación Matemática. IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, (109-128). Córdoba.

GODINO, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 22/2(3), 237-284.

GODINO, J. D. y **BATANERO, M. C. (1994)**. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 14(3), 325-355.

GODINO, J. D., BATANERO, C. y **FONT, V. (2007)**. The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 39 (1-2), 127-135

GODINO, J. D.; BATANERO, C. y **ROA, R. (2005)**. An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics*, 60 (1), 3-36.

GODINO, J. D. y **FONT, V. (2004)**. Razonamiento algebraico. En Godino, J.D. (director) *Didáctica de las Matemáticas para Maestros*. Proyecto Edumat-Maestros. (http:// www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros).

GODINO, J. D. y **FONT, V. (2007)**. *Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos*. Disponible en: http://www.ugr.es/ ~jgodino/indice_eos.htm

KIERAN, C. y **FILLOY, E. (1989)**. El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica (traducido por L. Puig). *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), 58-81.

KIERAN, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. En Grouws, D.(eds). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York. Macmillan Publishing Company.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1989) *Diseño curricular Base. Educación Secundaria Obligatoria I y II*. Madrid. M.E.C.

PALAREA, M. y **SOCAS, M. (1994)**. Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *SUMA*, 16, 91-98.

SOCAS, M. (1997). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Escuela Secundaria. En Rico, L. et al (eds). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Cap. 5, pp. 125-154. Barcelona. ICE-Horsori.

SOCAS, M. y **PALAREA, M (1997)**. Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar. *UNO*. 14, 7-14.