

# PROBLEMAS DE CONTACTO EN ELASTICIDAD DINÁMICA CON XFEM

María Teresa Cao Rial

Departamento de Matemática Aplicada  
Universidade de Santiago de Compostela

*Memoria de Tesis Doctoral*



31 de Mayo de 2011



Memoria de la Tesis Doctoral:

**Problemas de contacto en elasticidad dinámica con XFEM**

presentada por

Dña. María Teresa Cao Rial

y realizada bajo la dirección de

Dra. Dña. Peregrina Quintela Estévez y Dr. D. Carlos Moreno González

Fdo: María Teresa Cao Rial

Visto bueno de los Directores:



Fdo: D. Carlos Moreno González

Fdo: Dña. Peregrina Quintela Estévez



# Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mis directores de tesis, Peregrina Quintela y Carlos Moreno, su guía a lo largo de todo el proceso. Este trabajo no habría sido posible sin su constante ayuda, paciencia y continua disponibilidad.

A mis padres, por su apoyo, y confianza en mí en todo momento. Gracias a ellos me he convertido en la persona que soy hoy. Siempre han estado ahí para ayudarme, animarme o consolarme, y escucharme incluso si no entendían de qué estaba hablando.

A Ángel, que ha compartido conmigo los buenos, y los malos momentos, las alegrías y las penas que acompañan a todo investigador. Su amor, comprensión e  $\infty$  paciencia han sido mi mayor ayuda. Hay tanto que tengo que agradecerle, que no hay palabras para expresarlo. Gracias no es suficiente, ni en todas las lenguas del mundo.

No quiero olvidarme de quienes, a lo largo de todos estos años, han hecho posibles los buenos ratos pasados en cafés, pachangas, cenas o, simplemente, charlas en el despacho. El trabajo siempre es más llevadero en buena compañía. La lista es muy, muy larga, y esta tesis ya tiene demasiadas páginas. Vosotros sabéis quiénes sois.

Por último, agradezco a todos y cada uno de los miembros del Departamento de Matemática Aplicada por el excelente trato que siempre me han dispensado, y el magnífico entorno de trabajo que constituyen. Sea la hora que sea, las ocho de la mañana o las diez de la noche, siempre hay alguien que hace que una no se sienta tan sola.



*A mis padres,*  
José y Pilar.



*«La historia hace a los hombres sabios; la poesía, ingeniosos; las matemáticas, sutiles; la lógica y la retórica, hábiles para la lucha.»*

**Francis Bacon**



# Índice general

<b>Lista de Notaciones</b>	<b>XVII</b>
<b>Introducción</b>	<b>XXI</b>
I.1. Estado del arte . . . . .	XXVI
I.2. Estructura . . . . .	XXXI
<b>1. Elastodinámica lineal</b>	<b>1</b>
1.1. Conceptos básicos . . . . .	2
1.1.1. Ley constitutiva . . . . .	5
1.2. Paso a la configuración de referencia . . . . .	6
1.3. Cuerpos hiperelásticos . . . . .	8
1.4. Flujo de energía . . . . .	9
1.4.1. Derivadas siguiendo al tip . . . . .	12
1.4.2. Integrales tip. Teoremas de transporte . . . . .	13
1.4.3. Movimientos de cuerpos con grietas . . . . .	16
1.4.4. Equilibrio de fuerzas configuracionales . . . . .	17
1.4.5. Tasa de liberación de energía. Fuerza conductora. Trac- ción tip . . . . .	21
1.5. El tensor de elasticidad . . . . .	25
1.6. Modelo linealizado . . . . .	26
1.6.1. Energía de materiales de Hooke. . . . .	28

---

1.6.2. Procesos elásticos . . . . .	30
1.7. Condiciones de contorno y de contacto para materiales elásticos lineales . . . . .	31
1.7.1. Condición de contacto de Signorini . . . . .	32
1.8. Deformaciones planas . . . . .	34
1.9. Ondas progresivas y potenciales de Love . . . . .	36
1.9.1. Potenciales de Love . . . . .	39
<b>2. Problema de contacto dinámico con condiciones de Signorini</b>	<b>45</b>
2.1. El modelo y marco funcional . . . . .	46
2.1.1. Marco funcional . . . . .	47
2.2. Discretización en tiempo . . . . .	54
2.2.1. Propiedades de $\mathbf{u}^i$ . . . . .	57
2.3. Aproximación de una solución del Problema (P) . . . . .	62
2.3.1. Una primera aproximación . . . . .	62
2.3.2. Estimaciones a priori . . . . .	63
2.3.3. Otras aproximaciones . . . . .	69
2.3.4. Disipación de la energía . . . . .	72
2.3.5. Unicidad del límite . . . . .	75
2.4. Comprobación de que $\mathbf{u}$ es solución $\delta$ -débil del Problema (P) . .	78
2.5. Acotación de la energía asociada a la solución $\delta$ -débil . . . . .	90
2.6. Resolución numérica del problema . . . . .	92
2.6.1. Formulación variacional . . . . .	92
2.6.2. Discretización en espacio . . . . .	93
2.6.3. Tratamiento de las condiciones de contacto . . . . .	94
2.6.4. Resolución en aceleraciones . . . . .	99
2.7. Test . . . . .	101
2.7.1. Convergencia . . . . .	103

---

<b>3. Vibración de un cuerpo elástico sin fisura</b>	<b>109</b>
3.1. Modelo matemático . . . . .	110
3.2. Ondas elásticas de Rayleigh . . . . .	112
3.2.1. Ondas monocromáticas . . . . .	112
3.2.2. Ondas de Rayleigh . . . . .	114
3.2.3. Ondas de Rayleigh unidireccionales . . . . .	118
3.3. Excitación de sólidos en reposo con ondas de Rayleigh. . . . .	126
3.4. Formulación variacional . . . . .	128
3.5. Existencia y unicidad de solución . . . . .	130
3.6. Descomposición del problema . . . . .	133
3.7. Resultados numéricos . . . . .	136
3.7.1. Validación de la descomposición . . . . .	137
3.7.2. Simulación de las ondas de Rayleigh . . . . .	140
3.8. Comparación con datos experimentales. Determinación numérica del módulo de Young . . . . .	145
3.8.1. Cálculo de las condiciones de contorno. . . . .	146
3.8.2. Condiciones iniciales y de contorno . . . . .	148
3.8.3. Otras variantes de las condiciones de contorno. . . . .	150
3.8.4. Datos de la onda. . . . .	154
3.8.5. Datos del problema y resultados . . . . .	155
<b>4. Vibración de un cuerpo elástico con fisura</b>	<b>161</b>
4.1. Problema continuo . . . . .	162
4.1.1. Condiciones de contacto . . . . .	163
4.1.2. Descomposición del problema . . . . .	165
4.1.3. Discretización en tiempo . . . . .	169
4.2. Marco funcional . . . . .	171
4.2.1. Espacios de desplazamientos . . . . .	171
4.2.2. Espacios de tensiones . . . . .	171

---

4.2.3.	Condiciones de contorno . . . . .	172
4.2.4.	Espacio de tensiones admisibles . . . . .	173
4.3.	Formulación como inecuación variacional . . . . .	174
4.3.1.	Problema variacional . . . . .	179
4.4.	Resolución numérica . . . . .	181
4.4.1.	Discretización en espacio . . . . .	181
4.4.2.	Tratamiento de las condiciones de contacto . . . . .	184
4.5.	Resultados numéricos . . . . .	190
4.5.1.	Test discontinuo . . . . .	190
4.5.2.	Simulación numérica de la propagación de una onda de Rayleigh en una placa con grieta. . . . .	195
<b>5.</b>	<b>Mecánica de Fractura</b>	<b>199</b>
5.1.	Conceptos fundamentales en fractura . . . . .	200
5.2.	Modos de ruptura . . . . .	201
5.3.	Factores de intensidad de esfuerzos . . . . .	203
5.4.	Criterios energéticos de fractura . . . . .	205
5.4.1.	Relación entre la J-integral y la energía de Griffith. . . . .	208
5.4.2.	Integral de interacción . . . . .	212
5.5.	Campos de tensiones y desplazamientos cerca del vértice de una grieta. . . . .	214
5.5.1.	Coordenadas móviles con el vértice de la grieta . . . . .	215
5.5.2.	Cálculo de los potenciales escalares . . . . .	217
5.5.3.	Verificación de las condiciones de contorno. . . . .	224
5.6.	Recuperación de las expresiones clásicas . . . . .	235
<b>6.</b>	<b>Método de elementos finitos extendidos XFEM</b>	<b>245</b>
6.1.	Descripción baricéntrica de una grieta definida mediante conjuntos de nivel . . . . .	246
6.2.	Descripción baricéntrica de una grieta poligonal . . . . .	251

---

6.3. Clasificación de los nodos, aristas y elementos de la malla. . . . .	253
6.4. Aproximación XFEM . . . . .	257
6.5. Formulación matricial . . . . .	261
6.6. Reglas de cuadratura para elementos enriquecidos. . . . .	266
6.6.1. Propiedades de los subelementos . . . . .	267
6.6.2. Interpolación sobre triángulos atravesados por la grieta .	272
6.6.3. Región del vértice . . . . .	276
6.6.4. Integración de funciones singulares . . . . .	278
6.7. Integración sobre un elemento y ensamblado . . . . .	279
6.7.1. Matrices elementales . . . . .	280
6.7.2. Cálculo del puntero de destino . . . . .	282
6.7.3. Salto y penalización . . . . .	285
6.8. Aproximación de una función discontinua por funciones del es- pacio Xfem . . . . .	287
6.9. Resultados numéricos . . . . .	288
6.9.1. Tests académicos . . . . .	289
6.9.2. Propagación de ondas de Rayleigh . . . . .	294
<b>Conclusiones</b>	<b>299</b>
<b>Apéndice A. Coordenadas cilíndricas y polares.</b>	<b>303</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>305</b>



# Lista de notaciones

$\mathcal{B}$	Cuerpo/Configuración de referencia .....	2
$\mathcal{B}_t$	Configuración deformada .....	2
$\mathbf{b}$	Densidad de fuerza por unidad de volumen .....	4
$\mathbf{b}_0$	Fuerza de volumen de referencia .....	7
$\mathbf{b}^{tip}$	Fuerza de inercia estándar en el tip .....	18
$\mathbf{C}$	Tensor de tensiones bulk .....	17
$\mathcal{C}$	Clase constitutiva .....	5
$\mathcal{C}(t)$	Grieta evolutiva .....	9
$\mathbf{C}$	Tensor de elasticidad .....	25
$c_l$	Velocidad longitudinal .....	38
$c_t$	Velocidad transversal .....	38
$\mathbf{c}$	Vector de tensión superficial .....	17
$\mathbf{D}$	Parte simétrica de $\mathbf{L}$ . .....	3
$E_{ad}$	Espacio de tensiones admisibles .....	52
$\mathcal{E}_h$	Espacio de tensiones discreto .....	93
$\mathcal{E}$	Espacio afín .....	2
$\mathcal{E}$	Energía total .....	72
$\mathbf{e}$	Fuerza inercial externa .....	17
$\mathbf{e}^{tip}$	Fuerza de inercia configuracional en el tip .....	18
$\mathbf{F}$	Gradiente del movimiento .....	3
$\mathbf{f}$	Deformación .....	2
$f$	Fuerza conductora en el tip .....	22
$\mathbf{g}$	Densidad de fuerzas de volumen configuracionales .....	17
$\mathbf{g}^{\mathcal{C}}$	Fuerza distribuida sobre la grieta .....	17

$\mathbf{g}^{tip}$	Fuerza configuracional interna en el tip	18
$J$	Tasa de liberación de energía	22
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez	99
$\mathcal{K}$	Variación de energía cinética	20
$k$	Densidad de energía cinética	20
$\mathbf{L}$	Gradiente de la descripción espacial de la velocidad	3
$Lin$	Espacio lineal de endomorfismos	3
$Lin^+$	Endomorfismos cuyo determinante es positivo	3
$\mathbf{M}$	Matriz de masa	99
$(\cdot)_m$	Descripción material	3
$\mathbf{m}$	Vector normal unitario exterior a $\partial\mathcal{f}(\mathcal{P})$	6
$m_h$	Número de aristas en $\Gamma_C$	93
$med_n(A)$	Medida de Lebesgue $n$ -dimensional de un conjunto $A$	46
$(\cdot)_n$	Componente normal de un vector o tensor	32
$\mathbf{n}$	Vector normal unitario exterior a $\partial\mathcal{P}$ o a $\Omega$	6
$\mathbf{n}_{\mathcal{C}}$	Vector unitario normal a $\mathcal{C}(t)$	10
$\mathbf{P}$	Matriz de penalización	99
$\mathbf{P}$	Posición relativa de un punto material respecto del tip	13
$\mathcal{P}$	Parte	2
$\mathcal{P}$	Variación de momento	20
$\mathbf{p}$	Densidad de momento	20
$Q$	$\Omega \times [0, T]$	52
$\mathbf{S}$	Primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff	6
$\mathcal{S}_h$	Conjunto de aristas en $\Gamma_C$	93
$(\cdot)_s$	Descripción espacial	2
$\mathbf{s}$	Densidad de fuerza superficial	4
$\mathbf{s}_0$	Densidad de fuerza superficial en la configuración de referencia	32
$Skw$	Subespacio de endomorfismos anti simétricos	3
$Sym$	Subespacio de endomorfismos simétricos	3
$(\cdot)_T$	Componente tangencial de un vector o tensor	33
$\mathbf{T}$	Tensor de tensiones de Cauchy	4
$\mathbf{T}_R$	Tensión residual	6
$\mathcal{T}_h$	Malla del dominio	93
$\mathcal{T}$	Trayectoria	2

$\mathbf{t}(t)$	Vector unitario tangente a la grieta .....	10
$U_{\partial\mathcal{V}}$	Velocidad normal de la frontera de $\mathcal{V}$ .....	11
$\mathbf{u}$	Desplazamiento .....	3
$\mathbf{u}_l$	Onda longitudinal .....	40
$\mathbf{u}_t$	Onda transversal .....	40
$V_{ad}$	Espacio de desplazamientos admisibles .....	48
$V(t)$	Velocidad escalar del tip .....	10
$\mathcal{V}_h$	Espacio de desplazamientos discreto .....	93
$\mathcal{V}_{ad_h}$	Espacio de desplazamientos admisibles discreto .....	93
$\mathcal{V}(t)$	Volumen de control migratorio .....	10
$\mathbf{v}$	Descripción espacial de la velocidad .....	3
$\mathbf{X}$	Puntos materiales .....	2
$\mathbf{x}$	Puntos espaciales .....	2
$Y$	Aplicación de referencia .....	2
$\mathbf{y}$	Movimiento .....	2
$\mathbf{y}^{tip}$	Movimiento del vértice .....	20
$\mathbf{Z}(t)$	Vértice de una grieta o tip .....	10
$\Gamma = \partial\Omega$	Frontera de $\Omega$ .....	32
$\Gamma_C$	Parte de la frontera donde puede producirse contacto .....	32
$\Gamma_D$	Parte de la frontera donde se conocen los desplazamientos .....	32
$\Gamma_N$	Parte de la frontera de esfuerzos conocidos .....	32
$\Gamma(\mathcal{V})$	Energía disipada en $\mathcal{V}$ por unidad de tiempo .....	21
$\gamma$	Operador traza de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ en $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ .....	47
$\gamma_n$	Operador traza normal de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ en $H^{1/2}(\Gamma)$ .....	47
$\gamma_T$	Operador traza tangencial de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ en $\mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)$ .....	47
$\gamma_\Sigma^0$	Operador traza de $V$ en $\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Sigma)$ .....	48
$\varepsilon$	Tensor de deformación infinitesimal .....	27
$\boldsymbol{\nu}(t)$	Velocidad vectorial del tip .....	10
$\bar{\boldsymbol{\nu}}$	Velocidad del tip deformado .....	17
$\pi$	Operador traza de $E$ en $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ .....	49
$\pi_n$	Operador traza de $E$ en $H^{-1/2}(\Gamma)$ .....	49
$\pi_T$	Operador traza de $E$ en $\mathbf{H}_T^{-1/2}(\Gamma)$ .....	49
$\rho_0$	Distribución de masa .....	4
$\Sigma$	Complementario en $\Gamma$ de $\Gamma_D$ .....	46

---

$\sigma$	Tensor de tensiones linealizado .....	27
$\Upsilon$	Frontera de $Q$ , $\partial Q = \Gamma \times [0, T]$ .....	52
$\overset{\square}{\Phi}$	Derivada temporal de $\Phi(\mathbf{X}, t)$ siguiendo al tip .....	13
$\Psi$	Energía libre .....	19
$\hat{\Psi}$	Densidad de energía de deformación .....	8
$\psi^{tip}$	Energía libre superficial en el tip .....	22
$\Omega$	Dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ .....	32
$\bar{\Omega}$	Adherencia o clausura de $\Omega$ .....	93

# Introducción

El mundo en que vivimos, esta civilización de sociedades desarrolladas, industrializadas y tecnológicas a la que pertenecemos, no sería concebible sin el inmenso progreso realizado en ingeniería mecánica y estructural en las últimas décadas. Los avances en estas áreas de conocimiento han posibilitado edificaciones e infraestructuras cada vez más audaces, maquinaria más eficaz y resistente y medios de transporte más rápidos y seguros.

A pesar de los logros ya obtenidos, la investigación en ingeniería mecánica y estructural, lejos de haberse estancado, es hoy en día uno de los campos con mayor actividad, inversión y perspectivas de futuro. En particular, el estudio de la resistencia de los materiales es uno de los aspectos a los que se dedican mayores esfuerzos. La historia nos proporciona numerosos ejemplos de grandes proyectos de ingeniería que se han venido abajo (en ocasiones literalmente) debido a cálculos poco minuciosos en la fase de diseño, en muchos casos relacionados con la resistencia de los materiales utilizados.

En efecto, los fallos estructurales han sido un problema asociado a la actividad humana desde la construcción de las primeras grandes estructuras, tales como templos, fortificaciones, puentes o acueductos. Por supuesto, existen estructuras antiguas que han sobrevivido al paso del tiempo y son claro ejemplo de diseños exitosos. Pero sin duda hubo muchos más diseños que tuvieron una corta vida. Posiblemente, estas construcciones que aún hoy perviven se consiguieron después de muchos intentos ensayo-error. Por ejemplo, se cree que los Romanos probaban cada nuevo puente que se construía exigiendo que el diseñador/ingeniero permaneciese bajo el puente mientras los carros pasaban

sobre el mismo. De este modo, no sólo se incentivaba el cuidadoso desarrollo de los diseños, sino que se llevaba a cabo una especie de selección natural; aquellos ingenieros menos aptos eran eliminados del gremio.

Sin embargo, es con el desarrollo industrial cuando el problema se agrava considerablemente debido a la construcción de estructuras cada vez más complejas y la producción (y por ende, utilización) masiva de nuevos materiales como el hierro o el acero cuyo comportamiento era prácticamente desconocido y que en sus primeros usos daban lugar en ocasiones a fallos aparentemente aleatorios.

Existen registros de fallos estructurales en todas las épocas y en una amplia variedad de ámbitos: arquitectura, ingeniería civil, ferrocarriles, aeronáutica,...

Cabe citar como ejemplo el accidente ferroviario ocurrido en 1842, cuando la ruptura de un eje de la locomotora del convoy que hacía el trayecto Versailles-Paris causó un descarrilamiento que se cobró más de 55 muertes. Otro caso famoso es el accidente naval acaecido en 1943, cuando un carguero atracado en el puerto de Portland, y con el mar en calma, se partió en dos. No menos conocido es el hundimiento del puente Tacoma Narrows, que colapsó tan solo 4 meses después de su inauguración en julio de 1940 debido a los fuertes vientos.

Otros sucesos son mucho más recientes, como el hundimiento en Minneapolis en 2007 del puente I-35W sobre el río Mississippi, con el agravante de que sucedió a la hora de mayor tráfico, arrojando vehículos a las aguas y causando varias muertes y numerosos heridos.

En aeronáutica se encuentran también multitud de ejemplos, como los accidentes en 1953 y 1954 de los aviones De Havilland Comet, cuya destrucción en pleno vuelo obligó a que toda la flota de Comet quedara inmovilizada en tierra para ser investigada. Tras la recuperación y el análisis de fragmentos de los aviones siniestrados se encontró que la causa era la fatiga del metal.

Más recientemente, en mayo de 2004 una sección de 36 metros del techo de la terminal 2E del aeropuerto Charles de Gaulle de París se desplomó sobre un pasillo de embarque, debido a fuertes tensiones que la estructura no estaba diseñada para soportar. El hundimiento de edificaciones más modestas puede

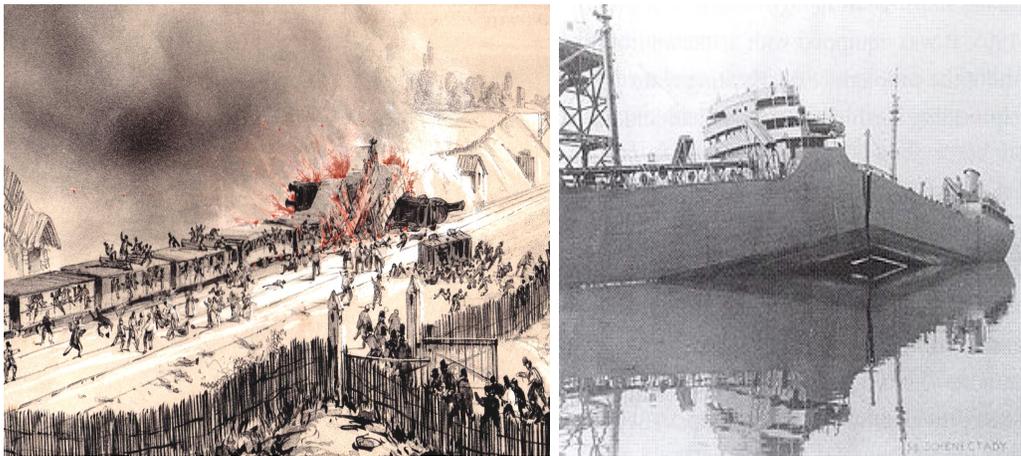


Figura I.1: Ilustración del accidente ferroviario de Versailles e imagen del carguero partido en Portland.

tener consecuencias más luctuosas, como es el caso del pabellón de deportes de Sant Boi, en 2009, cuyo hundimiento causó la muerte de cuatro niños.

También en la industria energética se encuentran numerosos ejemplos de fallo estructural. En noviembre de 1965, tres de las ocho torres de refrigeración de la central eléctrica de Ferrybridge en Inglaterra se derrumbaron debido a las vibraciones producidas por vientos de 137 km/h. Las otras cinco torres quedaron seriamente dañadas. En febrero de 2008, el engranaje de una turbina

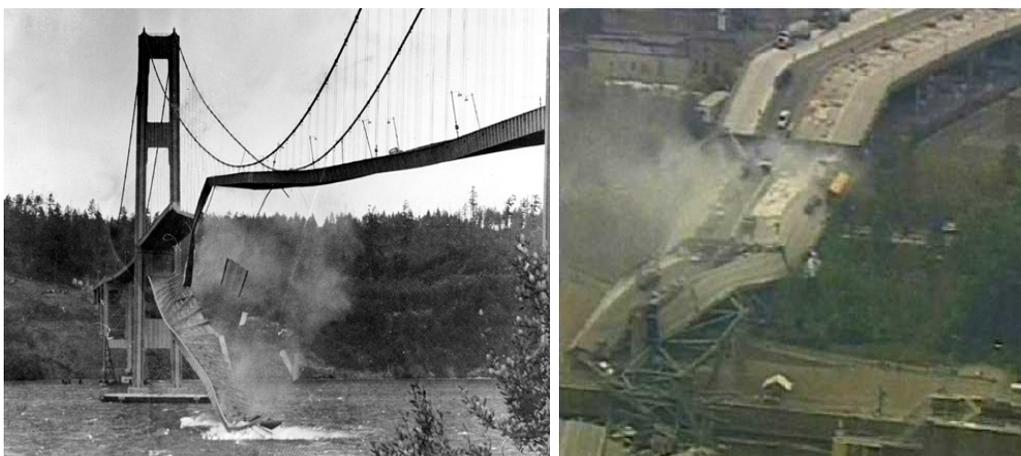


Figura I.2: Imágenes de los puentes Tacoma Narrows e I-35W después del colapso.

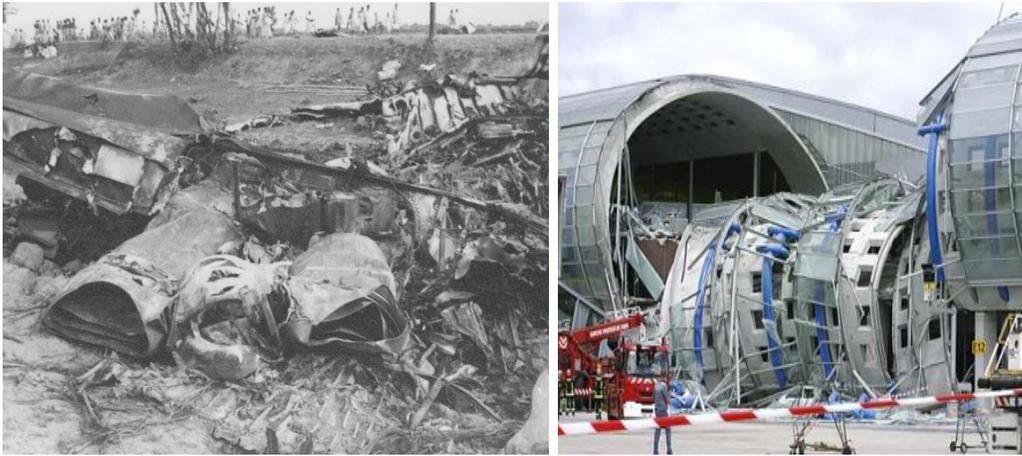


Figura I.3: Imágenes de los restos de un Comet y del aeropuerto CDG tras el colapso.

eólica en Hornslet, Dinamarca, falló, lo que combinado con fuertes vientos produjo el desprendimiento de las palas y posterior derribo de la torre.



Figura I.4: Imágenes de las torres de Ferrybridge y de la turbina eólica de Hornslet.

Como se ha visto, la rotura de una pieza o el colapso de una estructura pueden tener un elevado coste económico, cuando no un coste aún mayor en vidas humanas. Evitar estos fallos es una tarea que comienza con un minucioso y cuidadoso diseño. Para ello, la mecánica de medios continuos ha demostrado ser una herramienta de lo más eficaz, aplicándose tanto para el diseño de pequeñas piezas como para el de los mayores rascacielos de la historia.

No obstante, con un buen diseño inicial puede no ser suficiente. En la mayor parte de los casos es muy recomendable, cuando no imprescindible, llevar a cabo tareas de mantenimiento que aseguren la integridad tanto de piezas mecánicas como de estructuras mayores.

Esto es debido a que cuando se somete un cuerpo a cargas externas, las tensiones resultantes pueden llegar a exceder el umbral de resistencia del material, dando lugar a fallos que se inician a menudo en forma de grietas superficiales o cercanas a la superficie. Es por esto que la detección de defectos y grietas antes de que den lugar a fallo estructural es primordial.

En ingeniería se denominan Técnicas de Evaluación No Destructivas (NDE, por sus siglas en inglés) a un conjunto de métodos y procedimientos usados para la detección y análisis de defectos en piezas, sin comprometer para ello la propia integridad de la pieza en sí.

Por ejemplo existen métodos que están basados en aplicar ondas electromagnéticas, acústicas o elásticas y, en particular, los basados en ondas guiadas, como por ejemplo las ondas de Lamb o de Rayleigh. Estas últimas se usan habitualmente para probar estructuras de geometrías simples, tales como vigas y placas. La descripción y propiedades de estos tipos de ondas pueden encontrarse, por ejemplo, en [60, 81].

Podemos considerar que hay dos tipos de imperfecciones. Por un lado, las penetrantes, que tienen una profundidad significativa con respecto del espesor de la pieza, e influyen en gran medida en la seguridad de la estructura, y por otra parte, las no penetrantes que afectan únicamente a la zona superficial de chapa y están más relacionadas con la protección de la estructura frente a un deterioro ambiental que con su seguridad.

Nuestro objetivo en este trabajo es el estudio y simulación numérica del comportamiento, bajo excitación por ondas superficiales, de estructuras con y sin grietas, suponiendo que éstas son imperfecciones superficiales o no penetrantes. La comparación de estos dos problemas (con y sin grietas) permite determinar mediante tests no destructivos la existencia de imperfecciones en una estructura.

Para ello analizaremos la propagación de ondas de Rayleigh en estructuras no dañadas y realizaremos la correspondiente simulación de su propagación sobre una estructura con grieta. Técnicamente, modelizaremos esta situación mediante un problema de contacto entre los labios de la grieta, que se suponen inicialmente en contacto.

En la práctica, la presencia de una superficie fisurada introduce notables dificultades en la simulación numérica del fenómeno en estudio. Durante décadas se ha usado el Método de Elementos Finitos (FEM, por sus siglas en inglés) para implementar la resolución numérica de numerosos problemas. Sin embargo, para aplicar este método en problemas evolutivos en los que la geometría presenta discontinuidades o singularidades, se necesita modificar la malla y/o utilizar mallas muy finas, con el consiguiente coste computacional. Es por esto que el método FEM no es el más eficiente para simular el comportamiento dinámico de estructuras con grietas.

Por el contrario, el Método de Elementos Finitos Extendido (XFEM, por sus siglas en inglés) está especialmente concebido para permitir discontinuidades en el espacio de aproximación asociado. En él, el espacio de funciones del FEM clásico es enriquecido con funciones especiales que ayudan a capturar las particularidades del problema. Éstas pueden ser funciones discontinuas, con derivadas discontinuas, que incorporan características conocidas de la solución tales como singularidades, o combinaciones de las anteriores, y siempre utilizando la noción de partición de la unidad. Así, la implementación de este método nos permitirá mallar el dominio de forma independiente de la grieta, y capturar con mayor precisión la singularidad de las tensiones en el vértice de la grieta.

## I.1. Estado del arte

El presente trabajo es una continuación del realizado en el trabajo de investigación tutelado [19], inspirado a su vez por el artículo de Samartín y Moreno [82], donde se simula numéricamente el desplazamiento de las ondas de Ray-

leigh suponiendo que hay una distancia inicial  $h > 0$  entre los labios de la fisura y sin modelar el posible contacto entre ellos; esto en ocasiones lleva a no respetar la no interpenetrabilidad de la materia. Las estructuras consideradas son placas de espesor delgado, lo cual permite tratar el problema como bidimensional.

En este trabajo se hace un repaso al comportamiento de las ondas de Rayleigh desde un punto de vista analítico y numérico en placas no dañadas, y se traslada dicho análisis al problema con fisura suponiendo que la distancia  $h$  es nula y que por tanto, en un principio, ambos labios de la fisura están en contacto y que no existe fricción entre ellos. Dicho contacto se modeliza imponiendo en la grieta condiciones de Signorini. Este tipo de condiciones han sido utilizadas por otros autores en diversos problemas de la mecánica de medios continuos, ver por ejemplo [30, 46, 48, 57, 80, 95, 96].

En las últimas décadas, muchos autores han estudiado un amplio rango de problemas de contacto dinámicos con varios materiales y condiciones de frontera. Por ejemplo, Duvaut y Lions [30] consideraron problemas de contacto cuasiestático y dinámico con fricción para cuerpos elásticos lineales y viscoelásticos. Para cuerpos viscoelásticos encontramos los trabajos de: Martins y Oden [66] en el caso de respuesta normal; Cocou [26] para condiciones de Signorini y fricción no local, resultado que posteriormente extendieron Cocou y Scarella [27] a un cuerpo con grieta. El problema de contacto de Signorini sin fricción para materiales con memoria singular fue considerado por Jarušeck [55] quien también estudió el caso con fricción conocida en [53]; En Jarušek y Eck [54] se estudiaron problemas con fricción local de Coulomb. En relación a problemas de contacto termoviscoelásticos, Eck [31] estudió un problema con fricción de Coulomb. También Figueiredo y Trabucho [34], quienes extendieron los resultados dados en [66] a este tipo de materiales.

Para otros problemas como la ecuación de ondas con condiciones de contorno unilaterales, Lebeau y Schatzman [61] establecieron la existencia y unicidad de solución para dominios semi-infinitos. Sin embargo, como los propios autores explican, su método no puede extenderse a dominios generales. Kim [56] demostró la existencia de solución para dominios regulares acotados pero su metodología no puede aplicarse a problemas elásticos, salvo en casos muy concretos, como por ejemplo, problemas con simetría esférica, como se recoge en

el trabajo de y Muñoz- Rivera y Racke [71], quienes demostraron la existencia de solución para el problema de contacto de Signorini termoelástico sobre un dominio con simetría esférica. Hasta donde nosotros sabemos, el problema dinámico de contacto sin fricción en elasticidad lineal sobre un dominio acotado general sigue siendo un problema abierto. En esta memoria se establece un resultado de existencia de solución para dicho problema en un sentido todavía “débil”. Aunque no es un resultado completamente satisfactorio, sí supone un avance muy importante, ya que la metodología de su demostración define completamente un algoritmo numérico en tiempo que en otros capítulos de la memoria se revelará como muy eficiente.

Como se comentó anteriormente, para la discretización numérica en espacio se utilizarán los métodos de elementos finitos clásicos y de elementos finitos extendidos. El método de elementos finitos (FEM) es uno de los métodos numéricos más populares para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales. Desarrollado en la segunda mitad del siglo XX, ha sido aplicado con éxito a la resolución de problemas en mecánica estructural, dinámica de fluidos, acústica, electromagnetismo, biomecánica, entre otros, y es utilizado por una gran variedad de paquetes de software, tanto comercial como de código abierto, como por ejemplo, COMSOL, NASTRAN, MARC, ACTRAN, FLUX2D/3D, Code Aster, FEBio y un largo etcétera. A pesar de ser un método muy desarrollado y robusto, no es muy adecuado para el estudio de discontinuidades evolutivas, pues depende de una estructura de pequeños elementos para construir el espacio de aproximación. Por tanto, para construir un espacio de aproximación discontinuo, es necesario alinear la topología de los elementos con la geometría de la discontinuidad. Ello requiere, en particular, la regeneración de la malla de elementos a medida que la discontinuidad evoluciona, lo que implica un elevado coste computacional. Para solventar estos problemas se han desarrollado en los últimos años diversos tipos de métodos que no requieren una malla para la construcción de la solución, los denominados métodos “mesh-free” o “meshless” y han sido aplicados a problemas de mecánica para los cuales el método de elementos finitos presenta importantes dificultades, como el modelado de problemas de fractura, flujos y grandes deformaciones en sólidos. Sin embar-

go, estos métodos requieren unos recursos computacionales significativamente mayores que los del método de elementos finitos. El coste adicional se asocia con la construcción de las funciones de base y la cuadratura adicional necesaria para la construcción adecuada de la forma bilineal. Una alternativa a los métodos sin malla son los elementos finitos extendidos, que son capaces de representar discontinuidades en el interior de los elementos. Estos elementos se utilizan localmente en la zona donde se localiza la grieta para representar la discontinuidad. El método de Elementos Finitos Extendido fue introducido por Moës, Dolbow y Belytscho en [67]. En él, los campos singulares y discontinuos se simulan sobre una malla de elementos finitos gracias a la introducción de un conjunto especial de funciones de forma enriquecidas, que permiten una aproximación adecuada del campo de desplazamientos. Dichas funciones de forma se multiplican por las funciones de forma nodales de modo que se mantienen en el marco de los métodos de partición de la unidad. La presencia de la grieta no se modela geoméricamente y la malla es independiente de la misma. Los grados de libertad del método clásico relativos a los elementos de la malla cortados por la grieta se enriquecen con una función de tipo Heaviside, mientras que los del elemento que contiene al vértice de la grieta se enriquecen con funciones singulares que generan la tensión asintótica exacta.

Desde su introducción, muchos trabajos han estudiado el XFEM, mejorado su rendimiento y explorado sus habilidades. Trabajos de Moës, Dolbow y Belytscho trataron problemas elásticos bidimensionales y considerando contacto con fricción [28]. Sukumar *et al.* estudiaron la extensión del XFEM a problemas tridimensionales con grietas [90]. En los trabajos de Belytschko *et al.* [11], Moës *et al.* [68] y Gravouil *et al.* [40] se usan conjuntos de nivel para localizar la grieta. En el trabajo de Laborde *et al.* [59] se introduce una mejora que permite obtener convergencia óptima para las aproximaciones XFEM. En [9] se presenta una técnica de preconditionamiento para mejorar el condicionamiento de la matriz de rigidez resultante del XFEM. Laborde [59] y Ventura [94] estudiaron aspectos relacionados con la integración numérica de las funciones de enriquecimiento singulares. El análisis matemático de varios métodos de tipo XFEM se realizó en [21] y [22].

Los métodos XFEM no sólo se aplican en mecánica de la fractura, sino también a otro tipo de problemas en mecánica de fluidos [38], optimización [93],

transporte [74], solidificación [23] y transferencia de calor [73] entre otros.

En esta memoria se detalla la metodología para la implementación del método XFEM y se presentan ciertas técnicas innovadoras que permiten su implementación evitando la casuística que surge a la hora de realizar la integración sobre elementos enriquecidos.

El marco teórico de la mecánica de la fractura está bastante bien establecido. El trabajo de Griffith [41] publicado en 1920 relacionando la tensión de ruptura con el tamaño de los defectos sentó las bases para los posteriores estudios. Según el modelo de Griffith, la fractura ocurre cuando la energía de deformación supera la energía de superficie del material. Sin embargo, su trabajo solamente se aplicaba a piezas de cristal. No fue hasta 1948 que el modelo se modificó para aplicarlo a metales. Las fracturas sufridas por unos 400 de los 2700 barcos Liberty construidos durante la Segunda Guerra Mundial impulsó el interés en la mecánica de la fractura. Irwin [50] extendió el trabajo de Griffith a metales incluyendo la energía disipada por los flujos plásticos locales y Mott [70] lo hizo para grietas que se propagan rápidamente. En 1956 Irwin [51] desarrolló el concepto de tasa de liberación de energía, y en 1957 [52] usó el trabajo de Westergaard [98], quien había analizado las tensiones y desplazamientos en el frente de grieta, para demostrar que se podían caracterizar por un parámetro relacionado con la tasa de liberación de energía, al que posteriormente se denominó "factor de intensidad de esfuerzos". La utilidad de la mecánica de la fractura se vio pronto respaldada por su exitosa aplicación a casos como las fracturas del fuselaje de los aviones Comet que, como Wells [97] demostró, eran debidas al insuficiente refuerzo y las esquinas cuadradas de las ventanillas. Hacia 1960 las bases de la mecánica de fractura lineal elástica estaban bastante bien establecidas y entre 1960 y 1980 aparecieron estudios en mecánica de fractura no lineal, en los que se tienen en cuenta las deformaciones plásticas que sufre el material. Es en este periodo cuando se introducen conceptos como "crack-tip-opening displacement" (CTOD) y la J-integral de Rice [78] que expresa la tasa de liberación de energía para materiales no lineales como una integral de línea evaluada en un contorno arbitrario en torno al vértice

de la grieta. En [79] se relacionó la J-integral con los campos de tensiones en el vértice de la grieta en materiales no lineales y por tanto puede entenderse como un parámetro de intensidad de tensiones no lineal, así como una tasa de liberación de energía. La aplicación de la J-integral al análisis de diseño no fue posible hasta el trabajo de Shih y Hutchinson [85] que proporcionaron el marco teórico para dichas aplicaciones.

Es también entre 1960 y 1980 cuando se desarrolló buena parte de la base teórica de la mecánica de fractura dinámica. Se han publicado varios trabajos en este ámbito así como trabajos generalizando la J-integral para tener en cuenta los efectos de la inercia y visco-plasticidad, ver por ejemplo, [4, 5, 69, 86].

## I.2. Estructura

La memoria se estructura en seis capítulos.

En el Capítulo 1 se introducen las notaciones y los conceptos básicos de la mecánica del continuo y de la fractura que se utilizarán a lo largo de esta memoria.

En primer lugar, se describen las ecuaciones que modelan el movimiento de un cuerpo en formulación euleriana y lagrangiana, las leyes constitutivas, que se particularizarán para cuerpos hiperelásticos, así como resultados clásicos de transporte y energía.

A continuación, se presentan los conceptos de fuerzas configuracionales, que realizan trabajo sobre los cambios posicionales en la configuración de referencia, como pueden ser los crecimientos de grietas o transferencia de material a través de una interfase. Estas fuerzas fueron introducidas por Gurtin en [44] y [45], donde se realiza un estudio detallado de sus balances de fuerzas y momento, y se deduce la expresión de la tasa de liberación de energía a través del vértice de una grieta para materiales hiperelásticos, resultados que recogemos aquí por completitud.

Seguidamente, obtendremos el modelo linealizado y la energía libre asociada a materiales de Hooke y demostraremos que al linealizar la expresión de la tasa

de liberación de energía obtenida a partir de las fuerzas configuracionales, se recupera la expresión clásica de la J-integral tanto para el caso dinámico como para el caso estático.

Posteriormente, se presentan las condiciones de contorno y de contacto que modelan el contacto sin fricción de un sólido elástico lineal con un obstáculo rígido, que se particularizarán en el Capítulo 4 al contacto sin fricción entre los labios de una grieta. Se exponen también las condiciones que deben cumplir un dominio y los datos de un problema para posibilitar la formulación de un problema tridimensional como un problema de deformaciones planas.

Finalmente, se estudian las propiedades de las ondas progresivas sinusoidales, que constituyen una importante clase de soluciones de la elastodinámica lineal. En particular, se caracterizarán las ondas longitudinales y transversales, sus velocidades características, dependientes únicamente de las propiedades del material, y se relacionarán con la existencia de unos potenciales escalares y vectoriales a partir de los cuales se puede descomponer un campo de desplazamientos en la suma de un vector irrotacional y uno solenoidal.

Dicha descomposición nos permitirá, por una parte, obtener en el Capítulo 3 la expresión de una onda de Rayleigh, que utilizaremos posteriormente para imponer las condiciones de contorno en la simulación de la propagación de un tren de ondas de Rayleigh y por otra, deducir las expresiones de las tensiones que se producen cerca del vértice de una grieta que se propaga con una cierta velocidad, estudio que se realizará en el Capítulo 5.

En el Capítulo 2 se realiza el análisis matemático del problema dinámico de contacto con sólido rígido sin fricción, considerando las condiciones de Signorini presentadas en el Capítulo 1. Se presenta el modelo y el marco funcional, estableciendo los espacios y resultados de trazas que se utilizarán a lo largo del capítulo y definiendo el modo en que han de cumplirse las condiciones de frontera.

A continuación, el problema es discretizado en tiempo, siguiendo un esquema de tipo Newmark, inspirado en la resolución numérica del problema. Se obtienen un número finito de problemas estáticos para los cuales se establece la

existencia y unicidad de solución. A partir de dichas soluciones continuas en espacio y discretas en tiempo se construyen varias aproximaciones de la solución del problema dinámico, con diferentes propiedades; algunas son funciones escalonadas, otras son funciones lineales a trozos y otras de clase 2 a trozos.

Para estas funciones se obtienen estimaciones “a priori” consiguiendo acotaciones en tiempo para las distintas aproximaciones, y en consecuencia resultados de convergencia débil. Además se demuestra la unicidad del límite de las distintas aproximaciones consideradas.

Se estudia la conservación de la energía del método de Newmark considerado, obteniéndose disipación de la energía en el caso en que se produzca contacto efectivo, y conservación de la energía en otro caso.

Finalmente se recuperan las ecuaciones que verifica el límite, obteniéndose que es solución del problema en el sentido de las distribuciones, que verifica las condiciones de contorno clásicas, aunque verificando la condición de compatibilidad de manera  $\delta$ -débil; el desplazamiento límite respeta la no interpenetrabilidad de la materia, las fuerzas de apoyo también respetan el principio de acción-reacción, y en la zona donde el apoyo no es efectivo se ha podido establecer que las tensiones son (casi) nulas.

Una vez realizado el análisis matemático del problema dinámico de contacto, el resto del capítulo se dedica a su resolución numérica. Para ello, se obtiene su formulación variacional como inecuación y se discretiza en espacio mediante el método de elementos finitos estándar. Para el tratamiento de las condiciones de Signorini se introduce un multiplicador de Lagrange que permite obtener una formulación como ecuación variacional mediante técnicas de subdiferenciabilidad y operadores maximales monótonos análogas a las utilizadas en [13].

Para acelerar la convergencia del algoritmo se utiliza una técnica de Newton generalizada, y la discretización en tiempo está basada en el mismo método implícito de la familia de los métodos de Newmark considerado en el análisis matemático del problema.

Por último, para probar la eficiencia del algoritmo, se considera un problema

simple con solución conocida, al cual se aplica el algoritmo descrito en las secciones previas y cuyo comportamiento se analiza con diversas condiciones de contorno, y variando los valores de los parámetros característicos de las discretizaciones en espacio y tiempo.

En el Capítulo 3 se plantean los modelos matemáticos que rigen la vibración por ondas de Rayleigh de un sólido elástico tridimensional semi-infinito sin fisura. Se trata de un caso particular del modelo elastodinámico lineal presentado en el Capítulo 1 al que hay que añadir las condiciones en el infinito y de periodicidad de la solución. Las primeras secciones del capítulo se dedican a la obtención de los datos del modelo asociado a una onda de Rayleigh. En particular, partiendo de las ecuaciones que verifican las ondas longitudinales y transversales obtenidas en el Capítulo 1 se buscará una solución monocromática, superficial, que presente un comportamiento sinusoidal unidireccional, compatible con las hipótesis de deformaciones planas también presentadas en el Capítulo 1.

A continuación, se utilizan las expresiones calculadas de los desplazamientos de una onda de Rayleigh para imponer la condición de contorno del problema sobre un dominio acotado. Debido a la incompatibilidad de dicha condición de contorno con una condición inicial de reposo se presenta una técnica de descomposición del problema que permite la simulación de la propagación de la onda de Rayleigh. Así, se resuelve un problema pseudoestático con fuerzas de volumen nulas y condición de contorno Dirichlet no homogénea que carga con la condición de la onda de Rayleigh, y un problema dinámico con condiciones de contorno e iniciales homogéneas, y fuerzas de volumen no nulas. De este modo, tenemos compatibilidad entre las condiciones iniciales y la condición de contorno, sin necesidad de que toda la placa esté vibrando desde el instante inicial. Podría decirse que la condición inicial del problema es un impulso que viene determinado por la solución del problema pseudoestático.

En la siguiente sección, se realiza la simulación numérica de diversos problemas; para comprobar la precisión de los métodos utilizados se realiza la simulación numérica de un ejemplo académico y se comparan los resultados obtenidos con la solución teórica. Asimismo, se resuelve el caso de una placa que ya en el

instante inicial está vibrando con una onda de Rayleigh con la solución teórica obtenida en este capítulo. Para este caso se realiza también una comparación de las trayectorias de un punto cercano a la superficie con la trayectoria elíptica teórica. Dicho estudio de las trayectorias permite determinar si una placa tiene daños o no.

También se simula la propagación de un ciclo de onda de Rayleigh, así como la propagación de un tren de ondas. En este último caso se observa un fenómeno de dispersión cuando el problema se resuelve considerando la condición de contorno Dirichlet en  $x = 0$  frente a una condición de contorno en  $x \neq 0$  debido a que la condición de contorno presenta un punto crítico en dicho punto, y se produce una pérdida de información.

Finalmente, se realiza la comparación de la simulación numérica de la propagación de cinco ciclos de onda de Rayleigh con amplitud variable con las mediciones experimentales proporcionadas por el grupo de Metrología Óptica del Departamento de Física Aplicada de la Universidad de Vigo, procedimiento que sirve también para la determinación de los parámetros de Lamé del material. La variación de la amplitud que presentan las ondas experimentales se aproxima por una envolvente gaussiana cuyos parámetros se extraen de los datos experimentales. Se consideran distintas variantes de las condiciones iniciales, y los resultados obtenidos con todas ellas reproducen las mismas soluciones.

En el Capítulo 4 se considera un dominio bidimensional con una fisura superficial y se resuelve el problema de propagación de una onda de Rayleigh suponiendo una condición de contacto unilateral sin rozamiento (condiciones de Signorini) entre los labios de la fisura; la perturbación que aparece en la onda de Rayleigh permitirá detectar la existencia de grietas y, en el futuro, al estudiar el problema inverso, identificar la posición de la grieta.

Se plantea el modelo con especial atención a las condiciones de contacto que, aunque son similares a las utilizadas en el problema de contacto con sólido rígido del Capítulo 2, han de ser adaptadas al contacto entre los dos labios de la grieta. Se utiliza la misma técnica de descomposición de la solución mostrada

en el Capítulo 3 que permite plantear un problema dinámico con condiciones de contorno homogéneas.

Se realiza una discretización en tiempo del problema dinámico utilizando el método de Newmark expuesto en el Capítulo 2 y se obtendrá la formulación variacional del problema que se resuelve numéricamente utilizando el mismo algoritmo presentado en el Capítulo 2, adaptado al contacto entre los labios de una grieta. La discretización en espacio se lleva a cabo mediante el método de elementos finitos clásico, para lo cual es necesario adaptar la malla del dominio a la geometría de la grieta. Esta restricción se eliminará posteriormente en el Capítulo 6, donde se utilizará el método de elementos finitos extendidos XFEM para enriquecer el espacio de aproximación de forma local en el entorno de la grieta añadiendo funciones discontinuas en el interior de los elementos cortados por la grieta.

Para comprobar el funcionamiento del algoritmo de contacto, se presentan los resultados numéricos sobre un ejemplo académico. Asimismo, se recuperan los datos de las trayectorias de un punto cerca de la superficie obtenidos en el Capítulo 3 para la onda teórica y la placa sin grieta y se comparan con las trayectorias obtenidas en el caso con grieta. Se aprecia la perturbación de la forma elíptica en la trayectoria. Además, se comparan los desplazamientos experimentados por los puntos de la superficie en distintos instantes de tiempo tanto en el caso teórico, como en los casos con y sin grieta. Se aprecia que antes de que la onda alcance la grieta no hay diferencias sustanciales, mientras que una vez que la onda ha superado la grieta los efectos de la reflexión y la refracción son evidentes en la amplitud de las ondas.

El Capítulo 5 se dedica al estudio del comportamiento de una grieta. En él se repasan los conceptos de modos de fractura, factores de intensidad de esfuerzos, integral de interacción y criterios de crecimiento de grietas. Se obtendrá la expresión de las tensiones cerca del vértice de la grieta en el caso de una grieta que avanza con velocidad no nula utilizando un método directo de resolución.

Se probará que dicho método no conduce a una solución no trivial para el caso de una grieta estática, por lo que en ese caso se utilizará un método

inverso mediante la función de Airy para obtener la expresión de las tensiones. Esto nos permitirá determinar una base para el espacio al que pertenece el desplazamiento. Con las funciones que forman dicha base enriqueceremos el espacio de elementos finitos de forma local cerca del vértice de la grieta, lo que nos permitirá mejorar la aproximación de la tensión.

En el sexto y último capítulo se introduce el método de elementos finitos extendidos (XFEM), que permite mallar el dominio independientemente de la grieta y enriquecer los nodos cercanos al vértice de la grieta para tener en cuenta la singularidad que presentan las tensiones en esa zona. Para representar la discontinuidad de los desplazamientos en la grieta se consideran funciones de salto de Heaviside que se añaden a la base estándar en los elementos cortados por la grieta. En un entorno del vértice de la grieta se enriquece el espacio de elementos finitos con las funciones calculadas en el Capítulo 5, que permiten mejorar la aproximación de la singularidad de las tensiones cerca del vértice.

Se expone el procedimiento utilizado para la implementación del método, se describe el proceso de búsqueda y clasificación de los elementos cortados por la grieta, los distintos tipos de nodos y elementos enriquecidos, así como la generación de los punteros de destino de los grados de libertad. Se realiza una representación baricéntrica de los puntos de corte de la grieta con las aristas de los elementos lo que permite evitar la casuística que se presenta en la integración numérica sobre los elementos cortados por la grieta. Además, para los elementos enriquecidos con las funciones singulares en el vértice, se utiliza una regla de cuadratura especial, conocida como “almost polar integration” que transforma una regla de cuadratura sobre un cuadrilátero en una cuadratura sobre un triángulo, de modo que la densidad de puntos de integración es mayor cerca del vértice de la grieta, mejorando así la aproximación con respecto a una regla de triángulos estándar.

En el apartado de resultados numéricos, se simulan los modos de fractura I y II presentados en el Capítulo 5 y se comparan los resultados obtenidos utilizando XFEM con los elementos finitos estándar. Se comprueba que el orden de aproximación en desplazamientos es el mismo, mientras que las tensiones se aproximan mucho mejor con los XFEM, como era de esperar.

Finalmente, se incluye un apartado de conclusiones, un Anexo dedicado al cambio de base de coordenadas cartesianas a cilíndricas así como una lista de referencias bibliográficas que han sido utilizadas en la realización de esta memoria o que están directamente relacionadas con los contenidos de la misma.

# Capítulo 1

## Elastodinámica lineal

En este capítulo estableceremos una serie de conceptos básicos en elasticidad lineal y mecánica de la fractura que se utilizarán a lo largo de esta memoria. En las tres primeras secciones se introducirá la notación y obtendremos la formulación Lagrangiana de la ecuación del movimiento y la energía del sistema así como varias propiedades de los materiales hiperelásticos. Posteriormente, en la Sección 1.4 se estudiarán los equilibrios de fuerzas para las fuerzas configuracionales, que realizan trabajo sobre cambios posicionales en la configuración de referencia, como los producidos durante los crecimientos de grietas. A partir de estos equilibrios obtendremos la tasa de liberación de energía a través del vértice de una grieta, y deduciremos la expresión de la J-integral para materiales hiperelásticos. En la Sección 1.5 se enuncian las propiedades del tensor de elasticidad y en la Sección 1.6 se obtienen las ecuaciones de la elastodinámica lineal así como la expresión de la J-integral para un material elástico lineal. En la Sección 1.7 se presentan las condiciones de contorno, iniciales y de contacto que modelan el problema de contacto sin fricción con sólido rígido. En la Sección 1.8 se enuncian las hipótesis necesarias para formular un problema tridimensional como un estado elástico plano, tanto para deformaciones planas como para tensiones planas y se plantean los problemas correspondientes. En la Sección 1.9 se estudian las propiedades y características de las ondas progresivas sinusoidales y los potenciales de Love, que permitirán deducir la expresión analítica de las ondas de Rayleigh.

En general seguiremos la notación introducida por Gurtin [44]. Excepto que se mencione lo contrario, los resultados que se introducen en las primeras secciones de este capítulo están recogidos en el texto de Bermúdez [12]; cuando no sea así se dará la referencia concreta o se hará la demostración.

Como es habitual en mecánica de sólidos, utilizaremos en esta memoria la convención de Einstein de suma sobre índices repetidos. Como regla general, los índices griegos  $\alpha, \beta \dots$  toman valores en el conjunto  $\{1, 2\}$  y los latinos  $i, j \dots$ , en  $\{1, 2, 3\}$ .

## 1.1. Conceptos básicos de la mecánica de los medios continuos

En este apartado introducimos la notación básica utilizada a lo largo del capítulo así como las leyes de conservación de masa, momentos y energía.

Sea  $\mathcal{E}$  un espacio afín euclidiano sobre un espacio vectorial  $\mathcal{V}$  y sea  $\mathcal{B}$  un cuerpo que ocupa una región cerrada de  $\mathcal{E}$ . En esta memoria se considerará que  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ , con  $n = 2$  o  $3$ . Se denomina *deformación* de  $\mathcal{B}$  a una aplicación regular biyectiva  $\mathbf{f}$  que relaciona  $\mathcal{B}$  con otra región cerrada del espacio afín  $\mathcal{E}$  verificando que  $\det \nabla \mathbf{f} > 0$ . Un *movimiento* de  $\mathcal{B}$  es una función de clase  $C^3$ ,  $\mathbf{y} : \mathcal{B} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$  tal que para cada  $t$  fijo,  $\mathbf{y}(\cdot, t)$  es una deformación de  $\mathcal{B}$ . Se llama *configuración deformada* en el instante  $t$  a  $\mathcal{B}_t = \mathbf{y}(\mathcal{B}, t)$  y nos referiremos a  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0$  como la *configuración de referencia*. El conjunto  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{T} = \{(\mathbf{x}, t) / \mathbf{x} \in \mathcal{B}_t, t \in \mathbb{R}\}$  es la *trayectoria* del movimiento  $\mathbf{y}$ . Los puntos  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$  se llaman *puntos materiales* mientras que los puntos  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$  se llaman *puntos espaciales*. Una *parte*  $\mathcal{P}$  es una subregión regular acotada de  $\mathcal{B}$ .

Se denomina *aplicación de referencia* del movimiento a la aplicación  $Y : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{B}$  tal que

$$\mathbf{y}(Y(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{x}, \text{ e } Y(\mathbf{y}(\mathbf{X}, t), t) = \mathbf{X}. \quad (1.1.1)$$

Se define la *descripción espacial*  $\phi_s$  de un campo material  $\phi$  como

$$\phi_s(\mathbf{x}, t) = \phi(Y(\mathbf{x}, t), t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathcal{T}, \quad (1.1.2)$$

	Campo Material $\phi(\mathbf{X}, t)$	Campo espacial $\psi(\mathbf{x}, t)$
Dominio	$\mathcal{B} \times \mathbb{R}$	$\mathcal{T}$
Argumentos	Punto material $\mathbf{X}$ y tiempo $t$	Punto espacial $\mathbf{x}$ y tiempo $t$
Gradiente con respecto al primer argumento	$\nabla\phi$	$\text{grad}\psi$
Derivada con respecto al segundo argumento	$\dot{\phi}$	$\psi'$
Divergencia	$\text{Div}\phi$	$\text{div}\psi$

Tabla 1.1.1: Notaciones

y la *descripción material*  $\psi_m$  de un campo espacial  $\psi$  como

$$\psi_m(\mathbf{X}, t) = \psi(\mathbf{y}(\mathbf{X}, t), t), \quad \mathbf{X} \in \mathcal{B}. \quad (1.1.3)$$

En la Tabla 1.1.1 se resumen las notaciones usadas para campos materiales y espaciales. Denotamos por:

- $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{y}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}$  al *desplazamiento* que sufre una partícula  $\mathbf{X}$  en el instante  $t$ ,
- $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \nabla\mathbf{y}(\mathbf{X}, t) = (\mathbf{I} + \nabla\mathbf{u})(\mathbf{X}, t)$  al campo material *gradiente del movimiento*  $\mathbf{y}$ ,
- $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{y}(\mathbf{x}, t), t)$  a la descripción espacial de la *velocidad*,
- $\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \text{grad}\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ,
- $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$  a la parte simétrica de  $\mathbf{L}(\mathbf{x}, t)$ ,
- $\text{Lin}$  el espacio lineal de los endomorfismos de  $\mathcal{V}$ ,
- $\text{Lin}^+$  el subconjunto de los endomorfismos de  $\mathcal{V}$  cuyo determinante es positivo,
- $\text{Sym}$  el subespacio de  $\text{Lin}$  de los endomorfismos simétricos, y
- $\text{Skw}$  el subespacio de  $\text{Lin}$  de los endomorfismos anti simétricos.

A lo largo de esta memoria se supone la existencia de:

- una *distribución de masa* para  $\mathcal{B}$  definida por una densidad en la configuración de referencia  $\rho_0 : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

La *ley de conservación de la masa* implica que la densidad en el movimiento  $\mathbf{y}$ ,  $\rho(\mathbf{x}, t)$ , debe satisfacer la ecuación

$$\rho_0(\mathbf{X}) = \rho(\mathbf{x}, t) \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t), \quad \text{con } \mathbf{x} = \mathbf{y}(\mathbf{X}, t), \quad (1.1.4)$$

- un *sistema de fuerzas*  $(\mathbf{s}, \mathbf{b})$ , donde  $\mathbf{s}(\mathbf{m}, \mathbf{x}, t) : \mathcal{N} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{V}$  es una función regular de  $\mathbf{x}$  en  $\mathcal{B}_t$  para cada  $\mathbf{m}$  y cada  $t$ , siendo  $\mathbf{m}$  el vector normal a  $\mathcal{B}_t$  en  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{V}$  es continua de  $\mathbf{x}$  en  $\mathcal{B}_t$  para cada  $t$ .  $\mathbf{s}(\mathbf{m}, \mathbf{x}, t)$  representa la *densidad de fuerza superficial* que cuantifica la fuerza por unidad de área que se ejerce desde la parte positiva sobre la parte negativa a lo largo de una superficie orientada  $\mathcal{S}$  en  $\mathcal{B}_t$ ,  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$  representa la *densidad de fuerza por unidad de volumen* ejercida en el punto  $\mathbf{x}$  en el instante  $t$ , y  $\mathcal{N}$  es el conjunto de los vectores unitarios del espacio vectorial  $\mathcal{V}$ .

Se verifican los siguientes resultados:

**Teorema 1.1.1** *Sea  $(\mathbf{s}, \mathbf{b})$  un sistema de fuerzas para  $\mathcal{B}$  durante un movimiento. Una condición necesaria y suficiente para que los principios de conservación de los momentos lineal y angular se satisfagan es que exista un campo tensorial espacial  $\mathbf{T}$ , llamado tensor de tensiones de Cauchy, verificando:*

- para cada vector unitario  $\mathbf{m}$ ,

$$\mathbf{s}(\mathbf{m}, \mathbf{x}, t) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{m}, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathcal{T}. \quad (1.1.5)$$

- $\mathbf{T}$  es simétrico.
- $\mathbf{T}$  satisface la ecuación del movimiento

$$\rho(\mathbf{x}, t)\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = \text{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t), \quad (1.1.6)$$

siendo  $\rho$  la densidad y  $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}' + (\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v}$ .

*Demostración.* Véase Gurtin [43] página 101.  $\square$

**Teorema 1.1.2 (de la Potencia Consumida).** *Para cada parte  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{B}$  y cada tiempo  $t$  se verifica*

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_t} \rho \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} dV_x + \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{T} : \mathbf{D} dV_x = \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{s}(\mathbf{m}) \cdot \mathbf{v} dA_x + \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV_x, \quad (1.1.7)$$

siendo  $\mathcal{P}_t = \mathbf{y}(\mathcal{P}, t)$ ,  $\mathbf{m}$  el vector normal exterior unitario en cada punto de  $\partial\mathcal{P}_t$  y  $:$  denota el producto interior del espacio de tensores definido como  $\mathbf{T} : \mathbf{D} = \text{tr}(\mathbf{T}^t \mathbf{D})$ .

*Demostración.* Véase Gurtin [43] página 110.  $\square$

### 1.1.1. Ley constitutiva

Las ecuaciones (1.1.4) y (1.1.6) son insuficientes para caracterizar por completo el comportamiento de un cuerpo, pues no permiten distinguir entre los diferentes tipos de materiales. Por ello se introducen las llamadas hipótesis constitutivas.

**Definición 1.1.3** *Un cuerpo material es un cuerpo  $\mathcal{B}$  junto con una distribución de masa  $\rho_0$  y una familia  $\mathcal{C}$  de procesos dinámicos consistentes con las hipótesis constitutivas del cuerpo.  $\mathcal{C}$  se denomina clase constitutiva del cuerpo.*

**Definición 1.1.4** *Un cuerpo elástico es un cuerpo material cuya clase constitutiva  $\mathcal{C}$  está definida por una función de respuesta regular*

$$\hat{\mathbf{T}} : \text{Lin}^+ \times \mathcal{B} \rightarrow \text{Sym}, \quad (1.1.8)$$

de forma que, conocido el gradiente del movimiento  $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ , las tensiones  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$  en  $\mathbf{x} = \mathbf{y}(\mathbf{X}, t)$  vienen dadas por

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t), \mathbf{X}), \quad (1.1.9)$$

para todo  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$  y  $t > 0$ .

**Definición 1.1.5** Llamaremos *tensión residual* en  $\mathbf{X}$  al valor de las tensiones en el punto  $\mathbf{X}$  cuando el cuerpo no está deformado, es decir

$$\mathbf{T}_R = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{I}). \quad (1.1.10)$$

**Definición 1.1.6** Se dice que la configuración de referencia es un estado natural si  $\mathbf{T}_R = \mathbf{0}$ .

## 1.2. Paso a la configuración de referencia

Las ecuaciones planteadas en la sección anterior tienen lugar en el espacio de las trayectorias  $\mathcal{T}$ . Las escribiremos ahora sobre la configuración de referencia  $\mathcal{B}$ . Para ello, utilizaremos el siguiente resultado:

**Proposición 1.2.1** Sea  $\mathbf{f}$  una deformación de  $\mathcal{B}$  y sean  $\phi$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{T}$  campos continuos, escalar, vectorial y tensorial, respectivamente, sobre  $\mathbf{f}(\mathcal{B})$ . Entonces, dada cualquier parte  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{B}$ ,

$$\int_{\mathbf{f}(\mathcal{P})} \phi(\mathbf{x}) dV_x = \int_{\mathcal{P}} \phi(\mathbf{f}(\mathbf{X})) \det \mathbf{F}(\mathbf{X}) dV_X, \quad (1.2.1)$$

$$\int_{\partial \mathbf{f}(\mathcal{P})} \phi(\mathbf{x}) \mathbf{m}(\mathbf{x}) dA_x = \int_{\partial \mathcal{P}} \phi(\mathbf{f}(\mathbf{X})) \det \mathbf{F}(\mathbf{X}) \mathbf{F}^{-t}(\mathbf{X}) \mathbf{n}(\mathbf{X}) dA_X, \quad (1.2.2)$$

$$\int_{\partial \mathbf{f}(\mathcal{P})} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{m}(\mathbf{x}) dA_x = \int_{\partial \mathcal{P}} \det \mathbf{F}(\mathbf{X}) \mathbf{v}(\mathbf{f}(\mathbf{X})) \cdot (\mathbf{F}^{-t}(\mathbf{X}) \mathbf{n}(\mathbf{X})) dA_X, \quad (1.2.3)$$

$$\int_{\partial \mathbf{f}(\mathcal{P})} \mathbf{T}(\mathbf{x}) \mathbf{m}(\mathbf{x}) dA_x = \int_{\partial \mathcal{P}} \det \mathbf{F}(\mathbf{X}) \mathbf{T}(\mathbf{f}(\mathbf{X})) \mathbf{F}^{-t}(\mathbf{X}) \mathbf{n}(\mathbf{X}) dA_X, \quad (1.2.4)$$

siendo  $\mathbf{m}$  y  $\mathbf{n}$  los vectores normales unitarios exteriores a  $\partial \mathbf{f}(\mathcal{P})$  y  $\partial \mathcal{P}$ , respectivamente y  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \nabla_X \mathbf{f}(\mathbf{X})$ .

**Definición 1.2.2** Se define el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  como

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}, t) = \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \mathbf{T}_m(\mathbf{X}, t) \mathbf{F}^{-t}(\mathbf{X}, t). \quad (1.2.5)$$

**Definición 1.2.3** Si  $\mathbf{b}$  es la fuerza por unidad de volumen correspondiente a  $(\mathbf{x}, t)$ , se define la fuerza de volumen de referencia,  $\mathbf{b}_0$ , como

$$\mathbf{b}_0(\mathbf{X}, t) = \mathbf{b}_m(\mathbf{X}, t) \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t). \quad (1.2.6)$$

**Proposición 1.2.4** El tensor  $\mathbf{S}$  satisface la ecuación

$$\text{Div} \mathbf{S} + \mathbf{b}_0 = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}. \quad (1.2.7)$$

*Demostración.* Integrando la ecuación del movimiento (1.1.6) sobre una parte  $\mathcal{P}_t$  y aplicando el teorema de la divergencia se tiene

$$\int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) dV_x = \int_{\partial \mathcal{P}_t} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \mathbf{m}(\mathbf{x}, t) dA_x + \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV_x, \quad (1.2.8)$$

siendo  $\mathbf{m}$  el vector normal unitario exterior a  $\mathcal{P}_t$ . Cambiando de la variable espacial  $\mathbf{x}$  a la variable material  $\mathbf{X}$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{P}} \rho_m(\mathbf{X}) \dot{\mathbf{v}}_m(\mathbf{X}, t) \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) dV_X = \\ \int_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{T}_m(\mathbf{X}, t) \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \mathbf{F}^{-t}(\mathbf{X}, t) \mathbf{n}(\mathbf{X}) dA_X + \int_{\mathcal{P}} \mathbf{b}_m(\mathbf{X}, t) \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) dV_X. \end{aligned}$$

Entonces, por la ley de conservación de la masa (1.1.4) y las Definiciones 1.2.2 y 1.2.3 se deduce que para cada parte  $\mathcal{P}$

$$\int_{\mathcal{P}} \rho_0(\mathbf{X}) \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) dV_X = \int_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{S}(\mathbf{X}, t) \mathbf{n}(\mathbf{X}) dA_X + \int_{\mathcal{P}} \mathbf{b}_0(\mathbf{X}, t) dV_X. \quad (1.2.9)$$

Aplicando de nuevo el teorema de la divergencia y el teorema de localización, ([12], pág. 179) se obtiene el resultado.  $\square$

**Teorema 1.2.5 (de la Potencia Consumida).** Para cada parte  $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$  se satisface la relación

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \rho_0 \frac{|\dot{\mathbf{u}}|^2}{2} dV_X + \int_{\mathcal{P}} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{F}} dV_X = \int_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{S} \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}} dA_X + \int_{\mathcal{P}} \mathbf{b}_0 \cdot \dot{\mathbf{u}} dV_X. \quad (1.2.10)$$

*Demostración.* Véase Gurtin [43], página 180.  $\square$

### 1.3. Cuerpos hiperelásticos

Supongamos ahora que el cuerpo es elástico. Entonces de (1.1.9) y (1.2.5) se deduce que  $\mathbf{S}$  está dado por una ecuación constitutiva de la forma

$$\mathbf{S} = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}, \mathbf{X}), \quad \text{con} \quad \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) = (\det \mathbf{F}) \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) \mathbf{F}^{-t}. \quad (1.3.1)$$

**Observación 1.3.1** Si la configuración de referencia es un estado natural, entonces  $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I}) = \mathbf{0}$ . En efecto, por (1.2.5),  $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I}) = (\det \mathbf{I}) \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{I}, \mathbf{X}) \mathbf{I}^{-t} = \mathbf{T}_R = \mathbf{0}$ .

**Definición 1.3.2** Un cuerpo elástico se dice hiperelástico si el tensor de Piola-Kirchhoff  $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}, \mathbf{X})$  es la derivada de una función escalar  $\hat{\Psi}(\mathbf{F}, \mathbf{X})$ , es decir,

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) = D\hat{\Psi}(\mathbf{F}, \mathbf{X})$$

donde la derivada se toma con respecto a  $\mathbf{F}$ , manteniendo  $\mathbf{X}$  fijo. La función escalar

$$\hat{\Psi} : \text{Lin}^+ \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$$

se denomina densidad de energía de deformación (strain-energy density) por unidad de volumen, o energía libre.

**Observación 1.3.3** La derivada  $D\hat{\Psi}$  es un tensor de segundo orden cuyas componentes son:

$$\left( D\hat{\Psi}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) \right)_{ij} = \frac{\partial}{\partial F_{ij}} \hat{\Psi}(\mathbf{F}, \mathbf{X}).$$

**Observación 1.3.4** Una aplicación sencilla de la regla de la cadena permite probar:

$$\frac{d}{dt} \hat{\Psi}(\mathbf{F}(\cdot, t), \cdot) = D\hat{\Psi}(\mathbf{F}(\cdot, t), \cdot) : \dot{\mathbf{F}}(\cdot, t) = \mathbf{S} : \nabla \dot{\mathbf{u}}, \quad (1.3.2)$$

y

$$\nabla_X \hat{\Psi}(\mathbf{F}(\mathbf{X}, \cdot), \cdot) = D\hat{\Psi}(\mathbf{F}(\mathbf{X}, \cdot), \cdot) : \nabla \mathbf{F}(\mathbf{X}, \cdot). \quad (1.3.3)$$

## 1.4. Flujo de energía a través de una superficie en un sólido hiperelástico

En esta sección realizamos un repaso formal de dos conceptos básicos en mecánica de la fractura, la tasa de liberación de energía y la J-integral para materiales hiperelásticos. Para simplificar la exposición, en lo que resta del capítulo supondremos regularidad suficiente sobre todas las funciones y dominios implicados y, salvo que se indique lo contrario, tomaremos  $n = 2$ . Para una demostración detallada de los resultados de esta sección, véase [44] y [45]. Trabajaremos en el marco desarrollado en dichos trabajos, en los que se introduce el concepto de fuerzas configuracionales. Las fuerzas configuracionales o microfuerzas están relacionadas con la estructura del material que forma el cuerpo y producen trabajo debido a la evolución de ésta y a la transferencia de material. En mecánica de la fractura estas fuerzas aparecen por la evolución de los defectos estructurales que obligan a un reagrupamiento de los átomos. Las fuerzas configuracionales actúan de manera análoga a las fuerzas estándar o Newtonianas, pero mientras las segundas representan fuerzas ejercidas en el cuerpo desde el exterior al mismo, los sistemas de fuerzas configuracionales surgen desde el interior de  $\mathcal{B}_t$ . Gurtin, [44], propone un equilibrio de fuerzas configuracionales, por separado de las fuerzas Newtonianas, y por ello, no afectan al equilibrio de momentos convencional.

En primer lugar introduciremos los conceptos de volumen de control, derivadas siguiendo al vértice de la grieta e integrales en torno al vértice de la grieta; presentaremos varios teoremas de transporte para volúmenes de control y definiremos los movimientos de cuerpos con grietas. A continuación, se define el sistema de fuerzas configuracionales y se enuncian los equilibrios de fuerzas y momentos a partir de los cuales se obtiene una expresión general para la tasa de liberación de energía como integral sobre un camino alejado del vértice de la grieta.

**Definición 1.4.1** *Para cada  $t$  en un intervalo de tiempo abierto, llamaremos grieta evolutiva a una curva orientada, conexa y regular  $\mathcal{C}(t)$  en  $\mathcal{B}$  tal que uno*

de sus extremos,  $\mathbf{Z}_0$ , está fijo en la frontera de  $\mathcal{B}$ ,  $\partial\mathcal{B}$ , y el resto de la curva, incluyendo el otro extremo,  $\mathbf{Z}(t)$ , que denominaremos vértice de la grieta o tip, está contenido en el interior de  $\mathcal{B}$  y tal que  $\mathcal{C}(t_1) \subseteq \mathcal{C}(t_2)$  para todo  $t_2 \geq t_1$ .

Utilizaremos la expresión “en bulk” para referirnos a campos “lejos de la grieta”.

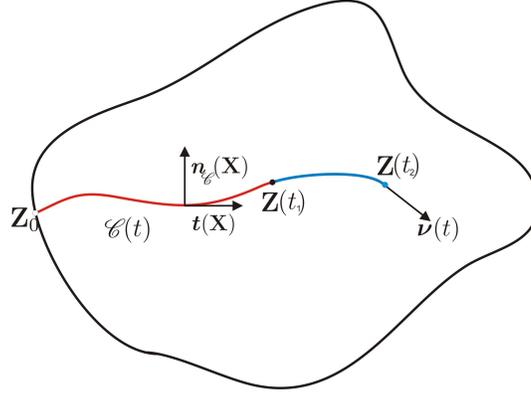


Figura 1.4.1: Grieta en un sólido  $\mathcal{B}$

La longitud de arco de la curva  $\mathcal{C}(t)$  hasta  $\mathbf{X} \in \mathcal{C}(t)$ , medida desde  $\mathbf{Z}_0$ , se denota por  $\alpha(\mathbf{X})$  y  $\mathbf{t}(\mathbf{X})$  será el vector unitario tangente a la curva  $\mathcal{C}(t)$  en  $\mathbf{X}$  en la dirección de crecimiento de  $\alpha$ . Puesto que  $\mathbf{t}(\mathbf{Z}(t))$  representa la dirección de posible propagación de la grieta, la velocidad vectorial del vértice,  $\boldsymbol{\nu}(t) = \frac{d\mathbf{Z}(t)}{dt}$  se puede expresar como

$$\boldsymbol{\nu}(t) = V(t)\mathbf{t}(\mathbf{Z}(t)), \quad (1.4.1)$$

siendo  $V(t) \geq 0$  la velocidad escalar del vértice. Denotaremos en este apartado por  $\mathbf{n}_{\mathcal{C}}(\mathbf{X})$  el vector normal unitario a  $\mathcal{C}(t)$  orientado de forma que quede a la izquierda de  $\mathcal{C}(t)$  recorrida en el sentido de crecimiento de  $\alpha$ .

Puesto que  $\mathcal{C}(t_1) \subseteq \mathcal{C}(t_2)$ , para todo  $t_2 \geq t_1$ , la grieta permanece estacionaria excepto en el tip.

**Definición 1.4.2** Llamaremos volumen de control migratorio,  $\mathcal{V}(t)$ , a una región cerrada de  $\mathcal{B}$  para la cual su frontera,  $\partial\mathcal{V}(t)$ , evoluciona de forma regular con  $t$ , y tal que la grieta  $\mathcal{C}(t)$  no interseca a  $\partial\mathcal{V}(t)$  en más de dos puntos, y  $\mathbf{Z}(t) \notin \partial\mathcal{V}(t)$ .

Distinguiamos tres tipos de volumen de control:

- *Volumen de control bulk*, el cual no interseca a la grieta; estos volúmenes se indicarán con el superíndice,  $b$ ,  $\mathcal{V}^b$ .
- *Volumen de control crack*, que contiene una parte de la grieta pero no al vértice, y por tanto su frontera interseca a la grieta en dos puntos; estos volúmenes serán denotados por  $\mathcal{V}^c$ .
- *Volumen de control tip*, que contiene al vértice en su interior, y, por tanto, su frontera interseca a la grieta en un solo punto; identificaremos estos volúmenes por  $\mathcal{V}^{tip}$ .

**Observación 1.4.3** *No debe confundirse el concepto de volumen de control migratorio  $\mathcal{V}(t)$  con el concepto de parte  $\mathcal{P}$ . Una parte es una región fija de  $\mathcal{B}$  cuya evolución en tiempo se refiere al movimiento de la parte deformada  $\mathcal{P}_t$ , mientras que un volumen de control no es una región fija de  $\mathcal{B}$  si no que “migra” en  $\mathcal{B}$ .*

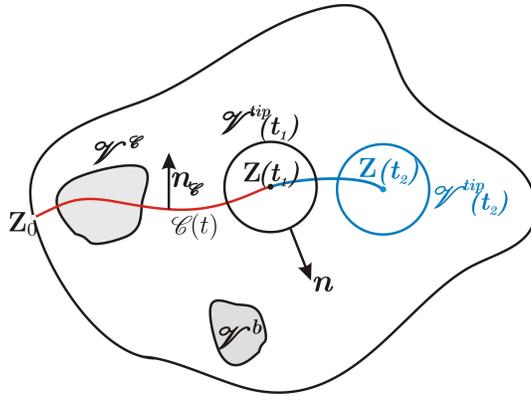


Figura 1.4.2: Ejemplos de volúmenes de control

Para  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(t)$  un volumen de control migratorio,  $\mathbf{n}(\mathbf{X}, t)$  denota el vector normal unitario exterior en cada punto de  $\partial\mathcal{V}(t)$  mientras que  $U_{\partial\mathcal{V}}(\mathbf{X}, t)$  denota la velocidad normal de  $\partial\mathcal{V}$  en la dirección de la normal unitaria exterior  $\mathbf{n}(\mathbf{X}, t)$ .

Para un volumen de control tip o crack, la grieta interseca a  $\partial\mathcal{V}(t)$  en uno o dos puntos  $\mathbf{X}_A(t)$ ,  $\mathbf{X}_B(t)$ , y las velocidades de esos puntos,  $v_A(t)$ ,  $v_B(t)$  se definen por

$$\dot{\mathbf{X}}_A(t) = v_A(t)\mathbf{t}(\mathbf{X}_A(t)), \quad \dot{\mathbf{X}}_B(t) = v_B(t)\mathbf{t}(\mathbf{X}_B(t)). \quad (1.4.2)$$

Un ejemplo particular de un volumen de control tip es un disco tip,  $D_\delta(t)$ , que es un disco de radio  $\delta$  y de centro  $\mathbf{Z}(t)$  el vértice de la grieta. En este caso, cuando  $\delta \rightarrow 0$  la velocidad del punto de corte  $v(t) \rightarrow V(t)$ .

### 1.4.1. Derivadas siguiendo al tip

**Definición 1.4.4** Diremos que un campo  $\Phi(\mathbf{X}, t)$  es regular en  $\mathcal{B}$  excepto en el vértice de la grieta  $\mathcal{C}(t)$ , si  $\Phi(\mathbf{X}, t)$  está definido en  $\mathbf{X} \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{C}(t)$  y si, excepto en el vértice  $\mathbf{Z}(t)$ ,  $\Phi(\mathbf{X}, t)$  y sus derivadas tienen límites hasta la grieta desde cada lado.

Para que este documento resulte más legible, usaremos la expresión  $\phi$  es regular “fuera” del vértice para indicar que  $\phi$  es regular en  $\mathcal{B}$  excepto en el vértice de la grieta.

**Observación 1.4.5** No debe confundirse el concepto de campos regulares “en bulk” con campos regulares “fuera del vértice”. Entre las varias diferencias está que los primeros no tienen por qué tener límites hasta la grieta.

El salto de la función en la grieta, para cada  $\mathbf{X} \in \mathcal{C}(t)$  se expresa como

$$[\Phi(\mathbf{X}, t)] = \Phi^+ - \Phi^-, \quad \Phi^\pm(\mathbf{X}, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(\mathbf{X} \pm \varepsilon \mathbf{n}_\mathcal{C}(\mathbf{X}, t), t). \quad (1.4.3)$$

Dado  $\Phi(\mathbf{X}, t)$  un campo regular en  $\mathcal{B}$  “fuera” del vértice de  $\mathcal{C}(t)$ , consideramos el campo  $\hat{\Phi}(\mathbf{P}, t)$  definido por

$$\hat{\Phi}(\mathbf{P}, t) = \Phi(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{P} = \mathbf{X} - \mathbf{Z}(t), \quad \mathbf{X} \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{C}(t), \quad (1.4.4)$$

donde  $\mathbf{P}$  representa la posición del punto material  $\mathbf{X}$  relativa al vértice  $\mathbf{Z}(t)$ .

La derivada parcial

$$\overset{\square}{\Phi}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Phi}(\mathbf{P}, t), \quad (1.4.5)$$

con respecto a  $t$  manteniendo  $\mathbf{P}$  fijo, pero considerada como función de  $(\mathbf{X}, t)$ , representa la derivada temporal de  $\Phi(\mathbf{X}, t)$  siguiendo al vértice  $\mathbf{Z}(t)$ ; por la regla de la cadena,

$$\overset{\square}{\Phi}(\mathbf{X}, t) = \dot{\Phi}(\mathbf{X}, t) + \nabla \Phi(\mathbf{X}, t) \cdot \boldsymbol{\nu}(t), \quad \mathbf{X} \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{C}(t), \quad (1.4.6)$$

donde

$$\dot{\Phi}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial t}, \quad (1.4.7)$$

y  $\boldsymbol{\nu}(t)$ , dado por (1.4.1), es la velocidad vectorial del vértice.

### 1.4.2. Integrales tip. Teoremas de transporte

Introducimos a continuación alguna notación para un tipo particular de integrales que son esenciales en lo que sigue.

**Definición 1.4.6** *Sea  $\Phi$  un campo escalar, vectorial o tensorial regular en  $\mathcal{B}$  “fuera” del vértice de  $\mathcal{C}(t)$ . Llamaremos integral tip en el instante  $t$  del campo  $\Phi$ , al límite cuando  $\delta \rightarrow 0$  de la integral sobre  $\partial D_\delta(t)$  del campo  $\Phi(\mathbf{X}, t)\mathbf{n}(\mathbf{X}, t)$ , siendo  $D_\delta(t)$  el disco tip en el instante  $t$  de radio  $\delta$ . Dichas integrales se escribirán como*

$$\oint_{tip} \Phi \mathbf{n} dA_X = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial D_\delta} \Phi \mathbf{n} dA_X. \quad (1.4.8)$$

**Teorema 1.4.7 (del transporte de Reynolds para volúmenes de control crack).** *Sea  $\Phi(\mathbf{X}, t)$  un campo escalar o vectorial, regular en  $\mathcal{B}$  “fuera” del vértice de la grieta  $\mathcal{C}(t)$ . Entonces, para cada volumen de control migratorio crack,  $\mathcal{V}^\mathcal{C}$ , se verifica:*

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_{\mathcal{V}^\mathcal{C}} \Phi dV_X \right\} = \int_{\mathcal{V}^\mathcal{C}} \dot{\Phi} dV_X + \int_{\partial \mathcal{V}^\mathcal{C}} \Phi U_{\partial \mathcal{V}^\mathcal{C}} dA_X. \quad (1.4.9)$$

$$\int_{\mathcal{V}^\mathcal{C}} \nabla \Phi dV_X = \int_{\partial \mathcal{V}^\mathcal{C}} \Phi \mathbf{n} dA_X - \int_{\mathcal{C} \cap \mathcal{V}^\mathcal{C}} [\Phi] \mathbf{n}_\mathcal{C} dA_X. \quad (1.4.10)$$

*Demostración.* Véase Gurtin [44], pág. 178.  $\square$

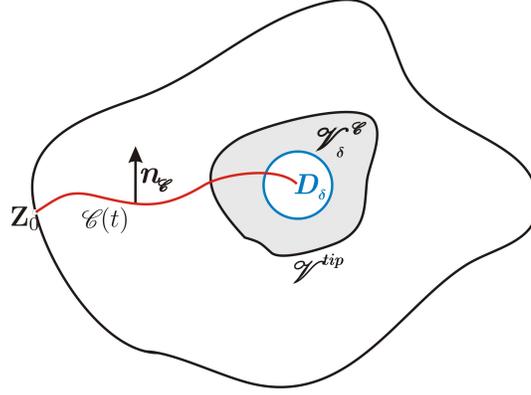


Figura 1.4.3: Volúmenes de control crack y tip.

Sea ahora  $\mathcal{V}^{tip}(t)$  un volumen de control tip y consideremos la región

$$\mathcal{V}_\delta^C(t) = \mathcal{V}^{tip}(t) \setminus D_\delta(t), \quad (1.4.11)$$

con  $\delta > 0$  suficientemente pequeño, tal que

$$\partial\mathcal{V}_\delta^C(t) = \partial\mathcal{V}^{tip}(t) \cup \partial D_\delta(t). \quad (1.4.12)$$

Es claro que  $\mathcal{V}_\delta^C$  es un volumen de control crack (ver Figura 1.4.3). Denotemos por  $\mathcal{C}_\delta(t)$  la parte de grieta contenida en  $\mathcal{V}_\delta^C$ , esto es,  $\mathcal{C}_\delta(t) = \mathcal{C}(t) \cap \mathcal{V}_\delta^C(t)$ . La aplicación del Teorema 1.4.7 sobre  $\mathcal{V}_\delta^C(t)$  permite escribir el siguiente corolario.

**Corolario 1.4.8** *Sea  $\Phi(\mathbf{X}, t)$  un campo escalar o vectorial, regular en  $\mathcal{B}$  “fuera” del vértice de la grieta  $\mathcal{C}(t)$ . Entonces, para cada volumen de control migratorio tip,  $\mathcal{V}^{tip}(t)$ , se verifica:*

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_{\mathcal{V}_\delta^C} \Phi dV_X \right\} = \int_{\mathcal{V}_\delta^C} \dot{\Phi} dV_X + \int_{\partial\mathcal{V}^{tip}} \Phi U_{\partial\mathcal{V}^{tip}} dA_X - \int_{\partial D_\delta} \Phi(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{n}) dA_X, \quad (1.4.13)$$

$$\int_{\mathcal{V}_\delta^C} \nabla\Phi dV_X = \int_{\partial\mathcal{V}^{tip}} \Phi \mathbf{n} dA_X - \int_{\mathcal{C}_\delta} [\Phi] \mathbf{n}_C dA_X - \int_{\partial D_\delta} \Phi \mathbf{n} dA_X, \quad (1.4.14)$$

donde  $\mathbf{n}$  denota tanto la normal exterior a  $\partial\mathcal{V}^{tip}$  como a  $\partial D_\delta$ , y  $\delta > 0$  es un número suficientemente pequeño verificando (1.4.12).

**Corolario 1.4.9** *Bajo las hipótesis del Corolario 1.4.8 se verifica:*

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_{\mathcal{V}_\delta^{\mathcal{C}}} \Phi dV_X \right\} = \int_{\mathcal{V}_\delta^{\mathcal{C}}} \overset{\square}{\Phi} dV_X + \int_{\partial\mathcal{V}^{tip}} \Phi (U_{\partial\mathcal{V}^{tip}} - \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{n}) dA_X + \int_{\mathcal{C}_\delta} [\Phi] \mathbf{n}_{\mathcal{C}} \cdot \boldsymbol{\nu} dA_X. \quad (1.4.15)$$

*Demostración.* Basta con aplicar (1.4.14) al campo  $\Phi \boldsymbol{\nu}$ , sumar la igualdad resultante con (1.4.13) y aplicar la relación (1.4.6).  $\square$

**Definición 1.4.10** *Diremos que un campo  $\Phi$  es regular en el cuerpo  $\mathcal{B}$  que contiene una grieta  $\mathcal{C}(t)$  si, además de ser regular “fuera” del vértice, verifica*

- $\Phi$  es integrable sobre  $\mathcal{B}$  y, dado cualquier volumen de control  $\mathcal{V}(t)$ , la aplicación  $t \mapsto \int_{\mathcal{V}(t)} \Phi dV_X$  es diferenciable,
- $\overset{\square}{\Phi}$  es integrable sobre  $\mathcal{B}$  y  $[\Phi] \mathbf{n}_{\mathcal{C}} \cdot \boldsymbol{\nu}$  es integrable sobre  $\mathcal{C}(t)$ , ambas uniformemente con respecto a  $t$ , y
- la integral  $\oint_{tip} \Phi \mathbf{n} dA_X$  existe.

**Teorema 1.4.11 (del transporte de Reynolds para volúmenes de control tip).** *Sean  $\Phi(\mathbf{X}, t)$  un campo escalar o vectorial, regular en el cuerpo  $\mathcal{B}$  que contiene una grieta  $\mathcal{C}(t)$  y  $\mathcal{V}^{tip}(t)$  un volumen de control que contiene al vértice. Entonces*

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_{\mathcal{V}^{tip}(t)} \Phi dV_X \right\} = \int_{\mathcal{V}^{tip}(t)} \dot{\Phi} dV_X + \int_{\partial\mathcal{V}^{tip}(t)} \Phi U_{\partial\mathcal{V}^{tip}} dA_X - \oint_{tip} \Phi (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{n}) dA_X, \quad (1.4.16)$$

$$\int_{\mathcal{V}^{tip}(t)} \nabla \Phi dV_X = \int_{\partial\mathcal{V}^{tip}(t)} \Phi \mathbf{n} dA_X - \int_{\mathcal{C}(t) \cap \mathcal{V}^{tip}(t)} [\Phi] \mathbf{n}_{\mathcal{C}} dA_X - \oint_{tip} \Phi \mathbf{n} dA_X. \quad (1.4.17)$$

*Demostración.* Véase Gurtin [45], pág. 178.  $\square$

**Corolario 1.4.12** *Bajo las hipótesis del Teorema 1.4.11 se verifica*

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_{\mathcal{V}^{tip}(t)} \Phi dV_X \right\} = \int_{\mathcal{V}^{tip}(t)} \overset{\square}{\Phi} dV_X + \int_{\partial\mathcal{V}^{tip}(t)} \Phi (U_{\partial\mathcal{V}^{tip}} - \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{n}) dA_X + \int_{\mathcal{C}(t) \cap \mathcal{V}^{tip}(t)} [\Phi] \mathbf{n}_{\mathcal{C}} \cdot \boldsymbol{\nu} dA_X. \quad (1.4.18)$$

$\square$

Escribiendo la ecuación (1.4.17) componente a componente se deduce el siguiente corolario.

**Corolario 1.4.13** *Para una función escalar  $\Phi$  regular en el cuerpo  $\mathcal{B}$ , que contiene a la grieta  $\mathcal{C}(t)$ , se verifica:*

$$\int_{\mathcal{V}^{tip}(t)} \partial_\alpha \Phi dV_X = \int_{\partial\mathcal{V}^{tip}(t)} \Phi n_\alpha dA_X - \int_{\mathcal{C}(t) \cap \mathcal{V}^{tip}(t)} [\Phi](n_{\mathcal{C}})_\alpha dA_X - \oint_{tip} \Phi n_\alpha dA_X, \quad (1.4.19)$$

con  $\alpha = 1, 2$ . □

**Corolario 1.4.14** *Sea  $\Phi$  una función tensorial regular en el cuerpo  $\mathcal{B}$ , que contiene a la grieta  $\mathcal{C}(t)$ . Se verifica:*

$$\int_{\mathcal{V}^{tip}(t)} \text{Div } \Phi dV_X = \int_{\partial\mathcal{V}^{tip}(t)} \Phi \mathbf{n} dA_X - \int_{\mathcal{C}(t) \cap \mathcal{V}^{tip}(t)} [\Phi] \mathbf{n}_{\mathcal{C}} dA_X - \oint_{tip} \Phi \mathbf{n} dA_X. \quad (1.4.20)$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}^{tip}(t)} (\text{Div } \Phi)_\beta dV_X &= \int_{\mathcal{V}^{tip}(t)} \partial_\alpha \Phi_{\beta\alpha} dV_X \\ &= \int_{\partial\mathcal{V}^{tip}(t)} \Phi_{\beta\alpha} n_\alpha dA_X - \int_{\mathcal{C}(t) \cap \mathcal{V}^{tip}(t)} [\Phi_{\beta\alpha}] (n_{\mathcal{C}})_\alpha dA_X - \oint_{tip} \Phi_{\beta\alpha} n_\alpha dA_X, \end{aligned}$$

con  $\beta = 1, 2$ , sin más que aplicar (1.4.19) a  $\Phi_{\beta\alpha}$ , lo que concluye el resultado.

□

### 1.4.3. Movimientos de cuerpos con grietas

Sea  $\mathcal{B}$  un cuerpo que contiene una grieta  $\mathcal{C}(t)$ . Sea  $\mathbf{y}(\mathbf{X}, t)$  un movimiento de  $\mathcal{B}$ . Por tanto,  $\mathbf{y}(\mathbf{X}, t)$  es regular en  $\mathcal{B}$  “fuera” del vértice de la grieta, biyectiva y acotada en cada punto  $\mathbf{X}$  de  $\mathcal{B} \setminus \mathcal{C}(t)$  y para cada  $t$ . Entonces, el gradiente de la deformación

$$\mathbf{F} = \nabla \mathbf{y}, \quad (1.4.21)$$

y la velocidad material  $\dot{\mathbf{y}}$  son regulares “fuera” del vértice. La velocidad del movimiento siguiendo el vértice de la grieta,  $\overset{\square}{\mathbf{y}}$ , se obtiene de (1.4.6)

$$\overset{\square}{\mathbf{y}}(\mathbf{X}, t) = \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \boldsymbol{\nu}(t). \quad (1.4.22)$$

Por tanto,  $\bar{\mathbf{y}}$  también es un campo regular “fuera” del vértice. Se supone, además, que el campo  $\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{X}, t)$  tiene un valor límite en el vértice,  $\bar{\mathbf{v}}(t)$ , de modo que

$$\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{X}, t) \rightarrow \bar{\mathbf{v}}(t) \quad \text{cuando} \quad \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Z}(t), \quad (1.4.23)$$

siendo, por tanto,  $\bar{\mathbf{v}}$  la velocidad del vértice deformado.

**Observación 1.4.15** *Obsérvese que para una grieta estacionaria,  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  y, por tanto,*

$$\dot{\mathbf{y}}(\mathbf{X}, t) \rightarrow \bar{\mathbf{v}}(t) \quad \text{cuando} \quad \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Z}(t). \quad (1.4.24)$$

#### 1.4.4. Equilibrio de fuerzas configuracionales

Además del sistema de fuerzas Newtonianas estándar consistente con las leyes de equilibrio para los momentos lineal y angular, consideramos un sistema de fuerzas configuracionales íntimamente relacionado con los defectos de la estructura. Así, mientras que las fuerzas estándar realizan trabajo sobre cambios de posición de los puntos materiales en el espacio, las fuerzas configuracionales lo realizan sobre la adición o eliminación de material por defectos estructurales y por la evolución de estos defectos. El sistema de fuerzas configuracional que tiene en cuenta estos efectos en mecánica de fractura ha sido propuesto por Gurtin [44] en un trabajo pionero. Este autor propone introducir:

- un tensor de tensiones bulk  $\mathbf{C}(\mathbf{X}, t)$ ,
- una densidad de fuerzas de volumen configuracionales  $\mathbf{g}(\mathbf{X}, t)$  y,
- una fuerza inercial externa  $\mathbf{e} = \rho \mathbf{F}^t \dot{\mathbf{y}}$ ,

todas ellas distribuidas sobre  $\mathcal{B}$ . Estas fuerzas se complementan con:

- una fuerza  $\mathbf{g}^{\mathcal{C}}$  distribuida sobre la grieta  $\mathcal{C}(t)$ ,
- un vector de tensión superficial  $\mathbf{c}$  que actúa sobre las superficies libres de la grieta,

y tres fuerzas concentradas en el vértice,

- $\mathbf{b}^{tip}$  que será una *fuerza de inercia estándar*,
- $\mathbf{e}^{tip}$  *fuerza de inercia configuracional* y
- $\mathbf{g}^{tip}$  *fuerza configuracional interna*.

Estas dos últimas mantienen la integridad del vértice cuando la grieta es estacionaria y actúan en respuesta a la ruptura de uniones de átomos durante su propagación.

Resumimos a continuación algunas propiedades relativas a las fuerzas configuracionales y su relación con las estándar. Para una demostración detallada de las mismas puede consultarse Gurtin [44], capítulos 5 y 6.

- De la invariancia del trabajo bajo cambios de un observador material se obtiene el equilibrio local de fuerzas configuracionales (Gurtin [44], pág. 37)

$$\text{Div } \mathbf{C}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{g}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{e} = \mathbf{0}. \quad (1.4.25)$$

- Dado un volumen de control  $\mathcal{V}(t)$ , de la invariancia a cambios en el campo de velocidades prescrito sobre  $\partial\mathcal{V}(t)$ , se obtiene la relación de tensiones (Gurtin [44], pág. 38)

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}, t) = \pi \mathbf{I} - \mathbf{F}^t \mathbf{S}, \quad (1.4.26)$$

donde  $\pi$  representa la *tensión bulk*. Esta relación se conoce como *relación de Eshelby*.

- De la invariancia con respecto a cambios del observador material se deduce la ecuación de Eshelby modificada (Gurtin [44], pág. 84):

$$\tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{X}, t) = \pi \mathbf{I} - \nabla \mathbf{u}^t \mathbf{S}, \quad (1.4.27)$$

siendo  $\tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{C}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{S}$ .

- De la invariancia bajo cambios dependientes del tiempo en la configuración de referencia se obtiene la relación de fuerzas internas, (Gurtin [44], pág. 39):

$$\mathbf{g} = -\nabla\pi + \mathbf{S} : \nabla\mathbf{F}, \quad (1.4.28)$$

$$\mathbf{e} = -\mathbf{F}^t \mathbf{b}_0. \quad (1.4.29)$$

- La segunda ley de la termodinámica permite concluir que

$$\pi = \Psi, \quad (1.4.30)$$

siendo  $\Psi$  la energía libre y, en consecuencia, la relación de Eshelby puede escribirse en función de ésta (Gurtin [44], pág. 43)

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}, t) = \Psi \mathbf{I} - \mathbf{F}^t \mathbf{S}. \quad (1.4.31)$$

**Observación 1.4.16** Para un material hiperelástico,  $\mathbf{g} = \mathbf{0}$  como consecuencia de (1.4.30), (1.4.28) y (1.3.3).

Los equilibrios de momento de las fuerzas que surgen como consecuencia de la presencia de una grieta se obtienen de la condición de que el trabajo sea invariante bajo cambios en el observador material y espacial. Dichos equilibrios para las fuerzas estándar y configuracionales son los siguientes (Gurtin [44], pág. 187):

- Equilibrio de momentos para fuerzas estándar.
  - Para un volumen de control crack o bulk,  $\mathcal{V}^{\mathcal{C},b}$ ,

$$\int_{\partial\mathcal{V}^{\mathcal{C},b}} \mathbf{S}\mathbf{n} dA_X + \int_{\mathcal{V}^{\mathcal{C},b}} \mathbf{b}_0 dV_X = \mathbf{0}, \quad (1.4.32)$$

$$\int_{\partial\mathcal{V}^{\mathcal{C},b}} (\mathbf{y} - \mathbf{o}) \times \mathbf{S}\mathbf{n} dA_X + \int_{\mathcal{V}^{\mathcal{C},b}} (\mathbf{y} - \mathbf{o}) \times \mathbf{b}_0 dV_X = \mathbf{0}. \quad (1.4.33)$$

- Para un volumen de control tip,  $\mathcal{V}^{tip}$ ,

$$\int_{\partial\mathcal{V}^{tip}} \mathbf{S}\mathbf{n} dA_X + \int_{\mathcal{V}^{tip}} \mathbf{b}_0 dV_X + \mathbf{b}^{tip} = \mathbf{0}, \quad (1.4.34)$$

$$\int_{\partial\mathcal{V}^{tip}} (\mathbf{y} - \mathbf{o}) \times \mathbf{S}\mathbf{n} dA_X + \int_{\mathcal{V}^{tip}} (\mathbf{y} - \mathbf{o}) \times \mathbf{b}_0 dV_X + (\mathbf{y}^{tip} - \mathbf{o}) \times \mathbf{b}^{tip} = \mathbf{0}, \quad (1.4.35)$$

donde  $\mathbf{y}^{tip} = \mathbf{y}(\mathbf{Z}(t), t)$ .

▪ Equilibrio de fuerzas configuracionales.

• Para un volumen de control crack,  $\mathcal{V}^{\mathcal{C}}$ ,

$$\int_{\partial\mathcal{V}^{\mathcal{C}}} \mathbf{C}\mathbf{n} dA_X + \int_{\mathcal{V}^{\mathcal{C}}} \mathbf{g} dV_X + \int_{\mathcal{C}(t) \cap \mathcal{V}^{\mathcal{C}}(t)} \mathbf{g}^{\mathcal{C}} dA_X + \mathbf{c}_B - \mathbf{c}_A = \mathbf{0}, \quad (1.4.36)$$

siendo  $\mathbf{c}_A$ ,  $\mathbf{c}_B$  los vectores de tensión superficial en el extremo izquierdo y derecho de  $\mathcal{C}(t) \cap \mathcal{V}^{\mathcal{C}}$ , respectivamente.

• Para un volumen de control tip,  $\mathcal{V}^{tip}$ ,

$$\int_{\partial\mathcal{V}^{tip}} \mathbf{C}\mathbf{n} dA_X + \int_{\mathcal{V}^{tip}} \mathbf{g} dV_X + \int_{\mathcal{C}(t) \cap \mathcal{V}^{tip}(t)} \mathbf{g}^{\mathcal{C}} dA_X + \mathbf{g}^{tip} + \mathbf{e}^{tip} - \mathbf{c}_A = \mathbf{0}. \quad (1.4.37)$$

Puesto que  $\mathbf{b}_0$ ,  $\mathbf{g}$  y  $\mathbf{g}^{\mathcal{C}}$  se consideran integrables, las ecuaciones (1.4.34) y (1.4.37) aplicadas a un disco tip  $\mathbf{D}_\delta(t)$  conducen, tras pasar al límite cuando  $\delta \rightarrow 0$ , a los siguientes equilibrios en el vértice:

$$\oint_{tip} \mathbf{S}\mathbf{n} dA_X + \mathbf{b}^{tip} = \mathbf{0}, \quad (1.4.38)$$

$$\oint_{tip} \mathbf{C}\mathbf{n} dA_X + \mathbf{g}^{tip} + \mathbf{e}^{tip} - \mathbf{c}^{tip} = \mathbf{0}. \quad (1.4.39)$$

Sea  $\rho_0(\mathbf{X}) \geq 0$  la densidad de masa en la configuración de referencia. Supondremos que  $\rho_0$  es regular. Sean

$$\mathbf{p} = \rho_0 \dot{\mathbf{y}}, \quad k = \frac{1}{2} \rho_0 |\dot{\mathbf{y}}|^2, \quad (1.4.40)$$

las densidades de momento y energía cinética, respectivamente. Se supone que  $k$  y  $\mathbf{p}$  son regulares.

**Definición 1.4.17** *Se definen las variaciones de momento y energía cinética en un volumen de control migratorio  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(t)$  por*

$$\mathcal{P}(\mathcal{V}) = \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\mathcal{V}} \mathbf{p} dV_X \right\} - \int_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{p} U_{\partial\mathcal{V}} dA_X, \quad (1.4.41)$$

$$\mathcal{K}(\mathcal{V}) = \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\mathcal{V}} k dV_X \right\} - \int_{\partial\mathcal{V}} k U_{\partial\mathcal{V}} dA_X. \quad (1.4.42)$$

**Proposición 1.4.18** *Las fuerzas de inercia en el vértice se caracterizan mediante las siguientes dos relaciones para un volumen de control tip arbitrario (Gurtin [44], pág. 188):*

$$\int_{\mathcal{V}^{tip}} \mathbf{b}_0 dV_X + \mathbf{b}^{tip} = -\mathcal{P}(\mathcal{V}^{tip}), \quad (1.4.43)$$

$$\int_{\mathcal{V}^{tip}} \mathbf{b}_0 \cdot \dot{\mathbf{y}} dV_X + \mathbf{b}^{tip} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{e}^{tip} \cdot \boldsymbol{\nu} = -\mathcal{K}(\mathcal{V}^{tip}). \quad (1.4.44)$$

Como consecuencia de los equilibrios (1.4.43) y (1.4.44) se obtiene el siguiente corolario.

**Corolario 1.4.19** *Se verifican las relaciones*

$$\mathbf{b}^{tip} = \oint_{tip} \mathbf{p}(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{n}) dA_X, \quad (1.4.45)$$

$$\mathbf{b}^{tip} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{e}^{tip} \cdot \boldsymbol{\nu} = \oint_{tip} k(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{n}) dA_X. \quad (1.4.46)$$

Además, la fuerza de inercia configuracional  $\mathbf{e}^{tip}$  puede calcularse como:

$$\mathbf{e}^{tip} = \oint_{tip} k_{rel} \mathbf{n} dA_X, \quad \text{siendo } k_{rel} = \frac{1}{2} \rho_0 |\dot{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{v}}|^2. \quad (1.4.47)$$

*Demostración.* Véase Gurtin [44], págs. 188, 189.

**Observación 1.4.20** *Nótese que para una grieta estacionaria, de (1.4.24) se deduce que  $k_{rel} \rightarrow 0$  cuando  $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Z}(t)$ .*

### 1.4.5. Tasa de liberación de energía. Fuerza conductora. Tracción tip

Dado un volumen de control  $\mathcal{V}$ , denotamos por  $\Gamma(\mathcal{V})$  la energía disipada en  $\mathcal{V}$  por unidad de tiempo y por  $\Gamma^{tip}$  al límite

$$\Gamma^{tip} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \Gamma(D_\delta).$$

Se puede probar que  $\Gamma^{tip}$  toma el valor

$$\Gamma^{tip} = -\mathbf{g}^{tip} \cdot \boldsymbol{\nu} = -\mathbf{g}^{tip} \cdot V\mathbf{t}, \quad (1.4.48)$$

siendo  $\mathbf{t}(t) = \mathbf{t}(\mathbf{Z}(t))$  y  $V$  la velocidad escalar del vértice definida en (1.4.1), (Véase Gurtin [44], pág. 192).

**Definición 1.4.21** *Se define la fuerza conductora en el tip, denotada por  $f$ , como  $f = \frac{\Gamma^{tip}}{V}$ .*

**Definición 1.4.22** *Se define la energía libre superficial en el tip como*

$$\psi^{tip} = \mathbf{c}^{tip} \cdot \mathbf{t}. \quad (1.4.49)$$

**Definición 1.4.23** *Se define la tasa de liberación de energía,  $J$ , como la suma de la fuerza conductora en el tip y la energía libre superficial, esto es,*

$$J = f + \psi^{tip}. \quad (1.4.50)$$

**Proposición 1.4.24** *La tasa de liberación de energía admite la expresión*

$$J = \mathbf{t} \cdot \oint_{tip} \{(\Psi + k_{rel})\mathbf{I} - \mathbf{F}^t \mathbf{S}\} \mathbf{n} dA_X. \quad (1.4.51)$$

*Demostración.* Por definición,

$$J = f + \psi^{tip} = \frac{\Gamma^{tip}}{V} + \psi^{tip} = -\mathbf{g}^{tip} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{c}^{tip} \cdot \mathbf{t} = (\mathbf{c}^{tip} - \mathbf{g}^{tip}) \cdot \mathbf{t}. \quad (1.4.52)$$

Ahora bien, de (1.4.39),

$$\mathbf{c}^{tip} - \mathbf{g}^{tip} = \oint_{tip} \mathbf{C} \mathbf{n} dA_X + \mathbf{e}^{tip}, \quad (1.4.53)$$

y por (1.4.31) y (1.4.47)

$$\mathbf{c}^{tip} - \mathbf{g}^{tip} = \oint_{tip} \{(\Psi + k_{rel})\mathbf{I} - \mathbf{F}^t \mathbf{S}\} \mathbf{n} dA_X. \quad (1.4.54)$$

Finalmente, multiplicando por el vector tangente a la grieta en el tip, se concluye el resultado.  $\square$

**Proposición 1.4.25** *Supongamos que se verifica la condición de momento estándar, esto es,*

$$\oint_{tip} \mathbf{p} \otimes \mathbf{n} dA_X = \mathbf{0}, \quad (1.4.55)$$

siendo  $\otimes$  el producto tensorial definido por  $(\mathbf{p} \otimes \mathbf{n})_{ij} = p_i n_j$ , y que  $\rho_0$  es constante en un entorno del tip. Entonces:

$$J = \mathbf{t} \cdot \oint_{tip} \{(\Psi + k)\mathbf{I} - \nabla \mathbf{u}^t \mathbf{S}\} \mathbf{n} dA_X. \quad (1.4.56)$$

*Demostración.* En efecto, si  $\oint_{tip} \mathbf{p} \otimes \mathbf{n} dA_X = \mathbf{0}$ , entonces  $\oint_{tip} p_i n_j ds = 0$ , para todo  $i, j$ , y por tanto

$$\oint_{tip} p_i \mathbf{n} dA_X = \mathbf{0}. \quad (1.4.57)$$

Al multiplicar por el vector velocidad,

$$\oint_{tip} p_i \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu} dA_X = 0, \quad \text{y} \quad \oint_{tip} \mathbf{p} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu}) dA_X = \mathbf{0}.$$

De donde se deduce, por (1.4.45), que  $\mathbf{b}_{tip} = \mathbf{0}$ , y por tanto, de la relación (1.4.38) se deduce que

$$\oint_{tip} \mathbf{S} \mathbf{n} dA_X = \mathbf{0}. \quad (1.4.58)$$

Por otra parte, de (1.4.40) y (1.4.47),

$$k_{rel} = \frac{1}{2} \rho_0 |\dot{\mathbf{y}} - \bar{\boldsymbol{\nu}}|^2 = k - \mathbf{p} \cdot \bar{\boldsymbol{\nu}} + \frac{1}{2} \rho_0 |\bar{\boldsymbol{\nu}}|^2. \quad (1.4.59)$$

Puesto que en  $\partial D_\delta(t)$  se cumple que  $\mathbf{n}(r, \theta) = -\mathbf{n}(r, -\pi + \theta)$  con  $\theta \in [-\pi, \pi]$ , entonces

$$\oint_{tip} \mathbf{n} dA_X = \mathbf{0}, \quad \text{y por tanto} \quad \oint_{tip} \frac{1}{2} \rho_0 |\bar{\boldsymbol{\nu}}|^2 \mathbf{n} dA_X = \mathbf{0}. \quad (1.4.60)$$

Entonces, teniendo en cuenta (1.4.57), se deduce que

$$\oint_{tip} k_{rel} \mathbf{n} dA_X = \oint_{tip} k \mathbf{n} dA_X. \quad (1.4.61)$$

De la expresión de J (1.4.51) y de las igualdades (1.4.58) y (1.4.61) se concluye el resultado.  $\square$

La expresión (1.4.56) se conoce en la literatura como J-integral asociada al tip.

**Lema 1.4.26** Si  $|\dot{\mathbf{y}}(\mathbf{X}, t)| = O(r^{-s})$ , con  $s < 1$ , siendo  $r(t) = |\mathbf{X} - \mathbf{Z}(t)|$ , entonces

$$\oint_{tip} \mathbf{p} \otimes \mathbf{n} dA_X = \mathbf{0}. \quad (1.4.62)$$

*Demostración.* Escribiendo  $\oint_{tip} \mathbf{p} \otimes \mathbf{n} dA_X$  componente a componente se tiene

$$\left( \oint_{tip} \mathbf{p} \otimes \mathbf{n} dA_X \right)_{ij} = \oint_{tip} p_i n_j dA_X = \oint_{tip} \rho_0 \dot{y}_i n_j dA_X = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial D_\delta(t)} \rho_0 \dot{y}_i n_j dA_X.$$

Considerando una parametrización de la frontera del disco  $D_\delta$  la integral anterior se expresa como

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_0 \dot{y}_i(\theta) n_j(\theta) \delta d\theta.$$

Ahora bien, puesto que  $|\dot{y}_i(\theta)| = O(r^{-s})$ ,

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \rho_0 \dot{y}_i(\theta) n_j(\theta) \delta d\theta \right| \leq \delta O(\delta^{-s}) \left| \int_{-\pi}^{\pi} \rho_0 |n_j(\theta)| d\theta \right| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

□

**Proposición 1.4.27** Sea  $\mathcal{B}$  un cuerpo hiperelástico y homogéneo que contiene una grieta  $\mathcal{C}(t)$ . Si  $\mathcal{C}(t)$  es una grieta recta cuyos labios están libres de tracción, las fuerzas de volumen estándar,  $\mathbf{b}_0(t)$ , son nulas, y se desprecian los efectos de la inercia, entonces, la tasa de liberación de energía puede expresarse como una integral sobre un camino alejado del tip en la forma

$$J = \mathbf{t} \cdot \int_{\partial \mathcal{V}^{tip}(t)} \{\Psi \mathbf{I} - \mathbf{F}^t \mathbf{S}\} \mathbf{n} dA_X, \quad (1.4.63)$$

siendo  $\mathcal{V}^{tip}(t)$  cualquier volumen de control tip.

*Demostración.* En primer lugar, veamos qué significan las hipótesis. Que la grieta sea recta implica que el vector tangente  $\mathbf{t}$  es constante. Que el cuerpo sea hiperelástico supone que la densidad de fuerzas de volumen configuracionales es nula,  $\mathbf{g} = \mathbf{0}$  (ver Observación 1.4.16). Que los efectos de inercia sean despreciables, implica que  $\mathbf{e} \simeq \mathbf{0}$  y  $\mathbf{e}^{tip} \simeq \mathbf{0}$ . Por tanto, de (1.4.25) podemos concluir que  $\text{Div } \mathbf{C} = \mathbf{0}$ .

Por otra parte, que los labios de la grieta estén libres de tracción supone que  $\mathbf{S}^\pm \mathbf{n}_\ell = \mathbf{0}$  y, por tanto, de (1.4.26) y (1.4.30) se puede escribir  $[\mathbf{C}] \mathbf{n}_\ell = \Psi \mathbf{n}_\ell$ . Así, bajo estas hipótesis y, teniendo en cuenta (1.4.26), se deduce

$$J = \mathbf{t} \cdot \oint_{tip} \{\Psi \mathbf{I} - \mathbf{F}^t \mathbf{S}\} \mathbf{n} dA_X = \mathbf{t} \cdot \oint_{tip} \mathbf{C} \mathbf{n} dA_X. \quad (1.4.64)$$

Aplicando la ecuación (1.4.20) con  $\Phi = \mathbf{C}$  se obtiene

$$J = \mathbf{t} \cdot \left\{ - \int_{\mathcal{V}^{tip}(t)} \text{Div } \mathbf{C} dV_X + \int_{\partial \mathcal{V}^{tip}(t)} \mathbf{C} \mathbf{n} dA_X - \int_{\mathcal{C}(t) \cap \mathcal{V}^{tip}(t)} [\mathbf{C}] \mathbf{n}_\ell dA_X \right\}, \quad (1.4.65)$$

para cualquier volumen de control  $V^{tip}(t)$ .

Teniendo en cuenta que  $\text{Div } \mathbf{C} = \mathbf{0}$  y que  $\mathbf{t} \cdot [\mathbf{C}] \mathbf{n}_\ell = \Psi \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}_\ell = 0$ , (1.4.65) se reduce a

$$J = \mathbf{t} \cdot \int_{\partial \mathcal{V}^{tip}(t)} \mathbf{C} \mathbf{n} dA_X = \mathbf{t} \cdot \int_{\partial \mathcal{V}^{tip}(t)} \{\Psi \mathbf{I} - \mathbf{F}^t \mathbf{S}\} \mathbf{n} dA_X. \quad (1.4.66)$$

□

## 1.5. El tensor de elasticidad

Para simplificar la notación, omitiremos en este apartado la dependencia respecto de la variable material  $\mathbf{X}$ . El comportamiento de la ecuación constitutiva de un material elástico (1.3.1) cerca de  $\mathbf{F} = \mathbf{I}$  está gobernado por la transformación lineal

$$\mathbf{C} : \text{Lin} \rightarrow \text{Lin}, \quad (1.5.1)$$

definida por

$$\mathbf{C} = D\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I}). \quad (1.5.2)$$

$\mathbf{C}$  se denomina *tensor de elasticidad* en el punto material  $\mathbf{X}$ .

**Proposición 1.5.1 (Propiedades del tensor de elasticidad)** *Supongamos que la configuración de referencia es un estado natural. Entonces:*

- $\mathbf{C} = D\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{I})$ .

- $\mathbf{C}[\mathbf{H}] \in \text{Sym}$  para todo  $\mathbf{H} \in \text{Lin}$ .
- $\mathbf{C}[\mathbf{W}] = \mathbf{0}$  para todo  $\mathbf{W} \in \text{Skw}$ .
- Si el material es isótropo en  $\mathbf{X}$ , entonces existen escalares  $\mu$  y  $\lambda$  tales que

$$\mathbf{C}[\mathbf{E}] = 2\mu\mathbf{E} + \lambda(\text{tr}\mathbf{E})\mathbf{I}, \quad (1.5.3)$$

para todo tensor simétrico  $\mathbf{E}$ . Los escalares  $\mu = \mu(\mathbf{X})$  y  $\lambda = \lambda(\mathbf{X})$  se denominan módulos de Lamé del material.

- Si el material es hiperelástico en  $\mathbf{X}$ , para todos los tensores  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{G}$ , el tensor de elasticidad verifica que

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{C}[\mathbf{G}] = \mathbf{G} \cdot \mathbf{C}[\mathbf{H}]. \quad (1.5.4)$$

*Demostración.* Ver Gurtin [43], páginas 195-197. □

## 1.6. Modelo linealizado

En la práctica, en muchas situaciones podemos suponer que sobre un cuerpo  $\mathcal{B}$  sólo se producen pequeñas deformaciones y, por tanto, podemos aproximar la ecuación (1.2.7) por una lineal. En concreto, en esta sección supondremos que el gradiente de la deformación es una pequeña perturbación de su estado inicial. Esto significa que  $\nabla \mathbf{u} = O(\epsilon)$  siendo  $\epsilon$  un parámetro pequeño,  $\mathbf{y}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X}$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{I}$  y, por tanto,

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I}, \mathbf{X}) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{I}, \mathbf{X}). \quad (1.6.1)$$

En primer lugar linealizaremos la ecuación constitutiva del tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff,

$$\mathbf{S} = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}). \quad (1.6.2)$$

Consideraremos  $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F})$  como función de  $\nabla \mathbf{u}$  usando la relación  $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}$ .

**Proposición 1.6.1** *Supongamos que la tensión residual es nula. Entonces*

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) = \mathbf{C}[\boldsymbol{\varepsilon}] + o(\nabla \mathbf{u}) \quad (1.6.3)$$

cuando  $\nabla \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}$ , siendo  $C$  el tensor de elasticidad definido en (1.5.2) y

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t) \quad (1.6.4)$$

el tensor de deformación infinitesimal.

*Demostración.* Desarrollando el polinomio de Taylor para  $\hat{\mathbf{S}}$  en torno a  $\mathbf{I}$  se tiene que

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I}) + D\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I})[\nabla \mathbf{u}] + o(\nabla \mathbf{u}). \quad (1.6.5)$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que la tensión residual es nula, y la definición del tensor de elasticidad (1.5.2), podemos escribir

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) = C[\nabla \mathbf{u}] + o(\nabla \mathbf{u}). \quad (1.6.6)$$

Descomponiendo el gradiente en su parte simétrica y antisimétrica, y teniendo en cuenta la propiedad 3 de la Proposición 1.5.1, se concluye el resultado.  $\square$

Como consecuencia de la proposición anterior, podemos escribir la ecuación constitutiva del tensor de Piola-Kirchhoff como:

$$\mathbf{S} = C[\boldsymbol{\varepsilon}] + o(\nabla \mathbf{u}). \quad (1.6.7)$$

Por tanto, si la tensión residual en la configuración de referencia es nula, el tensor de tensiones  $\mathbf{S}$  es una función lineal de la deformación infinitesimal  $\boldsymbol{\varepsilon}$  salvo términos de  $o(\nabla \mathbf{u})$ . En la teoría de elasticidad lineal se desprecia el término  $o(\nabla \mathbf{u})$  de (1.6.7) y se define el *tensor de tensiones linealizado*  $\boldsymbol{\sigma}$  como  $\boldsymbol{\sigma} = C[\boldsymbol{\varepsilon}]$ . Puesto que  $C$  toma valores simétricos,  $\boldsymbol{\sigma}$  es simétrico.

Así, las ecuaciones básicas de la elastodinámica lineal son:

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{u}} - \text{Div } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{b}_0, \quad (1.6.8)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t), \quad (1.6.9)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = C[\boldsymbol{\varepsilon}]. \quad (1.6.10)$$

Cuando el cuerpo es isótropo, por la Proposición (1.5.1), el tensor de tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$  se puede expresar como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} := 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I}. \quad (1.6.11)$$

Esta ley de comportamiento se conoce como *ley de Hooke*.

Además, si el cuerpo es homogéneo  $\rho_0$ ,  $\lambda$  y  $\mu$  son constantes y el sistema formado por las ecuaciones (1.6.8), (1.6.9) y (1.6.11) es un sistema lineal de ecuaciones en derivadas parciales para los campos  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  y  $\boldsymbol{\sigma}$ .

### 1.6.1. Energía de materiales de Hooke.

**Proposición 1.6.2** *Los materiales de Hooke son materiales hiperelásticos para los cuales la función densidad de energía viene dada por:*

$$\varphi(\nabla \mathbf{u}) = \frac{\lambda}{2} \left( \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \right)^2 + \mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}). \quad (1.6.12)$$

*Demostración.* Consideremos

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\mathbf{F}) = \varphi(\mathbf{F} - \mathbf{I}) &= \frac{\lambda}{2} \left( \text{tr} \left( \frac{1}{2} ((\mathbf{F} - \mathbf{I})^t + (\mathbf{F} - \mathbf{I})) \right) \right)^2 \\ &+ \mu \left( \frac{1}{2} ((\mathbf{F} - \mathbf{I})^t + (\mathbf{F} - \mathbf{I})) \right) : \left( \frac{1}{2} ((\mathbf{F} - \mathbf{I})^t + (\mathbf{F} - \mathbf{I})) \right). \end{aligned} \quad (1.6.13)$$

Veamos que

$$D\hat{\varphi}(\mathbf{F}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{F} - \mathbf{I}). \quad (1.6.14)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} D\hat{\varphi}(\mathbf{F})[\mathbf{G}] &= \frac{\lambda}{2} 2 \text{tr} \left( \frac{1}{2} ((\mathbf{F} - \mathbf{I})^t + (\mathbf{F} - \mathbf{I})) \right) \text{tr} \left( \frac{1}{2} (\mathbf{G}^t + \mathbf{G}) \right) \\ &+ 2\mu \left( \frac{1}{2} ((\mathbf{F} - \mathbf{I})^t + (\mathbf{F} - \mathbf{I})) \right) : \left( \frac{1}{2} (\mathbf{G}^t + \mathbf{G}) \right). \end{aligned}$$

Ahora bien, si denotamos por  $\mathbf{H}(\mathbf{G}) = \frac{1}{2}(\mathbf{G}^t + \mathbf{G})$  y  $\mathbf{W}(\mathbf{G}) = \frac{1}{2}(\mathbf{G}^t - \mathbf{G})$ , se verifica que si  $\mathbf{A}$  es un tensor simétrico,

$$\mathbf{A} : \mathbf{G} = \mathbf{A} : (\mathbf{H}(\mathbf{G}) + \mathbf{W}(\mathbf{G})) = \mathbf{A} : \mathbf{H}(\mathbf{G}),$$

y, por tanto,

$$D\hat{\varphi}(\mathbf{F})[\mathbf{G}] = \lambda \text{tr} \left( \frac{1}{2} ((\mathbf{F} - \mathbf{I})^t + (\mathbf{F} - \mathbf{I})) \right) \mathbf{I} : \mathbf{G} + 2\mu \left( \frac{1}{2} ((\mathbf{F} - \mathbf{I})^t + (\mathbf{F} - \mathbf{I})) \right) : \mathbf{G}, \quad (1.6.15)$$

lo que demuestra la igualdad (1.6.14) al tener en cuenta que  $\mathbf{F} - \mathbf{I} = \nabla \mathbf{u}$ .  $\square$

**Corolario 1.6.3** *La densidad de energía asociada a materiales de Hooke es:*

$$\varphi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (1.6.16)$$

□

En el siguiente resultado demostramos que en pequeñas deformaciones, la energía asociada a los materiales de Hooke es una buena aproximación de la energía libre.

**Proposición 1.6.4** *Se supone que la configuración de referencia es un estado natural y que el tensor de tensiones bulk en  $t = 0$ ,  $\mathbf{C}$ , es nulo. Entonces, la energía libre en torno a  $\mathbf{F} = \mathbf{I}$  verifica:*

$$\hat{\Psi}(\mathbf{F}) = \hat{\varphi}(\mathbf{F}) + o((\mathbf{F} - \mathbf{I})^2), \quad (1.6.17)$$

siendo  $\hat{\varphi}$  el funcional definido por (1.6.13).

*Demostración.* Desarrollando el polinomio de Taylor para  $\hat{\Psi}$  en torno a  $\mathbf{I}$ ,

$$\hat{\Psi}(\mathbf{F}) = \hat{\Psi}(\mathbf{I}) + D\hat{\Psi}(\mathbf{I})[\mathbf{F} - \mathbf{I}] + \frac{1}{2} D^2\hat{\Psi}(\mathbf{I})[\mathbf{F} - \mathbf{I}] : (\mathbf{F} - \mathbf{I}) + o((\mathbf{F} - \mathbf{I})^2). \quad (1.6.18)$$

Ahora bien, de la relación de Eshelby (1.4.31) se tiene que,

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}, 0) = \hat{\Psi}(\mathbf{I})\mathbf{I} - \mathbf{I}^t \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I}),$$

y puesto que por hipótesis,  $\mathbf{C}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{0}$  y  $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I}) = \mathbf{0}$ , se deduce que  $\hat{\Psi}(\mathbf{I}) = \mathbf{0}$ . Por otra parte,  $D\hat{\Psi}(\mathbf{F}) = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F})$ , que se anula en  $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ . En consecuencia, (1.6.18) se reduce a:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(\mathbf{F}) &= \frac{1}{2} D\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I})[\mathbf{F} - \mathbf{I}] : (\mathbf{F} - \mathbf{I}) + o((\mathbf{F} - \mathbf{I})^2) = \frac{1}{2} \mathbf{C}[\nabla \mathbf{u}] : \nabla \mathbf{u} + o((\mathbf{F} - \mathbf{I})^2) \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + o((\mathbf{F} - \mathbf{I})^2), \end{aligned}$$

sin más que tener en cuenta las definiciones (1.5.2) y (1.6.10). □

Con vistas a aproximar la J-integral para los materiales de Hooke, se demuestra la siguiente proposición:

**Proposición 1.6.5** *Bajo las hipótesis de la Proposición 1.6.4 y si  $|\dot{\mathbf{y}}| = O(r^{-s})$ , con  $s < 1$ , entonces la  $J$ -integral (1.4.56) para materiales elásticos sometidos a pequeñas deformaciones toma la forma*

$$J = \mathbf{t} \cdot \oint_{tip} \left\{ \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} + \rho_0 |\dot{\mathbf{u}}|^2) \mathbf{I} - \nabla \mathbf{u}^t \boldsymbol{\sigma} \right\} \mathbf{n} dA_X + o((\nabla \mathbf{u})^2). \quad (1.6.19)$$

*Demostración.* Consideramos el tensor de Eshelby modificado en (1.4.56) y calculamos el desarrollo de Taylor de orden dos del término  $\nabla \mathbf{u}^t \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F})$  en torno a  $\mathbf{F} = \mathbf{I}$  y en la dirección  $\nabla \mathbf{u}$ .

$$\nabla \mathbf{u}^t \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) = \nabla \mathbf{u}^t \left( \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I}) + D\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I})[\nabla \mathbf{u}] + o(\nabla \mathbf{u}) \right) = \nabla \mathbf{u}^t \boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{u}) + o((\nabla \mathbf{u})^2).$$

Finalmente, de (1.4.56) y (1.6.17) se obtiene el resultado.  $\square$

Puesto que en elasticidad lineal  $|\dot{\mathbf{y}}| = O(r^{-s})$ , (véase Freund [36]) es natural la siguiente definición:

**Definición 1.6.6** *La  $J$ -integral asociada a un material de Hooke se define como*

$$J = \mathbf{t} \cdot \oint_{tip} \left\{ \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} + \rho_0 |\dot{\mathbf{u}}|^2) \mathbf{I} - \nabla \mathbf{u}^t \boldsymbol{\sigma} \right\} \mathbf{n} dA_X. \quad (1.6.20)$$

## 1.6.2. Procesos elásticos.

Consideremos ahora que estamos sobre un cuerpo  $\mathcal{B}$  sin grieta,  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ , para  $n = 2$  o  $3$ .

**Definición 1.6.7** *Sean  $[\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}]$  campos sobre  $\mathcal{B} \times [0, \infty)$  con  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  y  $\boldsymbol{\sigma}$  suficientemente regulares, y supongamos que cumplen (1.6.8)-(1.6.10) con  $\mathbf{b}_0$  un campo de fuerzas sobre  $\mathcal{B} \times [0, \infty)$  conocido. Entonces  $[\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}]$  se denomina proceso elástico correspondiente a  $\mathbf{b}_0$ .*

**Teorema 1.6.8 (de la Potencia Consumida para materiales de Hooke).** *Sea  $[\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}]$  un proceso elástico correspondiente a la fuerza de volumen*

$\mathbf{b}_0$ . Entonces

$$\int_{\partial\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dA_X + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b}_0 \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dV_X = \frac{d}{dt} (\mathcal{U}\{\boldsymbol{\varepsilon}\} + \mathcal{K}\{\dot{\mathbf{u}}\}), \quad (1.6.21)$$

donde

$$\mathcal{U}\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, dV_X, \quad (1.6.22)$$

es la energía elástica de deformación, y

$$\mathcal{K}\{\dot{\mathbf{u}}\} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \dot{\mathbf{u}}^2 \, dV_X, \quad (1.6.23)$$

es la energía cinética.

Los términos en el primer miembro de (1.6.21) representan los cambios instantáneos del trabajo realizado por las fuerzas externas de tracción y volumen, respectivamente, mientras que los términos en el segundo miembro representan el trabajo instantáneo realizado por las tensiones de Cauchy y por la energía cinética, respectivamente.

*Demostración.* Por ser un proceso elástico, se cumple la igualdad (1.6.8). Multiplicando por  $\dot{\mathbf{u}}$  e integrando sobre  $\mathcal{B}$  se obtiene

$$\int_{\mathcal{B}} \rho_0 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{u}}^2 \, dV_X + \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \, dV_X = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b}_0 \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dV_X + \int_{\partial\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dA_X.$$

En consecuencia,

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^2 \, dV_X + \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \, dV_X \right) = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b}_0 \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dV_X + \int_{\partial\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dA_X.$$

□

## 1.7. Condiciones de contorno y de contacto para materiales elásticos lineales

En este apartado consideraremos de nuevo que  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ , que no contiene grietas, y escribiremos las condiciones de contorno que usaremos sobre

su frontera a lo largo de esta memoria.

Supondremos que  $\mathcal{B}$  es una región cerrada cuyo interior,  $\Omega$ , es un dominio, y tal que su frontera,  $\partial\Omega$ , está formada por una unión finita de superficies regulares, y que globalmente es Lipschitziana. Supondremos que la frontera de  $\Omega$  consta de tres regiones abiertas,  $\Gamma_D$ ,  $\Gamma_N$  y  $\Gamma_C$ , tales que  $\Gamma = \partial\Omega = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N \cup \bar{\Gamma}_C$  y disjuntas dos a dos; sobre  $\Gamma_D$ , de medida  $(n-1)$ -dimensional no nula, el cuerpo está sometido a una excitación externa conocida; sobre  $\Gamma_N$  el cuerpo está sometido a tracciones superficiales que eventualmente pueden ser nulas y, por último,  $\Gamma_C$  es la parte de la frontera susceptible de entrar en contacto con un obstáculo. Las partes  $\Gamma_N$  o  $\Gamma_C$  pueden ser vacías. Consideraremos que  $\Gamma_D$ ,  $\Gamma_N$  y  $\Gamma_C$  son independientes del tiempo.

Supondremos además que el material es de Hooke correspondiente a la relación (1.6.11). Si el sólido se encuentra sometido a un bloqueo de los desplazamientos dado por  $\mathbf{u}^D = (u_i^D)$  sobre la frontera  $\Gamma_D$  y a la acción de unas fuerzas superficiales de densidad  $\mathbf{s}_0 = (s_0)_i$  sobre  $\Gamma_N$ , las condiciones de contorno se escriben:

$$u_i = u_i^D, \quad \text{sobre } \Gamma_D, \quad (1.7.1)$$

$$\sigma_{ij}n_j = (s_0)_i, \quad \text{sobre } \Gamma_N, \quad (1.7.2)$$

para todo instante de tiempo  $t \in [0, T]$ , siendo  $T$  un valor real positivo fijado,  $\mathbf{n} = (n_i)$  es el vector unitario normal exterior a  $\Omega$  en cada punto de su frontera, y  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ ,  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t)$  representan el desplazamiento y la tensión en cada punto  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$  y en cada instante  $t \in [0, T]$ .

### 1.7.1. Condición de contacto de Signorini

En esta sección se presentan las ecuaciones que modelan el contacto sin fricción de un sólido elástico lineal con un obstáculo rígido.

Denotamos por  $g : \Gamma_C \rightarrow \mathbb{R}^+$  a la función que mide, en la dirección de la normal  $\mathbf{n}$ , la distancia inicial de la frontera  $\Gamma_C$ , en su configuración de referencia, al obstáculo. La condición de no interpenetrabilidad se expresa entonces como:

$$u_n \leq g \quad \text{sobre } \Gamma_C \times [0, T], \quad (1.7.3)$$

siendo  $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  la componente normal del desplazamiento. En el caso particular en que el cuerpo y el obstáculo se encuentren inicialmente en contacto, la condición se reduce a:

$$u_n \leq 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_C \times [0, T]. \quad (1.7.4)$$

Cuando  $u_n < 0$  no hay contacto y entonces la superficie  $\Gamma_C$  queda libre, o lo que es lo mismo,  $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \mathbf{0}$  y, en particular, la tensión normal,  $\sigma_n = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}$ , es nula.

Cuando  $u_n = 0$  hay contacto efectivo y, por el principio de acción-reacción, la base rígida ejerce sobre el cuerpo una presión en el sentido opuesto a la normal  $\mathbf{n}$ , por lo que  $\sigma_n < 0$ .

Además, se considera que no hay rozamiento, es decir, que las fuerzas tangenciales a la superficie de contacto son nulas, esto es,  $\boldsymbol{\sigma}_T = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} - \sigma_n\mathbf{n} = \mathbf{0}$ .

En consecuencia, las condiciones de contacto se expresan como:

$$u_n \leq 0; \quad \sigma_n \leq 0; \quad u_n\sigma_n = 0; \quad \boldsymbol{\sigma}_T = \mathbf{0} \quad \text{sobre} \quad \Gamma_C \times [0, T]. \quad (1.7.5)$$

Las tres primeras relaciones se pueden agrupar en una única ecuación no lineal. Para ello utilizaremos una función NCP (Nonlinear Complementary Problem), esto es, una función  $\vartheta$  no negativa verificando

$$\vartheta(a, b) = 0 \iff ab = 0, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0. \quad (1.7.6)$$

Algunos ejemplos relevantes de este tipo de funciones son

$$\vartheta(a, b) = a + b - \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{Fischer-Burmeister}, \quad (1.7.7)$$

$$\vartheta(a, b) = a - (a - \lambda b)^+ \quad \text{para } \lambda > 0 \text{ arbitrario.} \quad (1.7.8)$$

En nuestro caso, consideraremos  $\vartheta$  como en (1.7.8) y las condiciones de contacto vistas en (1.7.5) pueden expresarse como

$$\vartheta(-u_n, -\sigma_n) = 0, \quad (1.7.9)$$

junto con la condición de tensiones tangenciales nulas.

## 1.8. Deformaciones planas

Consideraremos en este apartado que el cuerpo  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$  y que su interior,  $\Omega$ , es un dominio de la forma

$$\Omega = \Omega_s \times (0, l_3),$$

es decir,  $\Omega$  es un dominio cilíndrico de sección  $\Omega_s$ , contenida en el plano  $OX_1X_2$  y de espesor  $l_3$ , siendo  $l_3$  un número real estrictamente positivo.

En la frontera de  $\Omega$  se distinguen las tapas,  $\Gamma_{\pm}$ , correspondientes a  $X_3 = l_3$  y  $X_3 = 0$ , respectivamente. Sobre la frontera lateral,  $\Gamma_l$  distinguimos dos partes,  $\Gamma_D$  y  $\Gamma_N$  tales que ambas son abiertas, independientes de  $X_3$  y  $\Gamma_l = (\Gamma_D \cup \Gamma_N)^\circ$ . Denotamos por

$$\Gamma_{Ds} = \Gamma_D \cap \partial\Omega_s, \quad \text{y} \quad \Gamma_{Ns} = \Gamma_N \cap \partial\Omega_s.$$

Supondremos que el sólido está sometido a un campo de fuerzas de volumen  $\mathbf{b}_0$ , que su densidad  $\rho_0$  es constante y que las fuerzas de volumen, las de superficie y los desplazamientos impuestos sobre la frontera Dirichlet  $\Gamma_D$  son independientes de  $X_3$  y paralelos al plano  $OX_1X_2$ . Como consecuencia de estas hipótesis el campo de fuerzas,  $\mathbf{b}_0$ , verifica que  $(b_0)_3 = 0$  y  $(b_0)_\alpha = (b_0)_\alpha(X_1, X_2, t)$  y el desplazamiento  $u_3^D = 0$ ,  $u_\alpha^D = u_\alpha^D(X_1, X_2, t)$ . Consideramos sobre las tapas de la placa una condición de desplazamiento normal nulo

$$u_n = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_{\pm}. \quad (1.8.1)$$

En resumen, consideraremos el modelo dinámico (1.6.8)–(1.6.10) asociado a un material de Hooke que con estas hipótesis sobre las cargas, se escribe como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \ddot{u}_\alpha - \frac{\partial \sigma_{\alpha j}}{\partial X_j} = (b_0)_\alpha(X_1, X_2, t), \quad \text{en} \quad \Omega, \\ \rho_0 \ddot{u}_3 - \frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial X_j} = 0, \quad \text{en} \quad \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}[\boldsymbol{\varepsilon}], \\ u_\alpha = u_\alpha^D(X_1, X_2, t), \quad u_3 = 0, \quad \text{sobre} \quad \Gamma_{Ds}, \\ \sigma_{\alpha\beta} n_\beta = (s_0)_\alpha(X_1, X_2, t), \quad \sigma_{3\beta} n_\beta = 0, \quad \text{sobre} \quad \Gamma_{Ns}, \\ u_3(X_1, X_2, 0, t) = u_3(X_1, X_2, l_3, t) = 0, \quad \text{sobre} \quad \Gamma_{\pm}, \end{array} \right. \quad (1.8.2)$$

junto con las condiciones iniciales

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}), \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_1(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad (1.8.3)$$

siendo  $\mathbf{u}_0$  y  $\mathbf{u}_1$  independientes de  $X_3$  y tales que

$$(u_0)_3 = (u_1)_3 = 0. \quad (1.8.4)$$

Entonces, es bien conocido que gracias a la geometría del dominio, a las hipótesis sobre las fuerzas aplicadas y a las condiciones de contorno e iniciales, el problema de elastodinámica tridimensional se puede formular como un estado elástico de deformaciones planas.

**Definición 1.8.1** *El estado elástico  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$  es un estado de deformaciones planas con respecto al plano  $OX_1X_2$  si*

$$u_\alpha = u_\alpha(X_1, X_2, t), \quad u_3 = 0. \quad (1.8.5)$$

Un estado de deformaciones planas verifica automáticamente la relación (1.8.1). El tensor de deformaciones y el de tensiones asociados toman la forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(\mathbf{u}) & \varepsilon_{12}(\mathbf{u}) & 0 \\ \varepsilon_{12}(\mathbf{u}) & \varepsilon_{22}(\mathbf{u}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(\mathbf{u}) & \sigma_{12}(\mathbf{u}) & 0 \\ \sigma_{12}(\mathbf{u}) & \sigma_{22}(\mathbf{u}) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}(\mathbf{u}) \end{pmatrix}. \quad (1.8.6)$$

En este caso, la ley de Hooke (1.6.11) implica:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda(\varepsilon_{\gamma\gamma})\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad (1.8.7)$$

$$\sigma_{3\beta} = 0, \quad \beta = 1, 2, \quad (1.8.8)$$

$$\sigma_{33} = \lambda(\varepsilon_{\gamma\gamma}). \quad (1.8.9)$$

Es sencillo ver, utilizando (1.8.7), que (1.8.9) admite la expresión:

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{\gamma\gamma}),$$

siendo  $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$  el coeficiente de Poisson del material. Obsérvese que la hipótesis de deformaciones planas garantiza que el tensor de tensiones es independiente de  $X_3$ .

El sistema completo de deformaciones planas se escribe en la forma siguiente:

**PROBLEMA (DP):** Hallar  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$  verificando:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\rho_0 \ddot{u}_\alpha + \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial X_\beta} + (b_0)_\alpha = 0, \quad \text{en } \Omega_s, \\ \sigma_{\alpha\beta} = 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta} + \lambda \varepsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}, \quad \sigma_{\alpha 3} = 0, \quad \sigma_{33} = \nu \sigma_{\gamma\gamma} \quad \text{en } \Omega_s, \\ u_\alpha = u_\alpha(X_1, X_2, t), \quad u_3 = 0 \quad \text{en } \Omega_s, \\ u_\alpha(X_1, X_2, t) = (u^D)_\alpha(X_1, X_2, t), \quad \text{sobre } \Gamma_{D_s}, \\ \sigma_{\alpha\beta} n_\beta = (s_0)_\alpha, \quad \text{sobre } \Gamma_{N_s}, \end{array} \right. \quad (1.8.10)$$

junto con las condiciones iniciales (1.8.3) y verificando (1.8.4).

Es sencillo probar que el estado elástico  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$  de deformaciones planas es solución del problema elastodinámico tridimensional (1.8.2) definido sobre  $\Omega$ .

## 1.9. Ondas progresivas y potenciales de Love

En esta sección estudiaremos una clase particular de soluciones de las ecuaciones de la elastodinámica lineal, como son las ondas progresivas sinusoidales. Realizaremos una caracterización de las conocidas como ondas longitudinales y transversales, obtendremos las velocidades para las cuales las ondas correspondientes son solución de la ecuación de Lamé-Navier evolutiva y descompondremos el desplazamiento por medio de unos potenciales escalares y vectoriales. Esta descomposición nos permitirá, por una parte, obtener la expresión de las ondas de Rayleigh que estudiaremos en el Capítulo 3 y por otra, deducir la expresión asintótica de las tensiones cerca del vértice de una grieta, que obtendremos en el Capítulo 5.

Realizaremos el estudio bajo las hipótesis de homogeneidad e isotropía y en ausencia de fuerzas de volumen.

Consideramos un material elástico de Hooke y escribimos la ecuación del movimiento en términos del desplazamiento, a partir de las relaciones (1.6.8)–(1.6.10), de las que se deduce:

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{u}} - \text{Div } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad \text{en } \Omega,$$

siendo  $\Omega = \overset{\circ}{\mathcal{B}}$ .

$$\begin{aligned} (\text{Div } \boldsymbol{\sigma})_i &= \partial_j \sigma_{ij} = \partial_j (\lambda \varepsilon_{kk}(\mathbf{u}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(\mathbf{u})) = \partial_j (\lambda \partial_k u_k \delta_{ij} + \mu (\partial_i u_j + \partial_j u_i)) \\ &= \lambda \partial_{jk} u_k \delta_{ij} + \mu \partial_{ji} u_j + \mu \partial_{jj} u_i = \mu (\Delta \mathbf{u})_i + (\lambda + \mu) \partial_i \text{Div } \mathbf{u}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \text{Div } \mathbf{u} = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}. \quad (1.9.1)$$

Esta ecuación se conoce como ecuación de Lamé-Navier evolutiva.

**Definición 1.9.1** *Un campo vectorial  $\mathbf{u}$  de la forma*

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{a} \text{sen}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m} - ct), \quad \mathbf{r} = \mathbf{X} - \mathbf{o}, \quad (1.9.2)$$

donde  $|\mathbf{m}| = 1$ , se denomina onda sinusoidal progresiva con amplitud  $\mathbf{a}$ , dirección  $\mathbf{m}$  y velocidad  $c$ . Diremos que  $\mathbf{u}$  es longitudinal si  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{m}$  son paralelos y transversal si  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{m}$  son perpendiculares.

**Proposición 1.9.2 (Caracterización de ondas longitudinales y transversales.)**

Una onda sinusoidal progresiva será longitudinal si y solo si  $\text{Rot } \mathbf{u} = \mathbf{0}$  y transversal si y solo si  $\text{Div } \mathbf{u} = 0$ .

*Demostración.* Por la regla de la cadena,

$$\nabla \mathbf{u} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{m}) \cos(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m} - ct). \quad (1.9.3)$$

Análogamente,

$$\text{Div } \mathbf{u} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{m}) \cos(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m} - ct), \quad (1.9.4)$$

$$\text{Rot } \mathbf{u} = (\mathbf{m} \times \mathbf{a}) \cos(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m} - ct), \quad (1.9.5)$$

de donde se concluye el resultado.  $\square$

**Teorema 1.9.3** *Una onda sinusoidal progresiva con velocidad  $c$  será solución de (1.9.1) si y solo si*

- $c^2 = \frac{2\mu + \lambda}{\rho_0}$ , en cuyo caso la onda es longitudinal, o bien
- $c^2 = \frac{\mu}{\rho_0}$ , siendo en este caso la onda transversal.

*Demostración.* De las relaciones (1.9.3)–(1.9.5) se deduce que:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{u} &= -\mathbf{a} \operatorname{sen}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m} - ct), \\ \nabla \operatorname{Div} \mathbf{u} &= -(\mathbf{a} \cdot \mathbf{m}) \mathbf{m} \operatorname{sen}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m} - ct), \\ \ddot{\mathbf{u}} &= -c^2 \mathbf{a} \operatorname{sen}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m} - ct).\end{aligned}$$

Por tanto,  $\mathbf{u}$  satisface la ecuación (1.9.1) si y solo si

$$\mu \mathbf{a} + (\lambda + \mu)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{m}) \mathbf{m} = \rho_0 c^2 \mathbf{a}. \quad (1.9.6)$$

Consideremos el tensor acústico

$$A(\mathbf{m}) = \frac{1}{\rho_0} [\mu \mathbf{I} + (\lambda + \mu) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}] = \left( \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0} \right) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \frac{\mu}{\rho_0} (\mathbf{I} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}). \quad (1.9.7)$$

Con esta notación, la ecuación (1.9.6) toma la forma

$$A(\mathbf{m}) \mathbf{a} = c^2 \mathbf{a}. \quad (1.9.8)$$

En consecuencia, una condición necesaria y suficiente para que  $\mathbf{u}$  satisfaga la ecuación (1.9.1) es que  $c^2$  sea un autovalor del tensor acústico  $A$ . Dado que  $A$  es un tensor simétrico y admite la descomposición (1.9.7), entonces los únicos autovalores son  $\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}$  y  $\frac{\mu}{\rho_0}$ . (Véase Gurtin [43], pág. 11).

Para el primer autovalor,  $\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}$ , el autovector  $\mathbf{a}$  asociado es múltiplo de  $\mathbf{m}$  y por tanto  $\mathbf{a} \times \mathbf{m} = \mathbf{0}$  y  $\operatorname{Rot} \mathbf{u} = \mathbf{0}$  por lo que es una onda longitudinal. Para el segundo autovalor,  $\frac{\mu}{\rho_0}$ , el autovector asociado  $\mathbf{a} \in \mathbf{m}^\perp$ , lo que implica que  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{m} = 0$  y, por tanto, la onda es transversal.  $\square$

**Definición 1.9.4** *Se definen las velocidades longitudinal y transversal como*

$$c_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}} \quad y \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}, \quad (1.9.9)$$

*respectivamente.*

### 1.9.1. Potenciales de Love

Para encontrar una solución de la ecuación de Lamé-Navier (1.9.1) consideraremos que el desplazamiento toma una forma particular que nos permitirá resolver la ecuación de una forma más simple. Para ello escribiremos el desplazamiento en función de unos potenciales escalares y vectoriales.

#### Teorema 1.9.5 (de descomposición de Helmholtz)

Sea  $\mathbf{u}$  acotado, continuo y tal que decrece a cero al menos con orden  $\mathbf{u} = O(r^{-2})$ . Entonces existe un campo escalar  $\phi$  y un campo vectorial  $\mathbf{B}$  tal que:

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \text{Rot } \mathbf{B}. \quad (1.9.10)$$

*Demostración.* Véase [84], pág. 67 o [1], pág. 89.  $\square$

Nótese que  $\nabla\phi$  es un vector irrotacional y  $\text{Rot } \mathbf{B}$  es solenoidal.

**Teorema 1.9.6** Sean  $\phi$  un campo escalar y  $\mathbf{B}$  un campo vectorial, verificando

$$\Delta\phi = \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad \Delta\mathbf{B} = \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}, \quad (1.9.11)$$

siendo  $c_l$  y  $c_t$  las velocidades definidas en (1.9.9), entonces

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \text{Rot } \mathbf{B}, \quad (1.9.12)$$

es solución de la ecuación de Lamé-Navier evolutiva.

*Demostración.* Puesto que  $\nabla\Delta\phi = \Delta\nabla\phi$ ,  $\text{Div}(\text{Rot } \mathbf{B}) = 0$  y el rotacional y el laplaciano conmutan, se puede escribir

$$\begin{aligned} \mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\text{Div } \mathbf{u} &= (\lambda + 2\mu)\nabla\Delta\phi + \mu\text{Rot } \Delta\mathbf{B} \\ &= \frac{\lambda + 2\mu}{c_l^2} \nabla\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right) + \frac{\mu}{c_t^2} \text{Rot}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}\right) \\ &= \frac{\lambda + 2\mu}{c_l^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla\phi + \frac{\mu}{c_t^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{Rot } \mathbf{B} \\ &= \frac{\lambda + 2\mu}{c_l^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} - \frac{\lambda + 2\mu}{c_l^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{Rot } \mathbf{B} + \frac{\mu}{c_t^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{Rot } \mathbf{B} \\ &= \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}, \end{aligned}$$

lo que permite concluir que  $\mathbf{u}$  verifica la ecuación de Lamé-Navier.  $\square$

En lo que sigue, para simplificar la notación escribiremos la ecuación (1.9.10) como

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t, \quad (1.9.13)$$

donde  $\mathbf{u}_l = \nabla\phi$  representará la *onda dilatacional*, llamada frecuentemente *onda longitudinal* o irrotacional y  $\mathbf{u}_t = \text{Rot } \mathbf{B}$  representará la *onda rotacional*, *transversal* o cortante.

Supongamos ahora que el cuerpo está sometido a la acción de fuerzas de volumen de densidad  $\mathbf{b}_0$  y recordemos la ecuación de Lamé-Navier evolutiva (1.9.1):

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{u}} - ((\lambda + \mu) \nabla(\text{Div } \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u}) = \mathbf{b}_0. \quad (1.9.14)$$

Si consideramos la velocidad de propagación dilatacional  $c_l$  y la velocidad cortante o transversal  $c_t$  definidas en (1.9.9), la ecuación (1.9.14) es equivalente a la ecuación general:

$$-\ddot{\mathbf{u}} + (c_l^2 - c_t^2) \nabla(\text{Div } \mathbf{u}) + c_t^2 \Delta \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \mathbf{b}_0. \quad (1.9.15)$$

Veamos, a continuación cómo, partiendo de esta relación, se deducen las ecuaciones de las ondas tridimensionales longitudinales y transversales asociadas.

**Teorema 1.9.7** *Sea  $\mathbf{u}$  un campo de desplazamientos suficientemente regular verificando la ecuación (1.9.15) y  $\mathbf{b}_0$  un campo de fuerzas de divergencia nula. Sean  $\mathbf{u}_l$  y  $\mathbf{u}_t$  una descomposición longitudinal y transversal dada por la ecuación (1.9.13). Entonces verifican:*

$$c_t^2 \Delta \mathbf{u}_t - \ddot{\mathbf{u}}_t + \frac{1}{\rho_0} \mathbf{b}_0 = \mathbf{G}(t), \quad (1.9.16)$$

$$c_l^2 \Delta \mathbf{u}_l - \ddot{\mathbf{u}}_l = -\mathbf{G}(t), \quad (1.9.17)$$

siendo  $\mathbf{G}$  una función real independiente de  $\mathbf{X}$ .

Recíprocamente, si tenemos un campo  $\mathbf{u}_l$  tal que  $\text{Rot } \mathbf{u}_l = \mathbf{0}$ , cumpliendo la ecuación (1.9.17), y un campo  $\mathbf{u}_t$  tal que  $\text{Div } \mathbf{u}_t = 0$ , verificando la ecuación (1.9.16), entonces el campo de desplazamientos  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t$  verifica la ecuación (1.9.15).

*Demostración.*

“ $\Rightarrow$ ” Consideremos la descomposición de  $\mathbf{u}$  dada por (1.9.13) y sustituyamos en la ecuación (1.9.15). Obtenemos entonces la expresión:

$$-\ddot{\mathbf{u}}_l - \ddot{\mathbf{u}}_t + c_t^2 (\Delta(\mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t)) + (c_l^2 - c_t^2) \nabla(\text{Div } \mathbf{u}_l) = -\frac{1}{\rho_0} \mathbf{b}_0. \quad (1.9.18)$$

Tomando la divergencia en esta ecuación, teniendo en cuenta que  $\text{Div } \Delta \mathbf{u}_l = \Delta \text{Div } \mathbf{u}_l$ , y que  $\mathbf{b}_0$  tiene divergencia nula, se deduce:

$$\text{Div} [-\ddot{\mathbf{u}}_l + c_l^2 \Delta \mathbf{u}_l] = 0.$$

Por otra parte, puesto que  $\text{Rot } \mathbf{u}_l = \mathbf{0}$ , y que el laplaciano y el rotacional se pueden conmutar, se tiene:

$$\text{Rot} [-\ddot{\mathbf{u}}_l + c_l^2 \Delta \mathbf{u}_l] = \mathbf{0}.$$

Tenemos entonces que la divergencia y el rotacional del campo  $c_l^2 \Delta \mathbf{u}_l - \ddot{\mathbf{u}}_l$  son nulos y, en consecuencia, se tiene que cumplir:

$$-\ddot{\mathbf{u}}_l + c_l^2 \Delta \mathbf{u}_l = \mathbf{G}_1(t). \quad (1.9.19)$$

Para obtener la ecuación (1.9.16), tomemos ahora rotacionales en (1.9.18), tengamos en cuenta que  $\text{Rot } \mathbf{u}_l = \mathbf{0}$  y que el laplaciano conmuta con el rotacional:

$$-\text{Rot } \ddot{\mathbf{u}}_t + c_t^2 \Delta \text{Rot } \mathbf{u}_t + (c_l^2 - c_t^2) \text{Rot} (\nabla (\text{Div } \mathbf{u}_l)) = -\frac{1}{\rho_0} \text{Rot} (\mathbf{b}_0).$$

Por tanto,

$$\text{Rot} \left( -\ddot{\mathbf{u}}_t + c_t^2 \Delta \mathbf{u}_t + \frac{1}{\rho_0} \mathbf{b}_0 \right) = \mathbf{0}.$$

Finalmente, como  $\text{Div } \mathbf{u}_t = 0$ , y por hipótesis  $\text{Div } \mathbf{b}_0 = 0$ , se tiene:

$$c_t^2 \Delta \mathbf{u}_t - \ddot{\mathbf{u}}_t + \frac{1}{\rho_0} \mathbf{b}_0 = \mathbf{G}_2(t). \quad (1.9.20)$$

Ahora, sumando las ecuaciones (1.9.19) y (1.9.20), se obtiene:

$$-\ddot{\mathbf{u}} + c_t^2 \Delta \mathbf{u}_t + c_l^2 \Delta \mathbf{u}_l = -\frac{1}{\rho_0} \mathbf{b}_0 + \mathbf{G}_1(t) + \mathbf{G}_2(t). \quad (1.9.21)$$

Puesto que  $\text{Rot } \mathbf{u}_l = \mathbf{0}$ , se cumple que  $\Delta \mathbf{u}_l = \nabla(\text{Div } \mathbf{u}_l)$ ; sustituyendo esta expresión en (1.9.21), sumando y restando  $c_t^2 \nabla(\text{Div } \mathbf{u}_l)$  y teniendo en cuenta que  $\text{Div } \mathbf{u}_t = 0$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} -\ddot{\mathbf{u}} + c_t^2 \Delta \mathbf{u}_t + c_l^2 \Delta \mathbf{u}_l + (c_l^2 - c_t^2) \nabla(\text{Div } \mathbf{u}_t) \\ - c_t^2 \nabla(\text{Div } \mathbf{u}_l) + c_l^2 \nabla(\text{Div } \mathbf{u}_l) = -\frac{1}{\rho_0} \mathbf{b}_0 + \mathbf{G}_1(t) + \mathbf{G}_2(t). \end{aligned}$$

Agrupando los términos de manera conveniente, se obtiene la expresión:

$$-\ddot{\mathbf{u}} + c_t^2 \Delta \mathbf{u} + (c_l^2 - c_t^2) \nabla(\text{Div } (\mathbf{u})) = -\frac{1}{\rho_0} \mathbf{b}_0 + \mathbf{G}_1(t) + \mathbf{G}_2(t),$$

y, como por hipótesis  $\mathbf{u}$  es solución de (1.9.15), deducimos que  $\mathbf{G}_2(t) = -\mathbf{G}_1(t)$ , concluyéndose que (1.9.16) y (1.9.17) son ciertas.

Para ver que se verifica el recíproco sólo tenemos que sumar las dos ecuaciones (1.9.16) y (1.9.17) y cálculos análogos a los mostrados más arriba permiten deducir (1.9.15).  $\square$

**Corolario 1.9.8** *Sea  $\mathbf{u}$  un campo de desplazamientos suficientemente regular verificando la ecuación (1.9.15) y  $\mathbf{b}_0$  un campo de fuerzas de divergencia nula; entonces, existe una descomposición de  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_l$  para la cual se cumplen:*

- *Ecuación de ondas transversales*

$$c_t^2 \Delta \hat{\mathbf{u}}_t - \ddot{\hat{\mathbf{u}}}_t + \frac{1}{\rho_0} \mathbf{b}_0 = \mathbf{0}. \quad (1.9.22)$$

- *Ecuación de ondas longitudinales*

$$c_l^2 \Delta \hat{\mathbf{u}}_l - \ddot{\hat{\mathbf{u}}}_l = \mathbf{0}. \quad (1.9.23)$$

*Demostración.* Dados  $\mathbf{u}_l$  y  $\mathbf{u}_t$  una descomposición de  $\mathbf{u}$  dada por (1.9.13), y verificando las relaciones (1.9.16)–(1.9.17), consideramos:

$$\hat{\mathbf{u}}_l = \mathbf{u}_l - \int_0^t \left( \int_0^r \mathbf{G}(s) dA_X \right) dr, \quad \hat{\mathbf{u}}_t = \mathbf{u}_t + \int_0^t \left( \int_0^r \mathbf{G}(s) dA_X \right) dr,$$

siendo  $\mathbf{G}(t)$  la función dada por el Teorema 1.9.7.

Se verifica:

$$\Delta \widehat{\mathbf{u}}_l = \Delta \mathbf{u}_l, \quad \ddot{\widehat{\mathbf{u}}}_l = \ddot{\mathbf{u}}_l - \mathbf{G}(t), \quad \Delta \widehat{\mathbf{u}}_t = \Delta \mathbf{u}_t, \quad \ddot{\widehat{\mathbf{u}}}_t = \ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{G}(t).$$

Entonces, se comprueba fácilmente que  $\widehat{\mathbf{u}}_t$  y  $\widehat{\mathbf{u}}_l$  verifican (1.9.23)–(1.9.22) sin más que tener en cuenta que  $\mathbf{u}_t$  y  $\mathbf{u}_l$  son solución de las ecuaciones (1.9.16) y (1.9.17) respectivamente.  $\square$

**Observación 1.9.9** *Las ecuaciones asociadas a las ondas longitudinales y transversales indican que ambas se propagan independientemente con velocidades  $c_l$  y  $c_t$  respectivamente.*



## Capítulo 2

# Problema de contacto dinámico con condiciones de Signorini

En este capítulo se realiza el análisis matemático de un problema dinámico de contacto entre un cuerpo elástico lineal deformable y una base rígida. Dicho contacto se modela usando las condiciones de Signorini presentadas en la Sección 1.7.

El capítulo se estructura como sigue: en la Sección 2.1 describiremos el modelo y el marco funcional considerado. En la Sección 2.2 se discretizará el problema en tiempo usando un método de Newmark para obtener una familia de problemas en desplazamientos para los cuales se establece la existencia y unicidad de solución débil. En la Sección 2.3 se construyen funciones “aproximando” una solución del problema, se obtienen estimaciones a priori y se muestran algunos resultados de convergencia de las sucesiones de aproximantes. También se incluyen algunos resultados relativos a la conservación de la energía. En la Sección 2.4 se establecerá la existencia de una solución  $\delta$ -débil del problema pasando al límite en las aproximaciones previas. La noción  $\delta$ -débil, que se introduce al final de la Sección 2.1, hace referencia a una debilitación de la condición de complementariedad. En la Sección 2.5 se establece una acotación para la energía de la solución  $\delta$ -débil. Finalmente, en la Sección 2.6 se abordará la resolución numérica del problema y en la Sección 2.7 se presentarán algunos resultados numéricos obtenidos con la resolución de un ejemplo test.

## 2.1. El modelo y marco funcional

Consideraremos un sólido elástico con densidad constante  $\rho_0$ , que ocupa inicialmente el dominio acotado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$  de clase  $\mathcal{C}^{1,1}$ . Se supone que el cuerpo está sometido a fuerzas de volumen de densidad  $\mathbf{b}_0$ . La frontera del cuerpo,  $\Gamma$  está dividida en tres partes disjuntas dos a dos:  $\Gamma_C$ ,  $\Gamma_N$  y  $\Gamma_D$ , esta última con medida de Lebesgue  $(n-1)$ -dimensional positiva,  $med_{n-1}(\Gamma_D) > 0$  y tales que todas ellas son abiertas,  $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_C \cup \bar{\Gamma}_N$  y  $\bar{\Gamma}_D \cap \bar{\Gamma}_C = \emptyset$ . El cuerpo está sujeto a tracciones de densidad  $\mathbf{s}_0$  sobre  $\Gamma_N$ , los desplazamientos son conocidos sobre  $\Gamma_D$ , y  $\Gamma_C$  es la superficie de potencial contacto, donde consideraremos condiciones de contacto de Signorini. Denotaremos por  $\mathbf{n}$  el vector normal unitario exterior a  $\Gamma$  y por  $\Sigma = \Gamma \setminus \bar{\Gamma}_D$ . Además,  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  y  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  representarán a  $[L^2(\Omega)]^n$  y  $[H^1(\Omega)]^n$  respectivamente. Bajo estas condiciones, el problema de contacto se plantea como sigue:

**PROBLEMA (P):** *Hallar  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$  verificando:*

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{u}} - \text{Div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{b}_0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \quad (2.1.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{s}_0 \quad \text{sobre } \Gamma_N \times (0, T), \quad (2.1.2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_D \times (0, T), \quad (2.1.3)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_T = \mathbf{0}; \quad \sigma_n \leq 0 \quad \text{sobre } \Gamma_C \times (0, T), \quad (2.1.4)$$

$$u_n \leq 0; \quad \sigma_n u_n = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_C \times (0, T), \quad (2.1.5)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_0; \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_1 \quad \text{en } \Omega, \quad (2.1.6)$$

donde  $\mathbf{s}_0 \in W^{2,\infty}(0, T; \mathbf{L}^2(\Gamma_N))$ ,  $\mathbf{b}_0 \in W^{2,\infty}(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$  y  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ , verificando (1.6.11). Las condiciones iniciales  $\mathbf{u}_0$  y  $\mathbf{u}_1$  se suponen en  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  y tales que

$$\text{Div } \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0) \in \mathbf{L}^2(\Omega),$$

y  $(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_0))$  verifican las condiciones de contacto.

Sea  $\boldsymbol{\chi} \in W^{2,\infty}(0, T; \mathbf{L}_{sym}^2(\Omega))$  una función que verifica

$$-\text{Div } \boldsymbol{\chi} = \mathbf{b}_0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \quad (2.1.7)$$

$$\boldsymbol{\chi} \mathbf{n} = \mathbf{s}_0 \quad \text{sobre } \Gamma_N \times (0, T), \quad (2.1.8)$$

$$\boldsymbol{\chi} \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_C \times (0, T). \quad (2.1.9)$$

El cambio de variable  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\chi}$ , con  $\boldsymbol{\chi}$  fija de aquí en adelante y verificando (2.1.7)–(2.1.9), transforma el Problema **(P)** en el siguiente problema homogéneo:

**PROBLEMA (HP):** *Hallar  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$  verificando:*

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{u}} - \text{Div } \boldsymbol{\eta}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \quad (2.1.10)$$

$$\boldsymbol{\eta} \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_N \times (0, T), \quad (2.1.11)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_D \times (0, T), \quad (2.1.12)$$

$$\boldsymbol{\eta}_T = \mathbf{0}; \quad \eta_n \leq 0 \quad \text{sobre } \Gamma_C \times (0, T), \quad (2.1.13)$$

$$u_n \leq 0; \quad \eta_n u_n = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_C \times (0, T), \quad (2.1.14)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_0; \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_1 \quad \text{en } \Omega. \quad (2.1.15)$$

Además, la ley constitutiva se convierte en

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{u}) = \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\chi}.$$

### 2.1.1. Marco funcional

Los resultados de esta Sección pueden encontrarse en Kikuchi-Oden [57] o Geymonat-Suquet [39].

Sea  $\gamma$  el operador lineal continuo, denominado operador de traza, de  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  en  $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$  tal que:

$$\gamma(\mathbf{v}) = \mathbf{v}|_{\Gamma}, \quad \text{si } \mathbf{v} \in [\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})]^n.$$

Es bien conocido que, si el dominio  $\Omega \in \mathcal{C}^{1,1}$ , existen aplicaciones lineales determinadas de forma única  $\gamma_n$  de  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  en  $H^{1/2}(\Gamma)$  y  $\gamma_T$  de  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  en  $\mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)$  tales que

$$\gamma(\mathbf{v}) = \gamma_n(\mathbf{v}) \mathbf{n} + \gamma_T(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega),$$

donde  $\mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma) = \{\phi \in H^{1/2}(\Gamma); \gamma_n(\phi) = 0\}$ . Además, si  $\mathbf{v} \in [\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})]^n$ ,  $\gamma_n(\mathbf{v}) = \mathbf{v}|_{\Gamma} \cdot \mathbf{n}$  y  $\gamma_T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}|_{\Gamma} - \gamma_n(\mathbf{v}) \mathbf{n}$ . Las aplicaciones  $\gamma_n$  y  $\gamma_T$  son sobreyectivas. En lo que sigue, para simplificar la escritura,  $v_n$  y  $\mathbf{v}_T$  denotarán las trazas normales de  $\mathbf{v}$ ,  $\gamma_n(\mathbf{v})$  y  $\gamma_T(\mathbf{v})$ , respectivamente.

Sea  $V$  el espacio definido por

$$V = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega); \gamma(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma_D\},$$

y

$$V_{ad} = \{\mathbf{v} \in V; v_n \leq 0 \text{ sobre } \Gamma_C\},$$

el subconjunto convexo y cerrado de desplazamientos admisibles.

Denotamos por  $\gamma_\Sigma^0 : V \rightarrow \mathbf{H}^{1/2}(\Sigma)$  al operador traza que relaciona  $\mathbf{v} \in V$  con la restricción de  $\gamma(\mathbf{v})$  a  $\Sigma$ . Este operador, que lleva  $V$  en  $\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Sigma)$  es lineal, continuo y sobreyectivo para fronteras  $\partial\Sigma$  que son  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Lema 2.1.1** *Si el dominio  $\Omega$  es  $\mathcal{C}^{1,1}$  existen aplicaciones lineales, continuas y sobreyectivas*

$$\gamma_{\Sigma_n}^0 : V \rightarrow H_{00}^{1/2}(\Sigma), \quad \gamma_{\Sigma_T}^0 : V \rightarrow \mathbf{H}_{T00}^{1/2}(\Sigma),$$

con  $\mathbf{H}_{T00}^{1/2}(\Sigma) = \{\phi \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Sigma); \phi_n = 0\}$  y tales que

$$\gamma_\Sigma^0(\mathbf{v}) = \gamma_{\Sigma_n}^0(\mathbf{v})\mathbf{n} + \gamma_{\Sigma_T}^0(\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in V.$$

□

Consideramos el espacio de campos de tensiones

$$X = \{\boldsymbol{\tau} = (\tau_{\alpha\beta}) \in [L^2(\Omega)]^{n^2}; \tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}\}, \quad (2.1.16)$$

que dotado con la norma

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_X = \left( \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau} dV_X \right)^{1/2}, \quad (2.1.17)$$

es un espacio de Hilbert.

Sea  $E$  el subespacio de  $X$  definido por

$$E = \{\boldsymbol{\tau} \in X; \text{Div}(\boldsymbol{\tau}) \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}, \quad (2.1.18)$$

que también es un espacio de Hilbert con la norma

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_E = \|\boldsymbol{\tau}\|_X + \|\text{Div}(\boldsymbol{\tau})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \quad (2.1.19)$$

**Lema 2.1.2** Sea  $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ . Existe una única aplicación,  $\pi$ , lineal continua de  $E$  en  $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$  tal que

$$\pi(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\tau}|_{\Gamma}\mathbf{n}, \text{ si } \boldsymbol{\tau} \in [\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})]^{n^2}.$$

Además, la siguiente fórmula de Green generalizada se verifica para cada  $\boldsymbol{\tau} \in E$  y cada  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dV_X + \int_{\Omega} \text{Div}(\boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{v} dV_X = \langle \pi(\boldsymbol{\tau}), \gamma(\mathbf{v}) \rangle_{\Gamma}, \quad (2.1.20)$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$  denota el producto de dualidad en  $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \times \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ .  $\square$

**Lema 2.1.3** Si  $\Omega \in \mathcal{C}^{1,1}$ , existen aplicaciones determinadas de modo único  $\pi_n$  de  $E$  en  $H^{-1/2}(\Gamma)$  y  $\pi_T$  de  $E$  en  $\mathbf{H}_T^{-1/2}(\Gamma)$  tales que

$$\langle \pi(\boldsymbol{\tau}), \gamma(\mathbf{v}) \rangle_{\Gamma} = \langle \pi_n(\boldsymbol{\tau}), v_n \rangle_{n,\Gamma} + \langle \pi_T(\boldsymbol{\tau}), \mathbf{v}_T \rangle_{T,\Gamma},$$

para cada  $\boldsymbol{\tau} \in E$  y  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ , y

$$\pi_n(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\tau}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \quad \text{y} \quad \pi_T(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\tau}\mathbf{n} - \tau_n\mathbf{n},$$

para  $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ , donde  $\tau_n \equiv \pi_n(\boldsymbol{\tau})$ . En lo que sigue, denotaremos simplemente  $\boldsymbol{\tau}_T \equiv \pi_T(\boldsymbol{\tau})$  si no hay lugar a confusión.  $\square$

Estos resultados pueden extenderse al espacio  $V$  usando la aplicación traza  $\pi_{\Sigma}^0$  en lugar de  $\pi$ , del siguiente modo:

**Teorema 2.1.4** Sea  $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ . Entonces existe una aplicación lineal determinada de forma única  $\pi_{\Sigma}^0$  de  $E$  en  $(\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Sigma))'$  tal que

$$\pi_{\Sigma}^0(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\tau}|_{\Sigma}\mathbf{n} \text{ si } \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}),$$

y la fórmula de Green generalizada se cumple para cada  $\boldsymbol{\tau} \in E$  y cada  $\mathbf{v} \in V$

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dV_X + \int_{\Omega} \text{Div} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} dV_X = {}_{00}\langle \pi_{\Sigma}^0(\boldsymbol{\tau}), \gamma_{\Sigma}^0(\mathbf{v}) \rangle_{\Sigma}, \quad (2.1.21)$$

donde  ${}_{00}\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Sigma}$  denota el producto de dualidad en  $(H_{00}^{1/2}(\Sigma))' \times H_{00}^{1/2}(\Sigma)$ .

Además, si  $\Omega \in \mathcal{C}^{1,1}$ ,  $\pi_{\Sigma}^0$  puede descomponerse en operadores  $\pi_{\Sigma_n}^0$  y  $\pi_{\Sigma_T}^0$  tales que

$${}_{00}\langle \pi_{\Sigma}^0(\boldsymbol{\tau}), \gamma_{\Sigma}^0(\mathbf{v}) \rangle_{\Sigma} = {}_{00}\langle \pi_{\Sigma_n}^0(\boldsymbol{\tau}), \gamma_{\Sigma_n}^0(\mathbf{v}) \rangle_{n,\Sigma} + {}_{00}\langle \pi_{\Sigma_T}^0(\boldsymbol{\tau}), \gamma_{\Sigma_T}^0(\mathbf{v}) \rangle_{T,\Sigma},$$

para cada  $\boldsymbol{\tau} \in E$  y  $\mathbf{v} \in V$ , y

$$\pi_{\Sigma_n}^0(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\tau}|_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \quad \text{y} \quad \pi_{\Sigma_T}^0(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\tau}|_{\Sigma} \mathbf{n} - \tau_{n,\Sigma} \mathbf{n},$$

para  $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ , donde  $\tau_{n,\Sigma} \equiv \pi_{\Sigma_n}^0(\boldsymbol{\tau})$ .  $\square$

Este resultado también es cierto considerando un subconjunto abierto  $\hat{\Sigma} \subset \Sigma$  con propiedades similares a  $\Sigma$  y  $\mathbf{v}$  tal que  $\gamma(\mathbf{v}) \in H_{00}^{1/2}(\hat{\Sigma})$ .

**Proposición 2.1.5** (Fernandes y Gilardi [33]) Sean  $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$  y  $\Gamma_1, \Gamma_2$  dos subconjuntos de  $\Gamma$  abiertos, no vacíos, con frontera  $\mathcal{C}^0$  en la dimensión  $n-1$  y tales que  $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$ . Entonces  $\boldsymbol{\psi}|_{\Gamma_1}$  pertenece a  $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$  si y solo si  $\boldsymbol{\psi}|_{\Gamma_2}$  pertenece a  $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_2)$ . Además, si se cumple lo anterior, tenemos

$$\langle \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi} \rangle_{\Gamma} = \langle \boldsymbol{\psi}|_{\Gamma_1}, \boldsymbol{\phi}|_{\Gamma_1} \rangle_{\Gamma_1} + \langle \boldsymbol{\psi}|_{\Gamma_2}, \boldsymbol{\phi}|_{\Gamma_2} \rangle_{\Gamma_2}, \quad \forall \boldsymbol{\phi} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma).$$

$\square$

Como consecuencia de la Proposición anterior, obtenemos el siguiente resultado.

**Corolario 2.1.6** Si  $\pi(\boldsymbol{\tau})|_{\Gamma_N} \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_N)$  entonces  $\pi(\boldsymbol{\tau})|_{\Gamma_D \cup \Gamma_C} \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_D \cup \Gamma_C)$ . Además, si  $\bar{\Gamma}_D \cap \bar{\Gamma}_C = \emptyset$ ,  $\pi(\boldsymbol{\tau})|_{\Gamma_D} \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_D)$ ,  $\pi(\boldsymbol{\tau})|_{\Gamma_C} \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_C)$  y se cumple la siguiente descomposición:

$$\begin{aligned} \langle \pi(\boldsymbol{\tau}), \boldsymbol{\phi} \rangle_{\Gamma} &= \langle \pi(\boldsymbol{\tau})|_{\Gamma_N}, \boldsymbol{\phi}|_{\Gamma_N} \rangle_{\Gamma_N} + \langle \pi(\boldsymbol{\tau})|_{\Gamma_C}, \boldsymbol{\phi}|_{\Gamma_C} \rangle_{\Gamma_C} \\ &\quad + \langle \pi(\boldsymbol{\tau})|_{\Gamma_D}, \boldsymbol{\phi}|_{\Gamma_D} \rangle_{\Gamma_D}, \quad \forall \boldsymbol{\phi} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma). \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

### 2.1.1.1. Condiciones de frontera

Sea  $\mathbf{s}_0 \in \mathbf{L}^2(\Gamma_N)$ , entonces consideraremos las siguientes definiciones:

- Dado  $\boldsymbol{\tau} \in E$ , diremos que  $\boldsymbol{\tau}\mathbf{n} = \mathbf{s}_0$  sobre  $\Gamma_N$  si

$$\langle \pi(\boldsymbol{\tau}), \tilde{\boldsymbol{\phi}} \rangle_{\Gamma} = \int_{\Gamma_N} \mathbf{s}_0 \cdot \boldsymbol{\phi} dA_X, \quad \forall \boldsymbol{\phi} \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_N), \quad (2.1.23)$$

siendo  $\tilde{\boldsymbol{\phi}}$  la extensión trivial de  $\boldsymbol{\phi}$  a  $\Gamma$ .

- Dado  $\boldsymbol{\tau} \in E$ , diremos que  $\boldsymbol{\tau}_T = \mathbf{0}$  sobre  $\Gamma_C$  si

$$\langle \pi(\boldsymbol{\tau}), \tilde{\boldsymbol{\phi}} \rangle_{\Gamma} = 0, \quad \forall \boldsymbol{\phi} \in \mathbf{H}_{T00}^{1/2}(\Gamma_C). \quad (2.1.24)$$

- Dada  $\phi \in H_{00}^{1/2}(\Sigma)$ , diremos que  $\phi$  es negativa sobre  $\Gamma_C$  en el sentido de  $H_{00}^{1/2}(\Sigma)$  o simplemente  $\phi \leq 0$  sobre  $\Gamma_C$  si existe una sucesión  $\{\phi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  de funciones Lipschitz continuas tales que

$$\phi_m(\mathbf{X}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{X} \in \Gamma_C, \quad \text{y} \quad \phi_m \rightharpoonup \phi \quad \text{débilmente en} \quad H_{00}^{1/2}(\Sigma).$$

- Dado  $\boldsymbol{\tau} \in E$ , diremos que  $\tau_n \leq 0$  sobre  $\Gamma_C$  si

$$\langle \pi(\boldsymbol{\tau}), \tilde{\boldsymbol{\phi}} \rangle_{\Gamma} \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\phi} \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_C) \text{ tal que } \boldsymbol{\phi}_T = \mathbf{0} \text{ y } \phi_n \leq 0 \text{ sobre } \Gamma_C. \quad (2.1.25)$$

- Dada  $\phi \in H_{00}^{1/2}(\Sigma)$  tal que  $\phi \leq 0$  en  $\Gamma_C$ , diremos que  $\phi(\mathbf{X}_0) < 0$ ,  $\mathbf{X}_0 \in \Gamma_C$  si existen  $\alpha \in C^1(\bar{\Omega})$  y  $r > 0$  tales que  $B(x_0, 2r) \cap \Gamma_D = \emptyset$ ,  $\alpha \geq 0$  sobre  $\bar{\Omega}$ ,  $\alpha > 0$  sobre  $B(x_0, r) \cap \bar{\Omega}$ ,  $\alpha = 0$  sobre  $\bar{\Omega} \setminus B(x_0, 2r)$  y  $\alpha + \phi \leq 0$  sobre  $\Gamma_C$ .

- Dado  $\boldsymbol{\tau} \in E$ , tal que  $\tau_n \leq 0$  sobre  $\Gamma_C$ , diremos que  $\tau_n < 0$  sobre un conjunto  $B \subset \Gamma_C$  con  $\text{med}_{n-1}(B) > 0$  si

$$\langle \pi(\boldsymbol{\tau}), \tilde{\boldsymbol{\phi}} \rangle_{\Gamma} > 0, \quad \forall \boldsymbol{\phi} \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_C) \text{ tal que } \boldsymbol{\phi}_T = \mathbf{0}, \phi_n \leq 0 \text{ sobre } \Gamma_C$$

y  $\phi_n < 0$  sobre un subconjunto  $D \subset B$ ,  $\text{med}_{n-1}(D) > 0$ .

- Dada cualquier función  $\mathbf{s}_0 \in \mathbf{L}^2(\Gamma_N)$ ,  $E_{ad}(\mathbf{s}_0)$  denotará el conjunto de tensiones admisibles

$$E_{ad}(\mathbf{s}_0) = \{\boldsymbol{\tau} \in E; \boldsymbol{\tau}_T = \mathbf{0} \text{ y } \tau_n \leq 0 \text{ sobre } \Gamma_C; \boldsymbol{\tau}\mathbf{n} = \mathbf{s}_0 \text{ sobre } \Gamma_N\}.$$

- Dado  $\boldsymbol{\tau} \in E$  tal que  $\pi_n(\boldsymbol{\tau})|_{\Gamma_C} \in H^{-1/2}(\Gamma_C)$ , y dado  $\mathbf{u} \in V$ , diremos que  $\tau_n u_n = 0$  débilmente sobre  $\Gamma_C$  si

$$\langle \pi_n(\boldsymbol{\tau})|_{\Gamma_C}, \gamma_n(\mathbf{u})|_{\Gamma_C} \rangle_{\Gamma_C} = 0. \quad (2.1.26)$$

**Observación 2.1.7** Puesto que  $\mathbf{s}_0 \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_N)$ ,  $\pi_{\Gamma_N}^0(\boldsymbol{\tau})$  es un funcional lineal continuo sobre  $\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_N)$  dotado con la norma de  $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_N)$ . Y, puesto que  $\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_N)$  es denso en  $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_N)$ , entonces  $\pi_{\Gamma_N}^0(\boldsymbol{\tau}) \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_N)$ . Por tanto, la definición (2.1.23) implica que  $\pi_{\Gamma_N}^0(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{s}_0$  en  $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_N)$  (de hecho, puesto que  $\mathbf{s}_0 \in L^2(\Gamma_N)$  podemos afirmar que  $\pi_{\Gamma_N}^0(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{s}_0$  para casi todo  $\mathbf{X} \in \Gamma_N$ ) y entonces,  $\pi_{\Gamma \setminus \Gamma_N}^0(\boldsymbol{\tau}) \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma \setminus \Gamma_N)$  y (2.1.22) se verifica.

A continuación, extenderemos estas definiciones para funciones dependientes del tiempo. Para ello, denotamos por

$$Q = \Omega \times (0, T), \quad \text{y} \quad \Upsilon = \Gamma \times (0, T). \quad (2.1.27)$$

**Definición 2.1.8** Dado  $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{D}'(0, T; E)$ , diremos que  $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{D}'(0, T; E_{ad}(\mathbf{s}_0))$  si se verifican las relaciones (2.1.23), (2.1.24) y (2.1.25) en el sentido de  $\mathcal{D}'(0, T)$ .

**Definición 2.1.9** Dada  $\phi \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Sigma \times (0, T))$  tal que  $\phi \leq 0$  sobre  $\Gamma_C \times [0, T]$ , diremos que  $\phi(\mathbf{X}_0, t_0) < 0$  en  $(\mathbf{X}_0, t_0) \in \Gamma_C \times (0, T)$  si existen  $\alpha \in C^1(\bar{Q})$  y  $r > 0$  tales que:

- $B((\mathbf{X}_0, t_0), 2r) \cap (\Gamma_D \times (0, T)) = \emptyset$ ,
- $\alpha \geq 0$  sobre  $\bar{Q}$ ,
- $\alpha > 0$  sobre  $B((\mathbf{X}_0, t_0), r) \cap \bar{Q}$ ,

- $\alpha = 0$  sobre  $\bar{Q} \setminus B((\mathbf{X}_0, t_0), 2r)$ ,
- $\alpha + \phi \leq 0$  sobre  $\Gamma_C \times (0, T)$ .

**Proposición 2.1.10** Dada  $\phi \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Sigma \times [0, T])$  tal que  $\phi \leq 0$  sobre  $\Gamma_C \times [0, T]$ , el conjunto  $K = \{(\mathbf{X}, t) \in \Gamma_C \times (0, T) / \phi(\mathbf{X}, t) < 0\}$  es un conjunto abierto.

*Demostración.* Sea  $(\mathbf{X}_0, t_0) \in K$ . Veremos que existe un radio  $r_0 > 0$  tal que  $B((\mathbf{X}_0, t_0), r_0) \subset K$ .

Puesto que  $(\mathbf{X}_0, t_0) \in K$ , existe  $r > 0$  y  $\alpha \in C^1(\bar{Q})$  tal que:  $B((\mathbf{X}_0, t_0), 2r) \cap (\Gamma_D \times (0, T)) = \emptyset$ ,  $\alpha \geq 0$  sobre  $\bar{Q}$ ,  $\alpha > 0$  sobre  $B((\mathbf{X}_0, t_0), r) \cap \bar{Q}$ ,  $\alpha = 0$  sobre  $\bar{Q} \setminus B((\mathbf{X}_0, t_0), 2r)$  y  $\alpha + \phi \leq 0$  sobre  $\Gamma_C \times (0, T)$ .

Sea  $r_0 = r$  y sea  $(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{t}) \in B((\mathbf{X}_0, t_0), r_0)$ . Vamos a probar que  $(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{t}) \in K$ . En efecto, sean

$$d = \frac{1}{2} \text{dist}((\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{t}), \partial B((\mathbf{X}_0, t_0), r_0)) \quad \text{y} \quad \tilde{\alpha} = \alpha f,$$

con  $f \in C^\infty(\bar{Q})$  tal que  $1 \geq f \geq 0$  sobre  $\bar{Q}$ ,  $f = 1$  sobre  $B((\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{t}), d)$  y  $f = 0$  sobre  $\bar{Q} \setminus B((\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{t}), 2d)$ . Se tiene que  $\tilde{\alpha} + \phi \leq \alpha + \phi \leq 0$  sobre  $\Gamma_C \times (0, T)$  y  $\tilde{\alpha}$  y  $d$  están en las condiciones de la Definición 2.1.9. Por tanto,

$$\phi(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{t}) < 0 \quad \forall (\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{t}) \in B((\mathbf{X}_0, t_0), r_0)$$

y en consecuencia,  $K$  es abierto. □

A partir de la Definición (2.1.9), podemos diferenciar los siguientes dos conjuntos sobre  $\Gamma_C \times [0, T]$ .

Sea  $I_C$  el conjunto cerrado de  $\Gamma_C \times (0, T)$  donde  $\gamma_\nu(\mathbf{u})(\mathbf{X}, t) < 0$  no se verifica, siendo  $\gamma_\nu$  la aplicación traza normal sobre  $\Upsilon$ . Entonces, diremos que  $u_n = 0$  sobre  $I_C$ . El conjunto  $I_C$  representa la *superficie de apoyo efectivo* en la zona de posible contacto, y sea  $\mathcal{N}_I$  su complementario en  $\Gamma_C \times (0, T)$ :

$$\mathcal{N}_I = \{(\mathbf{X}, t) \in \Gamma_C \times (0, T); \gamma_\nu(\mathbf{u})(\mathbf{X}, t) < 0\}. \quad (2.1.28)$$

$\mathcal{N}_I$  representa la zona de  $\Gamma_C \times (0, T)$  donde hay una separación entre el cuerpo y la base rígida.

**Definición 2.1.11** Diremos que  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$  es una solución  $\delta$ -débil del problema (P) si:

- El desplazamiento,  $\mathbf{u}$ , verifica

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; V_{ad}) \cap W^{1, \infty}(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)), \quad (2.1.29)$$

- el tensor de tensiones,  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$  es tal que

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \in \mathcal{D}'(0, T; E_{ad}(\mathbf{s}_0)), \quad (2.1.30)$$

- y la condición de compatibilidad se verifica en el sentido  $\delta$ -débil siguiente: Para todo  $\delta > 0$  existe un conjunto  $D_\delta \subset \Upsilon$  tal que  $\text{med}(\Upsilon \setminus D_\delta) < \delta$  y

$$\boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{u}) = 0, \text{ sobre } \mathcal{N}_{I_\delta} = (\mathcal{N}_I \cap D_\delta)^\circ. \quad (2.1.31)$$

## 2.2. Discretización en tiempo

Sea  $I$  un número natural. Consideremos una partición regular del intervalo de tiempo  $[0, T]$  en  $2^I$  subintervalos de longitud  $\Delta t^I = T/2^I$  y denotemos por  $t_i^I$  el instante de tiempo  $i\Delta t^I$ , siendo  $i \in \{0, 1, 2, \dots, 2^I\}$ . De ahora en adelante, dada cualquier función  $\mathbf{h}$  denotaremos por  $\mathbf{h}^i$  su aproximación en el instante  $t_i^I$ . En los casos en que no haya lugar a confusión, se omitirá el superíndice  $I$  en  $\Delta t^I$  y en  $t_i^I$ .

**Observación 2.2.1** Nótese que dadas dos particiones  $I$  e  $I + m$ , se cumple que

$$\{t_i^I\}_{0 \leq i \leq 2^I} \subset \{t_j^{I+m}\}_{0 \leq j \leq 2^{I+m}}, \quad \Delta t^I = 2^m \Delta t^{I+m}, \quad t_i^I = t_{2^m i}^{I+m}, \quad \forall 0 \leq i \leq 2^I. \quad (2.2.1)$$

Conocidos  $\mathbf{u}^k$ ,  $\dot{\mathbf{u}}^k$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, i - 1$ , aproximamos el desplazamiento solución del Problema (HP) en el instante  $t_i$  por la solución del siguiente

problema:

Hallar  $\mathbf{u}^i \in V_{ad}$  tal que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2} \right) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}^i) dV_X + \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \left( \frac{\mathbf{u}^i + \mathbf{u}^{i-1}}{2} \right) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}^i) dV_X \\ & \geq \int_{\Omega} \boldsymbol{\chi}^i : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}^i) dV_X, \quad \forall \mathbf{v} \in V_{ad}, \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

siendo  $\boldsymbol{\chi}^i = \boldsymbol{\chi}(t_i)$  y donde la relación entre los campos discretos de desplazamiento, velocidad y aceleración se enmarcan en el método de Newmark (ver Huges [49]) con parámetros  $\beta = 1/4$ ,  $\gamma = 1/2$  como sigue:

$$\mathbf{u}^i = \mathbf{u}^{i-1} + \Delta t \dot{\mathbf{u}}^{i-1} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2}, \quad (2.2.3)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^i = \dot{\mathbf{u}}^{i-1} + \Delta t \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2}. \quad (2.2.4)$$

De (2.2.3), puede obtenerse la expresión de la aceleración en el instante  $t_i$  como

$$\ddot{\mathbf{u}}^i = \frac{4[\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i-1} - \Delta t \dot{\mathbf{u}}^{i-1} - \frac{\Delta t^2}{4} \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}]}{\Delta t^2}, \quad (2.2.5)$$

lo que nos permite escribir la inecuación variacional (2.2.2) solo en términos del desplazamiento. Así, consideramos el siguiente algoritmo:

- En el instante inicial,  $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$  y  $\dot{\mathbf{u}}^0 = \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{u}_1$ , mientras que la aceleración  $\ddot{\mathbf{u}}^0$  se calcula a partir de la ecuación de equilibrio como

$$\ddot{\mathbf{u}}^0 = \frac{1}{\rho_0} (\mathbf{b}_0^0 + \text{Div } \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0)), \quad (2.2.6)$$

con  $\mathbf{b}_0^0 = \mathbf{b}_0(0)$ . Obsérvese que  $\ddot{\mathbf{u}}^0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ .

- Para cada paso de tiempo  $t_i$ , dados  $\mathbf{u}^{i-1}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}^{i-1}$  y  $\ddot{\mathbf{u}}^{i-1}$  obtenemos  $\mathbf{u}^i$  como la solución del siguiente problema variacional obtenido reemplazando en (2.2.2) el valor  $\ddot{\mathbf{u}}^i$  dado por (2.2.5):

**PROBLEMA (DHP<sup>i</sup>):** Hallar  $\mathbf{u}^i \in V_{ad}$  tal que:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{u}^i \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}^i) dV_X + \frac{\Delta t^2}{4} \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^i) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}^i) dV_X \\ & \geq \int_{\Omega} \rho_0 [\mathbf{u}^{i-1} + \Delta t \dot{\mathbf{u}}^{i-1}] \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}^i) dV_X + \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\chi}^i : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}^i) dV_X \\ & - \frac{\Delta t^2}{4} \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{i-1}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}^i) dV_X, \quad \forall \mathbf{v} \in V_{ad}. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

- A continuación, dado  $\mathbf{u}^{i-1}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}^{i-1}$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}^{i-1}$  y  $\mathbf{u}^i$ , obtenemos  $\ddot{\mathbf{u}}^i$  y  $\dot{\mathbf{u}}^i$  usando primero (2.2.5) y después (2.2.4). De nuevo, conocemos  $\mathbf{u}^i$ ,  $\dot{\mathbf{u}}^i$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}^i$  en  $t_i$  y repetimos el proceso para el siguiente paso de tiempo.

**Teorema 2.2.2** *Sea  $\mathbf{u}^{i-1} \in V_{ad}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}^{i-1} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  y  $\ddot{\mathbf{u}}^{i-1} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ . Entonces, existe una única solución  $\mathbf{u}^i$  del Problema (DHP<sup>i</sup>). Además,  $\dot{\mathbf{u}}^i$  y  $\ddot{\mathbf{u}}^i$  construidas a partir de las relaciones (2.2.4) y (2.2.5) verifican:*

$$\dot{\mathbf{u}}^i \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad \ddot{\mathbf{u}}^i \in \mathbf{L}^2(\Omega), \quad \text{y} \quad \ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1} \in \mathbf{H}^1(\Omega). \quad (2.2.8)$$

*Demostración.* Considerando la forma bilineal, continua y coerciva definida sobre  $V \times V$  como,

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dV_X + \frac{\Delta t^2}{4} \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dV_X, \quad (2.2.9)$$

y la aplicación lineal definida sobre  $V$ ,

$$\begin{aligned} L(\mathbf{v}) &= \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\chi}^i : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dV_X + \int_{\Omega} \rho_0 [\mathbf{u}^{i-1} + \Delta t \dot{\mathbf{u}}^{i-1}] \cdot \mathbf{v} \, dV_X \\ &\quad - \frac{\Delta t^2}{4} \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{i-1}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dV_X, \end{aligned}$$

el resultado de existencia y unicidad se obtiene aplicando el teorema de Stampacchia (ver Brézis[15]). Ahora, puesto que  $\mathbf{u}^i$ ,  $\mathbf{u}^{i-1}$  y  $\dot{\mathbf{u}}^{i-1}$  pertenecen a  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ , de (2.2.3) obtenemos que  $\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ . Así, puesto que  $\ddot{\mathbf{u}}^{i-1} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ , deducimos que  $\ddot{\mathbf{u}}^i \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ . Además, de (2.2.4) tenemos  $\dot{\mathbf{u}}^i \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ .  $\square$

**Observación 2.2.3** *Las hipótesis consideradas sobre las condiciones iniciales garantizan que  $\mathbf{u}^0 \in V_{ad}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}^0 \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  y  $\ddot{\mathbf{u}}^0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ . Por tanto, el Teorema 2.2.2 garantiza que los campos de desplazamientos, velocidades y aceleraciones calculados con el algoritmo diseñado verifican propiedades análogas, para todo  $0 \leq i \leq 2^I$ .*

Para escribir el problema discreto con una estructura similar a la del problema continuo (HP) definimos

**PROBLEMA (ADHP<sup>i</sup>):** Hallar  $\mathbf{u}^i \in V_{ad}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}^i \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  y  $\ddot{\mathbf{u}}^i \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  verificando (2.2.4), (2.2.5) y la desigualdad:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2} \right) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}^i) dV_X + \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \left( \frac{\mathbf{u}^i + \mathbf{u}^{i-1}}{2} \right) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}^i) dV_X \\ & \geq \int_{\Omega} \boldsymbol{\chi}^i : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}^i) dV_X, \quad \forall \mathbf{v} \in V_{ad}. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Se verifica el siguiente corolario.

**Corolario 2.2.4** Sean  $\mathbf{u}^{i-1} \in V_{ad}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}^{i-1} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  y  $\ddot{\mathbf{u}}^{i-1} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  conocidos. Si  $\mathbf{u}^i$ ,  $\dot{\mathbf{u}}^i$  y  $\ddot{\mathbf{u}}^i$  son solución del Problema (ADHP<sup>i</sup>) entonces,  $\mathbf{u}^i$  es la solución del Problema (DHP<sup>i</sup>).

Recíprocamente, si  $\mathbf{u}^i$  es la solución del Problema (DHP<sup>i</sup>) y  $\dot{\mathbf{u}}^i$  y  $\ddot{\mathbf{u}}^i$  están definidas por (2.2.4) y (2.2.5), entonces  $\mathbf{u}^i$ ,  $\dot{\mathbf{u}}^i$  y  $\ddot{\mathbf{u}}^i$  son la solución del Problema (ADHP<sup>i</sup>).

### 2.2.1. Propiedades de $\mathbf{u}^i$

En primer lugar, para simplificar la notación, denotaremos

$$\mathbf{h}^i = \frac{\mathbf{u}^i + \mathbf{u}^{i-1}}{2}. \quad (2.2.11)$$

**Proposición 2.2.5** Sea  $\mathbf{u}^i$  la solución del Problema (DHP<sup>i</sup>) y  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i) = \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h}^i) - \boldsymbol{\chi}^i$ . Entonces, se verifica la siguiente ecuación:

$$\rho_0 \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2} - \text{Div } \boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i) = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega, \quad (2.2.12)$$

donde  $\ddot{\mathbf{u}}^i$  se calcula usando la ecuación (2.2.5). Además,  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i) \in E_{ad}(\mathbf{0})$ .

*Demostración.* Sea  $\mathbf{u}^i$  la solución del Problema (DHP<sup>i</sup>). Del Corolario 2.2.4,  $\mathbf{u}^i$  verifica (2.2.10). Tomando  $\mathbf{v} = \mathbf{u}^i \pm \boldsymbol{\phi}$ , con  $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}(\Omega)$ , en (2.2.10) tenemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2} \right) \cdot \boldsymbol{\phi} dV_X + \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h}^i) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}) dV_X \\ & = \int_{\Omega} \boldsymbol{\chi}^i : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}) dV_X, \quad \forall \boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}(\Omega), \end{aligned}$$

y en consecuencia, (2.2.12) es cierta en el sentido de las distribuciones.

Puesto que  $\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  deducimos que  $\text{Div } \boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i) \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  y, en consecuencia,  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i) \in E$ .

Ahora, veremos que  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i) \in E_{ad}(\mathbf{0})$ .

Tomando  $\mathbf{v} = \mathbf{u}^i + \boldsymbol{\phi}$  en (2.2.10) con  $\boldsymbol{\phi} \in V_{ad}$  y aplicando la fórmula de Green (2.1.20), podemos escribir

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2} \right) \cdot \boldsymbol{\phi} dV_X - \int_{\Omega} \text{Div } \boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i) \cdot \boldsymbol{\phi} dV_X \\ & \geq - \langle \pi(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i)), \gamma(\boldsymbol{\phi}) \rangle_{\Gamma}, \quad \forall \boldsymbol{\phi} \in V_{ad}. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Además, si  $-\boldsymbol{\phi}$  también pertenece a  $V_{ad}$  se cumple la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2} \right) \cdot \boldsymbol{\phi} dV_X - \int_{\Omega} \text{Div } \boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i) \cdot \boldsymbol{\phi} dV_X \\ & = - \langle \pi(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i)), \gamma(\boldsymbol{\phi}) \rangle_{\Gamma}, \quad \forall \boldsymbol{\phi} \in V_{ad}, \quad \text{tal que } -\boldsymbol{\phi} \in V_{ad}. \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

En primer lugar, sea  $\boldsymbol{\phi} \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_N)$  y  $\tilde{\boldsymbol{\phi}}$  su extensión por cero. Entonces, existe  $\hat{\boldsymbol{\phi}} \in V_{ad}$  tal que  $\gamma(\hat{\boldsymbol{\phi}}) = \tilde{\boldsymbol{\phi}}$  y se cumple (2.2.14). Multiplicando (2.2.12) por  $\hat{\boldsymbol{\phi}}$  e integrando sobre  $\Omega$  obtenemos

$$\int_{\Omega} \rho_0 \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2} \right) \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} dV_X - \int_{\Omega} \text{Div } \boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i) \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} dV_X = 0.$$

Comparando esta igualdad con (2.2.14) se tiene que

$$\langle \pi(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i)), \tilde{\boldsymbol{\phi}} \rangle_{\Gamma} = 0, \quad \forall \boldsymbol{\phi} \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_N),$$

y, en consecuencia,  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i)\mathbf{n} = \mathbf{0}$  sobre  $\Gamma_N$ .

A continuación, eligiendo  $\boldsymbol{\phi} \in \mathbf{H}_{T00}^{1/2}(\Gamma_C)$ , de nuevo se cumple (2.2.14). Siguiendo el mismo procedimiento anterior,

$$\langle \pi(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i)), \tilde{\boldsymbol{\phi}} \rangle_{\Gamma} = 0, \quad \forall \boldsymbol{\phi} \in \mathbf{H}_{T00}^{1/2}(\Gamma_C),$$

de lo que obtenemos que  $\boldsymbol{\eta}_T(\mathbf{h}^i) = \mathbf{0}$  sobre  $\Gamma_C$ .

Finalmente, tomando  $\boldsymbol{\phi} \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_C)$ ,  $\boldsymbol{\phi}_T = 0$  y  $\phi_n \leq 0$  se puede probar fácilmente que

$$\langle \pi(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i)), \tilde{\boldsymbol{\phi}} \rangle_{\Gamma} \geq 0,$$

de donde,  $\eta_n(\mathbf{h}^i) \leq 0$  sobre  $\Gamma_C$ , y podemos concluir que  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i) \in E_{ad}(\mathbf{0})$ .  $\square$

**Corolario 2.2.6** Sea  $\mathbf{u}^i$  la solución de **(DHP<sup>i</sup>)** y  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{h}^i) = \Lambda^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h}^i)$ . Entonces,

$$\rho_0 \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2} - \text{Div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{h}^i) = \mathbf{b}_0^i \quad \text{en } \Omega, \quad (2.2.15)$$

donde  $\ddot{\mathbf{u}}^i$  se calcula usando las relaciones (2.2.3) y (2.2.4),  $\mathbf{b}_0^i = \mathbf{b}_0(t_i)$  y  $\mathbf{h}^i$  viene dada por (2.2.11). Además,  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{h}^i) \in E_{ad}(\mathbf{s}_0^i)$ .

*Demostración.* El resultado es consecuencia directa de la relación  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{h}^i) - \boldsymbol{\chi}^i$  y de que  $\boldsymbol{\chi}^i = \boldsymbol{\chi}(t_i)$  sea solución de (2.1.7)–(2.1.9) en el instante  $t_i$ .  $\square$

**Proposición 2.2.7** Sea  $\mathbf{u}^i, \dot{\mathbf{u}}^i, \ddot{\mathbf{u}}^i$  la solución del Problema **(ADHP<sup>i</sup>)** y  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i) = \Lambda^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h}^i) - \boldsymbol{\chi}^i$ . Entonces se verifica (2.2.12),  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i) \in E_{ad}(\mathbf{0})$  y

$$\pi_n(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i))u_n^i = 0 \quad \text{débilmente sobre } \Gamma_C, \quad (2.2.16)$$

en el sentido dado por (2.1.26).

*Demostración.* Gracias a la Proposición 2.2.5, es evidente que la ecuación (2.2.12) se cumple y  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i) \in E_{ad}(\mathbf{0})$ . Queda por comprobar que (2.2.16) es cierta. Multiplicando (2.2.12) por  $\mathbf{v} - \mathbf{u}^i$ , integrando en  $\Omega$  y aplicando la fórmula de Green se tiene

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2} \right) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}^i) dV_X + \int_{\Omega} \boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}^i) dV_X \\ & = \langle \pi(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i)), \gamma(\mathbf{v} - \mathbf{u}^i) \rangle_{\Gamma}, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Además, como  $\mathbf{u}^i$  es solución, verifica (2.2.10) y por tanto,

$$\int_{\Omega} \rho_0 \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2} \right) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}^i) dV_X + \int_{\Omega} \boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}^i) dV_X \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V_{ad}. \quad (2.2.18)$$

de donde

$$\langle \pi(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i)), \gamma(\mathbf{v} - \mathbf{u}^i) \rangle_{\Gamma} \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V_{ad}. \quad (2.2.19)$$

Por el Lema 2.1.3,

$$\begin{aligned} \langle \pi(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i)), \gamma(\mathbf{v} - \mathbf{u}^i) \rangle_{\Gamma} &= \langle \pi_n(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i)), (v - u^i)_n \rangle_{\Gamma} \\ &\quad + \langle \pi_T(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i)), (\mathbf{v} - \mathbf{u}^i)_T \rangle_{\Gamma}, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned}$$

Ahora bien, puesto que  $\gamma_n$  y  $\gamma_T$  son sobreyectivas, dados  $(h, \mathbf{q}) \in H^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)$ , existe  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  tal que  $v_n = h$  y  $\mathbf{v}_T = \mathbf{q}$ . Tomemos en particular  $h_1 = 2u_n^i$ ,  $h_2 = 1/2u_n^i$  y  $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2 = \mathbf{u}_T^i$ . Sustituyendo en la ecuación anterior y teniendo en cuenta (2.2.19) se tiene

$$0 \leq \langle \pi(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i)), \gamma(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}^i) \rangle_{\Gamma} = \langle \pi_n(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i)), u_n^i \rangle_{\Gamma}, \quad (2.2.20)$$

$$0 \leq \langle \pi(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i)), \gamma(\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}^i) \rangle_{\Gamma} = \langle \pi_n(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i)), -\frac{1}{2}u_n^i \rangle_{\Gamma}, \quad (2.2.21)$$

y, por tanto,

$$\langle \pi_n(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i)), u_n^i \rangle_{\Gamma} = 0. \quad (2.2.22)$$

Ahora, como  $\pi_n(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i)) \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_N)$ , por el Corolario 2.1.6,

$$\begin{aligned} \langle \pi_n(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i)), u_n^i \rangle_{\Gamma} &= \langle \pi_n(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i))|_{\Gamma_N}, u_n^i|_{\Gamma_N} \rangle_{\Gamma_N} \\ &\quad + \langle \pi_n(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i))|_{\Gamma_C}, u_n^i|_{\Gamma_C} \rangle_{\Gamma_C} + \langle \pi_n(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i))|_{\Gamma_D}, u_n^i|_{\Gamma_D} \rangle_{\Gamma_D}, \end{aligned}$$

y, en consecuencia,

$$\langle \pi_n(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i))|_{\Gamma_C}, u_n^i|_{\Gamma_C} \rangle_{\Gamma_C} = 0, \quad (2.2.23)$$

lo que implica (2.2.16) en el sentido dado por (2.1.26), ya que  $\pi_n(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i))|_{\Gamma_N} = 0$  en  $H^{-1/2}(\Gamma_N)$  y  $u_n^i|_{\Gamma_D} = 0$  en  $H^{1/2}(\Gamma_D)$ .  $\square$

**Corolario 2.2.8** Sea  $\mathbf{u}^i, \dot{\mathbf{u}}^i, \ddot{\mathbf{u}}^i$  la solución de (ADHP<sup>i</sup>) y  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{h}^i) = \Lambda^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h}^i)$ . Entonces se cumple (2.2.15),  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{h}^i) \in E_{ad}(\mathbf{s}_0^i)$  y

$$\langle \pi_n(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{h}^i))|_{\Gamma_C}, u_n^i|_{\Gamma_C} \rangle_{\Gamma_C} = 0. \quad (2.2.24)$$

*Demostración.* La demostración es trivial, usando la Proposición 2.2.7 y teniendo en cuenta que  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{h}^i) = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i) + \boldsymbol{\chi}^i$ , siendo  $\boldsymbol{\chi}^i$  una solución de (2.1.7)–(2.1.9) en el instante  $t_i$  y por tanto

$$\begin{aligned} \langle \pi_n(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i))|_{\Gamma_C}, u_n^i|_{\Gamma_C} \rangle_{\Gamma_C} &= \langle \pi_n(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{h}^i))|_{\Gamma_C}, u_n^i|_{\Gamma_C} \rangle_{\Gamma_C} \\ &\quad - \langle \pi_n(\boldsymbol{\chi}^i)|_{\Gamma_C}, u_n^i|_{\Gamma_C} \rangle_{\Gamma_C} = 0, \end{aligned}$$

y por la construcción de  $\boldsymbol{\chi}$  se obtiene el resultado.  $\square$

**Corolario 2.2.9** *Si existe  $A \subset \Gamma_C$  con  $\text{med}_{n-1}(A) > 0$  tal que  $u_n^i < 0$  sobre  $A$ , entonces  $\pi_n(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i)) = 0$  sobre  $A$ .*

*Demostración.* Supongamos que existe un subconjunto  $B \subset A$  con  $\text{med}_{n-1}(B) > 0$  tal que  $\pi_n(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i)) < 0$  sobre  $B$ . Entonces, para todo  $D \subset B$  con  $\text{med}_{n-1}(D) > 0$ , y  $\boldsymbol{\phi} \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_C)$  tales que  $\boldsymbol{\phi}_T = \mathbf{0}$ ,  $\phi_n \leq 0$  sobre  $\Gamma_C$  y  $\phi_n < 0$  sobre  $D$ , tenemos

$$\langle \pi_n(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i)), \phi_n \rangle_{\Gamma} > 0. \quad (2.2.25)$$

Sea  $r = \text{med}_{n-1}(B)$ . Definimos  $E_\delta = \{\mathbf{X} \in \bar{\Omega} : \text{dist}(\mathbf{X}, \partial\Gamma_C) < \delta\}$  con  $\delta$  tal que  $\text{med}_{n-1}(E_\delta \cap \Gamma_C) < r/2$ . Entonces,  $\text{med}_{n-1}(E_\delta \cap B) < r/2$  y sea  $D = B \setminus (E_\delta \cap B)$ . Está claro que  $D \subset B$  y  $0 < r/2 < \text{med}_{n-1}(D) \leq r$ . Escogemos ahora una función  $\xi_\delta(\mathbf{X}) \in C^1(\bar{\Omega})$  tal que  $0 \leq \xi_\delta(\mathbf{X}) \leq 1$  para todo  $\mathbf{X} \in \bar{\Omega}$ ,  $\xi_\delta \equiv 1$  sobre  $\Gamma_C \setminus E_\delta$  y  $\text{supp}(\xi_\delta) \cap \{E_{\delta/2} \cup \Gamma_N \cup \Gamma_D\} = \emptyset$ . Entonces, consideramos  $\boldsymbol{\phi} = \xi_\delta u_n^i \mathbf{n}$  de modo que  $\phi_n$  verifica (2.2.25). Además,  $\phi_n \geq u_n^i$  sobre  $\Gamma_C$ , y puesto que  $\pi_n(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i)) \leq 0$  sobre  $\Gamma_C$ ,

$$\langle \pi_n(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i)), \phi_n \rangle_{\Gamma} \leq \langle \pi_n(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i)), u_n^i \rangle_{\Gamma} = 0, \quad (2.2.26)$$

lo que contradice (2.2.25).  $\square$

**Corolario 2.2.10** *Si existe  $A \subset \Gamma_C$  con  $\text{med}_{n-1}(A) > 0$  tal que  $\pi_n(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i)) < 0$  sobre  $A$ , entonces  $u_n^i = 0$  sobre  $A$ .*

*Demostración.* Puesto que  $\pi_n(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i)) < 0$  sobre  $A$ , para todo  $D \subset B$  con  $\text{med}_{n-1}(D) > 0$ , y  $\boldsymbol{\phi} \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_C)$  tales que  $\boldsymbol{\phi}_T = \mathbf{0}$ ,  $\phi_n \leq 0$  sobre  $\Gamma_C$  y  $\phi_n < 0$  sobre  $D$ , tenemos

$$\langle \pi_n(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i)), \phi_n \rangle_{\Gamma} > 0. \quad (2.2.27)$$

Supongamos que existe un subconjunto  $B \subset A$  con  $\text{med}_{n-1}(B) > 0$  tal que  $u_n^i < 0$  sobre  $B$ . Por el corolario anterior,  $\pi_n(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i)) = 0$  sobre  $B$ . Entonces, para todo  $D \subset B$  con  $\text{med}_{n-1}(D) > 0$ , y  $\boldsymbol{\phi} \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_C)$  tales que  $\boldsymbol{\phi}_T = \mathbf{0}$ ,  $\phi_n \leq 0$  sobre  $\Gamma_C$  y  $\phi_n < 0$  sobre  $D$ , tenemos

$$\langle \pi_n(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i)), \phi_n \rangle_{\Gamma} = 0, \quad (2.2.28)$$

lo que contradice (2.2.27).  $\square$

**Corolario 2.2.11** Sea  $\mathbf{u}^i$  la solución de (ADHP<sup>i</sup>) y  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{h}^i) = \Lambda^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h}^i)$ ,  $1 \leq i \leq 2^I$ . Entonces, si no hay contacto, se cumple la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2} \right) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}^i) dV_X + \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \left( \frac{\mathbf{u}^i + \mathbf{u}^{i-1}}{2} \right) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}^i) dV_X \\ &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\chi}^i : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}^i) dV_X, \quad \forall \mathbf{v} \in V_{ad}. \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

*Demostración.* El resultado se obtiene de forma inmediata de (2.2.15) multiplicando por  $\mathbf{v} - \mathbf{u}^i$ , integrando sobre  $\Omega$ , aplicando la fórmula de Green (2.1.20), y teniendo en cuenta que, si no hay contacto,  $u_n < 0$  sobre  $\Gamma_C$  y, en consecuencia,  $\pi_n(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}^i)) = 0$ .

## 2.3. Aproximación de una solución del Problema (P).

El objetivo de las siguientes secciones es obtener una solución del Problema (P) como el límite de varias sucesiones de funciones construidas a partir de la solución de los problemas aproximados (ADHP<sup>i</sup>),  $1 \leq i \leq 2^I$ , cuando  $I \rightarrow +\infty$ .

### 2.3.1. Una primera aproximación

En esta subsección construimos a partir de  $\{\mathbf{u}^i, \dot{\mathbf{u}}^i, \ddot{\mathbf{u}}^i\}$   $i = 0, 1, \dots, 2^I$ , una función  $\mathbf{h}^I(t)$  definida en  $[0, T]$  tal que  $\mathbf{h}^I$  es  $\mathcal{C}^1$  sobre  $[0, T]$  y  $\mathbf{h}^I$  es  $\mathcal{C}^2$  en cada subintervalo  $(t_{i-1}, t_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2^I$ . Para ello, tomaremos la siguiente función como  $\mathbf{h}^I$ :

$$\mathbf{h}^I(t) = \mathbf{u}^{i-1} + \dot{\mathbf{u}}^{i-1}(t - t_{i-1}) + \frac{\ddot{\mathbf{u}}^{i-1} + \ddot{\mathbf{u}}^i}{4}(t - t_{i-1})^2, \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i]. \quad (2.3.1)$$

En el instante  $t = T$ ,  $\mathbf{h}^I(T) = \mathbf{u}^{2^I}$ ,  $\dot{\mathbf{h}}^I(T) = \dot{\mathbf{u}}^{2^I}$ . Esta elección garantiza la compatibilidad de  $\mathbf{h}^I(t)$  con la discretización de Newmark propuesta en la Sección 2.2. La función  $\mathbf{h}^I(t)$  verifica las siguientes propiedades:

- $\mathbf{h}^I(t) \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ ,  $\forall t \in [0, T]$ .

En efecto, puesto que  $\mathbf{u}_0$  y  $\mathbf{u}_1$  se suponen en  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ , el Teorema 2.2.2 y la relación (2.2.6) garantizan el resultado.

- $\mathbf{h}^I(t_i) = \mathbf{u}^i$ ,  $i = 0, \dots, 2^I$ .

■

$$\dot{\mathbf{h}}^I(t) = \dot{\mathbf{u}}^{i-1} + \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2}(t - t_{i-1}), \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad (2.3.2)$$

por tanto,  $\dot{\mathbf{h}}^I(t_i) = \dot{\mathbf{u}}^i$ ,  $i = 0, \dots, 2^I$ .

- $\ddot{\mathbf{h}}^I \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))$ , siendo

$$\ddot{\mathbf{h}}^I(t) = \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2}, \quad t \in [t_{i-1}, t_i]. \quad (2.3.3)$$

- En el instante  $t_i$ , gracias a (2.2.3) y (2.2.4), obtenemos para  $1 \leq i \leq 2^I$

$$\lim_{t \uparrow t_i} \mathbf{h}^I(t) = \mathbf{u}^{i-1} + \dot{\mathbf{u}}^{i-1} \Delta t + \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{4} \Delta t^2 = \mathbf{u}^i = \mathbf{h}^I(t_i), \quad (2.3.4)$$

$$\lim_{t \uparrow t_i} \dot{\mathbf{h}}^I(t) = \dot{\mathbf{u}}^{i-1} + \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2} \Delta t = \dot{\mathbf{u}}^i = \dot{\mathbf{h}}^I(t_i), \quad (2.3.5)$$

así,  $\mathbf{h}^I(t) \in \mathcal{C}^1(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))$ .

**Observación 2.3.1** *Nótese que  $\mathbf{h}^I(t_k) \in V_{ad}$ , pero no hay ninguna garantía de que  $\mathbf{h}^I(t) \in V_{ad}$  para todo  $t \in [0, T]$ .*

### 2.3.2. Estimaciones a priori

**Lema 2.3.2** *Sean  $\mathbf{u}^i$ ,  $\dot{\mathbf{u}}^i$  y  $\ddot{\mathbf{u}}^i$  la solución del Problema (ADHP<sup>i</sup>),  $1 \leq i \leq 2^I$  y  $\mathbf{h}^I$  definida por (2.3.1). Entonces, para cada subintervalo  $(t_{i-1}, t_i)$  de  $(0, T)$ , se verifica que:*

$$\begin{aligned} & \rho_0 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\dot{\mathbf{h}}^I(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 dt + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(\mathbf{h}^I(t), \mathbf{h}^I(t)) dt \\ & \leq \int_{\Omega} \boldsymbol{\chi}^i : \varepsilon(\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i-1}) dV_X, \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

con  $a(\cdot, \cdot)$  dada por

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dV_X.$$

*Demostración.* Tomando  $\mathbf{v} = \mathbf{u}^{i-1}$  en (2.2.10) obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 (\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}) \cdot \frac{\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i-1}}{2} dV_X + \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^i + \mathbf{u}^{i-1}) : \boldsymbol{\varepsilon} \left( \frac{\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i-1}}{2} \right) dV_X \\ & \leq \int_{\Omega} \boldsymbol{\chi}^i : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i-1}) dV_X. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

En primer lugar, reescribimos el primer miembro de la ecuación (2.3.7) en términos de  $\mathbf{h}^I(t)$ . Usando (2.2.3) podemos demostrar que los desplazamientos verifican

$$\frac{\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i-1}}{2} = \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{u}}^{i-1} + \frac{\Delta t^2}{4} \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2}, \quad (2.3.8)$$

$$\mathbf{u}^i + \mathbf{u}^{i-1} = 2\mathbf{u}^{i-1} + \Delta t \dot{\mathbf{u}}^{i-1} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2}. \quad (2.3.9)$$

Sustituyendo estas expresiones en el primer miembro de la ecuación (2.3.7) obtenemos

$$\begin{aligned} & \rho_0 \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} (\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}) \cdot \dot{\mathbf{u}}^{i-1} dV_X + \rho_0 \frac{\Delta t^2}{4} \int_{\Omega} (\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}) \cdot \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2} \right) dV_X \\ & + \Delta t \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{i-1}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^{i-1}) dV_X + \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{i-1}) : \boldsymbol{\varepsilon} \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2} \right) dV_X \\ & + \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^{i-1}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^{i-1}) dV_X + \frac{\Delta t^3}{4} \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^{i-1}) : \boldsymbol{\varepsilon} \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2} \right) dV_X \\ & + \frac{\Delta t^4}{4} \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{4} \right) : \boldsymbol{\varepsilon} \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2} \right) dV_X \\ & + \frac{\Delta t^3}{4} \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2} \right) : \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^{i-1}) dV_X \leq \int_{\Omega} \boldsymbol{\chi}^i : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i-1}) dV_X. \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Ahora bien, el primer miembro de esta expresión se corresponde con

$$\rho_0 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\dot{\mathbf{h}}^I(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 dt + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(\mathbf{h}^I(t), \mathbf{h}^I(t)) dt.$$

En efecto, de la definición de  $\mathbf{h}^I(t)$ ,  $t \in [t_{i-1}, t_i)$ , se deduce:

$$\|\dot{\mathbf{h}}^I(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \left( \dot{\mathbf{u}}^{i-1} + \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2} (t - t_{i-1}) \right) \cdot \left( \dot{\mathbf{u}}^{i-1} + \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2} (t - t_{i-1}) \right) dV_X,$$

y

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\dot{\mathbf{h}}^I(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2} \cdot \left( \dot{\mathbf{u}}^{i-1} + \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2} (t - t_{i-1}) \right) dV_X.$$

Así,

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\dot{\mathbf{h}}^I(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 dt = \Delta t \int_{\Omega} \dot{\mathbf{u}}^{i-1} \cdot \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2} dV_X + \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Omega} \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2} \right)^2 dV_X. \quad (2.3.11)$$

Además, en  $[t_{i-1}, t_i]$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(\mathbf{h}^I(t), \mathbf{h}^I(t)) &= \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{h}}^I(t)) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h}^I(t)) dV_X \\ &= \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \left( \dot{\mathbf{u}}^{i-1} + \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2} (t - t_{i-1}) \right) : \\ &\quad \boldsymbol{\varepsilon} \left( \mathbf{u}^{i-1} + \dot{\mathbf{u}}^{i-1} (t - t_{i-1}) + \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{4} (t - t_{i-1})^2 \right) dV_X \\ &= \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^{i-1}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{i-1}) dV_X + \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^{i-1}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^{i-1})(t - t_{i-1}) dV_X \\ &\quad + \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^{i-1}) : \boldsymbol{\varepsilon} \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{4} \right) (t - t_{i-1})^2 dV_X \\ &\quad + \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2} \right) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{i-1})(t - t_{i-1}) dV_X \\ &\quad + \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2} \right) : \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^{i-1})(t - t_{i-1})^2 dV_X \\ &\quad + \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2} \right) : \boldsymbol{\varepsilon} \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{4} \right) (t - t_{i-1})^3 dV_X. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(\mathbf{h}^I(t), \mathbf{h}^I(t)) dt &= \Delta t \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^{i-1}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{i-1}) dV_X \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^{i-1}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^{i-1}) dV_X + \frac{\Delta t^3}{3} \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^{i-1}) : \boldsymbol{\varepsilon} \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{4} \right) dV_X \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2} \right) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{i-1}) dV_X \\ &\quad + \frac{\Delta t^3}{3} \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2} \right) : \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^{i-1}) dV_X \\ &\quad + \frac{\Delta t^4}{4} \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2} \right) : \boldsymbol{\varepsilon} \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{4} \right). \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Y de (2.3.10)–(2.3.12) concluimos el resultado.  $\square$

**Corolario 2.3.3** Sean  $\mathbf{u}^i$ ,  $\dot{\mathbf{u}}^i$  y  $\ddot{\mathbf{u}}^i$  solución del Problema (ADHP<sup>i</sup>),  $1 \leq i \leq 2^I$  en las condiciones del Corolario 2.2.11, y  $\mathbf{h}^I$  definida por (2.3.1). Entonces, se cumple la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} & \rho_0 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\dot{\mathbf{h}}^I(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 dt + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(\mathbf{h}^I(t), \mathbf{h}^I(t)) dt \\ &= \int_{\Omega} \chi^i : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i-1}) dV_X, \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

*Demostración.* La demostración se hace considerando la ecuación (2.2.29) y siguiendo los mismos pasos que en el lema anterior.

**Proposición 2.3.4** Sea  $\mathbf{h}^I(t)$  definido por (2.3.1). Entonces,

- $\|\mathbf{h}^I(t_k)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$  está acotado por una constante independiente de  $I$  y  $k$ ,  $0 \leq k \leq 2^I$ .
- $\mathbf{h}^I$  y  $\dot{\mathbf{h}}^I$  están acotadas en  $\mathcal{C}(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$  por una constante independiente de  $I$ .

*Demostración.* Para todo  $k$  tal que  $1 \leq k \leq 2^I$  se tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \rho_0 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\dot{\mathbf{h}}^I(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 dt &= \frac{\rho_0}{2} \left( \|\dot{\mathbf{h}}^I(t_k)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 - \|\dot{\mathbf{h}}^I(0)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right), \\ \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(\mathbf{h}^I(t), \mathbf{h}^I(t)) dt &= \frac{1}{2} \left( a(\mathbf{h}^I(t_k), \mathbf{h}^I(t_k)) - a(\mathbf{h}^I(0), \mathbf{h}^I(0)) \right). \end{aligned}$$

Entonces, por el Lema 2.3.2 deducimos que para  $1 \leq k \leq 2^I$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( \rho_0 \|\dot{\mathbf{h}}^I(t_k)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + a(\mathbf{h}^I(t_k), \mathbf{h}^I(t_k)) \right) \leq \frac{1}{2} \left( \rho_0 \|\dot{\mathbf{h}}^I(0)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + a(\mathbf{h}^I(0), \mathbf{h}^I(0)) \right) \\ & + \sum_{i=1}^k \int_{\Omega} \chi^i : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i-1}) dV_X. \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Ahora obtendremos una cota superior para el segundo término en el segundo miembro de (2.3.14). Teniendo en cuenta que

$$\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i-1} = \mathbf{h}^I(t_i) - \mathbf{h}^I(t_{i-1}), \quad (2.3.15)$$

deducimos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \int_{\Omega} \boldsymbol{\chi}^i : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i-1}) dV_X &= \sum_{i=1}^k \int_{\Omega} \boldsymbol{\chi}^i : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h}^I(t_i) - \mathbf{h}^I(t_{i-1})) dV_X \\ &= \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^{k-1} (\boldsymbol{\chi}^i - \boldsymbol{\chi}^{i+1}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h}^I(t_i)) + \boldsymbol{\chi}^k : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h}^I(t_k)) - \boldsymbol{\chi}^1 : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h}^I(0)) \right) dV_X. \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

Además,

$$\|\boldsymbol{\chi}^i\|_{[L^2(\Omega)]^{n^2}} \leq \sup_{t \in [0, T]} \|\boldsymbol{\chi}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^{n^2}} = \|\boldsymbol{\chi}\|_{L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]^{n^2})}, \quad (2.3.17)$$

y

$$\|\boldsymbol{\chi}^i - \boldsymbol{\chi}^{i+1}\|_{[L^2(\Omega)]^{n^2}} \leq \Delta t \|\dot{\boldsymbol{\chi}}\|_{L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]^{n^2})}. \quad (2.3.18)$$

Entonces, tomando valor absoluto en (2.3.16), usando (2.3.17) y (2.3.18), y aplicando la desigualdad de Hölder se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^k \int_{\Omega} \boldsymbol{\chi}^i : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i-1}) dV_X \right| &\leq C \|\dot{\boldsymbol{\chi}}\|_{L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]^{n^2})} \Delta t \sum_{i=1}^{k-1} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h}^I(t_i))\|_{[L^2(\Omega)]^{n^2}} \\ &+ \|\boldsymbol{\chi}\|_{L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]^{n^2})} \left( \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h}^I(t_k))\|_{[L^2(\Omega)]^{n^2}} + \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h}^I(0))\|_{[L^2(\Omega)]^{n^2}} \right), \end{aligned}$$

donde  $C$  es una constante positiva. Así, de (2.3.14) se infiere que

$$\begin{aligned} \left( \|\dot{\mathbf{h}}^I(t_k)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\rho_0} a(\mathbf{h}^I(t_k), \mathbf{h}^I(t_k)) \right) &\leq \left( \|\dot{\mathbf{h}}^I(0)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\rho_0} a(\mathbf{h}^I(0), \mathbf{h}^I(0)) \right) \\ &+ \frac{2}{\rho_0} \left( C \|\dot{\boldsymbol{\chi}}\|_{L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]^{n^2})} \Delta t \sum_{i=1}^{k-1} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h}^I(t_i))\|_{[L^2(\Omega)]^{n^2}} \right. \\ &\left. + \|\boldsymbol{\chi}\|_{L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]^{n^2})} \left( \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h}^I(t_k))\|_{[L^2(\Omega)]^{n^2}} + \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h}^I(0))\|_{[L^2(\Omega)]^{n^2}} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

Ahora bien, puesto que la forma bilineal  $a$  es coerciva, de la ecuación anterior deducimos que existen constantes positivas  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  que no dependen de  $I$

ni de  $k$ , tales que:

$$\|\mathbf{h}^I(t_k)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \leq C_1 + C_2 \|\mathbf{h}^I(t_k)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + C_3 \Delta t \sum_{i=1}^{k-1} \|\mathbf{h}^I(t_i)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}, \quad (2.3.20)$$

para  $1 \leq k \leq 2^I$ .

Y si suponemos que  $C_1 \geq 1$ , lo que no supone ninguna restricción, la desigualdad anterior implica que

$$\|\mathbf{h}^I(t_k)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C_1 + C_2 + C_3 \Delta t \sum_{i=1}^{k-1} \|\mathbf{h}^I(t_i)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}. \quad (2.3.21)$$

Aplicando el lema de Gronwall discreto (ver Lions[63]), se obtiene que

$$\|\mathbf{h}^I(t_k)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C e^T, \quad C \in \mathbb{R}^+. \quad (2.3.22)$$

Por lo tanto,  $\mathbf{h}^I(t_k)$  está acotada en  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  por una constante independiente de  $I$  y  $k$ .

De (2.3.19) se obtiene fácilmente que  $\dot{\mathbf{h}}^I(t_k)$  es acotado en  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  por una constante independiente de  $I$  y  $k$ . En consecuencia, puesto que  $\dot{\mathbf{h}}^I$  es lineal a trozos,

$$\|\dot{\mathbf{h}}^I(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \leq \max\{\|\dot{\mathbf{h}}^I(t_{i-1})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2, \|\dot{\mathbf{h}}^I(t_i)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2\} \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Entonces,  $\dot{\mathbf{h}}^I(t)$  está acotada en  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  y puesto que es continua, está acotada en  $C(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ . Ahora,

$$\mathbf{h}^I(t) = \mathbf{h}^I(0) + \int_0^t \dot{\mathbf{h}}^I(s) ds$$

Por tanto,  $\mathbf{h}^I(t)$  está acotada en  $C(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$  por una constante que no depende de  $I$  para todo  $t \in (0, T)$ .  $\square$

**Corolario 2.3.5** *Sea  $\mathbf{h}^I$  definida por (2.3.1). Existen subsucesiones, que seguiremos denotando con el índice  $I$ , tales que cuando  $I \rightarrow +\infty$ , se obtienen las siguientes convergencias:*

$$\mathbf{h}^I \longrightarrow \mathbf{h} \text{ débil } * \text{ en } L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)), \quad (2.3.23)$$

$$\dot{\mathbf{h}}^I \longrightarrow \dot{\mathbf{h}} \text{ débil } * \text{ en } L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)). \quad (2.3.24)$$

*Demostración.* Puesto que el espacio  $L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) = [L^1(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))]'$  y  $L^1(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$  es un espacio de Banach separable, el resultado es directo (ver Brézis [15]). Nótese que el límite de  $\dot{\mathbf{h}}^I$  es  $\dot{\mathbf{h}}$  debido a la unicidad del límite en  $\mathcal{D}'(0, T; [\mathbf{L}_{weak}^2(\Omega)])$  (ver Lions [64]).  $\square$

### 2.3.3. Otras aproximaciones

Ahora, escogemos otras tres “aproximaciones” de una solución del Problema (P) que también son convergentes cuando  $I \rightarrow \infty$ . Definimos

$$\mathbf{l}^I(t) = \mathbf{u}^{i-1} + \frac{\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i-1}}{\Delta t}(t - t_{i-1}), \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i], \quad (2.3.25)$$

$$\mathbf{h}_\star^I(t) = \mathbf{h}^i = \frac{\mathbf{u}^i + \mathbf{u}^{i-1}}{2}, \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i], \quad (2.3.26)$$

$$\mathbf{h}_\#^I(t) = \dot{\mathbf{u}}^i, \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i], \quad (2.3.27)$$

y

$$\mathbf{u}_\star^I(t) = \mathbf{u}^i, \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i]. \quad (2.3.28)$$

**Observación 2.3.6** *Nótese que en este caso  $\mathbf{l}^I(t)$ ,  $\mathbf{h}_\star^I(t)$  y  $\mathbf{u}_\star^I(t)$  pertenecen a  $V_{ad}$  para todo  $t \in [0, T]$ .*

#### 2.3.3.1. Otras estimaciones a priori

**Proposición 2.3.7** *Sean  $\mathbf{l}^I(t)$ ,  $\mathbf{h}_\star^I(t)$  y  $\mathbf{u}_\star^I(t)$  definidas por (2.3.25), (2.3.26) y (2.3.28), respectivamente. Entonces,*

- $\|\mathbf{h}_\star^I(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$  y  $\|\mathbf{u}_\star^I(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$  están acotadas por una constante independiente de  $I$  para todo  $t \in [0, T]$ .
- $\|\mathbf{l}^I(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$ ,  $\|\dot{\mathbf{l}}^I(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$  y  $\|\mathbf{h}_\#^I(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$  están acotadas por una constante independiente de  $I$  para todo  $t \in [0, T]$ .
- $\ddot{\mathbf{h}}^I$  está acotado en  $L^\infty(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))$ .

*Demostración.* De la definición de  $\mathbf{h}^I$  tenemos  $\mathbf{u}^i = \mathbf{h}^I(t_i)$  para todo  $0 \leq i \leq 2^I$ . Entonces,  $\mathbf{h}_\star^I$  puede expresarse como

$$\mathbf{h}_\star^I(t) = \frac{\mathbf{h}^I(t_i) + \mathbf{h}^I(t_{i-1})}{2}, \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad (2.3.29)$$

y

$$\mathbf{u}_\star^I(t) = \mathbf{h}^I(t_i), \quad t \in [t_{i-1}, t_i]. \quad (2.3.30)$$

Además,  $\mathbf{h}_\star^I \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))$  puesto que  $\mathbf{u}^i \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  para todo  $i$ , y

$$\begin{aligned} \|\mathbf{h}_\star^I(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} &= \left\| \frac{\mathbf{h}^I(t_i) + \mathbf{h}^I(t_{i-1})}{2} \right\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{2} (\|\mathbf{h}^I(t_i)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\mathbf{h}^I(t_{i-1})\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}), \quad t \in [t_{i-1}, t_i]. \end{aligned} \quad (2.3.31)$$

Por lo tanto, por la Proposition 2.3.4,  $\mathbf{h}_\star^I(t)$  está acotada en  $L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))$  por una constante independiente de  $I$ .

Análogamente,  $\mathbf{u}_\star^I(t)$  está acotada en  $L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))$  por una constante independiente de  $I$ .

Ahora bien, puesto que  $\mathbf{l}^I$  es lineal a trozos,

$$\|\mathbf{l}^I(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq \max\{\|\mathbf{l}^I(t_{i-1})\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}, \|\mathbf{l}^I(t_i)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\} \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i],$$

y, dado que  $\mathbf{l}^I(t_k) = \mathbf{h}^I(t_k)$  y  $\|\mathbf{h}^I(t_k)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$  está acotada por una constante independiente de  $I$  y  $k$ ,  $\|\mathbf{l}^I(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$  está acotada por una constante independiente de  $I$ .

Para demostrar que  $\dot{\mathbf{l}}^I$  está acotada, la escribimos en términos de  $\dot{\mathbf{h}}^I$ :

$$\dot{\mathbf{l}}^I(t) = \frac{\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i-1}}{\Delta t},$$

lo que, por (2.3.8) y (2.3.2), puede reescribirse como

$$\dot{\mathbf{l}}^I(t) = \dot{\mathbf{u}}^{i-1} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2} = \frac{\dot{\mathbf{h}}^I(t_{i-1}) + \dot{\mathbf{h}}^I(t_i)}{2} \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Entonces,

$$\|\dot{\mathbf{l}}^I(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \left\| \frac{\dot{\mathbf{h}}^I(t_{i-1}) + \dot{\mathbf{h}}^I(t_i)}{2} \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \quad (2.3.32)$$

Por tanto, de nuevo por la Proposición 2.3.4,  $\|\dot{\mathbf{l}}^I(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$  está acotado por una constante independiente de  $I$  para todo  $t \in (0, T)$ .

Análogamente,

$$\|\mathbf{h}_\#^I(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \|\dot{\mathbf{h}}^I(t_i)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Finalmente, la acotación de  $\ddot{\mathbf{h}}^I$  en  $L^\infty(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))$  se obtiene como consecuencia directa de las acotaciones anteriores y la ecuación (2.2.15) que puede escribirse en términos de  $\ddot{\mathbf{h}}^I$  y  $\mathbf{h}_*^I$  como:

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{h}}^I - \text{Div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{h}_*^I) = \mathbf{b}_0^I \quad \text{in } \Omega, \quad (2.3.33)$$

siendo  $\mathbf{b}_0^I(t) = \mathbf{b}_0^i$  para todo  $t \in [t_{i-1}, t_i]$ .  $\square$

**Corolario 2.3.8** Sean  $\mathbf{l}^I$ ,  $\mathbf{h}_*^I$  y  $\mathbf{u}_*^I$  definidas por (2.3.25), (2.3.26) y (2.3.28), respectivamente. Entonces, existen subsucesiones, igualmente denotadas con el índice  $I$ , tales que cuando  $I \rightarrow +\infty$ , se obtienen las siguientes convergencias:

$$\mathbf{l}^I \rightharpoonup \mathbf{l} \text{ débil } * \text{ en } L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)), \quad (2.3.34)$$

$$\dot{\mathbf{l}}^I \rightharpoonup \dot{\mathbf{l}} \text{ débil } * \text{ en } L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)), \quad (2.3.35)$$

$$\mathbf{h}_*^I \rightharpoonup \mathbf{h}_* \text{ débil } * \text{ en } L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)), \quad (2.3.36)$$

$$\mathbf{u}_*^I \rightharpoonup \mathbf{u}_* \text{ débil } * \text{ en } L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)). \quad (2.3.37)$$

$$\mathbf{h}_\#^I \rightharpoonup \mathbf{h}_\# \text{ débil } * \text{ en } L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)), \quad (2.3.38)$$

$$\ddot{\mathbf{h}}^I \rightharpoonup \ddot{\mathbf{h}} \text{ débil } * \text{ en } L^\infty(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)). \quad (2.3.39)$$

*Demostración.* La demostración es análoga a la del Corolario 2.3.5.  $\square$

**Definición 2.3.9** Si  $X$  e  $Y$  son dos espacios de Banach,  $X \subset Y$  con embebimiento continuo, se define el espacio  $\mathcal{C}_s([0, T], X)$  como el espacio de las funciones  $v : [0, T] \rightarrow X$  tales que la función real de variable real

$$t \rightarrow \langle h, v(t) \rangle_{X', X},$$

es continua sobre  $[0, T]$  para cualquier  $h \in X'$ .

**Lema 2.3.10** Sean  $X$  e  $Y$  en las condiciones de la Definición 2.3.9.

i) Si, además,  $X$  es un espacio de Banach reflexivo, entonces

$$L^\infty(0, T; X) \cap \mathcal{C}([0, T]; Y) \subset \mathcal{C}_s([0, T]; X).$$

ii) Sea  $U$  otro espacio de Banach tal que  $X \subset U \subset Y$  y sea el embebimiento  $X \subset Y$  es compacto. Si  $\mathcal{F}$  es acotado en  $L^\infty(0, T; X)$  y  $\partial\mathcal{F}/\partial t = \{\dot{f}; f \in \mathcal{F}\}$  es acotado en  $L^r(0, T; Y)$ , con  $r > 1$ , entonces  $\mathcal{F}$  es relativamente compacto en  $C([0, T]; U)$ .

*Demostración.* i) Este resultado puede consultarse en [65], Lema 8.1, pág 297.

ii) Este resultado puede encontrarse en [87], Corolario 4, pág. 85.

**Corolario 2.3.11** Sean  $\dot{\mathbf{h}}^I$  y  $\mathbf{l}^I$  definidas por (2.3.2) y (2.3.25) respectivamente. Entonces, existen subsucesiones, igualmente denotada con el índice  $I$ , tales que cuando  $I \rightarrow +\infty$

$$\mathbf{l}^I \longrightarrow \mathbf{l} \text{ en } \mathcal{C}([0, T]; \mathbf{H}^\beta(\Omega)) \cap \mathcal{C}_s([0, T]; \mathbf{H}^1(\Omega)), \quad 0 \leq \beta < 1, \quad (2.3.40)$$

$$\dot{\mathbf{h}}^I \longrightarrow \dot{\mathbf{h}} \text{ en } \mathcal{C}(0, T; \mathbf{H}^\alpha(\Omega)) \cap \mathcal{C}_s([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega)), \quad -1 \leq \alpha < 0, \quad (2.3.41)$$

posiblemente después de una modificación sobre un conjunto de medida nula.

*Demostración.* La demostración de estos resultados es consecuencia de las acotaciones de  $\dot{\mathbf{h}}^I$ ,  $\ddot{\mathbf{h}}^I$ ,  $\mathbf{l}^I$  y  $\dot{\mathbf{l}}^I$ , y el Lema 2.3.10.  $\square$

### 2.3.4. Disipación de la energía

**Definición 2.3.12** Dado  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  y  $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ , definimos el funcional de energía total como

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\rho_0 |\mathbf{v}|^2 + \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) dV_X - \int_{\Omega} \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u} dV_X - \int_{\Gamma_N} \mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{u} dA_X, \quad (2.3.42)$$

donde el primer término es la energía cinética si  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$ , el segundo es la energía elástica y los dos últimos términos representan la energía potencial que proviene de las fuerzas de volumen y superficie, respectivamente.

**Lema 2.3.13** Sea  $\mathbf{u}^i$  la solución del Problema (ADHP<sup>i</sup>),  $1 \leq i \leq 2^I$ . El funcional de energía total  $\mathcal{E}$  está bien definido sobre  $V_{ad} \times \mathbf{L}^2(\Omega)$  y

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}^{i+1}, \dot{\mathbf{u}}^{i+1}) \leq \mathcal{E}(\mathbf{u}^i, \dot{\mathbf{u}}^i) - \int_{\Omega} (\boldsymbol{\chi}^{i+1} - \boldsymbol{\chi}^i) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^i) dV_X, \quad (2.3.43)$$

donde el último término representa el trabajo realizado por las fuerzas sobre la solución en el instante  $t_i$ .

*Demostración.* La energía en el paso de tiempo  $t_{i+1}$  viene dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{u}^{i+1}, \dot{\mathbf{u}}^{i+1}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\rho_0 \dot{\mathbf{u}}^{i+1} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{i+1} + \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{i+1}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{i+1})) dV_X \\ &\quad - \int_{\Omega} \mathbf{b}_0^{i+1} \cdot \mathbf{u}^{i+1} dV_X - \int_{\Gamma_N} \mathbf{s}_0^{i+1} \cdot \mathbf{u}^{i+1} dA_X. \end{aligned} \quad (2.3.44)$$

Reemplazando los valores para  $\mathbf{u}^{i+1}$  y  $\dot{\mathbf{u}}^{i+1}$  definidos en (2.2.3) y (2.2.4) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{u}^{i+1}, \dot{\mathbf{u}}^{i+1}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_0 \left( \dot{\mathbf{u}}^i + \Delta t \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i+1}}{2} \right) \cdot \left( \dot{\mathbf{u}}^i + \Delta t \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i+1}}{2} \right) dV_X \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \left( \mathbf{u}^i + \Delta t \dot{\mathbf{u}}^i + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i+1}}{2} \right) : \boldsymbol{\varepsilon} \left( \mathbf{u}^i + \Delta t \dot{\mathbf{u}}^i + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i+1}}{2} \right) dV_X \\ &- \int_{\Omega} \mathbf{b}_0^{i+1} \cdot \mathbf{u}^{i+1} dV_X - \int_{\Gamma_N} \mathbf{s}_0^{i+1} \cdot \mathbf{u}^{i+1} dA_X, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{u}^{i+1}, \dot{\mathbf{u}}^{i+1}) &= \mathcal{E}(\mathbf{u}^i, \dot{\mathbf{u}}^i) + \Delta t \rho_0 \int_{\Omega} \dot{\mathbf{u}}^i \cdot \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i+1}}{2} dV_X \\ &+ \Delta t \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^i) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^i) dV_X + \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^i) : \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^i) dV_X \\ &+ \frac{\Delta t^3}{2} \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^i) : \boldsymbol{\varepsilon} \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i+1}}{2} \right) dV_X + \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i+1}}{2} \right) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^i) dV_X \\ &+ \frac{\Delta t^4}{4} \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i+1}}{2} \right) : \boldsymbol{\varepsilon} \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i+1}}{4} \right) dV_X + \frac{\Delta t^2}{2} \rho_0 \int_{\Omega} \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i+1}}{2} \right)^2 dV_X \\ &- \int_{\Omega} \mathbf{b}_0^{i+1} \cdot \mathbf{u}^{i+1} dV_X - \int_{\Gamma_N} \mathbf{s}_0^{i+1} \cdot \mathbf{u}^{i+1} dA_X + \int_{\Omega} \mathbf{b}_0^i \cdot \mathbf{u}^i dV_X + \int_{\Gamma_N} \mathbf{s}_0^i \cdot \mathbf{u}^i dA_X. \end{aligned}$$

Usando ahora (2.3.11) y (2.3.12) tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{u}^{i+1}, \dot{\mathbf{u}}^{i+1}) &= \mathcal{E}(\mathbf{u}^i, \dot{\mathbf{u}}^i) \\ &+ \rho_0 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\dot{\mathbf{h}}^I(t)\|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(\mathbf{h}^I(t), \mathbf{h}^I(t)) dt \\ &- \int_{\Omega} \mathbf{b}_0^{i+1} \cdot (\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i) dV_X - \int_{\Omega} \mathbf{s}_0^{i+1} \cdot (\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i) dA_X \\ &+ \int_{\Omega} (\mathbf{b}_0^i - \mathbf{b}_0^{i+1}) \cdot \mathbf{u}^i dV_X + \int_{\Omega} (\mathbf{s}_0^i - \mathbf{s}_0^{i+1}) \cdot \mathbf{u}^i dA_X, \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{u}^{i+1}, \dot{\mathbf{u}}^{i+1}) &= \mathcal{E}(\mathbf{u}^i, \dot{\mathbf{u}}^i) + \rho_0 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\dot{\mathbf{h}}^I(t)\|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 dt \\ &\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(\mathbf{h}^I(t), \mathbf{h}^I(t)) dt - \int_{\Omega} \boldsymbol{\chi}^{i+1} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i) dV_X \\ &\quad + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\chi}^i - \boldsymbol{\chi}^{i+1}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^i) dV_X. \end{aligned}$$

Finalmente de (2.3.6) obtenemos el resultado.  $\square$

**Corolario 2.3.14** *La energía en un instante  $t_{i+1}$  puede expresarse en términos de la energía inicial como sigue:*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{u}^{i+1}, \dot{\mathbf{u}}^{i+1}) &= \mathcal{E}(\mathbf{u}^0, \dot{\mathbf{u}}^0) + \int_0^{t_{i+1}} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \rho_0 \|\dot{\mathbf{h}}^I(t)\|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 + a(\mathbf{h}^I(t), \mathbf{h}^I(t)) \right) dt \\ &\quad - \int_{\Omega} \mathbf{b}_0^{i+1} \cdot \mathbf{u}^{i+1} dV_X + \int_{\Omega} \mathbf{b}_0^0 \cdot \mathbf{u}^0 dV_X, \end{aligned}$$

y además,

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}^{i+1}, \dot{\mathbf{u}}^{i+1}) \leq \mathcal{E}(\mathbf{u}^0, \dot{\mathbf{u}}^0) + \int_0^{t_{i+1}} \int_{\Omega} \dot{\boldsymbol{\chi}}^I : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*^I) dV_X.$$

$\square$

**Corolario 2.3.15** *Supongamos que las fuerzas  $\mathbf{b}_0$  y  $\mathbf{s}_0$  no dependen del tiempo  $t$ . Entonces*

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}^{i+1}, \dot{\mathbf{u}}^{i+1}) \leq \mathcal{E}(\mathbf{u}^i, \dot{\mathbf{u}}^i) \leq \dots \leq \mathcal{E}(\mathbf{u}^0, \dot{\mathbf{u}}^0), \quad 1 \leq i \leq 2^I - 1. \quad (2.3.45)$$

$\square$

**Corolario 2.3.16** *Supongamos que las fuerzas  $\mathbf{b}_0$  y  $\mathbf{s}_0$  no dependen del tiempo  $t$ , y que  $\mathbf{u}^i$ ,  $\dot{\mathbf{u}}^i$  y  $\ddot{\mathbf{u}}^i$  están en las condiciones del Corolario 2.2.11. Entonces*

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}^{i+1}, \dot{\mathbf{u}}^{i+1}) = \mathcal{E}(\mathbf{u}^i, \dot{\mathbf{u}}^i). \quad (2.3.46)$$

*Demostración.* El resultado se deduce siguiendo los mismos pasos que en el Lema 2.3.13 y usando el Corolario 2.3.3.  $\square$

### 2.3.5. Unicidad del límite

En esta subsección demostraremos que todos los límites definidos en (2.3.23), (2.3.36), (2.3.37) y (2.3.40) son iguales:  $\mathbf{h} = \mathbf{l} = \mathbf{h}_\star = \mathbf{u}_\star$ .

En efecto, para cada  $t \in (0, T)$ , existe  $0 < i \leq 2^I$  tal que  $t \in [t_{i-1}, t_i]$ . Entonces, de (2.3.26) y usando la fórmula de Barrow para funciones  $\mathcal{C}^1$  en  $[t_{i-1}, t_i]$ , tenemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{h}^I(t) - \mathbf{h}_\star^I(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &= \left\| \frac{\mathbf{h}^I(t)}{2} + \frac{\mathbf{h}^I(t)}{2} - \frac{\mathbf{h}^I(t_{i-1})}{2} - \frac{\mathbf{h}^I(t_i)}{2} \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &= \left\| \frac{1}{2} \int_{t_{i-1}}^t \dot{\mathbf{h}}^I(s) ds - \frac{1}{2} \int_t^{t_i} \dot{\mathbf{h}}^I(s) ds \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \left\| \frac{1}{2} \int_{t_{i-1}}^t \dot{\mathbf{h}}^I(s) ds \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &\quad + \left\| \frac{1}{2} \int_t^{t_i} \dot{\mathbf{h}}^I(s) ds \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \Delta t \|\dot{\mathbf{h}}^I\|_{L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))} \longrightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.3.47)$$

cuando  $I \longrightarrow +\infty$ . Por tanto,  $\mathbf{h}$  y  $\mathbf{h}_\star$  son iguales en  $L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$  y puesto que  $\mathbf{h}_\star \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))$ , también  $\mathbf{h} \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))$ .

Análogamente, se demuestra que  $\mathbf{h}$  y  $\mathbf{u}_\star$  son iguales en  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ .

También, puesto que  $\dot{\mathbf{l}}$  está acotada en  $L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ ,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{l}^I(t) - \mathbf{u}_\star^I(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &= \|\mathbf{l}^I(t) - \mathbf{l}^I(t_i)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &= \left\| \int_t^{t_i} \dot{\mathbf{l}}^I(s) ds \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \Delta t \|\dot{\mathbf{l}}^I\|_{L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))} \longrightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.3.48)$$

cuando  $I \longrightarrow +\infty$ .

Análogamente, se demuestra que  $\dot{\mathbf{h}}$  y  $\mathbf{h}_\sharp$  coinciden en  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ .

Así,  $\mathbf{l} = \mathbf{u}_\star = \mathbf{h}_\star = \mathbf{h}$ . De aquí en adelante denotaremos este límite por  $\mathbf{u}$ .

En resumen, hemos demostrado las siguientes convergencias.

**Teorema 2.3.17** Si  $\mathbf{h}^I, \mathbf{l}^I, \mathbf{h}_\star^I$  y  $\mathbf{u}_\star^I$  están dadas por (2.3.1), (2.3.25), (2.3.26)

y (2.3.28), existe  $\mathbf{u}$  tal que

$$\begin{array}{llll}
\mathbf{h}^I & \longrightarrow & \mathbf{u} & \text{débil } * \text{ en } L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)), \\
\dot{\mathbf{h}}^I & \longrightarrow & \dot{\mathbf{u}} & \text{débil } * \text{ en } L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)), \\
\mathbf{l}^I & \longrightarrow & \mathbf{u} & \text{débil } * \text{ en } L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)), \\
\dot{\mathbf{l}}^I & \longrightarrow & \dot{\mathbf{u}} & \text{débil } * \text{ en } L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)), \\
\mathbf{h}_*^I & \longrightarrow & \mathbf{u} & \text{débil } * \text{ en } L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)), \\
\mathbf{u}_*^I & \longrightarrow & \mathbf{u} & \text{débil } * \text{ en } L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)), \\
\mathbf{h}_\#^I & \longrightarrow & \dot{\mathbf{u}} & \text{débil } * \text{ en } L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)), \\
\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{h}_*^I) & \longrightarrow & \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) & \text{débil } * \text{ en } L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)).
\end{array}$$

Además, se tienen los siguientes límites

$$\lim_{I \rightarrow +\infty} (\mathbf{h}^I - \mathbf{h}_*^I) = 0, \quad (2.3.49)$$

$$\lim_{I \rightarrow +\infty} (\mathbf{h}^I - \mathbf{u}_*^I) = 0, \quad (2.3.50)$$

$$\lim_{I \rightarrow +\infty} (\mathbf{l}^I - \mathbf{u}_*^I) = 0, \quad (2.3.51)$$

en  $L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$  fuerte.

**Corolario 2.3.18** Si  $\mathbf{h}^I$  y  $\mathbf{l}^I$  están dadas por (2.3.1) y (2.3.25), existe  $\mathbf{u}$  tal que

$$\dot{\mathbf{h}}^I \longrightarrow \dot{\mathbf{u}} \quad \text{en } \mathcal{C}(0, T; \mathbf{H}^\alpha(\Omega)) \cap \mathcal{C}_s([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega)), \quad -1 \leq \alpha < 0, \quad (2.3.52)$$

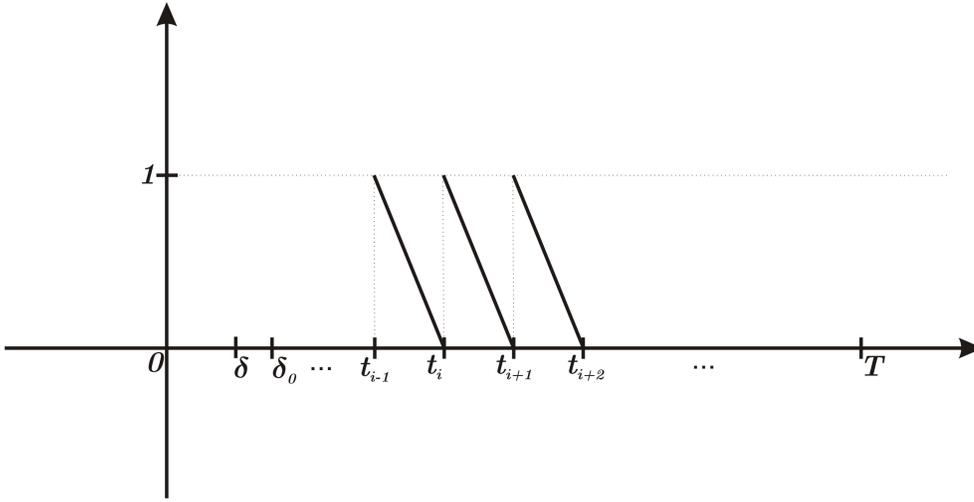
$$\mathbf{l}^I \longrightarrow \mathbf{u} \quad \text{en } \mathcal{C}([0, T]; \mathbf{H}^\beta(\Omega)) \cap \mathcal{C}_s([0, T]; \mathbf{H}^1(\Omega)), \quad 0 \leq \beta < 1. \quad (2.3.53)$$

**Teorema 2.3.19** Sean  $\mathbf{l}^I$  y  $\mathbf{u}_*^I$  dadas por (2.3.25) y (2.3.28) respectivamente. Entonces,

$$\mathbf{l}^I - \mathbf{u}_*^I \longrightarrow 0 \quad \text{en } \mathcal{D}'(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)), \quad (2.3.54)$$

$$\mathbf{l}^I - \mathbf{u}_*^I \longrightarrow 0 \quad \text{en } L^\infty(0, T; \mathbf{H}^r(\Omega)), \quad 0 < r < 1, \quad (2.3.55)$$

cuando  $I \rightarrow +\infty$ .

Figura 2.3.1: Función en dientes de sierra  $\theta_I$ 

*Demostración.* Sea  $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$  y  $\theta_I$  la función en dientes de sierra discontinua en cada  $t_i$  y afín decreciente de 1 a 0 en cada intervalo  $(t_i, t_{i+1})$  representada en la Figura 2.3.1. Sea  $I \geq I_0$ , donde  $I_0$  es tal que el soporte de  $\varphi$  está contenido en  $[\delta_0, T - \delta_0]$  con  $\delta_0 = T/2^{I_0}$ , de forma que  $\text{supp}(\varphi) \subset [\delta, T - \delta]$ , siendo  $\delta = T/2^I$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \int_0^T (\mathbf{l}^I - \mathbf{u}_*^I) \varphi dt &= \sum_{i=0}^{2^I-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\mathbf{l}^I(t) - \mathbf{u}_*^I(t)) \varphi(t) dt \\ &= \sum_{i=0}^{2^I-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i+1}) \theta_I(t) \varphi(t) dt = \sum_{i=1}^{2^I-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{u}^i \theta_I(t) (\varphi - \varphi_\delta)(t) dt, \end{aligned}$$

siendo  $\varphi_\delta(t) = \varphi(t - \delta)$  y, por tanto,  $|\varphi - \varphi_\delta| \leq c\delta$ , siendo  $c = \max |\frac{d\varphi}{dt}|$ . En consecuencia,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^T (\mathbf{l}^I - \mathbf{u}_*^I) \varphi dt \right\|_V &\leq c\delta^2 \sum_{i=1}^{2^I-1} \|\mathbf{u}^i\|_V \leq c\delta^2 \left( (2^I - 1) \sum_{i=1}^{2^I-1} \|\mathbf{u}^i\|_V^2 \right)^{1/2} \\ &\leq c\delta^2 ((2^I - 1)^2 C)^{1/2} \leq \hat{c}\delta^2 2^I = \hat{c}\delta^2 T / \delta = \hat{c}\delta T \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

donde  $c$ ,  $C$  y  $\hat{c}$  son constantes positivas.

Para probar (2.3.55) utilizaremos las convergencias

$$\begin{aligned} \mathbf{l}^I &\longrightarrow \mathbf{u} \quad \text{d\u00e9bil * en } L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)), \\ \dot{\mathbf{l}}^I &\longrightarrow \dot{\mathbf{u}} \quad \text{d\u00e9bil * en } L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)), . \end{aligned}$$

Sea  $0 < r = \theta\alpha + (1 - \theta)\beta < 1$ ,  $r \neq 1/2$ . Existe un conjunto  $A \subset [0, T]$  tal que  $\text{med}(A) = 0$  y para todos  $t_1, t_2 \in [0, T] \setminus A$ , con  $t_1 < t_2$  se cumple:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{l}^I(t_2) - \mathbf{l}^I(t_1)\|_{\mathbf{H}^r(\Omega)} &\leq M_\theta \|\mathbf{l}^I(t_2) - \mathbf{l}^I(t_1)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^\theta \|\mathbf{l}^I(t_2) - \mathbf{l}^I(t_1)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^{1-\theta} \\ &\leq M_\theta \left( \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\mathbf{l}}^I(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} dt \right)^\theta \leq M_\theta (t_2 - t_1)^{\theta/2}. \end{aligned} \quad (2.3.56)$$

En particular, para cada  $t \in [t_{i-1}, t_i] \setminus A$ , se tiene que

$$\|\mathbf{u}_*^I(t) - \mathbf{l}^I(t)\|_{\mathbf{H}^r(\Omega)} = \|\mathbf{l}^I(t_i) - \mathbf{l}^I(t)\|_{\mathbf{H}^r(\Omega)} \leq M_\theta (t_i - t)^{\theta/2} \rightarrow 0,$$

cuando  $I \rightarrow \infty$ . □

## 2.4. Comprobaci\u00f3n de que $\mathbf{u}$ es soluci\u00f3n $\delta$ -d\u00e9bil del Problema (P)

En esta secci\u00f3n comprobaremos que el l\u00edmite obtenido en la secci\u00f3n anterior es una soluci\u00f3n  $\delta$ -d\u00e9bil de nuestro problema inicial (P) en el sentido de la Definiaci\u00f3n 2.1.11.

**Teorema 2.4.1** *Sea  $\mathbf{u}$  el l\u00edmite presentado en el Teorema 2.3.17 y  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{u}) = \Lambda^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\chi}$ . Entonces,*

- (i)  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}(\mathbf{u}))$  verifica (2.1.10) en el sentido de las distribuciones.
- (ii)  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))$ ,  $\mathbf{u}(t) \in V_{ad}$ ,  $\dot{\mathbf{u}} \in L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ ,  $\ddot{\mathbf{u}} \in \mathcal{D}'(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$  y  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{u}) \in \mathcal{D}'(0, T; E) \cap L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ .
- (iii)  $\mathbf{u} \in \mathcal{C}_s([0, T]; \mathbf{H}^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T]; \mathbf{H}^r(\Omega))$ ,  $0 \leq r < 1$ ,  $\dot{\mathbf{u}} \in \mathcal{C}_s([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T]; \mathbf{H}^\alpha(\Omega))$ ,  $-1 \leq \alpha < 0$ , posiblemente despu\u00e9s de una modificaci\u00f3n sobre un conjunto de medida nula en  $[0, T]$ .

*Demostración.* En primer lugar, obtendremos una inecuación variacional en términos de  $\mathbf{h}^I$  y  $\mathbf{h}_*^I$ . Para ello, consideramos  $\mathbf{u}^i, \dot{\mathbf{u}}^i, \ddot{\mathbf{u}}^i$  solución del Problema (ADHP<sup>i</sup>) en  $[t_{i-1}, t_i)$ ,  $1 \leq i \leq 2^I$ , que, por tanto, verifica:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}}^i + \ddot{\mathbf{u}}^{i-1}}{2} \right) \cdot \mathbf{v} \, dV_X + \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \left( \frac{\mathbf{u}^i + \mathbf{u}^{i-1}}{2} \right) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dV_X \\ & \geq \int_{\Omega} \boldsymbol{\chi}^i : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dV_X, \quad \forall \mathbf{v} \in V_{ad}, \quad 1 \leq i \leq 2^I. \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 \dot{\mathbf{h}}^I \cdot \mathbf{v}(t) \, dV_X + \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h}_*^I) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})(t) \, dV_X \geq \int_{\Omega} \boldsymbol{\chi}_*^I : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})(t) \, dV_X, \\ & \quad \forall \mathbf{v} \in L^2(0, T; V) \text{ tal que } \mathbf{v}(t) \in V_{ad} \text{ c.p.d. en } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

con  $\boldsymbol{\chi}_*^I(t) = \boldsymbol{\chi}^i$ ,  $\forall t \in [t_{i-1}, t_i)$ . Integrando en tiempo, obtenemos

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho_0 \dot{\mathbf{h}}^I \cdot \mathbf{v} \, dV_X dt + \int_0^T \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h}_*^I) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dV_X dt \geq \int_0^T \int_{\Omega} \boldsymbol{\chi}_*^I : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dV_X dt. \quad (2.4.3)$$

(i) Sea  $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(Q)$ . Integrando en tiempo por partes en el primer término del primer miembro de (2.4.3) tenemos

$$- \int_0^T \int_{\Omega} \rho_0 \dot{\mathbf{h}}^I \cdot \dot{\mathbf{v}} \, dV_X dt + \int_0^T \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h}_*^I) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dV_X dt = \int_0^T \int_{\Omega} \boldsymbol{\chi}_*^I : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dV_X dt.$$

Usando la convergencia obtenida en el Teorema 2.3.17 podemos pasar al límite cuando  $I \rightarrow +\infty$  y así obtener

$$- \int_0^T \int_{\Omega} \rho_0 \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{v}} \, dV_X dt + \int_0^T \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dV_X dt = \int_0^T \int_{\Omega} \boldsymbol{\chi} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dV_X dt.$$

Deducimos entonces que

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{u}} - \text{Div } \boldsymbol{\eta}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad (2.4.4)$$

en el sentido de las distribuciones. Además, puesto que  $\ddot{\mathbf{u}} \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))$ , la ecuación (2.4.4) se cumple c.p.d. en  $[0, T]$ . (ver, por ejemplo, [66], pág 417).

(ii) Por el Teorema 2.3.17,  $\mathbf{u}$  pertenece a  $L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))$  y  $\dot{\mathbf{u}}$  pertenece a  $L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ . Por tanto,  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{u}) \in L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$  y  $\ddot{\mathbf{u}} \in \mathcal{D}'(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ . En

particular, de (2.4.4) se deduce que  $\text{Div } \boldsymbol{\eta}(\mathbf{u}) \in \mathcal{D}'(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$  así que  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{u}) \in \mathcal{D}'(0, T; E) \cap L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ . Finalmente, puesto que  $\mathbf{u}_*^I \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))$ , y  $\mathbf{u}_*^I \in V_{ad}$  para todo  $I$ , entonces  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))$  y  $\mathbf{u}(t) \in V_{ad}$ .

(iii) Se deduce del Lema 2.3.10.  $\square$

Puesto que  $\text{Div } \boldsymbol{\eta}(\mathbf{u}) \in \mathcal{D}'(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ , daremos a continuación una interpretación de las condiciones de contorno Neumann, para lo cual utilizaremos el siguiente resultado:

**Lema 2.4.2** *Sea  $V(Q)$  el espacio de las funciones de  $[L^2(Q)]^{n+1}$  tales que su divergencia es una función de  $L^2(Q)$ . Sea  $\boldsymbol{\zeta}$  una función de  $V(Q)$  tal que  $\zeta_{n+1} \in \mathcal{C}_s([0, T]; L^2(\Omega))$ , entonces existe una única forma lineal  $\varsigma \in H^{-1/2}(\Upsilon)$  tal que*

$$\langle \gamma_\nu(\boldsymbol{\zeta}), q \rangle_{\partial Q} = \langle \varsigma, q \rangle_\Upsilon + (\zeta_{n+1}(T), q(T))_{L^2(\Omega)} - (\zeta_{n+1}(0), q(0))_{L^2(\Omega)},$$

para cada  $q \in H^{1/2}(\partial Q)$ , siendo  $\gamma_\nu(\boldsymbol{\zeta})$  la aplicación traza normal sobre  $\partial Q$  de  $\boldsymbol{\zeta}$  y  $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^{n+1}$  el vector unitario normal exterior a  $Q$  dado por

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{X}, t) = \begin{cases} (\mathbf{n}, 0) & \text{si } (\mathbf{X}, t) \in \Upsilon, \\ (\mathbf{0}, -1) & \text{si } \mathbf{X} \in \Omega, y t = 0, \\ (\mathbf{0}, 1) & \text{si } \mathbf{X} \in \Omega, y t = T. \end{cases} \quad (2.4.5)$$

*Demostración.* La demostración puede hacerse de forma similar a la dada en [20], Lema 14.9. Cabe resaltar que en dicha demostración se exige la hipótesis  $\zeta_{n+1} \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega))$  que únicamente es necesaria para garantizar que las funciones

$$t \rightarrow \int_\Omega \zeta_{n+1}(\mathbf{X}, t) h(\mathbf{X}) dV_X, \quad y \quad t \rightarrow \int_0^t \int_\Omega \zeta_{n+1}(\mathbf{X}, t) h(\mathbf{X}) dV_X,$$

sean continuas para toda  $h \in L^2(\Omega)$ , para lo que es suficiente que  $\zeta_{n+1} \in \mathcal{C}_s([0, T]; L^2(\Omega))$  como se exige en las hipótesis del lema.  $\square$

**Definición 2.4.3** *Denotamos por  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{X}, t) \in [L^2(Q)]^{n \times (n+1)}$  el tensor de orden dos definido como*

$$\omega_{lj}(\mathbf{X}, t) = \eta_{lj}(\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)) \quad \text{para } l = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, \quad (2.4.6)$$

$$\omega_{ln+1}(\mathbf{X}, t) = -\rho_0 \dot{u}_l(\mathbf{X}, t), \quad \text{para } l = 1, \dots, n, \quad (2.4.7)$$

y para cada  $l = 1, \dots, n$  denotamos  $\mathbf{w}_l(\mathbf{X}, t) \in V(Q)$  el vector definido por  $(\mathbf{w}_l)_j(\mathbf{X}, t) = \omega_{lj}(\mathbf{X}, t)$ , para  $j = 1, \dots, n+1$ . Además, denotaremos por  $\mathbf{w}_{n+1}(\mathbf{X}, t) \in [L^2(Q)]^n$  el vector de componentes  $(\mathbf{w}_{n+1})_i(\mathbf{X}, t) = \omega_{in+1}(\mathbf{X}, t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Corolario 2.4.4** Sea  $\omega(\mathbf{X}, t)$  definido por (2.4.6)–(2.4.7). Entonces existe una única forma lineal,  $\varpi \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Upsilon)$  tal que

$$\langle \pi_\nu(\omega), \mathbf{q} \rangle_{\partial Q} = \langle \varpi, \mathbf{q} \rangle_\Upsilon + (\mathbf{w}_{n+1}(T), \mathbf{q}(T))_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - (\mathbf{w}_{n+1}(0), \mathbf{q}(0))_{\mathbf{L}^2(\Omega)},$$

para cada  $\mathbf{q} \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial Q)$ , siendo  $\pi_\nu$  la aplicación traza sobre  $\partial Q$  cuyas  $n$  componentes se corresponden con la traza normal de los vectores  $\mathbf{w}_l$ ,  $\gamma_\nu(\mathbf{w}_l)$ ,  $l = 1, \dots, n$ .

*Demostración.* En efecto, por el apartado *iii*) del Teorema 2.4.1 se tiene que  $\dot{\mathbf{u}} \in \mathcal{C}^0(0, T; H^{-1}(\Omega))$  y  $\dot{\mathbf{u}} \in \mathcal{C}_s(0, T; L^2(\Omega))$  y, en consecuencia, cada  $\mathbf{w}_l$  está en las condiciones del lema anterior.  $\square$

**Definición 2.4.5** Definimos  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{u})\mathbf{n}$  sobre  $\Upsilon$  como la forma lineal  $\varpi$  asociada al tensor  $\omega$  dado por (2.4.6)–(2.4.7).

**Teorema 2.4.6** Sea  $\mathbf{u}$  el límite presentado en el Teorema 2.3.17 y  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{u}) = \Lambda^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\chi}$ . Entonces,  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}(\mathbf{u}))$  verifica

$$\langle \boldsymbol{\eta}(\mathbf{u})\mathbf{n}, \gamma(\mathbf{v}) \rangle_\Upsilon \geq 0, \quad (2.4.8)$$

para todo  $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) \in \mathbf{H}^1(Q)$  tal que  $\mathbf{v}(t) \in V_{ad}$ , c.p.d. en  $[0, T]$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{v}(\mathbf{X}, T) = \mathbf{0}$ , y donde  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{u})\mathbf{n}$  se entiende en el sentido de la Definición 2.4.5.

*Demostración.* Sea  $\mathbf{v}$  en las condiciones del enunciado. Entonces, la ecuación (2.4.3) se cumple e, integrando por partes, tenemos,

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_\Omega \rho_0 \dot{\mathbf{h}}^I(\mathbf{X}, t) \cdot \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t) dV_X dt + \int_0^T \int_\Omega \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h}_*^I(\mathbf{X}, t)) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)) dV_X dt \\ & \geq \int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{\chi}_*^I(\mathbf{X}, t) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)) dV_X dt. \end{aligned}$$

Pasando al límite cuando  $I \rightarrow +\infty$ , obtenemos

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega} \rho_0 \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) \cdot \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t) dV_X dt + \int_0^T \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)) dV_X dt \\ & \geq \int_0^T \int_{\Omega} \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)) dV_X dt, \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo

$$- \int_0^T \int_{\Omega} \rho_0 \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) \cdot \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t) dV_X dt + \int_0^T \int_{\Omega} \boldsymbol{\eta}(\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)) dV_X dt \geq 0. \quad (2.4.9)$$

Ahora, sea  $1 \leq l \leq n$  y consideremos el tensor de orden dos  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{X}, t)$  dado en la Definición 2.4.3 y el vector correspondiente  $\mathbf{w}_l$ . De (2.4.4) se puede demostrar fácilmente que  $Div_{(x,t)}(\mathbf{w}_l(\mathbf{X}, t)) = 0$ , que trivialmente pertenece a  $[L^2(Q)]$ , donde se entiende  $Div_{(x,t)}$  la divergencia con respecto a las variables  $(x, t)$ . Así, puesto que  $\mathbf{w}_l \in V(Q)$ , podemos demostrar que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int_{\Omega} Div_{(x,t)} \mathbf{w}_l(\mathbf{X}, t) \cdot v_l(\mathbf{X}, t) dV_X dt \\ &= - \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{w}_l(\mathbf{X}, t) \cdot \nabla_{(x,t)} v_l(\mathbf{X}, t) dV_X dt + \langle \gamma_{\nu}(\mathbf{w}_l), v_l \rangle_{\partial Q} \\ &= - \int_0^T \int_{\Omega} (w_l(\mathbf{X}, t))_{1 \leq j \leq n} \cdot \nabla_x v_l(\mathbf{X}, t) dV_X dt - \int_0^T \int_{\Omega} (w_l)_{n+1} \cdot \dot{v}_l(\mathbf{X}, t) dV_X dt \\ &+ \langle \gamma_{\nu}(\mathbf{w}_l), v_l \rangle_{\partial Q}, \end{aligned}$$

donde  $(w_l(\mathbf{X}, t))_{1 \leq j \leq n}$  denota las  $n$  primeras componentes de  $\mathbf{w}_l$ .

Ahora, sumando en  $l = 1, \dots, n$ , teniendo en cuenta la definición de  $\boldsymbol{\omega}_l$  y aplicando el Corolario 2.4.4 se tiene

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega} \rho_0 \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) \cdot \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t) dV_X dt + \int_0^T \int_{\Omega} \boldsymbol{\eta}(\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)) dV_X dt \\ &= \langle \boldsymbol{\eta}(\mathbf{u}) \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} + \int_{\Omega} \rho_0 \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, 0) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{X}, 0) dV_X - \int_{\Omega} \rho_0 \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, T) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{X}, T) dV_X. \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Por último, de (2.4.9) y (2.4.10), y teniendo en cuenta que  $\mathbf{v}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{v}(\mathbf{X}, T) = \mathbf{0}$ , obtenemos

$$\langle \boldsymbol{\eta}(\mathbf{u}) \mathbf{n}, \gamma(\mathbf{v}) \rangle_{\Gamma \times (0, T)} \geq 0. \quad (2.4.11)$$

□

**Corolario 2.4.7** Si  $\mathbf{v}$  y  $-\mathbf{v} \in V_{ad}$  c.p.d.  $t \in [0, T]$ , (2.4.8) se transforma en una igualdad.  $\square$

**Teorema 2.4.8** Sea  $\mathbf{u}$  el límite presentado en el Teorema 2.3.17 y  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{u}) = \Lambda^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\chi}$ . Entonces,  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{u}) \in \mathcal{D}'(0, T; E_{ad}(\mathbf{0})) \cap L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ .

*Demostración.* Veamos que  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{u}) \in \mathcal{D}'(0, T; E_{ad}(\mathbf{0}))$ .

Empezaremos probando que  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{u})\mathbf{n} = \mathbf{0}$  en el sentido de  $\mathcal{D}'(0, T; (\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_N))')$ . Para ello, tomamos una función test  $\phi \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_N)$ , consideramos  $\tilde{\phi}$  su extensión por cero a  $\Gamma$ , y sea  $\hat{\phi} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  tal que  $\gamma(\hat{\phi}) = \tilde{\phi}$ . Tomamos  $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \hat{\phi}(\mathbf{X})\theta(t)$  con  $\theta(t) \in \mathcal{D}(0, T)$ . Dado que  $\hat{\phi} = \mathbf{0}$  sobre  $\Gamma_C$ ,  $\hat{\phi}$  y  $-\hat{\phi} \in V_{ad}$ ; por tanto, del Corolario 2.4.7 obtenemos

$$\left( \langle \boldsymbol{\eta}(\mathbf{u})\mathbf{n}, \hat{\phi} \rangle_\Gamma, \theta(t) \right)_{\mathcal{D}'\mathcal{D}} = 0. \quad (2.4.12)$$

Ahora, sea  $\phi \in \mathbf{H}_{T00}^{1/2}(\Gamma_C)$ , y sea  $\tilde{\phi}$  su extensión por cero a  $\Gamma$ , y  $\hat{\phi} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  tal que  $\gamma(\hat{\phi}) = \tilde{\phi}$ . Entonces, puesto que  $-\hat{\phi} \in V_{ad}$  y obtenemos (2.4.12) de nuevo, de lo que se concluye que  $\boldsymbol{\eta}_T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$  en el sentido de  $\mathcal{D}'(0, T; \mathbf{H}_{T00}^{1/2}(\Gamma_C))'$ .

Probaremos, a continuación, que  $\eta_n(\mathbf{u}) \leq 0$  en el sentido de  $\mathcal{D}'(0, T; \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_C))'$ . Consideramos  $\phi \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_C)$  tal que  $\phi_T = \mathbf{0}$  y  $\phi_n \leq 0$  sobre  $\Gamma_C$ . Entonces, su extensión por cero a  $\Gamma_C$ ,  $\tilde{\phi} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$  y  $\hat{\phi} \in V_{ad}$ . En la ecuación (2.4.8) consideramos  $\theta(t) \in \mathcal{D}(0, T)$  tal que  $\theta(t) \geq 0$  en  $(0, T)$ . Puesto que  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}(\mathbf{u}))$  está en las condiciones del Teorema 2.4.6, se cumple

$$\left( \langle \boldsymbol{\eta}(\mathbf{u})\mathbf{n}, \hat{\phi} \rangle_\Gamma, \theta(t) \right)_{\mathcal{D}'\mathcal{D}} \geq 0.$$

En consecuencia,  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{u}) \in \mathcal{D}'(0, T; E_{ad}(\mathbf{0}))$ .  $\square$

**Teorema 2.4.9** Sea  $\mathbf{u}$  el límite presentado en el Teorema 2.3.17. Entonces,  $\mathbf{u}$  verifica las condiciones iniciales (2.1.15).

*Demostración.* Del Corolario 2.3.18 tenemos

$$\mathbf{l}^I \longrightarrow \mathbf{u} \quad \text{en} \quad \mathcal{C}([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega)).$$

Entonces, como  $l^I(0) = \mathbf{u}_0$  para todo  $I$ , podemos pasar al límite y obtener que  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ .

Además, puesto que

$$\dot{\mathbf{h}}^I \longrightarrow \dot{\mathbf{u}} \quad \text{en} \quad \mathcal{C}_s([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega)),$$

entonces

$$\int_{\Omega} \dot{\mathbf{h}}^I(0) \cdot \mathbf{v} \, dV_X \longrightarrow \int_{\Omega} \dot{\mathbf{u}}(0) \cdot \mathbf{v} \, dV_X, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{D}(Q).$$

Dado que  $\dot{\mathbf{h}}^I(0) = \mathbf{u}_1$  para todo  $I$ , se concluye que

$$\int_{\Omega} \dot{\mathbf{u}}(0) \cdot \mathbf{v} \, dV_X = \int_{\Omega} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v} \, dV_X, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{D}(Q),$$

y las condiciones iniciales se cumplen.  $\square$

Hemos visto que  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})$  verifican las condiciones (2.1.29) y (2.1.30) para el problema **(HP)**. Veremos a continuación que la condición de complementariedad se cumple en el sentido  $\delta$ -débil dado en (2.1.31).

**Proposición 2.4.10** *Sea  $\delta > 0$  cualquiera. Entonces, existe un conjunto  $D_\delta \subset \Upsilon$  tal que  $\text{med}_n(\Upsilon \setminus D_\delta) < \delta$  y*

$$\gamma_\nu(l^I) \rightarrow \gamma_\nu(\mathbf{u}) \tag{2.4.13}$$

*uniformemente en  $D_\delta$ .*

*En particular,*

$$\gamma_\nu(l^I) \rightarrow \gamma_\nu(\mathbf{u}) \tag{2.4.14}$$

*uniformemente en  $D_\delta \cap (\Gamma_C \times (0, T))$ , es decir, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $I_0$  tal que para todo  $I \geq I_0$*

$$|\gamma_\nu(l^I)(\mathbf{X}, t) - \gamma_\nu(\mathbf{u})(\mathbf{X}, t)| < \frac{\epsilon}{4}, \quad \forall (\mathbf{X}, t) \in D_\delta \cap (\Gamma_C \times (0, T)). \tag{2.4.15}$$

$\square$

*Demostración.* Sea  $\delta > 0$  fijo. Puesto que  $\{\mathbf{l}^I\}$  está acotada en  $L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))$  y  $\{\dot{\mathbf{l}}^I\}$  está acotada en  $L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ , se tiene que  $\{\mathbf{l}^I\}$  está acotada en  $\mathbf{H}^1(Q)$ . Dado que la aplicación traza es compacta de  $\mathbf{H}^1(Q)$  en  $\mathbf{L}^2(\partial Q)$ , existe una subsucesión de  $\mathbf{l}^I$ , que seguiremos denotando por  $\mathbf{l}^I$ , tal que:

$$\mathbf{l}^I \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{en } \mathbf{L}^2(Q), \quad (2.4.16)$$

y casi por doquier en  $\partial Q$ , y en particular,

$$\gamma_\nu(\mathbf{l}^I) \rightarrow \gamma_\nu(\mathbf{u}) \quad \text{c.p.d. sobre } \Gamma_C \times (0, T). \quad (2.4.17)$$

Ahora, por el teorema de Egorov (ver Brézis [15], pág 75), existe un conjunto  $D_\delta \subset \Upsilon$  tal que  $med_n(\Upsilon \setminus D_\delta) < \delta$  y

$$\gamma_\nu(\mathbf{l}^I) \rightarrow \gamma_\nu(\mathbf{u}) \quad \text{uniformemente en } D_\delta. \quad (2.4.18)$$

En particular,

$$\gamma_\nu(\mathbf{l}^I) \rightarrow \gamma_\nu(\mathbf{u}) \quad \text{uniformemente en } D_\delta \cap (\Gamma_C \times (0, T)), \quad (2.4.19)$$

es decir, para todo  $\delta > 0$  existe un índice  $I_0$  tal que para todo  $I \geq I_0$  se cumple

$$|\gamma_\nu(\mathbf{l}^I)(\mathbf{X}, t) - \gamma_\nu(\mathbf{u})(\mathbf{X}, t)| < \frac{\delta}{4}, \quad \forall (\mathbf{X}, t) \in D_\delta \cap (\Gamma_C \times (0, T)). \quad (2.4.20)$$

□.

**Proposición 2.4.11** *Sea  $\mathcal{N}_{I_\delta} = (\mathcal{N}_I \cap D_\delta)^\circ$ . Entonces, para todo  $(\mathbf{X}_0, t_0) \in \mathcal{N}_{I_\delta}$  existe un radio  $r_{x_0, t_0}$  y un índice  $I_{x_0, t_0}$  tales que*

$$\gamma_\nu(\mathbf{u}_*^I)(\mathbf{X}, t) < 0 \quad \forall (\mathbf{X}, t) \in B((\mathbf{X}_0, t_0), r_{x_0, t_0}) \quad \text{y} \quad \forall I \geq I_{x_0, t_0}.$$

*Demostración.* Por la Proposición 2.1.10,  $\mathcal{N}_{I_\delta}$  es un conjunto abierto. Consideremos  $(\mathbf{X}_0, t_0) \in \mathcal{N}_{I_\delta}$ . Por una parte, existe  $r_0 > 0$  tal que  $B((\mathbf{X}_0, t_0), r_0) \cap \Upsilon \subset \mathcal{N}_{I_\delta}$ . Por otra parte, puesto que  $\gamma_\nu(\mathbf{u})(\mathbf{X}_0, t_0) < 0$  existen  $\tilde{r} > 0$  y  $\alpha$  en las condiciones de la Definición 2.1.9. Tomamos entonces  $r = \min\{r_0/2, \tilde{r}/2\}$  y  $A_{x_0, t_0} = B((\mathbf{X}_0, t_0), r)$  y construimos  $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{2}f$  siendo  $f$  una función que toma

el valor 1 en  $A_{x_0, t_0}$ , se anula en el complementario de  $B((\mathbf{X}_0, t_0), 2r)$  y es mayor o igual que cero sobre  $\Gamma_C \times (0, T)$ . Entonces,  $\tilde{\alpha}$  es tal que  $\tilde{\alpha} = 0$  sobre  $\bar{Q} \setminus B((\mathbf{X}_0, t_0), 2r)$ ,  $\tilde{\alpha} > 0$  sobre  $B((\mathbf{X}_0, t_0), r) \cap \bar{Q}$  y

$$\tilde{\alpha} + \gamma_\nu(\mathbf{u}) \leq 0 \quad \text{sobre } \Gamma_C \times (0, T).$$

Sea

$$\epsilon_{x_0, t_0} = \min_{(\mathbf{X}, t) \in A_{x_0, t_0}} \tilde{\alpha}(\mathbf{X}, t).$$

Entonces, existe  $I_{\epsilon_{x_0, t_0}}$  tal que para todo  $I \geq I_{\epsilon_{x_0, t_0}}$

$$|\gamma_\nu(\mathbf{l}^I)(\mathbf{X}, t) - \gamma_\nu(\mathbf{u})(\mathbf{X}, t)| < \frac{\epsilon_{x_0, t_0}}{2}, \quad \forall (\mathbf{X}, t) \in D_\delta \cap (\Gamma_C \times (0, T)), \quad (2.4.21)$$

en particular, para todo  $(\mathbf{X}, t) \in A_{x_0, t_0}$ .

Veremos ahora que  $\gamma_\nu(\mathbf{l}^I)(\mathbf{X}_0, t_0) < 0$ . Por la ecuación (2.4.21) se tiene

$$\gamma_\nu(\mathbf{l}^I)(\mathbf{X}, t) + \tilde{\alpha}(\mathbf{X}, t) - (\gamma_\nu(\mathbf{u})(\mathbf{X}, t) + \tilde{\alpha}(\mathbf{X}, t)) \leq \frac{\epsilon_{x_0, t_0}}{2} \quad \forall (\mathbf{X}, t) \in D_\delta \cap (\Gamma_C \times (0, T)),$$

Ahora bien, puesto que  $\gamma_\nu(\mathbf{u}) + \tilde{\alpha} \leq 0$  sobre  $\Gamma_C \times (0, T)$ ,

$$\gamma_\nu(\mathbf{l}^I)(\mathbf{X}, t) + \tilde{\alpha}(\mathbf{X}, t) \leq \frac{\epsilon_{x_0, t_0}}{2} \quad \forall (\mathbf{X}, t) \in D_\delta \cap (\Gamma_C \times (0, T)),$$

y puesto que  $\epsilon_{x_0, t_0} \leq \tilde{\alpha}(\mathbf{X}, t)$  para todo  $(\mathbf{X}, t) \in \bar{A}_{x_0, t_0}$ ,

$$\gamma_\nu(\mathbf{l}^I)(\mathbf{X}, t) + \frac{\tilde{\alpha}(\mathbf{X}, t)}{2} \leq \frac{\epsilon_{x_0, t_0}}{2} - \frac{\tilde{\alpha}(\mathbf{X}, t)}{2} \leq 0 \quad \forall (\mathbf{X}, t) \in A_{x_0, t_0},$$

y para todo  $I \geq I_{\epsilon_{x_0, t_0}}$ . En consecuencia, se cumple que

$$\gamma_\nu(\mathbf{l}^I)(\mathbf{X}, t) < 0 \quad \text{para todo } (\mathbf{X}, t) \in A_{x_0, t_0} \text{ y para todo } I \geq I_{\epsilon_{x_0, t_0}}, \quad (2.4.22)$$

pues  $A_{x_0, t_0}$  es abierto, y se puede construir una función  $\hat{\alpha}$  con soporte contenido en  $A_{x_0, t_0}$  para  $(\mathbf{X}, t)$  a partir de  $\frac{\tilde{\alpha}}{2}$  verificando todas las condiciones de la Definición 2.1.9. En particular,  $\gamma_\nu(\mathbf{l}^I)(\mathbf{X}_0, t_0) < 0$ .

Veamos ahora que existe un radio  $r_{x_0, t_0}$  y un índice  $I_{x_0, t_0}$  tales que

$$\gamma_\nu(\mathbf{u}_*)^I(\mathbf{X}, t) < 0 \quad \forall (\mathbf{X}, t) \in B((\mathbf{X}_0, t_0), r_{x_0, t_0}) \quad \text{y} \quad \forall I \geq I_{x_0, t_0}.$$

En efecto, conocido  $r$ , existe un índice  $I_r$  tal que  $\Delta t^{I_r} = \frac{T}{2I_r} < \frac{r}{2}$ . Sea  $I_{x_0, t_0} = \max\{I_{\epsilon_{x_0, t_0}}, I_r\}$ . Entonces, existe  $0 \leq i \leq 2^{I_{x_0, t_0}}$  tal que

$$t_0 \in (t_{i-1}^{I_{x_0, t_0}}, t_i^{I_{x_0, t_0}}] \quad \text{y} \quad (x_0, t_l^{I_{x_0, t_0}}) \in A_{x_0, t_0}, \quad l = i - 2, i - 1, i.$$

Consideramos  $r_{x_0, t_0} = t_i^{I_{x_0, t_0}} - t_0 \leq \frac{r}{2}$ . Entonces, para todo  $(\mathbf{X}, t) \in B((\mathbf{X}_0, t_0), r_{x_0, t_0})$  los puntos

$$(x, t_l^{I_{x_0, t_0}}) \in A_{x_0, t_0}, \quad l = i - 2, i - 1, i$$

y por tanto

$$\gamma_\nu(\mathbf{u}_*^{I_{x_0, t_0}})(\mathbf{X}, t) = \gamma_\nu(\mathbf{l}^{I_{x_0, t_0}})(x, t_l^{I_{x_0, t_0}}) < 0,$$

siendo  $l$  tal que  $t \in (t_{l-1}, t_l]$ . Además, por las propiedades de las particiones en tiempo consideradas, para todo  $J$  de la forma  $J = I_{x_0, t_0} + k$ , con  $k \geq 0$ , se verifica que los puntos  $(x, t_j^J)$  con  $j \in \{2^k(i-2), \dots, 2^k i\}$  pertenecen a  $A_{x_0, t_0}$  y por tanto  $\gamma_\nu(\mathbf{l}^I)(x, t_j^J) < 0$  de donde se deduce que

$$\gamma_\nu(\mathbf{u}_*^I)(\mathbf{X}, t) < 0 \quad \forall (\mathbf{X}, t) \in B((\mathbf{X}_0, t_0), r_{x_0, t_0}) \quad \text{y} \quad \forall I \geq I_{x_0, t_0},$$

□

**Corolario 2.4.12** *Para cada punto  $(\mathbf{X}_0, t_0) \in \mathcal{N}_{I_\delta}$  existen un índice  $I_{x_0, t_0}$  y un radio  $r_{x_0, t_0}$ , tales que*

$$\pi_n(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}_*^I)) = 0 \quad \text{sobre} \quad B((\mathbf{X}_0, t_0), r_{x_0, t_0}) \quad \text{y} \quad \forall I \geq I_{x_0, t_0}.$$

*Demostración.* Dado un punto  $(\mathbf{X}_0, t_0) \in \mathcal{N}_{I_\delta}$ , por la Proposición 2.4.11 existen un índice  $I_{x_0, t_0}$  y un radio  $r_{x_0, t_0}$ , tales que

$$\gamma_\nu(\mathbf{u}_*^I)(\mathbf{X}, t) < 0 \quad \forall (\mathbf{X}, t) \in B((\mathbf{X}_0, t_0), r_{x_0, t_0}) \quad \text{y} \quad \forall I \geq I_{x_0, t_0},$$

Entonces, aplicando el Corolario 2.2.4 se obtiene el resultado. □

A continuación, necesitaremos el siguiente resultado.

**Teorema 2.4.13** *Sea  $A$  un subconjunto arbitrario de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\mathcal{O}$  una colección de subconjuntos abiertos en  $\mathbb{R}^n$ , que recubre  $A$ , es decir, tales que  $A = \cup_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}} \mathcal{U}$ . Entonces, existe una colección  $\Theta$  de funciones  $\vartheta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  con las siguientes propiedades:*

*i) Para cada  $\vartheta \in \Theta$  y cada  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 \leq \vartheta(\mathbf{X}) \leq 1$ .*

- ii) Si  $A_1 \subset\subset A$ , todas salvo a lo sumo un número finito de  $\vartheta \in \Theta$  se anulan en  $A_1$ .
- iii) Para cada  $\vartheta \in \Theta$ , existe  $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$  tal que  $\text{supp}\vartheta \subset \mathcal{U}$ .
- iv) Para cada  $\mathbf{X} \in A$ ,  $\sum_{\vartheta \in \Theta} \vartheta(\mathbf{X}) = 1$ .

Dicha colección  $\Theta$  se denomina *partición de la unidad  $\mathcal{C}^\infty$  para  $A$  subordinada a  $\mathcal{O}$* .

*Demostración.* Véase Adams [3] pág. 51. □

**Teorema 2.4.14** *Sea  $\mathbf{u}$  el límite presentado en el Teorema 2.3.17 y  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{u}) = \Lambda^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\chi}$ . Entonces,  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})$  es solución  $\delta$ -débil del problema (HP).*

*Demostración.* Por los Teoremas 2.4.1 y 2.4.8, tenemos que  $\mathbf{u}$  y  $\boldsymbol{\eta}$  verifican (2.1.29) y (2.1.30) respectivamente. Resta únicamente demostrar que la condición de complementariedad se verifica en el sentido  $\delta$ -débil dado por (2.1.31). Sea  $\boldsymbol{\phi} \in H_{00}^{1/2}(\mathcal{N}_{I_\delta})$  tal que  $\boldsymbol{\phi}_T = \mathbf{0}$  y  $\boldsymbol{\phi}_n \leq 0$  sobre  $\Gamma_C \times (0, T)$ . Sea  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(Q)$  tal que  $\mathbf{v}(t) \in V_{ad}$  c.p.d.  $t \in [0, T]$ ,  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}(T) = \mathbf{0}$  y  $\gamma_\nu(\mathbf{v}) = \boldsymbol{\phi}$ . Ahora bien

$$\boldsymbol{\phi} = \lim_{m \rightarrow \infty} \boldsymbol{\phi}_m, \quad \boldsymbol{\phi}_m \in \mathcal{C}_0(\mathcal{N}_{I_\delta}). \quad (2.4.23)$$

Sea  $\mathcal{O} = \{B((\mathbf{X}_0, t_0), r_{x_0, t_0}) / (\mathbf{X}_0, t_0) \in \mathcal{N}_{I_\delta}\}$  la colección de bolas obtenidas en la Proposición 2.4.11 que, por definición, es una colección de subconjuntos abiertos en  $\mathbb{R}^n$  que recubre  $\mathcal{N}_{I_\delta}$ . Entonces, por el Teorema 2.4.13 existe  $\Theta$ , partición de la unidad  $\mathcal{C}^\infty$  para  $\mathcal{N}_{I_\delta}$  subordinada a  $\mathcal{O}$ .

Entonces,

$$\langle \boldsymbol{\eta}(\mathbf{u})\mathbf{n}, \boldsymbol{\phi} \rangle_\Upsilon = \langle \boldsymbol{\eta}(\mathbf{u})\mathbf{n}, \boldsymbol{\phi} \left( \sum_{\vartheta \in \Theta} \vartheta \right) \rangle_\Upsilon = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \boldsymbol{\eta}(\mathbf{u})\mathbf{n}, \boldsymbol{\phi}_m \left( \sum_{\vartheta \in \Theta} \vartheta \right) \rangle_\Upsilon. \quad (2.4.24)$$

Puesto que las funciones  $\boldsymbol{\phi}_m$  tienen soporte compacto contenido en  $\mathcal{N}_{I_\delta}$ , por la propiedad *ii*) de la partición de la unidad, la suma se reduce a una suma finita de índices  $j_m \in \{N_{m1}, N_{m2}, \dots, N_m\}$  de modo que

$$\langle \boldsymbol{\eta}(\mathbf{u})\mathbf{n}, \boldsymbol{\phi} \rangle_\Upsilon = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \boldsymbol{\eta}(\mathbf{u})\mathbf{n}, \boldsymbol{\phi}_m \left( \sum_{j_m} \vartheta_{j_m} \right) \rangle_\Upsilon. \quad (2.4.25)$$

Para cada  $\phi_m \vartheta_{j_m}$  tenemos  $\mathbf{v}_{j_m} \in \mathbf{H}^1(Q)$  tal que  $\mathbf{v}_{j_m}(t) \in V_{ad}$  c.p.d.  $t \in [0, T]$ ,  $\mathbf{v}_{j_m}(0) = \mathbf{v}_{j_m}(T) = \mathbf{0}$  y  $\gamma_\nu(\mathbf{v}_{j_m}) = \phi_m \vartheta_{j_m}$  y por tanto, de (2.4.10) se deduce

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \boldsymbol{\eta}(\mathbf{u})\mathbf{n}, \phi_m(\sum_{j_m} \vartheta_{j_m}) \rangle_{\Gamma} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( - \int_0^T \int_{\Omega} \rho_0 \dot{\mathbf{u}}(\sum_{j_m} \dot{\mathbf{v}}_{j_m}) dV_X dt + \int_0^T \int_{\Omega} \boldsymbol{\eta}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\sum_{j_m} \mathbf{v}_{j_m}) dV_X dt \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \lim_{I \rightarrow \infty} \left( - \int_0^T \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{h}^I(\sum_{j_m} \dot{\mathbf{v}}_{j_m}) dV_X dt + \int_0^T \int_{\Omega} \boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}_*^I) : \boldsymbol{\varepsilon}(\sum_{j_m} \mathbf{v}_{j_m}) dV_X dt \right) \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \lim_{I \rightarrow \infty} \int_0^T \langle \pi_n(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}_*^I)), \phi_m(\sum_{j_m} \vartheta_{j_m}) \rangle_{\Gamma_C} dt \right). \end{aligned}$$

Ahora bien, el soporte de cada  $\vartheta_{j_m}$  está contenido en una bola del recubrimiento  $B_{j_m} = B((\mathbf{X}_0, t_0), r_{x_0, t_0})$  y para cada bola hay un índice,  $I_{j_m} = I_{x_0, t_0}$  a partir del cual hemos demostrado que  $\pi_n(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}_*^I)) = 0$  sobre ese entorno. Y como la suma es finita para cada  $m$ , existe un índice  $I_m = mx_{j_m} I_{j_m}$  tal que  $\pi_n(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}_*^I)) = 0$  para todo  $I \geq I_m$  y por tanto,

$$\lim_{I \rightarrow \infty} \int_0^T \langle \pi_n(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{h}_*^I)), \phi_m(\sum_{j_m} \vartheta_{j_m}) \rangle_{\Gamma_C} dt = 0, \quad \forall m. \quad (2.4.26)$$

En consecuencia,

$$\langle \boldsymbol{\eta}(\mathbf{u})\mathbf{n}, \boldsymbol{\phi} \rangle_{\Gamma} = 0, \quad \forall \boldsymbol{\phi} \in H_{00}^{1/2}(\mathcal{N}_{I_s}) \text{ tal que } \boldsymbol{\phi}_T = \mathbf{0} \text{ y } \phi_n \leq 0 \text{ sobre } \Gamma_C \times (0, T). \quad (2.4.27)$$

□

**Corolario 2.4.15** *Sea  $\mathbf{u}$  el límite presentado en el Teorema 2.3.17 y  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \Lambda^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ . Entonces,  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$  es solución  $\delta$ -débil del problema **(P)**.*

*Demostración.* Es consecuencia directa del teorema anterior y la relación entre  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\boldsymbol{\eta}$ . □

## 2.5. Acotación de la energía asociada a la solución $\delta$ -débil

**Definición 2.5.1** *Dados  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))$  y  $\mathbf{v} \in L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ , definimos el funcional de energía total como*

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathcal{E}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) dt &= \int_0^T \frac{1}{2} \int_\Omega (\rho_0 |\mathbf{v}|^2 + \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) dV_X dt \\ &\quad - \int_0^T \int_\Omega \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u} dV_X dt - \int_0^T \int_{\Gamma_N} \mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{u} dA_X dt, \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

donde el primer término del segundo miembro es la energía cinética si  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$ , el segundo es la energía elástica y los dos últimos términos representan la energía potencial que proviene de las fuerzas de volumen y superficie, respectivamente.

**Proposición 2.5.2 (Desigualdad de la energía para la solución  $\delta$ -débil.)**

Sea  $\mathbf{u}$  el límite presentado en el Teorema 2.3.17 y  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{u}) = \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\chi}$ . Entonces,

$$\int_0^T \mathcal{E}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) dt \leq \int_0^T \mathcal{E}(\mathbf{u}^0, \dot{\mathbf{u}}^0) dt + \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \dot{\boldsymbol{\chi}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) dV_X ds dt.$$

*Demostración.* Por el Corolario 2.3.14, se tiene que

$$\begin{aligned} &\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathcal{E}(\mathbf{u}^{i+1}, \dot{\mathbf{u}}^{i+1}) dt \\ &\leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathcal{E}(\mathbf{u}^0, \dot{\mathbf{u}}^0) dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_0^{t_{i+1}} \int_\Omega \dot{\boldsymbol{\chi}}^I : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*^I) dV_X ds dt, \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

donde, por definición,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{u}^{i+1}, \dot{\mathbf{u}}^{i+1}) &= \frac{1}{2} \int_\Omega (\rho_0 (\mathbf{h}_\#^I(t))^2 + \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*^I(t)) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*^I(t))) dV_X \\ &\quad - \int_\Omega \mathbf{b}_0^I(t) \cdot \mathbf{u}_*^I(t) dV_X - \int_{\Gamma_N} \mathbf{s}_0^I(t) \cdot \mathbf{u}_*^I(t) dA_X, \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

o lo que es lo mismo:

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}^{i+1}, \dot{\mathbf{u}}^{i+1}) = \mathcal{E}(\mathbf{u}_*^I(t), \mathbf{h}_\#^I(t)), \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}]. \quad (2.5.4)$$

Sumando desde  $i = 0$  hasta  $i = 2^I - 1$  en la inecuación (2.5.2) se deduce:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \mathcal{E}(\mathbf{u}_*^I(t), \mathbf{h}_\#^I(t)) dt \\ & \leq \int_0^T \mathcal{E}(\mathbf{u}^0, \dot{\mathbf{u}}^0) dt + \int_0^T \int_0^{E\left[t\frac{2^I}{T}+1\right]\frac{T}{2^I}} \dot{\chi}^I : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*^I) dV_X ds dt. \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

Ahora bien, por las convergencias débiles del Teorema 2.3.17 y la semicontinuidad inferior, se tiene:

$$\begin{aligned} & \liminf_{I \rightarrow \infty} \int_0^T \mathcal{E}(\mathbf{u}_*^I(t), \mathbf{h}_\#^I(t)) dt \\ & = \liminf_{I \rightarrow \infty} \left( \int_0^T \frac{1}{2} \int_\Omega (\rho_0(\mathbf{h}_\#(t)))^2 + \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*^I(t)) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*^I(t)) dV_X dt \right. \\ & \quad \left. - \int_0^T \int_\Omega \mathbf{b}_0^I(t) \cdot \mathbf{u}_*^I(t) dV_X dt - \int_0^T \int_{\Gamma_N} \mathbf{s}_0^I(t) \cdot \mathbf{u}_*^I(t) dA_X dt \right) \\ & \geq \liminf_{I \rightarrow \infty} \left( \int_0^T \frac{1}{2} \int_\Omega \rho_0(\mathbf{h}_\#(t))^2 dV_X dt \right) + \lim_{I \rightarrow \infty} \left( - \int_0^T \int_\Omega \mathbf{b}_0^I(t) \cdot \mathbf{u}_*^I(t) dV_X dt \right) \\ & \quad + \liminf_{I \rightarrow \infty} \left( \int_0^T \frac{1}{2} \int_\Omega \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*^I(t)) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*^I(t)) dV_X dt \right) \\ & \quad + \lim_{I \rightarrow \infty} \left( - \int_0^T \int_{\Gamma_N} \mathbf{s}_0^I(t) \cdot \mathbf{u}_*^I(t) dA_X dt \right) \\ & \geq \int_0^T \frac{1}{2} \int_\Omega \rho_0(\dot{\mathbf{u}}(t))^2 dV_X dt + \int_0^T \frac{1}{2} \int_\Omega \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) dV_X dt \\ & \quad - \int_0^T \int_\Omega \mathbf{b}_0(t) \cdot \mathbf{u}(t) dV_X dt - \int_0^T \int_{\Gamma_N} \mathbf{s}_0(t) \cdot \mathbf{u}(t) dA_X dt, \end{aligned}$$

esto es,

$$\liminf_{I \rightarrow \infty} \int_0^T \mathcal{E}(\mathbf{u}_*^I(t), \mathbf{h}_\#^I(t)) dt \geq \int_0^T \mathcal{E}(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) dt. \quad (2.5.6)$$

Por otra parte,

$$t = \lim_{I \rightarrow \infty} \left( t \frac{2^I}{T} \right) \frac{T}{2^I} \leq \lim_{I \rightarrow \infty} E \left[ t \frac{2^I}{T} + 1 \right] \frac{T}{2^I} \leq \lim_{I \rightarrow \infty} (t \frac{2^I}{T} + 2) \frac{T}{2^I} = t,$$

por tanto,

$$\lim_{I \rightarrow \infty} E \left[ t \frac{2^I}{T} + 1 \right] \frac{T}{2^I} = t. \quad (2.5.7)$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} & \lim_{I \rightarrow \infty} \left( \int_0^T \mathcal{E}(\mathbf{u}^0, \dot{\mathbf{u}}^0) dt + \int_0^T \int_0^{E\left[t^{\frac{2I}{T}+1}\right]^{\frac{T}{2I}}} \int_{\Omega} \dot{\boldsymbol{\chi}}^I : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*^I) dV_X ds dt \right) \\ &= \int_0^T \mathcal{E}(\mathbf{u}^0, \dot{\mathbf{u}}^0) dt + \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} \dot{\boldsymbol{\chi}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) dV_X ds dt. \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

Teniendo en cuenta (2.5.5), (2.5.6) y (2.5.8) se concluye el resultado.  $\square$

## 2.6. Resolución numérica del problema

El objetivo de esta sección es la resolución numérica del problema bidimensional de contacto. Se propone un algoritmo para la resolución inspirado en la demostración anterior. El código se ha probado con la resolución de un caso académico para el que se presentan resultados de convergencia. Para simplificar la notación, omitiremos los superíndices  $i$ , pero ha de tenerse presente que estamos resolviendo los problemas discretos en tiempo.

### 2.6.1. Formulación variacional

Mediante técnicas variacionales clásicas obtenemos la formulación del Problema (DHP) como inecuación variacional dada por:

**PROBLEMA (VP):** Hallar  $\mathbf{u} \in V_{ad}$  y  $\boldsymbol{\sigma} \in E$  verificando,

$$\int_{\Omega} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) dV_X + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) dV_X \geq \mathbf{L}(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{v} \in V_{ad}, \quad (2.6.1)$$

y las condiciones iniciales (2.1.6), donde  $\ddot{\mathbf{u}}$  se relaciona con los desplazamientos,  $\mathbf{u}$  mediante la relación (2.2.5). El tensor de tensiones se relaciona con el tensor de deformación por medio de la ley constitutiva  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ , y

$$\mathbf{L}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{b}_0 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) dV_X + \int_{\Gamma_N} \mathbf{s}_0 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) dA_X. \quad (2.6.2)$$

### 2.6.2. Discretización en espacio

Sea  $\mathcal{T}_h$  una malla de triángulos del dominio bidimensional, compatible con la partición de la frontera. Sea  $h$  el máximo de los diámetros de los elementos de  $\mathcal{T}_h$ . Dada una arista  $e$  de la malla inducida por  $\mathcal{T}_h$  en la frontera, denotamos por  $\mathbf{n}_e$  al vector unitario normal exterior a  $\Omega$  en el punto medio de  $e$ .

Sea  $\mathcal{S}_h = \{e_i, 1 \leq i \leq m_h\}$  el conjunto de aristas en  $\Gamma_C$ .

Consideramos el espacio discreto

$$V_h = \{\mathbf{v}_h \in [\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})]^2; \mathbf{v}_h|_{T_k} \in [P_1(T_k)]^2, \forall T_k \in \mathcal{T}_h; \mathbf{v}_h = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma_D\}, \quad (2.6.3)$$

donde  $P_1(T_k)$  denota el espacio de las funciones lineales a trozos definidas sobre el elemento  $T_k$ , y el subconjunto de desplazamientos admisibles

$$V_{ad_h} = \{\mathbf{v}_h \in V_h; \mathbf{v}_h|_{e_i} \cdot \mathbf{n}_{e_i} \leq 0, \quad 1 \leq i \leq m_h\}, \quad (2.6.4)$$

donde  $\mathbf{v}_h|_{e_i}$  representa el valor de  $\mathbf{v}_h$  en el punto medio de  $e_i$ .

El espacio discreto considerado para las tensiones será:

$$E_h = \{\boldsymbol{\sigma}_h; \boldsymbol{\sigma}_h|_{T_k} \in [P_0(T_k)]^4, (\boldsymbol{\sigma}_h)_{\alpha\beta} = (\boldsymbol{\sigma}_h)_{\beta\alpha} \forall T_k \in \mathcal{T}_h\}, \quad (2.6.5)$$

siendo  $P_0(T_k)$  el espacio de las funciones constantes sobre  $T_k$ .

La formulación variacional (2.6.1) puede expresarse de forma discreta como:

**PROBLEMA (VHP):** Hallar  $\mathbf{u}_h \in V_{ad_h}$  y  $\boldsymbol{\sigma}_h \in E_h$  verificando,

$$\int_{\Omega} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h \cdot (\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) dV_X + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_h(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}_h(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) dV_X \geq \mathbf{L}_h(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_{ad_h}, \quad (2.6.6)$$

siendo

$$\mathbf{L}_h(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) = \int_{\Omega} (\mathbf{b}_0)_h \cdot (\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) dV_X + \int_{\Gamma_N} (\mathbf{s}_0)_h \cdot (\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) dA_X, \quad (2.6.7)$$

donde  $(\mathbf{b}_0)_h$  y  $(\mathbf{s}_0)_h$  son las funciones lineales a trozos que aproximan  $\mathbf{b}_0$  y  $\mathbf{s}_0$  respectivamente, y  $\ddot{\mathbf{u}}_h$  se relaciona con los desplazamientos,  $\mathbf{u}_h$ , mediante la relación (2.2.5).

La ley constitutiva discreta se expresa como

$$\boldsymbol{\sigma}_h(\mathbf{u}_h) = \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_h(\mathbf{u}_h) = \lambda \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}_h(\mathbf{u}_h) + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_h(\mathbf{u}_h), \quad (2.6.8)$$

donde  $\boldsymbol{\varepsilon}_h(\mathbf{u}_h)$  es una función constante por elemento calculada como el tensor de deformación linealizado asociado a  $\mathbf{u}_h|_{T_k}$ , y  $\lambda$  y  $\mu$  son los parámetros de Lamé del material.

### 2.6.3. Tratamiento de las condiciones de contacto

En esta subsección obtendremos una formulación del problema como ecuación variacional introduciendo un multiplicador de contacto  $p_h$ , el cual es un punto fijo de una ecuación no lineal. Para aproximar este multiplicador se utilizan argumentos de subdiferenciabilidad y teoría de operadores maximales monótonos. Referencias adecuadas acerca de estos temas son, por ejemplo, [8, 13, 99]. Definimos el conjunto

$$P_h = \{p_h \in L^\infty(\Gamma_C); p_h|_{e_i} \in P_0(e_i), \quad 1 \leq i \leq m_h\},$$

y denotamos por  $Q_h$  el subconjunto convexo:

$$Q_h = \{p_h \in P_h; p_h|_{e_i} \leq 0, \quad 1 \leq i \leq m_h\}.$$

Sea  $B$  el operador:

$$\begin{aligned} B: V_h &\longrightarrow P_h \\ \mathbf{v}_h &\longmapsto B(\mathbf{v}_h) = p_h, \end{aligned}$$

definido como:

$$p_h|_{e_i} = \mathbf{v}_h|_{e_i} \cdot \mathbf{n}_{e_i}, \quad 1 \leq i \leq m_h,$$

y  $B^*$  su operador adjunto.

Sean  $I_{V_{ad_h}}$  e  $I_{Q_h}$  las funciones indicatrices de  $V_{ad_h}$  y  $Q_h$  respectivamente. Por definición de  $I_{V_{ad_h}}$  y  $I_{Q_h}$  se tiene:

$$I_{V_{ad_h}} = I_{Q_h} \circ B, \quad (2.6.9)$$

y, de la regla de la cadena del cálculo subdiferencial, se deduce:

$$\partial(I_{V_{ad_h}})(\mathbf{v}_h) = B^*(\partial I_{Q_h})(B(\mathbf{v}_h)), \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \quad (2.6.10)$$

puesto que  $(Q_h)^\circ \neq \emptyset$ .

**Proposición 2.6.1** Sean  $\mathbf{u}_h \in V_{ad_h}$  y  $\boldsymbol{\sigma}_h \in E_h$ . Se verifica que

$$-\rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h - \boldsymbol{\varepsilon}_h^*(\boldsymbol{\sigma}_h) + \mathbf{L} \in B^*(\partial I_{Q_h})(B(\mathbf{u}_h)), \quad (2.6.11)$$

si y sólo si  $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\sigma}_h)$  son solución de la inecuación variacional (2.6.6), siendo  $\mathbf{L}$  el elemento de  $V'_h$  definido por:

$$\mathbf{L}_h(\mathbf{v}_h) = \int_{\Omega} (\mathbf{b}_0)_h \cdot \mathbf{v}_h dV_X + \int_{\Gamma_N} (\mathbf{s}_0)_h \cdot \mathbf{v}_h dA_X,$$

siendo  $\boldsymbol{\varepsilon}_h^*$  el operador adjunto de  $\boldsymbol{\varepsilon}_h$ .

*Demostración.* Por definición de  $\boldsymbol{\varepsilon}_h^*$ , la inecuación (2.6.6) se expresa como:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h \cdot (\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) dV_X + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_h^*(\boldsymbol{\sigma}_h) \cdot (\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) dV_X \\ & \geq \int_{\Omega} (\mathbf{b}_0)_h \cdot (\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) dV_X + \int_{\Gamma_N} (\mathbf{s}_0)_h \cdot (\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) dA_X, \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_{ad_h}. \end{aligned}$$

Por definición de la función  $I_{V_{ad_h}}$ , la inecuación anterior se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h \cdot (\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) dV_X + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_h^*(\boldsymbol{\sigma}_h) \cdot (\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) dV_X - I_{V_{ad_h}}(\mathbf{u}_h) + I_{V_{ad_h}}(\mathbf{v}_h) \\ & \geq \int_{\Omega} (\mathbf{b}_0)_h \cdot (\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) dV_X + \int_{\Gamma_N} (\mathbf{s}_0)_h \cdot (\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) dA_X, \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \end{aligned}$$

que, en notación subdiferencial, es equivalente a:

$$-\rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h - \boldsymbol{\varepsilon}_h^*(\boldsymbol{\sigma}_h) + \mathbf{L} \in \partial I_{V_{ad_h}}(\mathbf{u}_h).$$

Por la regla de la cadena (2.6.10), se concluye que esta relación es equivalente a:

$$-\rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h - \boldsymbol{\varepsilon}_h^*(\boldsymbol{\sigma}_h) + \mathbf{L} \in B^*(\partial I_{Q_h})(B(\mathbf{u}_h)). \quad (2.6.12)$$

**Proposición 2.6.2** Si  $\mathbf{u}_h \in V_{ad_h}$  y  $\boldsymbol{\sigma}_h \in E_h$  son solución de la ecuación (2.6.12) entonces verifican:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{v}_h dV_X + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_h : \boldsymbol{\varepsilon}_h(\mathbf{v}_h) dV_X + \int_{\Gamma_C} \gamma_c B(\mathbf{u}_h) B(\mathbf{v}_h) dA_X \\ & = \mathbf{L}(\mathbf{v}_h) - \int_{\Gamma_C} p_h B(\mathbf{v}_h) dA_X, \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \end{aligned}$$

donde

$$p_h = \frac{1}{\lambda_c} \left[ B(\mathbf{u}_h) + \lambda_c p_h - \Pi_{Q_h} \left( \frac{B(\mathbf{u}_h) + \lambda_c p_h}{1 - \lambda_c \gamma_c} \right) \right],$$

siendo  $\Pi_{Q_h}$  la proyección ortogonal sobre  $Q_h$  y  $\lambda_c$  y  $\gamma_c$  números reales positivos tales que  $0 \leq \lambda_c \gamma_c < 1$ . El recíproco también se verifica.

*Demostración.* Si  $\mathbf{u}_h \in V_{ad_h}$  y  $\boldsymbol{\sigma}_h \in E_h$  verifican (2.6.12), entonces existe  $\tilde{p}_h \in (\partial I_{Q_h})(B(\mathbf{u}_h))$  tal que:

$$-\rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h - \boldsymbol{\varepsilon}_h^*(\boldsymbol{\sigma}_h) + \mathbf{L} = B^*(\tilde{p}_h). \quad (2.6.13)$$

Dado  $\gamma_c \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma_c \geq 0$ , definimos el elemento de  $P_h$

$$p_h = \tilde{p}_h - \gamma_c B(\mathbf{u}_h) \in (\partial I_{Q_h})^{\gamma_c}(B(\mathbf{u}_h)), \quad (2.6.14)$$

siendo  $(\partial I_{Q_h})^{\gamma_c}$  el operador perturbado de  $\partial I_{Q_h}$  de valor  $\gamma_c$  definido por:

$$(\partial I_{Q_h})^{\gamma_c} = \partial I_{Q_h} - \gamma_c I. \quad (2.6.15)$$

Puesto que el operador subdiferencial de la función indicatriz de un conjunto convexo es maximal monótono, por las propiedades de este tipo de operadores se tiene:

$$p_h \in (\partial I_{Q_h})^{\gamma_c}(B(\mathbf{u}_h)) \Leftrightarrow p_h = (\partial I_{Q_h})_{\lambda_c}^{\gamma_c}(B(\mathbf{u}_h) + \lambda_c p_h),$$

donde  $(\partial I_{Q_h})_{\lambda_c}^{\gamma_c}$  es la aproximación de Yosida de parámetro  $\lambda_c$  del operador  $(\partial I_{Q_h})^{\gamma_c}$ , siendo  $\lambda_c \gamma_c < 1$ .

De (2.6.13) y (2.6.14) y utilizando la linealidad de  $B^*$ , deducimos

$$-\rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h - \boldsymbol{\varepsilon}_h^*(\boldsymbol{\sigma}_h) + \mathbf{L} = B^*(p_h) + \gamma_c B^*(B(\mathbf{u}_h)),$$

o equivalentemente,

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h + \boldsymbol{\varepsilon}_h^*(\boldsymbol{\sigma}_h) + \gamma_c B^*(B(\mathbf{u}_h)) = \mathbf{L} - B^*(p_h).$$

Entonces:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{v}_h dV_X + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_h : \boldsymbol{\varepsilon}_h(\mathbf{v}_h) dV_X + \int_{\Gamma_C} \gamma_c B(\mathbf{u}_h) B(\mathbf{v}_h) dA_X \\ &= \mathbf{L}(\mathbf{v}_h) - \int_{\Gamma_C} p_h B(\mathbf{v}_h) dA_X, \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \end{aligned}$$

donde  $p_h = (\partial I_{Q_h})_{\lambda_c}^{\gamma_c}(B(\mathbf{u}_h) + \lambda_c p_h)$ . Puesto que  $(\partial I_{Q_h})_{\lambda_c} = \frac{I - \Pi_{Q_h}}{\lambda_c}$ , obtenemos que:

$$p_h = \frac{1}{\lambda_c} \left[ B(\mathbf{u}_h) + \lambda_c p_h - \Pi_{Q_h} \left( \frac{B(\mathbf{u}_h) + \lambda_c p_h}{1 - \lambda_c \gamma_c} \right) \right].$$

El recíproco se demuestra fácilmente teniendo en cuenta las propiedades de los operadores subdiferenciales.

Tenemos que resolver entonces el siguiente problema variacional:

**PROBLEMA (DVP):** Hallar  $\mathbf{u}_h \in V_{ad_h}$  y  $\boldsymbol{\sigma}_h \in E_h$  verificando casi por doquier en  $(0, T)$ :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{v}_h dV_X + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_h : \boldsymbol{\varepsilon}_h(\mathbf{v}_h) dV_X + \int_{\Gamma_C} \gamma_c B(\mathbf{u}_h) B(\mathbf{v}_h) dA_X \\ & = \mathbf{L}(\mathbf{v}_h) - \int_{\Gamma_C} p_h B(\mathbf{v}_h) dA_X, \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \end{aligned} \quad (2.6.16)$$

$$p_h = \frac{1}{\lambda_c} \left[ B(\mathbf{u}_h) + \lambda_c p_h - \Pi_{Q_h} \left( \frac{B(\mathbf{u}_h) + \lambda_c p_h}{1 - \lambda_c \gamma_c} \right) \right], \quad (2.6.17)$$

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{X}, 0) = (\mathbf{u}_0(\mathbf{X}))_h, \quad \dot{\mathbf{u}}_h(\mathbf{X}, 0) = (\mathbf{u}_1(\mathbf{X}))_h \quad \text{en } \Omega, \quad (2.6.18)$$

junto con la ley constitutiva (2.6.8).

Supongamos ahora que  $\gamma_c = 0$  y denotemos por

$$G_{\lambda_c}(B(\mathbf{u}_h) + \lambda_c p_h) = \frac{1}{\lambda_c} \left[ B(\mathbf{u}_h) + \lambda_c p_h - \Pi_{Q_h}(B(\mathbf{u}_h) + \lambda_c p_h) \right].$$

Entonces, la formulación variacional (2.6.16)–(2.6.17), para  $\gamma_c = 0$ , toma la forma

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{v}_h dV_X + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_h : \boldsymbol{\varepsilon}_h(\mathbf{v}_h) dV_X \\ & = \mathbf{L}(\mathbf{v}_h) - \int_{\Gamma_C} p_h B(\mathbf{v}_h) dA_X, \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \end{aligned} \quad (2.6.19)$$

siendo  $p_h$  la solución de la ecuación no lineal

$$p_h = G_{\lambda_c}(B(\mathbf{u}_h) + \lambda_c p_h). \quad (2.6.20)$$

Para resolver la ecuación (2.6.20) seguiremos el trabajo [7], donde se usa un método de Newton generalizado basándose en las propiedades Lipschitzianas

de  $G_{\lambda_c}$ .

Fijado un instante de tiempo  $t \in [0, T]$ , y dados los valores iniciales  $(\mathbf{u}_{h0}, \boldsymbol{\sigma}_{h0}, p_{h0})$ , se utilizará un algoritmo iterativo para calcular sucesivas aproximaciones  $(\mathbf{u}_{hk}, \boldsymbol{\sigma}_{hk}, p_{hk})$ ,  $k \geq 1$ , de la solución  $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\sigma}_h, p_h)$  en el instante  $t$ . Para una aproximación de la solución en la iteración  $k$  consideraremos los siguientes conjuntos de aristas en la frontera:

$$\Gamma_{C,k}^+ = \{a \in \mathcal{S}_h; B(\mathbf{u}_{hk}) + \lambda_c p_{hk} > 0\}, \quad (2.6.21)$$

$$\Gamma_{C,k}^- = \{a \in \mathcal{S}_h; B(\mathbf{u}_{hk}) + \lambda_c p_{hk} \leq 0\}, \quad (2.6.22)$$

los cuales aproximan la zona de contacto efectivo y su complementario en  $\Gamma_C$ , respectivamente.

Denotando por  $s_{hk} = B(\mathbf{u}_{hk}) + \lambda_c p_{hk}$  y  $p_{hk-1/2} = G_{\lambda_c}(s_{hk-1})$  podemos aproximar  $p_{hk}$  como (ver [7]):

$$p_{hk} = \begin{cases} 0, & \text{sobre } \Gamma_{C,k-1}^- \\ p_{hk-1/2} + (s_{hk} - s_{hk-1})/\lambda_c, & \text{sobre } \Gamma_{C,k-1}^+ \end{cases}$$

Entonces, el multiplicador  $p_h$  se aproxima por cero sobre  $\Gamma_{C,k-1}^-$  y por

$$p_{hk} = \frac{1}{\lambda_c} B(\mathbf{u}_{hk}) + p_{hk},$$

sobre  $\Gamma_{C,k-1}^+$ . Pero esta igualdad sólo se obtiene si se verifica que

$$B(\mathbf{u}_{hk}) = 0 \text{ sobre } \Gamma_{C,k-1}^+.$$

Así, sobre  $\Gamma_{C,k-1}^-$  no hay tensiones normales y sobre  $\Gamma_{C,k-1}^+$  el desplazamiento normal total debe ser nulo. Calcularemos entonces el multiplicador  $p_{hk}$  sobre  $\Gamma_{C,k-1}^+$  en dos pasos con el siguiente algoritmo:

#### Algoritmo en espacio

- Dados  $(\mathbf{u}_{hk-1}, \boldsymbol{\sigma}_{hk-1}, p_{hk-1})$ , calculamos  $(\mathbf{u}_{hk}, \boldsymbol{\sigma}_{hk})$  tal que:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_{hk} \cdot \mathbf{v}_h dV_X + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{hk} : \boldsymbol{\varepsilon}_h(\mathbf{v}_h) dV_X \\ & = \mathbf{L}(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \quad B(\mathbf{v}_h) = 0 \text{ sobre } \Gamma_{C,k-1}^+, \end{aligned} \quad (2.6.23)$$

$$B(\mathbf{u}^{kh}) = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_{C,k-1}^+, \quad (2.6.24)$$

junto con la ley constitutiva (2.6.8).

Puesto que la condición (2.6.24) puede acoplar las componentes del desplazamiento, para imponer esta condición usamos un método de penalización; así la ecuación (2.6.23) queda:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_{hk} \cdot \mathbf{v}_h dV_X + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{hk} : \boldsymbol{\varepsilon}_h(\mathbf{v}_h) dV_X + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Gamma_{C,k-1}^+} B(\mathbf{u}_{hk}) B(\mathbf{v}_h) dA_X \\ = \mathbf{L}(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \end{aligned} \quad (2.6.25)$$

donde  $\epsilon$  es un parámetro positivo pequeño.

- Conocidos  $(\mathbf{u}_{hk}, \boldsymbol{\sigma}_{hk})$  y dado que  $p_{hk} = 0$  sobre  $\Gamma_{C,k-1}^-$ , calculamos  $p_{hk}$  sobre  $\Gamma_{C,k-1}^+$ . Teniendo en cuenta la relación (2.6.19) obtenemos que:

$$\int_{\Gamma_{C,k-1}^+} p_{hk} B(\mathbf{v}_h) dA_X = \frac{1}{\epsilon} \int_{\Gamma_{C,k-1}^+} B(\mathbf{u}_{hk}) B(\mathbf{v}_h) dA_X \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \quad (2.6.26)$$

de donde se deduce que podemos calcular  $p_{hk}$  como:

$$p_{hk} = \frac{1}{\epsilon} B(\mathbf{u}_{hk}), \quad (2.6.27)$$

y actualizamos los conjuntos  $\Gamma_{C,k}^{(\mp)}$ .

#### 2.6.4. Resolución en aceleraciones

Para calcular una solución numérica del problema, consideramos la formulación matricial de la ecuación (2.6.25)

$$M \ddot{\mathbf{u}}_h^i + (K + P) \mathbf{u}_h^i = \mathbf{b}_0^i, \quad i = 1, \dots, 2^I, \quad (2.6.28)$$

donde  $M$  es la matriz de masa,  $K$  la matriz de rigidez,  $P$  la matriz de penalización debida al término integral sobre  $\Gamma_{C,k-1}^+$  y  $\mathbf{b}_0$  el vector de fuerzas aplicadas. El vector de desplazamientos será  $\mathbf{u}_h$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_h$  el de velocidades y  $\ddot{\mathbf{u}}_h$  el de aceleraciones.  $M$ ,  $K$  y  $P$  son simétricas,  $M$  es definida positiva ya que la densidad se supone constante y mayor que cero y  $K$  es definida positiva, puesto que los coeficientes de Lamé del material son positivos. Se omite el subíndice  $k$  correspondiente al algoritmo de contacto para simplificar la notación. Como ya

se dijo en la Sección 2.2, la discretización en tiempo se ha realizado utilizando un método de la familia Newmark, que en su forma más general, consiste en usar las siguientes aproximaciones de los desplazamientos y las velocidades:

Dados  $\mathbf{u}_h^i$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_h^i$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}_h^i$  y  $\ddot{\mathbf{u}}_h^{i+1}$ , calculamos

$$\mathbf{u}_h^{i+1} = \mathbf{u}_h^i + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_h^i + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\beta)\ddot{\mathbf{u}}_h^i + 2\beta\ddot{\mathbf{u}}_h^{i+1}], \quad (2.6.29)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_h^{i+1} = \dot{\mathbf{u}}_h^i + \Delta t [(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{u}}_h^i + \gamma\ddot{\mathbf{u}}_h^{i+1}], \quad (2.6.30)$$

donde  $\mathbf{u}_h^i$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_h^i$ , y  $\ddot{\mathbf{u}}_h^i$  son las aproximaciones de  $\mathbf{u}_h(t_i)$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_h(t_i)$ , y  $\ddot{\mathbf{u}}_h(t_i)$  respectivamente. El método que nosotros hemos considerado se corresponde con tomar para  $\beta$  y  $\gamma$  los valores:

$$\beta = \frac{1}{4}, \quad \gamma = \frac{1}{2}, \quad (2.6.31)$$

para los cuales el método es implícito e incondicionalmente estable. La implementación se efectúa en aceleraciones, y para ello se llevan a cabo los siguientes pasos:

- Definimos los predictores:

$$\tilde{\mathbf{u}}_h^{i+1} = \mathbf{u}_h^i + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_h^i + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\beta)\ddot{\mathbf{u}}_h^i, \quad (2.6.32)$$

$$\tilde{\dot{\mathbf{u}}}_h^{i+1} = \dot{\mathbf{u}}_h^i + (1 - \gamma)\Delta t \ddot{\mathbf{u}}_h^i. \quad (2.6.33)$$

- Sustituyendo los valores de  $\mathbf{u}_h^{i+1}$  y  $\dot{\mathbf{u}}_h^{i+1}$  en la ecuación (2.6.28) para el instante  $t_{n+1}$ , obtenemos la expresión de la aceleración en función de los predictores:

$$(M + \beta\Delta t^2(K + P))\ddot{\mathbf{u}}_h^{i+1} = \mathbf{b}_0^{i+1} - (K + P)\tilde{\mathbf{u}}_h^{i+1}. \quad (2.6.34)$$

- Calculado  $\ddot{\mathbf{u}}_h^{i+1}$ , de (2.6.29), (2.6.30), (2.6.32) y (2.6.33) podemos calcular los desplazamientos y velocidades en el paso  $n + 1$ , que vendrán dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h^{i+1} &= \tilde{\mathbf{u}}_h^{i+1} + \beta\Delta t^2\ddot{\mathbf{u}}_h^{i+1}, \\ \dot{\mathbf{u}}_h^{i+1} &= \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_h^{i+1} + \gamma\Delta t\ddot{\mathbf{u}}_h^{i+1}. \end{aligned}$$

## 2.7. Resultados Numéricos

Para probar la eficiencia del algoritmo, consideramos un problema test simple con solución conocida y calculamos su solución numérica usando el método descrito en las secciones previas.

Consideramos el dominio bidimensional  $\bar{\Omega} = [0, 0.5] \times [0, 0.5] \text{ m}^2$  y el intervalo de tiempo  $[0, T]$ , siendo  $T = 2.E-06$  segundos.

Las propiedades del material son las siguientes:

- Módulo de Young  $E = 7.41E+10 \text{ N/m}^2$ .
- Coeficiente de Poisson:  $\nu = 0.3302$ .
- Densidad  $\rho_0 = 2.7E+03 \text{ kg/m}^3$ .

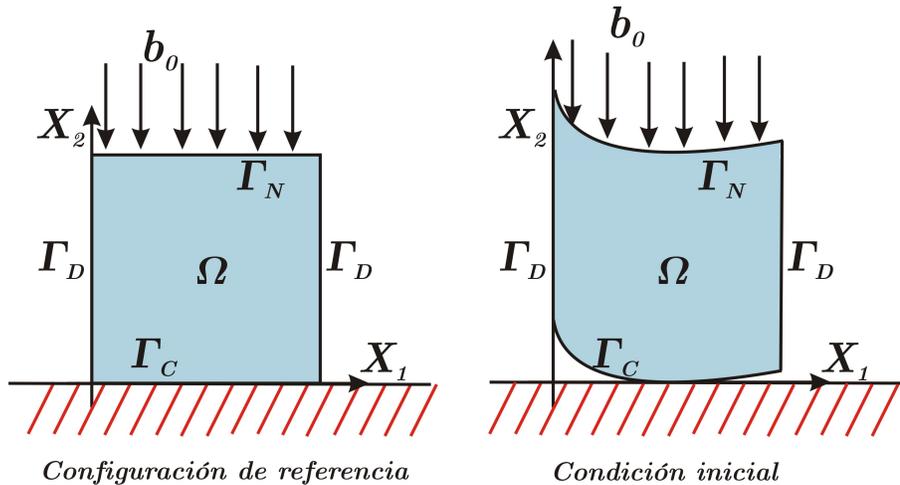


Figura 2.7.1: Configuración de referencia y condición inicial para el ejemplo académico

Se considera que la frontera de contacto  $\Gamma_C$  es una línea recta  $[x_2 = 0]$ ,  $\Gamma_N = [x_2 = 0.5]$  es la frontera superior, y  $\Gamma_D = \Gamma \setminus (\Gamma_C \cup \Gamma_N)$ . En la Figura 2.7.1 se muestran la configuración de referencia y la condición inicial correspondientes

a este ejemplo. El problema a resolver es

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{u}} - \text{Div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{b}_0, \quad \text{en } \Omega \times [0, T], \quad (2.7.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{s}_0, \quad \text{sobre } \Gamma_N \times [0, T], \quad (2.7.2)$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}, \quad \text{sobre } \Gamma_D \times [0, T], \quad (2.7.3)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_T = \mathbf{h}, \quad \sigma_n \leq 0, \quad \text{sobre } \Gamma_C \times [0, T], \quad (2.7.4)$$

$$u_n \leq g(x_1), \quad \sigma_n(u_n - g(x_1)) = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_C \times [0, T], \quad (2.7.5)$$

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}), \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_1(\mathbf{X}), \quad \text{en } \Omega, \quad (2.7.6)$$

donde  $g(x_1)$  es la distancia inicial entre el cuerpo deformable y la base rígida, y viene dada por

$$g(x_1) = \begin{cases} (0.3 - x_1)^3 & \text{si } 0 \leq x_1 \leq 0.3, \\ 0 & \text{si } 0.3 \leq x_1 \leq 0.4, \\ (x_1 - 0.4)^3 & \text{si } 0.4 \leq x_1 \leq 0.5. \end{cases}$$

Sea  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  la base canónica de  $\mathbb{R}^2$ . Denotaremos por  $A = (\kappa^2 \rho_0 - \mu)$ ,  $\hat{l} = 0.3 - \kappa t - x_1$  y  $l = x_1 + \kappa t - 0.4$  siendo  $\kappa$  una constante real. Consideramos las fuerzas de volumen y superficie vienen dadas por

$$\mathbf{b}_0 = \begin{cases} 6A\hat{l}\mathbf{e}_2 & \text{si } 0 \leq x_1 \leq x_1 + \hat{l}, \\ -(\lambda + \mu)\hat{l}^3 l^2 (3\hat{l} - 4l)\mathbf{e}_1 \\ + 6x_2 A \hat{l}^2 l (\hat{l}^2 - 4\hat{l}l + 2l^2)\mathbf{e}_2 & \text{si } x_1 + \hat{l} \leq x_1 \leq x_1 - l, \\ 6A l \mathbf{e}_2 & \text{si } x_1 - l \leq x_1 \leq 0.5, \end{cases}$$

y

$$\mathbf{s}_0 = \begin{cases} -3\mu\hat{l}^2\mathbf{e}_1 & \text{si } 0 \leq x_1 \leq x_1 + \hat{l}, \quad x_2 = 0.5 \\ \mu x_2 \hat{l}^3 l^2 (3\hat{l} - 4l)\mathbf{e}_1 \\ + (\lambda + 2\mu)\hat{l}^4 l^3 \mathbf{e}_2 & \text{si } x_1 + \hat{l} \leq x_1 \leq x_1 - l \quad x_2 = 0.5, \\ -3\mu\hat{l}^2\mathbf{e}_1 & \text{si } x_1 - l \leq x_1 \leq 0.5, \quad x_2 = 0.5, \end{cases}$$

para todo  $t \in [0, T]$ , siendo  $\mu$  y  $\lambda$  los parámetros de Lamé del material relacionados con el módulo de Young y el coeficiente de Poisson mediante las relaciones

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

La fuerza de fricción considerada es

$$\mathbf{h} = \begin{cases} 3\mu\hat{l}^2\mathbf{e}_1 & \text{si } 0 \leq x_1 \leq x_1 + \hat{l}, \\ \mathbf{0} & \text{si } x_1 + \hat{l} \leq x_1 \leq x_1 - l, \\ -3\mu l^2\mathbf{e}_1 & \text{si } x_1 - l \leq x_1 \leq 0.5, \end{cases}$$

y las condiciones iniciales vienen dadas por

$$\mathbf{u}_0 = \begin{cases} (0.3 - x_1)^3\mathbf{e}_2 & \text{si } 0 \leq x_1 \leq 0.3, \\ x_2(x_1 - 0.4)^3(0.3 - x_1)^4\mathbf{e}_2 & \text{si } 0.3 \leq x_1 \leq 0.4, \\ (x_1 - 0.4)^3\mathbf{e}_2 & \text{si } 0.4 \leq x_1 \leq 0.5, \end{cases}$$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{cases} -3\kappa(0.3 - x_1)^2\mathbf{e}_2 & \text{si } 0 \leq x_1 \leq 0.3, \\ \kappa x_2(0.3 - x_1)^3(x_1 - 0.4)^2(2.5 - 7x_1)\mathbf{e}_2 & \text{si } 0.3 \leq x_1 \leq 0.4, \\ 3\kappa(x_1 - 0.4)^2\mathbf{e}_2 & \text{si } 0.4 \leq x_1 \leq 0.5. \end{cases}$$

Con estos datos, la solución del problema (2.7.1)–(2.7.6) para los desplazamientos impuestos en  $\Gamma_D$  dados por:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}(0, x_2, t) &= (0.3 - \kappa t)^3\mathbf{e}_2, & x_2 \in [0, 0.5], & t \in [0, T], \\ \hat{\mathbf{u}}(0.5, x_2, t) &= (\kappa t - 0.4)^3\mathbf{e}_2, & x_2 \in [0, 0.5], & t \in [0, T], \end{aligned}$$

es

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \hat{l}^3\mathbf{e}_2 & \text{si } 0 \leq x_1 \leq x_1 + \hat{l}, \\ x_2\hat{l}^4l^3\mathbf{e}_2 & \text{si } x_1 + \hat{l} \leq x_1 \leq x_1 - l, \\ l^3\mathbf{e}_2 & \text{si } x_1 - l \leq x_1 \leq 0.5. \end{cases}$$

La solución calculada para  $\kappa = 1.E + 5$  se muestra en la Figura 2.7.2 en los instantes inicial y final respectivamente.

### 2.7.1. Convergencia Numérica

En esta sección mostramos la convergencia del algoritmo propuesto para el problema test anterior. En primer lugar, para mostrar la eficacia del algoritmo de contacto, presentamos en la Figura 2.7.3 los errores relativos en desplazamientos considerando tres tipos distintos de condiciones de frontera; condiciones

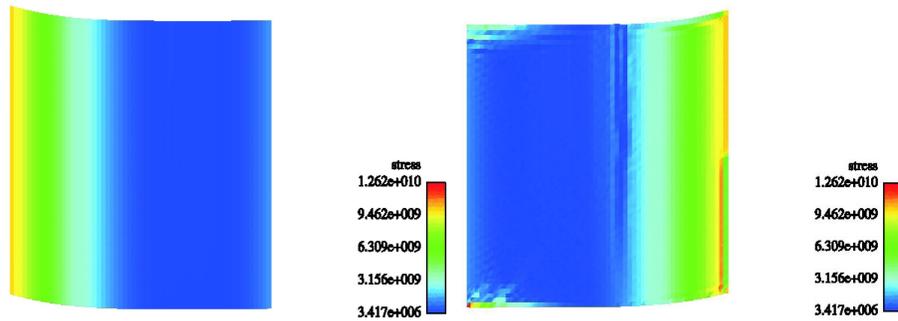


Figura 2.7.2: Tensiones de la solución calculada sobre la malla deformada en los instantes inicial y final

Dirichlet sobre toda la frontera, condiciones Dirichlet sobre  $\Gamma_D$  y Neumann sobre  $\Gamma_N \cup \Gamma_C$  y finalmente sustituimos la condición Neumann sobre  $\Gamma_C$  por las condiciones de contacto en (2.7.4)–(2.7.5). Los errores considerando el contacto son muy similares a los obtenidos con las condiciones Dirichlet y Neumann.

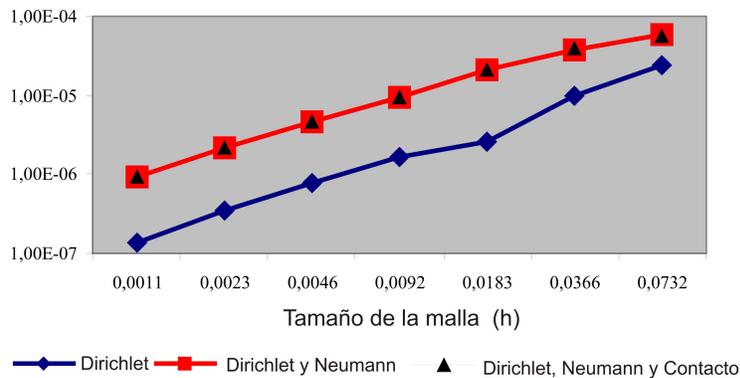


Figura 2.7.3: Error relativo en desplazamientos en el instante final para  $\kappa = 1.E + 3$ ,  $\Delta t = 2.E - 08$  y varias condiciones de contorno.

A continuación se presentan varias tablas que muestran la evolución de los errores relativos para cada variable mecánica a medida que disminuyen el tamaño de los elementos de la malla o el paso de tiempo.

Como puede verse en las Tablas 2.7.1–2.7.4, a medida que el tamaño de los

$h$	$t = 4.E-07$	$t = 8.E-07$	$t = 1.2E-07$	$t = 1.6E-07$	$t = 2.E-06$
0.0732	5.4414E-09	5.4491E-07	2.1830E-06	8.7591E-06	5.5252E-05
0.0366	3.7910E-09	3.7980E-07	1.5223E-06	6.1139E-06	3.8674E-05
0.0183	2.0619E-09	2.0659E-07	8.2813E-07	3.3261E-06	2.1018E-05
0.0046	4.7356E-10	4.7429E-08	1.8995E-07	7.6045E-07	4.7067E-06
0.0011	1.1838E-10	1.1810E-08	4.6747E-08	1.7872E-07	9.3406E-07

Tabla 2.7.1: Evolución del error relativo en desplazamientos con  $\Delta t = 2.E-08$ .

$h$	$t = 4.E-07$	$t = 8.E-07$	$t = 1.2E-07$	$t = 1.6E-07$	$t = 2.E-06$
0.0732	5.4410E-05	5.4443E-04	1.0896E-03	2.1819E-03	5.4752E-03
0.0366	3.7908E-05	3.7955E-04	7.6015E-04	1.5244E-03	3.8410E-03
0.0183	2.0618E-05	2.0647E-04	4.1355E-04	8.2928E-04	2.0844E-03
0.0046	4.7353E-06	4.7385E-05	9.4748E-05	1.8881E-04	4.5545E-04
0.0011	1.1837E-06	1.1753E-05	2.2956E-05	4.1675E-05	8.0119E-05

Tabla 2.7.2: Evolución del error relativo en velocidades con  $\Delta t = 2.E-08$ .

elementos de la malla,  $h$ , disminuye, también lo hace el error relativo en desplazamientos, velocidades, aceleraciones y tensiones, respectivamente. Esta convergencia se aprecia también en la Figura 2.7.4, donde el gráfico muestra la tasa de convergencia del algoritmo con respecto al tamaño de la malla. Todas estas simulaciones se realizaron considerando  $\Delta t = 2.E-08$  y  $\kappa = 1.E+3$ . Dicho comportamiento del algoritmo se presenta igualmente con mayor aceleración, esto es, para valores mayores de  $\kappa^2$ , como puede verse en la Tabla 2.7.5, para  $\kappa = 1.E+5$ .

Asimismo, en la Tabla 2.7.6 se muestra que cuando el paso de tiempo disminuye, también lo hace el error relativo en desplazamientos.

Finalmente, la Figura 2.7.5 ilustra la influencia del parámetro  $\kappa$  sobre los errores para varios valores del paso de tiempo  $\Delta t$ . El algoritmo ha sido implementado en un paquete de software propio denominado Xcracks elaborado en código MATLAB y ejecutado sobre un Pentium(R) 4, 3.00 GHz. Usando una malla de 32 elementos ( $h = 0.0366$ ) y un paso de tiempo de  $1.E-08$  el tiempo

$h$	$t = 4.E-07$	$t = 8.E-07$	$t = 1.2E-07$	$t = 1.6E-07$	$t = 2.E-06$
0.0732	4.0802E-01	4.0777E-01	4.0748E-01	4.0688E-01	4.0490E-01
0.0366	2.8429E-01	2.8449E-01	2.8470E-01	2.8508E-01	2.8593E-01
0.0183	1.5463E-01	1.5478E-01	1.5490E-01	1.5500E-01	1.5412E-01
0.0046	3.5512E-02	3.5478E-02	3.5335E-02	3.4718E-02	3.0496E-02
0.0011	8.8759E-03	8.6621E-03	8.0236E-03	7.0398E-03	5.0352E-03

Tabla 2.7.3: Evolución del error relativo en aceleraciones con  $\Delta t = 2.E - 08$ .

$h$	$t = 4.E-07$	$t = 8.E-07$	$t = 1.2E-07$	$t = 1.6E-07$	$t = 2.E-06$
0.0732	5.4699E-01	5.4721E-01	5.4745E-01	5.4793E-01	5.4938E-01
0.0366	3.1676E-01	3.1693E-01	3.1711E-01	3.1748E-01	3.1860E-01
0.0183	1.6807E-01	1.6817E-01	1.6827E-01	1.6849E-01	1.6913E-01
0.0046	4.3723E-02	4.3749E-02	4.3777E-02	4.3836E-02	4.4013E-02
0.0011	1.1034E-02	1.1040E-02	1.1048E-02	1.1063E-02	1.1109E-02

Tabla 2.7.4: Evolución del error relativo en tensiones con  $\kappa = 1.E + 3$  y  $\Delta t = 2.E - 08$ .

$h$	$t = 2.E-08$	$t = 2.E-07$	$t = 4.E-07$	$t = 1.2E-06$	$t = 2.E-06$
0.0732	5.4938E-01	5.7166E-01	5.9735E-01	5.6776E-01	4.7492E-01
0.0366	3.1860E-01	3.3628E-01	3.5826E-01	3.7799E-01	3.0112E-01
0.0183	1.6912E-01	1.7935E-01	1.9225E-01	2.1811E-01	1.6490E-01
0.0046	4.4009E-02	4.6800E-02	5.0348E-02	5.9031E-02	4.3563E-02
0.0011	1.1107E-02	1.1818E-02	1.2724E-02	1.5014E-02	1.1026E-02

Tabla 2.7.5: Evolución del error relativo en tensiones con  $\kappa = 1.E + 5$  y  $\Delta t = 2.E - 08$ .

de CPU necesario fue de 0.4062 segundos y usando una malla de 512 elementos ( $h = 0.0092$ ) y el mismo paso de tiempo, el tiempo de CPU necesario fue de 1.2031 segundos.

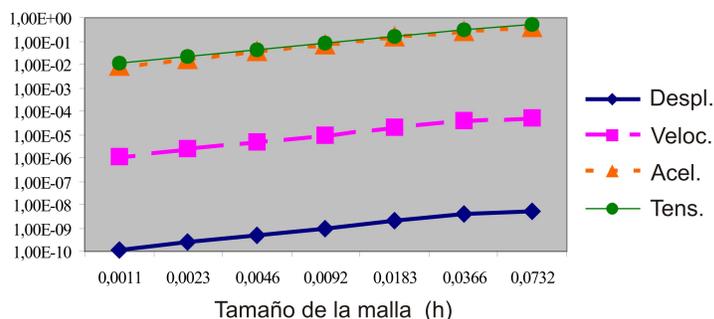


Figura 2.7.4: Tasa de convergencia en desplazamientos, velocidades, aceleraciones y tensiones en el primer paso de tiempo con  $\kappa = 1.E + 3$ ,  $\Delta t = 2.E - 08$ .

$\Delta t$	$t = 4.E-07$	$t = 8.E-07$	$t = 1.2E-07$	$t = 1.6E-07$	$t = 2.E-06$
4.E-07	2.5628E-03	1.1447E-02	1.8863E-02	1.5915E-02	1.3277E-02
2.E-07	8.6191E-04	3.2942E-03	5.1606E-03	4.2522E-03	3.6377E-03
1.E-07	2.4517E-04	8.6564E-04	1.3150E-03	1.0585E-03	8.5075E-04
4.E-08	4.2211E-05	1.4166E-04	2.1195E-04	1.7058E-04	1.4065E-04
2.E-08	8.9112E-06	3.0627E-05	4.8089E-05	4.0961E-05	3.8752E-05

Tabla 2.7.6: Evolución del error relativo en desplazamientos con tamaño de malla  $h = 0.0011$  y  $\kappa = 1.E+05$ .

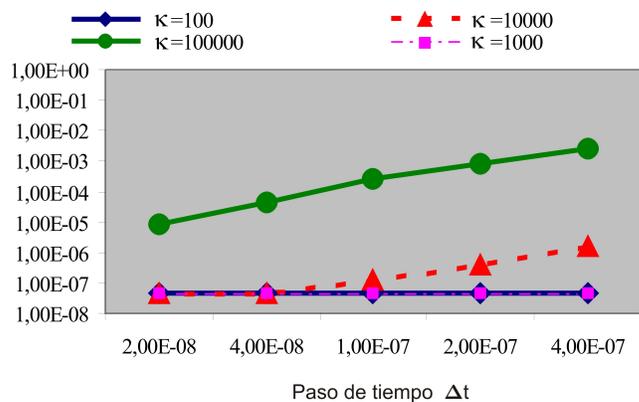


Figura 2.7.5: Influencia de  $\Delta t$  para diferentes valores de  $\kappa$ .



# Capítulo 3

## Vibración de un cuerpo elástico sin fisura

En este capítulo presentamos la simulación numérica de la vibración de un sólido elástico excitado con ondas de Rayleigh. Se trata de un caso particular del modelo elastodinámico lineal presentado en el Capítulo 1, cuando la vibración se produce por la aplicación mediante un material piezoeléctrico de ondas superficiales como son las ondas de Rayleigh. Nuestro objetivo será utilizar dichas ondas para ser capaces de detectar imperfecciones en la superficie de una estructura; para ello es necesario conocer perfectamente cómo es la vibración de la estructura sometida a ondas de Rayleigh cuando no tiene defectos.

En la Sección 3.1 recordamos el modelo que rige el comportamiento de un cuerpo elástico tridimensional sometido a vibración. Las Secciones 3.2 y 3.3 están dedicadas a la deducción de los datos del modelo asociado a una onda de Rayleigh cuando el dominio no está dañado. En particular, en la Sección 3.2, partiendo de las ecuaciones de las correspondientes ondas longitudinales y transversales obtenidas en el Capítulo 1 obtendremos las expresiones explícitas de los desplazamientos longitudinales y transversales para ondas de Rayleigh. En la Sección 3.3, gracias a la geometría del dominio y al tipo de fuerzas aplicadas expresaremos el problema sobre una sección transversal utilizando deformaciones planas. En la Sección 3.4 obtenemos la formulación variacional del problema tridimensional asociado y, en la Sección 3.5, enunciamos un re-

sultado de existencia y unicidad de solución. En la Sección 3.6, con vistas a la resolución numérica, se descompondrá el problema como suma de uno pseudo-estático y otro dinámico, siguiendo la metodología de Samartín y Moreno [82]. En la Sección 3.7 se presentarán varios resultados numéricos: en primer lugar, se valida la metodología de descomposición y la implementación del algoritmo sobre un test académico; posteriormente, se simula la vibración producida por un ciclo de onda de Rayleigh o por un tren de ondas. Finalmente, en la Sección 3.8 se presentan los resultados obtenidos de la comparación de la simulación numérica de la propagación de un tren de ondas de Rayleigh con los datos experimentales obtenidos por el grupo de Metrología Óptica de la Universidad de Vigo.

### 3.1. Modelo matemático

Supondremos un sólido elástico tridimensional que ocupa una región  $\mathcal{B}$  no acotada y cuyo interior es un dominio  $\Omega$ . A lo largo de todo este capítulo supondremos que  $\Omega$  es regular. En particular, tomaremos  $\Omega = \Omega_s \times (0, l_3)$ , y consideramos  $\Omega_s = (l_0, +\infty) \times (-\infty, 0)$ , siendo  $l_0$  y  $l_3$  números reales positivos. Por tanto,  $\Omega$  es un dominio tipo placa de sección  $\Omega_s$  y espesor  $l_3$  (ver Figura 3.1.1).

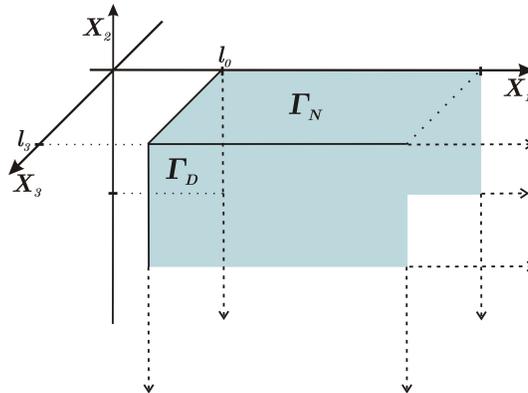


Figura 3.1.1: Dominio tridimensional no acotado

Denotaremos por  $\Gamma$  la frontera de  $\Omega$ , que suponemos formada por una unión finita de superficies regulares, y que globalmente es lipschitziana. Supondremos que  $\Gamma$  consta de cuatro regiones abiertas tales que  $\Gamma = \bar{\Gamma}_- \cup \bar{\Gamma}_+ \cup \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$ , y disjuntas dos a dos:  $\bar{\Gamma}_- = \{\mathbf{X} \in \Gamma; X_3 = 0\}$ ,  $\bar{\Gamma}_+ = \{\mathbf{X} \in \Gamma; X_3 = l_3\}$ ,  $\bar{\Gamma}_N = \{\mathbf{X} \in \Gamma; X_2 = 0\}$  y  $\bar{\Gamma}_D = \{\mathbf{X} \in \Gamma; X_1 = l_0\}$ . Sobre  $\Gamma_D$  el cuerpo se somete a excitación por ondas de Rayleigh, sobre  $\Gamma_N$  a una densidad de fuerzas de superficie, y sobre las tapas,  $\Gamma_{\pm}$  se suponen nulos los desplazamientos normales.

En este capítulo, nos centraremos en la caracterización de ondas de Rayleigh que avanzan en la dirección  $X_1$ . Sea  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$  el desplazamiento,  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})$  las componentes del tensor linealizado de deformación definido en (1.6.9), y  $\sigma_{ij}(\mathbf{u})$  el tensor de tensiones relacionado con el desplazamiento a través de la ley de Hooke (1.6.10), donde  $\mathbf{C}$  es el tensor de elasticidad. Nuestro primer objetivo es determinar las fuerzas de volumen con densidad  $\mathbf{b}_0 = (b_0)_i$ , las fuerzas de superficie de densidad  $\mathbf{s}_0 = (s_i)$  sobre  $\Gamma_N$  y el campo de desplazamientos  $\mathbf{u}^D$  sobre  $\Gamma_D$ , tales que induzcan sobre  $\mathcal{B}$  ondas de Rayleigh, es decir, ondas progresivas sinusoidales, monocromáticas y unidireccionales que sean solución del siguiente problema:

**PROBLEMA (P3D<sub>k</sub>):** Sea  $k \in \mathbb{R}$ . Hallar  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$  tales que:

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{u}} - \text{Div } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{b}_0, \quad \text{en } \Omega, \quad (3.1.1)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^D, \quad \text{sobre } \Gamma_D, \quad (3.1.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{s}_0, \quad \text{sobre } \Gamma_N, \quad (3.1.3)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \text{sobre } \Gamma_{\pm}, \quad (3.1.4)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}), \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_1(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad (3.1.5)$$

junto con la ley de comportamiento

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \lambda(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))\mathbf{I}, \quad (3.1.6)$$

la condición en el infinito:

$$\lim_{X_2 \rightarrow -\infty} \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (3.1.7)$$

y  $\mathbf{u}$  periódica con respecto a la variable  $X_1$  con periodo  $2\pi/k$ .

## 3.2. Ondas elásticas de Rayleigh

En esta sección obtendremos la expresión de los datos  $\mathbf{b}_0$ ,  $\mathbf{u}^D$ ,  $\mathbf{s}_0$ ,  $\mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{u}_1$  en el problema  $(\mathbf{P3D}_k)$  de forma que admita como solución una onda de Rayleigh.

Así, consideramos el problema  $(\mathbf{P3D}_k)$  suponiendo que la densidad  $\rho_0$  es constante y que las cargas aplicadas son consistentes con una hipótesis de deformaciones planas, esto es,

$$\mathbf{b}_0(\mathbf{X}, t) = \mathbf{b}_0(X_1, X_2, t), \quad (b_0)_3 = 0, \quad (3.2.1)$$

$$\mathbf{s}_0(\mathbf{X}, t) = \mathbf{s}_0(X_1, X_2, t), \quad f_3 = 0, \quad (3.2.2)$$

$$\mathbf{u}^D(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}^D(X_2, t), \quad u_3^D = 0, \quad (3.2.3)$$

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{X}) = \mathbf{u}_0(X_1, X_2), \quad (u_0)_3 = 0, \quad (3.2.4)$$

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{X}) = \mathbf{u}_1(X_1, X_2), \quad (u_1)_3 = 0, \quad (3.2.5)$$

para casi todo  $t \in [0, T]$ , siendo

$$\lim_{X_2 \rightarrow -\infty} \mathbf{u}^D(X_2, t) = \mathbf{0}. \quad (3.2.6)$$

Con estas hipótesis, el problema  $(\mathbf{P3D}_k)$  puede resolverse sobre la superficie media de la placa utilizando una formulación análoga a la dada en la Sección 1.8.

### 3.2.1. Ondas monocromáticas

Buscaremos soluciones de  $(\mathbf{P3D}_k)$  que sean ondas progresivas sinusoidales, que de acuerdo con la metodología desarrollada en la Sección 1.9, son ondas que se descomponen como:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t, \quad (3.2.7)$$

donde  $\mathbf{u}_l = \nabla\phi$  representa la onda longitudinal y  $\mathbf{u}_t = \text{Rot } \mathbf{B}$  la onda transversal.

Gracias al Corolario 1.9.8, ambas ondas verifican la expresión general de la ecuación de ondas:

$$\ddot{\mathbf{z}} - c^2 \Delta \mathbf{z} = \frac{1}{\rho_0} \mathbf{h}, \quad (3.2.8)$$

donde  $\mathbf{h} = \mathbf{b}_0$  para las ondas transversales y  $\mathbf{h} = \mathbf{0}$  en las longitudinales. La constante  $c$ , que se define en función de los parámetros de Lamé del material, es positiva y su valor para las ondas longitudinales y transversales está dado en (1.9.9).

Consideremos una onda monocromática, es decir, la que se produce al considerar una fuente, que puede ser una fuerza de volumen o una superficial, cuya frecuencia es constante e independiente de  $\mathbf{X}$  y cuya amplitud es independiente de  $t$ :

$$\mathbf{h} = \text{Re}(\widehat{\mathbf{h}}(\mathbf{X})e^{-i\omega t}).$$

En este caso, es natural la búsqueda de soluciones sinusoidales con respecto al tiempo, de frecuencia  $\omega/2\pi$ , esto es,

$$\mathbf{z}(\mathbf{X}, t) = \text{Re}(\widehat{\mathbf{z}}(\mathbf{X})e^{-i\omega t}),$$

donde  $\omega$  se supone que es una constante real positiva. Para  $\mathbf{z}$  de esta forma  $\ddot{\mathbf{z}} = -\omega^2\mathbf{z}$ .

Consideremos la descomposición de  $\widehat{\mathbf{u}}$  dada por el Corolario 1.9.8. Bajo la hipótesis de ondas monocromáticas, si las fuerzas de volumen son de la forma  $\mathbf{b}_0(\mathbf{X}, t) = \widehat{\mathbf{b}}_0(\mathbf{X})e^{-i\omega t}$ , las ecuaciones transversales (1.9.22) y longitudinales (1.9.23) se expresan como sigue:

$$\begin{aligned}\omega^2\widehat{\mathbf{u}}_t + c_t^2\Delta\widehat{\mathbf{u}}_t + \frac{1}{\rho_0}\widehat{\mathbf{b}}_0 &= \mathbf{0}, \\ \omega^2\widehat{\mathbf{u}}_l + c_l^2\Delta\widehat{\mathbf{u}}_l &= \mathbf{0},\end{aligned}$$

o también

$$\begin{aligned}\Delta\widehat{\mathbf{u}}_t + \frac{\omega^2}{c_t^2}\widehat{\mathbf{u}}_t + \frac{1}{c_t^2\rho_0}\widehat{\mathbf{b}}_0 &= \mathbf{0}, \\ \Delta\widehat{\mathbf{u}}_l + \frac{\omega^2}{c_l^2}\widehat{\mathbf{u}}_l &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Denotando por

$$K_t^2 = \frac{w^2}{c_t^2} \quad \text{y} \quad K_l^2 = \frac{w^2}{c_l^2}, \quad (3.2.9)$$

los números de onda de las ondas transversales y longitudinales, respectivamente, se tiene:

$$\begin{aligned}\Delta \hat{\mathbf{u}}_t + K_t^2 \hat{\mathbf{u}}_t + \frac{1}{c_t^2 \rho_0} \hat{\mathbf{b}}_0 &= \mathbf{0}, \\ \Delta \hat{\mathbf{u}}_l + K_l^2 \hat{\mathbf{u}}_l &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

### 3.2.2. Ondas de Rayleigh

Entre las ondas monocromáticas, consideraremos aquellas que se propagan cerca de la superficie del cuerpo sin penetrar en él. Estas ondas aparecen cuando las fuerzas aplicadas en (3.2.8) son de la forma:

$$\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{X}) = \operatorname{Re}\left(e^{i(k_1 X_1 + k_3 X_3)} \tilde{\mathbf{h}}(X_2)\right), \quad (3.2.10)$$

siendo

$$\lim_{X_2 \rightarrow -\infty} \tilde{\mathbf{h}}(X_2) = \mathbf{0}. \quad (3.2.11)$$

En particular, estamos interesados en analizar para qué valores de  $\omega$ ,  $k_1$  y  $k_3$  se puede construir una solución de (3.2.8) de la forma

$$\mathbf{z} = \operatorname{Re}\left(e^{i(k_1 X_1 + k_3 X_3 - \omega t)} \mathbf{t}(X_2)\right) = \operatorname{Re}\left(e^{i(k_1 X_1 + k_3 X_3)} e^{-i\omega t} \mathbf{t}(X_2)\right),$$

ya tal que lejos de la superficie del cuerpo sea nula, siendo  $\mathbf{t}$  una función dependiente sólo de  $X_2$ .

**Teorema 3.2.1** Sea  $\mathbf{h} = \operatorname{Re}\left(e^{i(k_1 X_1 + k_3 X_3)} e^{-i\omega t} \tilde{\mathbf{h}}(X_2)\right)$  y sean  $\omega$ ,  $k_1$ ,  $k_3$  y  $c$  tales que

$$\frac{\omega^2}{c^2} < k_1^2 + k_3^2. \quad (3.2.12)$$

Entonces existe una solución de la ecuación (3.2.8) de la forma:

$$\mathbf{z}(\mathbf{X}, t) = \operatorname{Re}\left(e^{i(k_1 X_1 + k_3 X_3 - \omega t)} \mathbf{t}(X_2)\right) = \operatorname{Re}\left(e^{i(k_1 X_1 + k_3 X_3)} e^{-i\omega t} \mathbf{t}(X_2)\right), \quad (3.2.13)$$

donde

$$\mathbf{t}(X_2) = \frac{-1}{\rho_0 c^2} e^{m X_2} \left( \int e^{-m X_2} \left( e^{-m X_2} \left( \int e^{m X_2} \tilde{\mathbf{h}}(X_2) dX_2 + \mathbf{C}_1 \right) \right) dX_2 + \mathbf{C}_2 \right),$$

siendo  $\mathbf{C}_1$  y  $\mathbf{C}_2$  vectores constantes arbitrarios y  $m = +\sqrt{k_1^2 + k_3^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$ .

*Demostración.* Para simplificar, trabajaremos con la función de variable compleja

$$\mathbf{z} = e^{i(k_1 X_1 + k_3 X_3)} e^{-i\omega t} \mathbf{t}(X_2),$$

y una vez calculada, tomaremos su parte real. Para este desplazamiento, se tiene que:

$$\ddot{\mathbf{z}} = -\omega^2 \mathbf{z} \quad \text{y} \quad \Delta \mathbf{z} = e^{-i\omega t} e^{i(k_1 X_1 + k_3 X_3)} (-(k_1^2 + k_3^2) \mathbf{t}(X_2) + \mathbf{t}''(X_2)).$$

Entonces, gracias a la expresión (3.2.10) de las fuerzas y a que el término  $e^{i(k_1 X_1 + k_3 X_3)}$  no se anula nunca, encontramos que la ecuación de ondas (3.2.8) se verifica siempre que  $\mathbf{t}(X_2)$  sea solución de:

$$\mathbf{t}''(X_2) + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - (k_1^2 + k_3^2) \right) \mathbf{t}(X_2) = \frac{-1}{\rho_0 c^2} \tilde{\mathbf{h}}(X_2). \quad (3.2.14)$$

La ecuación característica asociada a esta ecuación diferencial ordinaria de segundo orden es:

$$m^2 - \left( (k_1^2 + k_3^2) - \frac{\omega^2}{c^2} \right) = 0,$$

cuyas raíces son:  $m = \pm \sqrt{k_1^2 + k_3^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$ .

Obsérvese que si  $k_1^2 + k_3^2 - \frac{\omega^2}{c^2} < 0$  tenemos una solución  $\mathbf{t}(X_2)$  de tipo sinusoidal, pero la onda periódica no se amortigua dentro del sólido en la dirección  $X_2 \rightarrow -\infty$  y no sería una onda superficial; tampoco se amortigua la solución si el radicando se anula. Entonces, la hipótesis (3.2.12) es necesaria para determinar ondas superficiales, en cuyo caso, la solución del problema homogéneo asociado a (3.2.14) es

$$\mathbf{t}(X_2) = \mathbf{C}_1 e^{-X_2 m} + \mathbf{C}_2 e^{X_2 m},$$

siendo  $m = \sqrt{k_1^2 + k_3^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$  y  $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$  constantes arbitrarias. Como la onda debe amortiguarse en el interior del cuerpo de acuerdo con la ecuación (3.1.7), se toma  $\mathbf{C}_1 = \mathbf{0}$  y, por tanto,

$$\mathbf{t}(X_2) = \mathbf{C}_2 e^{m X_2}.$$

En consecuencia, el desplazamiento de la onda solución de la ecuación (3.2.8) en ausencia de fuerzas de volumen es:

$$\mathbf{z}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{C}_2 e^{i(k_1 X_1 + k_3 X_3 - \omega t)} e^{m X_2}. \quad (3.2.15)$$

La solución del problema no homogéneo (3.2.14) se puede obtener utilizando el método operacional (ver Quintela [76]) en la forma siguiente:

Consideramos el operador diferencial  $D$  que, aplicado a una función diferenciable  $\mathbf{y}(X_2)$ , se define por:

$$D\mathbf{y}(X_2) = \mathbf{y}'(X_2).$$

Representamos las derivadas sucesivas de  $\mathbf{y}(X_2)$  por potencias del operador  $D$ :

$$D^n\mathbf{y}(X_2) = \mathbf{y}^{(n)}(X_2),$$

y, por tanto, la ecuación (3.2.14) puede escribirse como:

$$D^2\mathbf{t}(X_2) - m^2\mathbf{t}(X_2) = \frac{-1}{\rho_0 c^2}\tilde{\mathbf{h}}(X_2),$$

o bien,

$$\left(D^2 - m^2\right)\mathbf{t}(X_2) = \frac{-1}{\rho_0 c^2}\tilde{\mathbf{h}}(X_2). \quad (3.2.16)$$

Denotamos por  $p(D) = D^2 - m^2$ . Este polinomio se puede descomponer como producto de dos de grado 1,  $p(D) = (D - m)(D + m)$ . Entonces, formalmente, podemos escribir la ecuación (3.2.16) como:

$$\mathbf{t}(X_2) = \frac{1}{(D - m)(D + m)}\left(\frac{-1}{\rho_0 c^2}\right)\tilde{\mathbf{h}}(X_2), \quad (3.2.17)$$

que se puede resolver por integraciones sucesivas al ser  $m$  un número real.

Puesto que la solución general de una ecuación de la forma:

$$(D - m)\mathbf{y}(X_2) = \mathbf{r}(X_2),$$

es

$$\mathbf{y}(X_2) = e^{mX_2}\left(\int e^{-mX_2}\mathbf{r}(X_2)dX_2 + \mathbf{C}\right),$$

se aplica esta fórmula a (3.2.17) de manera recursiva, encontrando que la solución general de la ecuación no homogénea será:

$$\mathbf{t}(X_2) = \frac{-1}{\rho_0 c^2}e^{mX_2}\left(\int e^{-mX_2}\left(e^{-mX_2}\left(\int e^{mX_2}\tilde{\mathbf{h}}(X_2)dX_2 + \mathbf{C}_1\right)\right)dX_2 + \mathbf{C}_2\right),$$

siendo  $\mathbf{C}_1$  y  $\mathbf{C}_2$  constantes arbitrarias, lo que concluye la demostración  $\square$

**Ejemplo:** Como ejemplo consideraremos fuerzas de volumen en la forma del Teorema 3.2.1 con

$$\tilde{\mathbf{h}}(X_2) = e^{sX_2}, \text{ con } s > 0.$$

De acuerdo con el Teorema 3.2.1 la solución será

$$\mathbf{z}(\mathbf{X}, t) = \text{Re}(e^{i(k_1X_1+k_3X_3)}e^{-i\omega t})\mathbf{t}(X_2), \quad (3.2.18)$$

siendo  $\mathbf{t}(X_2)$  la función:

$$\mathbf{t}(X_2) = \frac{-1}{\rho_0 c^2} e^{mX_2} \left( \int e^{-mX_2} \left( e^{-mX_2} \left( \int e^{mX_2} e^{sX_2} dX_2 + \mathbf{C}_1 \right) \right) dX_2 + \mathbf{C}_2 \right).$$

Integrando esta expresión se obtiene que

$$\mathbf{t}(X_2) = \frac{-1}{\rho_0 c^2} \left( \frac{1}{(s+m)(s-m)} e^{sX_2} - \frac{1}{2m} \mathbf{C}_1 e^{-mX_2} + \mathbf{C}_2 e^{mX_2} \right),$$

cualesquiera que sean los vectores constantes  $\mathbf{C}_1$  y  $\mathbf{C}_2$ .

Podemos observar que basta tomar  $\mathbf{C}_1 = \mathbf{0}$ , para que se verifique

$$\lim_{X_2 \rightarrow -\infty} \mathbf{t}(X_2) = \mathbf{0},$$

y que la onda sea superficial.

**Corolario 3.2.2** *Bajo las condiciones del Teorema 3.2.1, si  $\tilde{\mathbf{h}}(X_2) = \mathbf{0}$ , entonces existe una solución de (3.2.8) con  $\mathbf{h} = \mathbf{0}$  de la forma:*

$$\mathbf{z}(\mathbf{X}, t) = \text{Re} \left( e^{i(k_1X_1+k_3X_3)} e^{-i\omega t} \mathbf{t}(X_2) \right), \quad (3.2.19)$$

donde

$$\mathbf{t}(X_2) = \frac{-1}{\rho_0 c^2} \left( -\frac{\mathbf{C}_1}{2m} e^{-mX_2} + \mathbf{C}_2 e^{mX_2} \right),$$

siendo  $\mathbf{C}_1$  y  $\mathbf{C}_2$  vectores constantes arbitrarios y  $m = +\sqrt{k_1^2 + k_3^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$ .  $\square$

**Corolario 3.2.3** *Bajo las condiciones del Corolario 3.2.2, existe una solución de (3.2.8) correspondiente a una onda superficial de la forma:*

$$\mathbf{z}(\mathbf{X}, t) = \operatorname{Re}\left(e^{i(k_1 X_1 + k_3 X_3)} e^{-i\omega t} \mathbf{t}(X_2)\right), \quad (3.2.20)$$

donde

$$\mathbf{t}(X_2) = \frac{-\mathbf{C}}{\rho_0 c^2} e^{m X_2},$$

siendo  $\mathbf{C}$  un vector constante arbitrario y  $m = +\sqrt{k_1^2 + k_3^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$ .  $\square$

### 3.2.3. Ondas de Rayleigh unidireccionales

Supondremos ahora que no hay fuerzas de volumen,  $\mathbf{b}_0 = \mathbf{0}$ , y que las fuerzas de superficie son también nulas,  $\mathbf{s}_0 = \mathbf{0}$ . Estamos interesados en calcular una solución del problema  $(\mathbf{P3D}_k)$  que tenga un comportamiento sinusoidal unidireccional compatible con las hipótesis de deformaciones planas en el plano  $X_1 X_2$  mostradas al inicio de la Sección 3.2. En particular, buscamos soluciones sinusoidales de las ecuaciones

$$c_t^2 \Delta \mathbf{u}_t - \ddot{\mathbf{u}}_t = \mathbf{0}, \quad (3.2.21)$$

$$c_l^2 \Delta \mathbf{u}_l - \ddot{\mathbf{u}}_l = \mathbf{0}, \quad (3.2.22)$$

de la forma (3.2.10) con  $k_1 = k > 0$  y  $k_3 = 0$ . Esto da lugar a ondas superficiales que se propagan en la dirección  $X_1$ .

Con estas hipótesis, el Corolario 3.2.3 garantiza que si  $k > \max\{K_l, K_t\}$ , siendo  $K_l$  y  $K_t$  los números de onda definidos en (3.2.9), los campos definidos por

$$\mathbf{u}_l = \mathbf{C}_l e^{i(k X_1 - \omega t)} e^{\eta_l X_2}, \quad (3.2.23)$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{C}_t e^{i(k X_1 - \omega t)} e^{\eta_t X_2}, \quad (3.2.24)$$

verifican las ecuaciones (3.2.21)–(3.2.22) respectivamente, con  $k$  número de onda, donde

$$\eta_l = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2}}, \quad (3.2.25)$$

y

$$\eta_t = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}}. \quad (3.2.26)$$

Además,  $\mathbf{u}_l$  y  $\mathbf{u}_t$  son ondas superficiales que se propagan en la dirección  $X_1$ .

Como además, la onda transversal debe ser de divergencia nula, se cumple que:

$$\frac{\partial(u_t)_1}{\partial X_1} + \frac{\partial(u_t)_2}{\partial X_2} = 0, \quad \text{y por tanto,} \quad ik(u_t)_1 + \eta_t(u_t)_2 = 0,$$

o equivalentemente,

$$\frac{(u_t)_1}{(u_t)_2} = \frac{(C_t)_1}{(C_t)_2} = \frac{-\eta_t}{ik}, \quad (3.2.27)$$

siendo  $\mathbf{C}_t$  el vector constante definido en (3.2.24). La expresión (3.2.27) permite deducir los desplazamientos transversales, salvo una constante A:

$$(u_t)_1 = A\eta_t e^{i(kX_1 - \omega t) + \eta_t X_2}, \quad (3.2.28)$$

$$(u_t)_2 = -iAke^{i(kX_1 - \omega t) + \eta_t X_2}. \quad (3.2.29)$$

Análogamente, se tiene que la parte longitudinal del vector desplazamiento de la onda de Rayleigh cumple que  $\text{Rot } \mathbf{u}_l = \mathbf{0}$ , de donde

$$\frac{\partial(u_l)_1}{\partial X_2} - \frac{\partial(u_l)_2}{\partial X_1} = 0, \quad (3.2.30)$$

y por tanto, utilizando (3.2.23)

$$\eta_l(u_l)_1 - ik(u_l)_2 = 0,$$

es decir,

$$\frac{(u_l)_1}{(u_l)_2} = \frac{(C_l)_1}{(C_l)_2} = \frac{ik}{\eta_l}, \quad (3.2.31)$$

lo que nos permite obtener las expresiones de los desplazamientos longitudinales, salvo una constante B:

$$(u_l)_1 = Bke^{i(kX_1 - \omega t) + \eta_l X_2}, \quad (3.2.32)$$

$$(u_l)_2 = -iB\eta_l e^{i(kX_1 - \omega t) + \eta_l X_2}. \quad (3.2.33)$$

Entonces, las componentes del campo de desplazamientos  $\mathbf{u}$  serán:

$$u_1 = (u_t)_1 + (u_l)_1 = A\eta_t e^{i(kX_1 - \omega t) + \eta_t X_2} + Bk e^{i(kX_1 - \omega t) + \eta_l X_2}, \quad (3.2.34)$$

$$u_2 = (u_t)_2 + (u_l)_2 = -i(Ak e^{i(kX_1 - \omega t) + \eta_t X_2} + B\eta_l e^{i(kX_1 - \omega t) + \eta_l X_2}). \quad (3.2.35)$$

Al considerar la parte real de este campo, obtenemos la solución:

$$u_1 = (A\eta_t e^{\eta_t X_2} + Bk e^{\eta_l X_2}) \cos(kX_1 - \omega t), \quad (3.2.36)$$

$$u_2 = (Ake^{\eta_t X_2} + B\eta_l e^{\eta_l X_2}) \operatorname{sen}(kX_1 - \omega t). \quad (3.2.37)$$

El vector  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)$  verifica la ecuación de Lamé-Navier (1.9.1) y, por consiguiente, también la ecuación (3.1.1) con  $\mathbf{b}_0 = \mathbf{0}$ . Además, por construcción,  $\lim_{X_2 \rightarrow -\infty} \mathbf{u} = \mathbf{0}$ .

Calculamos ahora los coeficientes A y B a partir de la condición de contorno (3.1.3) sobre  $X_2 = 0$ , considerando  $\mathbf{s}_0 = \mathbf{0}$ . Teniendo en cuenta la hipótesis de deformaciones planas, la condición  $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{0}$  sobre  $X_2 = 0$ , se escribe en términos del tensor de deformación como:

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = (\sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{32})^t = (2\mu \varepsilon_{12}(\mathbf{u}), \lambda(\varepsilon_{11}(\mathbf{u}) + \varepsilon_{22}(\mathbf{u})) + 2\mu \varepsilon_{22}(\mathbf{u}), 0)^t.$$

Así en  $X_2 = 0$  debe verificarse:

$$\sigma_{12} = 2\mu \varepsilon_{12} = 0, \quad (3.2.38)$$

$$\sigma_{22} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu \varepsilon_{22} = 0. \quad (3.2.39)$$

La condición (3.2.38) se puede escribir como:

$$\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} = 0, \quad \text{en } X_2 = 0. \quad (3.2.40)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta las definiciones de  $c_l$  y  $c_t$  dadas en (1.9.9), la condición (3.2.39) se escribe en función del desplazamiento como:

$$c_t^2 \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + (c_l^2 - 2c_t^2) \frac{\partial u_1}{\partial X_1} = 0, \quad \text{en } X_2 = 0. \quad (3.2.41)$$

Sustituyendo los valores de  $\frac{\partial u_i}{\partial X_j}$ , calculados a partir de las expresiones (3.2.36)–(3.2.37), en las ecuaciones (3.2.40)–(3.2.41), se obtiene el sistema:

$$(\eta_t^2 + k^2)A + 2k\eta_l B = 0, \quad (3.2.42)$$

$$2c_t^2 k \eta_t A + (c_l^2 (\eta_t^2 - k^2) + 2c_t^2 k^2) B = 0. \quad (3.2.43)$$

Dividiendo por  $c_t^2$  la segunda ecuación, se tiene:

$$2k\eta_t A + \left( \frac{c_l^2}{c_t^2} (\eta_l^2 - k^2) + 2k^2 \right) B = 0. \quad (3.2.44)$$

Ahora, teniendo en cuenta las definiciones de  $\eta_l^2$  y  $\eta_t^2$  dadas en (3.2.25) y (3.2.26), se verifica que:

$$\omega^2 = (k^2 - \eta_l^2) c_t^2.$$

Reemplazando este valor en la expresión de  $\eta_t^2$  se deduce

$$\frac{c_l^2}{c_t^2} (\eta_l^2 - k^2) = \eta_t^2 - k^2,$$

y sustituyendo en (3.2.44)

$$2k\eta_t A + (\eta_t^2 + k^2) B = 0.$$

En consecuencia, las constantes  $A$  y  $B$  deben ser solución del sistema:

$$\begin{pmatrix} k^2 + \eta_t^2 & 2k\eta_t \\ 2k\eta_t & \eta_t^2 + k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.45)$$

En definitiva, consideradas las condiciones iniciales

$$(u_0^R)_1(\mathbf{X}) = (A\eta_t e^{\eta_t X_2} + Bk e^{\eta_l X_2}) \cos(kX_1), \quad (3.2.46)$$

$$(u_0^R)_2(\mathbf{X}) = (Ake^{\eta_t X_2} + B\eta_l e^{\eta_l X_2}) \sen(kX_1), \quad (3.2.47)$$

$$(u_1^R)_1(\mathbf{X}) = \omega (A\eta_t e^{\eta_t X_2} + Bk e^{\eta_l X_2}) \sen(kX_1), \quad (3.2.48)$$

$$(u_1^R)_2(\mathbf{X}) = -\omega (Ake^{\eta_t X_2} + B\eta_l e^{\eta_l X_2}) \cos(kX_1), \quad (3.2.49)$$

y la condición de borde

$$(u^{DR})_1(X_2, t) = (A\eta_t e^{\eta_t X_2} + Bk e^{\eta_l X_2}) \cos(kl_0 - \omega t), \quad (3.2.50)$$

$$(u^{DR})_2(X_2, t) = (Ake^{\eta_t X_2} + B\eta_l e^{\eta_l X_2}) \sen(kl_0 - \omega t), \quad (3.2.51)$$

siendo  $A$  y  $B$  tales que verifican el sistema (3.2.45), hemos demostrado que:

**Teorema 3.2.4** *Sea  $k > 0$  tal que  $k^2 > \max\{K_l^2, K_t^2\}$ . Si  $\mathbf{b}_0 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{s}_0 = \mathbf{0}$  y además  $A$  y  $B$  verifican el sistema (3.2.45), entonces existe una solución del*

Problema (**P3D<sub>k</sub>**) de la forma

$$u_1^R(\mathbf{X}, t) = (A\eta_t e^{\eta_t X_2} + Bk e^{\eta_t X_2}) \cos(kX_1 - \omega t), \quad (3.2.52)$$

$$u_2^R(\mathbf{X}, t) = (Ake^{\eta_t X_2} + B\eta_t e^{\eta_t X_2}) \operatorname{sen}(kX_1 - \omega t), \quad (3.2.53)$$

$$u_3^R(\mathbf{X}, t) = 0, \quad (3.2.54)$$

con  $\mathbf{u}^D = \mathbf{u}^{DR}$ ,  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0^R$  y  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1^R$ .  $\square$

Veremos ahora qué condiciones deben cumplir las constantes  $\omega$ ,  $c_t$ , y  $k$  para que el sistema (3.2.45) tenga solución no trivial.

**Lema 3.2.5** *El sistema (3.2.45) tiene solución no trivial si y sólo si la variable  $\xi$  definida por  $\xi = \frac{\omega}{c_t k}$  es solución de*

$$\xi^6 - 8\xi^4 + 8 \left(3 - 2\frac{c_t^2}{c_l^2}\right) \xi^2 - 16 \left(1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\right) = 0. \quad (3.2.55)$$

*Demostración.* Para que el sistema (3.2.45) tenga solución no trivial, se tiene que cumplir:

$$(k^2 + \eta_t^2)^2 = 4k^2 \eta_l \eta_t.$$

Elevando al cuadrado y sustituyendo las expresiones para  $\eta_t^2$  y  $\eta_l^2$  definidas en (3.2.25) y (3.2.26) se obtiene:

$$\left(2k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}\right)^4 = 16k^4 \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2}\right) \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}\right),$$

que desarrollada es:

$$\frac{\omega^8}{c_t^8} - 16k^6 \frac{\omega^2}{c_t^2} + 24k^4 \frac{\omega^4}{c_t^4} - 8k^2 \frac{\omega^6}{c_t^6} = -16k^6 \frac{\omega^2}{c_l^2} + 16k^4 \frac{\omega^4}{c_l^2 c_t^2}.$$

Consideramos ahora  $\xi = \frac{\omega}{c_t k}$  y sustituyendo en la expresión anterior obtenemos la ecuación:

$$k^8 \xi^8 - 8k^8 \xi^6 + 8k^8 \xi^4 \left(3 - 2\frac{c_t^2}{c_l^2}\right) - 16k^8 \xi^2 \left(1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\right) = 0.$$

Dividiendo esta igualdad por  $k^8 \xi^2$  se obtiene:

$$\xi^6 - 8\xi^4 + 8 \left(3 - 2\frac{c_t^2}{c_l^2}\right) \xi^2 - 16 \left(1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\right) = 0.$$

□

Vemos entonces, que  $\xi$  depende solamente del cociente  $\frac{c_t^2}{c_l^2}$ , que es una constante  $\alpha$  característica de cada material.

**Lema 3.2.6** *El cociente  $\alpha = \frac{c_t^2}{c_l^2}$  depende tan sólo del coeficiente de Poisson  $\nu$ , a través de la expresión*

$$\alpha = \frac{c_t^2}{c_l^2} = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}, \quad (3.2.56)$$

y es menor que  $1/2$ .

*Demostración.* Tal y como se definieron en el Teorema 1.9.3,  $c_t^2$  y  $c_l^2$  son:

$$c_t^2 = \frac{\mu}{\rho_0}, \quad c_l^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}.$$

Entonces,

$$\alpha = \frac{c_t^2}{c_l^2} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu},$$

y como

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \lambda + 2\mu = \frac{(1 - \nu)E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)},$$

se obtiene:

$$\alpha = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}.$$

Y al ser  $0 < \nu < 1/2$ , es claro que  $0 < \alpha < 1/2$ . □

Además, para que los valores  $\eta_l$  y  $\eta_t$  definidos por (3.2.25)–(3.2.26) sean reales,  $\xi$  debe ser real, positivo y menor que 1, dado que  $\eta_t = k\sqrt{1 - \xi^2}$  y  $\eta_l = k\sqrt{1 - \alpha\xi^2}$ . Probaremos en el siguiente lema que la ecuación (3.2.55) tiene una única solución en esas condiciones.

**Lema 3.2.7** *La ecuación*

$$\xi^6 - 8\xi^4 + 8\left(3 - 2\frac{c_t^2}{c_l^2}\right)\xi^2 - 16\left(1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\right) = 0, \quad (3.2.57)$$

*tiene una única raíz real en el intervalo  $(0, 1)$ .*

*Demostración.* Consideremos  $x = \xi^2$ . La ecuación (3.2.57) tiene una solución en las condiciones anteriores si y sólo si existe una única  $x \in (0, 1)$  raíz del polinomio:

$$p(x) = x^3 - 8x^2 + 8\left(3 - 2\frac{c_t^2}{c_l^2}\right)x - 16\left(1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\right).$$

Veremos que tal solución  $x$  existe y es única. En primer lugar,

$$p(0) = -16(1 - \alpha),$$

$$p(1) = 1,$$

siendo  $\alpha$  el cociente definido en (3.2.56). Como  $0 < \alpha < 1/2$ , se cumple que  $p(0) < 0$  y, por la continuidad de  $p(x)$ , existe al menos un  $x^* \in (0, 1)$  tal que  $p(x^*) = 0$ . Veamos que es único. Para ello probaremos que  $p'$  no tiene ceros en el intervalo  $(0, 1)$ .

$$p'(x) = 3x^2 - 16x + 24 - 16\alpha,$$

cuyas raíces, dependiendo de  $\alpha$ , son:

$$x_* = \frac{16 \pm \sqrt{-32 + 192\alpha}}{6}.$$

Sabemos por el lema anterior que  $\alpha \in (0, 1/2)$ . Vamos a ver que para ningún valor de  $\alpha$  se cumple que  $x_* \in [0, 1]$ .

- Para  $\alpha \in (0, 1/6)$  el radicando es negativo, así que las raíces del polinomio  $p'$  no son reales.
- Para  $\alpha \in [1/6, 1/2)$  se cumple que  $\sqrt{-32 + 192\alpha} \in [0, 8)$  y por tanto  $x_* \in [4/3, 4]$ , es decir, las raíces del polinomio derivado son estrictamente superiores a la unidad.

En consecuencia,  $p'$  no se anula en el intervalo  $(0, 1)$  sea cual sea el valor de  $\alpha$  y, por tanto, existe un único  $x^* \in (0, 1)$  tal que  $p(x^*) = 0$  y un único  $\xi^* = +\sqrt{x^*}$  solución de la ecuación (3.2.57), real, positivo y menor que 1.  $\square$

**Teorema 3.2.8** *Dados  $\omega > 0$  y  $c_l$  y  $c_t$  constantes positivas características del material definidas en (1.9.9), sea  $\xi$  la correspondiente solución de (3.2.57)*

en el intervalo  $(0,1)$ . La función  $\mathbf{u}^R$  dada por (3.2.52)–(3.2.53) con  $A$  y  $B$  cumpliendo la relación

$$\frac{A}{B} = -\frac{2 - \xi^2}{2\sqrt{1 - \xi^2}}. \quad (3.2.58)$$

es solución del problema  $(\mathbf{P3D}_k)$  con  $k = \frac{\omega}{c_t\xi}$ .

*Demostración.* Consideramos la segunda ecuación del sistema (3.2.45):

$$2k\eta_t A + (\eta_t^2 + k^2)B = 0. \quad (3.2.59)$$

Por la definición de  $\eta_t$  dada en (3.2.26) deducimos que

$$\eta_t = k\sqrt{1 - \xi^2}.$$

Entonces la ecuación (3.2.59) se reescribe como:

$$k^2 \left( 2\sqrt{1 - \xi^2}A + (2 - \xi^2)B \right) = 0,$$

de donde se deduce la expresión (3.2.58). Finalmente, es fácil demostrar que  $k^2 > \max\{K_l^2, K_t^2\}$  y aplicando el Teorema 3.2.4 se concluye el resultado.  $\square$

**Observación 3.2.9** Podemos considerar entonces que, salvo un factor constante  $C$ ,  $A$  y  $B$  toman los valores:

$$A = -(2 - \xi^2), \quad B = 2\sqrt{1 - \xi^2}. \quad (3.2.60)$$

Con estos valores para  $A$  y  $B$ , se considera la siguiente definición:

**Definición 3.2.10** Se definen los desplazamientos asociados a una onda de Rayleigh monocromática, superficial y unidireccional en la dirección  $X_2$  como:

$$\mathbf{u}^R(\mathbf{X}, t) = (t_1(X_2) \cos(kX_1 - \omega t), -t_2(X_2) \sin(kX_1 - \omega t), 0). \quad (3.2.61)$$

con

$$t_1(X_2) = -(2 - \xi^2)k\sqrt{1 - \xi^2}e^{\eta_t X_2} + 2\sqrt{1 - \xi^2}ke^{\eta_t X_2}, \quad (3.2.62)$$

$$t_2(X_2) = (2 - \xi^2)ke^{\eta_t X_2} - 2\sqrt{1 - \xi^2}k\sqrt{1 - \alpha^2\xi^2}e^{\eta_t X_2}, \quad (3.2.63)$$

donde  $\xi$  es la única raíz de la ecuación (3.2.57) en el intervalo  $(0,1)$  y  $k = \frac{\omega}{c_t\xi}$ .

Asociados a la onda se tienen los siguientes parámetros:

- $k$  es el número de onda,
- $L = \frac{2\pi}{k}$  es la longitud de onda,
- $\omega$  es la frecuencia angular,
- $F = \frac{\omega}{2\pi}$  la frecuencia central,
- $T_0 = \frac{1}{F}$  el periodo, y
- $c_R = LF$  la velocidad de fase.

**Corolario 3.2.11** *Sea  $k > 0$  tal que  $k^2 > \max\{K_t^2, K_l^2\}$ . Si  $\mathbf{b}_0 = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{s}_0 = \mathbf{0}$ , entonces (3.2.61)–(3.2.63) es solución del Problema (P3D<sub>k</sub>) con  $\mathbf{u}^D = \mathbf{u}^{DR}$ ,  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0^R$  y  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1^R$  definidas por*

$$(\mathbf{u}_0^R)(\mathbf{X}) = (t_1(X_2) \cos(kX_1), -t_2(X_2) \operatorname{sen}(kX_1), 0), \quad (3.2.64)$$

$$(\mathbf{u}_1^R)(\mathbf{X}) = \omega (t_1(X_2) \operatorname{sen}(kX_1), t_2(X_2) \cos(kX_1), 0), \quad (3.2.65)$$

$$(\mathbf{u}^{DR})(X_2, t) = (t_1(X_2) \cos(kl_0 - \omega t), -t_2(X_2) \operatorname{sen}(kl_0 - \omega t), 0). \quad (3.2.66)$$

□

### 3.3. Excitación de sólidos en reposo con ondas de Rayleigh.

En este apartado consideraremos que la placa es excitada mediante un material piezoeléctrico que produce una onda de Rayleigh sobre  $\Gamma_D$  de la forma  $\mathbf{u}^{DR}$ , con  $\mathbf{u}^{DR}$  definida por (3.2.66). Supondremos que, inicialmente, antes de aplicar el piezoeléctrico, la placa está en reposo y el objetivo será simular cómo se transmite la onda de Rayleigh a través de la placa.

En adelante, puesto que la onda es superficial, consideraremos que el dominio  $\Omega$  es acotado (véase Figura 3.3.1), de la forma  $\Omega = \Omega_s \times (0, l_3)$ , siendo  $\Omega_s =$

$(l_0, l_1) \times (-l_2, 0)$  y supondremos que  $l_2$  es lo suficientemente grande para poder considerar sobre la frontera  $\{X_2 \equiv l_2\}$  una condición de desplazamientos nulos. Denotamos por  $\Gamma_D^*$  la nueva frontera Dirichlet  $\{X_2 \equiv l_2\}$  y por  $\Gamma_N^*$  la nueva frontera Neumann correspondiente a  $\{X_1 \equiv l_1\}$ .

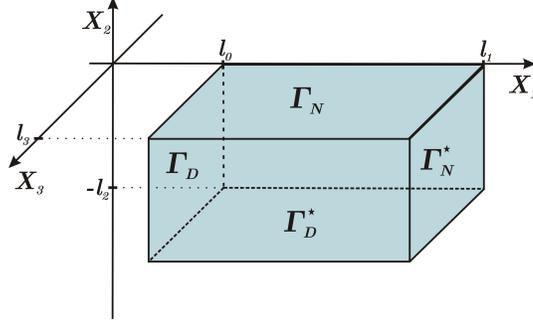


Figura 3.3.1: Dominio tridimensional acotado

Consideraremos, al igual que en la sección anterior, que las fuerzas de volumen son nulas, que  $\mathbf{u}^D(X_2, t) = \mathbf{u}^{DR}(X_2, t)$  con  $\mathbf{u}^{DR}(X_2, t)$  definida por (3.2.66).

Sean  $\mathbf{s}_0^*$ ,  $\mathbf{u}_0$  y  $\mathbf{u}_1$  funciones independientes de  $X_3$  y tales que su tercera componente es nula. Nos planteamos el siguiente problema de deformaciones planas:

**PROBLEMA (DP<sup>R</sup>):** Hallar  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$  verificando:

$$-\rho_0 \ddot{u}_\alpha + \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial X_\beta} = 0, \quad \text{en } \Omega_s, \quad (3.3.1)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta} + \lambda \varepsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}, \quad \sigma_{\alpha 3} = 0, \quad \sigma_{33} = \nu \sigma_{\gamma\gamma} \quad \text{en } \Omega_s, \quad (3.3.2)$$

$$u_\alpha = u_\alpha(X_1, X_2, t), \quad u_3 = 0 \quad \text{en } \Omega_s, \quad (3.3.3)$$

$$u_\alpha = (u^{DR})_\alpha, \quad \text{sobre } \Gamma_{Ds}, \quad (3.3.4)$$

$$u_\alpha = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_{Ds}^*, \quad (3.3.5)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} n_\beta = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_{Ns}, \quad (3.3.6)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} n_\beta = s_\alpha^*, \quad \text{sobre } \Gamma_{Ns}^*, \quad (3.3.7)$$

junto con las condiciones iniciales

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}), \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_1(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Omega_s. \quad (3.3.8)$$

En la práctica, las condiciones iniciales impuestas se determinarán en función del tipo de simulación que se pretenda realizar.

Además, como se ha mostrado en la Sección 1.8, la solución de este problema de deformaciones planas es solución del problema tridimensional; debido a ello, realizaremos el análisis matemático del correspondiente problema 3D que denotaremos  $(\widetilde{\mathbf{P3D}})$

### 3.4. Formulación variacional

En esta sección nos planteamos analizar matemáticamente un problema análogo al definido en  $(\mathbf{P3D}_k)$  pero sobre un dominio tridimensional acotado, que es el tipo de problema que resolveremos numéricamente. Sea  $\Gamma = \partial\Omega = \tilde{\Gamma}_D \cup \tilde{\Gamma}_N$  siendo  $\tilde{\Gamma}_D$  de medida estrictamente positiva.

Consideramos entonces el siguiente problema:

**PROBLEMA  $(\widetilde{\mathbf{P3D}})$ :** *Hallar  $(\mathbf{u}, \sigma)$  tales que verifiquen las ecuaciones (3.1.1), (3.1.4)–(3.1.6) y las condiciones de borde:*

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}^D, \quad \text{sobre } \tilde{\Gamma}_D \quad (3.4.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} = \tilde{\mathbf{s}}_0, \quad \text{sobre } \tilde{\Gamma}_N. \quad (3.4.2)$$

Procederemos por el momento a nivel formal y posteriormente explicitaremos el marco funcional. Para establecer la formulación variacional del problema, consideraremos la forma bilineal

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) dV_X, \quad (3.4.3)$$

con  $a_{ijkh}$  definidos por

$$a_{ijkh} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kh} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{jk} \delta_{ih}), \quad (3.4.4)$$

donde  $\lambda$  y  $\mu$  son los coeficientes de Lamé del material. Teniendo en cuenta la relación (3.1.6),  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  se escribe también como

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) dV_X.$$

Aplicando la fórmula de Green (2.1.21) podemos escribir la igualdad:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = - \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_j}(\mathbf{u}) v_i dV_X + \int_{\Gamma} (\sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j) v_i dA_X. \quad (3.4.5)$$

Sea  $\mathbf{v}$  una funci3n test tal que  $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{u}}^D$  sobre  $\tilde{\Gamma}_D$ . Multiplicando la ecuaci3n (3.1.1) por  $\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)$  se tiene:

$$\langle \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t) \rangle - \int_{\Omega} \text{Div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}(t)) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) dV_X = \int_{\Omega} \mathbf{b}_0(t) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) dV_X,$$

siendo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un producto de dualidad adecuado.

Teniendo en cuenta que  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{u}$  verifican la condici3n de contorno (3.4.1) y que  $\boldsymbol{\sigma}$  verifica la condici3n (3.4.2), la f3rmula de Green (3.4.5) permite escribir:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) = - \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_j}(\mathbf{u})(v_i - u_i(t)) dV_X + \int_{\tilde{\Gamma}_N} \tilde{f}_i(v_i - u_i(t)) dA_X.$$

En consecuencia, se propone la siguiente formulaci3n variacional del Problema  $(\widetilde{\mathbf{P3D}})$ .

**PROBLEMA  $(\widetilde{\mathbf{V3D}})$ :** Hallar  $\mathbf{u}$  tal que  $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}^D$  sobre  $\tilde{\Gamma}_D$  verificando:

$$\begin{aligned} \langle \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t) \rangle + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) & \quad (3.4.6) \\ = \int_{\Omega} \mathbf{b}_0(t) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) dV_X + \int_{\tilde{\Gamma}_N} \tilde{\mathbf{s}}_0 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) dA_X, \end{aligned}$$

para todo  $\mathbf{v}$  tal que  $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{u}}^D$  sobre  $\tilde{\Gamma}_D$  y para casi todo instante  $t \in [0, T]$ , junto con las condiciones iniciales (3.1.5).

La ecuaci3n (3.4.6) representa la relaci3n de trabajos virtuales asociada al problema. El t3rmino  $\langle \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v} - \mathbf{u}(t) \rangle$  representa el trabajo virtual de las fuerzas de inercia,  $a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))$  el de las fuerzas el3sticas, y el segundo miembro de la igualdad el trabajo de las fuerzas exteriores. Rec3procamente, si  $\mathbf{u}$  es una soluci3n suficientemente regular del problema variacional, entonces es soluci3n del problema  $(\widetilde{\mathbf{P3D}})$ . En efecto, si  $\mathbf{u}$  verifica (3.4.6), aplicando la f3rmula de Green, se tiene:

$$\begin{aligned} \langle \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t) \rangle - \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_j}(\mathbf{u})(v_i - u_i(t)) dV_X \\ + \int_{\Gamma} (\sigma_{ij}(\mathbf{u})n_j)(v_i - u_i(t)) dA_X = \int_{\Omega} \mathbf{b}_0(t) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) dV_X \\ + \int_{\tilde{\Gamma}_N} \tilde{\mathbf{s}}_0 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) dA_X, \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

para todo  $\mathbf{v}$ .

Tomando en (3.4.7) como funci3n test  $\mathbf{v} + \mathbf{u}(t)$  con  $\mathbf{v} \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$ , entonces

$\mathbf{u}$  cumple la ecuación de equilibrio (3.1.1). Como por hipótesis  $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}^D$ , se verifica la condición Dirichlet (3.4.1) sobre  $\tilde{\Gamma}_D$ .

Finalmente, tomando  $\mathbf{v}$  tal que  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$  sobre  $\tilde{\Gamma}_D$  y, teniendo en cuenta que  $\mathbf{u}$  verifica la ecuación de equilibrio, de la igualdad (3.4.7) deducimos que:

$$\int_{\tilde{\Gamma}_N} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) dA_X = \int_{\tilde{\Gamma}_N} \tilde{\mathbf{s}}_0 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) dA_X, \text{ para todo } \mathbf{v},$$

y, por tanto,  $\sigma_{ij}(\mathbf{u})n_j = \tilde{f}_i$  sobre  $\tilde{\Gamma}_N$ .

### 3.5. Existencia y unicidad de solución

Definimos en primer lugar el marco funcional en el que consideraremos la formulación variacional ( $\widetilde{\mathbf{V3D}}$ ). Sea  $t \in [0, T]$ ; se definen

$$V(t) = \{\mathbf{v}; \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^3, \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{u}}^D(t) \text{ sobre } \tilde{\Gamma}_D\}, \quad (3.5.1)$$

y en particular,

$$V_0 = \{\mathbf{v}; \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^3; \mathbf{v}|_{\tilde{\Gamma}_D} = \mathbf{0}\}, \quad (3.5.2)$$

y el espacio

$$\mathbf{H} = [L^2(\Omega)]^3, \quad (3.5.3)$$

equipado con el producto escalar habitual en  $L^2$ . Si  $\tilde{\mathbf{u}}^D$  es suficientemente regular,  $V(t)$  y  $V_0$  son espacios de Hilbert para la norma inducida por  $[H^1(\Omega)]^3$  (nótese que son subespacios cerrados de  $[H^1(\Omega)]^3$ ). Además, la forma bilineal  $a$  definida en (3.4.3) es simétrica en  $V \times V$  y acotada al considerar que los coeficientes  $\lambda$  y  $\mu$  son constantes.

Puesto que  $\mathbf{H}$  se identifica con su dual, se verifica que

$$V_0 \subset \mathbf{H} \subset V_0',$$

siendo  $V_0'$  el dual de  $V_0$ . Además,  $V_0 \subset \mathbf{H}$  es un embebimiento denso y compacto.

Sean  $Q$  y  $\Upsilon$  los conjuntos definidos en (2.1.27).

Supondremos las siguientes hipótesis sobre los datos del problema variacional ( $\widetilde{\mathbf{V3D}}$ ):

- (H1)  $\mathbf{b}_0$  y  $\dot{\mathbf{b}}_0 \in [L^2(Q)]^3$ ,
- (H2)  $\tilde{\mathbf{s}}_0$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{s}}}_0 \in [L^2(\Upsilon)]^3$ ,
- (H3)  $\tilde{\mathbf{u}}^D$  es la restricción a  $\tilde{\Gamma}_D \times (0, T)$  de una función  $\mathbf{U}$  verificando:

$$\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, \ddot{\mathbf{U}} \text{ y } \ddot{\mathbf{U}} \in L^2(0, T; [H^{1/2}(\Gamma)]^3). \quad (3.5.4)$$

- (H4) las condiciones iniciales verifican que:

$$\mathbf{u}_0 \in V(0) \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_1 \in \mathbf{H}.$$

- (H5) la densidad del material  $\rho_0$  es constante y estrictamente positiva,
- (H6) los coeficientes del tensor  $\mathbf{C}$ , denotados por  $a_{ijkh}$ , son constantes en todo  $\Omega$  y verifican las propiedades de simetría y positividad:

$$a_{ijkh} = a_{jikh} = a_{khij}, \quad (3.5.5)$$

$$a_{ijkh}\xi_{ij}\xi_{kh} \geq \alpha\xi_{ij}\xi_{ij} \quad \text{para todo } \boldsymbol{\xi} = (\xi_{ij}) \in \mathcal{S}_3, \quad (3.5.6)$$

donde  $\alpha > 0$  y  $\mathcal{S}_3$  es el espacio de los tensores simétricos de orden dos sobre  $\mathbb{R}^3$ .

Para probar la existencia de solución del Problema (**V3D**) realizamos un cambio de variable que permite considerar el problema homogéneo asociado.

Como consecuencia de la hipótesis (H3) podemos elegir una función  $\Phi(t) \in [H^1(\Omega)]^3$  (ver Duvaut-Lions [30]) tal que:

$$\Phi_i(t) = \tilde{u}_i^D(t) \quad \text{sobre } \tilde{\Gamma}_D,$$

y

$$\Phi, \dot{\Phi}, \ddot{\Phi}, \ddot{\Phi} \in L^2(0, T; [H^1(\Omega)]^3). \quad (3.5.7)$$

Entonces, realizando el cambio de variable  $\mathbf{u}(t)$  por  $\tilde{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}(t) - \Phi(t)$ , sustituyendo en la ecuación (3.4.6) y conservando para  $\tilde{\mathbf{u}}(t)$  la notación  $\mathbf{u}(t)$ , tenemos un problema con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas, y el Problema

( $\widehat{\mathbf{V3D}}$ ) se reduce al problema siguiente:

**PROBLEMA ( $\widehat{\mathbf{V3D}}$ ):** Hallar  $\mathbf{u}(t) \in V(t)$  tal que para casi todo  $t \in [0, T]$

$$\langle \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v} \rangle_{V'_0, V_0} + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = (\Psi(t), \mathbf{v}), \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in V_0, \quad (3.5.8)$$

con las condiciones iniciales

$$\mathbf{u}(0) = \tilde{\mathbf{u}}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \tilde{\mathbf{u}}_1, \quad (3.5.9)$$

donde

$$\begin{aligned} (\Psi(t), \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{b}_0(t) \cdot \mathbf{v} \, dV_X + \int_{\tilde{\Gamma}_N} \tilde{\mathbf{s}}_0(t) \cdot \mathbf{v} \, dA_X \\ &- \langle \rho_0 \ddot{\Phi}(t), \mathbf{v} \rangle_{V'_0, V_0} - a(\Phi(t), \mathbf{v}), \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in V_0, \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

y siendo  $\tilde{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{u}_0 - \Phi(0)$  y  $\tilde{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{u}_1 - \dot{\Phi}(0)$ .

**Teorema 3.5.1** Sea  $\Psi$  verificando (3.5.10), con los datos en las hipótesis (H1)-(H6), y tal que:

$$\Psi, \dot{\Psi} \in L^2(0, T; V'_0),$$

y, además

$$\tilde{\mathbf{u}}_0 \in V_0, \quad \tilde{\mathbf{u}}_1 \in \mathbf{H}.$$

Entonces existe una única función  $\mathbf{u}$  tal que:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in L^\infty(0, T; V_0), \\ \dot{\mathbf{u}} &\in L^\infty(0, T; \mathbf{H}), \\ \ddot{\mathbf{u}} &\in L^\infty(0, T; V'_0), \end{aligned}$$

solución del problema ( $\widehat{\mathbf{V3D}}$ ).

*Demostración.* Véase Duvaut-Lions [30]. □

**Corolario 3.5.2** Bajo las hipótesis (H1)-(H6), existe una única solución del Problema ( $\widehat{\mathbf{V3D}}$ ). □

*Demostración.* La hipótesis (H3) garantiza que  $\Phi$  cumple (3.5.7), y entonces  $\Psi$  definida por (3.5.10) está en las hipótesis del Teorema 3.5.1, gracias a (H1)-(H2). Finalmente, gracias a las hipótesis (H3), (H4) y (H6), concluimos el resultado.  $\square$

Sean  $\tilde{\Gamma}_D = \Gamma_D \cup \Gamma_D^*$ ,  $\tilde{\Gamma}_N = \Gamma_N \cup \Gamma_N^*$ ,  $\tilde{\mathbf{s}}_0 = \mathbf{s}_0^*$  sobre  $\Gamma_{Ns}^*$ , nula sobre  $\Gamma_{Ns}$  y  $\tilde{\mathbf{u}}^D = \mathbf{u}^{DR}$  sobre  $\Gamma_{Ds}$  y nula sobre  $\Gamma_{Ds}^*$ . Se verifica:

**Corolario 3.5.3** *Bajo las hipótesis (H1)-(H6), existe una única solución débil del Problema  $(\widetilde{\mathbf{P3D}})$ .*  $\square$

*Demostración.* Es suficiente demostrar que  $\tilde{\mathbf{u}}^D$  dada por  $\mathbf{u}^{DR}$  verifica la hipótesis (H3), lo cual se deduce trivialmente del hecho de que  $\mathbf{u}^{DR}$  es la restricción a  $X_1 = l_0$  de la función

$$(\mathbf{u}^R)(X_1, X_2, t) = (t_1(X_2) \cos(kX_1 - \omega t), -t_2(X_2) \sin(kX_1 - \omega t), 0).$$

## 3.6. Descomposición del problema

Para facilitar la resolución numérica del problema de deformaciones planas  $(\mathbf{DPR})$  planteado en la Sección 3.3, correspondiente a aplicar una onda de Rayleigh sobre  $X_1 = l_0$ , descomponemos el problema a resolver en dos; uno que llamaremos pseudoestático que no incorpora los efectos de inercia pero que sí da cuenta de la condición de contorno no homogénea y dependiente del tiempo (3.3.4), y otro dinámico homogéneo. Para ello, se introduce el siguiente cambio de variable:

$$\mathbf{u}(X_1, X_2, t) = \mathbf{u}^P(X_1, X_2, t) + \mathbf{u}^T(X_1, X_2, t), \quad (3.6.1)$$

donde  $\mathbf{u}^P$  y  $\mathbf{u}^T$  serán la solución del problema pseudoestático y dinámico homogéneo respectivamente. Así:

- $\mathbf{u}^P$  es la solución del problema plano pseudoestático:

**PROBLEMA (DP<sup>RS</sup>):** Hallar  $(\mathbf{u}^P, \boldsymbol{\sigma}^P)$  verificando

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^P}{\partial X_\beta} &= 0 \quad \text{en } \Omega_s, \\ \sigma_{\alpha\beta}^P &= 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta}^P + \lambda\varepsilon_{\gamma\gamma}^P\delta_{\alpha\beta}, \quad \sigma_{\alpha 3}^P = 0, \quad \sigma_{33}^P = \nu\sigma_{\gamma\gamma}^P \quad \text{en } \Omega_s, \\ u_\alpha^P &= u_\alpha^P(X_1, X_2, t), \quad u_3^P = 0 \quad \text{en } \Omega_s, \\ u_\alpha^P(X_1, X_2, t) &= (u^{DR})_\alpha(X_2, t) \quad \text{sobre } \Gamma_{Ds}, \\ u_\alpha^P(X_1, X_2, t) &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma_{Ds}^*, \\ \sigma_{\alpha\beta}^P n_\beta &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma_{Ns}, \\ \sigma_{\alpha\beta}^P n_\beta &= s_\alpha^* \quad \text{sobre } \Gamma_{Ns}^*, \end{aligned}$$

donde  $\boldsymbol{\varepsilon}^P$  denota el tensor elástico de deformación asociado a  $\mathbf{u}^P$ .

En lo que sigue, se supone que  $\mathbf{s}_0^* = \mathbf{s}_1(\mathbf{X}) \cos(\omega t) + \mathbf{s}_2(\mathbf{X}) \sin(\omega t)$ . En particular, se considerará que  $\mathbf{s}_0^* = \mathbf{0}$ . Si además se tiene en cuenta que  $\mathbf{u}^{DR}$  definido por (3.2.66) se puede escribir como:

$$(\mathbf{u}^{DR})(X_2, t) = (t_1(X_2) \cos(kl_0), -t_2(X_2) \sin(kl_0)) \cos(\omega t) \quad (3.6.2)$$

$$+ (t_1(X_2) \sin(kl_0), t_2(X_2) \cos(kl_0)) \sin(\omega t), \quad (3.6.3)$$

y dado el carácter lineal del Problema (DP<sup>RS</sup>), podemos aplicar el principio de superposición y calcular  $\mathbf{u}^P$  resolviendo los dos problemas de deformaciones planas estáticos e independientes siguientes:

**PROBLEMA (DP<sup>RSi</sup>):** Hallar  $(\mathbf{u}^{Pi}, \boldsymbol{\sigma}^{Pi})$  verificando

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^{Pi}}{\partial X_\beta} &= 0 \quad \text{en } \Omega_s, \\ \sigma_{\alpha\beta}^{Pi} &= 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta}^{Pi} + \lambda\varepsilon_{\gamma\gamma}^{Pi}\delta_{\alpha\beta}, \quad \sigma_{\alpha 3}^{Pi} = 0, \quad \sigma_{33}^{Pi} = \nu\sigma_{\gamma\gamma}^{Pi} \quad \text{en } \Omega_s, \\ u_\alpha^{Pi} &= u_\alpha^{Pi}(X_1, X_2), \quad u_3^{Pi} = 0 \quad \text{en } \Omega_s, \\ \mathbf{u}^{P1}(X_1, X_2) &= (t_1(X_2) \cos(kl_0), -t_2(X_2) \sin(kl_0)) \quad \text{sobre } \Gamma_{Ds}, \\ \mathbf{u}^{P2}(X_1, X_2) &= (t_1(X_2) \sin(kl_0), t_2(X_2) \cos(kl_0)) \quad \text{sobre } \Gamma_{Ds}, \\ \mathbf{u}^{Pi}(X_1, X_2) &= \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_{Ds}^*, \\ \sigma_{\alpha\beta}^{Pi} n_\beta &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma_{Ns} \cup \Gamma_{Ns}^*, \end{aligned}$$

para  $i=1, 2$  donde  $\boldsymbol{\varepsilon}^{Pi}$  denota el tensor elástico de deformación asociado a  $\mathbf{u}^{Pi}$ .

La parte pseudoestacionaria  $\mathbf{u}^P$  de la solución débil  $\mathbf{u}$  del problema  $(\mathbf{DP}^R)$  se obtiene entonces por la superposición de las dos anteriores, siendo:

$$\mathbf{u}^P = \mathbf{u}^{P1} \cos(\omega t) + \mathbf{u}^{P2} \text{sen}(\omega t). \quad (3.6.4)$$

**Observación 3.6.1** : *Nótese que si  $l_0 = 0$ , las condiciones de contorno para los problemas pseudoestáticos se reducen a:*

$$\mathbf{u}^{P1}(X_1, X_2) = (t_1(X_2), 0) \quad \text{sobre } \Gamma_{Ds}, \quad (3.6.5)$$

$$\mathbf{u}^{P2}(X_1, X_2) = (0, t_2(X_2)) \quad \text{sobre } \Gamma_{Ds}. \quad (3.6.6)$$

*Sin embargo, como se verá en la Sección 3.7, hemos observado en las simulaciones numéricas que imponer estas condiciones considerando  $l_0 = 0$  produce una pérdida de información que proporciona peores aproximaciones de la solución que si consideramos  $l_0 \neq 0, 2\pi/k, \dots$ . Creemos que esta pérdida numérica es debida a considerar la condición Dirichlet justo en el instante en que la gráfica de la onda de Rayleigh tiene un punto crítico.*

- La parte dinámica,  $\mathbf{u}^T$ , de la solución  $\mathbf{u}$  del problema  $(\mathbf{DP}^R)$ , se define de forma que  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^P + \mathbf{u}^T$ , siendo  $\mathbf{u}^P$  la solución del Problema  $(\mathbf{DP}^RS)$ ; en consecuencia:

$$\rho_0 \ddot{u}_\alpha^T - \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^T}{\partial X_\beta} = -\rho_0 \ddot{u}_\alpha^P \quad \text{en } \Omega_s,$$

y teniendo en cuenta la expresión (3.6.4) de  $\mathbf{u}^P$ , la función  $\mathbf{u}^T$  debe ser solución del siguiente problema dinámico con condiciones de contorno homogéneas:

**PROBLEMA  $(\mathbf{DP}^RD)$** : *Hallar  $(\mathbf{u}^T, \boldsymbol{\sigma}^T)$  verificando:*

$$\begin{aligned} \rho_0 \ddot{u}_\alpha^T - \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^T}{\partial X_\beta} &= \rho_0 \omega^2 u_\alpha^P \quad \text{en } \Omega_s, \\ \sigma_{\alpha\beta}^T &= 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta}^T + \lambda \varepsilon_{\gamma\gamma}^T \delta_{\alpha\beta}, \quad \sigma_{\alpha 3}^T = 0, \quad \sigma_{33}^T = \nu \sigma_{\gamma\gamma}^T \quad \text{en } \Omega_s, \\ u_\alpha^T &= u_\alpha^T(X_1, X_2, t), \quad u_3^T = 0 \quad \text{en } \Omega_s, \\ u_\alpha^T(X_1, X_2, t) &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma_{Ds} \cup \Gamma_{Ds}^*, \\ \sigma_{\alpha\beta}^T n_\beta &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma_{Ns} \cup \Gamma_{Ns}^*, \end{aligned}$$

con las condiciones iniciales dadas por

$$\mathbf{u}^T(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}) - \mathbf{u}^{P1}(\mathbf{X}), \quad (3.6.7)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^T(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_1(\mathbf{X}) - \omega \mathbf{u}^{P2}(\mathbf{X}). \quad (3.6.8)$$

En la práctica, las condiciones iniciales (3.3.8) consideradas para simular, por ejemplo, un tren de ondas de Rayleigh, son las correspondientes al impulso dado por la solución pseudoestática, de modo que

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{X}) = \mathbf{u}^{P1}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{u}_1(\mathbf{X}) = \omega \mathbf{u}^{P2}(\mathbf{X}).$$

Esta elección deja patente otra de las ventajas de la descomposición del problema. En efecto, para simular la propagación de una onda de Rayleigh sobre una placa en reposo, la condición inicial debe ser compatible con las condiciones Dirichlet que estamos considerando. Por ello, la condición inicial del problema completo será el impulso que proporcione la solución pseudoestática; y, en consecuencia, las condiciones iniciales para el subproblema dinámico son homogéneas:

$$\mathbf{u}^T(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{u}}^T(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{0}.$$

En la Sección 3.8.3 se detallarán otro tipo de condiciones de contorno e iniciales a considerar según se quiera simular un tren de ondas de Rayleigh con amplitud constante, un cierto número de ciclos o un tren de ondas con amplitud variable.

### 3.7. Resultados numéricos

En esta sección se muestran los resultados numéricos obtenidos para ejemplos académicos que permiten validar la metodología de descomposición expuesta en la sección anterior. También se presentan los resultados obtenidos en la simulación de la propagación de uno o varios ciclos de ondas de Rayleigh. La resolución numérica se realiza mediante el método de elementos finitos y el método de Newmark propuesto en la Sección 2.6.4. Puesto que la formulación discreta de los problemas ( $\text{DP}^{\text{RS}}$ ) y ( $\text{DP}^{\text{RD}}$ ) es estándar, no las detallaremos

en esta memoria. Los espacios discretos de tensiones y desplazamientos utilizados son los definidos en (2.6.3) y (2.6.5) considerando las correspondientes funciones en el caso de los problemas no homogéneos.

### 3.7.1. Validación de la descomposición

Para validar la técnica de descomposición presentada en la Sección 3.6, resolvemos un problema académico con dicha metodología. Consideramos una placa sin grieta cuya sección media  $\Omega_s$  es el dominio acotado  $\Omega_s = (l_0, l_1) \times (-l_2, 0)$ , siendo  $l_0 = 0$ ,  $l_1 = \pi/24$  m y  $l_2 = \pi/48$  m. Sobre  $\Omega_s$  consideramos un problema similar al **(DP<sup>R</sup>)** con  $\mathbf{s}_0^* = \mathbf{0}$  y fuerzas de volumen no nulas:

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{u}} - \text{Div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{b}_0, \quad \text{en } \Omega_s \times [0, T], \quad (3.7.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \text{sobre } \Gamma_{Ns} \cup \Gamma_{Ns}^* \times [0, T], \quad (3.7.2)$$

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}^D, \quad \text{sobre } \Gamma_{Ds} \cup \Gamma_{Ds}^* \times [0, T], \quad (3.7.3)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}), \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_1(\mathbf{X}), \quad \text{en } \Omega_s, \quad (3.7.4)$$

donde  $T = 2.E - 06$  y  $\mathbf{b}_0$  tiene por componentes

$$\begin{aligned} (b_0)_1(\mathbf{X}, t) &= -e^{X_2}(\lambda + \mu)(\text{sen } X_2(X_2 + 1) + X_2 \cos X_2)(\tilde{x} \cos \tilde{x} + \text{sen } \tilde{x}) \text{sen}(\omega t) \\ &\quad + 9(X_2 \text{sen } X_2((\rho_0 \omega^2 - \mu)\tilde{x} \text{sen } \tilde{x} + 2\mu\tilde{x} \text{sen } \tilde{x} \cos X_2)) \cos(\omega t) \\ &\quad + 9((\lambda + 2\mu)(2 \cos \tilde{x} - \tilde{x} \text{sen } \tilde{x})) \cos(\omega t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b_0)_2(\mathbf{X}, t) &= 9(\lambda + \mu)(\text{sen } X_2 + X_2 \cos X_2)(\text{sen } \tilde{x} + \tilde{x} \cos \tilde{x}) \cos(\omega t) \\ &\quad - (2(\lambda + 2\mu)\tilde{x} \text{sen } \tilde{x}(\text{sen } X_2 + \cos X_2(X_2 + 1))) e^{X_2} \text{sen}(\omega t) \\ &\quad - (X_2 \text{sen } X_2(2 \cos \tilde{x} + (\rho_0 \omega^2 - \mu)\tilde{x} \text{sen } \tilde{x})) e^{X_2} \text{sen}(\omega t), \end{aligned}$$

$$(b_0)_3(\mathbf{X}, t) = 0,$$

siendo  $\tilde{x} = X_1 - l_1$  y  $\lambda$  y  $\mu$  los parámetros de Lamé del material que se supone elástico lineal. La condición de contorno Dirichlet será de comportamiento trigonométrico similar al de una onda de Rayleigh

$$\tilde{\mathbf{u}}^D(\mathbf{X}, t) = \begin{cases} l_1 X_2 \text{sen } X_2 \text{sen } l_1 (-9 \cos(\omega t), e^{X_2} \text{sen}(\omega t), 0) & \text{sobre } \Gamma_{Ds}, \\ \tilde{x} l_2 \text{sen } l_2 \text{sen } \tilde{x} (-9 \cos(\omega t), e^{-l_2} \text{sen}(\omega t), 0) & \text{sobre } \Gamma_{Ds}^*, \end{cases}$$

y los datos para las condiciones iniciales vienen dados por

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, 0) = (-9\tilde{x}X_2 \text{sen } \tilde{x} \text{sen } X_2, 0, 0) \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, 0) = (0, \omega e^{X_2} \tilde{x} X_2 \text{sen } \tilde{x} \text{sen } X_2, 0).$$

En consecuencia, la solución analítica de (3.7.1)–(3.7.4) es:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \tilde{x}X_2 \text{sen } X_2 \text{sen } \tilde{x}(-9 \cos(\omega t), e^{X_2} \text{sen}(\omega t), 0).$$

Esta solución, al contrario de las ondas de Rayleigh, representa una deformación en la parte inferior de la placa, por lo que se considera una malla más fina en esta zona, como se muestra en la Figura 3.7.1.

Aplicando la metodología propuesta en la Sección 3.6, descomponemos las fuerzas de volumen en dos:

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}^P + \mathbf{b}^T = \mathbf{b}^{P1} \cos(\omega t) + \mathbf{b}^{P2} \text{sen}(\omega t) + \mathbf{b}^T,$$

donde

$$\begin{aligned} (b^{P1})_1(\mathbf{X}) &= -10(\lambda + 2\mu)X_2 \text{sen } X_2 (2 \cos \tilde{x} - \tilde{x} \text{sen } \tilde{x}) \\ &\quad - 10\mu\tilde{x} \text{sen } \tilde{x} (2 \cos X_2 - X_2 \text{sen } X_2) \\ (b^{P1})_2(\mathbf{X}) &= -10(\lambda + \mu)(\tilde{x} \cos \tilde{x} + \text{sen } \tilde{x})(\text{sen } X_2 + X_2 \cos X_2) \\ (b^{P1})_3(\mathbf{X}) &= 0, \end{aligned}$$

y

$$\mathbf{b}^{P2} = \mathbf{0},$$

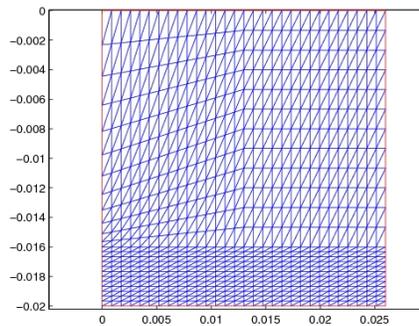


Figura 3.7.1: Malla para el test (3.7.1)–(3.7.4).

$$\begin{aligned}
b_1^T &= -(\lambda + \mu)(\sin \tilde{x} + \tilde{x} \cos \tilde{x})e^{X_2}(X_2[\sin X_2 + \cos X_2] + \sin X_2) \sin(\omega t) \\
&\quad + (\lambda + 3\mu - \rho_0\omega^2)X_2 \sin X_2 \cos(\omega t)\tilde{x} \sin \tilde{x} \\
&\quad - \left(2(\lambda + 2\mu)X_2 \sin X_2 \cos \tilde{x} + 2\mu\tilde{x} \sin \tilde{x} \cos X_2\right) \cos(\omega t), \\
b_2^T &= -(\lambda + \mu)(\cos(\omega t)(\sin X_2 + X_2 \cos X_2)(\sin \tilde{x} + \tilde{x} \cos \tilde{x})) \\
&\quad - e^{X_2} \sin(\omega t) \left(X_2 \sin X_2(2\mu \cos \tilde{x} - (\mu - \rho_0\omega^2)\tilde{x} \sin \tilde{x}) \right. \\
&\quad \left. + 2(\lambda + 2\mu)\tilde{x} \sin \tilde{x}(\cos X_2(X_2 + 1) + \sin X_2)\right), \\
b_3^T &= 0.
\end{aligned}$$

Consideramos los problemas análogos a **(DP<sup>R</sup>S<sup>i</sup>)** y **(DP<sup>R</sup>D)**. En concreto, la formulación de los problemas estáticos y dinámico a resolver es la siguiente:

**Problemas estáticos****Problema dinámico**

$$-\text{Div } \boldsymbol{\sigma}^{Pi} = \mathbf{b}^{Pi} \quad \text{en } \Omega_s,$$

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{u}}^T - \text{Div } \boldsymbol{\sigma}^T = \mathbf{b}^T + \rho_0 \omega^2 \mathbf{u}^P \quad \text{en } \Omega_s,$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{Pi} \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad i=1, 2 \quad \text{sobre } \tilde{\Gamma}_{Ns},$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \tilde{\Gamma}_{Ns},$$

$$\mathbf{u}^{P1} = \mathbf{u}^{D1} \quad \text{sobre } \tilde{\Gamma}_{Ds},$$

$$\mathbf{u}^T = \mathbf{u}^{DT} \quad \text{sobre } \tilde{\Gamma}_{Ds},$$

$$\mathbf{u}^{P2} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \tilde{\Gamma}_{Ds},$$

$$\mathbf{u}^T(\mathbf{X}, 0) = (\tilde{x}X_2 \sin \tilde{x} \sin X_2, 0, 0) \quad \text{en } \Omega_s,$$

$$\dot{\mathbf{u}}^T(\mathbf{X}, 0) = (0, \omega e^{X_2} \tilde{x}X_2 \sin \tilde{x} \sin X_2, 0) \quad \text{en } \Omega_s,$$

respectivamente, donde

$$\mathbf{u}^{D1}(\mathbf{X}, t) = \begin{cases} (-10l_1X_2 \sin X_2 \sin l_1, 0, 0) & \text{sobre } \Gamma_{Ds}, \\ (-10\tilde{x}l_2 \sin l_2 \sin \tilde{x}, 0, 0) & \text{sobre } \Gamma_{Ds}^*, \end{cases}$$

$$\mathbf{u}^{DT}(\mathbf{X}, t) = \begin{cases} l_1X_2 \sin l_1 \sin X_2(\cos(\omega t), e^{X_2} \sin(\omega t), 0) & \text{sobre } \Gamma_{Ds} \\ \tilde{x}l_2 \sin \tilde{x} \sin l_2(\cos(\omega t), e^{-l_2} \sin(\omega t), 0) & \text{sobre } \Gamma_{Ds}^*. \end{cases}$$

Finalmente, considerando las siguientes características para el material

$$\lambda = 5.4164\text{E} + 10 \text{ N/m}^2, \quad \mu = 2.7853\text{E} + 10 \text{ N/m}^2 \quad \text{y} \quad \rho_0 = 2.7\text{E} + 3 \text{ kg/m}^3,$$

y la frecuencia

$$\omega = 6269791.88 \text{ rad/s},$$

probamos el algoritmo implementado usando una malla estructurada de 4277 nodos y 8280 elementos, como se muestra en la Figura 3.7.1. En la Tabla 3.7.1

se muestra la evolución de los errores relativos para el desplazamiento en varios instantes de tiempo, considerando distintos incrementos de tiempo,  $\Delta t$ , para la discretización.

Como puede verse, los errores decrecen a medida que el paso de tiempo se

	$\Delta t=2.E-08$	$\Delta t=1.E-08$	$\Delta t=5.E-09$	$\Delta t=2.5E-09$
$t=2.E-07$	1.2038E-04	4.2469E-05	3.4444E-05	3.2187E-05
$t=2.E-06$	8.2244E-04	3.0598E-04	2.6663E-04	2.5767E-04
$t=4.8E-06$	2.2219E-03	5.5634E-04	3.6373E-04	3.3737E-04
$t=1.E-05$	4.1430E-03	1.0369E-03	4.1895E-04	3.7259E-04

Tabla 3.7.1: Evolución de los errores relativos para el desplazamiento.

hace más pequeño, aunque cuando  $\Delta t$  es del orden de  $10^{-9}$  el error disminuye más lentamente, por lo que se concluye que utilizar un paso de tiempo de ese orden ya no supone una mejora lo suficientemente significativa como para que el incremento en el coste computacional (derivado del mayor número de iteraciones) compense.

### 3.7.2. Simulación de las ondas de Rayleigh

Para probar la precisión del algoritmo en tiempo y conocer la propiedades cualitativas de estructuras no dañadas cuando están sometidas a una vibración

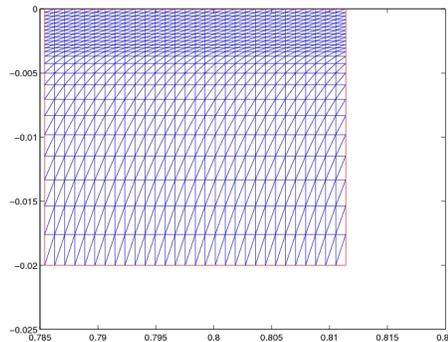


Figura 3.7.2: Malla para simular ondas de Rayleigh.

por ondas de Rayleigh, simulamos el comportamiento de una placa sin defectos. Consideraremos dos escenarios: en primer lugar, se supone que la placa está sometida a excitación por ondas de Rayleigh en todo el dominio; en este caso podremos evaluar los errores con la expresión analítica de las ondas de Rayleigh. En el segundo caso se supone una placa inicialmente en reposo y se simula la propagación de uno o varios ciclos; estas simulaciones permitirán conocer la respuesta a estas ondas en placas no dañadas.

Consideramos una placa cuya sección vertical se representa por el dominio acotado  $(l_0, l_1) \times (-l_2, 0)$  con  $l_0 = \pi/4$  m,  $l_1 = \pi/4 + 0.01$  m y  $l_2 = 0.011$  m. Las condiciones iniciales y de contorno dependerán del caso considerado.

### 3.7.2.1. Excitación sobre el dominio completo

En este caso, se supone que la frontera Dirichlet,  $\tilde{\Gamma}_D = \Gamma_{Ds} \cup \Gamma_{Ds}^* \cup \Gamma_{Ds}^{**}$  con  $\Gamma_{Ds}^{**} = \Gamma_{Ns}^*$ , está sujeta a la vibración de una onda de Rayleigh  $\mathbf{u}^R$ , con  $k = (2\pi/3)\text{E} + 03\text{m}^{-1}$  y  $\omega = 6269791.88$  rad/s; la frontera  $\tilde{\Gamma}_{Ns} = \Gamma_{Ns}$  está libre de fuerzas. Asimismo, las condiciones iniciales consideradas se corresponden con el valor de la onda de Rayleigh,  $\mathbf{u}^R$ , en el instante  $t = 0$ , esto es,  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0^R$ ,  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1^R$  con  $\mathbf{u}_0^R$  y  $\mathbf{u}_1^R$  definidos por (3.2.64) y (3.2.65) respectivamente.

Para estos datos, consideramos dos mallas de elementos triangulares: una de ellas compuesta por 1189 nodos y 2240 elementos, mientras que la otra tiene 3321 nodos y 6400 elementos. Puesto que las ondas de Rayleigh son superficiales, ambas mallas son más finas en la parte superior de la placa que en la inferior, como se muestra en la Figura 3.7.2. El paso de tiempo considerado fue  $\Delta t = 5.\text{E} - 09$  s. La evolución en tiempo de los errores relativos para el desplazamiento obtenido se muestra en la Tabla 3.7.2.

	t=5.E-09	t=5.E-07	t=3.E-06	t=6.E-06
1189 nodos	1.6154E-04	2.1142E-02	3.5664E-02	7.6964E-02
3321 nodos	2.6291E-05	2.1739E-03	7.6225E-03	7.8724E-03

Tabla 3.7.2: Evolución de los errores relativos para el desplazamiento.

En la Figura 3.7.3 se muestra la trayectoria de un nodo cercano a la superficie superior de la placa, de coordenadas  $(0.79018, -0.0011)$ . La línea azul se corresponde con la solución exacta que, como se puede ver, traza una elipse, y la línea roja se corresponde con la solución calculada numéricamente para ese nodo, que presenta una buena aproximación de la curva exacta. En el siguiente capítulo veremos que, en el caso de una placa con grieta, la forma elíptica de la solución calculada se pierde.

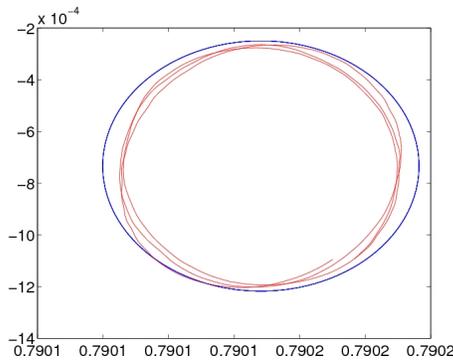


Figura 3.7.3: Trayectoria de un nodo cerca de la superficie.

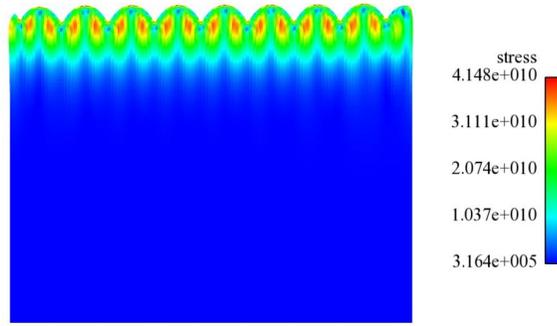


Figura 3.7.4: Excitación sobre el dominio completo.

**Observación 3.7.1** Si consideramos  $l_0 = 0$ , el dominio  $\Omega_s$  es de la forma  $\Omega_s = (0, 0.01) \times (-0.011, 0)$ , y la condición de contorno Dirichlet sobre la parte de  $\tilde{\Gamma}_D$  correspondiente a  $[X_1 = 0]$  toma la forma (3.6.5)–(3.6.6). Como ya se anunció en la Observación 3.6.1, la simulación muestra una pérdida de información, que da lugar a una dispersión de la onda. En la Tabla 3.7.3, se muestran los errores relativos obtenidos para el desplazamiento considerando  $l_0 = 0$  y  $l_0 = \frac{\pi}{4k}$  para la malla de 1189 nodos. Este efecto se aprecia visualmente en las imágenes de la Figura 3.7.7, que representan el desplazamiento asociado a la propagación de una onda de Rayleigh sobre una placa inicialmente en reposo para el caso  $l_0 = 0$  y  $l_0 = \frac{\pi}{4k}$ . En consecuencia, proponemos una traslación del dominio en la variable  $X_1$ .

	t=5.E-09	t=5.E-07	t=3.E-06	t=6.E-06
$l_0 = \frac{\pi}{4k}$	1.6154E-04	2.1142E-02	3.5664E-02	7.6964E-02
$l_0 = 0$	1.4075E-04	2.0900E-02	1.0166E-01	9.6116E-02

Tabla 3.7.3: Errores relativos para el desplazamiento tomando  $l_0 = 0$  y  $l_0 = \frac{\pi}{4k}$ .

### 3.7.2.2. Ondas de Rayleigh sobre una placa en reposo.

En este caso, simulamos la propagación de una onda de Rayleigh aplicada mediante un piezoeléctrico que actúa sobre  $\Gamma_{Ds}$  en una placa en reposo. El intervalo de tiempo y la longitud de la placa se eligen de forma que la onda no alcance la frontera  $\Gamma_{Ns}^*$ , tomando en esta zona una condición homogénea sobre el vector de esfuerzos.

Para simular solamente un ciclo de la onda, la condición Dirichlet  $\mathbf{u}^{DR}$  para el problema (DP<sup>RS</sup>) se impone solamente durante el subintervalo  $[0, t_1]$  de  $[0, T]$  con  $t_1 = 2\pi/\omega$ . A continuación, durante el intervalo  $(t_1, T]$  la frontera  $\Gamma_{Ds}$  se supone libre. Entonces, la solución se calcula como

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \begin{cases} \mathbf{u}^P(\mathbf{X}, t) + \mathbf{u}^T(\mathbf{X}, t), & 0 < t \leq t_1, \\ \mathbf{u}^T(\mathbf{X}, t), & t_1 < t \leq T. \end{cases}$$

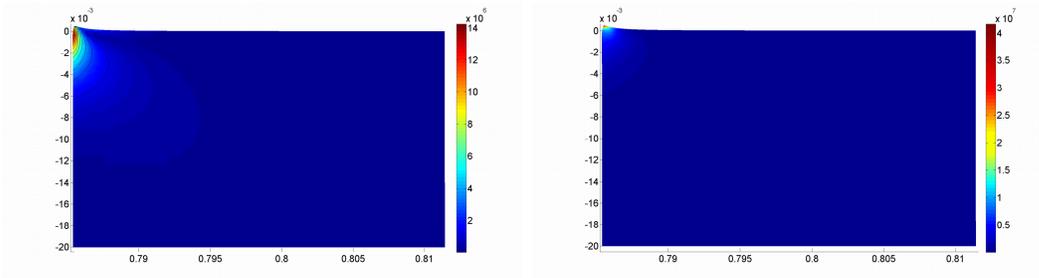


Figura 3.7.5: Norma de Von Mises sobre la malla deformada correspondiente a las soluciones pseudoestáticas  $\mathbf{u}^{P1}$  y  $\mathbf{u}^{P2}$ .

Debido a la descomposición de la solución en una pseudoestática y una dinámica, las condiciones iniciales para el Problema (DP<sup>RD</sup>) tienen que tener en cuenta la solución pseudoestática  $\mathbf{u}^P$ . Así, las condiciones iniciales (3.6.7)–

(3.6.8) son las correspondientes al impulso generado por la solución pseudoestática, representada gráficamente en la Figura 3.7.5 esto es,

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{X}) = \mathbf{u}^{P1}(\mathbf{X}) \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_1(\mathbf{X}) = \omega \mathbf{u}^{P2}(\mathbf{X}) \quad \text{en} \quad \Omega_s. \quad (3.7.5)$$

En consecuencia, las condiciones iniciales para el problema dinámico son

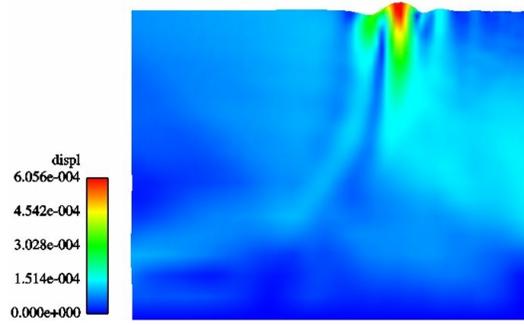


Figura 3.7.6: Propagación de un ciclo de onda de Rayleigh.

$$\mathbf{u}^T(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \dot{\mathbf{u}}^T(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Omega_s.$$

Sin embargo, como a partir del instante  $t = t_1$  la pseudoestática  $\mathbf{u}^P$  ya no se tiene en cuenta para el cálculo de la solución  $\mathbf{u}$ , a la hora de calcular  $\mathbf{u}^T(\mathbf{X}, t_1 + \Delta t)$  es necesario utilizar  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t_1) = \mathbf{u}^P(\mathbf{X}, t_1) + \mathbf{u}^T(\mathbf{X}, t_1)$  como nueva “condición inicial” en el instante  $t = t_1$ , esto es,

$$\mathbf{u}^T(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t_1) \quad \text{y} \quad \dot{\mathbf{u}}^T(\mathbf{X}, t) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t_1) \quad t \downarrow t_1.$$

Es evidente que para simular un tren de ondas simplemente hay que considerar  $t_1 = T$ .

En la Figura 3.7.6 se muestra la propagación de un único ciclo de onda de Rayleigh mientras que en la Figura 3.7.7 se muestra la propagación de un tren de ondas considerando, en el primer caso, que la frontera  $\Gamma_{D_s}$  se sitúa en  $l_0 = \frac{\pi}{4k}$ , y en el segundo caso,  $l_0 = 0$ . Como se aprecia en las imágenes de la figura, en el caso  $l_0 = 0$ , se produce una dispersión en el frente de onda, obteniéndose una onda menos definida y unos desplazamientos mayores que en el caso  $l_0 = \frac{\pi}{4k}$ .

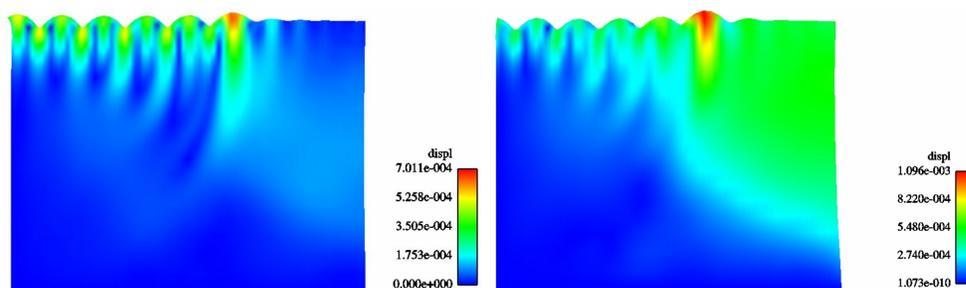


Figura 3.7.7: Propagación de un tren de ondas con  $l_0 = \frac{\pi}{4k}$  (izquierda) y  $l_0 = 0$  (derecha).

Este fenómeno es debido a la pérdida de información en las condiciones de contorno al considerarlas en un punto crítico.

### 3.8. Comparación con datos experimentales. Determinación numérica del módulo de Young

En esta sección presentaremos los resultados obtenidos mediante la comparación de la simulación numérica de la propagación de una onda de Rayleigh con mediciones experimentales realizadas por el grupo de Metrología Óptica del Departamento de Física Aplicada de la Universidad de Vigo. El objetivo es no sólo reproducir numéricamente los resultados medidos en laboratorio, sino también determinar los parámetros físicos de la placa cuando ésta no está dañada.

En la Subsección 3.8.1 se detalla el procedimiento de obtención de la envolvente gaussiana que reproduce la variación de amplitud que presentan las ondas experimentales. Una vez obtenida, en las Subsecciones 3.8.2 y 3.8.3 se presentan las distintas variantes de las condiciones iniciales y de contorno que se pueden utilizar para aproximar numéricamente la propagación de la onda. Las características físicas de la onda se darán en la Subsección 3.8.4 y, finalmente, se presentarán los resultados obtenidos con los datos del material proporcionados y las conclusiones extraídas del trabajo.

Por simplicidad en la exposición, consideraremos que  $l_0 = 0$ , aunque en la práctica se lleve a cabo la traslación del dominio explicada anteriormente.

### 3.8.1. Cálculo de las condiciones de contorno.

La placa objeto de estudio tiene por dimensiones:

- Largo: 0.1107 m.
- Ancho (espesor): 0.02 m.

Los datos experimentales recibidos se corresponden con una onda de Rayleigh plana multiplicada por una envolvente gaussiana. Para reproducir esta onda numéricamente, la condición de contorno en  $X_1 = 0$ , correspondiente a la expresión analítica de una onda de Rayleigh, se multiplica por un valor que modifique su amplitud en cada instante de tiempo. Se asume que dicho valor en el instante  $t$  será:

$$g(t) = e^{\frac{-(X_1 - C_R t - b)^2}{2s^2}}, \quad (3.8.1)$$

que se corresponde con el valor de una campana de Gauss, donde  $C_R$  es la velocidad de fase de Rayleigh,  $b$  es la media y  $s$  la desviación típica. Denotaremos por  $L$  la longitud de onda y  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$  el período de la onda de Rayleigh considerada. La velocidad de fase viene dada por  $C_R = L/T_0$ . Para aproximar la campana utilizaremos los máximos relativos de los datos experimentales, medidos en 135 instantes de tiempo:  $t_n = 2.E - 7 \times n$ ,  $1 \leq n \leq 135$ . A la vista de los datos experimentales, se considera como tren de ondas significativo el correspondiente a 7 ciclos, como se muestra en la Figura 3.8.1. Las vibraciones que aparecen en la imagen antes y después de los ciclos de la onda son producto del tratamiento de la imagen y el ruido en las mediciones.

La longitud de la placa es 0.1107 m y tenemos datos experimentales sobre 1024 puntos equidistantes. Así, la distancia entre dos puntos consecutivos es  $h = 1.0811E - 04$  y el punto  $i$ -ésimo representa la posición  $X_1 = ih$  en la placa. A partir de los datos en varios instantes de tiempo se concluye que los

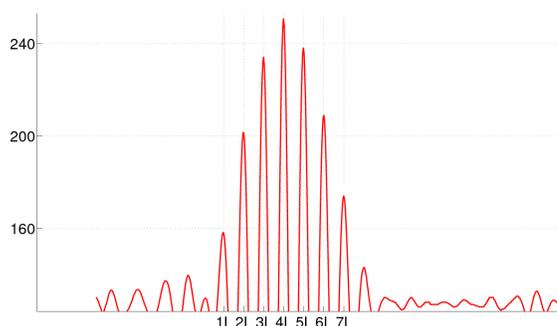


Figura 3.8.1: Detalle de los datos recibidos para el instante de tiempo  $t_{25} = 5.E - 6$ .

máximos relativos se producen cada 28 puntos, por lo que la longitud de onda es  $L = 0.0030$  m.

Dado un instante  $t_n = 2.E - 7 \times n$ , y conocida la posición del máximo absoluto correspondiente a la onda media o máxima, conocemos la posición de los restantes 6 valores. Denotaremos por  $d_n$  el vector que contiene los valores experimentales del desplazamiento en el instante  $n$  para los 1024 puntos,  $p_n(j)$  el puntero que nos da la posición en  $d_n$  de los máximos relativos y  $m_n(j)$  los correspondientes valores, donde  $1 \leq j \leq 7$ .

La muestra está formada por los valores  $jL$ ,  $j = 1 \dots 7$ , y sus pesos correspondientes  $m_n(j)$  (ver Tabla 3.8.1).

$jL$	$p_{25}(j)$	$m_{25}(j)$
$L$	187	172.6364
$2L$	215	210.0000
$3L$	243	237.1818
$4L$	271	250.3636
$5L$	299	233.0000
$6L$	327	201.0000
$7L$	355	158.4545

Tabla 3.8.1: Muestra y posición de los datos en el paso 25.

El tamaño de la muestra será  $N = \sum_{j=1}^7 m_n(j)$ , y la media

$$b_n = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^7 m_n(j)jL. \quad (3.8.2)$$

Se observa que, debido a que los valores experimentales no presentan una simetría perfecta respecto de la onda media, el valor de la media no es exactamente  $4L$ , así por ejemplo para  $n = 25$   $b_n = 3.9557L$ .

La varianza es

$$s_n^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^7 (m(j)j^2L^2) - b_n^2. \quad (3.8.3)$$

Calculadas la media y la varianza para cada instante, se calcula la media de todas ellas para la expresión definitiva:

$$b = \frac{1}{135} \sum_{n=1}^{135} b_n, \quad s^2 = \frac{1}{135} \sum_{n=1}^{135} s_n, \quad g(x, t) = e^{-K(x-C_Rt-b)^2}, \quad (3.8.4)$$

donde  $K = \frac{1}{2s^2}$ . Para los datos experimentales utilizados se ha obtenido que  $b = 3.9642L$ ,  $s^2 = 3.4665L^2$ , y  $K = 0.14425/L^2$ . La Figura 3.8.2 muestra una representación de los valores de la onda experimental en los puntos de la superficie de la placa junto con la campana resultante al considerar los valores anteriores. Como puede apreciarse la aproximación no es totalmente exacta, lo cual era de esperar pues los datos experimentales no son completamente simétricos. Por ello, a la hora de calcular los errores, tomaremos como referencia el punto donde la onda experimental alcanza el máximo en cada instante.

Por tanto, la condición de contorno en  $X_1 = 0$  para cada instante  $t$  será la de un tren de ondas de Rayleigh que se multiplicará por

$$g(t) = e^{-C_G(-t-4T_0)^2}, \quad \text{con} \quad C_G = K \frac{L^2}{T_0^2} = 1.4425E + 11. \quad (3.8.5)$$

### 3.8.2. Condiciones iniciales y de contorno

Puesto que la amplitud de la condición de contorno Dirichlet varía en cada instante de tiempo, en este caso no utilizaremos la metodología de descomposición de la solución expuesta en las secciones anteriores. Por ello, el problema

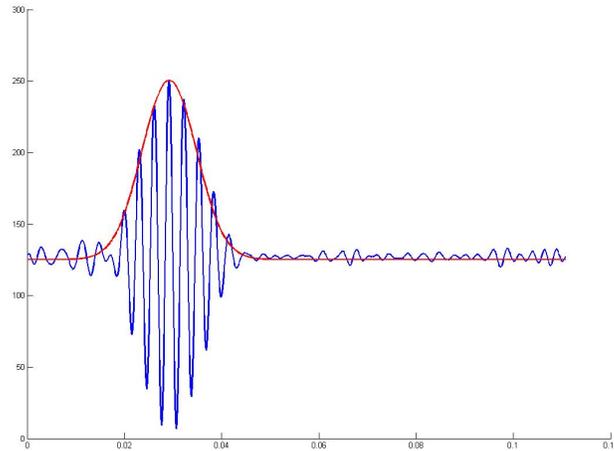


Figura 3.8.2: Representación gráfica de los datos en el instante  $n = 25$ ,  $t_{25} = 5.E - 6$  y la envolvente calculada.

dinámico que resolvemos tiene condiciones de contorno no homogéneas. En esta sección se detallan las condiciones de contorno e iniciales consideradas en la simulación numérica. Consideraremos que únicamente la frontera superior  $\Gamma_{Ns}$  es libre, mientras que los otros tres lados de la placa están sometidos a condiciones Dirichlet (véase Figura 3.8.3).

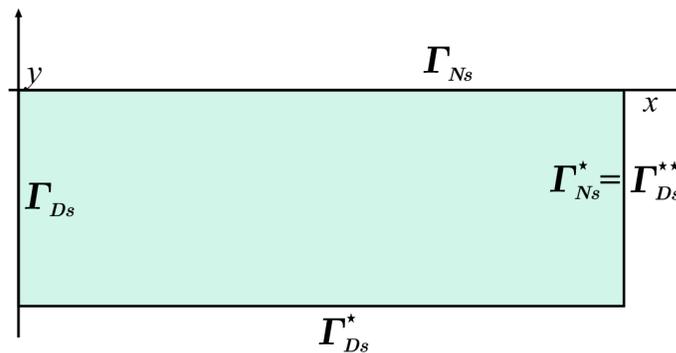


Figura 3.8.3: Dominio bidimensional y fronteras.

Conocida la expresión de la onda plana en cada instante dada por (3.2.61), la condición de contorno Dirichlet sobre  $\Gamma_{Ds}$  se modifica multiplicándola por una

envolvente gaussiana, de modo que

$$\hat{u}_1^d(X_2, t) = u_1^{DR}(X_2, t)e^{-C_G(t-5T_0)^2}, \quad \text{sobre } \Gamma_{Ds}, \quad (3.8.6)$$

$$\hat{u}_2^d(X_2, t) = u_2^{DR}(X_2, t)e^{-C_G(t-5T_0)^2}, \quad \text{sobre } \Gamma_{Ds}, \quad (3.8.7)$$

mientras que sobre  $\Gamma_{Ds}^*$  se considera una onda de amplitud constante independiente del tiempo, que en el instante inicial coincide con la amplitud de la condición de contorno en  $\Gamma_{Ds}$ , es decir

$$\tilde{u}_1^d(X_2, t) = u_1^R(l_1, X_2, t)e^{-C_G(-5T_0)^2}, \quad (3.8.8)$$

$$\tilde{u}_2^d(X_2, t) = u_2^R(l_1, X_2, t)e^{-C_G(-5T_0)^2}, \quad (3.8.9)$$

con  $l_1 = 0.1107$ . Esta elección de la condición de contorno permite considerar que, inicialmente, la placa está vibrando con una onda de amplitud muy pequeña, de modo que los efectos de la onda reflejada son insignificantes. Sobre  $\Gamma_{Ds}^*$  la condición de contorno se considera nula, pues la onda es superficial. La condición inicial se toma compatible con la condición de contorno, de modo que se han elegido como desplazamientos iniciales,

$$(u_0)_1(\mathbf{X}) = t_1(X_2) \cos(kX_1)e^{-C_G(-5T_0)^2}, \quad (3.8.10)$$

$$(u_0)_2(\mathbf{X}) = t_2(X_2) \sin(kX_1)e^{-C_G(-5T_0)^2}, \quad (3.8.11)$$

y como velocidades

$$(u_1)_1(\mathbf{X}) = \omega t_1(X_2) \sin(kX_1)e^{-C_G(-5T_0)^2} + 2(C_G(5T_0))(u_0)_1(\mathbf{X}), \quad (3.8.12)$$

$$(u_1)_2(\mathbf{X}) = -\omega t_2(X_2) \cos(kX_1)e^{-C_G(-5T_0)^2} + 2(C_G(5T_0))(u_0)_2(\mathbf{X}). \quad (3.8.13)$$

Aunque hemos considerado que la media se sitúa en  $4L$ , y por tanto llegaría al  $X_1 = 0$  en el instante  $4T_0$ , en la práctica retrasamos la campana un periodo  $T_0$  a mayores para considerar una condición inicial de menor amplitud.

### 3.8.3. Otras variantes de las condiciones de contorno.

En las secciones anteriores, se detalló el procedimiento para la obtención de la envolvente gaussiana que, multiplicada por la expresión de la onda de Rayleigh, aproxima los resultados experimentales y las condiciones de contorno e iniciales

resultantes de la multiplicación. Dicha envolvente queda caracterizada por su media y su desviación típica. Para dar la condición de contorno sobre  $\Gamma_{Ds}$  utilizamos el valor de dicha envolvente para cada  $t$ , esto es,

$$\mathbf{u}(0, X_2, t) = \hat{\mathbf{u}}^d(X_2, t) \quad \text{sobre } \Gamma_{Ds}, \quad (3.8.14)$$

donde  $\hat{\mathbf{u}}^d$  es la función definida en (3.8.6)–(3.8.9).

La expresión espacial de la envolvente en un instante de tiempo  $t_0$  será:

$$e^{-C_G \cdot T_0^2 / L^2 (X_1 - C_R t_0 - b)^2}. \quad (3.8.15)$$

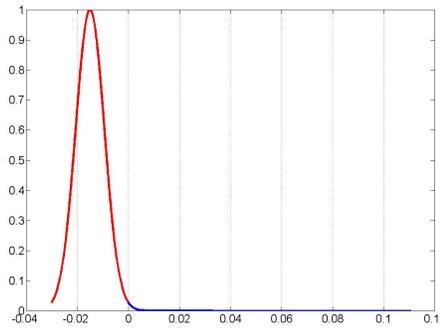


Figura 3.8.4: Representación gráfica de la envolvente en el instante  $t = 0$ .

En la práctica, en el instante inicial tomamos  $b = -5L$  en la expresión anterior, de modo que el máximo de la campana se sitúa a la izquierda del origen de coordenadas y la envolvente en el instante  $t = 0$  representada en  $X_1$  sería (ver Figura 3.8.4)

$$e^{-C_G \cdot T_0^2 / L^2 (X_1 + 0.015)^2},$$

ya que  $5L = 0.0015$  y se consideraría el tramo correspondiente a  $X_1 \geq 0$  (ver Figura 3.8.5).

Efectivamente, el valor en  $X_1 = 0$  de esta función es 0.0272, que se corresponde con el valor de  $e^{-C_G(-t-5T_0)^2}$  para  $t = 0$ .

Se han llevado a cabo tres ensayos numéricos distintos para reproducir los resultados experimentales:

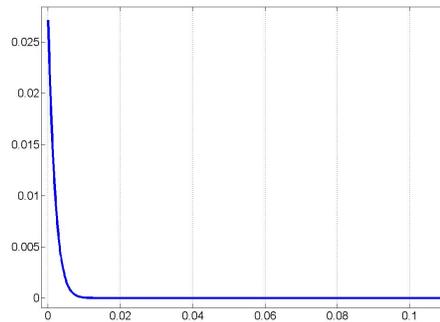


Figura 3.8.5: Detalle del tramo positivo de la envolvente en el instante  $t = 0$ .

**Ensayo 1.** En un primer ensayo, la condición inicial considerada se corresponde con la onda de Rayleigh  $\mathbf{u}^R$  multiplicada por un valor constante para todo  $X_1$  en la placa. En particular, se considera el valor de la exponencial en  $t = 0$  y en  $X_1 = 0$ . El resultado es una onda con amplitud constante sobre toda la placa en  $t = 0$ . Esta condición inicial está representada, para los puntos de la superficie, por la línea azul en la Figura 3.8.6.

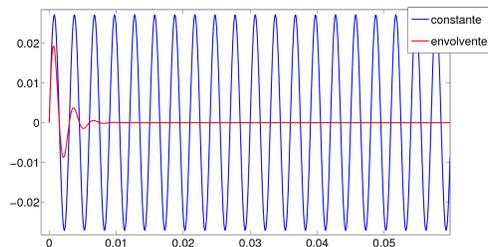


Figura 3.8.6: Representación gráfica de las condiciones iniciales correspondientes a los ensayos 1 y 2 consideradas en  $X_2 = 0$ .

**Ensayo 2.** Una segunda opción considerada es la de multiplicar el valor de la onda de Rayleigh por el valor de la envolvente gaussiana en  $t = 0$  para cada  $X_1$ . En este caso, la amplitud de la condición inicial no será independiente de  $X_1$  sino que decaerá exponencialmente a medida que  $X_1$  aumenta. Las condiciones

de contorno serán

$$\begin{aligned}\hat{u}_1^d(X_2, t) &= u_1^R(0, X_2, t)e^{-C_G(t-5T_0)^2} && \text{sobre } \Gamma_{D_s}, \\ \hat{u}_2^d(X_2, t) &= u_2^R(0, X_2, t)e^{-C_G(t-5T_0)^2} && \text{sobre } \Gamma_{D_s}, \\ \tilde{u}_1^d(X_2, t) &= u_1^R(l_1, X_2, t)e^{-C_G\frac{T_0^2}{L^2}(X_1+0.015)^2} && \text{sobre } \Gamma_{D_s}^{**}, \\ \tilde{u}_2^d(X_2, t) &= u_2^R(l_1, X_2, t)e^{-C_G\frac{T_0^2}{L^2}(X_1+0.015)^2} && \text{sobre } \Gamma_{D_s}^{**},\end{aligned}$$

y las condiciones iniciales en  $\Omega_s$

$$\begin{aligned}(u_0)_1(\mathbf{X}) &= u_1^R(\mathbf{X}, 0)e^{-C_G\frac{T_0^2}{L^2}(X_1+0.015)^2}, \\ (u_0)_2(\mathbf{X}) &= u_2^R(\mathbf{X}, 0)e^{-C_G\frac{T_0^2}{L^2}(X_1+0.015)^2}, \\ (u_1)_1(\mathbf{X}) &= \omega u_2^R(\mathbf{X}, 0)e^{-C_G\frac{T_0^2}{L^2}(X_1+0.015)^2} + 2(C_G\frac{T_0}{L}(X_1 + 0.015)^2)(u_0)_1(\mathbf{X}), \\ (u_1)_2(\mathbf{X}) &= -\omega u_1^R(\mathbf{X}, 0)e^{-C_G(-5T_0)^2} + 2(C_G\frac{T_0}{L}(X_1 + 0.015)^2)(u_0)_2(\mathbf{X}).\end{aligned}$$

Esta condición inicial, para los puntos de la superficie, está representada por la línea roja en la Figura 3.8.6.

**Ensayo 3.** Una tercera opción, que en un primer momento parece la más realista físicamente, es la de considerar una condición inicial nula, dado que antes de recibir el impulso del piezoeléctrico la placa no está vibrando. El inconveniente de esta opción es que para que el problema esté bien planteado, es necesaria la compatibilidad entre las condiciones de contorno y las condiciones iniciales. Sin embargo, el reposo se puede aproximar tomando valores prácticamente nulos, pero que mantengan la compatibilidad con la expresión de las condiciones de contorno. Para ello, sería suficiente retrasar la onda media de la envolvente 3 o más períodos a la izquierda, de forma que, por ejemplo, retrasando 3 períodos,  $b = -8L$  y la onda se multiplicaría por  $e^{-C_G\cdot T_0^2/L^2(X_1+0.024)^2}$  (ya que  $8L=0.024$ ), que toma el valor  $9.7857E - 005$  en  $X_1 = 0$  y valores aún

menores para  $X_1$  mayores. En este caso, las condiciones de contorno serán

$$\begin{aligned}\hat{u}_1^d(X_2, t) &= u_1^{DR}(X_2, t)e^{-C_G(t-8T_0)^2} \quad \text{sobre } \Gamma_{D_s}, \\ \hat{u}_2^d(X_2, t) &= u_2^{DR}(X_2, t)e^{-C_G(t-8T_0)^2} \quad \text{sobre } \Gamma_{D_s}, \\ \tilde{u}_1^d(X_2, t) &= u_1^{DR}(l_1, X_2, t)e^{-C_G\frac{T_0^2}{L^2}(X_1+0.024)^2} \quad \text{sobre } \Gamma_{D_s}^{**}, \\ \tilde{u}_2^d(X_2, t) &= u_2^{DR}(l_1, X_2, t)e^{-C_G\frac{T_0^2}{L^2}(X_1+0.024)^2} \quad \text{sobre } \Gamma_{D_s}^{**},\end{aligned}$$

y las condiciones iniciales en  $\Omega_s$  serán

$$\begin{aligned}(u_0)_1(\mathbf{X}) &= t_1(X_2) \cos(kX_1)e^{-C_G\frac{T_0^2}{L^2}(X_1+0.024)^2}, \\ (u_0)_2(\mathbf{X}) &= t_2(X_2) \text{sen}(kX_1)e^{-C_G\frac{T_0^2}{L^2}(X_1+0.024)^2}, \\ (u_1)_1(\mathbf{X}) &= \omega t_1(X_2) \text{sen}(kX_1)e^{-C_G\frac{T_0^2}{L^2}(X_1+0.024)^2} \\ &\quad + 2(C_G\frac{T_0}{L}(X_1 + 0.024)^2)(u_0)_1(\mathbf{X}), \\ (u_1)_2(\mathbf{X}) &= -\omega t_2(X_2) \cos(kX_1)e^{-C_G\frac{T_0^2}{L^2}(X_1+0.024)^2} \\ &\quad + 2(C_G\frac{T_0}{L}(X_1 + 0.024)^2)(u_0)_2(\mathbf{X}).\end{aligned}$$

Sin embargo, esta tercera opción incrementa el número de iteraciones en tiempo *de forma artificial* ya que los resultados numéricos sólo serían útiles cuando la onda media se sitúa más o menos en el instante  $5T_0$ . Teniendo en cuenta que por cada periodo hacemos 50 iteraciones en tiempo,  $\Delta t = 2.E - 8$ , significa que haríamos 150 iteraciones más *no útiles*, en total unas 650. Por esto, esta tercera opción no se ha considerado en las simulaciones.

Los resultados obtenidos con los dos primeros ensayos no presentaron diferencias significativas.

### 3.8.4. Datos de la onda.

Sean  $k$  el número de onda, y  $c_l$ ,  $c_t$  las velocidades de propagación longitudinal y transversal definidas en Teorema 1.9.3. El número de onda  $k$ , la frecuencia angular  $\omega$  y la longitud de onda  $L$  se relacionan como sigue:

$$k = \frac{2\pi}{L} \quad \omega = c_t k \xi, \quad (3.8.16)$$

siendo  $\xi$  la única solución en el intervalo  $(0, 1)$  de la ecuación (3.2.57). Así, conocida  $\omega$  quedan determinadas  $k$  y  $L$  o bien, conocida  $L$  quedan determinadas  $k$  y  $\omega$ .

### 3.8.5. Datos del problema y resultados

Para la simulación numérica por elementos finitos se utiliza una malla de triángulos estructurada que consta de 99425 nodos, 196608 elementos y 1025 puntos en la superficie de la placa.

La discretización en tiempo utiliza un método implícito de la familia de los métodos de Newmark. El tiempo total de interés es  $T = 2.0E - 5$ , el paso de tiempo  $\Delta t = 2.E - 8$  y los parámetros del método de Newmark son  $\beta = 0.25$  y  $\gamma = 0.5$ . Inicialmente, los datos proporcionados por el grupo de Metrología

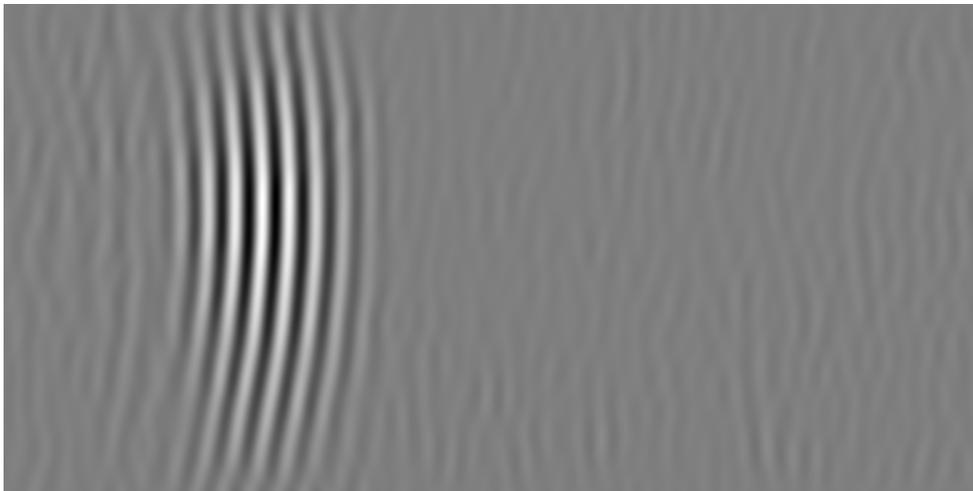


Figura 3.8.7: Imagen de la onda experimental en el instante  $n = 25$ ,  $t_{25} = 5.E - 6$ .

Óptica fueron:

- Densidad  $\rho_0 = 2790 \text{ kg/m}^3$ .
- Módulo de Young  $E = 7.263E + 10 \text{ Pa}$ .

- Coeficiente de Poisson  $\nu = 0.34$ . Y por tanto  $\xi = 0.9335$ .
- Frecuencia central  $f = 1$  MHz. Y por tanto la frecuencia angular será  $\omega = 6283185.31$  rad/seg.

Con estos datos, las velocidades y la longitud de onda son:

$$c_t = 3.2136E + 03 \text{ m/s}, \quad c_l = 6.5269E + 03 \text{ m/s} \quad L = 0.002909 \text{ m}.$$

El incremento de tiempo entre dos imágenes consecutivas es de 200 nanosegundos, el campo de visión  $0.05535 \times 0.1107 \text{ m}^2$  y el tamaño de imagen  $512 \times 1024$  pixeles. Así, para cada instante de tiempo disponemos de una matriz de 512 filas y 1024 columnas con el desplazamiento en cada píxel de la imagen. En las Figuras (3.8.7) y (3.8.8) se muestran dos de las imágenes captadas por el grupo de Vigo, a partir de las cuales se extraen los datos para la comparación.

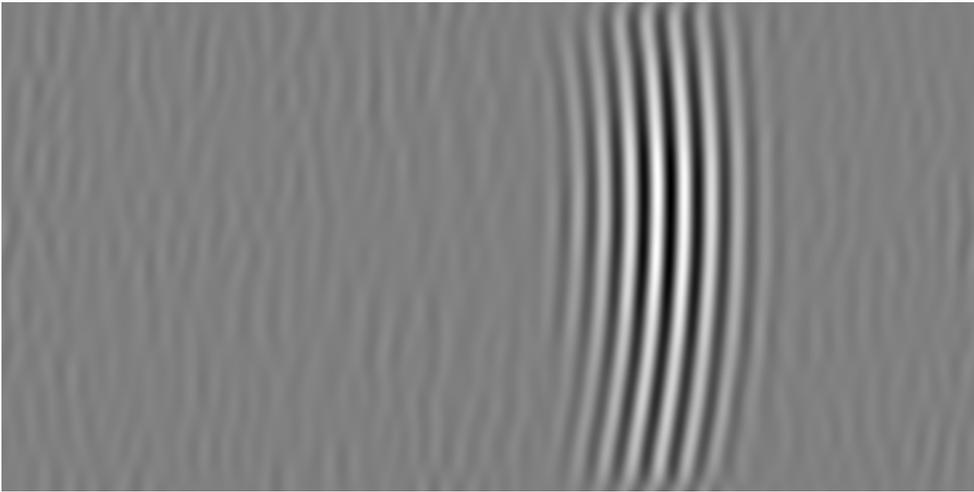


Figura 3.8.8: Imagen de la onda experimental en el instante  $n = 100$ ,  $t_{100} = 2.E - 5$ .

Puesto que las imágenes que se obtienen son de la superficie de la placa y la simulación numérica se realiza de una sección vertical, la comparación ha de realizarse sobre una línea de puntos. Para ello se realiza un promedio de los valores de las 11 filas centrales para cada instante de tiempo. Este promedio se comparará con los valores obtenidos para los puntos de la superficie de la sección vertical sobre la que se realiza la simulación numérica.

Ahora bien, con estos datos se comprobó que la onda experimental viajaba más rápido que la teórica y la numérica y con el paso de las iteraciones se producía un desfase significativo. Se concluyó que esto podría producirse por dos causas:

1. la más sencilla sería que el incremento de tiempo entre dos imágenes consecutivas fuese mayor de 200 ns. Eso haría que los instantes de tiempo en que se realiza la comparación no coincidiesen. Sin embargo la precisión del equipo de fotografía utilizado para tomar las imágenes hacía improbable esta vía.
2. La segunda posibilidad sería que las velocidades reales de la onda experimental fuesen menores a las calculadas a partir de los datos.

Estudiando esta segunda vía, se comprobó cada cuántos puntos se producía un máximo en la onda experimental, y conocida la distancia entre puntos, se concluyó que la longitud de onda parecía ser  $L = 0.003$  m. Se calculó el módulo de Young que con esta longitud de onda y una frecuencia de 1 MHz cumpliera las relaciones (3.8.16), siendo éste  $E = 7.722E + 10$  Pa, a partir del cual se obtienen las velocidades:

$$c_t = 3.2159E + 03 \text{ m/s}, \quad c_l = 6.5316E + 03 \text{ m/s}.$$

Al utilizar estos datos en la simulación numérica, se observó que las ondas experimental y numérica viajan todas a la misma velocidad. Consultado el grupo de Metrología Óptica por las discrepancias con los datos revisan su experimento y encuentran que, en efecto, el Módulo de Young del material utilizado es  $E = 7.6835E + 10$  Pa medido con un margen de error del 5 % lo cual valida el valor obtenido numéricamente, y la metodología utilizada para su cálculo.

Una vez que tenemos los datos que proporcionan una aproximación visualmente aceptable, se calculan los errores relativos entre los valores experimentales y los numéricos. En particular, en la Figura 3.8.9 se muestra una gráfica de los errores relativos para cada instante de tiempo en el punto donde los valores experimentales alcanzan el máximo. La elección de este punto no es aleatoria, sino que está motivada por la precisión que proporciona el ajuste de la campana de

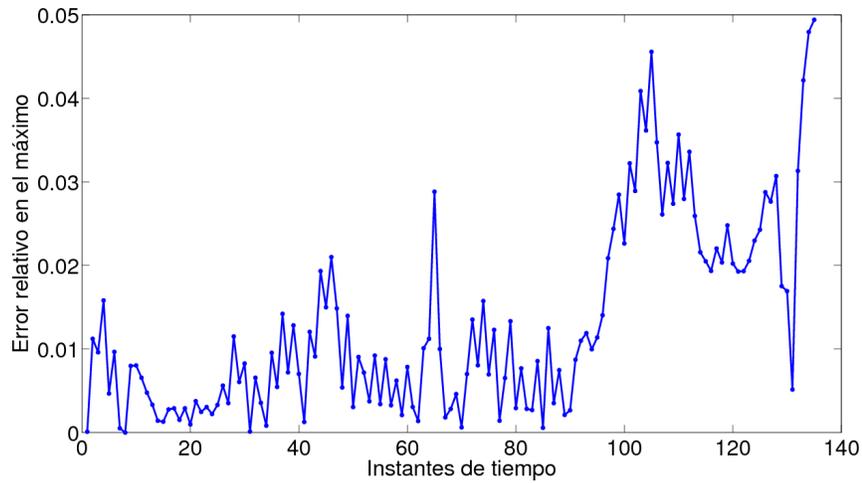


Figura 3.8.9: Error relativo calculado en cada instante de tiempo en el punto máximo de la onda experimental.

Gauss en dicho punto. Como se comentó anteriormente, los datos experimentales no son completamente simétricos mientras que los resultados numéricos heredan la simetría de la campana de Gauss por lo que lo más razonable es realizar la comparación en el punto donde los resultados experimentales alcanzan el máximo y comprobar que se realiza una buena aproximación en ese punto. En efecto, como puede verse en la Figura 3.8.9, el error relativo es a lo sumo  $5.E - 2$ , siendo en el 90 % de los casos menor que  $3.E - 2$ , por lo que se dan por buenos los resultados de la simulación numérica y el valor obtenido para el módulo de Young. En las Figuras 3.8.10 y 3.8.11, se representan los desplazamientos obtenidos en los resultados experimentales (línea azul), los calculados numéricamente para los puntos de la superficie de la placa (línea roja), y los valores teóricos de una onda de Rayleigh en los mismos puntos (línea verde).

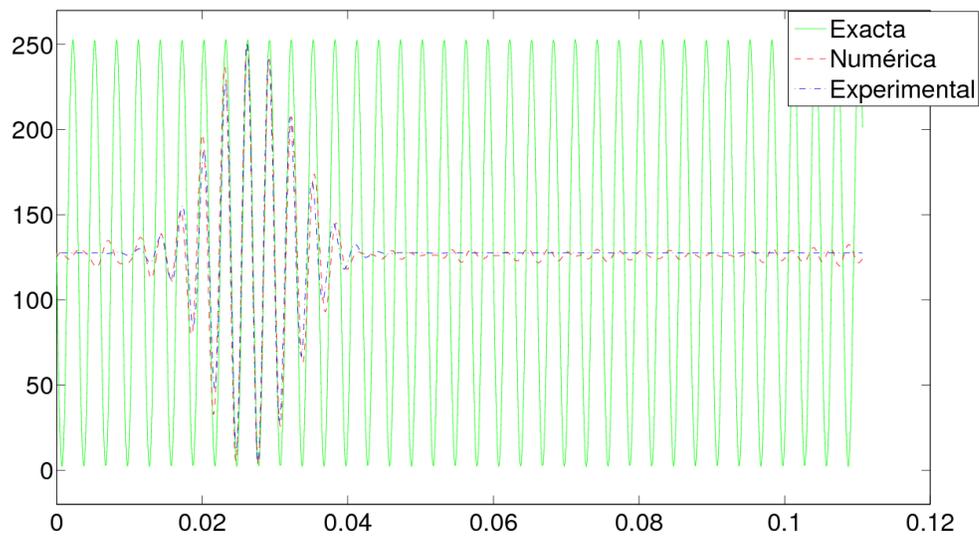


Figura 3.8.10: Comparación en el instante 20 de 135.

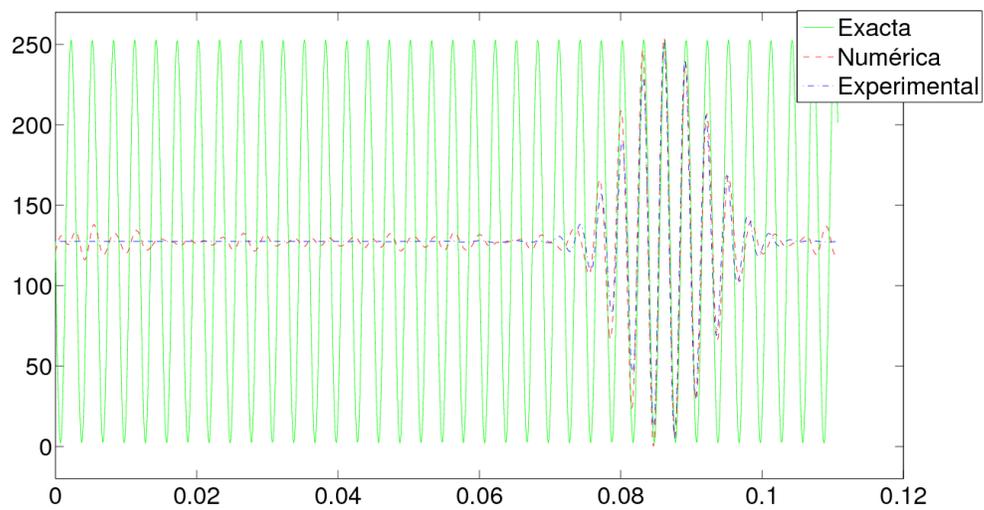


Figura 3.8.11: Comparación en el instante 120 de 135.



## Capítulo 4

# Vibración de un cuerpo elástico con fisura. Simulación con el método de elementos finitos.

En este capítulo presentamos el modelo asociado a la vibración de una placa con fisura y con condición de contacto tipo Signorini en los labios de la fisura. Consideraremos que los datos permiten tratar el correspondiente problema de vibración de la placa sin fisura como de deformaciones planas, por lo que el modelo será bidimensional. En el capítulo anterior hemos calculado la excitación externa que es necesario ejercer sobre la placa sin fisurar para provocar una onda de Rayleigh. En este capítulo calcularemos para esa excitación externa la solución sobre la placa fisurada; la perturbación que aparece de la onda de Rayleigh permitirá detectar la existencia de grietas y en posteriores estudios, al estudiar el problema inverso, identificar la posición de la grieta. Este tipo de tests no destructivos están cada día más en auge en ingeniería.

En la primera sección del capítulo planteamos el modelo que rige el comportamiento de la placa; principalmente nos ocupamos del tratamiento de las condiciones que se imponen en la frontera de contacto, puesto que la ecuación de equilibrio y la ley de comportamiento son las ya consideradas en el capítulo anterior; en la segunda sección se obtiene la formulación variacional del problema asociado para, finalmente, en la última sección, tratar su resolución

numérica, discretización en espacio y tiempo, tratamiento de las condiciones de contacto y descripción del algoritmo. La discretización en espacio se realizará mediante el método de elementos finitos clásico, para lo cual se considerarán mallas del dominio adaptadas a la geometría de la grieta, de modo que los segmentos de la grieta sean aristas de los elementos de la malla. Esta restricción se eliminará posteriormente en el Capítulo 6, donde la discretización en espacio se realizará utilizando el método de elementos finitos extendidos (XFEM), que permite mallar el dominio de forma independiente a la grieta al añadir al espacio de aproximación unas nuevas funciones de forma discontinuas, de modo que los desplazamientos sean discontinuos en algunos elementos.

## 4.1. Problema continuo

Consideramos el dominio bidimensional  $\Omega_s = (l_0, l_1) \times (-l_2, 0)$ , correspondiente a una sección del dominio tridimensional  $\Omega$  fisurado, es decir, introducimos una grieta superficial generada por una curva contenida en el plano  $OX_1X_2$  e independiente de  $X_3$  en la placa  $\Omega$ . La frontera de  $\Omega_s$ , consta de cinco partes, todas ellas correspondientes a abiertos unidimensionales:  $\Gamma_{D_s}$ , donde se aplica un material piezoeléctrico que produce una onda de Rayleigh,  $\Gamma_{D_s}^*$ , frontera en la que los desplazamientos se suponen nulos por encontrarse ésta lejos del área de influencia de la onda,  $\Gamma_{N_s}$  y  $\Gamma_{N_s}^*$  donde el cuerpo está libre, y finalmente  $\Gamma_{C_s}$  que se corresponde con los labios de la fisura, donde se impone una condición de contacto. Estas cinco partes son, además, disjuntas dos a dos y tales que  $\partial\Omega_s = \bar{\Gamma}_{D_s} \cup \bar{\Gamma}_{D_s}^* \cup \bar{\Gamma}_{N_s} \cup \bar{\Gamma}_{N_s}^* \cup \bar{\Gamma}_{C_s}$ . Suponemos que  $\Gamma_{C_s}$  es una unión de dos curvas regulares y que en el instante inicial los labios de la fisura están pegados, si bien esta última restricción no es esencial. Además,  $\Gamma_{D_s} \cup \Gamma_{D_s}^*$  debe ser de medida estrictamente positiva y tal que  $(\overline{\Gamma_{D_s} \cup \Gamma_{D_s}^*}) \cap \bar{\Gamma}_{C_s} = \emptyset$ . En lo que sigue, para simplificar la notación, omitiremos el subíndice  $s$  siempre que no dé lugar a confusión. El comportamiento del cuerpo está modelado entonces, por las ecuaciones del problema de deformaciones planas (**DP<sup>R</sup>**), con  $\mathbf{u}^{DR}$  definido por (3.2.66) y  $\mathbf{f}^* = \mathbf{0}$ , junto con las condiciones de contacto sobre  $\Gamma_C$  que pasamos a describir a continuación.

### 4.1.1. Condiciones de contacto

En la Sección 1.7.1 se introdujeron las condiciones de contacto de Signorini para el problema de contacto con sólido rígido. En esta sección veremos cómo se expresan dichas condiciones en el caso del contacto entre los labios de una grieta. Consideramos una fisura superficial en la frontera  $[X_2 = 0]$  y ubicada en un punto  $X_1 = X_1^g$ . Denotemos por  $\Gamma_C^l$  el labio izquierdo de la fisura y  $\Gamma_C^r$  el labio derecho con respecto al sentido de recorrido de la grieta desde la superficie hacia su vértice (véase la Figura 4.1.1); por tanto, se tiene que  $\Gamma_C = \Gamma_C^l \cup \Gamma_C^r$ . Denotamos además por  $\mathbf{u}^l$  (resp.  $\mathbf{u}^r$ ) el campo vectorial asociado a la restricción de los desplazamientos a la izquierda de la fisura (resp. derecha de la fisura), que en adelante, para abreviar, denotaremos por  $\mathbf{u}^{l(r)}$ . Aplicaremos el mismo criterio a  $\boldsymbol{\sigma}^{l(r)}$ , tensores de tensiones asociados a dichos desplazamientos. El vector  $\mathbf{n}^{l(r)}$  será el vector unitario, normal y exterior a  $\Omega$  en  $\Gamma_C^{l(r)}$ .

Con estas notaciones veremos cuáles son las condiciones de contacto que debemos imponer sobre los desplazamientos y las tensiones en la fisura. Supondremos que no hay fricción entre los labios de la grieta, esto es, que la componente tangencial de  $\boldsymbol{\sigma}^{l(r)}$  es nula, es decir:

$$\boldsymbol{\sigma}_T^{l(r)} = \boldsymbol{\sigma}^{l(r)} \mathbf{n}^{l(r)} - \sigma_n^{l(r)} \mathbf{n}^{l(r)} = \mathbf{0},$$

siendo

$$\sigma_n^{l(r)} = \boldsymbol{\sigma}^{l(r)} \mathbf{n}^{l(r)} \cdot \mathbf{n}^{l(r)}.$$

Entonces, tendremos que  $\boldsymbol{\sigma}^{l(r)} \mathbf{n}^{l(r)} = \sigma_n^{l(r)} \mathbf{n}^{l(r)}$  sobre  $\Gamma_C^{l(r)}$ .

Sabemos que el vector que representa los esfuerzos que el dominio a la derecha (resp. izquierda) ejerce sobre el dominio a la izquierda (resp. derecha) de la fisura viene dado por  $\boldsymbol{\sigma}^{l(r)} \mathbf{n}^{l(r)}$ . Por tanto, si no hay contacto en  $\mathbf{X} \in \Gamma_C$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^{l(r)} \mathbf{n}^{l(r)} = \mathbf{0}$  y si están en contacto, por el principio de acción-reacción, se tiene que  $\boldsymbol{\sigma}^l \mathbf{n}^l = -\boldsymbol{\sigma}^r \mathbf{n}^r$ , y como  $\mathbf{n}^l = -\mathbf{n}^r$ , se tiene que

$$\sigma_n^l = \sigma_n^r,$$

igualdad que también se cumple en el caso de que no estén en contacto, siendo ambos nulos; entonces

$$\sigma_n^l = \sigma_n^r \quad \text{sobre } \Gamma_C. \quad (4.1.1)$$

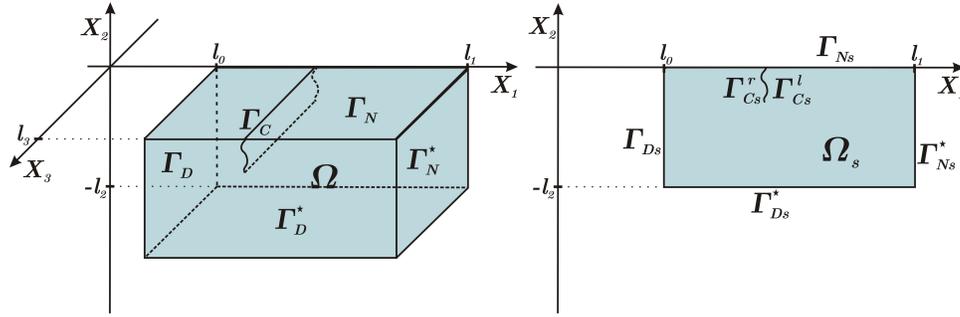


Figura 4.1.1: Dominio 3D con fisura y sección 2D.

A partir de ahora denotaremos por  $\sigma_n$  la componente normal de la tensión, independientemente del lado de la fisura a que nos refiramos y por  $[\sigma_n]$  el salto de la componente normal de  $\boldsymbol{\sigma}$ , esto es,  $[\sigma_n] = \sigma_n^l - \sigma_n^r$ . Además, cuando los labios de la fisura están en contacto, las fuerzas ejercidas son de presión hacia el interior del cuerpo, por tanto:

$$\sigma_n \leq 0 \quad \text{sobre } \Gamma_C. \quad (4.1.2)$$

Teniendo en cuenta que el escalar  $\mathbf{u}^{l(r)} \cdot \mathbf{n}^{l(r)}$  representa el desplazamiento en la dirección  $\mathbf{n}^{l(r)}$ , la condición de no-penetración se expresa como:

$$[u_n] \leq 0 \quad \text{sobre } \Gamma_C, \quad (4.1.3)$$

siendo  $[u_n]$  el salto en la fisura de la componente normal de  $\mathbf{u}$ , esto es,  $[u_n] = \mathbf{u}^l \cdot \mathbf{n}^l + \mathbf{u}^r \cdot \mathbf{n}^r$ . Puesto que si hay contacto,  $[u_n] = 0$  y si no lo hay,  $\sigma_n = 0$ , el producto de ambos factores debe ser nulo sobre la grieta, verificándose:

$$\sigma_n [u_n] = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_C. \quad (4.1.4)$$

Las ecuaciones (4.1.1)–(4.1.4) constituyen las condiciones de contacto de Signorini sobre la grieta. Estas ecuaciones, junto con la ecuación de equilibrio, la ley constitutiva, las condiciones de contorno y las condiciones iniciales, definen el problema modelo a resolver.

**PROBLEMA (DP<sup>RG</sup>):** Hallar en cada punto  $\mathbf{X} = (X_1, X_2) \in \Omega$  y en cada instante  $t \in [0, T]$  el campo de desplazamientos  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$  y el tensor  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t)$ ,

verificando:

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{u}} - \text{Div } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega, \quad (4.1.5)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_N, \quad (4.1.6)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{DR} \quad \text{sobre } \Gamma_D, \quad (4.1.7)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_D^*, \quad (4.1.8)$$

$$[\sigma_n] = 0; \quad \sigma_n \leq 0 \quad \text{sobre } \Gamma_C, \quad (4.1.9)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_T = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_C, \quad (4.1.10)$$

$$[u_n] \leq 0 \quad \text{sobre } \Gamma_C, \quad (4.1.11)$$

$$\sigma_n [u_n] = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_C, \quad (4.1.12)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}) \quad \text{en } \Omega, \quad (4.1.13)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_1(\mathbf{X}) \quad \text{en } \Omega, \quad (4.1.14)$$

siendo  $\mathbf{u}^{DR}$  la condición Dirichlet asociada a una onda de Rayleigh (3.2.66), y siendo  $\mathbf{u}_0$  y  $\mathbf{u}_1$  el desplazamiento y la velocidad inicial, respectivamente, derivadas del impulso inicial generado por la aplicación del piezoeléctrico (3.7.5). Para completar el sistema, se considera la ley de comportamiento de Hooke definida en (3.1.6).

El Problema (**DP<sup>R</sup>G**) es un problema dinámico no lineal debido a las condiciones de contacto sobre la grieta. Para su resolución numérica, seguiremos una metodología análoga a la presentada en los Capítulos 2 y 3.

#### 4.1.2. Descomposición del problema

Al igual que se ha mostrado en la Sección 3.6, resolveremos el problema dinámico descomponiéndolo en uno pseudoestático con condiciones Dirichlet no homogéneas y fuerzas de volumen nulas, y uno dinámico con condiciones de contorno homogéneas y fuerzas de volumen no nulas.

Consideramos entonces la descomposición  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^P + \mathbf{u}^T$  definida en (3.6.1), donde  $\mathbf{u}$  es solución del Problema (**DP<sup>R</sup>G**) y veremos a continuación cómo influye la condición de contacto en ella. Puesto que en el instante inicial

los labios de la fisura están en contacto, vamos a considerar que la solución pseudoestática  $\mathbf{u}^P$  verifica las condiciones de transmisión habituales sobre las componentes normales del desplazamiento y de los esfuerzos y que no tiene esfuerzos cortantes en la fisura. En consecuencia, aplicaremos en el problema dinámico las condiciones de contacto apropiadas para que la solución  $\mathbf{u}$  verifique las condiciones de Signorini. Explicitamos a continuación estas relaciones. Descomponemos el dominio  $\Omega$  en dos, construidos de forma que sean Lipschitzianos, prolongando la grieta con una recta en la dirección del vector tangente en el vértice (ver Figura 4.1.2) y denotamos por  $\Omega^l$  el dominio a la izquierda de la fisura y  $\Omega^r$  el dominio a la derecha. Esta descomposición da lugar a una frontera ficticia  $\Gamma_H$  común a  $\Omega^l$  y  $\Omega^r$  e interior a  $\Omega$  donde se considerarán condiciones de transmisión. Denotamos por  $\Gamma^l$  y  $\Gamma^r$  la frontera de  $\Omega^l$  y  $\Omega^r$  respectivamente. Se tienen las siguientes propiedades:

- $\Omega = \Omega^l \cup \overset{\circ}{\Gamma}_H \cup \Omega^r$ .
- $\Gamma^l \cap \Gamma^r = \bar{\Gamma}_H$ .

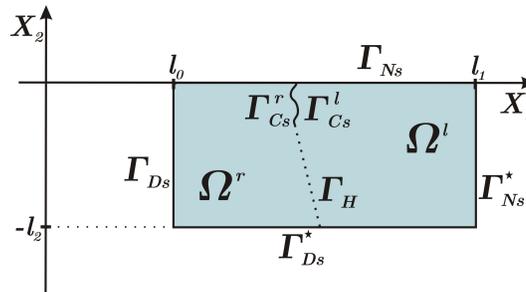


Figura 4.1.2: División del dominio bidimensional

Denotaremos por  $\mathbf{u}^{Pl(r)}$  y  $\mathbf{u}^{Tl(r)}$  las restricciones de  $\mathbf{u}^P$  y  $\mathbf{u}^T$  a los dominios  $\Omega^{l(r)}$  respectivamente, y por  $\boldsymbol{\sigma}^{Pl(r)}$  y  $\boldsymbol{\sigma}^{Tl(r)}$  los tensores de tensiones asociados. La solución pseudoestática  $\mathbf{u}^P$  sobre  $\Gamma_C$  se considera libre de fricción y con contacto perfecto, esto es,

$$- [u_n^P] = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_C.$$

- La condición de transmisión sobre los esfuerzos normales se escribe como  $[\sigma_n^P] = 0$  sobre  $\Gamma_C$ .
- Como en la fisura se supone que la solución pseudoestática no presenta esfuerzos transversales,  $\boldsymbol{\sigma}_T^P = \mathbf{0}$  sobre  $\Gamma_C$ .

Una vez fijadas las condiciones sobre  $\mathbf{u}^P$ , se derivan las correspondientes condiciones sobre la grieta que debe verificar la parte dinámica  $\mathbf{u}^T$ :

- Para que  $\boldsymbol{\sigma}$  verifique (4.1.9) se tiene que cumplir que  $[\sigma_n] = 0$  y  $\sigma_n \leq 0$ . Puesto que  $\sigma_n = \sigma_n^P + \sigma_n^T$  y como  $[\sigma_n^P] = 0$ , se tiene que verificar que

$$[\sigma_n^T] = 0 \quad \text{y} \quad (\sigma_n^P + \sigma_n^T) \leq 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_C. \quad (4.1.15)$$

- Como  $\boldsymbol{\sigma}_T = \boldsymbol{\sigma}_T^P + \boldsymbol{\sigma}_T^T$ , y  $\boldsymbol{\sigma}_T^P = \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  verifica (4.1.10) si y sólo si

$$\boldsymbol{\sigma}_T^T = \mathbf{0} \quad \text{sobre} \quad \Gamma_C. \quad (4.1.16)$$

- Como el salto normal de  $\mathbf{u}^P$  es cero, i.e.,  $[u_n^P] = \mathbf{u}^{Pl} \cdot \mathbf{n}^l + \mathbf{u}^{Pr} \cdot \mathbf{n}^r = 0$ ,  $\mathbf{u}$  verificará la condición (4.1.11) si  $\mathbf{u}^T$  verifica:

$$[u_n^T] \leq 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_C, \quad (4.1.17)$$

ya que  $[u_n] = [u_n^T] + [u_n^P]$ .

- La condición (4.1.12) se puede expresar en función de  $\mathbf{u}^T$  y  $\mathbf{u}^P$  como  $([u_n^P] + [u_n^T])(\sigma_n^P + \sigma_n^T) = 0$  y, por tanto,

$$[u_n^T](\sigma_n^P + \sigma_n^T) = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_C. \quad (4.1.18)$$

En consecuencia, hemos visto que para que la solución  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$  del Problema (DP<sup>R</sup>G) verifique las condiciones de contacto, es suficiente pedir que  $\mathbf{u}^P$  y  $\mathbf{u}^T$  sean solución, respectivamente, de los dos problemas siguientes:

A) **PROBLEMA (DP<sup>RSG</sup>):** Hallar  $(\mathbf{u}^P, \boldsymbol{\sigma}^P)$  verificando

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma}^P = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega, \quad (4.1.19)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^P \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_N, \quad (4.1.20)$$

$$\mathbf{u}^P = \mathbf{u}^{DR} \quad \text{sobre } \Gamma_D, \quad (4.1.21)$$

$$\mathbf{u}^P = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_D^*, \quad (4.1.22)$$

$$[u_n^P] = 0; \quad [\sigma_n^P] = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_C, \quad (4.1.23)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_T^P = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_C, \quad (4.1.24)$$

$$\mathbf{u}^{Pl} = \mathbf{u}^{Pr}; \quad [\boldsymbol{\sigma}^P \mathbf{n}] = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_H, \quad (4.1.25)$$

donde  $[\boldsymbol{\sigma}^P \mathbf{n}] = \boldsymbol{\sigma}^{Pl} \mathbf{n}^l + \boldsymbol{\sigma}^{Pr} \mathbf{n}^r$ . Para completar el sistema se considera la ley de comportamiento (3.1.6).

Dado el carácter lineal del Problema (DP<sup>RSG</sup>), y la expresión de la condición de contorno  $\mathbf{u}^{DR}$  dada por (3.2.66), el principio de superposición permite escribir su solución como

$$\mathbf{u}^P(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}^{P1}(\mathbf{X}) \cos \omega t + \mathbf{u}^{P2}(\mathbf{X}) \sin \omega t \quad (4.1.26)$$

siendo  $\mathbf{u}^{Pi}$ ,  $i = 1, 2$  la solución de los problemas estáticos e independientes siguientes:

**PROBLEMA (DP<sup>RSG<sup>i</sup></sup>):** Hallar  $(\mathbf{u}^{Pi}, \boldsymbol{\sigma}^{Pi})$ ,  $i = 1, 2$  tales que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Div } \boldsymbol{\sigma}^{Pi} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega_s, \\ \mathbf{u}^{P1}(X_1, X_2) = (t_1(X_2) \cos(kl_0), -t_2(X_2) \sin(kl_0)) \quad \text{sobre } \Gamma_D, \\ \mathbf{u}^{P2}(X_1, X_2) = (t_1(X_2) \sin(kl_0), t_2(X_2) \cos(kl_0)) \quad \text{sobre } \Gamma_D, \\ \boldsymbol{\sigma}^{Pi} \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_N, \end{array} \right. \quad (4.1.27)$$

junto con las condiciones (4.1.22)–(4.1.25) para cada  $(\mathbf{u}^{Pi}, \boldsymbol{\sigma}^{Pi})$ , con  $i=1, 2$ .

Obsérvese que, en el instante  $t = 0$ ,  $\mathbf{u}^P$  y  $\dot{\mathbf{u}}^P$  toman los valores:

$$\mathbf{u}^P(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}^{P1}(\mathbf{X}); \quad \dot{\mathbf{u}}^P(\mathbf{X}, 0) = \omega \mathbf{u}^{P2}(\mathbf{X}),$$

hecho que permite incorporar de forma natural el impulso generado por el piezoeléctrico en el instante inicial.

B) **PROBLEMA (DP<sup>R</sup>DG)**: Dadas  $\mathbf{u}^{P_i}$  soluciones de (DP<sup>R</sup>SG<sup>i</sup>) y  $\mathbf{u}^P$  definida por (4.1.26), encontrar  $(\mathbf{u}^T, \boldsymbol{\sigma}^T)$  verificando

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{u}}^T - \text{Div } \boldsymbol{\sigma}^T = \rho_0 \omega^2 \mathbf{u}^P \quad \text{en } \Omega, \quad (4.1.28)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_N, \quad (4.1.29)$$

$$\mathbf{u}^T = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_D \cup \Gamma_D^*, \quad (4.1.30)$$

$$[\sigma_n^T] = 0; \quad \sigma_n^T \leq -\sigma_n^P \quad \text{sobre } \Gamma_C, \quad (4.1.31)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_T^T = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_C, \quad (4.1.32)$$

$$[u_n^T] \leq 0 \quad \text{sobre } \Gamma_C, \quad (4.1.33)$$

$$(\sigma_n^P + \sigma_n^T)[u_n^T] = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_C, \quad (4.1.34)$$

$$\mathbf{u}^T(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}) - \mathbf{u}^{P_1}(\mathbf{X}) \quad \text{en } \mathbf{X} \in \Omega, \quad (4.1.35)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^T(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_1(\mathbf{X}) - \omega \mathbf{u}^{P_2}(\mathbf{X}) \quad \text{en } \mathbf{X} \in \Omega, \quad (4.1.36)$$

$$[\mathbf{u}^T] = \mathbf{u}^{Tl} - \mathbf{u}^{Tr} = \mathbf{0}; \quad [\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}] = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_H, \quad (4.1.37)$$

junto con la ley de comportamiento (3.1.6).

Como el Problema (DP<sup>R</sup>SG) es más clásico, centraremos nuestro estudio en el tratamiento de las condiciones de contacto del Problema (DP<sup>R</sup>DG) y su discretización espacial y temporal.

### 4.1.3. Discretización en tiempo

Para calcular una aproximación numérica de la solución del problema dinámico (DP<sup>R</sup>DG), discretizamos las ecuaciones en tiempo, y resolvemos un problema quasi-estático en cada instante de tiempo. En las siguientes secciones presentaremos la formulación variacional de dichos problemas, que a continuación se discretizarán en espacio para su completa resolución.

La discretización en tiempo se realiza siguiendo la misma metodología utilizada en el Capítulo 2, por medio de un método implícito de la familia de los métodos de Newmark. Consideramos una partición regular del intervalo de tiempo  $[0, T]$  en  $2^{I+1}$  puntos igualmente espaciados:

$$t_0 = 0; \quad t_j = t_{j-1} + \Delta t, \quad \Delta t = \frac{T}{2^I}, j = 1, \dots, 2^I.$$

Los métodos de la familia Newmark consisten en usar las siguientes aproximaciones de los desplazamientos y las velocidades:

Dados  $(\mathbf{u}^T)^j$ ,  $(\dot{\mathbf{u}}^T)^j$ ,  $(\ddot{\mathbf{u}}^T)^j$  y  $(\ddot{\mathbf{u}}^T)^{j+1}$ , calculamos

$$(\mathbf{u}^T)^{j+1} = (\mathbf{u}^T)^j + \Delta t(\dot{\mathbf{u}}^T)^j + \frac{\Delta t^2}{2}[(1 - 2\beta)(\ddot{\mathbf{u}}^T)^j + 2\beta(\ddot{\mathbf{u}}^T)^{j+1}], \quad (4.1.38)$$

$$(\dot{\mathbf{u}}^T)^{j+1} = (\dot{\mathbf{u}}^T)^j + \Delta t[(1 - \gamma)(\ddot{\mathbf{u}}^T)^j + \gamma(\ddot{\mathbf{u}}^T)^{j+1}], \quad (4.1.39)$$

donde  $(\mathbf{u}^T)^j$ ,  $(\dot{\mathbf{u}}^T)^j$ , y  $(\ddot{\mathbf{u}}^T)^j$  son las aproximaciones de  $\mathbf{u}^T(t_j)$ ,  $\dot{\mathbf{u}}^T(t_j)$ , y  $\ddot{\mathbf{u}}^T(t_j)$  respectivamente. El método que nosotros consideraremos se corresponde con tomar para  $\beta$  y  $\gamma$  los valores:

$$\beta = \frac{1}{4}; \quad \gamma = \frac{1}{2}, \quad (4.1.40)$$

para los cuales el método es implícito e incondicionalmente estable como puede verse en [49]. Así, en cada instante de tiempo,  $t_j$  resolvemos el problema:

**PROBLEMA (DP<sup>R</sup>DG<sup>j</sup>):** Dadas  $\mathbf{u}^{P_i}$  soluciones de (DP<sup>R</sup>SG<sup>i</sup>),  $\mathbf{u}^P(t_j)$  definida por (4.1.26),  $(\mathbf{u}^T)^{j-1}$ ,  $(\dot{\mathbf{u}}^T)^{j-1}$ , y  $(\ddot{\mathbf{u}}^T)^{j-1}$ , calculadas en el instante anterior, encontrar  $((\mathbf{u}^T)^j, (\boldsymbol{\sigma}^T)^j)$   $j = 1, \dots, 2^I$  verificando

$$\rho_0(\ddot{\mathbf{u}}^T)^j - \text{Div}(\boldsymbol{\sigma}^T)^j = \rho_0\omega^2\mathbf{u}^P(t_j) \quad \text{en } \Omega, \quad (4.1.41)$$

$$(\boldsymbol{\sigma}^T)^j \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_N, \quad (4.1.42)$$

$$(\mathbf{u}^T)^j = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_D \cup \Gamma_D^*, \quad (4.1.43)$$

$$[(\sigma_n^T)^j] = 0; \quad (\sigma_n^T)^j \leq -\sigma_n^P(t_j) \quad \text{sobre } \Gamma_C, \quad (4.1.44)$$

$$(\boldsymbol{\sigma}_T^T)^j = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_C, \quad (4.1.45)$$

$$[(u_n^T)^j] \leq 0 \quad \text{sobre } \Gamma_C, \quad (4.1.46)$$

$$(\sigma_n^P(t_j) + (\sigma_n^T)^j)[(u_n^T)^j] = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_C, \quad (4.1.47)$$

$$[(\mathbf{u}^T)^j] = \mathbf{0}; \quad [(\boldsymbol{\sigma}^T)^j \mathbf{n}] = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_H, \quad (4.1.48)$$

junto con la ley de comportamiento (3.1.6), y siendo

$$(\mathbf{u}^T)^0(\mathbf{X}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}) - \mathbf{u}^{P1}(\mathbf{X}) \quad \text{en } \mathbf{X} \in \Omega, \quad (4.1.49)$$

$$(\dot{\mathbf{u}}^T)^0(\mathbf{X}) = \mathbf{u}_1(\mathbf{X}) - \omega\mathbf{u}^{P2}(\mathbf{X}) \quad \text{en } \mathbf{X} \in \Omega. \quad (4.1.50)$$

Nótese que éste es un problema quasi-estático, puesto que, en realidad, el término  $(\ddot{\mathbf{u}}^T)^j$  es una combinación lineal de datos del instante anterior,  $j - 1$ , y el desplazamiento del instante  $j$  como puede verse en la ecuación (4.1.38). Sin embargo, mantendremos la notación  $(\ddot{\mathbf{u}}^T)^j$  por simplicidad en la exposición.

## 4.2. Marco funcional

Estableceremos ahora el marco funcional en el que consideraremos la formulación variacional del Problema ( $\mathbf{DP}^{\mathbf{R}}\mathbf{DG}^{\mathbf{j}}$ ). Para ello introduciremos algunas notaciones y los espacios de desplazamientos y tensiones admisibles. Denotaremos por

$$\mathbf{H}^1(\Omega^{l(r)}) = \{\mathbf{v} = (v_1, v_2)^t; v_\alpha \in H^1(\Omega^{l(r)})\},$$

donde, como en toda la memoria, los índices griegos toman valores en el conjunto  $\{1, 2\}$ . Se define

$$\mathcal{H}^1(\Omega) = \mathbf{H}^1(\Omega^l) \times \mathbf{H}^1(\Omega^r),$$

que, dotado de la norma producto

$$\|(\mathbf{v}^l, \mathbf{v}^r)\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} = (\|\mathbf{v}^l\|_{\mathbf{H}^1(\Omega^l)}^2 + \|\mathbf{v}^r\|_{\mathbf{H}^1(\Omega^r)}^2)^{1/2},$$

es un espacio de Hilbert.

### 4.2.1. Espacios de desplazamientos

En primer lugar, introducimos el espacio de desplazamientos:

$$V = \{\mathbf{v} = (\mathbf{v}^l, \mathbf{v}^r) \in \mathcal{H}^1(\Omega); \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma_D \cup \Gamma_D^*; [\mathbf{v}] = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma_H\}, \quad (4.2.1)$$

que es un subespacio de  $\mathcal{H}^1(\Omega)$ .

Si añadimos al espacio  $V$  la condición de contacto (4.1.46), tenemos el subconjunto de desplazamientos admisibles:

$$V_{ad} = \{\mathbf{v} \in V; [v_n] \leq 0 \text{ sobre } \Gamma_C\}, \quad (4.2.2)$$

con  $[v_n] = \mathbf{v}^l \cdot \mathbf{n}^l + \mathbf{v}^r \cdot \mathbf{n}^r$ .

### 4.2.2. Espacios de tensiones

Definimos el espacio de tensiones

$$X^{l(r)} = \{\boldsymbol{\tau}^{l(r)} = (\tau_{\alpha\beta}^{l(r)}) \in [L^2(\Omega^{l(r)})]^4; \tau_{\alpha\beta}^{l(r)} = \tau_{\beta\alpha}^{l(r)}\}, \quad (4.2.3)$$

que, dotado con la norma

$$\|\boldsymbol{\tau}^{l(r)}\|_{X^{l(r)}} = \left( \int_{\Omega^{l(r)}} \boldsymbol{\tau}^{l(r)} : \boldsymbol{\tau}^{l(r)} dV_X \right)^{1/2}, \quad (4.2.4)$$

es un espacio de Hilbert.

Consideramos el subespacio de  $X^{l(r)}$

$$E^{l(r)} = \{\boldsymbol{\tau}^{l(r)} \in X^{l(r)}; \text{Div}(\boldsymbol{\tau}^{l(r)}) \in [L^2(\Omega^{l(r)})]^2\}, \quad (4.2.5)$$

que también es un espacio de Hilbert, con la norma

$$\|\boldsymbol{\tau}^{l(r)}\|_{E^{l(r)}} = \|\boldsymbol{\tau}^{l(r)}\|_{X^{l(r)}} + \|\text{Div}(\boldsymbol{\tau}^{l(r)})\|_{[L^2(\Omega^{l(r)})]^2}. \quad (4.2.6)$$

Denotamos por  $E$  al espacio producto

$$E = \{\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\tau}^l, \boldsymbol{\tau}^r) \in E^l \times E^r\}, \quad (4.2.7)$$

con la norma

$$\|(\boldsymbol{\tau}^l, \boldsymbol{\tau}^r)\|_E = (\|\boldsymbol{\tau}^l\|_{E^l}^2 + \|\boldsymbol{\tau}^r\|_{E^r}^2)^{1/2}.$$

Puesto que los dominios  $\Omega^l$  y  $\Omega^r$  son Lipschitzianos, los resultados de teoría de trazas expuestos en la Sección 2.1.1 son aplicables a cada uno de éstos.

### 4.2.3. Condiciones de contorno

Consideramos  $\Gamma_N \subset \Gamma$ , con  $\Gamma_N \cap \Gamma_C = \emptyset$  y las aplicaciones de traza  $\gamma$  y  $\pi$  definidas en la Sección 2.1.1. Sea  $\mathbf{s}_0 \in [L^2(\Gamma_N)]^2$ , entonces:

- Dado  $\boldsymbol{\tau} \in E$ , diremos que

$$[\boldsymbol{\tau}\mathbf{n}] = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_H$$

si para todo  $\boldsymbol{\phi} \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_H)$ , se cumple

$$\langle \pi^l \boldsymbol{\tau}^l, \boldsymbol{\phi} \rangle_{\Gamma^l} + \langle \pi^r \boldsymbol{\tau}^r, \boldsymbol{\phi} \rangle_{\Gamma^r} = 0.$$

- Dado  $\boldsymbol{\tau} \in E$ , diremos que

$$\boldsymbol{\tau}\mathbf{n} = \mathbf{s}_0 \quad \text{sobre } \Gamma_N,$$

si para todo  $\phi = (\phi^l, \phi^r) \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_N \cap \Gamma^l) \times \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_N \cap \Gamma^r)$ , se cumple

$$\langle \pi^l \boldsymbol{\tau}^l, \phi^l \rangle_{\Gamma^l} + \langle \pi^r \boldsymbol{\tau}^r, \phi^r \rangle_{\Gamma^r} = \int_{\Gamma_N} \mathbf{s}_0 \cdot \phi \, dA_X.$$

- Dado  $\boldsymbol{\tau} \in E$ , diremos que

$$\boldsymbol{\tau}_T = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma_C,$$

si se cumple

$$\langle \pi^l \boldsymbol{\tau}^l, \phi^l \rangle_{\Gamma^l} + \langle \pi^r \boldsymbol{\tau}^r, \phi^r \rangle_{\Gamma^r} = 0,$$

para todo  $\phi \in \mathbf{H}_{T00}^{1/2}(\Gamma_C^l) \times \mathbf{H}_{T00}^{1/2}(\Gamma_C^r)$ .

- Dado  $\boldsymbol{\tau} \in E$ , diremos que

$$\tau_n^l = \tau_n^r \text{ sobre } \Gamma_C,$$

si para todo  $\phi \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_C^l) \times \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_C^r)$  tal que  $\phi_T^l = \phi_T^r = \mathbf{0}$ ,  $[\phi_n] = 0$  sobre  $\Gamma_C$ , se cumple

$$\langle \pi^l \boldsymbol{\tau}^l, \phi^l \rangle_{\Gamma^l} + \langle \pi^r \boldsymbol{\tau}^r, \phi^r \rangle_{\Gamma^r} = 0.$$

- Dado  $\boldsymbol{\tau} \in E$ , diremos que

$$\tau_n \leq 0 \text{ sobre } \Gamma_C,$$

si para todo  $\phi \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_C^l) \times \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_C^r)$  tal que  $\phi_T^l = \phi_T^r = \mathbf{0}$ ,  $[\phi_n] \leq 0$  sobre  $\Gamma_C$ , se cumple

$$\langle \pi^l \boldsymbol{\tau}^l, \phi^l \rangle_{\Gamma^l} + \langle \pi^r \boldsymbol{\tau}^r, \phi^r \rangle_{\Gamma^r} \geq 0.$$

#### 4.2.4. Espacio de tensiones admisibles

Teniendo en cuenta que las fuerzas de superficie consideradas en el Problema  $(\mathbf{DP}^{\mathbf{R}}\mathbf{DG}^j)$  son nulas, definimos el espacio de tensiones admisibles  $E_{ad}$  como:

$$E_{ad} = \{ \boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\tau}^l, \boldsymbol{\tau}^r) \in E; \boldsymbol{\tau}_T = \mathbf{0}, [\tau_n] = 0 \text{ y } \tau_n + \sigma_n^P \leq 0 \text{ sobre } \Gamma_C, \quad (4.2.8) \\ [\boldsymbol{\tau}\mathbf{n}] = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma_H, \boldsymbol{\tau}\mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma_N \}.$$

- Dados  $\mathbf{v} \in V_{ad}$  y  $\boldsymbol{\tau} \in E_{ad}$ , tal que  $\pi_{\Gamma_N}^0(\boldsymbol{\tau}) \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_N)$ ,  $[\boldsymbol{\tau}\mathbf{n}] = \mathbf{0}$  sobre  $\Gamma_H$ , diremos que

$$\tau_n[v_n] = 0 \text{ débilmente sobre } \Gamma_C,$$

si se cumple

$$\langle \pi^l(\boldsymbol{\tau}^l), \gamma^l(\mathbf{v}^l) \rangle_{\Gamma^l} + \langle \pi^r(\boldsymbol{\tau}^r), \gamma^r(\mathbf{v}^r) \rangle_{\Gamma^r} = \mathbf{0}.$$

### 4.3. Formulación como inecuación variacional

Como la formulación variacional del Problema **(DP<sup>R</sup>SG)** es estándar y en la Sección 3.4 se realizó para un problema análogo, sólo explicitaremos aquí la del Problema **(DP<sup>R</sup>DG<sup>j</sup>)**,  $j \geq 1$ .

Obtendremos la formulación para  $(\mathbf{u}^T)^j$  partiendo de la ecuación (4.1.41). Supongamos que  $((\mathbf{u}^T)^j, (\boldsymbol{\sigma}^T)^j)$  es una solución regular de **(DP<sup>R</sup>DG<sup>j</sup>)**. Tomamos una función test  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^l, \mathbf{v}^r) \in V_{ad}$  regular. Multiplicando (4.1.41) y (4.1.19) por  $\mathbf{v}$ , integrando sobre  $\Omega$  y sumando ambas relaciones obtenemos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0(\ddot{\mathbf{u}}^T)^j \cdot \mathbf{v} dV_X - \int_{\Omega} \text{Div}(\boldsymbol{\sigma}^T)^j \cdot \mathbf{v} dV_X \\ &= \int_{\Omega} \rho_0 \omega^2 \mathbf{u}^P(t_j) \cdot \mathbf{v} dV_X + \int_{\Omega} \text{Div} \boldsymbol{\sigma}^P(t_j) \cdot \mathbf{v} dV_X. \end{aligned}$$

Esta igualdad variacional se puede expresar en función de integrales sobre  $\Omega^l$  y  $\Omega^r$  como sigue:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0(\ddot{\mathbf{u}}^T)^j \cdot \mathbf{v} dV_X - \int_{\Omega^l} \text{Div}(\boldsymbol{\sigma}^{Tl})^j \cdot \mathbf{v}^l dV_X - \int_{\Omega^r} \text{Div}(\boldsymbol{\sigma}^{Tr})^j \cdot \mathbf{v}^r dV_X \\ &= \int_{\Omega} \rho_0 \omega^2 \mathbf{u}^P(t_j) \cdot \mathbf{v} dV_X + \int_{\Omega^l} \text{Div} \boldsymbol{\sigma}^{Pl}(t_j) \cdot \mathbf{v}^l dV_X + \int_{\Omega^r} \text{Div} \boldsymbol{\sigma}^{Pr}(t_j) \cdot \mathbf{v}^r dV_X. \end{aligned}$$

Como los dominios  $\Omega^l$  y  $\Omega^r$  son Lipschitzianos por construcci3n, podemos aplicar la f3rmula de Green en cada uno de ellos, y obtenemos

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \rho_0 (\ddot{\mathbf{u}}^T)^j \cdot \mathbf{v} \, dV_X + \int_{\Omega^l} (\boldsymbol{\sigma}^{Tl})^j : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^l) \, dV_X + \int_{\Omega^r} (\boldsymbol{\sigma}^{Tr})^j : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^r) \, dV_X \\
&= \int_{\Omega} \rho_0 \omega^2 \mathbf{u}^P(t_j) \cdot \mathbf{v} \, dV_X - \int_{\Omega^l} \boldsymbol{\sigma}^{Pl}(t_j) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^l) \, dV_X - \int_{\Omega^r} \boldsymbol{\sigma}^{Pr}(t_j) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^r) \, dV_X \\
&+ \int_{\Gamma^l} (\boldsymbol{\sigma}^{Tl})^j \mathbf{n}^l \cdot \mathbf{v}^l \, dA_X + \int_{\Gamma^r} (\boldsymbol{\sigma}^{Tr})^j \mathbf{n}^r \cdot \mathbf{v}^r \, dA_X \\
&+ \int_{\Gamma^l} \boldsymbol{\sigma}^{Pl}(t_j) \mathbf{n}^l \cdot \mathbf{v}^l \, dA_X + \int_{\Gamma^r} \boldsymbol{\sigma}^{Pr}(t_j) \mathbf{n}^r \cdot \mathbf{v}^r \, dA_X. \tag{4.3.1}
\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\Gamma^l = ((\Gamma_D \cup \Gamma_D^*) \cap \Gamma^l) \cup (\Gamma_N \cap \Gamma^l) \cup \Gamma_C^l \cup \Gamma_H, \tag{4.3.2}$$

$$\Gamma^r = ((\Gamma_D \cup \Gamma_D^*) \cap \Gamma^r) \cup (\Gamma_N \cap \Gamma^r) \cup \Gamma_C^r \cup \Gamma_H. \tag{4.3.3}$$

Dado que  $(\boldsymbol{\sigma}^T)^j \mathbf{n} = \mathbf{0}$  y  $\boldsymbol{\sigma}^P(t_j) \mathbf{n} = \mathbf{0}$  sobre  $\Gamma_N$ , en particular, se verifica

$$\boldsymbol{\sigma}^{Tl(r)} \mathbf{n}^{l(r)} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\sigma}^{Pl(r)}(t_j) \mathbf{n}^{l(r)} = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma_N \cap \Gamma^{l(r)};$$

Adem3s, como  $(\boldsymbol{\sigma}_T^T)^j = \mathbf{0}$  y  $\boldsymbol{\sigma}_T^P(t_j) = \mathbf{0}$  sobre  $\Gamma_C$ , se verifica que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}^{Tl(r)} \mathbf{n}^{l(r)} \cdot \mathbf{v}^{l(r)} &= \sigma_n^{Tl(r)} v_n^{l(r)} \text{ sobre } \Gamma_C \cap \Gamma^{l(r)}, \\
\boldsymbol{\sigma}^{Pl(r)}(t_j) \mathbf{n}^{l(r)} \cdot \mathbf{v}^{l(r)} &= \sigma_n^{Pl(r)}(t_j) v_n^{l(r)} \text{ sobre } \Gamma_C \cap \Gamma^{l(r)};
\end{aligned}$$

Finalmente,  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^l, \mathbf{v}^r)$  es tal que

$$\mathbf{v}^{l(r)} = \mathbf{0} \text{ sobre } (\Gamma_D \cup \Gamma_D^*) \cap \Gamma^{l(r)}.$$

Teniendo en cuenta las igualdades anteriores, podemos expresar la igualdad (4.3.1) como

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \rho_0 (\ddot{\mathbf{u}}^T)^j \cdot \mathbf{v} \, dV_X + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^T)^j : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dV_X = \int_{\Omega} \rho_0 \omega^2 \mathbf{u}^P(t_j) \cdot \mathbf{v} \, dV_X \\
&- \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^P(t_j) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dV_X + \int_{\Gamma_C^l} (\sigma_n^{Tl})^j v_n^l \, dA_X + \int_{\Gamma_H} (\boldsymbol{\sigma}^{Tl})^j \mathbf{n}^l \cdot \mathbf{v}^l \, dA_X \\
&+ \int_{\Gamma_C^r} (\sigma_n^{Tr})^j v_n^r \, dA_X + \int_{\Gamma_H} (\boldsymbol{\sigma}^{Tr})^j \mathbf{n}^r \cdot \mathbf{v}^r \, dA_X + \int_{\Gamma_C^l} \sigma_n^{Pl}(t_j) v_n^l \, dA_X \\
&+ \int_{\Gamma_H} \boldsymbol{\sigma}^{Pl}(t_j) \mathbf{n}^l \cdot \mathbf{v}^l \, dA_X + \int_{\Gamma_C^r} \sigma_n^{Pr}(t_j) v_n^r \, dA_X + \int_{\Gamma_H} \boldsymbol{\sigma}^{Pr}(t_j) \mathbf{n}^r \cdot \mathbf{v}^r \, dA_X.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $[(\sigma_n^T)^j] = [\sigma_n^P(t_j)] = 0$ , es decir,

$$(\sigma_n^{Tl})^j = (\sigma_n^{Tr})^j, \quad \text{y} \quad \sigma_n^{Pl}(t_j) = \sigma_n^{Pr}(t_j) \quad \text{sobre} \quad \Gamma_C,$$

y que  $[\mathbf{v}] = \mathbf{0}$  sobre  $\Gamma_H$ , podemos agrupar términos en la expresión anterior del siguiente modo:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 (\ddot{\mathbf{u}}^T)^j \cdot \mathbf{v} \, dV_X + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^T)^j : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dV_X = \int_{\Omega} \rho_0 \omega^2 \mathbf{u}^P(t_j) \cdot \mathbf{v} \, dV_X \\ & - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^P(t_j) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dV_X + \int_{\Gamma_C} (\sigma_n^T)^j [v_n] \, dA_X + \int_{\Gamma_C} \sigma_n^P(t_j) [v_n] \, dA_X \\ & + \int_{\Gamma_H} ((\boldsymbol{\sigma}^{Tl})^j \mathbf{n}^l + (\boldsymbol{\sigma}^{Tr})^j \mathbf{n}^r) \cdot \mathbf{v} \, dA_X + \int_{\Gamma_H} (\boldsymbol{\sigma}^{Pl}(t_j) \mathbf{n}^l + \boldsymbol{\sigma}^{Pr}(t_j) \mathbf{n}^r) \cdot \mathbf{v} \, dA_X. \end{aligned}$$

Como  $(\boldsymbol{\sigma}^T)^j$  y  $\boldsymbol{\sigma}^P(t_j)$  verifican (4.1.48) y (4.1.25) respectivamente, tenemos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 (\ddot{\mathbf{u}}^T)^j \cdot \mathbf{v} \, dV_X + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^T)^j : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dV_X = \int_{\Omega} \rho_0 \omega^2 \mathbf{u}^P(t_j) \cdot \mathbf{v} \, dV_X \\ & - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^P(t_j) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dV_X + \int_{\Gamma_C} ((\sigma_n^T)^j + \sigma_n^P(t_j)) [v_n] \, dA_X. \end{aligned}$$

Además, por (4.1.44), se tiene  $((\sigma_n^T)^j + \sigma_n^P(t_j)) \leq 0$  y por hipótesis  $[v_n] \leq 0$  sobre  $\Gamma_C$ . Entonces:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 (\ddot{\mathbf{u}}^T)^j \cdot \mathbf{v} \, dV_X + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^T)^j : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dV_X \\ & \geq \int_{\Omega} \rho_0 \omega^2 \mathbf{u}^P(t_j) \cdot \mathbf{v} \, dV_X - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^P(t_j) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dV_X. \end{aligned}$$

Sean entonces  $(\mathbf{u}^T)^0$  y  $(\dot{\mathbf{u}}^T)^0$  definidas con las condiciones iniciales (4.1.49) y (4.1.50); se calcula la tensión  $(\boldsymbol{\sigma}^T)^0$  utilizando la ley de comportamiento (3.1.6) y la aceleración  $(\ddot{\mathbf{u}}^T)^0$  utilizando la ecuación de equilibrio. Conocidos  $(\mathbf{u}^T)^{j-1}$ ,  $(\dot{\mathbf{u}}^T)^{j-1}$ ,  $(\ddot{\mathbf{u}}^T)^{j-1}$  y  $(\boldsymbol{\sigma}^T)^{j-1}$ , se propone la siguiente formulación variacional del Problema **(DP<sup>R</sup>DG<sup>j</sup>)**:

**PROBLEMA (DP<sup>R</sup>DGV<sup>j</sup>):** Hallar  $((\mathbf{u}^T)^j, (\boldsymbol{\sigma}^T)^j)$  tal que:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 (\ddot{\mathbf{u}}^T)^j \cdot \mathbf{v} \, dV_X + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^T)^j : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dV_X \\ & \geq \int_{\Omega} \rho_0 \omega^2 \mathbf{u}^P(t_j) \cdot \mathbf{v} \, dV_X - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^P(t_j) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dV_X, \end{aligned}$$

para toda función test  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^l, \mathbf{v}^r) \in V_{ad}$  y para todo instante  $t_j = j\Delta t$ , con  $(\ddot{\mathbf{u}}^T)^j$  relacionada con  $(\mathbf{u}^T)^j$  a través de la ecuación (4.1.38); además  $(\boldsymbol{\sigma}^T)^j$  se

relaciona con  $(\mathbf{u}^T)^j$  a trav3s de la ley de comportamiento (3.1.6) y  $(\mathbf{u}^T)^j$  debe satisfacer las condiciones de contorno (4.1.43), (4.1.46), (4.1.48).

Calculado  $(\mathbf{u}^T)^j$ , se utiliza de nuevo (4.1.38) para obtener  $(\ddot{\mathbf{u}}^T)^j$  y (4.1.39) para calcular  $(\dot{\mathbf{u}}^T)^j$ .

**Proposici3n 4.3.1** Si  $(\mathbf{u})^j \in V$  y  $(\boldsymbol{\tau})^j \in E$  verifican

$$\int_{\Omega} \rho_0 (\ddot{\mathbf{u}})^j \cdot \mathbf{v} dV_X + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau})^j : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dV_X \geq \int_{\Omega} \rho_0 \omega^2 \mathbf{u}^P(t_j) \cdot \mathbf{v} dV_X - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^P(t_j) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dV_X, \quad (4.3.4)$$

para todo  $\mathbf{v} \in V_{ad}$  y si el par  $(\mathbf{u}^P(t_j), \boldsymbol{\sigma}^P(t_j))$  es soluci3n regular del Problema  $(\mathbf{DP}^{\mathbf{R}}\mathbf{SG}^j)$ , entonces  $(\boldsymbol{\tau})^j \in E_{ad}$  y se verifica (4.1.41) en el sentido de las distribuciones.

*Demostraci3n.* Sea  $(\boldsymbol{\tau})^j \in E$  verificando (4.3.4). Sea  $\mathbf{v} \in [\mathcal{D}(\Omega^l)]^2 \times [\mathcal{D}(\Omega^r)]^2$ . Entonces  $\mathbf{v}$  y  $-\mathbf{v}$  pertenecen al espacio  $V_{ad}$  y su valor en la frontera es cero. Sustituyendo en la inecuaci3n y separando en dos dominios, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 (\ddot{\mathbf{u}})^j \cdot \mathbf{v} dV_X + \int_{\Omega^l} (\boldsymbol{\tau}^l)^j : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^l) dV_X + \int_{\Omega^r} (\boldsymbol{\tau}^r)^j : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^r) dV_X \\ & = \int_{\Omega} \rho_0 \omega^2 \mathbf{u}^P(t_j) \cdot \mathbf{v} dV_X - \int_{\Omega^l} \boldsymbol{\sigma}^{Pl}(t_j) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^l) dV_X - \int_{\Omega^r} \boldsymbol{\sigma}^{Pr}(t_j) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^r) dV_X. \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Por la f3rmula de Green,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{l(r)}} (\boldsymbol{\tau}^{l(r)})^j : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^{l(r)}) dV_X & = - \int_{\Omega^{l(r)}} \text{Div}((\boldsymbol{\tau}^{l(r)})^j) \cdot \mathbf{v}^{l(r)} dV_X \\ & \quad + \langle \pi^{l(r)}(\boldsymbol{\tau}^{l(r)})^j, \mathbf{v}^{l(r)} \rangle_{\Gamma^{l(r)}}; \end{aligned}$$

pero como  $\mathbf{v}|_{\Gamma^{l(r)}} = \mathbf{0}$ , se tiene:

$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau})^j : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dV_X = - \int_{\Omega} \text{Div}((\boldsymbol{\tau})^j) \cdot \mathbf{v} dV_X.$$

Aplicando esta igualdad a (4.3.5) y teniendo en cuenta que  $\text{Div}(\boldsymbol{\sigma}^P(t_j)) = \mathbf{0}$ , se puede deducir que

$$\rho_0 (\ddot{\mathbf{u}})^j - \text{Div}(\boldsymbol{\tau})^j = \rho_0 \omega^2 \mathbf{u}^P(t_j) \quad \text{en} \quad [\mathcal{D}'(\Omega^l)]^2 \times [\mathcal{D}'(\Omega^r)]^2. \quad (4.3.6)$$

Sea ahora  $\phi \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_H)$  y sea  $\tilde{\phi} = (\tilde{\phi}^l, \tilde{\phi}^r)$  su extensión por cero a  $\Gamma^{l(r)}$ . Entonces existe  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^l, \mathbf{v}^r) \in V_{ad}$  tal que  $\gamma^{l(r)}(\mathbf{v}^{l(r)}) = \tilde{\phi}^{l(r)}$ . Multiplicando (4.3.6) y (4.1.19) por  $\mathbf{v}$ , sumando y aplicando la fórmula de Green se obtiene:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0(\ddot{\mathbf{u}})^j \cdot \mathbf{v} dV_X + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau})^j : \varepsilon(\mathbf{v}) dV_X - \int_{\Omega} \rho_0 \omega^2 \mathbf{u}^P(t_j) \cdot \mathbf{v} dV_X \\ & + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^P(t_j) : \varepsilon(\mathbf{v}) dV_X = \langle \pi^l(\boldsymbol{\tau}^l)^j, \tilde{\phi}^l \rangle_{\Gamma^l} + \langle \pi^r(\boldsymbol{\tau}^r)^j, \tilde{\phi}^r \rangle_{\Gamma^r} \\ & + \langle \pi^l \boldsymbol{\sigma}^{Pl}(t_j), \tilde{\phi}^l \rangle_{\Gamma^l} + \langle \pi^r \boldsymbol{\sigma}^{Pr}(t_j), \tilde{\phi}^r \rangle_{\Gamma^r}. \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Como se verifica la inecuación (4.3.4) para  $\mathbf{v}$  y  $-\mathbf{v}$ , se deduce:

$$\begin{aligned} & \langle \pi^l(\boldsymbol{\tau}^l)^j, \tilde{\phi}^l \rangle_{\Gamma^l} + \langle \pi^r(\boldsymbol{\tau}^r)^j, \tilde{\phi}^r \rangle_{\Gamma^r} \\ & + \langle \pi^l \boldsymbol{\sigma}^{Pl}(t_j), \tilde{\phi}^l \rangle_{\Gamma^l} + \langle \pi^r \boldsymbol{\sigma}^{Pr}(t_j), \tilde{\phi}^r \rangle_{\Gamma^r} = 0. \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Ahora bien,  $\boldsymbol{\sigma}^P(t_j)$  es solución regular de **(DP<sup>R</sup>SG<sup>j</sup>)** y  $\tilde{\phi}$  es nula sobre  $\Gamma^{l(r)} \setminus \Gamma_H$ , entonces

$$\langle \pi^l \boldsymbol{\sigma}^{Pl}(t_j), \tilde{\phi}^l \rangle_{\Gamma^l} + \langle \pi^r \boldsymbol{\sigma}^{Pr}(t_j), \tilde{\phi}^r \rangle_{\Gamma^r} = 0;$$

y por tanto, (4.3.8) permite concluir que  $(\boldsymbol{\tau})^j$  verifica  $[(\boldsymbol{\tau})^j \mathbf{n}] = \mathbf{0}$  sobre  $\Gamma_H$ . Consideramos ahora  $\phi = (\phi^l, \phi^r) \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_N \cap \Gamma^l) \times \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_N \cap \Gamma^r)$ . Repitiendo el razonamiento del párrafo anterior, se demuestra que

$$\langle \pi^l(\boldsymbol{\tau}^l)^j, \tilde{\phi}^l \rangle_{\Gamma^l} + \langle \pi^r(\boldsymbol{\tau}^r)^j, \tilde{\phi}^r \rangle_{\Gamma^r} = 0,$$

y entonces

$$(\boldsymbol{\tau})^j \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_N.$$

Consideremos ahora  $\phi = (\phi^l, \phi^r) \in \mathbf{H}_{T00}^{1/2}(\Gamma_C^l) \times \mathbf{H}_{T00}^{1/2}(\Gamma_C^r)$  sobre  $\Gamma_C$ . De modo análogo a lo hecho anteriormente, podemos concluir que

$$(\boldsymbol{\tau}_T)^j = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_C. \quad (4.3.9)$$

Del mismo modo, si tomamos una función  $\phi = (\phi^l, \phi^r) \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_C^l) \times \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_C^r)$  tal que  $\phi_T^l = \phi_T^r = \mathbf{0}$  y  $[\phi_n] = 0$  sobre  $\Gamma_C$ , obtenemos que

$$(\boldsymbol{\tau}_n^l)^j = (\boldsymbol{\tau}_n^r)^j \quad \text{sobre } \Gamma_C.$$

Sea ahora  $\phi = (\phi^l, \phi^r) \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_C^l) \times \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_C^r)$  tal que  $\phi_T^l = \phi_T^r = \mathbf{0}$  y  $[\phi_n] \leq 0$ . Aplicando la fórmula de Green en (4.3.4) se tiene la inecuación

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0(\ddot{\mathbf{u}})^j \cdot \mathbf{v} dV_X - \int_{\Omega} \text{Div}(\boldsymbol{\tau})^j \cdot \mathbf{v} dV_X - \int_{\Omega} \rho_0 \omega^2 \mathbf{u}^P(t_j) \cdot \mathbf{v} dV_X \\ & \geq - \langle \pi^l(\boldsymbol{\tau}^l)^j, \tilde{\phi}^l \rangle_{\Gamma^l} - \langle \pi^r(\boldsymbol{\tau}^r)^j, \tilde{\phi}^r \rangle_{\Gamma^r} \\ & - \langle \pi^l \boldsymbol{\sigma}^{Pl}(t_j), \tilde{\phi}^l \rangle_{\Gamma^l} - \langle \pi^r \boldsymbol{\sigma}^{Pr}(t_j), \tilde{\phi}^r \rangle_{\Gamma^r}, \end{aligned}$$

Como hemos probado que  $\boldsymbol{\tau}$  y  $\mathbf{u}$  verifican la ecuación de equilibrio (4.3.6),

$$\begin{aligned} & \langle \pi^l(\boldsymbol{\tau}^l)^j, \tilde{\phi}^l \rangle_{\Gamma^l} + \langle \pi^r(\boldsymbol{\tau}^r)^j, \tilde{\phi}^r \rangle_{\Gamma^r} \\ & \geq - \langle \pi^l \boldsymbol{\sigma}^{Pl}(t_j), \tilde{\phi}^l \rangle_{\Gamma^l} - \langle \pi^r \boldsymbol{\sigma}^{Pr}(t_j), \tilde{\phi}^r \rangle_{\Gamma^r}. \end{aligned}$$

Entonces, teniendo en cuenta (4.1.24) y (4.3.9), resulta

$$\tau_n^j + \sigma_n^P(t_j) \leq 0 \quad \text{sobre } \Gamma_C.$$

Por lo tanto,  $\boldsymbol{\tau}^j \in E_{ad}$ . □

**Corolario 4.3.2** Si  $(\boldsymbol{\tau})^j \in E$  y  $(\mathbf{u})^j \in V_{ad}$  verifican

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0(\ddot{\mathbf{u}})^j \cdot (\mathbf{v} - (\mathbf{u})^j) dV_X + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau})^j : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - (\mathbf{u})^j) dV_X \\ & \geq \int_{\Omega} \rho_0 \omega^2 \mathbf{u}^P(t_j) \cdot (\mathbf{v} - (\mathbf{u})^j) dV_X - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^P(t_j) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - (\mathbf{u})^j) dV_X, \quad (4.3.10) \end{aligned}$$

para todo  $\mathbf{v} \in V_{ad}$  y si el par  $(\mathbf{u}^P(t_j), \boldsymbol{\sigma}^P(t_j))$  es solución regular del problema  $(\mathbf{DP}^{\mathbf{RSG}^j})$ , entonces  $(\mathbf{u})^j$  y  $(\boldsymbol{\tau})^j$  verifican las ecuaciones (4.1.41)–(4.1.46) y (4.1.48).

*Demostración.* Es suficiente considerar en (4.3.10) como función test  $\mathbf{v} = \mathbf{v} + (\mathbf{u})^j$ , con  $\mathbf{v} \in V_{ad}$  y aplicar la Proposición 4.3.1. □

### 4.3.1. Problema variacional

Gracias al Corolario 4.3.2 proponemos la siguiente formulación variacional del problema dinámico discretizado en tiempo:

**PROBLEMA (DP<sup>R</sup>PV<sup>j</sup>)** Hallar  $(\mathbf{u}^T)^j \in V_{ad}$  y  $(\boldsymbol{\sigma}^T)^j \in E_{ad}$ ,  $j = 1, \dots, 2^I$  verificando para todo  $\mathbf{v} \in V_{ad}$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 (\ddot{\mathbf{u}}^T)^j \cdot (\mathbf{v} - (\mathbf{u}^T)^j) dV_X + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^T)^j : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - (\mathbf{u}^T)^j) dV_X \\ & \geq \int_{\Omega} \rho_0 \omega^2 \mathbf{u}^P(t_j) \cdot (\mathbf{v} - (\mathbf{u}^T)^j) dV_X - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^P(t_j) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - (\mathbf{u}^T)^j) dV_X, \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

$$(\mathbf{u}^T)^0(\mathbf{X}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}) - \mathbf{u}^{P1}(\mathbf{X}) \quad \text{en } \Omega, \quad (4.3.12)$$

$$(\dot{\mathbf{u}}^T)^0(\mathbf{X}) = \mathbf{u}_1(\mathbf{X}) - \omega \mathbf{u}^{P2}(\mathbf{X}) \quad \text{en } \Omega, \quad (4.3.13)$$

junto con la ley de comportamiento (3.1.6) y con  $(\ddot{\mathbf{u}}^T)^j$  relacionada con  $(\mathbf{u})^j$  a través de la ecuación (4.1.38).

**Proposición 4.3.3** Si  $((\mathbf{u}^T)^j, (\boldsymbol{\sigma}^T)^j)$  es una solución del problema variacional (DP<sup>R</sup>PV<sup>j</sup>), entonces es solución del problema continuo (DP<sup>R</sup>DG<sup>j</sup>) para todo  $t_j, j = 1, \dots, 2^I$  en el sentido de las distribuciones.

*Demostración.* Si  $((\mathbf{u}^T)^j, (\boldsymbol{\sigma}^T)^j)$  es una solución de (DP<sup>R</sup>PV<sup>j</sup>), por el Corolario 4.3.2,  $(\mathbf{u}^T)^j, (\boldsymbol{\sigma}^T)^j$  verifican las ecuaciones (4.1.41)–(4.1.46) y (4.1.48). Es suficiente entonces, verificar (4.1.47), esto es, que  $(\sigma_n^P + (\sigma_n^T)^j)[(u_n^T)^j] = 0$  sobre  $\Gamma_C$ .

Tomamos  $\mathbf{v} = 2(\mathbf{u}^T)^j$  y  $\mathbf{v} = (\mathbf{u}^T)^j/2$  en (4.3.11), y obtenemos la igualdad:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 (\ddot{\mathbf{u}}^T)^j \cdot (\mathbf{u}^T)^j dV_X + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^T)^j : \boldsymbol{\varepsilon}((\mathbf{u}^T)^j) dV_X \\ & = \int_{\Omega} \rho_0 \omega^2 \mathbf{u}^P(t_j) \cdot (\mathbf{u}^T)^j dV_X - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^P(t_j) : \boldsymbol{\varepsilon}((\mathbf{u}^T)^j) dV_X. \end{aligned}$$

Como  $(\boldsymbol{\sigma}^T)^j \in E_{ad}$  y  $(\mathbf{u}^T)^j \in V_{ad}$ , se verifica la fórmula de Green en cada subdominio  $\Omega^{l(r)}$ :

$$\int_{\Omega^{l(r)}} (\boldsymbol{\sigma}^{Tl(r)})^j : \boldsymbol{\varepsilon}((\mathbf{u}^{l(r)})^j) dV_X = - \int_{\Omega^{l(r)}} \text{Div}(\boldsymbol{\sigma}^{Tl(r)})^j \cdot (\mathbf{u}^{l(r)})^j dV_X + \langle \pi^{l(r)}(\boldsymbol{\sigma}^{Tl(r)})^j, (\mathbf{u}^{l(r)})^j \rangle_{\Gamma^{l(r)}},$$

y análogamente para  $\boldsymbol{\sigma}^P(t_j)$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho_0 (\ddot{\mathbf{u}}^T)^j \cdot (\mathbf{u}^T)^j dV_X - \int_{\Omega} \text{Div} (\boldsymbol{\sigma}^T)^j \cdot (\mathbf{u}^T)^j dV_X &= \int_{\Omega} \rho_0 \omega^2 \mathbf{u}^P(t_j) \cdot (\mathbf{u}^T)^j dV_X \\ &- \langle \pi^l (\boldsymbol{\sigma}^{Tl})^j, (\mathbf{u}^{Tl})^j \rangle_{\Gamma^l} - \langle \pi^r (\boldsymbol{\sigma}^{Tr})^j, (\mathbf{u}^{Tr})^j \rangle_{\Gamma^r} \\ &- \langle \pi^l \boldsymbol{\sigma}^{Pl}(t_j), (\mathbf{u}^{Tl})^j \rangle_{\Gamma^l} - \langle \pi^r \boldsymbol{\sigma}^{Pr}(t_j), (\mathbf{u}^{Tr})^j \rangle_{\Gamma^r} . \end{aligned}$$

Puesto que se cumple la relación (4.1.41), la igualdad anterior se reduce a:

$$\langle \pi^l (\boldsymbol{\sigma}^{Pl}(t_j) + (\boldsymbol{\sigma}^{Tl})^j), (\mathbf{u}^{Tl})^j \rangle_{\Gamma^l} + \langle \pi^r (\boldsymbol{\sigma}^{Pr}(t_j) + (\boldsymbol{\sigma}^{Tr})^j), (\mathbf{u}^{Tr})^j \rangle_{\Gamma^r} = 0,$$

lo que permite concluir que  $(\sigma_n^P + (\sigma_n^T)^j)[u_n] = 0$  sobre  $\Gamma_C$ .  $\square$

## 4.4. Resolución numérica

En esta sección se considera una discretización del dominio y se plantea un algoritmo para la resolución numérica del problema de contacto similar al considerado en el Capítulo 2, pero adaptado al contacto entre los labios de una grieta.

### 4.4.1. Discretización en espacio

Sea  $\mathcal{T}_h$  una triangulación del conjunto bidimensional  $\Omega$  compuesta por triángulos, compatible con la partición de las fronteras  $\Gamma_C^l$ ,  $\Gamma_C^r$  y tal que  $\mathcal{T}_h \cap \Omega^l$  y  $\mathcal{T}_h \cap \Omega^r$  inducen una triangulación sobre  $\Omega^l$  y  $\Omega^r$  respectivamente. Sea  $h$  el máximo de los diámetros de los elementos de  $\mathcal{T}_h$ . Denotamos por

$$\mathcal{P} = \{b_i, \quad 1 \leq i \leq n_h\}, \quad (4.4.1)$$

el conjunto de vértices de la triangulación,  $\mathcal{S}_h$  la malla de segmentos inducida por  $\mathcal{T}_h$  sobre  $\Gamma_C$  y  $\mathcal{Z}_h$  la inducida por  $\mathcal{T}_h$  sobre  $\Gamma_N \cup \Gamma_D \cup \Gamma_D^*$ . Dada una arista  $e$  de  $\mathcal{S}_h \cup \mathcal{Z}_h$  denotamos por  $\mathbf{n}_a$  el vector normal unitario exterior a  $\Omega$  en el punto medio de  $e$ .

Denotemos por  $\mathcal{S}_h^{l(r)}$  el conjunto de aristas inducido por  $\mathcal{T}_h$  sobre el labio izquierdo (derecho) de la fisura. Como en la configuración de referencia se suponen ambos labios pegados, supondremos que los mallados  $\mathcal{S}_h^l$  y  $\mathcal{S}_h^r$  son compatibles de forma que las coordenadas de los vértices y los segmentos de ambas discretizaciones coincidan. Denotamos por  $e_i^{l(r)}$ ,  $1 \leq i \leq m_h$  las aristas de  $\Gamma_C^{l(r)}$ . La compatibilidad de ambas discretizaciones garantiza que para cada  $e_i^l$  en  $\Gamma_C^l$  existe un único  $e_i^r$  en  $\Gamma_C^r$  tales que sus extremos coinciden y  $\mathbf{n}_{e_i^l} = -\mathbf{n}_{e_i^r}$ .

#### 4.4.1.1. Espacios discretos.

Puesto que la discretización del problema **(DP<sup>R</sup>SG)** es bien conocida, nos centraremos en la discretización de la formulación variacional propuesta para el problema **(DP<sup>R</sup>DG<sup>j</sup>)**,  $j \geq 1$ . De todos modos, para simplificar la notación, eliminamos el superíndice  $T$  de las expresiones para  $(\mathbf{u}^T)^j$  y  $(\boldsymbol{\sigma}^T)^j$ .

Para la discretización en espacio utilizaremos elementos finitos de Lagrange de grado 1 y consideramos los siguientes espacios de desplazamientos:

$$\begin{aligned} V_h &= \{\mathbf{v}_h = (\mathbf{v}_h^l, \mathbf{v}_h^r) \in [\mathcal{C}^0(\bar{\Omega}^l)]^2 \times [\mathcal{C}^0(\bar{\Omega}^r)]^2 / \mathbf{v}_{h|T_k} \in [P_1(T_k)]^2, \forall T_k \in \mathcal{T}_h, \\ &\quad \mathbf{v}_h = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma_D \cup \Gamma_D^*, [\mathbf{v}_h] = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma_H\}, \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

y el subconjunto

$$V_{adh} = \{\mathbf{v}_h \in V_h / \mathbf{v}_{h|e_i^l} \cdot \mathbf{n}_{e_i^l} + \mathbf{v}_{h|e_i^r} \cdot \mathbf{n}_{e_i^r} \leq 0, \quad 1 \leq i \leq m_h\}, \quad (4.4.3)$$

donde  $P_i(T_k)$  denota el espacio de polinomios de grado menor o igual a  $i$  definidos en  $T_k$ ,  $\mathbf{v}_{h|e}$  denota el valor de  $\mathbf{v}_h$  restringido a la arista  $e$  en su punto medio y  $m_h$  es el número de segmentos en la frontera  $\Gamma_C^l$  (que coincide con el número de segmentos en  $\Gamma_C^r$  por construcción).

Las tensiones se aproximan en el espacio  $E_h$  de tensores simétricos y constantes por elemento:

$$E_h = \{\boldsymbol{\sigma}_h; \boldsymbol{\sigma}_{h|T_k} \in [P_0(T_k)]^4, (\boldsymbol{\sigma}_h)_{\alpha\beta} = (\boldsymbol{\sigma}_h)_{\beta\alpha} \forall T_k \in \mathcal{T}_h\}, \quad (4.4.4)$$

con el producto escalar inducido por  $L^2$ .

Las funciones de  $V_h$  están caracterizadas por sus valores en los vértices de los

triángulos,

$$\mathbf{v}_h(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n_h} \mathbf{v}_h(b_i) \phi_i(\mathbf{X}),$$

donde  $\phi_i(\mathbf{X})$  es la función continua en  $\Omega$  y lineal sobre cada elemento, que vale 1 en  $b_i$  y cero en los demás nodos de la malla,  $1 \leq i \leq n_h$ .

Asimismo, los elementos de  $E_h$  están caracterizados por su valor en el baricentro de cada triángulo,

$$\boldsymbol{\sigma}_h(\mathbf{X}) = \sum_{T_k \in \mathcal{T}_h} \boldsymbol{\sigma}_{h|T_k} \chi_{T_k}(\mathbf{X}),$$

donde  $\chi_{T_k}$  denota la función característica del triángulo  $T_k$ .

Finalmente, consideramos el operador:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_h : V_h &\longrightarrow E_h \\ \mathbf{v}_h &\longmapsto \boldsymbol{\varepsilon}_h(\mathbf{v}_h) = \sum_{T_k \in \mathcal{T}_h} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h|_{T_k}) \chi_{T_k}, \end{aligned}$$

y denotamos por  $\boldsymbol{\varepsilon}_h^*$  su operador adjunto.

#### 4.4.1.2. Inecuación variacional discreta

Con esta notación, el Problema **(DP<sup>R</sup>PV<sup>j</sup>)** se escribe en forma discreta como:

**PROBLEMA (DP<sup>R</sup>PV<sup>j</sup><sub>h</sub>):** Hallar  $\mathbf{u}_h^j \in V_{ad_h}$  y  $\boldsymbol{\sigma}_h^j \in E_h$  tales que:

$$\int_{\Omega} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h^j \cdot (\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^j) dV_X + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_h^j : \boldsymbol{\varepsilon}_h(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^j) dV_X \quad (4.4.5)$$

$$\geq \int_{\Omega} \rho_0 \omega^2 \mathbf{u}^P(t_j)_h \cdot (\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^j) dV_X - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^P(t_j)_h : \boldsymbol{\varepsilon}_h(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^j) dV_X, \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_{ad_h},$$

$$\mathbf{u}_h^0 = (\mathbf{u}_0)_h - \mathbf{u}_h^{P1}, \quad \dot{\mathbf{u}}_h^0 = (\mathbf{u}_1)_h - \omega \mathbf{u}_h^{P2} \quad \text{en } \Omega, \quad (4.4.6)$$

y verificando la ley de comportamiento

$$\boldsymbol{\sigma}_h^j(\mathbf{u}_h^j) = \lambda \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}_h(\mathbf{u}_h^j) + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_h(\mathbf{u}_h^j), \quad (4.4.7)$$

donde  $\ddot{\mathbf{u}}_h^j$  está relacionada con  $(\mathbf{u})^j$  a través de la ecuación (4.1.38)

En (4.4.5), (4.4.6),  $\mathbf{u}_h^P(t_j)$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_h^P(t_j)$ ,  $(\mathbf{u}_0)_h$ ,  $(\mathbf{u}_1)_h$ , denotan la proyección sobre los correspondientes espacios discretos del desplazamiento pseudoestático, su tensión asociada, el desplazamiento y la velocidad inicial respectivamente.

#### 4.4.2. Tratamiento de las condiciones de contacto

En este apartado se utilizan argumentos de subdiferenciabilidad y teoría de operadores maximales monótonos para presentar la metodología numérica utilizada para discretizar las condiciones de contacto. Referencias adecuadas acerca de estos temas son, por ejemplo, [16, 75, 99]. Definimos el conjunto

$$P_h = \{p_h \in L^\infty(\Gamma_C^l) / p_{h|e_i^l} \in P_0(e_i^l), 1 \leq i \leq m_h\},$$

y denotamos por  $Q_h$  el subconjunto convexo:

$$Q_h = \{p_h \in P_h / p_{h|e_i^l} \leq 0, 1 \leq i \leq m_h\}.$$

Sea  $B$  el operador:

$$\begin{aligned} B : V_h &\longrightarrow P_h \\ \mathbf{v}_h &\longmapsto B(\mathbf{v}_h) = p_h, \end{aligned}$$

definido como:

$$p_{h|e_i^l} = \mathbf{v}_{h|e_i^l}^l \mathbf{n}_{e_i^l}^l + \mathbf{v}_{h|e_i^r}^r \mathbf{n}_{e_i^r}^r, \forall a_i^l \in \mathcal{S}_h^l,$$

y  $B^*$  su operador adjunto.

Sean  $I_{V_{ad_h}}$  e  $I_{Q_h}$  las funciones indicatrices de  $V_{ad_h}$  y  $Q_h$  respectivamente. Por definición de  $I_{V_{ad_h}}$  y  $I_{Q_h}$  se tiene:

$$I_{V_{ad_h}} = I_{Q_h} \circ B, \quad (4.4.8)$$

y, de la regla de la cadena del cálculo subdiferencial, se deduce:

$$\partial(I_{V_{ad_h}})(\mathbf{v}_h) = B^*(\partial I_{Q_h})(B(\mathbf{v}_h)), \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \quad (4.4.9)$$

puesto que  $(Q_h)^\circ \neq \emptyset$ .

**Proposición 4.4.1** Dadas  $\mathbf{u}_h^j \in V_{ad_h}$  y  $\boldsymbol{\sigma}_h^j \in E_h$ , verifican

$$-\rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h^j - \boldsymbol{\varepsilon}_h^*(\boldsymbol{\sigma}_h^j) + \mathbf{F}_h \in B^*(\partial I_{Q_h})(B(\mathbf{u}_h^j)), \quad (4.4.10)$$

si y sólo si son solución de la inecuación variacional (4.4.5), siendo  $\mathbf{F}_h$  el elemento de  $V_h'$  definido por:

$$\mathbf{F}_h(\mathbf{v}_h) = \int_{\Omega} \rho_0 \omega^2 \mathbf{u}^P(t_j)_h \cdot \mathbf{v}_h dV_X - \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_h^*(\boldsymbol{\sigma}^P(t_j)_h) \cdot \mathbf{v}_h dV_X.$$

*Demostración.* Por definición de  $\boldsymbol{\varepsilon}_h^*$ , la inecuación (4.4.5) se expresa como:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h^j \cdot (\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^j) dV_X + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_h^*(\boldsymbol{\sigma}_h^j) \cdot (\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^j) dV_X \\ & \geq \int_{\Omega} \rho_0 \omega^2 \mathbf{u}^P(t_j)_h \cdot (\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^j) dV_X - \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_h^*(\boldsymbol{\sigma}_h^P(t_j)) \cdot (\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^j) dV_X, \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_{ad_h}. \end{aligned}$$

Por definición de la función  $I_{V_{ad_h}}$ , la inecuación anterior se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h^j \cdot (\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^j) dV_X + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_h^*(\boldsymbol{\sigma}_h^j) \cdot (\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^j) dV_X - I_{V_{ad_h}}(\mathbf{u}_h^j) + I_{V_{ad_h}}(\mathbf{v}_h) \\ & \geq \int_{\Omega} \rho_0 \omega^2 \mathbf{u}^P(t_j)_h \cdot (\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^j) dV_X - \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_h^*(\boldsymbol{\sigma}_h^P(t_j)_h) \cdot (\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^j) dV_X \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \end{aligned}$$

que, en notación subdiferencial, es equivalente a:

$$-\rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h^j - \boldsymbol{\varepsilon}_h^*(\boldsymbol{\sigma}_h^j) + \mathbf{F}_h \in \partial I_{V_{ad_h}}(\mathbf{u}_h^j).$$

Por la regla de la cadena (4.4.9), se concluye que esta relación es equivalente a:

$$-\rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h^j - \boldsymbol{\varepsilon}_h^*(\boldsymbol{\sigma}_h^j) + \mathbf{F}_h \in B^*(\partial I_{Q_h})(B(\mathbf{u}_h^j)).$$

□

**Proposición 4.4.2** Si  $\mathbf{u}_h^j \in V_{ad_h}$  y  $\boldsymbol{\sigma}_h^j \in E_h$  verifican la ecuación (4.4.10) entonces también cumplen que:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h^j \cdot \mathbf{v}_h dV_X + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_h^j : \boldsymbol{\varepsilon}_h(\mathbf{v}_h) dV_X + \int_{\Gamma_C^l} \gamma_c B(\mathbf{u}_h^j) B(\mathbf{v}_h) dA_X \\ & = \mathbf{F}_h(\mathbf{v}_h) - \int_{\Gamma_C^l} p_h^j B(\mathbf{v}_h) dA_X, \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \end{aligned}$$

donde

$$p_h^j = \frac{1}{\lambda_c} \left[ B(\mathbf{u}_h^j) + \lambda_c p_h^j - \Pi_{Q_h} \left( \frac{B(\mathbf{u}_h^j) + \lambda_c p_h^j}{1 - \lambda_c \gamma_c} \right) \right],$$

siendo  $\Pi_{Q_h}$  la proyección ortogonal sobre  $Q_h$  y  $\lambda_c$  y  $\gamma_c$  números reales positivos tales que  $0 \leq \lambda_c \gamma_c < 1$ . El recíproco también se verifica.

*Demostración.* Si  $\mathbf{u}_h^j \in V_{ad_h}$  y  $\boldsymbol{\sigma}_h^j \in E_h$  verifican (4.4.10), entonces existe  $\tilde{p}_h^j \in (\partial I_{Q_h})(B(\mathbf{u}_h^j))$  tal que:

$$-\rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h^j - \boldsymbol{\varepsilon}_h^*(\boldsymbol{\sigma}_h^j) + \mathbf{F}_h = B^*(\tilde{p}_h^j). \quad (4.4.11)$$

Dado  $\gamma_c \in \mathbb{R}, \gamma_c \geq 0$ , definimos el elemento de  $P_h$

$$p_h^j = \tilde{p}_h^j - \gamma_c B(\mathbf{u}_h^j) \in (\partial I_{Q_h})^{\gamma_c}(B(\mathbf{u}_h^j)), \quad (4.4.12)$$

siendo  $(\partial I_{Q_h})^{\gamma_c}$  el operador perturbado de  $\partial I_{Q_h}$  de valor  $\gamma_c$ .

Puesto que el operador subdiferencial de la función indicatriz de un conjunto convexo es maximal monótono, por las propiedades de estos operadores se tiene:

$$p_h^j \in (\partial I_{Q_h})^{\gamma_c}(B(\mathbf{u}_h^j)) \Leftrightarrow p_h^j = (\partial I_{Q_h})_{\lambda_c}^{\gamma_c}(B(\mathbf{u}_h^j) + \lambda_c p_h^j),$$

donde  $(\partial I_{Q_h})_{\lambda_c}^{\gamma_c}$  es la aproximación de Yosida de parámetro  $\lambda_c$  del operador  $(\partial I_{Q_h})^{\gamma_c}$ , siendo  $\lambda_c \gamma_c < 1$ .

Combinando (4.4.11) y (4.4.12), y utilizando la linealidad de  $B^*$ , deducimos

$$-\rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h^j - \boldsymbol{\varepsilon}_h^*(\boldsymbol{\sigma}_h^j) + \mathbf{F}_h = B^*(p_h^j) + \gamma_c B^*(B(\mathbf{u}_h^j)),$$

o, equivalentemente,

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h^j + \boldsymbol{\varepsilon}_h^*(\boldsymbol{\sigma}_h^j) + \gamma_c B^*(B(\mathbf{u}_h^j)) = \mathbf{F}_h - B^*(p_h^j).$$

Entonces:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h^j \cdot \mathbf{v}_h \, dV_X + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_h^j : \boldsymbol{\varepsilon}_h(\mathbf{v}_h) \, dV_X + \int_{\Gamma_C^l} \gamma_c B(\mathbf{u}_h^j) B(\mathbf{v}_h) \, dA_X \\ & = F(\mathbf{v}_h) - \int_{\Gamma_C^l} p_h^j B(\mathbf{v}_h) \, dA_X, \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \end{aligned}$$

donde  $p_h^j = (\partial I_{Q_h})_{\lambda_c}^{\gamma_c}(B(\mathbf{u}_h^j) + \lambda_c p_h^j)$ .

Puesto que  $(\partial I_{Q_h})_{\lambda_c} = \frac{I - \Pi_{Q_h}}{\lambda_c}$ , obtenemos que:

$$p_h^j = \frac{1}{\lambda_c} \left[ B(\mathbf{u}_h^j) + \lambda_c p_h^j - \Pi_{Q_h} \left( \frac{B(\mathbf{u}_h^j) + \lambda_c p_h^j}{1 - \lambda_c \gamma_c} \right) \right].$$

El recíproco se demuestra fácilmente teniendo en cuenta las propiedades de los operadores subdiferenciales.

Tenemos que resolver entonces el siguiente problema variacional:

**PROBLEMA (DP<sup>R</sup>PV):** Hallar  $\mathbf{u}_h^j \in W^{2,\infty}(0, T; V_{ad_h})$  y  $\boldsymbol{\sigma}_h^j \in W^{1,\infty}(0, T; E_h)$ ,  $j = 1, \dots, 2^l$ , verificando:

$$\int_{\Omega} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h^j \cdot \mathbf{v}_h dV_X + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_h^j : \boldsymbol{\varepsilon}_h(\mathbf{v}_h) dV_X + \int_{\Gamma_C^l} \gamma_c B(\mathbf{u}_h^j) B(\mathbf{v}_h) dA_X \quad (4.4.13)$$

$$= F(\mathbf{v}_h) - \int_{\Gamma_C^l} p_h^j B(\mathbf{v}_h) dA_X, \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h,$$

$$p_h^j = \frac{1}{\lambda_c} \left[ B(\mathbf{u}_h^j) + \lambda_c p_h^j - \Pi_{Q_h} \left( \frac{B(\mathbf{u}_h^j) + \lambda_c p_h^j}{1 - \lambda_c \gamma_c} \right) \right], \quad (4.4.14)$$

$$\mathbf{u}_h^0 = (\mathbf{u}_0)_h - \mathbf{u}_h^{P1}, \quad \dot{\mathbf{u}}_h^0 = (\mathbf{u}_1)_h - \omega \mathbf{u}_h^{P2} \quad \text{en } \Omega, \quad (4.4.15)$$

junto con la ley constitutiva (4.4.7) y con  $\ddot{\mathbf{u}}_h^j$  relacionada con  $\mathbf{u}_h^j$  a través de la ecuación (4.1.38).

Supongamos ahora que  $\gamma_c = 0$  y denotemos por

$$G_{\lambda_c}(B(\mathbf{u}_h^j) + \lambda_c p_h^j) = \frac{1}{\lambda_c} \left[ B(\mathbf{u}_h^j) + \lambda_c p_h^j - \Pi_{Q_h} (B(\mathbf{u}_h^j) + \lambda_c p_h^j) \right].$$

Entonces, la formulación variacional (4.4.13)–(4.4.14), para  $\gamma_c = 0$ , toma la forma

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h^j \cdot \mathbf{v}_h dV_X + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_h^j : \boldsymbol{\varepsilon}_h(\mathbf{v}_h) dV_X \\ & = \mathbf{F}_h(\mathbf{v}_h) - \int_{\Gamma_C^l} p_h^j B(\mathbf{v}_h) dA_X, \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

siendo  $p_h^j$  la solución de la ecuación no lineal

$$p_h^j = G_{\lambda_c}(B(\mathbf{u}_h^j) + \lambda_c p_h^j). \quad (4.4.17)$$

Para resolver la ecuación (4.4.17) seguiremos el trabajo de P.Barral, C. Moreno, P. Quintela y M.T. Sánchez [7], quienes usan un método de Newton generalizado basándose en las propiedades Lipschitzianas de  $G_{\lambda_c}$ .

Para calcular una aproximación de la solución  $(\mathbf{u}_h^j, \boldsymbol{\sigma}_h^j, p_h^j)$  en el instante  $t_j$  se utiliza un algoritmo iterativo a partir de los valores iniciales  $(\mathbf{u}_{h0}^j, \boldsymbol{\sigma}_{h0}^j, p_{h0}^j)$ , calculando sucesivas aproximaciones  $(\mathbf{u}_{hk}^j, \boldsymbol{\sigma}_{hk}^j, p_{hk}^j)$ . Para ello consideraremos los siguientes conjuntos de aristas en la frontera:

$$\Gamma_{C,k}^{sl+} = \{e \in \mathcal{S}_h^l; B(\mathbf{u}_{hk}^j) + \lambda_c p_{hk}^j > 0\}, \quad (4.4.18)$$

$$\Gamma_{C,k}^{sl-} = \{e \in \mathcal{S}_h^l; B(\mathbf{u}_{hk}^j) + \lambda_c p_{hk}^j \leq 0\}, \quad (4.4.19)$$

los cuales aproximan la zona de contacto efectivo y su complementario en  $\Gamma_C^l$ , respectivamente.

Denotando por  $s_{hk}^j = B(\mathbf{u}_{hk}^j) + \lambda_c p_{hk}^j$  y  $p_{hk-1/2}^j = G_{\lambda_c}(s_{hk-1}^j)$  podemos aproximar  $p_{hk}^j$  como (ver [7]):

$$p_{hk}^j = \begin{cases} 0, & \text{sobre } \Gamma_{C,k-1}^{sl-} \\ p_{hk-1/2}^j + (s_{hk}^j - s_{hk-1}^j)/\lambda_c, & \text{sobre } \Gamma_{C,k-1}^{sl+}. \end{cases}$$

Entonces, el multiplicador  $p_{hk}^j$  se aproxima por cero sobre  $\Gamma_{C,k-1}^{sl-}$  y por

$$p_{hk}^j = \frac{1}{\lambda_c} B(\mathbf{u}_{hk}^j) + p_{hk}^j,$$

sobre  $\Gamma_{C,k-1}^{sl+}$ . Pero esta igualdad sólo se obtiene si se verifica que

$$B(\mathbf{u}_{hk}^j) = 0 \text{ sobre } \Gamma_{C,k-1}^{sl+}.$$

Así, sobre  $\Gamma_{C,k-1}^{sl-}$  no hay tensiones normales, y sobre  $\Gamma_{C,k-1}^{sl+}$  el desplazamiento normal total debe ser nulo. Calcularemos entonces el multiplicador  $p_{hk}^j$  sobre  $\Gamma_{C,k-1}^{sl+}$  en dos pasos con el siguiente algoritmo:

### Algoritmo en espacio

- Dados  $(\mathbf{u}_{hk-1}^j, \boldsymbol{\sigma}_{hk-1}^j, p_{hk-1}^j)$ , calculamos  $(\mathbf{u}_{hk}^j, \boldsymbol{\sigma}_{hk}^j)$  tal que:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_{hk}^j \cdot \mathbf{v}_h dV_X + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{hk}^j : \boldsymbol{\varepsilon}_h(\mathbf{v}_h) dV_X \\ & = \mathbf{F}_h(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \quad B(\mathbf{v}_h) = 0 \text{ sobre } \Gamma_{C,k-1}^{sl+}, \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

$$B(\mathbf{u}_{kh}^j) = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_{C,k-1}^{sl+}, \quad (4.4.21)$$

junto con la ley constitutiva (4.4.7).

Puesto que la condición (4.4.21) puede acoplar las componentes del desplazamiento, para imponer esta condición usamos un método de penalización; así la ecuación (4.4.20) queda:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_{hk}^j \cdot \mathbf{v}_h dV_X + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{hk}^j : \boldsymbol{\varepsilon}_h(\mathbf{v}_h) dV_X + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Gamma_{C,k-1}^{sl+}} B(\mathbf{u}_{hk}^j) B(\mathbf{v}_h) dA_X \\ & = \mathbf{F}_h(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

donde  $\epsilon$  es un parámetro positivo pequeño.

- Conocidos  $(\mathbf{u}_{hk}^j, \sigma_{hk}^j)$  y dado que  $p_{hk}^j = 0$  sobre  $\Gamma_{C,k-1}^{sl-}$ , calculamos  $p_{hk}^j$  sobre  $\Gamma_{C,k-1}^{sl+}$ . Teniendo en cuenta la relación (4.4.16) obtenemos que:

$$\int_{\Gamma_{C,k-1}^{sl+}} p_{hk}^j B(\mathbf{v}_h) dA_X = \frac{1}{\epsilon} \int_{\Gamma_{C,k-1}^{sl+}} B(\mathbf{u}_{hk}^j) B(\mathbf{v}_h) dA_X \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \quad (4.4.23)$$

de donde se deduce que podemos calcular  $p_{hk}^j$  como:

$$p_{hk}^j = \frac{1}{\epsilon} B(\mathbf{u}_{hk}^j). \quad (4.4.24)$$

#### 4.4.2.1. Resolución en aceleraciones

Consideramos ahora la resolución de la ecuación (4.4.22) en aceleraciones utilizando las propiedades de la discretización en tiempo del método de Newmark considerada. Se omite el subíndice  $k$  para simplificar la notación. La ecuación (4.4.22) se puede expresar en forma matricial como:

$$M\ddot{\mathbf{u}}_h^j + (K + P)\mathbf{u}_h^j = \mathbf{F}_h^j, \quad j = 1, \dots, 2^l, \quad (4.4.25)$$

donde  $M$  es la matriz de masa,  $K$  la matriz de rigidez,  $P$  la matriz de penalización debida al término integral sobre  $\Gamma_{C,k-1}^{sl+}$  y  $\mathbf{F}_h$  el vector de fuerzas aplicadas. El vector de desplazamientos será  $\mathbf{u}_h^j$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_h^j$  el de velocidades y  $\ddot{\mathbf{u}}_h^j$  el de aceleraciones relacionados entre ellos por las expresiones (4.1.38)–(4.1.39). Las matrices  $M$ ,  $K$  y  $P$  son simétricas. Además,  $M$  es definida positiva, ya que la densidad se supone constante y mayor que cero;  $K$  también es definida positiva, puesto que los coeficientes de Lamé del material son positivos. La implementación se efectúa en aceleraciones, y para ello se llevan a cabo los siguientes pasos:

- Definimos los predictores:

$$\tilde{\mathbf{u}}_h^{j+1} = \mathbf{u}_h^j + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_h^j + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\beta) \ddot{\mathbf{u}}_h^j, \quad (4.4.26)$$

$$\tilde{\dot{\mathbf{u}}}_h^{j+1} = \dot{\mathbf{u}}_h^j + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_h^j, \quad (4.4.27)$$

de donde se deduce que

$$\mathbf{u}_h^{j+1} = \tilde{\mathbf{u}}_h^{j+1} + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_h^{j+1}, \quad (4.4.28)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_h^{j+1} = \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_h^{j+1} + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_h^{j+1}. \quad (4.4.29)$$

- Sustituyendo los valores de  $\mathbf{u}_h^{j+1}$  y  $\dot{\mathbf{u}}_h^{j+1}$  en la ecuación (4.4.25) para el instante  $t_{j+1}$ , obtenemos la expresión de la aceleración en función de los predictores:

$$(M + \beta\Delta t^2(K + P))\ddot{\mathbf{u}}_h^{j+1} = \mathbf{F}_h^{j+1} - (K + P)\tilde{\mathbf{u}}_h^{j+1}. \quad (4.4.30)$$

- Calculado  $\ddot{\mathbf{u}}_h^{j+1}$  podemos calcular los desplazamientos y velocidades en el paso  $j+1$  usando las expresiones (4.4.28)–(4.4.29).

## 4.5. Resultados numéricos

En esta sección se presentan los resultados numéricos obtenidos para un ejemplo académico en el que los desplazamientos son discontinuos, así como la propagación de ondas de Rayleigh sobre una placa con grieta, cuyos desplazamientos se compararán con los resultados obtenidos en el capítulo anterior.

### 4.5.1. Test discontinuo

Probamos a continuación el algoritmo para un caso discontinuo que presenta contacto en una parte de la grieta. Las dimensiones de la placa en este caso serán

$$l_1 = 20 \text{ m}, \quad l_2 = 16 \text{ m}, \quad (4.5.1)$$

y supondremos, como antes, que la frontera  $\Gamma$  está dividida en  $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_D^* \cup \bar{\Gamma}_C \cup \bar{\Gamma}_N \cup \bar{\Gamma}_N^*$  según las condiciones de contorno que se imponen en cada zona. A continuación describimos cada una de ellas.

- La grieta será el segmento

$$\Gamma_C = \{\mathbf{x} = (x, y); x = 20/3, -2 < y < 0\},$$

denotando por  $(x_0, y_0)$  las coordenadas del vértice de la grieta, i.e.,  $(x_0, y_0) = (20/3, -2)$ .

Las condiciones de contorno que consideraremos sobre la grieta,  $\Gamma_C$ , son las siguientes:

- Condición de no interpenetración

$$[u_n] \leq 0.$$

- Continuidad en los esfuerzos normales

$$\sigma_n^l = \sigma_n^r = \sigma_n.$$

- Esfuerzos normales de presión

$$\sigma_n \leq 0.$$

- Esfuerzos cortantes conocidos

$$\boldsymbol{\sigma}_T = \mathbf{h},$$

donde  $\mathbf{h}$  viene dada por

$$\mathbf{h}^l = \begin{cases} \mathbf{0} & y \leq y_0, \\ -2\mu(y - y_0)\mathbf{e}_2 & y > y_0, \end{cases}$$

$$\mathbf{h}^r = \begin{cases} \mathbf{0} & y \leq y_0, \\ \mu(y - y_0)\mathbf{e}_2 & y_0 \leq y \leq y_0 + 1, \\ \mu\mathbf{e}_2 & y > y_0 + 1. \end{cases}$$

donde  $\mathbf{e}_i$  denota el  $i$ -ésimo vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^2$ .

- Se pide también la condición:

$$\sigma_n[u_n] = 0.$$

- Además, en la frontera

$$\Gamma_N \cup \Gamma_N^* = \{\mathbf{x} \in \partial\Omega; 0 < x < l_1, y = 0\} \cup \{\mathbf{x} \in \partial\Omega; x = l_1, -l_2 < y < 0\},$$

consideraremos esfuerzos conocidos  $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \mathbf{s}_0$  sobre  $\Gamma_N$  y  $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \mathbf{s}_0^*$  sobre  $\Gamma_N^*$  siendo

$$\mathbf{s}_0 = \begin{cases} -2\mu(y - y_0)\mathbf{e}_1 & x \leq x_0, \\ -\mu\mathbf{e}_1 & x > x_0, \end{cases} \quad \text{para } y = 0.$$

$$\mathbf{s}_0^* = \begin{cases} \mathbf{0} & y \leq y_0, \\ -\mu(y - y_0)\mathbf{e}_2 & y_0 \leq y \leq y_0 + 1, \\ -\mu\mathbf{e}_2 & y > y_0 + 1, \end{cases} \quad \text{para } x = l_1.$$

- $\Gamma_D$  representa la parte de frontera restante, formada por

$$\Gamma_D = (\Gamma \setminus (\Gamma_N \cup \Gamma_N^* \cup \Gamma_C))^\circ,$$

y donde se suponen los desplazamientos siguientes:

$$\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{u}^D(x, y) = \begin{cases} \mathbf{0} & y \leq y_0, \\ -(y - y_0)^2 \mathbf{e}_1 & y > y_0. \end{cases}$$

Con estas condiciones de contorno, el problema a resolver es el siguiente

$$-\text{Div } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{b}_0 \quad \text{en } \Omega_s, \quad (4.5.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{s}_0 \quad \text{sobre } \Gamma_N, \quad (4.5.3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{s}_0^* \quad \text{sobre } \Gamma_N^*, \quad (4.5.4)$$

$$\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{u}^D(x, y) \quad \text{sobre } \Gamma_D \cup \Gamma_D^*, \quad (4.5.5)$$

$$[u_n] \leq 0 \quad \text{sobre } \Gamma_C, \quad (4.5.6)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_T = \mathbf{h} \quad \text{sobre } \Gamma_C, \quad (4.5.7)$$

$$[\sigma_n] = 0, \quad \sigma_n \leq 0 \quad \text{sobre } \Gamma_C, \quad (4.5.8)$$

$$\sigma_n [u_n] = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_C, \quad (4.5.9)$$

donde

$$\mathbf{b}_0 = \begin{cases} \mathbf{0} & y \leq y_0, \quad \forall x, \\ 2\mu \mathbf{e}_1 & y > y_0, \quad x \leq x_0, \\ \mu \mathbf{e}_1 & y_0 \leq y \leq y_0 + 1, \quad x \geq x_0, \\ \mathbf{0} & y > y_0 + 1, \quad x \geq x_0. \end{cases}$$

La solución del problema planteado es:

$$\mathbf{u}^l = \begin{cases} \mathbf{0} & y \leq y_0, \\ -(y - y_0)^2 \mathbf{e}_1 & y > y_0, \end{cases}$$

$$\mathbf{u}^r = \begin{cases} \mathbf{0} & y \leq y_0, \\ -\frac{(y - y_0)^2}{2} \mathbf{e}_1 & y_0 \leq y \leq y_0 + 1, \\ (-(y - y_0)^2 + 1/2) \mathbf{e}_1 & y > y_0 + 1, \end{cases}$$

donde  $\mathbf{u}^l$  es la solución para  $x \leq x_0$  y  $\mathbf{u}^r$  es la solución para  $x \geq x_0$ .

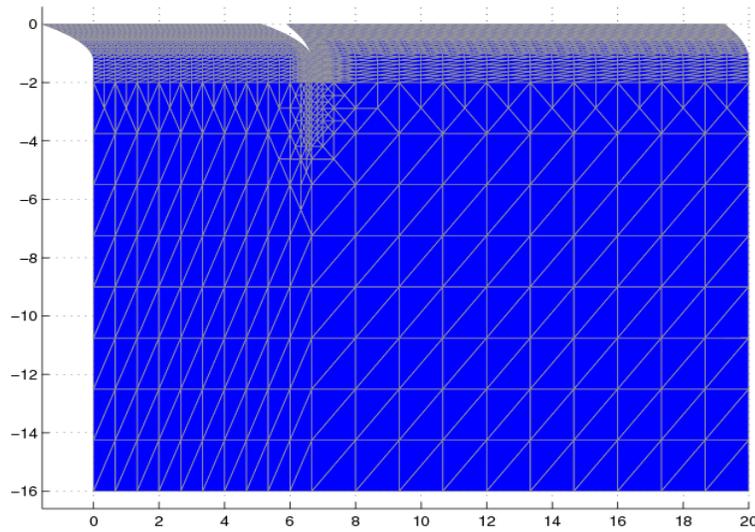


Figura 4.5.1: Solución aproximada sobre la configuración deformada

Para este desplazamiento, el tensor de tensiones calculado a partir de la ley de Hooke (3.1.6) viene dado por:

- Si  $y \leq y_0$ ,  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ .

- Para  $y > y_0$  y  $x \leq x_0$

$$\boldsymbol{\sigma}^l = -2\mu(y - y_0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Para  $y_0 \leq y \leq y_0 + 1$  y  $x \geq x_0$

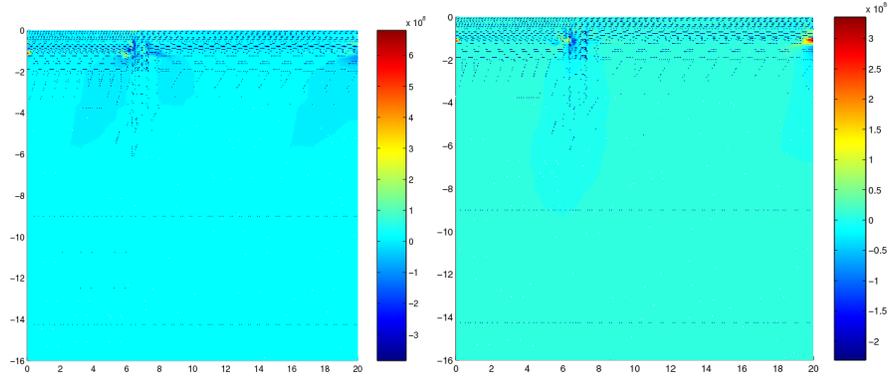
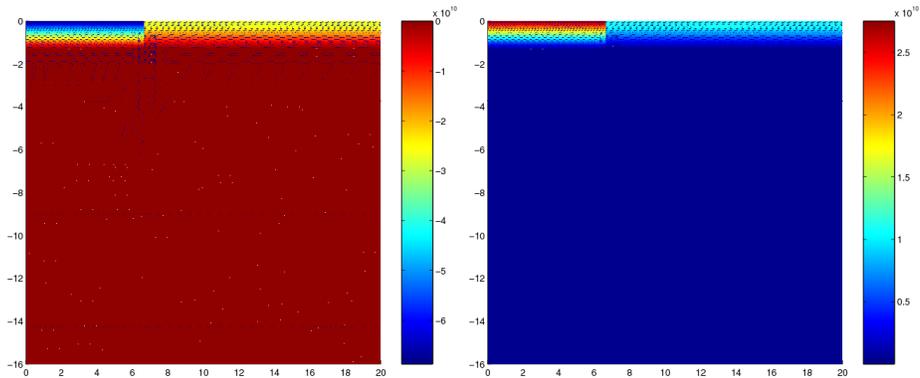
$$\boldsymbol{\sigma}^r = -\mu(y - y_0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Para  $y \geq y_0 + 1$  y  $x \geq x_0$

$$\boldsymbol{\sigma}^r = -\mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es claro que para  $\boldsymbol{\sigma}$  así definida se cumple que

$$\sigma_n^l = \sigma_n^r \quad \text{sobre } \Gamma_C.$$

Figura 4.5.2: Tensión en  $x$  e  $y$  sobre la configuración de referenciaFigura 4.5.3: Tensión en  $xy$  sobre la configuración de referencia y norma Von Mises de las tensiones

Veremos ahora que  $\sigma_n = \sigma_n^l = \sigma_n^r \leq 0$ . Como  $\mathbf{n} = (1, 0, 0)^t$  sobre  $\Gamma_C^l$ ,  $\sigma_n = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \sigma_{11}$ , entonces  $\sigma_n = 0$  y, por tanto, trivialmente,

$$\sigma_n \leq 0 \quad \text{sobre } \Gamma_C.$$

Vamos a probar que  $\boldsymbol{\sigma}_T = \mathbf{h}$ . Por definición  $\boldsymbol{\sigma}_T = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \sigma_n \mathbf{n}$  y, por tanto,

$$\boldsymbol{\sigma}_T = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix} = \mathbf{h} \quad \text{sobre } \Gamma_C.$$

Para las pruebas consideramos una malla de 4445 nodos y 8500 elementos. Al igual que en el caso continuo, se utilizaron también distintos valores para el

$\epsilon$	error relativo en $L^2$	error absoluto en grieta	iteración
1.E-03	0.0032	0.0015	3
1.E-10	0.0032	0.0015	5
1.E-20	0.0032	0.0015	17
1.E-30	0.0032	0.0015	10

Tabla 4.5.1: Errores para el test para distintos valores del parámetro de penalización

parámetro  $\epsilon$  de penalización (ver tabla 4.5.1). Como se puede ver, los errores cometidos en la aproximación no cambian al variar el  $\epsilon$  de la penalización, pero sí hay diferencia en el número de iteraciones necesarias para obtener convergencia.

La solución aproximada obtenida se puede ver en la figura 4.5.1 y las distintas componentes de las tensiones y su norma Von Mises, en las Figuras 4.5.2 y 4.5.3.

#### 4.5.2. Simulación numérica de la propagación de una onda de Rayleigh en una placa con grieta.

En esta sección consideramos un sólido acotado  $\mathcal{B}$  cuyo interior es un dominio,  $\Omega$ , de la forma  $\Omega = \Omega_s \times [0, l_3]$ , siendo  $\Omega_s = (\pi/4, \pi/4 + 0.026) \times (-0.02, 0)$  con un defecto superficial en  $X_1 = \pi/4 + 0.0087$  de profundidad 0.0025 m. Simulamos el comportamiento de la onda de Rayleigh con el algoritmo propuesto en las secciones anteriores para uno o varios ciclos de onda. La frontera  $\Gamma_D \equiv [X_1 = \pi/4]$  se somete a excitación por medio de la onda de Rayleigh (3.2.66), y la frontera  $\Gamma_D^* \equiv [X_3 = -0.02]$  está fija.

Las restantes fronteras se suponen libres de esfuerzos. Como en la Sección 3.7.2.2, las condiciones iniciales se corresponden con el impulso dado por la solución pseudoestática. La malla considerada es más fina en la superficie y cerca de la grieta para tener en cuenta las singularidades y la propagación de

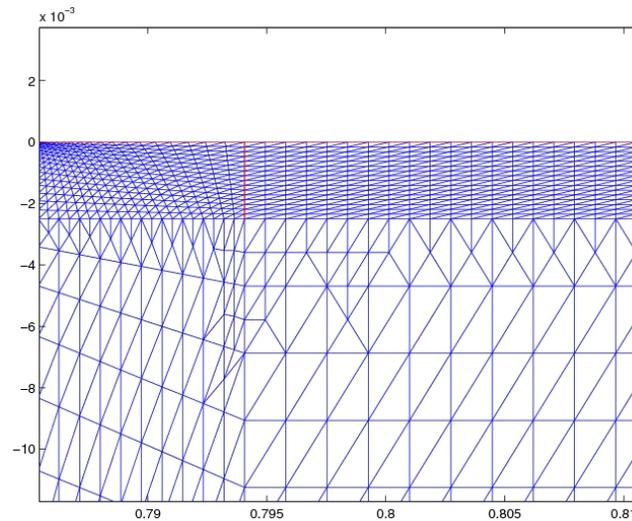


Figura 4.5.4: Malla para la placa con grieta.

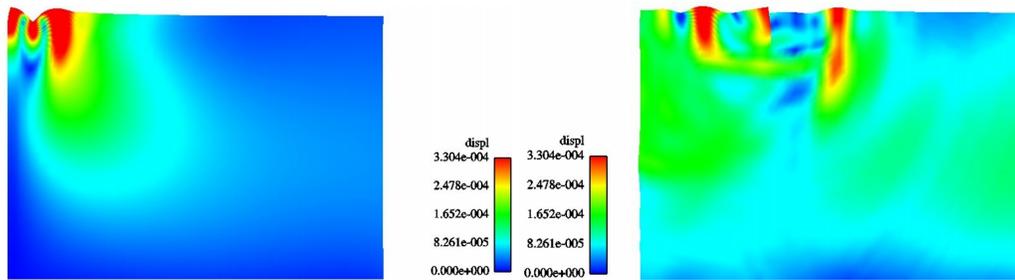


Figura 4.5.5: Propagación de un ciclo de onda de Rayleigh antes y después de alcanzar la grieta

la onda (ver Figura 4.5.4).

En la Figura 4.5.5 se muestra la simulación correspondiente a la propagación de un ciclo antes de sobrepasar la grieta y una vez que la onda ha superado la grieta y es visible el efecto de la refracción. En la Figura 4.5.6 podemos ver el desplazamiento de múltiples ciclos de una onda de Rayleigh en una placa con grieta y un zoom sobre la región más cercana a la grieta.

Finalmente, realizamos la comparación de la propagación de un tren de ondas de Rayleigh en una placa con grieta con la expresión teórica de la onda de

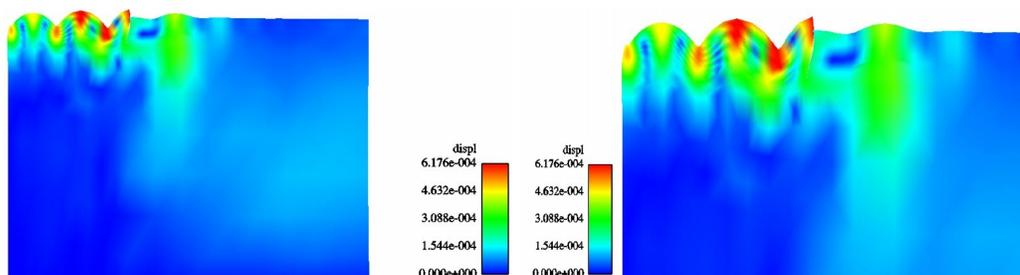


Figura 4.5.6: Propagación varios ciclos de una onda de Rayleigh

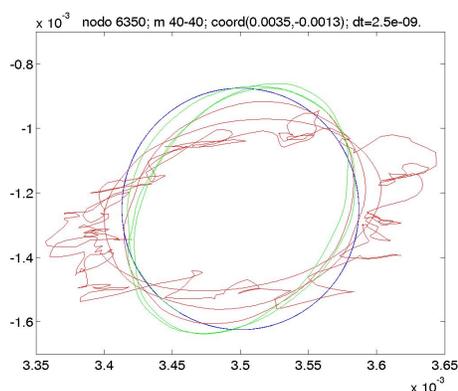


Figura 4.5.7: Trayectorias de un punto cerca de la superficie

Rayleigh. Así, en la Figura 4.5.7 se muestran las trayectorias asociadas a un punto cercano a la grieta en los tres casos siguientes; en azul se muestra la trayectoria teórica correspondiente a la propagación de una onda de Rayleigh sobre un cuerpo plano sin defectos, en verde la trayectoria obtenida en la simulación de la onda en una placa sin grieta, como se mostró en la Figura 3.7.3 y en rojo la trayectoria obtenida en la simulación de la propagación en una onda con grieta.

La comparación en dos instantes de tiempo de los desplazamientos sobre la superficie de la placa puede verse en las Figuras 4.5.8 y 4.5.9. En la primera se muestran los desplazamientos en el instante  $t = 1.6\text{E}-6$  s, antes de que la onda alcance la grieta, situada en la abscisa  $x = 0.7942$ . Puede verse que los ciclos generados aproximan los de la onda de Rayleigh teórica y que los puntos de mayor abscisa que la grieta están en reposo. La segunda imagen corresponde

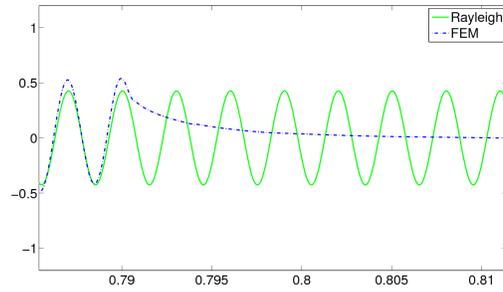


Figura 4.5.8: Desplazamientos sobre la superficie de la placa en el instante  $t = 1.6E-6$  s.

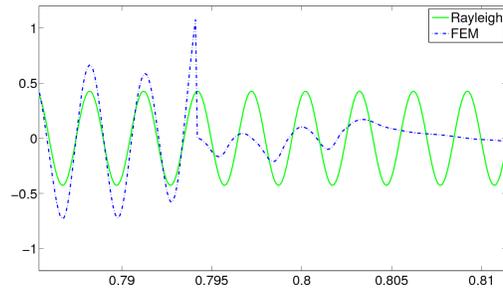


Figura 4.5.9: Desplazamientos sobre la superficie de la placa en el instante  $t = 6.E-6$  s.

al instante  $t = 6.E-6$  s cuando la onda ya ha sobrepasado la grieta. Puede apreciarse claramente la disminución de la amplitud en la onda transmitida, y cómo la onda reflejada se acopla con la incidente, dando lugar a ciclos de distintas amplitudes en puntos situados antes de la grieta.

# Capítulo 5

## Mecánica de Fractura

Tradicionalmente, en el diseño estructural se utilizaban dos conceptos para prevenir el colapso de una estructura: la tensión prevista para la estructura y la resistencia mecánica de los materiales que la conforman. Un material se suponía adecuado si su resistencia mecánica era mayor que las tensiones que se esperaba sufriese la estructura, incorporando por supuesto un factor de seguridad. Con el desarrollo de la mecánica de la fractura se incorporan otros conceptos al estudio, en particular, el tamaño de los defectos, y la tenacidad de fractura, que mide la resistencia a la propagación de grietas. También se establecen criterios de crecimiento de grietas, tanto energéticos como locales y se estudian métodos para determinar en qué dirección se produce la propagación de una grieta.

En este capítulo realizaremos un repaso de algunos de estos conceptos de mecánica de la fractura, como son los modos de ruptura o los factores de intensidad de esfuerzos, así como algunos criterios de crecimiento de grietas. Se obtendrán los potenciales que permiten calcular la expresión asintótica de las tensiones en el vértice de una grieta en propagación, y como caso particular se deducirá la expresión asintótica de los desplazamientos y las tensiones en el vértice de una grieta estacionaria.

## 5.1. Conceptos fundamentales en fractura

En esta sección expondremos varios conceptos relacionados con la fractura de materiales, realizaremos un repaso de los tipos de fractura, las causas más comunes de los fallos estructurales y los distintos enfoques a la hora de estudiar la fractura de materiales.

En primer lugar, distinguimos dos tipos de fractura, que conlleva la clasificación de los materiales en dos grupos, en función de las características típicas de su fallo:

- *Fractura frágil*: es el tipo de fractura que presentan los materiales cerámicos, vidrios o metales a bajas temperaturas, y se caracteriza por:
  - El comportamiento plástico es prácticamente inexistente antes del fallo.
  - Las dos caras de la superficie fracturada encajan perfectamente después de producirse la fractura.
  - La fractura puede ser concoidea, si no sigue un plano de separación, o una exfoliación, que se produce a lo largo de ciertos planos cristalográficos.
- *Fractura dúctil*: presente en metales o polímeros a altas temperaturas, se caracteriza por:
  - La curva de comportamiento plástico es larga antes de la ruptura.
  - Hay evidencias antes de la ruptura de un estrechamiento de la muestra del material.
  - Las superficies de fractura no encajan bien después de la ruptura.
  - La superficie fracturada es rugosa e incluye pequeñas cavidades.

El análisis de fractura puede realizarse de varios modos:

- *Estático*, si se estudia la singularidad del tensor de tensiones.

- *Quasi-estático*, si se pretende analizar la propagación de grietas. Una grieta será estable si requiere más energía para propagarse, en cambio, si la propagación ocurre hasta el fallo completo, sin carga adicional, la grieta será inestable.
- *Dinámico*, si se consideran problemas con altas velocidades, problemas de impacto, etc.

El colapso de un material puede producirse por diversas causas:

- La *fatiga*: fenómeno por el cual la rotura de los materiales sometidos a cargas dinámicas cíclicas se produce ante cargas inferiores a las cargas estáticas que producirían la rotura.
- *Debilitamiento ambiental*: el fallo prematuro del material se produce debido a efectos ambientales como la humedad, las altas temperaturas, o la presencia de agentes corrosivos.
- *Defectos microestructurales* en materiales dúctiles: este tipo de fractura se estudia mediante modelos de daño.
- Crecimiento de *defectos macroscópicos* como grietas. En este caso se estudia el comportamiento de las grietas, criterios de estabilidad, crecimiento y resistencia a la propagación.

En este capítulo nos centraremos en el estudio quasi-estático de defectos macroscópicos, realizaremos un repaso general de varios criterios de propagación y resolveremos algún caso particular.

## 5.2. Modos de ruptura

Una grieta se produce por la separación irreversible de un medio continuo en dos partes, lo que introduce una discontinuidad en el campo de desplazamientos. Las dos nuevas superficies que aparecen durante la formación de una grieta

se denominan labios; la intersección de los dos labios constituye el vértice de la grieta, también llamado tip. Los posibles movimientos de los labios de una grieta son la combinación de tres modos independientes:

- El *modo I*: modo de apertura, corresponde al modo normal de separación de las caras de la grieta bajo la acción de tensiones en la dirección normal a la grieta. Origina desplazamientos de los labios también perpendiculares al plano de la grieta.
- El *modo II*: modo de cizallamiento plano o deslizamiento, se corresponde al desplazamiento de los labios bajo la acción de tensiones de corte paralelas al plano de la grieta y perpendiculares a su frente. Origina desplazamientos en la misma dirección
- El *modo III*: modo de cizallamiento antiplano o rasgadura, se produce por deslizamiento y cizalladura de los labios de la fisura, en una dirección paralela al frente de grieta.

Los desplazamientos correspondientes a cada uno de los tres modos pueden verse en la Figura 5.2.1. La presencia de varios de estos modos simultáneamente da lugar a un modo mixto.

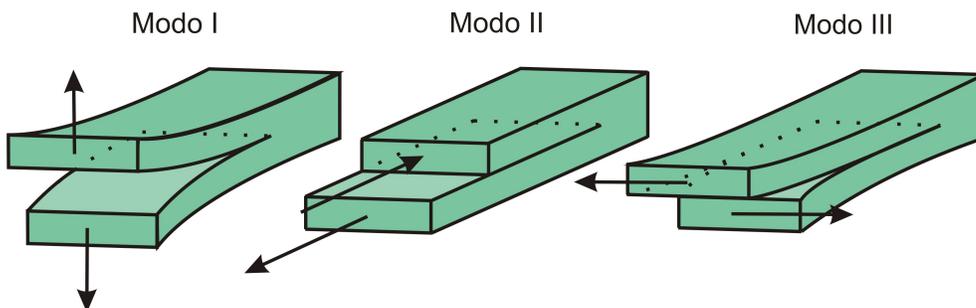


Figura 5.2.1: Modos de desplazamiento

En la Sección 5.5 calcularemos las expresiones asintóticas de las tensiones cerca del vértice y los desplazamientos asociados correspondientes a los Modos I y II.

### 5.3. Factores de intensidad de esfuerzos

En las siguientes secciones, salvo que se diga lo contrario, estudiaremos problemas estáticos, es decir, con velocidad  $\dot{\mathbf{u}}$  nula. Vamos a considerar en primer

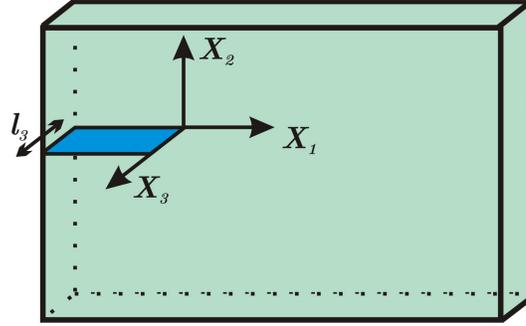


Figura 5.3.1: Placa con grieta

lugar una aproximación local a la mecánica de la fractura. Supondremos que el sólido elástico es una estructura plana, de espesor  $l_3$ , conteniendo una grieta. Consideremos los ejes de coordenadas cartesianas, con origen en el vértice de la fisura, y de modo que el eje  $OX_1$  es una prolongación de la tangente a la fisura en el vértice y el eje  $OX_2$  perpendicular a la misma (ver Figura 5.3.1). La energía elástica de una porción de volumen  $V$ , escrita en coordenadas polares centradas en el vértice de la grieta, es:

$$I_i(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) dV = \frac{1}{2} \int_A l_3 r \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) dr d\theta, \quad (5.3.1)$$

siendo  $A$  la superficie correspondiente a los dos labios de la grieta, cuya área es  $2al_3$  para una grieta de longitud  $a$  en un sólido de espesor  $l_3$ . Puesto que  $I_i$  debe permanecer finita cuando el volumen tiende a cero, la singularidad del producto  $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  debe ser a lo sumo  $1/r$ . En efecto, para materiales elásticos lineales, en los que existe una relación lineal entre el tensor de deformación y el de tensiones, puede demostrarse que:

$$\|\boldsymbol{\sigma}\| = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right); \|\boldsymbol{\varepsilon}\| = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right); \quad (5.3.2)$$

mientras que el campo de desplazamientos no es singular:

$$\|\mathbf{u}\| = O(\sqrt{r}). \quad (5.3.3)$$

Se definen los factores de intensidad de esfuerzos (SIF, por sus siglas en inglés) correspondientes a los modos  $I$ ,  $II$  y  $III$  como:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{22}(r, 0); K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{12}(r, 0); K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{23}(r, 0). \quad (5.3.4)$$

En 1957, Irwin [52] demostró que para un material elástico lineal, el primer término del desarrollo asintótico del tensor de tensiones en el vértice de la grieta se comporta siempre del mismo modo para cada configuración fisurada, dependiendo sólo del modo de fractura considerada, modificándose sólo la magnitud de los coeficientes; este primer término es conocido y es directamente proporcional a los *factores de intensidad de esfuerzos*  $K_I$ ,  $K_{II}$  y  $K_{III}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= K_J \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^J(\theta), \\ \varepsilon_{ij} &= K_J \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} g_{ij}^J(\theta), \quad J = I, II, III, \end{aligned}$$

donde  $f_{ij}^J$  y  $g_{ij}^J$  son funciones adimensionales que representan la variación angular de cada una de las componentes de la tensión cerca del tip. Son funciones universales, independientes de la configuración del cuerpo, de las fuerzas aplicadas y de las constantes elásticas. Además, se normalizan de modo que  $f_{ij}^J(0) = 1$ .

Obsérvese que estos factores tienen como unidades  $Nm^{-3/2}$  ó  $Pa\sqrt{m}$ . La primera interpretación de los factores de intensidad de tensiones es la de ser unos cuantificadores de la intensidad de los campos elásticos en el vértice de la grieta. Las expresiones de  $K_I$  y  $K_{II}$  se deducen al considerar los modos de ruptura I y II correspondientes a problemas de elasticidad plana. Otra interpretación de los factores de intensidad es la que se obtiene a través de los desplazamientos relativos entre los labios superior e inferior de la grieta ( $\theta = \pi$  y  $\theta = -\pi$ ) siendo bien conocido que los SIF son directamente proporcionales a las discontinuidades de las componentes  $u_1$  y  $u_2$  del desplazamiento correspondiente a

los modos de ruptura I y II:

$$[u_1] = u_1(r, \pi) - u_1(r, -\pi) = \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \frac{K_{II}}{\mu} (1 + \kappa),$$

$$[u_2] = u_2(r, \pi) - u_2(r, -\pi) = \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \frac{K_I}{\mu} (1 + \kappa),$$

donde  $\kappa$  es conocida como la constante de Kolsov y toma el valor

$$\kappa = 3 - 4\nu,$$

en deformaciones planas, y

$$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu},$$

en tensiones planas.

Por tanto, cada uno de los factores de intensidad de tensiones representa también una medida de la discontinuidad de los desplazamientos entre los labios de la grieta para el modo correspondiente.

Además, los factores de intensidad de tensiones caracterizan completamente el estado local del material en los alrededores de la punta de la grieta. Sus valores dependerán de las solicitaciones impuestas, de la geometría del sólido y del tamaño de la grieta. Por esto, es razonable considerar estos parámetros como parámetros de fractura, es decir, la grieta se propagará cuando los factores de intensidad de tensiones verifiquen una cierta condición crítica. Si se considera el caso particular del modo I puro, este criterio establece que la grieta progresa cuando  $K_I \geq K_{IC}$ , donde  $K_{IC}$  es una propiedad característica del material: *factor de intensidad crítico* para la aparición de fractura; este factor de intensidad crítico se conoce como *tenacidad a la fractura* del sólido. Se puede considerar también una situación más compleja de modos mixtos, en la que los modos I, II y III actúen simultáneamente. En este caso, la condición de propagación se obtendrá cuando una combinación de  $K_I$ ,  $K_{II}$  y  $K_{III}$  alcance un determinado valor crítico.

## 5.4. Criterios energéticos de fractura

La propagación de una fisura es un fenómeno de disipación energética. Desde este punto de vista, podremos encontrar criterios de fractura globales atendi-

endo al comportamiento energético global.

La hipótesis de comportamiento elástico significa que el tensor de tensiones es función sólo del tensor de deformación a través de la ley de Hooke (1.6.11), y, tal como se vio en la Sección 1.6.1, la densidad de energía de deformación elástica es:

$$\varphi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}); \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}}. \quad (5.4.1)$$

Una consecuencia de esta hipótesis es que se puede definir una energía elástica potencial de deformación debida a las tensiones y deformaciones internas como:

$$I_i(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{u}) dV_X = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) dV_X. \quad (5.4.2)$$

Consideremos un cuerpo elástico  $\mathcal{B}$ , cuyo interior es un dominio,  $\Omega$ , sometido a una densidad de fuerza por unidad de volumen  $\mathbf{b}_0$ . Consideramos  $\partial\mathcal{B} = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$  de manera que los desplazamientos están impuestos en  $\Gamma_D$  y los esfuerzos  $\mathbf{s}_0$  están prescritos en  $\Gamma_N$ . Se define la energía total de un medio elástico como:

$$\begin{aligned} I(\mathbf{u}) &= I_i(\mathbf{u}) - T_e(\mathbf{u}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) dV_X - \int_{\Omega} \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u} dV_X - \int_{\Gamma_N} \mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{u} dA_X, \end{aligned}$$

donde  $T_e(\mathbf{u})$  es la energía potencial de las fuerzas externas o trabajo de estas fuerzas.

Si el cuerpo tiene una grieta de longitud  $a$ , el desplazamiento cambiará con la longitud de la grieta, y por tanto, la energía se puede considerar función de esta longitud. En lo que sigue omitiremos la dependencia de  $a$  en aquellos casos en los que no haya lugar a confusión.

Supongamos que una grieta de longitud  $a$ , avanza una cantidad  $\delta a$ . El principio del mínimo de energía potencial requiere que  $I(\mathbf{u}(a + \delta a)) \leq I(\mathbf{u}(a))$ , ya que el desplazamiento de la primera grieta también es admisible para el problema con la grieta extendida.

**Definición 5.4.1** Se define la *energía de Griffith* como:

$$G = -\frac{dI(\mathbf{u})}{da}. \quad (5.4.3)$$

De esta forma,  $G$  representa la energía liberada durante una propagación unidad de la grieta; sus unidades son  $J/m^2 = N/m$ , energía por unidad de área. La propagación de la grieta conlleva disipación de energía; una pequeña cantidad de energía es requerida para crear dos superficies nuevas (2 veces la energía superficial por unidad de área de avance de la grieta,  $\gamma_s$ ). La grieta crecerá sólo si la velocidad de cambio de la energía potencial es suficiente para dar esta energía. Esto lleva a un criterio de fractura: El valor calculado de  $G$  puede compararse con el valor crítico característico de cada material  $G_C$  llamado *resistencia a la fractura*. Hay propagación de la grieta si la energía liberada es igual a la energía correspondiente a la creación de dos superficies libres:  $G = G_C = 2\gamma_s$ . Para materiales no frágiles,  $G_C$  es mucho mayor que  $2\gamma_s$ .

**Proposición 5.4.2** *Se verifica la siguiente relación entre  $G$  y los factores de intensidad de esfuerzos:*

$$G = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'} + \frac{K_{III}^2}{2\mu}, \quad (5.4.4)$$

siendo  $E' = E$  para tensiones planas,  $E' = E/(1 - \nu^2)$  para deformaciones planas y  $\mu$  el módulo de cortadura también llamado parámetro de Lamé.  $\square$

Puede comprobarse que la tenacidad a la fractura se relaciona con la resistencia a la fractura por la relación:

$$K_{IC} = \sqrt{\frac{EG_C}{(1 - \nu^2)}}, \quad (5.4.5)$$

para deformaciones planas.

Desafortunadamente  $G_C$  es a menudo conocido como tenacidad a la fractura del sólido, igual que  $K_{IC}$ ; aunque fijándose en las unidades puede distinguirse a cual de los dos se refiere, a menudo esto crea confusión.

En la implementación numérica, se toma:

$$G \simeq -\frac{I(\mathbf{u}(a + \delta a)) - I(\mathbf{u}(a))}{l_3 \delta a}. \quad (5.4.6)$$

Las ventajas de este criterio son que es fácil de implementar y que no necesita un software específico de fractura; entre las desventajas está que es muy difícil

calcular una buena aproximación y que necesita dos simulaciones mecánicas completas.

### 5.4.1. Relación entre la J-integral y la energía de Griffith.

A continuación, relacionaremos la J-integral obtenida en el Capítulo 1 para materiales de Hooke con la energía de Griffith. Para ello, en primer lugar, consideraremos la J-integral en el caso estático, esto es,  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ ; probaremos que  $J$  es independiente del camino elegido para la integración y, por tanto, puede transformarse en una integral de volumen, y analizaremos la elección del volumen más adecuado. Finalmente, obtendremos una expresión para la energía de Griffith,  $G$  en un caso general, y veremos que, en particular, cuando las fuerzas de volumen y superficie son nulas, se corresponde con la expresión de la J-integral.

Por simplicidad, supondremos que el problema es plano y consideraremos que la grieta es recta y paralela al eje OX, por lo que el vector tangente en el vértice de la grieta es de la forma  $\mathbf{t} = (1, 0)$ . En estas condiciones, la expresión de la J-integral (1.6.19) toma la forma:

$$J = \oint_{tip} \left\{ \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} + \rho_0 |\dot{\mathbf{u}}|^2) n_1 - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X_1} \right\} dA_X, \quad (5.4.7)$$

siendo  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$  el vector normal exterior a la curva de integración.

Además, si  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ ,

$$J = \oint_{tip} \left\{ \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}) n_1 - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X_1} \right\} dA_X. \quad (5.4.8)$$

**Proposición 5.4.3** *Supongamos una grieta recta. Si los labios de la grieta se suponen descargados, las fuerzas de volumen son nulas, y  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ , la J-integral (5.4.8) es independiente del camino de integración elegido, siempre que se elija un contorno que comience en el labio inferior de la grieta y termine en el labio superior.*

*Demostración.* Consideramos cualquier contorno  $\Gamma$  cumpliendo estas condiciones, como los representados en la Figura 5.4.1. Si se denota por  $J_0$  y  $J$  a las

integrales sobre los contornos  $\Gamma_0$  y  $\Gamma$ , respectivamente, se tiene que:

$$\begin{aligned} J_0 - J &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) n_1 dA_X - \int_{\Gamma_0} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X_1} dA_X \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) n_1 dA_X - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X_1} dA_X. \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

En consecuencia,

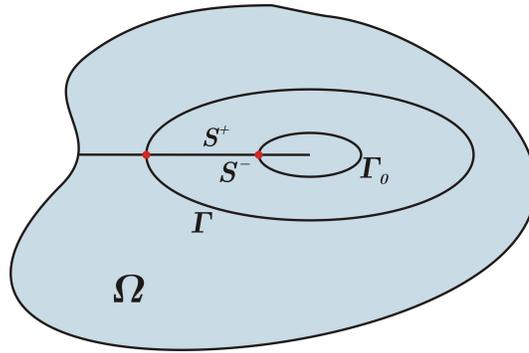


Figura 5.4.1: Caminos de integración

$$J_0 - J = \int_{\Gamma_0 + S^+ + S^- - \Gamma} \left( \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) n_1 - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X_1} \right) dA_X, \quad (5.4.10)$$

ya que al ser la grieta recta,  $n_1$  es nulo sobre los labios de la grieta, y éstos se suponen libres de tensiones. Aplicando el teorema de Gauss y teniendo en cuenta la simetría del tensor de tensiones, su expresión en términos del gradiente de deformación y las ecuaciones de equilibrio correspondientes a fuerzas de volumen nulas, se obtiene:

$$\begin{aligned} J_0 - J &= \int_R \left( \frac{1}{2} \frac{\partial (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))}{\partial X_1} - \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial X_1} \right) \right) dV_X \\ &= \int_R \left( \left( \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial}{\partial X_1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \right) - \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial X_j} \frac{\partial u_i}{\partial X_1} \right) dV_X = 0, \end{aligned}$$

siendo  $R$  la región encerrada entre las curvas  $\Gamma$  y  $\Gamma_0$ . Esto demuestra que  $J$  es independiente del camino de integración elegido, siempre que vaya desde el labio inferior hasta el labio superior, rodeando el vértice de la grieta.  $\square$

**Proposición 5.4.4** *En ausencia de fuerzas de volumen, si la grieta es recta, la velocidad  $\dot{\mathbf{u}}$  nula, y suponiendo los labios de la grieta libres, se verifica:*

$$J = G = -\frac{dI(\mathbf{u})}{da}. \quad (5.4.11)$$

*Demostración.* Supongamos que el cuerpo tiene una fisura de longitud  $a$  y que está en equilibrio. Consideremos  $\mathcal{V}$ , un volumen de control tip de frontera  $\Gamma$ . Si la fisura crece una longitud  $da$ , en la frontera Dirichlet se verifica:

$$\frac{d\mathbf{u}}{da} = 0 \text{ sobre } \Gamma_D. \quad (5.4.12)$$

Además, en  $\mathcal{W} = \Omega \setminus \mathcal{V}$  se verifica

$$\int_{\mathcal{W}} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dV_X = \int_{\mathcal{W}} \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{v} dV_X + \int_{\partial\mathcal{W}} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_{\mathcal{W}} \cdot \mathbf{v} dA_X, \quad (5.4.13)$$

para todo campo de vectores test  $\mathbf{v}$  regular y donde  $\mathbf{n}_{\mathcal{W}}$  es el vector normal exterior a  $\mathcal{W}$ .

Dado que

$$\begin{aligned} \frac{dI(\mathbf{u})}{da} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))}{da} dV_X - \int_{\Omega} \mathbf{b}_0 \cdot \frac{d\mathbf{u}}{da} dV_X - \int_{\Gamma_N} \mathbf{s}_0 \cdot \frac{d\mathbf{u}}{da} dA_X, \\ &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \left( \frac{d\mathbf{u}}{da} \right) dV_X - \int_{\Omega} \mathbf{b}_0 \cdot \frac{d\mathbf{u}}{da} dV_X - \int_{\Gamma_N} \mathbf{s}_0 \cdot \frac{d\mathbf{u}}{da} dA_X. \end{aligned}$$

Descomponiendo las integrales en  $\Omega$  como integrales en  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$  y considerando

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{da}$$

en (5.4.13) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dI(\mathbf{u})}{da} &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \frac{d(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))}{da} dV_X - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b}_0 \cdot \frac{d\mathbf{u}}{da} dV_X \\ &\quad - \int_{\Gamma_N} \mathbf{s}_0 \cdot \frac{d\mathbf{u}}{da} dA_X + \int_{\partial\mathcal{W}} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_{\mathcal{W}} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{da} dA_X. \end{aligned}$$

Dado que sobre  $\partial\mathcal{V} \cap \partial\mathcal{W}$ ,  $\mathbf{n}_{\mathcal{W}} = -\mathbf{n}$  denotaremos:

$$\frac{dI_{\mathcal{V}}(\mathbf{u})}{da} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \frac{d(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))}{da} dV_X - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b}_0 \cdot \frac{d\mathbf{u}}{da} dV_X - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{da} dA_X.$$

Para efectuar esta derivación, es conveniente utilizar un sistema de coordenadas móvil  $(x; y)$  con origen en el vértice de la grieta y que se desplaza con ella. Para una propagación de la grieta en su propio plano, tenemos

$$\begin{aligned}x &= X_1 - a \\y &= X_2\end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\frac{d}{da} = \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial X_1}. \quad (5.4.14)$$

Entonces podemos escribir:

$$\begin{aligned}\frac{dI(\mathbf{u})}{da} &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))}{\partial a} - \frac{\partial(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))}{\partial X_1} \right) dV_X - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b}_0 \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X_1} \right) dA_X \\ &\quad - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X_1} \right) dA_X.\end{aligned} \quad (5.4.15)$$

Como la energía de deformación es función del tamaño de la grieta,  $a$ , exclusivamente a través de las deformaciones:

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))}{\partial a} = 2\boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})}{\partial a} = 2\sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right) = 2\sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial a} \right). \quad (5.4.16)$$

Aplicando el teorema de Gauss, y teniendo en cuenta el equilibrio de fuerzas:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))}{\partial a} dV_X &= \int_{\mathcal{V}} \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial a} \right) dV_X \\ &= - \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial X_j} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial a} + \int_{\partial \mathcal{V}} \sigma_{ij} n_j \left( \frac{\partial u_i}{\partial a} \right) dV_X \\ &= \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a} dV_X + \int_{\partial \mathcal{V}} \sigma_{ij} n_j \left( \frac{\partial u_i}{\partial a} \right) dA_X\end{aligned}$$

Llevando este resultado a la ecuación (5.4.15), teniendo en cuenta que

$$\sigma_{ij} n_j = (s_0)_i, \text{ sobre } \Gamma_N,$$

y que

$$\frac{\partial u_i}{\partial a} = 0, \text{ sobre } \Gamma_D,$$

se deduce:

$$\frac{dI(\mathbf{u})}{da} = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))}{\partial X_1} dV_X + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X_1} dV_X + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X_1} dA_X.$$

Finalmente, considerando  $\mathbf{b}_0 = \mathbf{0}$  se obtiene la igualdad con la J-integral.  $\square$

Las magnitudes que constituyen el integrando de la expresión (5.4.8) son los campos de tensiones y deformaciones en las proximidades del vértice de la grieta, por lo que es razonable aceptar que  $J$  representa el estado local del material en el vértice y puede considerarse, por tanto, como un parámetro de fractura. Este resultado permite postular un criterio de propagación: **la grieta crecerá cuando  $J$  alcance un valor crítico característico del material,  $J_C$** . Al mismo tiempo, la propiedad de invariancia de  $J$  permite calcular su valor a lo largo de cualquier contorno,  $\Gamma$ . En la práctica, este resultado es muy interesante, porque permite utilizar los campos de tensiones y deformaciones en un contorno alejado de la punta de la grieta para calcular  $J$  y, por tanto, obtener información característica de los campos locales singulares, que son mucho más difíciles de evaluar con precisión en puntos próximos al tip. Así,  $J$  se puede calcular como

$$J = \int_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}) n_1 - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X_1} \right\} dA_X, \quad (5.4.17)$$

siendo  $\Gamma$  cualquier contorno.

La **propagación de la grieta** se realiza en la dirección en que  $G$  se maximiza:

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} = 0, \text{quad} \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\theta_0} \leq 0. \quad (5.4.18)$$

En este caso la dirección  $\theta_0$  se calcula utilizando un método denominado  $G\theta$ : se calcula el valor de  $G$  para distintos valores de  $\theta$  y se determina el máximo.

### 5.4.2. Integral de interacción

En esta sección veremos una metodología para calcular los factores de intensidad de esfuerzos  $K_I$  a partir de la energía. Consideremos dos estados asociados al cuerpo con grieta: el estado 1,  $(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}, \mathbf{u}^{(1)})$  correspondiente al estado de interés y un estado (2),  $(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}, \mathbf{u}^{(2)})$ , que es un estado auxiliar que será elegido como el campo asintótico para los Modos I o II.

**Definición 5.4.5** Se denomina *integral de interacción* entre los estados 1 y 2 a la expresión:

$$I^{(1,2)} = \int_{\Gamma} W^{(1,2)} \delta_{1j} n_j dA_X - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^{(2)}}{\partial X_1} dA_X - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial X_1} dA_X, \quad (5.4.19)$$

siendo  $W^{(1,2)}$  la densidad de energía de deformación de interacción:

$$W^{(1,2)} = \boldsymbol{\sigma}^{(1)} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \boldsymbol{\sigma}^{(2)} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}. \quad (5.4.20)$$

**Proposición 5.4.6** Dados dos estados elásticos asociados a un cuerpo con grieta, (1) y (2), la  $J$ -integral asociada a la suma de los dos estados se relaciona con la integral de interacción y las  $J$ -integrales de cada uno de los estados mediante la relación:

$$J^{(1+2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + I^{(1,2)}. \quad (5.4.21)$$

*Demostración.* La  $J$ -integral para la suma de los dos estados es:

$$\begin{aligned} J^{(1+2)} &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} ((\boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)}) : (\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)})) n_1 dA_X \\ &\quad - \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \mathbf{n} \cdot \frac{\partial (\mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)})}{\partial X_1} dA_X. \end{aligned} \quad (5.4.22)$$

Reordenando los términos se obtiene el resultado.  $\square$

**Observación 5.4.7** La integral de interacción permite calcular de forma sencilla los factores de intensidad de esfuerzos mediante una apropiada elección del estado (2). En efecto, teniendo en cuenta (5.4.4) para los estados combinados se deduce:

$$J^{(1+2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + \frac{2}{E'} \left( K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)} \right). \quad (5.4.23)$$

Eligiendo, por ejemplo, el estado (2) como el campo asintótico correspondiente al modo puro  $I$  con  $K_I^{(2)} = 1$  y  $K_{II}^{(2)} = 0$ , se deduce, de (5.4.21), el modo de intensidad  $I$  para el estado (1) en términos de la integral de interacción:

$$K_I^{(1)} = \frac{E'}{2} I^{(1, \text{modo } I)}. \quad (5.4.24)$$

El segundo factor de intensidad se puede determinar de forma análoga.

## 5.5. Campos de tensiones y desplazamientos cerca del vértice de una grieta.

En esta sección calcularemos explícitamente los campos de tensiones que se producen cerca del vértice de una grieta arbitraria que se propaga con velocidad  $\nu$ . Para ello, utilizaremos un método directo para resolver la ecuación de Lamé-Navier evolutiva, suponiendo que el desplazamiento proviene de unos potenciales escalares. Probaremos que este procedimiento no es aplicable en el caso de una grieta estática, por lo que utilizaremos un método inverso para recuperar las expresiones clásicas que se encuentran en la bibliografía. En ambos casos se tienen en cuenta los efectos de la inercia, por lo que la metodología es aplicable a problemas estáticos y dinámicos.

Para la obtención de las tensiones, se considerará un sistema de coordenadas móviles con origen en el vértice de la grieta. Haremos uso del Teorema de descomposición de Helmholtz presentado en la Sección 1.9.1 para expresar el campo de desplazamientos como suma de dos campos que, como consecuencia de las hipótesis de deformaciones planas sobre el desplazamiento, se pueden considerar derivados de un potencial escalar y verificando la ecuación de ondas. Para obtener el primer término de la expansión asintótica de las tensiones cuando el radio  $r \rightarrow 0$ , se sigue el procedimiento habitual por el cual se reescalan las distancias de forma que se expande la zona cercana al vértice de la grieta. A continuación, mediante un sencillo cambio de variable obtenemos la expresión de los potenciales como solución de la ecuación de Laplace, que resolvemos en variables separadas. Considerando el desplazamiento y las tensiones en coordenadas polares y utilizando la ecuación de ondas, las condiciones de contorno sobre la grieta y las condiciones de simetría o antisimetría del desplazamiento de los Modos I y II, respectivamente, se deducen las expresiones para los potenciales escalares y, a partir de éstas, las expresiones de los desplazamientos y las tensiones.

### 5.5.1. Coordenadas móviles con el vértice de la grieta

Consideramos una grieta en un dominio bidimensional que se propaga siguiendo una trayectoria arbitraria regular. En el instante  $t_1$  el vértice se sitúa en el punto  $O_1$ , de coordenadas  $(l(t_1), m(t_1))$  respecto del sistema de coordenadas  $(X_1, X_2)$  de vectores unitarios  $\mathbf{e}_1$  y  $\mathbf{e}_2$ . En el instante  $t_1 + \Delta t$  el vértice se sitúa en el punto  $O_2$ , de coordenadas  $(l(t_1 + \Delta t), m(t_1 + \Delta t))$ . Consideramos un sistema de coordenadas móvil  $\hat{X}_1$  y  $\hat{X}_2$  centrado en el vértice de la grieta en cada instante, de modo que el eje  $\hat{X}_1$  es tangente a la trayectoria en el sentido de crecimiento de la grieta. Así, el vector director del eje  $\hat{X}_1$  viene dado por el vector velocidad del vértice de la grieta,  $\boldsymbol{\nu}(t) = (l'(t), m'(t))$ , de modo que  $\hat{\mathbf{e}}_1(t) = \cos(\alpha(t))\mathbf{e}_1 + \sin(\alpha(t))\mathbf{e}_2$  y  $\hat{\mathbf{e}}_2(t) = -\sin(\alpha(t))\mathbf{e}_1 + \cos(\alpha(t))\mathbf{e}_2$  siendo  $\alpha(t)$  el ángulo que forma el vector  $\boldsymbol{\nu}(t)$  con el eje  $\mathbf{e}_1$ .

**Observación 5.5.1** Si  $l'(t) \neq 0$ ,  $\tan(\alpha(t)) = \frac{m'(t)}{l'(t)}$ ; además si  $\boldsymbol{\nu}(t) \neq 0$ ,

$$\cos(\alpha) = \frac{l'(t)}{\bar{\nu}(t)} \quad y \quad \sin(\alpha) = \frac{m'(t)}{\bar{\nu}(t)},$$

con  $\bar{\nu}(t) = \sqrt{l'(t)^2 + m'(t)^2}$ . En este caso, los vectores  $\hat{\mathbf{e}}_1(t)$  y  $\hat{\mathbf{e}}_2(t)$  pueden expresarse como  $\hat{\mathbf{e}}_1(t) = \frac{l'(t)}{\bar{\nu}(t)}\mathbf{e}_1 + \frac{m'(t)}{\bar{\nu}(t)}\mathbf{e}_2$  y  $\hat{\mathbf{e}}_2(t) = -\frac{m'(t)}{\bar{\nu}(t)}\mathbf{e}_1 + \frac{l'(t)}{\bar{\nu}(t)}\mathbf{e}_2$ .

Las coordenadas  $\hat{X}_1, \hat{X}_2$  se expresan en función de las coordenadas  $X_1, X_2$  como

$$\hat{X}_1 = [X_1 - l(t)] \cos(\alpha(t)) + [X_2 - m(t)] \sin(\alpha(t)), \quad (5.5.1)$$

$$\hat{X}_2 = -[X_1 - l(t)] \sin(\alpha(t)) + [X_2 - m(t)] \cos(\alpha(t)). \quad (5.5.2)$$

Puede probarse fácilmente que

$$\frac{d\hat{X}_1}{dt} = -\bar{\nu}(t) + \hat{X}_2 \alpha'(t), \quad \frac{d\hat{X}_2}{dt} = -\hat{X}_1 \alpha'(t). \quad (5.5.3)$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{X}_1}{dt} &= -l'(t) \cos(\alpha(t)) - \alpha'(t)[X_1 - l(t)] \sin(\alpha(t)) \\
&\quad + \alpha'(t)[X_2 - m(t)] \cos(\alpha(t)) - m'(t) \sin(\alpha(t)) \\
&= -l'(t) \cos(\alpha(t)) - m'(t) \sin(\alpha(t)) + \hat{X}_2 \alpha'(t) \\
&= -\frac{l'(t)^2 + m'(t)^2}{\bar{v}(t)} + \hat{X}_2 \alpha'(t).
\end{aligned}$$

Análogamente se prueba para  $\frac{d\hat{X}_2}{dt}$ .

Consideramos también un sistema de coordenadas polares móvil,  $(r, \theta)$ , como se ilustra en la Figura 5.5.1. Denotamos por  $\alpha'(t)$  la velocidad angular a la que gira el eje  $\hat{X}_1$  en sentido positivo. Se supone que  $\bar{v}(t)$ ,  $\bar{v}'(t)$ ,  $\alpha'(t)$  y  $\alpha''(t)$  son funciones del tiempo continuas y acotadas. Para una función  $w(\hat{X}_1, \hat{X}_2, t)$ , la derivada total respecto al tiempo, que denotamos por  $\frac{dw}{dt}$ , toma la forma

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} - \bar{v}(t) \frac{\partial w}{\partial \hat{X}_1} - \alpha'(t) \left( \hat{X}_1 \frac{\partial w}{\partial \hat{X}_2} - \hat{X}_2 \frac{\partial w}{\partial \hat{X}_1} \right). \quad (5.5.4)$$

De esta ecuación se deduce que

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 w}{dt^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \bar{v}(t)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \hat{X}_1^2} - \bar{v}'(t) \frac{\partial w}{\partial \hat{X}_1} - 2\bar{v}(t) \frac{\partial^2 w}{\partial \hat{X}_1 \partial t} \\
&\quad - \alpha''(t) \left( \hat{X}_1 \frac{\partial w}{\partial \hat{X}_2} - \hat{X}_2 \frac{\partial w}{\partial \hat{X}_1} \right) - \alpha'(t) \left( \hat{X}_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial \hat{X}_2} - \hat{X}_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial \hat{X}_1} \right) \\
&\quad - \alpha'(t) \left( (-\bar{v}(t) + \hat{X}_2 \alpha'(t)) \frac{\partial w}{\partial \hat{X}_2} - \hat{X}_1 \alpha'(t) \frac{\partial w}{\partial \hat{X}_1} \right) \\
&\quad - \alpha'(t) \hat{X}_1 \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial \hat{X}_2} - (\bar{v}(t) - \alpha'(t) \hat{X}_2) \frac{\partial^2 w}{\partial \hat{X}_2 \partial \hat{X}_1} + \alpha'(t) \frac{\partial w}{\partial \hat{X}_1} - \alpha'(t) \hat{X}_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \hat{X}_2^2} \right] \\
&\quad + \alpha'(t) \hat{X}_2 \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial \hat{X}_1} - (\bar{v}(t) - \alpha'(t) \hat{X}_2) \frac{\partial^2 w}{\partial \hat{X}_1^2} - \alpha'(t) \frac{\partial w}{\partial \hat{X}_2} - \alpha'(t) \hat{X}_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \hat{X}_1 \partial \hat{X}_2} \right] \\
&\quad + \bar{v}(t) \alpha'(t) \frac{\partial}{\partial \hat{X}_1} \left( \hat{X}_1 \frac{\partial w}{\partial \hat{X}_2} - \hat{X}_2 \frac{\partial w}{\partial \hat{X}_1} \right). \quad (5.5.5)
\end{aligned}$$

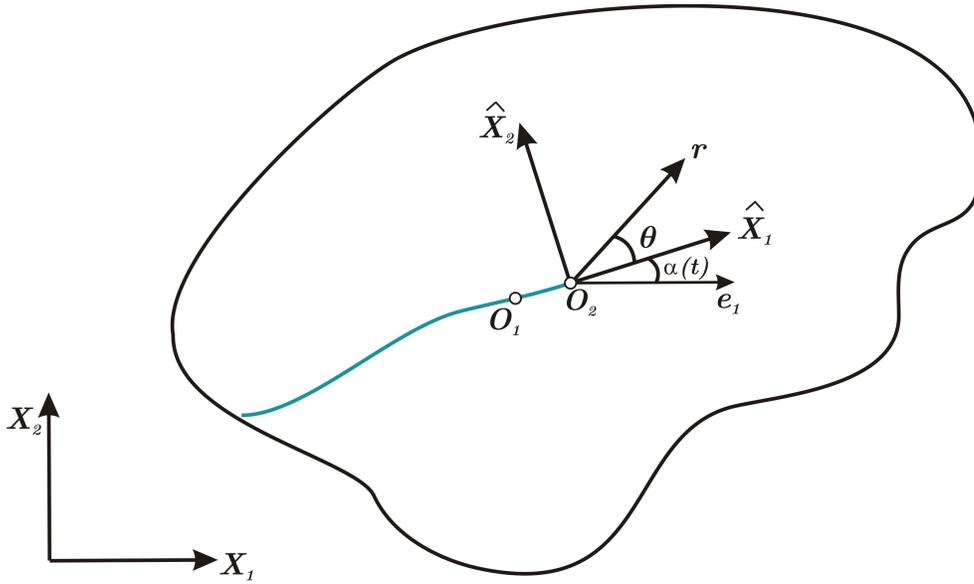


Figura 5.5.1: Ejes de coordenadas cartesianas y polares en una grieta

### 5.5.2. Cálculo de los potenciales escalares

Como vimos en la Sección 1.9, la ecuación de equilibrio asociada a materiales de Hooke puede expresarse en términos del desplazamiento a través de la ecuación de Lamé-Navier evolutiva (1.9.1). El desplazamiento puede descomponerse como suma de un campo solenoidal y uno rotacional de la forma (1.9.10), donde los potenciales asociados,  $\phi$  y  $\mathbf{B}$ , son solución de las ecuaciones (1.9.11).

Vamos a centrar nuestro estudio en los problemas planos, por lo que el desplazamiento será combinación de los Modos I y II. Supondremos, además, que verifica las hipótesis de deformaciones planas. En particular,  $\mathbf{u}(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3) = \mathbf{u}(\hat{X}_1, \hat{X}_2)$  y  $u_3 = 0$ , y además los potenciales  $\phi$  y  $\mathbf{B}$  deben ser independientes de  $\hat{X}_3$ . De estas condiciones se deduce que el desplazamiento  $\mathbf{u}$  puede expresarse únicamente en función de  $\phi$  y  $B_3$  del siguiente modo:

$$\mathbf{u} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{X}_1} + \frac{\partial B_3}{\partial \hat{X}_2}, \frac{\partial \phi}{\partial \hat{X}_2} - \frac{\partial B_3}{\partial \hat{X}_1}, 0 \right). \quad (5.5.6)$$

En adelante, para simplificar la notación omitiremos el subíndice 3 y nos referiremos a los potenciales escalares  $\phi$  y  $B$ . Dichos campos verifican las ecuaciones

(1.9.11) que, escritas en términos de las coordenadas móviles  $(\hat{X}_1, \hat{X}_2)$ , se expresan como:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \hat{X}_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \hat{X}_2^2} = \frac{1}{c_t^2} \frac{d^2 \phi}{dt^2}, \quad \frac{\partial^2 B}{\partial \hat{X}_1^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial \hat{X}_2^2} = \frac{1}{c_t^2} \frac{d^2 B}{dt^2}. \quad (5.5.7)$$

Sustituyendo en estas ecuaciones la expresión (5.5.5) obtenida para la derivada total respecto al tiempo se tiene:

$$\begin{aligned} & \left( 1 - \frac{\bar{v}(t)^2}{c_t^2} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \hat{X}_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \hat{X}_2^2} = \frac{1}{c_t^2} \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \bar{v}'(t) \frac{\partial \phi}{\partial \hat{X}_1} - 2\bar{v}(t) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \hat{X}_1 \partial t} \right. \\ & - \alpha'(t) \left( (-\bar{v}(t) + \hat{X}_2 \alpha'(t)) \frac{\partial \phi}{\partial \hat{X}_2} - \hat{X}_1 \alpha'(t) \frac{\partial \phi}{\partial \hat{X}_1} \right) \\ & - \alpha'(t) \left( \hat{X}_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial \hat{X}_2} - \hat{X}_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial \hat{X}_1} \right) \\ & - \alpha'(t) \hat{X}_1 \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial \hat{X}_2} - (\bar{v}(t) - \alpha'(t) \hat{X}_2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \hat{X}_2 \partial \hat{X}_1} + \alpha'(t) \frac{\partial \phi}{\partial \hat{X}_1} - \alpha'(t) \hat{X}_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \hat{X}_2^2} \right] \\ & + \alpha'(t) \hat{X}_2 \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial \hat{X}_1} - (\bar{v}(t) - \alpha'(t) \hat{X}_2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \hat{X}_1^2} - \alpha'(t) \frac{\partial \phi}{\partial \hat{X}_2} - \alpha'(t) \hat{X}_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \hat{X}_1 \partial \hat{X}_2} \right] \\ & \left. + \bar{v}(t) \alpha'(t) \frac{\partial}{\partial \hat{X}_1} \left( \hat{X}_1 \frac{\partial \phi}{\partial \hat{X}_2} - \hat{X}_2 \frac{\partial \phi}{\partial \hat{X}_1} \right) - \alpha''(t) \left( \hat{X}_1 \frac{\partial \phi}{\partial \hat{X}_2} - \hat{X}_2 \frac{\partial \phi}{\partial \hat{X}_1} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

$$\begin{aligned} & \left( 1 - \frac{\bar{v}(t)^2}{c_t^2} \right) \frac{\partial^2 B}{\partial \hat{X}_1^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial \hat{X}_2^2} = \frac{1}{c_t^2} \left\{ \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} - \bar{v}'(t) \frac{\partial B}{\partial \hat{X}_1} - 2\bar{v}(t) \frac{\partial^2 B}{\partial \hat{X}_1 \partial t} \right. \\ & - \alpha'(t) \left( (-\bar{v}(t) + \hat{X}_2 \alpha'(t)) \frac{\partial B}{\partial \hat{X}_2} - \hat{X}_1 \alpha'(t) \frac{\partial B}{\partial \hat{X}_1} \right) \\ & - \alpha'(t) \left( \hat{X}_1 \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial \hat{X}_2} - \hat{X}_2 \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial \hat{X}_1} \right) \\ & - \alpha'(t) \hat{X}_1 \left[ \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial \hat{X}_2} - (\bar{v}(t) - \alpha'(t) \hat{X}_2) \frac{\partial^2 B}{\partial \hat{X}_2 \partial \hat{X}_1} + \alpha'(t) \frac{\partial B}{\partial \hat{X}_1} - \alpha'(t) \hat{X}_1 \frac{\partial^2 B}{\partial \hat{X}_2^2} \right] \\ & + \alpha'(t) \hat{X}_2 \left[ \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial \hat{X}_1} - (\bar{v}(t) - \alpha'(t) \hat{X}_2) \frac{\partial^2 B}{\partial \hat{X}_1^2} - \alpha'(t) \frac{\partial B}{\partial \hat{X}_2} - \alpha'(t) \hat{X}_1 \frac{\partial^2 B}{\partial \hat{X}_1 \partial \hat{X}_2} \right] \\ & \left. + \bar{v}(t) \alpha'(t) \frac{\partial}{\partial \hat{X}_1} \left( \hat{X}_1 \frac{\partial B}{\partial \hat{X}_2} - \hat{X}_2 \frac{\partial B}{\partial \hat{X}_1} \right) - \alpha''(t) \left( \hat{X}_1 \frac{\partial B}{\partial \hat{X}_2} - \hat{X}_2 \frac{\partial B}{\partial \hat{X}_1} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

Para obtener el primer término de la expansión asintótica de las tensiones cuando  $r \rightarrow 0$  realizamos un nuevo cambio de variable de forma que la región cercana al vértice, donde  $r$  es pequeño, se expande. Introducimos las coordenadas  $\eta_1 = \frac{\hat{x}_1}{\epsilon}$  y  $\eta_2 = \frac{\hat{x}_2}{\epsilon}$ , donde  $\epsilon$  es un parámetro positivo arbitrariamente pequeño. En estas nuevas coordenadas, las ecuaciones anteriores se expresan:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\bar{\nu}(t)^2}{c_t^2}\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta_2^2} = \frac{\epsilon^2}{c_t^2} \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - 2\alpha'(t) \left( \eta_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial \eta_2} - \eta_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial \eta_1} \right) \right. \\ & - 2(\alpha'(t))^2 \left( \eta_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta_2} + \eta_1 \eta_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} \right) + (\alpha'(t))^2 \left( \eta_1^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta_2^2} + \eta_2^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta_1^2} \right) \\ & \left. - \alpha''(t) \left( \eta_1 \frac{\partial \phi}{\partial \eta_2} - \eta_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta_1} \right) \right\} + \frac{\epsilon}{c_t^2} \left\{ -\bar{\nu}'(t) \frac{\partial \phi}{\partial \eta_1} - 2\bar{\nu}(t) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta_1 \partial t} + \alpha'(t) \bar{\nu}(t) \frac{\partial \phi}{\partial \eta_2} \right. \\ & \left. + \alpha'(t) \bar{\nu}(t) \eta_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta_2 \partial \eta_1} - \alpha'(t) \bar{\nu}(t) \eta_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta_1^2} + \bar{\nu}(t) \alpha'(t) \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left( \eta_1 \frac{\partial \phi}{\partial \eta_2} - \eta_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta_1} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (5.5.10)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\bar{\nu}(t)^2}{c_t^2}\right) \frac{\partial^2 B}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial \eta_2^2} = \frac{\epsilon^2}{c_t^2} \left\{ \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} - 2\alpha'(t) \left( \eta_1 \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial \eta_2} - \eta_2 \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial \eta_1} \right) \right. \\ & - 2(\alpha'(t))^2 \left( \eta_2 \frac{\partial B}{\partial \eta_2} + \eta_1 \eta_2 \frac{\partial^2 B}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} \right) + (\alpha'(t))^2 \left( \eta_1^2 \frac{\partial^2 B}{\partial \eta_2^2} + \eta_2^2 \frac{\partial^2 B}{\partial \eta_1^2} \right) \\ & \left. - \alpha''(t) \left( \eta_1 \frac{\partial B}{\partial \eta_2} - \eta_2 \frac{\partial B}{\partial \eta_1} \right) \right\} + \frac{\epsilon}{c_t^2} \left\{ -\bar{\nu}'(t) \frac{\partial B}{\partial \eta_1} - 2\bar{\nu}(t) \frac{\partial^2 B}{\partial \eta_1 \partial t} + \alpha'(t) \bar{\nu}(t) \frac{\partial B}{\partial \eta_2} \right. \\ & \left. + \alpha'(t) \bar{\nu}(t) \eta_1 \frac{\partial^2 B}{\partial \eta_2 \partial \eta_1} - \alpha'(t) \bar{\nu}(t) \eta_2 \frac{\partial^2 B}{\partial \eta_1^2} + \bar{\nu}(t) \alpha'(t) \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left( \eta_1 \frac{\partial B}{\partial \eta_2} - \eta_2 \frac{\partial B}{\partial \eta_1} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (5.5.11)$$

Puesto que los coeficientes en  $\epsilon$  y  $\epsilon^2$  del segundo miembro se suponen acotados cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  tendremos

$$\left(1 - \beta_t^2\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta_2^2} = O(\epsilon), \quad \left(1 - \beta_t^2\right) \frac{\partial^2 B}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial \eta_2^2} = O(\epsilon), \quad (5.5.12)$$

siendo

$$\beta_t^2 = \frac{\bar{\nu}(t)^2}{c_t^2}, \quad \text{y} \quad \beta_t^2 = \frac{\bar{\nu}(t)^2}{c_t^2}. \quad (5.5.13)$$

Supondremos que ambos parámetros son menores que 1. En consecuencia, cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , esto es, en puntos próximos al vértice de la grieta, los potenciales

escalares  $\phi$  y  $B$  son aproximados por las soluciones de:

$$\left(1 - \beta_t^2\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta_2^2} = 0, \quad (5.5.14)$$

$$\left(1 - \beta_t^2\right) \frac{\partial^2 B}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial \eta_2^2} = 0. \quad (5.5.15)$$

Con el fin de simplificar la notación, seguiremos denotando por  $(r, \theta)$  las coordenadas polares asociadas a este nuevo sistema  $(\eta_1, \eta_2)$ , puesto que la única que varía es el radio  $r$ , que sufre una dilatación  $1/\epsilon$ . Además, puesto que tenemos varios sistemas de coordenadas, denotaremos las componentes de las tensiones con la notación  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$  en lugar de utilizar los índices  $ij$  tomando  $x$  e  $y$  la forma  $\hat{X}_1$  y  $\hat{X}_2$  o  $\eta_1$  y  $\eta_2$  según corresponda.

El objetivo es calcular los potenciales en el semiplano superior a  $\eta_2 = 0$ , es decir, cuando  $\theta \in [0, \pi]$ . Posteriormente, se considerará la extensión al semiplano inferior utilizando la propiedad de simetría de los desplazamientos asociados al Modo I y la antisimetría en el Modo II.

**Lema 5.5.2** *El campo de desplazamientos en coordenadas polares toma la forma:*

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial \theta}, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\partial B}{\partial r}. \quad (5.5.16)$$

*El campo de tensiones en coordenadas polares toma la forma:*

$$\begin{aligned} \sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \left[ \frac{1}{r^2} \left( (1-\nu) \frac{\partial B}{\partial \theta} - (2\nu-1) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{r} \left( (1-\nu) \frac{\partial^2 B}{\partial r \partial \theta} + (2\nu-1) \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + (1-\nu) \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right], \end{aligned} \quad (5.5.17)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \left[ \frac{1}{r^2} \left( (1-\nu) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} - (2\nu-1) \frac{\partial B}{\partial \theta} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{r} \left( (1-\nu) \frac{\partial \phi}{\partial r} + (2\nu-1) \frac{\partial^2 B}{\partial r \partial \theta} \right) + \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right], \end{aligned} \quad (5.5.18)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2} - 2 \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \left( 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial B}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} \right]. \quad (5.5.19)$$

*Demostración.* El resultado se obtiene de la expresión del desplazamiento en términos de  $B$  y  $\phi$  dada por (5.5.6), y de las relaciones (A.6)–(A.9) del Anexo 6.9.2.  $\square$

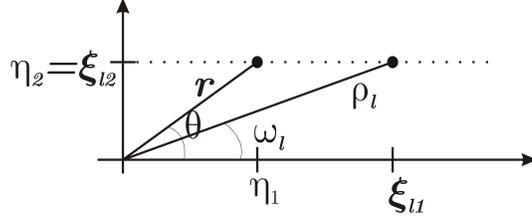


Figura 5.5.2: Sistemas de coordenadas polares

**Lema 5.5.3** Sean  $p \in \mathbb{R}^+$  y  $\varphi_*(\omega_l)$  una solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$\varphi_*''(\omega_l) + p^2 \varphi_*(\omega_l) = 0, \quad (5.5.20)$$

donde  $\omega_l$  se determina mediante el cambio de variable (ver Figura 5.5.2):

$$\xi_{l1} = \frac{\eta_1}{(1 - \beta_l^2)^{1/2}}, \quad \xi_{l2} = \eta_2, \quad \rho_l = \sqrt{\xi_{l1}^2 + \xi_{l2}^2}, \quad \cotan \omega_l = \frac{\xi_{l1}}{\xi_{l2}}. \quad (5.5.21)$$

Entonces, la función  $\phi_p(r, \theta)$  dada por

$$\phi_p(r, \theta) = r^p \varphi(\theta) = \rho_l^p \varphi_*(\omega_l), \quad (5.5.22)$$

con  $\varphi$  y  $\varphi_*$  relacionadas por

$$\varphi(\theta) = \frac{(1 - \beta_l^2 \sin^2 \theta)^{p/2}}{(1 - \beta_l^2)^{p/2}} \varphi_*(\omega_l), \quad (5.5.23)$$

es solución de (5.5.14).

*Demostración.* En primer lugar, observamos que el cambio de coordenadas definido por (5.5.21) permite expresar (5.5.14) como el Laplaciano de  $\phi_p$ ,

$$\frac{\partial^2 \phi_p}{\partial \xi_{l1}^2} + \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial \xi_{l2}^2} = 0. \quad (5.5.24)$$

Además, la relación entre las respectivas coordenadas polares es

$$\rho_l = \frac{r\sqrt{1 - \beta_l^2 \sin^2(\theta)}}{(1 - \beta_l^2)^{1/2}}, \quad \cotan \omega_l = (1 - \beta_l^2)^{-1/2} \cotan \theta. \quad (5.5.25)$$

Resolvemos la ecuación (5.5.24) mediante el método de separación de variables, suponiendo que  $\phi_p(\rho_l, \omega_l)$  es de la forma

$$\phi_p(\rho_l, \omega_l) = f(\rho_l)\varphi_*(\omega_l). \quad (5.5.26)$$

Ahora bien, el Laplaciano en coordenadas polares, se escribe como

$$\Delta\phi(\rho_l, \omega_l) = \frac{1}{\rho_l} \frac{\partial}{\partial \rho_l} \left( \rho_l \frac{\partial \phi}{\partial \rho_l} \right) + \frac{1}{\rho_l^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega_l^2},$$

y, por tanto, por (5.5.26), la ecuación (5.5.24) se reduce a:

$$\frac{\rho_l}{f(\rho_l)} \frac{d}{d\rho_l} (\rho_l f'(\rho_l)) = -\frac{1}{\varphi_*(\omega_l)} \varphi_*''(\omega_l) = P.$$

En consecuencia,  $f(\rho_l)$  y  $\varphi_*(\omega_l)$  deben ser solución de

$$\begin{aligned} \rho_l^2 f''(\rho_l) + \rho_l f'(\rho_l) - P f(\rho_l) &= 0, \\ \varphi_*''(\omega_l) + P \varphi_*(\omega_l) &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones mediante métodos estándar y teniendo en cuenta que el desplazamiento ha de ser acotado cuando  $\rho_l \rightarrow 0$ , se deduce que  $P \in \mathbb{R}^+$  y

$$f(\rho_l) = \rho_l^p, \quad \varphi_*(\omega_l) = A_l \cos(p\omega_l) + C_l \sin(p\omega_l), \quad (5.5.27)$$

con  $p^2 = P$ . Finalmente, teniendo en cuenta el cambio de variable (5.5.25) y la relación (5.5.26) se deduce:

$$\phi_p(\rho_l, \omega_l) = \rho_l^p \varphi_*(\omega_l) = \frac{r^p (1 - \beta_l^2 \sin^2(\theta))^{p/2}}{(1 - \beta_l^2)^{p/2}} \varphi(\theta), \quad (5.5.28)$$

de donde se obtiene (5.5.23). □

**Lema 5.5.4** Sean  $q \in \mathbb{R}^+$  y  $\kappa_*(\omega_t)$  solución de

$$\kappa_*''(\omega_t) + q^2 \kappa_*(\omega_t) = 0, \quad (5.5.29)$$

donde  $\omega_t$  se determina mediante el cambio de variable:

$$\xi_{t1} = \frac{\eta_1}{(1 - \beta_t^2)^{1/2}}, \quad \xi_{t2} = \eta_2, \quad \rho_t = \sqrt{\xi_{t1}^2 + \xi_{t2}^2}, \quad \cotan \omega_t = \frac{\xi_{t1}}{\xi_{t2}}. \quad (5.5.30)$$

Entonces, la función  $B_q(r, \theta)$  dada por

$$B_q(r, \theta) = r^q \kappa(\theta) = \rho_t^q \kappa_\star(\omega_t), \quad (5.5.31)$$

con  $\kappa$  y  $\kappa_\star$  relacionadas por

$$\kappa(\theta) = \frac{(1 - \beta_t^2 \sen^2 \theta)^{q/2}}{(1 - \beta_t^2)^{q/2}} \kappa_\star(\omega_t), \quad (5.5.32)$$

es solución de (5.5.15).

*Demostración.* El resultado se demuestra de manera totalmente análoga al lema anterior.  $\square$

Puesto que estamos interesados en considerar desplazamientos acotados en  $r = 0$ , de las relaciones (5.5.16) se deduce que los parámetros  $p$  y  $q$  deben ser mayores que 1.

Acabamos de obtener una expresión en variables separadas para los potenciales,  $B$  y  $\phi$ . A continuación, a partir de las ecuaciones de ondas (5.5.14)–(5.5.15), las condiciones de contorno sobre la grieta y las condiciones de simetría y antisimetría del desplazamiento, deduciremos una serie de ecuaciones que deben verificar  $\varphi(\theta)$  y  $\kappa(\theta)$ , definidas por (5.5.23) y (5.5.32), respectivamente.

**Lema 5.5.5** Sean  $p, q \in \mathbb{R}^+$  y  $B_q$  y  $\phi_p$  potenciales del desplazamiento de la forma (5.5.31) y (5.5.22) respectivamente, y verificando las ecuaciones (5.5.14)–(5.5.15). Entonces  $\varphi$  y  $\kappa$  verifican:

$$\varphi''(\theta) = \varphi(\theta) \left( \beta_t^2 (p-1)p - p^2 \right), \quad \text{con } \theta = 0, \pi, \quad (5.5.33)$$

$$\kappa''(\theta) = \kappa(\theta) \left( \beta_t^2 (q-1)q - q^2 \right), \quad \text{con } \theta = 0, \pi. \quad (5.5.34)$$

*Demostración.* Haremos la demostración para  $\phi_p$ . El resultado para  $B_q$  se demuestra de forma análoga.

Escribimos la primera ecuación en (5.5.14) respecto a las coordenadas polares  $(r, \theta)$ :

$$(1 - \beta_l^2) \left[ \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial r^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \phi_p}{\partial r} \right) + \frac{2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_p}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial r \partial \theta} \right) \right] + \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial r^2} + \frac{\cos^2(\theta)}{r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \phi_p}{\partial r} \right) + \frac{2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{r} \left( \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_p}{\partial \theta} \right).$$

Puesto que en  $\theta = 0, \pi$ , es decir, en los puntos  $\eta_2 = 0$ , se cumple que  $\sin(\theta) = 0$ , la expresión anterior se reduce a

$$(1 - \beta_l^2) \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_p}{\partial r} = 0.$$

Si  $\phi_p$  verifica esta relación, entonces:

$$r^{p-2} \varphi(\theta) (p(p-1)(1 - \beta_l^2) + p) + r^{p-2} \varphi''(\theta) = 0, \quad \theta = 0, \pi,$$

de donde se obtiene el resultado.  $\square$

### 5.5.3. Verificación de las condiciones de contorno.

A continuación, veremos qué condiciones han de cumplir los potenciales  $\varphi(\theta)$  y  $\kappa(\theta)$  para que los desplazamientos y tensiones verifiquen las condiciones de simetría, continuidad y contorno correspondientes a cada uno de los modos. Un punto común a ambos modos es la hipótesis de que los labios de la grieta permanecen libres de esfuerzos. Esto implica que  $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{0}$ , y puesto que el vector normal a la grieta en el sistema de coordenadas móvil es  $\mathbf{n} = (0, 1)$ , se tienen dos condiciones,  $\sigma_\theta = 0$  y  $\sigma_{r\theta} = 0$  en  $\theta = \pi$ . Además, la discontinuidad de los desplazamientos en la grieta,  $\theta = \pi$ , implica que  $u_\theta(r, \pi) < 0$  para el Modo I y  $u_r(r, \pi) \neq 0$  para el Modo II.

**Lema 5.5.6** Sean  $p, q \in \mathbb{R}^+$ ,  $p, q > 1$  y  $\phi_p$  y  $B_q$  los potenciales definidos en (5.5.22) y (5.5.31) respectivamente. Las condiciones  $\sigma_{r\theta} = 0$  y  $\sigma_\theta = 0$  en los

labios de la grieta para los Modos I y II, junto con la condición  $u_\theta(r, \pi) < 0$  para el Modo I y  $u_r(r, \pi) \neq 0$  para el Modo II, se cumplen si  $p = q$ , y las funciones  $\varphi(\theta)$  y  $\kappa(\theta)$  verifican:

$$2\varphi'(\pi) + (\beta_t^2 - 2)p\kappa(\pi) = 0, \quad (\beta_t^2 - 2)p\varphi(\pi) - 2\kappa'(\pi) = 0, \quad (5.5.35)$$

siendo  $\varphi(\theta)$  y  $\kappa(\theta)$  las definidas en (5.5.23) y (5.5.32), respectivamente.

*Demostración.* De la ecuación (5.5.19) se deduce que la condición  $\sigma_{r\theta} = 0$  en  $\theta = \pi$  se cumple si

$$\frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 B_q}{\partial \theta^2} - 2 \frac{\partial \phi_p}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \left( 2 \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial B_q}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 B_q}{\partial r^2} = 0, \quad \forall r > 0, \quad \theta = \pi. \quad (5.5.36)$$

Teniendo en cuenta ahora la ecuación (5.5.34) y las expresiones de  $B_q$  y  $\phi_p$  dadas en (5.5.31) y (5.5.22) en función de  $\varphi$  y  $\kappa$ , se obtiene:

$$r^{q-2}\kappa(\pi) (q(q-1)(\beta_t^2 - 2)) + r^{p-2}2(p-1)\varphi'(\pi) = 0. \quad (5.5.37)$$

Si  $p \neq q$ , la ecuación anterior se verifica para todo  $r$  sólo si  $\varphi'(\pi) = 0$  y  $\kappa(\pi) = 0$ . Pero entonces, por (5.5.16), se concluye que  $u_\theta(r, \pi) = 0$ , lo que contradice la condición  $u_\theta < 0$  para el Modo I. Por tanto, para el Modo I,  $p = q$ .

De forma análoga, considerando la condición  $\sigma_\theta = 0$  en  $\theta = \pi$ , se tiene la ecuación

$$\frac{1}{r^2} \left( (1-\nu) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} - (2\nu-1) \frac{\partial B}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \left( (1-\nu) \frac{\partial \phi}{\partial r} + (2\nu-1) \frac{\partial^2 B}{\partial r \partial \theta} \right) + \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 0, \quad (5.5.38)$$

que debe verificarse en  $\theta = \pi$  y para todo  $r > 0$ .

Utilizando la expresión (5.5.33), la relación (5.5.38) se escribe en función de  $\varphi$  y  $\kappa$  como

$$(p(p-1)(\beta_t^2(1-\nu) - (1-2\nu)))\varphi(\pi) + (1-2\nu)(1-p)\kappa''(\pi) = 0. \quad (5.5.39)$$

De nuevo, si  $p \neq q$ , la ecuación anterior se verifica sólo si  $\varphi(\pi) = 0$  y  $\kappa'(\pi) = 0$ . Pero entonces, por (5.5.16), se concluye que  $u_r(r, \pi) = 0$ , lo que contradice la condición  $u_r \neq 0$  para el Modo II. Por tanto, también para el Modo II,

$p = q$ . Teniendo en cuenta este hecho, y sustituyendo en (5.5.37), se obtiene la primera ecuación del enunciado.

Finalmente, teniendo en cuenta que  $\beta_l^2 = \beta_t^2 \frac{c_t^2}{c_l^2}$  y que por (1.9.9),  $\frac{c_l^2}{c_t^2} = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$ , de (5.5.39) se obtiene la segunda ecuación del enunciado.  $\square$

**Observación 5.5.7** *Nótese que en el caso  $\nu(t) = \mathbf{0}$ ,  $\beta_l = \beta_t = 0$ , se obtiene el mismo resultado.*

### 5.5.3.1. Modo I

El Modo I, o de apertura, se caracteriza por tener el desplazamiento simétrico con respecto al eje  $\eta_2 = 0$ ; en los labios de la grieta, además de ser la tensión nula, el desplazamiento debe ser discontinuo. Para definir el desplazamiento de forma que sea simétrico con respecto al eje  $\eta_2 = 0$ , debe cumplirse

$$u_r(r, \theta) = u_r(r, -\theta), \quad \text{y} \quad u_\theta(r, \theta) = -u_\theta(r, -\theta), \quad (5.5.40)$$

y para que la función resultante sea continua en  $\theta = 0$  es necesario imponer en  $\theta = 0$  las condiciones

$$\begin{cases} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}(r, 0) = 0, \\ u_\theta(r, 0) = 0. \end{cases} \quad (5.5.41)$$

Además, para garantizar que los labios de la grieta estén libres de esfuerzos se requieren las condiciones:

$$\begin{cases} \sigma_{r\theta}(r, \pi) = 0, \\ \sigma_\theta(r, \pi) = 0, \\ u_\theta(r, \pi) < 0. \end{cases}$$

**Lema 5.5.8** *Sean  $p \in \mathbb{R}^+$ ,  $p > 1$  y  $\phi_p$  y  $B_p$  los potenciales definidos en (5.5.22) y (5.5.31), respectivamente. Los desplazamientos asociados a estos potenciales verifican las propiedades del Modo I si*

$$\kappa(0) = 0, \quad \text{y} \quad \varphi'(0) = 0, \quad \text{cuando } \bar{\nu} \neq 0, \quad (5.5.42)$$

o

$$\varphi'(0) - p\kappa(0) = 0, \quad \text{cuando } \bar{\nu} = 0, \quad (5.5.43)$$

siendo  $\kappa(\theta)$  y  $\varphi(\theta)$  las funciones definidas en (5.5.23) y (5.5.32), respectivamente.

*Demostración.* Los desplazamientos asociados al Modo I de fractura son simétricos con respecto a  $\eta_2 = 0$ . Por tanto,

$$u_\theta(r, 0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u_r}{\partial \theta}(r, 0) = 0, \quad \forall r > 0. \quad (5.5.44)$$

Teniendo en cuenta las expresiones (5.5.16) tenemos que

$$u_\theta(r, 0) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_p}{\partial \theta}(r, 0) = \frac{\partial B_p}{\partial r}(r, 0),$$

y

$$\frac{\partial u_r}{\partial \theta}(r, 0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial r \partial \theta}(r, 0) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 B_p}{\partial \theta^2}(r, 0) = 0.$$

En particular, estas condiciones se escriben para los potenciales  $\phi_p$ ,  $B_p$  en términos de  $\varphi$  y  $\kappa$  en la forma:

$$\varphi'(0) = p\kappa(0), \quad (5.5.45)$$

$$p\varphi'(0) + \kappa''(0) = 0. \quad (5.5.46)$$

Estas relaciones implican, gracias a (5.5.34):

$$\beta_t^2 p(p-1)\kappa(0) = 0,$$

de donde se obtiene (5.5.42) en el caso  $\bar{\nu} \neq 0$ , puesto que  $p$  tiene que ser mayor que 1 para que el desplazamiento no presente singularidad en el vértice de la grieta (ver relaciones (5.5.16)). En el caso  $\bar{\nu} = 0$ , la ecuación (5.5.46) se cumple trivialmente, por lo que la única condición sobre los potenciales viene dada por (5.5.45).  $\square$

Recordemos las condiciones que hemos obtenido para  $\varphi(\theta)$  y  $\kappa(\theta)$  hasta el momento:

$$\begin{cases} 2\varphi'(\pi) + (\beta_t^2 - 2)p\kappa(\pi) = 0, \\ (\beta_t^2 - 2)p\varphi(\pi) - 2\kappa'(\pi) = 0, \\ u_\theta(r, \pi) < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \kappa(0) = 0, \text{ y } \varphi'(0) = 0 \text{ si } \bar{\nu} \neq 0, \\ \varphi'(0) - p\kappa(0) = 0 \text{ si } \bar{\nu} = 0. \end{cases}$$

**Lema 5.5.9** Sea  $p \in \mathbb{R}^+$ ,  $p > 1$ . Supongamos que la velocidad del vértice,  $\bar{v}(t)$ , es no nula y que, junto con las características del material, verifica:

$$4(1 - \beta_l^2)^{1/2}(1 - \beta_t^2)^{1/2} - (\beta_t^2 - 2)^2 \neq 0. \quad (5.5.47)$$

Para que los potenciales  $\phi_p$  y  $B_p$  definidos en (5.5.22) y (5.5.31) se correspondan a desplazamientos asociados al Modo I acotados en  $r = 0$ , el parámetro  $p$  debe ser de la forma  $p = \frac{(2k+1)}{2}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Además, la singularidad de la tensión se obtiene para  $p = 3/2$ , en cuyo caso las funciones  $\varphi_*(\omega_l)$  y  $\kappa_*(\omega_t)$  deben tomar la forma:

$$\varphi_*(\omega_l) = A_l \cos\left(\frac{3\omega_l}{2}\right), \quad \kappa_*(\omega_t) = C_t \operatorname{sen}\left(\frac{3\omega_t}{2}\right), \quad (5.5.48)$$

donde los coeficientes  $A_l$  y  $C_t$  están relacionados mediante la igualdad

$$A_l = C_t \frac{\beta_t^2 - 2}{2(1 - \beta_t^2)^{1/2}}. \quad (5.5.49)$$

*Demostración.* Como vimos en la demostración del Lema 5.5.3 (ver 5.5.27), la función  $\varphi_*(\omega_l)$  es de la forma

$$\varphi_*(\omega_l) = A_l \cos(p\omega_l) + C_l \operatorname{sen}(p\omega_l), \quad (5.5.50)$$

y análogamente se obtiene que

$$\kappa_*(\omega_t) = A_t \cos(p\omega_t) + C_t \operatorname{sen}(p\omega_t). \quad (5.5.51)$$

Supongamos en primer lugar que  $\bar{v} \neq 0$ . De la relación (5.5.32) y de la condición  $\kappa(0) = 0$  se obtiene de forma inmediata que  $A_t = 0$ , simplemente teniendo en cuenta que si  $\theta = 0$  entonces  $\omega_t = 0$ . En este caso (5.5.51) se reduce a:

$$\kappa_*(\omega_t) = C_t \operatorname{sen}(p\omega_t). \quad (5.5.52)$$

Veamos a continuación que de la condición  $\varphi'(0) = 0$  se deduce que  $C_l = 0$ . A partir de la relación (5.5.23), derivando respecto a  $\theta$  se obtiene

$$\begin{aligned} \varphi'(\theta) &= \frac{\frac{p}{2}(1 - \beta_l^2 \operatorname{sen}^2(\theta))^{\frac{p-2}{2}}(-2\beta_l^2 \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta))\varphi_*}{(1 - \beta_l^2)^{p/2}} \\ &+ \frac{(1 - \beta_l^2 \operatorname{sen}^2(\theta))^{p/2}\varphi'_*(\omega_l)\omega'_l(\theta)}{(1 - \beta_l^2)^{p/2}}. \end{aligned}$$

Ahora, puesto que

$$\omega'_l(\theta) = \frac{(1 - \beta_l^2)^{1/2}}{1 - \beta_l^2 \sin^2(\theta)}, \quad (5.5.53)$$

podemos escribir

$$\varphi'(\theta) = \frac{(1 - \beta_l^2 \sin^2(\theta))^{\frac{p-2}{2}}}{(1 - \beta_l^2)^{p/2}} (-p\beta_l^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \varphi_*(\omega_l) + (1 - \beta_l^2)^{1/2} \varphi'_*(\omega_l)). \quad (5.5.54)$$

Ahora bien, si  $\theta = 0$  también  $\omega_l = 0$ , y la condición  $\varphi'(0) = 0$  se escribe en términos de  $\varphi'_*(\omega_l)$  como

$$\varphi'_*(0) = 0,$$

lo que junto con la expresión (5.5.50) de  $\varphi_*$  implica que

$$C_l = 0, \quad \varphi_*(\omega_l) = A_l \cos(p\omega_l). \quad (5.5.55)$$

Ahora, si  $\bar{\nu} = 0$ , la condición sobre los potenciales es

$$\varphi'(0) - p\kappa(0) = 0, \quad (5.5.56)$$

y puesto que  $\beta_l = \beta_t = 0$ , de (5.5.54) se tiene que  $\varphi'(\theta) = \varphi'_*(\omega_l)$  por lo que, sustituyendo en la ecuación (5.5.56), se deduce que

$$pC_l - pA_t = 0, \quad (5.5.57)$$

y, en consecuencia,

$$C_l = A_t. \quad (5.5.58)$$

En resumen,

$$\varphi_*(\omega_l) = \begin{cases} A_l \cos(p\omega_l) & \text{si } \bar{\nu} \neq 0, \\ A_l \cos(p\omega_l) + C_l \sin(p\omega_l) & \text{si } \bar{\nu} = 0, \end{cases} \quad (5.5.59)$$

y

$$\kappa_*(\omega_l) = \begin{cases} C_t \sin(p\omega_t) & \text{si } \bar{\nu} \neq 0, \\ C_l \cos(p\omega_t) + C_t \sin(p\omega_t) & \text{si } \bar{\nu} = 0. \end{cases} \quad (5.5.60)$$

Veremos ahora, a partir de las condiciones sobre  $\theta = \pi$ , la relación entre  $A_l$  y  $C_t$  así como el valor de  $p$  para el cual las tensiones presentan singularidad en  $r = 0$ .

De las ecuaciones (5.5.54) y (5.5.59) se deduce que, en  $\theta = \pi$ , y por consiguiente, en  $\omega_l = \pi$

$$\varphi'(\pi) = \begin{cases} -A_l p \operatorname{sen}(p\pi)(1 - \beta_l^2)^{\frac{1-p}{2}} & \text{si } \bar{\nu} \neq 0, \\ p(-A_l \operatorname{sen}(p\pi) + C_l \cos(p\pi)) & \text{si } \bar{\nu} = 0. \end{cases} \quad (5.5.61)$$

De manera similar, derivando (5.5.32) respecto de  $\theta$  se obtiene

$$\kappa'(\theta) = \frac{(1 - \beta_t^2 \operatorname{sen}^2(\theta))^{\frac{p-2}{2}}}{(1 - \beta_t^2)^{p/2}} (-p\beta_t^2 \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \kappa_*(\omega_t) + (1 - \beta_t^2)^{1/2} \kappa'_*(\omega_t)), \quad (5.5.62)$$

que, en  $\theta = \pi$ , se reduce a

$$\kappa'(\pi) = \begin{cases} C_t p \cos(p\pi)(1 - \beta_t^2)^{\frac{1-p}{2}} & \text{si } \bar{\nu} \neq 0, \\ p(-C_l \operatorname{sen}(p\pi) + C_t \cos(p\pi)) & \text{si } \bar{\nu} = 0. \end{cases} \quad (5.5.63)$$

Para obtener el valor de  $p$ , consideramos la condición  $u_\theta(r, \pi) < 0$ , teniendo en cuenta, además, que para que el desplazamiento no presente singularidad en  $r = 0$  (ver relaciones 5.5.16),  $p$  ha de tomar un valor mayor que 1 y para que la tensión presente una singularidad,  $p$  debe ser menor que 2. Entonces,

$$u_\theta(r, \pi) < 0 \Leftrightarrow \varphi'(\pi) - p\kappa(\pi) < 0. \quad (5.5.64)$$

Utilizando la primera ecuación en (5.5.35) se deduce que si  $\bar{\nu} \neq 0$ , la condición se cumple si y sólo si

$$\kappa(\pi) > 0,$$

lo que implica

$$\operatorname{sen}(p\pi) \neq 0. \quad (5.5.65)$$

En cambio, si  $\bar{\nu} = 0$  se obtiene una contradicción y, por tanto, por esta metodología no se obtiene una solución discontinua en la grieta.

Por otra parte, y teniendo en cuenta las relaciones (5.5.23), (5.5.32), (5.5.59) y (5.5.52), las ecuaciones (5.5.35) son equivalentes al sistema

$$\begin{pmatrix} -2p \operatorname{sen}(p\pi)(1 - \beta_l^2)^{\frac{1-p}{2}} & \frac{\beta_l^2 - 2}{(1 - \beta_l^2)^{p/2}} p \operatorname{sen}(p\pi) \\ \frac{\beta_l^2 - 2}{(1 - \beta_l^2)^{p/2}} p \cos(p\pi) & -2p \cos(p\pi)(1 - \beta_l^2)^{\frac{1-p}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_l \\ C_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.5.66)$$

Condición necesaria para que este sistema tenga solución no trivial es que se verifique:

$$(4(1 - \beta_t^2)^{1/2}(1 - \beta_t^2)^{1/2} - (\beta_t^2 - 2)^2) \operatorname{sen}(p\pi) \cos(p\pi) = 0.$$

Gracias a la hipótesis (5.5.47) y a (5.5.65) se concluye que  $\cos(p\pi) = 0$ . Así,  $p = \frac{2k+1}{2}$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Para  $k = 0$ , se obtiene  $p = \frac{1}{2}$ , lo que conduce a desplazamientos no acotados cuando  $r \rightarrow 0$ . Para  $k \geq 2$ , se tiene que  $p \geq \frac{5}{2}$ , lo que conduce a tensiones nulas cuando  $r \rightarrow 0$ . En consecuencia, sólo para  $k = 1$  se recupera una aportación que conduce a una singularidad de las tensiones en el entorno del tip. Por tanto,  $p = \frac{3}{2}$ . Y para este valor de  $p$ , de la primera ecuación del sistema (5.5.66), se obtiene la relación (5.5.49).  $\square$

A continuación, recuperamos la expresión de  $\phi(r, \theta)$  y  $B(r, \theta)$  en el caso  $\bar{\nu} \neq 0$ , deshaciendo el cambio de variable.

**Proposición 5.5.10** *Los potenciales  $\phi$  y  $B$  soluciones de (5.5.14)–(5.5.15) que verifican las condiciones de contorno sobre la grieta, las condiciones de simetría del desplazamiento asociado al Modo I, y que inducen desplazamientos acotados y tensiones singulares en el entorno del vértice de la grieta, son de la forma:*

$$\phi(r, \theta) = \frac{r^{3/2}A_l}{(1 - \beta_l)^{3/4}} \left\{ \cos(\theta) \left( \frac{(1 - \beta_l^2 \operatorname{sen}^2 \theta)^{1/2} + \cos \theta}{2} \right)^{1/2} - (1 - \beta_l^2)^{1/2} \operatorname{sen}(\theta) \left( \frac{(1 - \beta_l^2 \operatorname{sen}^2 \theta)^{1/2} - \cos \theta}{2} \right)^{1/2} \right\}, \quad (5.5.67)$$

y

$$B(r, \theta) = \frac{r^{3/2}C_t}{(1 - \beta_t)^{3/4}} \left\{ \cos(\theta) \left( \frac{(1 - \beta_t^2 \operatorname{sen}^2 \theta)^{1/2} - \cos \theta}{2} \right)^{1/2} + (1 - \beta_t^2)^{1/2} \operatorname{sen}(\theta) \left( \frac{(1 - \beta_t^2 \operatorname{sen}^2 \theta)^{1/2} + \cos \theta}{2} \right)^{1/2} \right\}. \quad (5.5.68)$$

*Demostración.* El resultado se obtiene sustituyendo las expresiones para  $\varphi_*$  y  $\kappa_*$  dados por (5.5.48) en (5.5.22) y (5.5.31) con  $p = 3/2$ , respectivamente, utilizando (5.5.23), y (5.5.32), junto con (5.5.49) y las siguientes relaciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen} \omega_{l(t)} = \frac{(1 - \beta_{l(t)}^2)^{1/2} \operatorname{sen} \theta}{(1 - \beta_{l(t)}^2 \operatorname{sen}^2 \theta)^{1/2}}, \quad \operatorname{cos} \omega_{l(t)} = \frac{\operatorname{cos} \theta}{(1 - \beta_{l(t)}^2 \operatorname{sen}^2 \theta)^{1/2}}, \quad (5.5.69)$$

$$\operatorname{sen} \left( \frac{\omega_{l(t)}}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} \omega_{l(t)}}{2}}, \quad \operatorname{cos} \left( \frac{\omega_{l(t)}}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{cos} \omega_{l(t)}}{2}}, \quad (5.5.70)$$

$$(5.5.71)$$

y teniendo en cuenta que  $\operatorname{cos}(\frac{3\omega_l}{2}) = \operatorname{cos}(\omega_l + \frac{\omega_l}{2})$  y análogamente para el seno.  $\square$

**Observación 5.5.11** *Los potenciales  $\varphi$  y  $B$  que se obtienen tomando el límite cuando  $\bar{\nu} \rightarrow 0$  son*

$$\varphi(\theta) = A_t \operatorname{cos} \left( \frac{3\theta}{2} \right), \quad \kappa(\theta) = C_t \operatorname{sen} \left( \frac{3\theta}{2} \right), \quad (5.5.72)$$

que se puede comprobar que conducen a desplazamientos nulos sobre todo el dominio. Además, hemos visto en la demostración del Lema 5.5.9 que obtener las ecuaciones de los potenciales a partir de las condiciones de frontera conduce a una contradicción con la condición de discontinuidad del desplazamiento en  $\theta = \pi$ .

Se concluye por tanto que este método directo no es adecuado para la obtención de las expresiones de los desplazamientos y las tensiones cerca del vértice de la grieta en el caso de una grieta estática. La obtención de dichas expresiones se realizará mediante un método inverso, en la siguiente sección.

### 5.5.3.2. Modo II

Siguiendo una metodología análoga a la utilizada en la sección anterior, obtendremos ahora las expresiones de los potenciales cuyos desplazamientos asociados verifican las propiedades del Modo II. En particular, el desplazamiento

es antisimétrico con respecto al eje  $\eta_2 = 0$  y, en los labios de la grieta, además de ser la tensión nula, el desplazamiento debe ser discontinuo. Para definir el desplazamiento de forma que sea antisimétrico con respecto al eje  $\eta_2 = 0$ , debe cumplirse

$$u_r(r, \theta) = -u_r(r, -\theta), \quad y \quad u_\theta(r, \theta) = u_\theta(r, -\theta). \quad (5.5.73)$$

Para que la función resultante sea continua en  $\theta = 0$  es necesario imponer las condiciones

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}(r, 0) = 0, \\ u_r(r, 0) = 0. \end{cases} \quad (5.5.74)$$

A estas condiciones hay que añadir que los labios de la grieta deben estar libres de esfuerzos y verificar una condición de deslizamiento entre ellos. Esto permite escribir las condiciones:

$$\begin{cases} \sigma_{r\theta}(r, \pi) = 0, \\ \sigma_\theta(r, \pi) = 0, \\ u_r(r, \pi) \neq 0. \end{cases}$$

**Lema 5.5.12** Sean  $p \in \mathbb{R}^+$ ,  $p > 1$  y  $\phi_p$  y  $B_p$  los potenciales definidos en (5.5.22) y (5.5.31), respectivamente. Los desplazamientos asociados a estos potenciales verifican las propiedades del Modo II si

$$\varphi(0) = 0, \quad \kappa'(0) = 0, \quad \text{cuando } \bar{\nu} \neq 0, \quad (5.5.75)$$

y

$$p\varphi(0) + \kappa'(0) = 0, \quad \text{cuando } \bar{\nu} = 0, \quad (5.5.76)$$

siendo  $\kappa(\theta)$  y  $\varphi(\theta)$  las funciones definidas en (5.5.23) y (5.5.32), respectivamente.

*Demostración.* La segunda de las relaciones (5.5.74), junto con (5.5.16), permite escribir:

$$\frac{\partial \phi_p}{\partial \theta}(r, 0) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_p}{\partial \theta}(r, 0) = 0. \quad (5.5.77)$$

Esta expresión, en términos de  $\varphi$  y  $\kappa$ , es

$$p\varphi(0) + \kappa'(0) = 0. \quad (5.5.78)$$

Un procedimiento similar al utilizado en el Lema 5.5.8, permite deducir a partir de (5.5.22), (5.5.33), (5.5.16) y (5.5.78) que

$$\beta_l^2 p(p-1)\varphi(0) = 0, \quad (5.5.79)$$

de donde se obtiene (5.5.75) en el caso  $\bar{\nu} \neq 0$ , puesto que  $p$  tiene que ser mayor que 1 para que el desplazamiento no presente singularidad en el vértice de la grieta (ver relaciones (5.5.16)). En el caso  $\bar{\nu} = 0$ , la ecuación (5.5.79) se cumple trivialmente, por lo que la única condición sobre los potenciales viene dada por (5.5.78), lo que demuestra (5.5.76).  $\square$

**Lema 5.5.13** *Sea  $p \in \mathbb{R}^+$ ,  $p > 1$ . Supongamos que la velocidad del vértice,  $\bar{\nu}(t)$ , es no nula y, junto con las características del material verifica:*

$$4(1 - \beta_l^2)^{1/2}(1 - \beta_t^2)^{1/2} - (\beta_t^2 - 2)^2 \neq 0. \quad (5.5.80)$$

*Para que los potenciales  $\phi_p$  y  $B_p$  definidos en (5.5.22) y (5.5.31), se correspondan a desplazamientos asociados al Modo II acotados en  $r = 0$ , el parámetro  $p$  debe ser de la forma  $p = \frac{(2k+1)}{2}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Además, la singularidad de la tensión se obtiene para  $p = 3/2$  en cuyo caso las funciones  $\varphi_*(\omega_l)$  y  $\kappa_*(\omega_t)$  deben tomar la forma:*

$$\varphi_*(\omega_l) = C_l \operatorname{sen} \left( \frac{3\omega_l}{2} \right), \quad \kappa_*(\omega_t) = A_t \cos \left( \frac{3\omega_t}{2} \right), \quad (5.5.81)$$

*donde los coeficientes  $C_l$  y  $A_t$  están relacionados mediante la ecuación*

$$A_t = C_l \frac{2 - \beta_t^2}{2(1 - \beta_l^2)^{1/2}}. \quad (5.5.82)$$

*Demostración.* La demostración es análoga a la del Lema 5.5.9.  $\square$

**Proposición 5.5.14** *Los potenciales  $\phi$  y  $B$  soluciones de (5.5.14)–(5.5.15) que verifican las condiciones de contorno sobre la grieta, las condiciones de antisimetría del desplazamiento asociado al Modo II, y que inducen desplazamientos acotados y tensiones singulares en el entorno del vértice de la grieta,*

son de la forma:

$$\phi(r, \theta) = \frac{r^{3/2} C_l}{(1 - \beta_l)^{3/4}} \left\{ \cos(\theta) \left( \frac{(1 - \beta_l^2 \sin^2 \theta)^{1/2} - \cos \theta}{2} \right)^{1/2} + (1 - \beta_l^2)^{1/2} \sin(\theta) \left( \frac{(1 - \beta_l^2 \sin^2 \theta)^{1/2} + \cos \theta}{2} \right)^{1/2} \right\}, \quad (5.5.83)$$

y

$$B(r, \theta) = \frac{r^{3/2} A_t}{(1 - \beta_t)^{3/4}} \left\{ \cos(\theta) \left( \frac{(1 - \beta_t^2 \sin^2 \theta)^{1/2} + \cos \theta}{2} \right)^{1/2} - (1 - \beta_t^2)^{1/2} \sin(\theta) \left( \frac{(1 - \beta_t^2 \sin^2 \theta)^{1/2} - \cos \theta}{2} \right)^{1/2} \right\}. \quad (5.5.84)$$

*Demostración.* El resultado se demuestra siguiendo el mismo procedimiento que para la Proposición 5.5.10.  $\square$

## 5.6. Recuperación de las expresiones clásicas

En esta sección recuperaremos las expresiones clásicas de las tensiones en el vértice de una grieta estacionaria resolviendo el problema mediante un método inverso.

Consideramos, al igual que en la sección anterior, un sistema de coordenadas centrado en el vértice de la grieta, y el cambio de variable (5.5.1)–(5.5.2), teniendo en cuenta que en este caso  $l$ ,  $m$  y  $\alpha$  son independientes del tiempo.

La ecuación de equilibrio en términos de las coordenadas en el vértice se expresa como

$$\rho_0 \frac{d^2 u_\alpha}{dt^2} - \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial \hat{X}_\beta} = 0, \quad \alpha \in \{1, 2\}. \quad (5.6.1)$$

Realizamos, a continuación, el cambio de variable a las coordenadas  $\eta_1$  y  $\eta_2$  que expande la región cercana al vértice de la grieta y nos permite reescribir la ecuación de equilibrio como:

$$\rho_0 \frac{d^2 u_\alpha}{dt^2} - \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial \eta_\beta} = 0, \quad \alpha \in \{1, 2\}. \quad (5.6.2)$$

En consecuencia, cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , esto es, en puntos próximos al vértice de la grieta, buscamos soluciones de la ecuación

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial \eta_\beta} = 0, \quad \alpha \in \{1, 2\}. \quad (5.6.3)$$

Para que esta ecuación se cumpla, es suficiente que  $\boldsymbol{\sigma}$  tome la forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \text{Rot } \mathbf{P}, \quad (5.6.4)$$

donde  $\mathbf{P}$  debe elegirse de forma que su rotacional sea simétrico. Si se toma  $\mathbf{P} = (\text{Rot } \boldsymbol{\Phi})^t$  de forma que  $\boldsymbol{\Phi}$  sea simétrico, se puede comprobar que  $\boldsymbol{\sigma}$  definido por (5.6.4) también lo es y verifica la ecuación de equilibrio (5.6.3).

Un caso particular son los tensores de la forma

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A(\eta_1, \eta_2) \end{pmatrix} \quad (5.6.5)$$

donde  $A$  se denomina función de Airy.

Para un tensor de esta forma, se verifica que:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 A}{\partial \eta_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 A}{\partial \eta_1^2}, \quad \sigma_{12} = \frac{\partial^2 A}{\partial \eta_1 \partial \eta_2}. \quad (5.6.6)$$

Ahora bien, conocido  $\boldsymbol{\sigma}$ , para que exista un desplazamiento  $\mathbf{u}$  tal que

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}[\boldsymbol{\varepsilon}] \quad \text{con} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t),$$

el tensor de deformación  $\boldsymbol{\varepsilon}$  debe verificar las bien conocidas ecuaciones de compatibilidad

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial \eta_j \partial \eta_i} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{lj}}{\partial \eta_i \partial \eta_k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{kj}}{\partial \eta_i \partial \eta_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial \eta_j \partial \eta_k} = 0. \quad (5.6.7)$$

La relación de deformaciones planas permite escribir la inversa de la ley de Hooke como:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1 + \nu}{E} ((1 - \nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}), \quad (5.6.8)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1 + \nu}{E} ((1 - \nu)\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}), \quad (5.6.9)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{12}, \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0. \quad (5.6.10)$$

Bajo las hipótesis de deformaciones planas, la única ecuación de (5.6.7) que no se cumple trivialmente es:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial \eta_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial \eta_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} = 0. \quad (5.6.11)$$

Sustituyendo las expresiones de la tensión dadas por (5.6.6) en la ecuación (5.6.11), se deduce que la condición de compatibilidad se cumple si la función de Airy es biarmónica:

$$\Delta \Delta A = 0. \quad (5.6.12)$$

Consideramos a continuación las coordenadas polares  $(r, \theta)$  asociadas al sistema  $(\eta_1, \eta_2)$ . Las componentes del tensor de tensiones en coordenadas polares se obtienen a partir de la función de Airy  $A$  como

$$\sigma_{rr}(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2}, \quad (5.6.13)$$

$$\sigma_{\theta}(r, \theta) = \frac{\partial^2 A}{\partial r^2}, \quad (5.6.14)$$

$$\sigma_{r\theta}(r, \theta) = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial A}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A}{\partial r \partial \theta}. \quad (5.6.15)$$

Para resolver la ecuación (5.6.12), supondremos que  $A(r, \theta)$  es de la forma

$$A(r, \theta) = r^\lambda g(\theta), \quad (5.6.16)$$

de modo que  $A(r, \theta)$  es solución de la ecuación (5.6.12) si  $g(\theta)$  es solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$g^{(4)}(\theta) + (\lambda^2 + (\lambda - 2)^2)g''(\theta) + \lambda^2(\lambda - 2)^2g(\theta) = 0. \quad (5.6.17)$$

Las componentes del tensor de tensiones en coordenadas polares se escriben en función de  $r$  y  $g(\theta)$  como

$$\sigma_r(r, \theta) = r^{\lambda-2} (g''(\theta) + \lambda g(\theta)), \quad (5.6.18)$$

$$\sigma_{\theta}(r, \theta) = r^{\lambda-2} (\lambda(\lambda - 1)g(\theta)), \quad (5.6.19)$$

$$\sigma_{r\theta}(r, \theta) = r^{\lambda-2} (1 - \lambda) g'(\theta). \quad (5.6.20)$$

Buscamos  $g(\theta)$  de la forma  $g(\theta) = e^{im\theta}$ . Los autovalores del polinomio característico asociado a la ecuación diferencial en el caso general en que  $\lambda \neq 0, 1, 2$  son  $m = \pm \lambda$  y  $m = \pm(\lambda - 2)$ , de modo que  $g(\theta)$  será de la forma

$$g(\theta) = C_1 \sin(\lambda\theta) + C_2 \cos(\lambda\theta) + C_3 \sin((\lambda - 2)\theta) + C_4 \cos((\lambda - 2)\theta). \quad (5.6.21)$$

Las soluciones para los casos especiales son

$$g(\theta) = C_1 \sen \theta + C_2 \theta \sen \theta + C_3 \cos \theta + C_4 \theta \cos \theta, \quad \text{para } \lambda = 1, \quad (5.6.22)$$

$$g(\theta) = C_1 + C_2 \theta + C_3 \sen(2\theta) + C_4 \cos(2\theta), \quad \text{para } \lambda = 0, 2. \quad (5.6.23)$$

Puesto que por (5.3.1) la singularidad del producto  $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  debe ser a lo sumo  $1/r$ , se concluye que  $\lambda > 1$  y, por tanto, podemos descartar los casos  $\lambda = 0, 1$ . Además, en el caso  $\lambda = 2$ , la tensión no presenta singularidad en  $r = 0$ , por lo que el estudio de este caso no es interesante para la obtención de la solución singular. Nos centramos entonces en el caso  $\lambda \neq 0, 1, 2$ , es decir, consideramos  $g(\theta)$  dada por (5.6.21).

**Lema 5.6.1** *Las condiciones de contorno  $\sigma_\theta(r, \pi) = 0$  y  $\sigma_{r\theta}(r, \pi) = 0$  se cumplen si  $\sen(2\lambda\pi) = 0$ .*

*Demostración.* Puesto que hemos descartado los casos  $\lambda = 0, 1, 2$ , de las ecuaciones (5.6.19)–(5.6.20) se deduce que las condiciones de contorno del enunciado se cumplen si

$$g(\pi) = 0, \quad \text{y} \quad g'(\pi) = 0, \quad (5.6.24)$$

esto es,

$$g(\pi) = C_1 \sen(\lambda\pi) + C_2 \cos(\lambda\pi) + C_3 \sen((\lambda - 2)\pi) + C_4 \cos((\lambda - 2)\pi) = 0, \quad (5.6.25)$$

$$g'(\pi) = \lambda C_1 \cos(\lambda\pi) - \lambda C_2 \sen(\lambda\pi) - (\lambda - 2)C_3 \cos((\lambda - 2)\pi) + (\lambda - 2)C_4 \sen((\lambda - 2)\pi) = 0. \quad (5.6.26)$$

Teniendo en cuenta la independencia lineal de  $\sen(\lambda\theta)$  y  $\cos(\lambda\theta)$ , las ecuaciones se pueden escribir como un par de sistemas desacoplados

$$\begin{pmatrix} \sen(\lambda\pi) & \sen((\lambda - 2)\pi) \\ \lambda \cos(\lambda\pi) & (\lambda - 2) \cos((\lambda - 2)\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.6.27)$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\lambda\pi) & \cos((\lambda - 2)\pi) \\ -\lambda \sen(\lambda\pi) & -(\lambda - 2) \sen((\lambda - 2)\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.6.28)$$

Estos sistemas tienen solución no trivial si su determinante es nulo. Calculando el determinante de ambos sistemas y realizando cálculos trigonométricos básicos se obtiene que ambas ecuaciones características se reducen a:

$$\operatorname{sen}(2\lambda\pi) = 0, \quad (5.6.29)$$

cuya solución es

$$\lambda = \frac{n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.6.30)$$

**Lema 5.6.2** *La función de Airy a partir de la cual se obtienen tensiones singulares en el vértice de la grieta con energía de deformación finita es:*

$$A_I(r, \theta) = r^{\frac{3}{2}} \left( C_1 \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} + C_2 \cos \frac{3\theta}{2} + C_3 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + 3C_4 \cos \frac{\theta}{2} \right), \quad (5.6.31)$$

siendo  $C_\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

*Demostración.* Como vimos anteriormente, para que la energía de deformación sea finita, es necesario que  $\lambda > 1$ . Además, por las ecuaciones (5.6.18)–(5.6.20), para que la tensión sea singular en  $r = 0$  debe verificarse que  $\lambda < 2$ . Se concluye entonces, por el lema anterior, que  $\lambda = \frac{3}{2}$ .

Conocido el valor de  $\lambda$ , obtenemos a continuación la relación entre  $C_1$  y  $C_3$  a partir de la condición  $\sigma_\theta(r, \pi) = 0$  y entre  $C_2$  y  $C_4$  a partir de la condición  $\sigma_{r\theta}(r, \pi) = 0$ . De la ecuación (5.6.19) se tiene que

$$\sigma_\theta(r, \pi) = 0 \Leftrightarrow g(\pi) = 0 \Leftrightarrow C_1 = -C_3. \quad (5.6.32)$$

De forma análoga, de la ecuación (5.6.20) se concluye que

$$\sigma_{r\theta}(r, \pi) = 0 \Leftrightarrow g'(\pi) = 0 \Leftrightarrow C_4 = 3C_2. \quad (5.6.33)$$

Finalmente, sustituyendo (5.6.32) y (5.6.33) en (5.6.25), y teniendo en cuenta que  $\lambda = 3/2$ , se concluye el resultado.  $\square$

Calculamos a continuación la expresión de los desplazamientos asociados a la función de Airy.

**Lema 5.6.3** *Suponiendo que los desplazamientos y tensiones verifican las hipótesis de deformaciones planas, las componentes del desplazamiento en coordenadas polares pueden expresarse como:*

$$u_r = \frac{1}{2\mu} \left[ -\frac{\partial A}{\partial r} + (1 - \nu)r \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right], \quad (5.6.34)$$

$$u_\theta = \frac{1}{2\mu} \left[ -\frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} + (1 - \nu)r^2 \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right], \quad (5.6.35)$$

para  $r > 0$  y  $0 \leq \theta \leq \pi$ , siendo  $\Theta(r, \theta)$  la función escalar dada por

$$\Theta(r, \theta) = r^{-1/2} \left( -8C_1 \cos \frac{\theta}{2} + 24C_2 \sin \frac{\theta}{2} \right), \quad (5.6.36)$$

y  $A$  definido por (5.6.31).

*Demostración.* Las componentes del tensor de deformación pueden escribirse en función de las componentes del tensor de tensiones y la función de Airy  $A$  como:

$$\varepsilon_r = \frac{1 + \nu}{E} ((1 - \nu)\sigma_r - \nu\sigma_\theta) = \frac{1 + \nu}{E} ((1 - \nu)\Delta A - \sigma_\theta), \quad (5.6.37)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1 + \nu}{E} ((1 - \nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r) = \frac{1 + \nu}{E} ((1 - \nu)\Delta A - \sigma_r), \quad (5.6.38)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{r\theta}. \quad (5.6.39)$$

Teniendo en cuenta la expresión de  $\varepsilon_r$  dada en (A.5) e integrando con respecto a  $r$  se deduce que

$$u_r = \frac{1 + \nu}{E} \frac{\partial A}{\partial r} + \int \frac{(1 + \nu)(1 - \nu)}{E} \Delta A dr + f(\theta). \quad (5.6.40)$$

Sea  $\Theta(t, \theta)$  tal que

$$\Delta \Theta = 0, \quad y \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) = \Delta A. \quad (5.6.41)$$

Entonces,

$$\frac{(1 + \nu)(1 - \nu)}{E} \left( r \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) = \int \frac{(1 + \nu)(1 - \nu)}{E} \Delta A dr + f(\theta), \quad (5.6.42)$$

y (5.6.34) se cumple trivialmente. Puede comprobarse, además, que

$$\frac{\partial \Theta}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} \int \int \Delta A dr d\theta + \frac{1}{r} \int \Delta A d\theta - \frac{1}{r^2} \frac{E}{(1 + \nu)(1 - \nu)} \int f(\theta) d\theta. \quad (5.6.43)$$

De nuevo utilizando (A.5), esta vez para  $\varepsilon_\theta$ , se obtiene que

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = r\varepsilon_\theta - u_r = r \frac{(1+\nu)(1-\nu)}{E} \Delta A - r \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_r - u_r, \quad (5.6.44)$$

y sustituyendo el valor de  $u_r$  dado por (5.6.40), e integrando con respecto a  $\theta$ , se concluye (5.6.35), sin más que tener en cuenta la expresión de  $\frac{\partial \Theta}{\partial r}$  dada en (5.6.43).

Resolviendo la ecuación de Laplace para  $\Theta(r, \theta)$ , se deduce que

$$\Theta(r, \theta) = r^m (D_1 \cos(m\theta) + D_2 \sen(m\theta)), \quad (5.6.45)$$

y, para que se cumpla la relación

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) = \Delta A, \quad (5.6.46)$$

con  $A$  definido por (5.6.31), debe cumplirse que

$$m = \lambda - 2 = \frac{-1}{2}, \quad D_1 = \frac{4}{\lambda - 2} C_1 = 8C_3, \quad D_2 = \frac{4}{\lambda - 2} 3C_2 = -24C_2,$$

de donde se concluye (5.6.36) sin más que tener en cuenta que

$$\sen \left( -\frac{\theta}{2} \right) = -\sen \frac{\theta}{2}.$$

□

**Lema 5.6.4** *La función de Airy asociada al Modo I de fractura viene dada por:*

$$A_I(r, \theta) = \frac{K_I r^{3/2}}{3\sqrt{2\pi}} \left( \cos \frac{3\theta}{2} + 3 \cos \frac{\theta}{2} \right), \quad (5.6.47)$$

*siendo  $K_I$  el primer factor de intensidad de esfuerzos.*

*La función de Airy asociada al Modo II de fractura viene dada por:*

$$A_{II}(r, \theta) = -\frac{K_{II} r^{3/2}}{\sqrt{2\pi}} \left( \sen \frac{3\theta}{2} + \sen \frac{\theta}{2} \right), \quad (5.6.48)$$

*siendo  $K_{II}$  el factor de intensidad de esfuerzos asociado al Modo II.*

*Demostración.* Para obtener la función de Airy asociada al Modo I de fractura, se imponen sobre los desplazamientos las condiciones (5.5.41) de simetría y continuidad en  $\theta = 0$ . Por (5.6.35) y las expresiones obtenidas para  $A$  y  $\Theta$ , se deduce que

$$u_\theta(r, 0) = 0 \Leftrightarrow \frac{r^{1/2}}{2\mu} \left( -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 4(1 - \nu) \right) C_1 = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0. \quad (5.6.49)$$

El valor de  $C_2$  se obtiene de la definición del factor de intensidad de esfuerzos  $K_I$  dada en (5.3.4):

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0(\theta=0)} \sqrt{2\pi r} \sigma_\theta = \sqrt{2\pi r} r^{-1/2} \frac{3}{4} g(0) = \sqrt{2\pi} 3C_2, \quad (5.6.50)$$

y, por tanto,

$$C_2 = \frac{K_I}{3\sqrt{2\pi}}. \quad (5.6.51)$$

Al sustituir  $C_1$  y  $C_2$  en (5.6.31) se concluye (5.6.47).

Análogamente, para el Modo II, utilizando la condición  $u_r(r, 0) = 0$  dada en (5.5.74), se deduce que  $C_2 = 0$  y, de la definición (5.3.4),

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0(\theta=0)} \sqrt{2\pi r} \sigma_{r\theta}, \quad (5.6.52)$$

se deduce que

$$C_1 = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (5.6.53)$$

Se concluye la demostración de (5.6.48) al sustituir  $C_1$  y  $C_2$  en (5.6.31).  $\square$

**Proposición 5.6.5** *Bajo las hipótesis de deformaciones planas y para una grieta estática, la parte singular de las tensiones cerca del vértice de la grieta viene dada por:*

$$\sigma_r = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left( \frac{5}{4} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left( \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2} - \frac{5}{4} \sin \frac{\theta}{2} \right), \quad (5.6.54)$$

$$\sigma_\theta = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left( \frac{3}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left( \frac{3}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \quad (5.6.55)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left( \frac{1}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left( \frac{1}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \right). \quad (5.6.56)$$

*Demostración.* El resultado se obtiene a partir de las expresiones de la función de Airy (5.6.47)–(5.6.48) y las ecuaciones (5.6.18)–(5.6.20), que relacionan las componentes polares de la tensión con la función de Airy.  $\square$

Las expresiones de las tensiones y los desplazamientos en coordenadas cartesianas para una grieta estacionaria son:

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right), \quad (5.6.57)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \quad (5.6.58)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right), \quad (5.6.59)$$

para la tensión y

$$u_x = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( \kappa - 1 + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left( \kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad (5.6.60)$$

$$u_y = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left( \kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( \kappa - 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad (5.6.61)$$

para el desplazamiento, donde  $\kappa$  es la constante de Kolsov, dada por

$$\kappa = 3 - 4\nu,$$

y  $K_I$  y  $K_{II}$  son los factores de intensidad de esfuerzos para los modos de fractura  $I$  y  $II$ .

En el caso de tensiones planas puede probarse que la constante de Kolsov toma el valor

$$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}. \quad (5.6.62)$$

Así, el campo de desplazamientos está contenido en el espacio generado por las siguientes cuatro funciones:

$$\{\Psi_i(r, \theta)\}_{i=1}^4 = \left\{ \sqrt{r} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \theta \right\}. \quad (5.6.63)$$

Estas funciones serán entonces las utilizadas para enriquecer el espacio de elementos finitos en el vértice de la grieta.



# Capítulo 6

## Método de elementos finitos extendidos XFEM

Debido a la presencia de la grieta, el método de elementos finitos clásicos puede proporcionar resultados inadecuados a la hora de capturar las singularidades que se producen cerca del vértice de la grieta. Además, este método representa las caras de la grieta mediante una colección de nodos dobles, uno a cada lado de la interfase, lo que requiere que la malla del dominio se ajuste a la geometría de la grieta, y cualquier cambio en ésta, como por ejemplo su crecimiento, hace necesario un nuevo mallado del dominio. El método de elementos finitos extendidos (XFEM) desarrollado por Moës, Dolbow y Belytschko [10, 24], introduce una nueva metodología que permite describir la geometría de la grieta independientemente de la malla de elementos finitos del dominio, así como captar singularidades conocidas de la solución mediante la introducción de funciones de forma que reproduzcan ese comportamiento. Esto supone importantes ventajas computacionales, al evitarse la generación de nuevas mallas cuando se espera el crecimiento de la grieta o en problemas inversos donde se intenta averiguar la posición de la grieta.

En este capítulo se estudiará la aplicación del método de elementos finitos extendidos a la simulación de placas con grietas, exponiendo con detalle las particularidades del método y las dificultades de su implementación. En primer lugar nos centraremos en el proceso de búsqueda y clasificación de los elementos

intersecados por la grieta y de los nodos enriquecidos. Para ello consideraremos dos casos: en el primero, la grieta se describe por medio de conjuntos de nivel, y en el segundo, de forma poligonal, por medio de un conjunto de puntos. En ambos casos se estudiará la obtención de una representación baricéntrica de los puntos de corte de la grieta con los elementos así como el signo de la función Heaviside en un punto cualquiera de los elementos; esta función juega un papel esencial a la hora de permitir la discontinuidad de los desplazamientos al pasar por los labios de la grieta. A continuación se realizará el estudio del método XFEM y su implementación para finalmente presentar las condiciones de contacto que se suponen entre los labios de la grieta y su implementación con XFEM.

## 6.1. Descripción baricéntrica de una grieta definida mediante conjuntos de nivel

Consideraremos un dominio  $\Omega_s \subset \mathbb{R}^2$  en las condiciones de los capítulos anteriores, cuya frontera se divide en tres partes disjuntas dos a dos,  $\Gamma_D$ ,  $\Gamma_N$  y  $\Gamma_C$ . Las dos primeras representan la zona de desplazamientos y tracciones impuestas respectivamente y la tercera representa la grieta, que es una curva orientada.

En lo que sigue, nos limitaremos al caso de una malla de triángulos, aunque muchos de los conceptos se pueden generalizar fácilmente a mallas de cuadriláteros o tetraedros. Por consiguiente, los índices latinos  $i$ ,  $j$  tomarán valores en  $\{1, 2, 3\}$ , indicando vértices o aristas de elemento, y la notación cíclica  $[j] = j - 3E[(j - 1)/3]$  (o  $[j]_3$  si hay lugar a confusión) se utilizará cuando el índice pudiera ser mayor que 3, siendo  $E$  la función parte entera.

Sobre la grieta y la malla se suponen las siguientes condiciones **(H)**:

- El máximo número de puntos de corte de la grieta con cada elemento es dos.

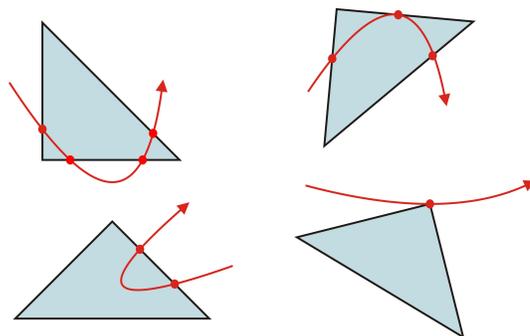


Figura 6.1.1: Situaciones excluidas en la malla del dominio y la grieta.

- La grieta no corta a una misma arista dos veces.
- La grieta no pasa por ningún vértice de la malla.

Bajo estas condiciones, se excluyen las situaciones representadas en la Figura 6.1.1. De ocurrir alguna de estas situaciones, se refinaría la malla hasta que se cumplan. Las condiciones **(H)** permiten aproximar la grieta en cada elemento por un segmento, tal como se muestra en la Figura 6.1.2.

Un volumen de control crack,  $\mathcal{V}^c$ , queda dividido en dos partes por la grieta, y

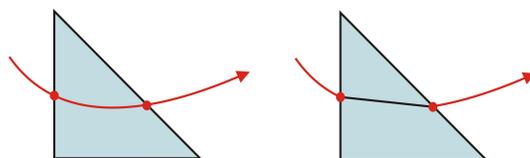


Figura 6.1.2: Aproximación de la grieta por segmentos en un triángulo.

se distinguirá si un punto está a la derecha o a la izquierda de la grieta, cuando ésta se recorre en el sentido que marca su orientación, mediante un signo. Sea  $d(\mathbf{X})$  la función distancia con signo dada por

$$d(\mathbf{X}) = \pm \min_{\bar{\mathbf{X}} \in \Gamma_c} |\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}|, \quad \mathbf{X} \in \mathcal{V}^c \quad (6.1.1)$$

donde el signo es diferente a ambos lados de la grieta. Se sigue, por tanto, que la curva de nivel 0 de esta función escalar es una representación de la grieta.

Definimos la *función de Heaviside*  $H$  que a cada punto le asigna el signo que toma la función  $d$ , esto es,  $H(\mathbf{X}) = \text{sign}(d(\mathbf{X}))$ . Será un valor positivo si el punto está a la izquierda de la grieta, y negativo si está a la derecha.

Ahora, consideramos una discretización del dominio mediante una malla

$$\mathcal{T}_h = \{T_k : k = 1, \dots, m_e\},$$

cuyas aristas no tienen porqué estar alineadas con la grieta. Denotamos por  $m_e$  y  $n_h$  el número de elementos y nodos en la malla, respectivamente. Los valores de la función de nivel se calculan únicamente en los nodos  $d_I = d(\mathbf{X}_I)$ , con  $I = 1, \dots, n_h$ , y se aproxima la función distancia con una nueva función interpolada que seguiremos denotando por  $d(\mathbf{X}) = \sum_I N_I(\mathbf{X})d_I$ , calculada usando las funciones de forma estándar  $N_I(\mathbf{X})$  de la malla de elementos finitos. Con esta simplificación, la representación de la grieta como el nivel 0 de la función  $d$  es solo una aproximación, pues en el interior de los elementos se aproxima por un segmento (ver Figura 6.1.2). De este modo la aproximación de la grieta mejora con el refinamiento de la malla.

Con objeto de representar la grieta a partir de las coordenadas baricéntricas de sus puntos de corte con cada elemento, consideramos la siguiente función de detección de cortes  $\mathcal{G}$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_h &\xrightarrow{\mathcal{G}} \mathbb{R}^3 \times \{-1, 0, 1\} \\ T_k &\rightsquigarrow \begin{cases} ((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), s_k), & \text{si la grieta corta al elemento } T_k, \\ ((0, 0, 0), 0), & \text{en otro caso,} \end{cases} \end{aligned}$$

que a cada elemento, le hace corresponder una terna de escalares que contienen información de los puntos de corte de la grieta con cada una de las aristas del elemento, y otro valor escalar que representa el sentido en el que la grieta corta al elemento, con respecto a la orientación del propio elemento. Veremos a continuación cómo calcular estos valores a partir de la función distancia.

Una propiedad esencial para su cálculo es que en la grieta aproximada debe verificarse:

$$\sum_{I=1}^{n_h} N_I(\mathbf{X})d_I = 0, \quad \sum_{I=1}^{n_h} N_I(\mathbf{X}) = 1, \quad (6.1.2)$$

siendo  $n_h$  el número total de nodos de la malla  $\mathcal{T}_h$ . Además, en una arista con extremos en los vértices con numeración global  $I_1$  e  $I_2$ , sólo  $N_{I_1}$  y  $N_{I_2}$  son

distintas de cero sobre la arista.

Sea  $T_k \in \mathcal{T}_h$  y supongamos que  $T_k$  está cortado por un segmento de grieta. Un punto  $\mathbf{X}_0$  de la recta generada por este segmento de grieta pertenece a la recta que contiene a la arista del elemento  $T_k$  de extremos con numeración global  $I_1$  e  $I_2$ , si el sistema con incógnitas  $\hat{N}_{I_1}$  y  $\hat{N}_{I_2}$  definido por

$$\hat{N}_{I_1}(\mathbf{X}_0)d_{I_1} + \hat{N}_{I_2}(\mathbf{X}_0)d_{I_2} = 0, \quad (6.1.3)$$

$$\hat{N}_{I_1}(\mathbf{X}_0) + \hat{N}_{I_2}(\mathbf{X}_0) = 1, \quad (6.1.4)$$

admite solución. Además, el sistema (6.1.3)–(6.1.4) permitirá identificar las aristas cortadas por la grieta, pues si hay intersección,  $0 \leq \hat{N}_{I_1}(\mathbf{X}_0), \hat{N}_{I_2}(\mathbf{X}_0) \leq 1$ , en cuyo caso,  $\hat{N}_{I_\beta} = N_{I_\beta}$ ,  $\beta = 1, 2$ . Si  $\hat{N}_{I_\beta} \notin [0, 1]$  la grieta no corta a la arista. El sistema (6.1.3)–(6.1.4) no admite solución en el caso excepcional en que ambos extremos de la arista estén exactamente a la misma distancia de la grieta, esto es,  $d_{I_1} = d_{I_2}$  en cuyo caso la grieta sería paralela a la arista.

Para cada arista  $i$  del elemento  $T_k$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , sus extremos serán  $i$  e  $[i + 1]$ , en la numeración local de los nodos en el elemento  $T_k$  e  $I_1, I_2$  en la numeración global de los nodos en la malla. Denotaremos por  $\mathbf{X}_0^i$  el *punto de corte* asociado a la arista  $i$  y por  $\alpha_i$  el valor  $1 - N_{I_1}(\mathbf{X}_0^i)$  obtenido por el sistema lineal (6.1.3)–(6.1.4) cuando éste pertenezca al intervalo  $[0, 1]$ . En otro caso (casos en que la grieta no corta a la arista)  $\alpha_i$  tomará el valor 0.

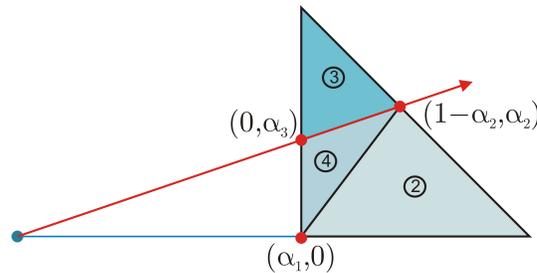


Figura 6.1.3: Puntos de corte en un triángulo

En consecuencia, la intersección del elemento  $T_k$  y la grieta se almacena por medio de un vector  $\boldsymbol{\alpha}_k = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  donde cada  $\alpha_i$  contiene información relativa al corte de la grieta con la arista  $i$  de  $T_k$ . Estos vectores son invariantes

por transformación al elemento de referencia. Las coordenadas de los puntos de corte,  $\mathbf{X}_0^i$  se calculan con facilidad mediante la fórmula

$$\mathbf{X}_0^i = (1 - \alpha_i)\mathbf{X}_i + \alpha_i\mathbf{X}_{[i+1]}, \quad (6.1.5)$$

siendo  $\mathbf{X}_i$  las coordenadas de los vértices  $i$  e  $[i+1]$  del triángulo  $T_k$  de la malla.

Esta metodología permite sustituir la representación de la grieta basada en la función distancia por una representación basada en las ternas  $\alpha_k$ . Incorporaremos además una variable que nos permita recuperar, para cada vértice, el *signo de la distancia interpolada*. Para ello, definimos sobre el elemento  $T_k$  un escalar  $s_k$ :  $s_k$  es nulo si el elemento no es intersecado por la grieta,  $s_k = 1$  si la grieta corta al elemento en la dirección que diremos "positiva", es decir, si, cuando la grieta se recorre con su orientación positiva, corta primero a la arista  $i$  y después a la arista  $[i+1]$  del triángulo, mientras que  $s_k = -1$  en caso contrario.

En resumen, el segmento de grieta para cada elemento cortado queda totalmente determinado por la terna  $\alpha_k$  y el signo  $s_k$ .

Dado un punto cualquiera  $\mathbf{X}$  del elemento  $T_k$ , puede ser necesario conocer su posición respecto de la grieta, que se determina por el signo de la expresión que da la *visibilidad del segmento de grieta* desde el punto  $\mathbf{X}$ . Dicha visibilidad,  $S$ , se define como el área con signo del triángulo formado por el punto  $\mathbf{X}$  y los dos puntos de corte de la grieta con el elemento,  $\mathbf{X}_0^{[i+1]}$  y  $\mathbf{X}_0^{[i-1]}$ , siendo  $i$  el índice de la arista que no está cortada por la grieta. Es decir, para cada punto  $\mathbf{X}$ , la visibilidad de la grieta desde ese punto viene dada por la expresión:

$$S = s_k \begin{vmatrix} N_{k1}(\mathbf{X}) & N_{k2}(\mathbf{X}) & N_{k3}(\mathbf{X}) \\ N_{k1}(\mathbf{X}_0^{[i+1]}) & N_{k2}(\mathbf{X}_0^{[i+1]}) & N_{k3}(\mathbf{X}_0^{[i+1]}) \\ N_{k1}(\mathbf{X}_0^{[i-1]}) & N_{k2}(\mathbf{X}_0^{[i-1]}) & N_{k3}(\mathbf{X}_0^{[i-1]}) \end{vmatrix},$$

con  $ki \in I_k$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , siendo  $I_k$  el conjunto de índices globales de los vértices del elemento  $T_k$ .

Este cálculo resulta útil a la hora de realizar la cuadratura numérica, para conocer a qué lado de la grieta están los puntos de integración.

## 6.2. Descripción baricéntrica de una grieta poligonal

En esta sección consideraremos el caso particular en el que la grieta  $\Gamma_C$  está descrita de forma poligonal mediante una colección de puntos  $P_C = \{A_j\}_{j=1}^{n_C}$ , siendo  $n_C$  el número de puntos característicos de la poligonal. Describiremos el proceso de cálculo de su representación baricéntrica,  $\alpha_k, s_k$ , para  $T_k \in \mathcal{T}_h$ , expuesta en la sección anterior para este caso, en el que se desconoce la función distancia. Supondremos, al igual que en la sección anterior, que la malla del dominio  $\mathcal{T}_h$  y la grieta  $\Gamma_C$  están en las condiciones **(H)**

Para cada arista  $i$  del elemento  $T_k$ , analizaremos si hay un segmento de grieta que interseca a la arista. Un segmento  $\overline{AB}$  corta la arista  $\overline{\mathbf{X}_i\mathbf{X}_{[i+1]}}$  del elemento  $T_k$  si y solo si

$$|AB\mathbf{X}_i|_{\circ}|AB\mathbf{X}_{[i+1]}|_{\circ} < 0, \quad \text{y} \quad |A\mathbf{X}_i\mathbf{X}_{[i+1]}|_{\circ}|B\mathbf{X}_i\mathbf{X}_{[i+1]}|_{\circ} \leq 0, \quad (6.2.1)$$

(ver Figura 6.2.1), donde  $|\cdot|_{\circ}$  denota el área con signo del triángulo. Con estas condiciones se excluye el caso en que el segmento  $\overline{AB}$  contiene a un vértice de la arista, lo que es coherente con la última de las condiciones en **(H)**.

Además, si el segmento  $\overline{AB}$  corta a la arista  $\overline{\mathbf{X}_i\mathbf{X}_{[i+1]}}$ , el punto de corte se caracteriza por un escalar  $\alpha_i$  que determina el punto,  $(1 - \alpha_i)\mathbf{X}_i + \alpha_i\mathbf{X}_{[i+1]}$  y que se calcula como

$$\alpha_i = \frac{|AB\mathbf{X}_i|_{\circ}}{|AB\mathbf{X}_i|_{\circ} - |AB\mathbf{X}_{[i+1]}|_{\circ}}.$$

Nótese que  $\alpha_i$  está bien definido al verificarse la primera desigualdad en (6.2.1). Además, si  $|AB\mathbf{X}_i|_{\circ} < 0$ , la función de Heaviside  $H$  tomará el valor  $-1$  en  $\mathbf{X}_i$  y  $1$  en  $\mathbf{X}_{[i+1]}$  y si  $|AB\mathbf{X}_i|_{\circ} > 0$ ,  $H(\mathbf{X}_i) = 1$  y  $H(\mathbf{X}_{[i+1]}) = -1$ . En ambos casos,  $\alpha_i \in (0, 1)$ . En la práctica, si no hay punto de corte de la grieta con la arista  $i$ , al parámetro  $\alpha_i$  se le asignará el valor  $0$ .

Nótese que si  $\overline{\mathbf{X}_i\mathbf{X}_{[i+1]}}$  es una arista del elemento y  $\overline{A_jA_{j+1}}$  es un segmento de la grieta orientado, entonces la condición  $|A_jA_{j+1}\mathbf{X}_i|_{\circ} < 0$  implica que el segmento de grieta sale del elemento a través de esta arista.

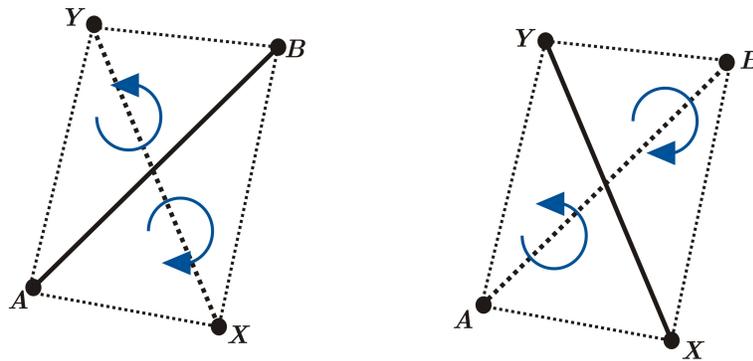


Figura 6.2.1: a)  $|AB\mathbf{X}_i|_{\circ} < 0, |AB\mathbf{X}_{[i+1]}|_{\circ} > 0$ ; b)  $|A\mathbf{X}_i\mathbf{X}_{[i+1]}|_{\circ} > 0, |B\mathbf{X}_i\mathbf{X}_{[i+1]}|_{\circ} < 0$

Aplicando la metodología descrita a todas las aristas del triángulo, obtenemos  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , y la orientación  $s_k$ . Esta información permite deducir de qué aristas del elemento son intersecadas y por cuál sale la grieta.

Aunque es improbable que la grieta real pase exactamente por el vértice del

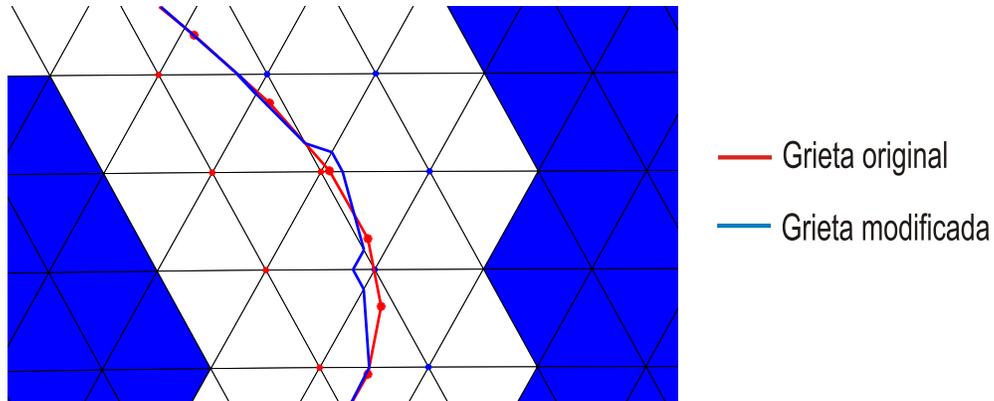


Figura 6.2.2: Corrección en los puntos de corte

elemento, algunos puntos de corte pueden estar cerca de un vértice. Esta proximidad puede causar inestabilidades durante la integración numérica por lo que, para evitar estas situaciones, se introduce un nivel de tolerancia  $\delta$  de modo que los parámetros  $\alpha_i$  se modifican por

$$\alpha_i \approx \max\{\delta, \min\{1 - \delta, \alpha_i\}\}. \quad (6.2.2)$$

Como puede verse en la Figura 6.2.2, cuando la grieta pasa muy próxima a un

vértice de un triángulo, se realiza una traslación de los puntos de corte, y la grieta aproximada se separa del vértice.

### 6.3. Clasificación de los nodos, aristas y elementos de la malla.

En las secciones anteriores, hemos visto cómo obtener a partir de grietas definidas por conjuntos de nivel o por segmentos, una aproximación poligonal, cuyos vértices están en las aristas de los elementos atravesados por la grieta. A partir de ahora, nos referiremos a esta aproximación como la grieta. Como en las secciones anteriores, suponemos que sobre el dominio  $\Omega_s$ , que presenta una grieta  $\Gamma_C$ , se define una malla de elementos finitos  $\mathcal{T}_h$ , que cumple las condiciones (H) expuestas en la Sección 6.1. Denotamos por

- $\mathcal{P}$  el conjunto de todos los nodos de  $\mathcal{T}_h$  a los que llamaremos *nodos estándares*,
- $\mathcal{P}_T$  el subconjunto de  $\mathcal{P}$  formado por los nodos para los cuales el soporte de sus funciones de forma asociadas contiene al vértice de la grieta, a los que llamaremos *nodos tip*,
- $\mathcal{P}_H$  es el subconjunto de  $\mathcal{P}$  de los nodos para los cuales el soporte de sus funciones de forma asociadas está completamente dividido por la grieta y no pertenecen a  $\mathcal{P}_T$ , a los que llamaremos *nodos Heaviside* o *nodos crack*.

Los elementos de la malla se agrupan en tres conjuntos:

- $\mathcal{T}_T$  el conjunto de todos los elementos que tienen algún nodo en  $\mathcal{P}_T$ , a los que llamaremos *elementos tip*,
- $\mathcal{T}_{H\_T}$  el conjunto de todos los elementos que tienen algún nodo en  $\mathcal{P}_H$  y ninguno en  $\mathcal{P}_T$ , a los que llamaremos *elementos Heaviside*.

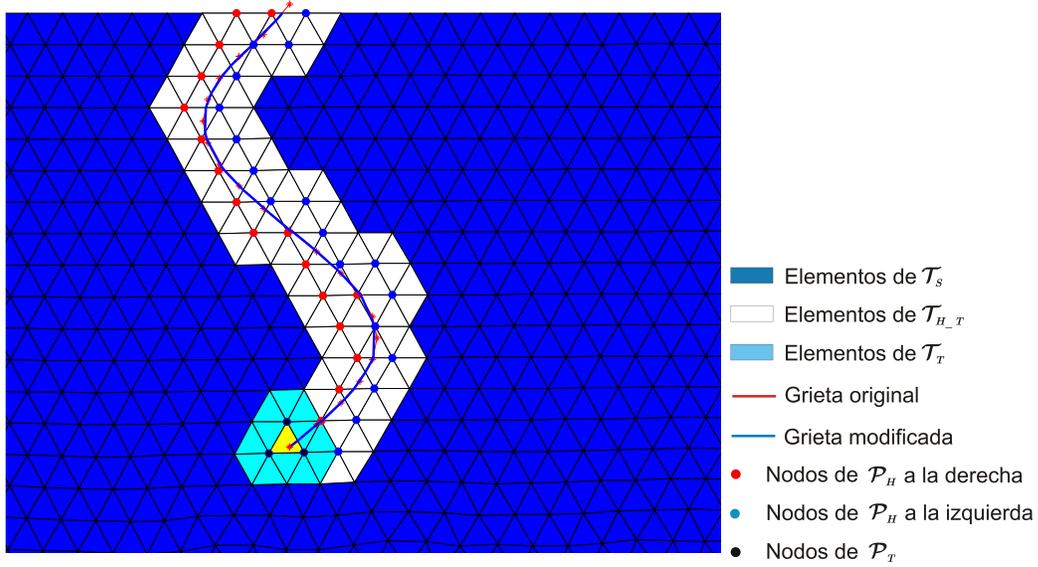


Figura 6.3.1: Conjuntos de elementos  $\mathcal{T}_S$ ,  $\mathcal{T}_{H_T}$  y  $\mathcal{T}_T$ .

- $\mathcal{T}_S$  el conjunto de los elementos que no tienen ningún nodo en  $\mathcal{P}_T \cup \mathcal{P}_H$ , a los que llamaremos *elementos estándares*.

Así,  $\mathcal{T}_h$  es la reunión de los tres conjuntos disjuntos  $\mathcal{T}_S$ ,  $\mathcal{T}_{H_T}$  y  $\mathcal{T}_T$ . Sea  $\mathcal{S}_h$  el conjunto de aristas de la grieta poligonal que aproxima a la grieta real. Denotaremos por  $\mathcal{S}_{H_T}$  y  $\mathcal{S}_T$  los subconjuntos de  $\mathcal{S}_h$  formados por las aristas de la grieta que atraviesan elementos *Heaviside* o *tip*, respectivamente.

Consideraremos las inclusiones  $n_H : \mathcal{P}_H \hookrightarrow \mathcal{P}$  y  $n_T : \mathcal{P}_T \hookrightarrow \mathcal{P}$  que relacionan la numeración local de los nodos en  $\mathcal{P}_H$  (respectivamente  $\mathcal{P}_T$ ) con su numeración global en  $\mathcal{P}$  y las inclusiones  $T_{H_T} : \mathcal{T}_{H_T} \hookrightarrow \mathcal{T}_h$ ,  $T_S : \mathcal{T}_S \hookrightarrow \mathcal{T}_h$  y  $T_T : \mathcal{T}_T \hookrightarrow \mathcal{T}_h$  que hacen lo propio para los elementos. Consideraremos también las aplicaciones inversas  $n_H^{-1}$  y  $n_T^{-1}$  definidas como

$$n_H^{-1}(J) = \begin{cases} I & \text{si } J = n_H(I), I \in \mathcal{P}_H, \\ 0 & \text{si } J \notin \text{Im}(n_H). \end{cases} \quad (6.3.1)$$

Análogamente se define  $n_T^{-1}$ . Nótese que para que  $n_H^{-1}$  y  $n_T^{-1}$  estén bien definidas es necesario añadir un nodo ficticio, etiquetado por cero, a los conjuntos,  $\mathcal{P}_H$  y  $\mathcal{P}_T$ .

Los operadores de conectividades,  $C$ ,  $C_{H\_T}$ ,  $C_T$ , y  $C_{TH}$  relacionan los nodos de un determinado elemento con su numeración en alguno de los conjuntos de nodos  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P}_H$ ,  $\mathcal{P}_T$ . Por ejemplo, el operador de conectividad estándar es tal que  $C(i, k)$  es la posición en  $\mathcal{P}$  del nodo  $i$  del elemento  $T_k \in \mathcal{T}_h$ , mientras que  $C_{TH}(j, l)$  es la posición en  $\mathcal{P}_H$  del nodo  $j$  del elemento  $l$ -ésimo de  $\mathcal{T}_T$  o 0 si el nodo no pertenece a  $\mathcal{P}_H$ .

El siguiente diagrama conmutativo relaciona las aplicaciones y conjuntos definidos anteriormente:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots \rightarrow & (\mathcal{P}_H)^3 & \xleftarrow{\mathbf{n}_H^{-1}} & (\mathcal{P})^3 & \xrightarrow{\mathbf{n}_T^{-1}} & (\mathcal{P}_T)^3 & \\
 & \uparrow C_{H\_T} & \nearrow & \uparrow C & \nwarrow & \uparrow C_T & \\
 & \mathcal{T}_{H\_T} & \xrightarrow{T_{H\_T}} & \mathcal{T}_h & \xleftarrow{T_T} & \mathcal{T}_T & \xrightarrow{C_{TH}} \dots \\
 & & & \uparrow T_S & & & \\
 & & & \mathcal{T}_S & & & 
 \end{array}$$

donde  $\mathbf{n}_H^{-1}$  (respectivamente  $\mathbf{n}_T^{-1}$ ) es la función que actúa como  $n_H^{-1}$  (resp.  $n_T^{-1}$ ) en cada componente de  $C$ . Como puede verse en el diagrama, además del estándar, se tienen otros tres operadores de conectividad,

$$\begin{aligned}
 C_{H\_T} &= \mathbf{n}_H^{-1}(C(:, T_{H\_T}(\mathcal{T}_{H\_T}))), & C_T &= \mathbf{n}_T^{-1}(C(:, T_T(\mathcal{T}_T))), \\
 C_{TH} &= \mathbf{n}_H^{-1}(C(:, T_T(\mathcal{T}_T))),
 \end{aligned}$$

de los cuales nos valdremos para construir los punteros de destino que relacionan los grados de libertad elementales con los globales y que son fundamentales para el ensamblado de las matrices de masa y rigidez.

Asimismo, para la integración sobre  $\Gamma_C$ , es necesario relacionar las aristas de la grieta con los elementos a los que pertenecen. Para ello se definen las aplicaciones  $D$ ,  $D_{H\_T}$  y  $D_T$  que asignan a cada arista de la grieta el elemento correspondiente, según el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots \rightarrow & \mathcal{P}_H^3 & \xleftarrow{\mathbf{n}_H^{-1}} & \mathcal{P}^3 & \xrightarrow{\mathbf{n}_T^{-1}} & \mathcal{P}_T^3 & \\
 & \uparrow C_{H\_T} & \nearrow & \uparrow C & \nwarrow & \uparrow C_T & \\
 & \mathcal{T}_{H\_T} & \xrightarrow{T_{H\_T}} & \mathcal{T}_h & \xleftarrow{T_T} & \mathcal{T}_T & \xrightarrow{C_{TH}} \dots \\
 & \uparrow D_{H\_T} & & \uparrow D & & \uparrow D_T & \\
 & \mathcal{S}_{H\_T} & \xrightarrow{S_{H\_T}} & \mathcal{S}_h & \xleftarrow{S_T} & \mathcal{S}_T & 
 \end{array}$$

Veremos ahora con un sencillo ejemplo cómo son los operadores de conexión y las inclusiones definidas anteriormente. Consideramos la malla ejemplo que se muestra en la Figura 6.3.2. Como puede verse, consta de once nodos y diez elementos. Los conjuntos de nodos y elementos serán:

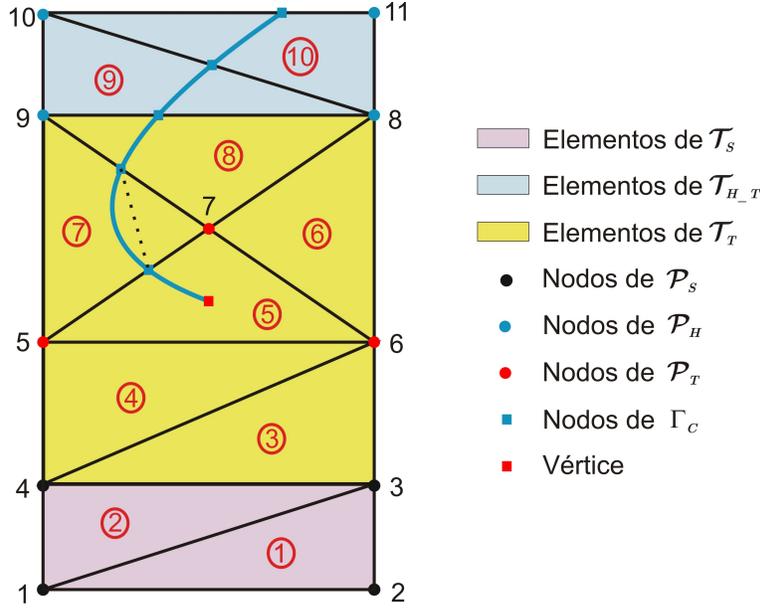


Figura 6.3.2: Malla ejemplo

$$\mathcal{P} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}, \quad \mathcal{T}_h = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

$$\mathcal{P}_S = \{1, 2, 3, 4\}, \quad \mathcal{P}_H = \{8, 9, 10, 11\}, \quad \mathcal{P}_T = \{5, 6, 7\}.$$

$$\mathcal{T}_S = \{1, 2\}, \quad \mathcal{T}_{H_T} = \{9, 10\}, \quad \mathcal{T}_T = \{3, 4, 6, 7, 8, 5\}.$$

Para distinguir los índices locales de  $\mathcal{P}_H$  de los de  $\mathcal{P}_T$  y de los índices globales, utilizaremos los subíndices  $H$  y  $T$  para precisar con mayor claridad a qué conjunto nos referimos en cada momento. Con esta notación, las aplicaciones inversas de las inclusiones escalares son,

$$n_H^{-1}(j) = 0, \quad 1 \leq j \leq 7; \quad n_H^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_H \\ 2_H \\ 3_H \\ 4_H \end{pmatrix}.$$

$$n_T^{-1}(j) = 0, \text{ si } j \in \{1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11\}; \quad n_T^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_T \\ 2_T \\ 3_T \end{pmatrix}.$$

Las matrices de conectividades  $C$ ,  $C_{H\_T}$ ,  $C_{HT}$  y  $C_T$  estarán dadas por

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 & 6 & 6 & 7 & 7 & 8 & 8 \\ 2 & 3 & 6 & 6 & 7 & 8 & 9 & 8 & 10 & 11 \\ 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 7 & 5 & 9 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad C_{H\_T} = \begin{pmatrix} 1_H & 1_H \\ 3_H & 4_H \\ 2_H & 3_H \end{pmatrix},$$

$$C_{TH} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_H & 2_H & 1_H & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2_H & 0 \end{pmatrix}, \quad C_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2_T & 3_T & 3_T & 2_T \\ 2_T & 2_T & 0 & 0 & 0 & 3_T \\ 0 & 1_T & 3_T & 1_T & 0 & 1_T \end{pmatrix},$$

recordando que las aplicaciones  $\mathbf{n}_H^{-1}$  y  $\mathbf{n}_T^{-1}$  actúan sobre cada columna de  $C$  como las aplicaciones escalares  $n_H^{-1}$  y  $n_T^{-1}$  actúan sobre cada componente de dicha columna.

## 6.4. Aproximación XFEM

La esencia del método de elementos finitos extendidos reside en la ampliación del espacio de aproximación con funciones particulares que presenten propiedades características de la solución esperada, como pueden ser discontinuidades fuertes en la solución o sus derivadas, y singularidades. Multiplicando estas funciones por las funciones de base estándar del FEM se obtienen nuevas funciones de base que respetan el concepto básico de partición de la unidad para la aproximación por elementos finitos.

En problemas de grietas se enriquece entonces el espacio de elementos finitos teniendo en cuenta la discontinuidad del desplazamiento en la grieta y la singularidad de las tensiones en el entorno del tip (ver (5.6.57)). Así, la aproximación del desplazamiento se define como

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{X}) = \sum_{I \in \mathcal{P}} N_I(\mathbf{X}) \left[ \vec{u}_I + \underbrace{H(\mathbf{X})\vec{c}_I}_{I \in \mathcal{P}_H} + \sum_{l=1}^4 \underbrace{\Psi_l(\mathbf{X})\vec{b}_I^l}_{I \in \mathcal{P}_T} \right], \quad (6.4.1)$$

donde  $H$  es la función de salto de Heaviside, definida en la Sección 6.1, en la cual la discontinuidad está alineada con la grieta y  $\Psi_l$  son funciones que generan el espacio al que pertenece el comportamiento asintótico de un material elástico lineal cerca del tip (ver 5.6.63), dadas por

$$\begin{aligned}\Psi_1(\mathbf{X}) &= \sqrt{r} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}; & \Psi_2(\mathbf{X}) &= \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}; \\ \Psi_3(\mathbf{X}) &= \sqrt{r} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \theta; & \Psi_4(\mathbf{X}) &= \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \theta,\end{aligned}\quad (6.4.2)$$

donde  $\theta(\mathbf{X}) \in [-\pi, \pi]$  es el ángulo polar respecto a un sistema de referencia que tiene como origen el tip de la grieta y como semieje de abscisas positivo el vector tangente a la grieta en el tip en la dirección positiva respecto de la orientación de la grieta, y  $r$  es la distancia del punto  $\mathbf{X}$  al tip.

Las funciones  $\{N_I(\mathbf{X})H(\mathbf{X}), I \in \mathcal{P}_H\}$  se denominan *funciones de forma Heaviside*, mientras que las funciones  $\{N_I(\mathbf{X})\Psi_l(\mathbf{X}), I \in \mathcal{P}_T, 1 \leq l \leq 4\}$ , se denominan *funciones de forma tip*.

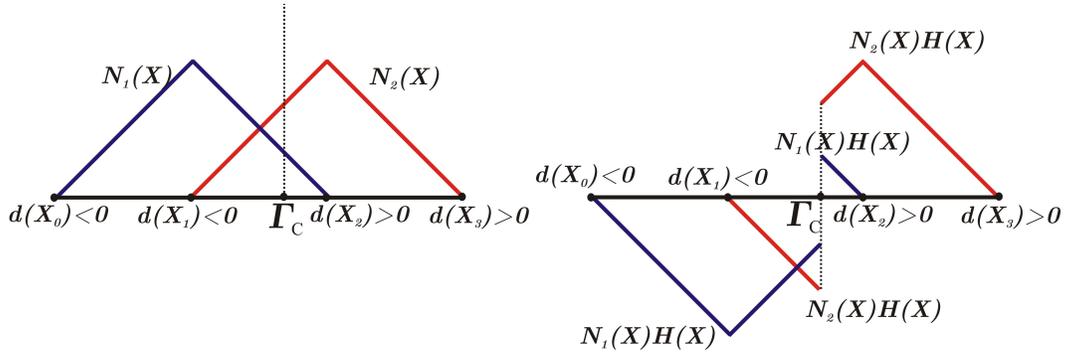


Figura 6.4.1: Funciones de forma estándares y de Heaviside 1D

En la Figura 6.4.1 se muestran las funciones de forma unidimensionales estándar asociadas a dos nodos,  $X_1$  y  $X_2$ , cada uno a un lado de la grieta, y las funciones de forma Heaviside correspondientes a esos mismos nodos. Análogamente, en las Figuras 6.4.2 y 6.4.3 se representan las funciones de forma Heaviside bidimensionales asociadas a los tres nodos de un triángulo atravesado por la grieta.

Nótese que el límite de la primera función asintótica definida en (6.4.2),  $\sqrt{r} \operatorname{sen} \frac{\theta(\mathbf{X})}{2}$ ,

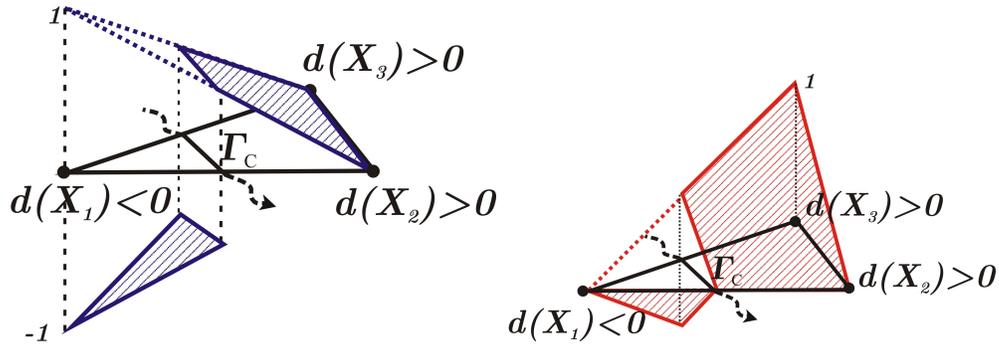


Figura 6.4.2: Funciones de forma Heaviside 2D

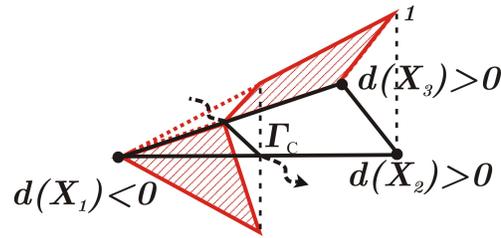


Figura 6.4.3: Funciones de forma Heaviside 2D

cuando nos acercamos a la grieta por ángulos positivos, esto es  $\theta = \pi$ , es  $\Psi_1(\pi^+) = \sqrt{r} \sin \frac{\pi}{2} = \sqrt{r}$ , mientras que  $\Psi_1(\pi^-) = \sqrt{r} \sin \frac{-\pi}{2} = -\sqrt{r}$ . Este hecho produce ciertas dificultades, pues es necesario alinear el segmento  $\theta = \pi$  con la grieta en los elementos adyacentes al elemento que contiene al tip. Por simplicidad, consideraremos que la grieta es recta en un entorno del tip. Denotamos por  $\mathbf{n}_{tip}$  el vector unitario tangente a la grieta en el tip,  $R_{\pi/4}\mathbf{n}_{tip}$  el vector tangente obtenido al rotar  $\mathbf{n}_{tip}$  un ángulo de  $\pi/4$  y  $\mathbf{X}_{tip}$  las coordenadas del tip. Entonces, se verifica:

$$\begin{aligned} \cos \theta(\mathbf{X}) &= \frac{\mathbf{X} - \mathbf{X}_{tip}}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_{tip}|} \cdot \mathbf{n}_{tip}, \\ \sin \theta(\mathbf{X}) &= \frac{\mathbf{X} - \mathbf{X}_{tip}}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_{tip}|} \cdot R_{\pi/4}\mathbf{n}_{tip}, \\ \sin \frac{\theta(\mathbf{X})}{2} &= \text{sign}(\sin \theta(\mathbf{X})) \sqrt{\frac{1 - \cos \theta(\mathbf{X})}{2}}, \\ \cos \frac{\theta(\mathbf{X})}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \cos \theta(\mathbf{X})}{2}}. \end{aligned}$$

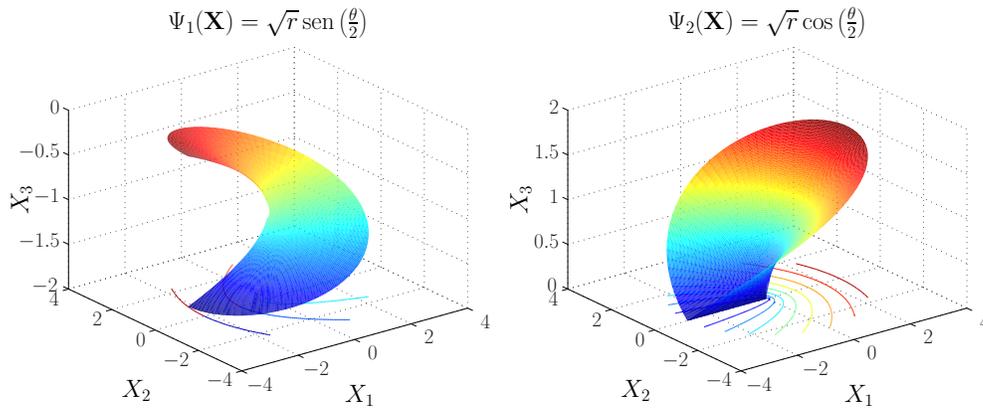


Figura 6.4.4: Funciones de forma Tip

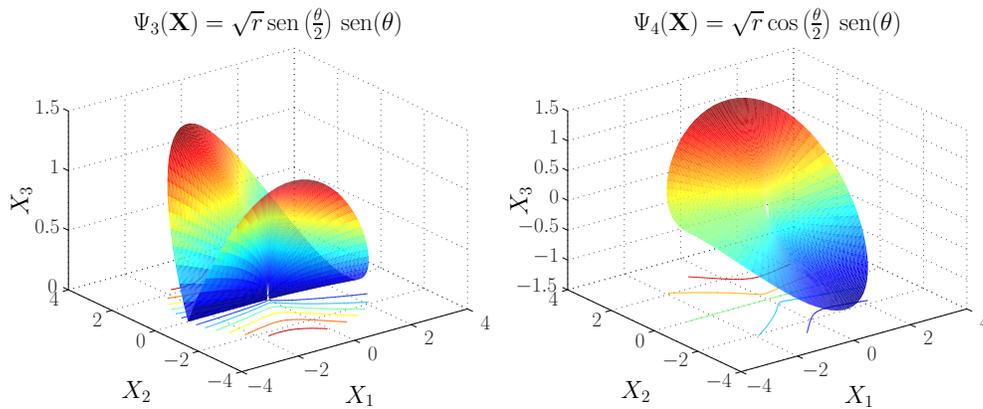


Figura 6.4.5: Funciones de forma Tip

En las Figuras 6.4.4 y 6.4.5 se representan las funciones asintóticas (6.4.2) que se utilizan para el enriquecimiento cerca del tip. Al multiplicar estas funciones asintóticas por las funciones de forma estándar, se garantiza que su soporte es compacto.

## 6.5. Formulación matricial

En esta sección veremos cómo se expresa matricialmente la ecuación variacional (4.4.22), correspondiente al problema de contacto dinámico en un dominio con grieta, cuando aproximamos el espacio de desplazamientos con el método XFEM y en qué modo afecta la formulación en XFEM a las matrices de masa y rigidez respecto a la aproximación estándar por FEM tratada en el Capítulo 4. Trataremos también los principales pasos de la implementación del método. Denotamos el vector de valores nodales por

$$\vec{u}_h = \begin{pmatrix} \vec{u}_I : I \in \mathcal{P} \\ \vec{c}_I : I \in \mathcal{P}_H \\ \vec{b}_I : I \in \mathcal{P}_T, \end{pmatrix},$$

donde  $\vec{u}_I$ ,  $\vec{c}_I$  y  $\vec{b}_I$  son los grados de libertad estándar, Heaviside y tip de la malla, siendo, para cada  $I$ ,  $\vec{u}_I \in \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{c}_I \in \mathbb{R}^2$  y  $\vec{b}_I \in \mathbb{R}^8$ , que está compuesto a su vez por cuatro vectores  $\vec{b}_I^l \in \mathbb{R}^2$ .

Denotaremos también por  $[N]$  al operador tal que para todo  $\mathbf{X} \in \Omega_s$

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{X}) = [N](\mathbf{X})\vec{u}_h, \quad (6.5.1)$$

y por  $[B]$  al operador tal que para todo  $\mathbf{X} \in \Omega_s$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{11} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{22} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{21} + \boldsymbol{\varepsilon}_{12} \end{pmatrix} = [B](\mathbf{X})\vec{u}_h. \quad (6.5.2)$$

Dado que las integrales sobre el dominio se calculan como la suma de las integrales sobre cada uno de los elementos de la malla, centraremos nuestra atención en el cálculo de las matrices elementales y en los punteros de destino utilizados para el ensamblado.

Para construir los operadores  $[N]$  y  $[B]$  consideraremos las siguientes funciones patrón:

$$\mathcal{I}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & v_2 & 0 & \cdots & v_m & 0 \\ 0 & v_1 & 0 & v_2 & \cdots & 0 & v_m \end{pmatrix},$$

para el desplazamiento, y

$$\mathcal{J}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & v_2 & 0 & \cdots & v_m & 0 \\ 0 & w_1 & 0 & w_2 & \cdots & 0 & w_m \\ w_1 & v_1 & w_2 & v_2 & \cdots & w_m & v_m \end{pmatrix},$$

para las componentes del tensor de deformación, siendo  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  dos vectores cualesquiera de la misma dimensión,  $m$ . Para una matriz  $[A] \in \mathcal{M}_{2 \times m}$ , escribiremos  $\mathcal{J}([A])$  para referirnos a  $\mathcal{J}([A](1, :), [A](2, :))$ .

Sea  $V_h$  el espacio generado por las funciones de base,

$$V_h = \langle N_I(\mathbf{X}) \rangle \oplus \langle N_I(\mathbf{X})H(\mathbf{X}) \rangle \oplus \langle N_I(\mathbf{X})\Psi_l \rangle, \quad (6.5.3)$$

Sea  $T_k$  el elemento  $k$ -ésimo de la malla  $\mathcal{T}_h$ . La expresión de la restricción de  $\mathbf{u}_h \in V_h$  a ese elemento depende del conjunto de elementos al que pertenezca  $T_k$ . En ese sentido, podemos distinguir tres casos:

- El elemento pertenece a  $\mathcal{T}_S$ . En ese caso la expresión de  $\mathbf{u}_h$  restringido a  $T_k$ , denotada por  $\mathbf{u}_{h|T_k}$  coincide con la expresión clásica del método de elementos finitos,

$$\mathbf{u}_{h|T_k}(\mathbf{X}) = \sum_{I \in I_k} N_I(\mathbf{X}) \vec{u}_I, \quad (6.5.4)$$

siendo  $I_k = C(:, k)$  el conjunto de índices globales de los nodos del elemento  $T_k$ . Matricialmente, se puede expresar como

$$\mathbf{u}_{h|T_k} = \mathcal{I}([N_k^S]) \vec{u}_{I_k}, \quad (6.5.5)$$

siendo  $[N_k^S] = (N_{k1}, N_{k2}, N_{k3})$  la matriz de  $\mathcal{M}_{1 \times 3}$  cuyas componentes son las funciones de base estándar asociadas a los vértices del elemento  $T_k$ , evaluadas en el punto  $\mathbf{X}$  y  $\vec{u}_{I_k}$  el vector de grados de libertad estándar correspondientes, esto es,

$$\mathbf{u}_{h|T_k} = \begin{bmatrix} N_{k1} & 0 & N_{k2} & 0 & N_{k3} & 0 \\ 0 & N_{k1} & 0 & N_{k2} & 0 & N_{k3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} (u_{k1})_1 \\ (u_{k1})_2 \\ (u_{k2})_1 \\ (u_{k2})_2 \\ (u_{k3})_1 \\ (u_{k3})_2 \end{pmatrix}. \quad (6.5.6)$$

- El elemento pertenece a  $\mathcal{TH}_T$ . En ese caso, la expresión de  $\mathbf{u}_{h|T_k}$  viene dada por

$$\mathbf{u}_{h|T_k}(\mathbf{X}) = \sum_{I \in I_k} N_I(\mathbf{X}) \left[ \vec{u}_I + \underbrace{H(\mathbf{X})\vec{c}_I}_{I \in I_k \cap \mathcal{P}_H} \right], \quad (6.5.7)$$

que, matricialmente, se puede expresar como

$$\mathbf{u}_{h|T_k} = \mathcal{I} \left( [N_k^S \ N_k^H] \right) \begin{pmatrix} \vec{u}_{I_k} \\ \vec{c}_{I_k} \end{pmatrix}, \quad (6.5.8)$$

donde  $[N_k^H] \in \mathcal{M}_{1 \times 3}$  es la matriz de las funciones de base estándar multiplicadas por la función de Heaviside y  $\vec{c}_{I_k} \in \mathcal{M}_{6 \times 1}$  el vector de grados de libertad Heaviside del elemento. Nótese que si no todos los nodos del elemento pertenecen a  $\mathcal{P}_H$  algunas columnas de la matriz no son necesarias y algunas de las componentes de  $\vec{c}_{I_k}$  serán nulas. Aún así, la matriz  $\mathcal{I}([N_k^S \ N_k^H]) \in \mathcal{M}_{2 \times 12}$ . La eliminación de las columnas innecesarias se realizará en el proceso de ensamblado de la matriz elemental en la matriz global.

- El elemento pertenece a  $\mathcal{T}_T$ . En ese caso la expresión de  $\mathbf{u}_{h|T_k}$  viene dada por

$$\mathbf{u}_{h|T_k}(\mathbf{X}) = \sum_{I \in I_k} N_I(\mathbf{X}) \left[ \vec{u}_I + \underbrace{H(\mathbf{X})\vec{c}_I}_{I \in I_k \cap \mathcal{P}_H} + \sum_{l=1}^4 \underbrace{\Psi_l(\mathbf{X})\vec{b}_I^l}_{I \in I_k \cap \mathcal{P}_T} \right], \quad (6.5.9)$$

que expresaremos matricialmente como

$$\mathbf{u}_{h|T_k} = \mathcal{I} \left( [N_k^S \ N_k^H \ N_k^T] \right) \begin{pmatrix} \vec{u}_{I_k} \\ \vec{c}_{I_k} \\ \vec{b}_{I_k} \end{pmatrix}, \quad (6.5.10)$$

siendo  $[N_k^T] \in \mathcal{M}_{1 \times 12}$  la matriz de las funciones de base estándar multiplicadas por las funciones  $\Psi_l$ , y  $\vec{b}_{I_k} \in \mathcal{M}_{6 \times 1}$  el vector de grados de libertad tip del elemento. Para calcular el vector  $[N_k^T]$  se utiliza la matriz,  $[G]$  de las funciones de base (6.4.2),

$$G = \left( \Psi_1 \ \Psi_2 \ \Psi_3 \ \Psi_4 \right), \quad (6.5.11)$$

de modo que

$$[N_k^T] = [N_k^S(1)G \quad N_k^S(2)G \quad N_k^S(3)G] = \quad (6.5.12)$$

$$\left( N_{k1}\Psi_1 \quad N_{k1}\Psi_2 \quad N_{k1}\Psi_3 \quad N_{k1}\Psi_4 \quad N_{k2}\Psi_1 \quad N_{k2}\Psi_2 \quad \dots \right), \quad (6.5.13)$$

y la matriz  $\mathcal{I}([N_k^S \ N_k^H \ N_k^T]) \in \mathcal{M}_{2 \times 36}$ .

**Observación 6.5.1** *En realidad, entre los elementos  $T_k \in \mathcal{T}_T$  se pueden distinguir dos casos, aquellos que tienen algún nodo en  $\mathcal{P}_H$  y los que no. Para estos últimos es claro que el vector  $\vec{c}_{I_k}$  es nulo y las columnas correspondientes a  $[N_k^H]$  son innecesarias y no se ensamblarán. La decisión de hacer un caso específico para estos elementos es elección del programador. En esta memoria optaremos por tratar todos los elementos de  $\mathcal{T}_T$  por igual, para minimizar en lo posible la casuística, puesto que a nuestro entender, el número de elementos que presentan esta particularidad es pequeño para ser considerado relevante en la administración de la memoria en el ordenador.*

Para el cálculo de las componentes del tensor de deformación, se sigue un procedimiento análogo. Al igual que antes, nos restringimos al cálculo de la matriz elemental, y distinguimos tres casos:

- Si el elemento pertenece a  $\mathcal{T}_S$ , la representación es estándar y se tiene

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)|_k = \mathcal{J}([B_k^S]) \vec{u}_{I_k}, \quad (6.5.14)$$

siendo  $[B_k^S] \in \mathcal{M}_{2 \times 3}$  la matriz de las derivadas parciales de las funciones de base estándar asociadas a los vértices del elemento  $T_k$  evaluadas en el punto  $\mathbf{X}$  esto es,

$$[B_k^S] = \begin{bmatrix} N_{k1,1} & N_{k2,1} & N_{k3,1} \\ N_{k1,2} & N_{k2,2} & N_{k3,2} \end{bmatrix}. \quad (6.5.15)$$

Por tanto,

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)|_{T_k} = \begin{bmatrix} N_{k1,1} & 0 & N_{k2,1} & 0 & N_{k3,1} & 0 \\ 0 & N_{k1,2} & 0 & N_{k2,2} & 0 & N_{k3,2} \\ N_{k1,2} & N_{k1,1} & N_{k2,2} & N_{k2,1} & N_{k3,2} & N_{k3,1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} (u_{k1})_1 \\ (u_{k1})_2 \\ (u_{k2})_1 \\ (u_{k2})_2 \\ (u_{k3})_1 \\ (u_{k3})_2 \end{pmatrix},$$

donde, al igual que antes, los índices  $ki$  de  $N_{ki,j}$  se corresponden con los índices globales en  $I_k$  y  $j \in \{1, 2\}$  denota la derivada parcial con respecto a la variable  $j$ .

- Si el elemento pertenece a  $\mathcal{T}H\_T$ ,

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)|_{T_k} = \mathcal{J}([B_k^S \ B_k^H]) \begin{pmatrix} \vec{u}_{I_k} \\ \vec{c}_{I_k} \end{pmatrix}, \quad (6.5.16)$$

siendo  $[B_k^H]$  la matriz  $[B_k^S]$  multiplicada por la función de Heaviside en el punto  $\mathbf{X}$  y  $\mathcal{J}([B_k^S \ B_k^H]) \in \mathcal{M}_{3 \times 12}$ .

- Si el elemento pertenece a  $\mathcal{T}_T$ ,

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)|_{T_k} = \mathcal{J}([B_k^S \ B_k^H \ B_k^T]) \begin{pmatrix} \vec{u}_{I_k} \\ \vec{c}_{I_k} \\ \vec{b}_{I_k} \end{pmatrix}, \quad (6.5.17)$$

siendo  $[B_k^T]$  la matriz de derivadas de las funciones de forma asociadas al enriquecimiento cerca del tip. Veamos cómo se construye la matriz  $[B_k^T]$ . Para calcular las derivadas respecto a  $x$  e  $y$  de las funciones de base del enriquecimiento tip, se tiene en cuenta la regla de la cadena, de modo que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Psi_3}{\partial x} & \frac{\partial \Psi_4}{\partial x} \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Psi_3}{\partial y} & \frac{\partial \Psi_4}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_3}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_4}{\partial r} \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta} & \frac{\partial \Psi_3}{\partial \theta} & \frac{\partial \Psi_4}{\partial \theta} \end{pmatrix}.$$

Si denotamos por  $Rot$  la matriz de rotación:

$$Rot = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \frac{-\text{sen}(\theta)}{r} \\ \text{sen}(\theta) & \frac{\cos(\theta)}{r} \end{pmatrix},$$

y por  $[D\Psi]$  la matriz de las derivadas de  $\Psi$  con respecto a  $r$  y  $\theta$ , entonces

$$[DG] = \text{Rot}[D\Psi]$$

es la matriz de las derivadas de las funciones  $\Psi_i$  con respecto a  $x$  e  $y$ :

$$[DG] = \begin{pmatrix} \Psi_{1,x} & \Psi_{2,x} & \Psi_{3,x} & \Psi_{4,x} \\ \Psi_{1,y} & \Psi_{2,y} & \Psi_{3,y} & \Psi_{4,y} \end{pmatrix}. \quad (6.5.18)$$

Finalmente,  $[B_k^T]$  será una matriz  $2 \times 12$  dada por

$$[B_k^T] = [B_k^S(:, 1)G \quad B_k^S(:, 2)G \quad B_k^S(:, 3)G] + \\ [N_k^S(1)DG \quad N_k^S(2)DG \quad N_k^S(3)DG],$$

y  $\mathcal{J}([B_k^S \quad B_k^H \quad B_k^T]) \in \mathcal{M}_{3 \times 36}$ .

**Observación 6.5.2** *Nótese que*

$$\mathcal{I}([N_k^S \quad N_k^H \quad N_k^T]) = [\mathcal{I}([N_k^S]) \quad \mathcal{I}([N_k^H]) \quad \mathcal{I}([N_k^T])]$$

y

$$\mathcal{J}([B_k^S \quad B_k^H \quad B_k^T]) = [\mathcal{J}([B_k^S]) \quad \mathcal{J}([B_k^H]) \quad \mathcal{J}([B_k^T])].$$

*En lo que sigue, con objeto de simplificar la notación, omitiremos los operadores  $\mathcal{I}$  y  $\mathcal{J}$  siempre que no dé lugar a confusión.*

## 6.6. Reglas de cuadratura para elementos enriquecidos.

Cuando la matriz de rigidez o el vector de fuerzas se calculan en un elemento que está cortado por la grieta, las reglas de cuadratura de Gauss clásicas podrían hacer aparecer modos singulares espúreos. Estas dificultades suelen evitarse dividiendo los elementos en subelementos donde el integrando sea continuo. La descripción de los puntos de corte presentada en las secciones anteriores nos permitirá la generación automática de los subelementos y, en consecuencia, de los puntos y pesos de integración sobre cualquier elemento,

evitando análisis casuísticos.

Cabe destacar el hecho de que esta partición se realiza únicamente para el cálculo de la cuadratura numérica y no altera las propiedades de aproximación de los elementos finitos, ni el número de nodos de la malla.

En primer lugar, presentaremos algunas propiedades que relacionan las coordenadas baricéntricas y cartesianas de puntos de un elemento con puntos de un subelemento. A continuación, utilizando estas propiedades y la información de los puntos de corte proporcionada por las ternas  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , introducidas en la Sección 6.1, obtendremos la expresión de las fórmulas de cuadratura en elementos divididos por la grieta y en el elemento que contiene al tip.

En lo que sigue no se utilizará el convenio de suma sobre índices repetidos, de modo que todo sumatorio se hará explícito.

### 6.6.1. Propiedades de los subelementos

Sea  $T_k$  un triángulo de vértices  $X_1, X_2, X_3$ , y sea  $T_e \subset T_k$  un subtriángulo de  $T_k$  de vértices  $X_1^e, X_2^e, X_3^e$ . En particular, supondremos que los vértices de  $T_e$  son puntos de las aristas de  $T_k$  (ver Figura 6.6.1), aunque esta hipótesis no es imprescindible.

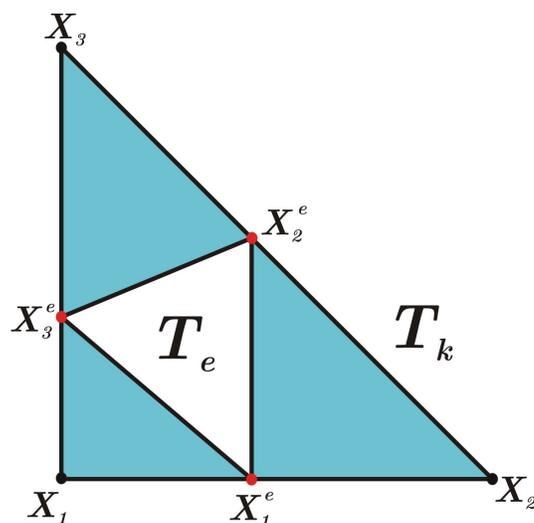


Figura 6.6.1: Triángulo  $T_k$  y subtriángulo  $T_e$

Denotamos por  $N_{ki}$  y  $N_{ei}$  las funciones de forma correspondientes a los triángulos  $T_k$  y  $T_e$ , respectivamente. Dado un punto  $\mathbf{X} \in T_e \subset T_k$ ,  $\vec{N}_k(\mathbf{X})$  representa el vector columna de componentes  $N_{ki}(\mathbf{X})$  y  $\vec{N}_e(\mathbf{X})$  el de componentes  $N_{ei}(\mathbf{X})$ .

**Definición 6.6.1** Definimos la matriz de partición,  $\mathcal{N}_e$ , del triángulo  $T_e$  respecto del triángulo  $T_k$  como la matriz cuyas componentes son las coordenadas baricéntricas de los vértices del triángulo  $T_e$  respecto de las funciones de forma  $N_{ki}$  del triángulo  $T_k$ , es decir,

$$[\mathcal{N}_e] = (\mathcal{N}_e)_{ij} = N_{ki}(\mathbf{X}_j^e) = \begin{pmatrix} N_{k1}(\mathbf{X}_1^e) & N_{k1}(\mathbf{X}_2^e) & N_{k1}(\mathbf{X}_3^e) \\ N_{k2}(\mathbf{X}_1^e) & N_{k2}(\mathbf{X}_2^e) & N_{k2}(\mathbf{X}_3^e) \\ N_{k3}(\mathbf{X}_1^e) & N_{k3}(\mathbf{X}_2^e) & N_{k3}(\mathbf{X}_3^e) \end{pmatrix}. \quad (6.6.1)$$

**Teorema 6.6.2** Sea  $\mathbf{X} \in T_e$ , un punto de coordenadas baricéntricas  $N_{ej}(\mathbf{X})$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$ . Entonces, las coordenadas baricéntricas de  $\mathbf{X}$  con respecto a las funciones de forma  $N_{ki}$  vienen dadas por:

$$N_{ki}(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^3 N_{ej}(\mathbf{X}) N_{ki}(\mathbf{X}_j^e), \quad (6.6.2)$$

es decir,

$$\vec{N}_k(\mathbf{X}) = \mathcal{N}_e \vec{N}_e(\mathbf{X}). \quad (6.6.3)$$

Además, para las derivadas de las funciones de forma, se tiene:

$$[DN_k] = \mathcal{N}_e [DN_e],$$

donde  $DN(:, j)$  representa el vector columna gradiente de  $N_{kj}$ .

*Demostración.* Sea  $f$  una función continua sobre el elemento  $T_k$ , y  $f_i$  los valores de  $f$  en los vértices del triángulo  $T_k$ ,  $f_i = f(\mathbf{X}_i)$ . Entonces, la función de interpolación de  $f$  en el triángulo  $T_k$  es:

$$\Pi f(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^3 N_{ki}(\mathbf{X}) f_i, \quad \mathbf{X} \in T_k. \quad (6.6.4)$$

Sean ahora  $(f_e)_j$  los valores interpolados en el  $j$ -ésimo vértice del subtriángulo  $T_e$ , con la interpolación  $N_{ki}$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , esto es,

$$(f_e)_j = \sum_{i=1}^3 N_{ki}(\mathbf{X}_j^e) f_i. \quad (6.6.5)$$

Por otra parte, la función de interpolación de  $f$  en el triángulo  $T_e$  es:

$$\Pi_e f(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^3 N_{ej}(\mathbf{X}) (f_e)_j, \quad \mathbf{X} \in T_e. \quad (6.6.6)$$

En consecuencia, si tenemos en cuenta que, por ser  $f$  continua en el elemento,  $\Pi_e f = \Pi f$  en cada punto  $\mathbf{X} \in T_e$ , se deduce:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 N_{ki}(\mathbf{X}) f_i &= \sum_{j=1}^3 N_{ej}(\mathbf{X}) \sum_{i=1}^3 N_{ki}(\mathbf{X}_j^e) f_i \\ &= \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 N_{ki}(\mathbf{X}_j^e) N_{ej}(\mathbf{X}) \right) f_i, \quad \forall \mathbf{X} \in T_e, \end{aligned}$$

y para toda función continua sobre  $T_k$ .

En particular,

$$N_{ki}(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^3 N_{ki}(\mathbf{X}_j^e) N_{ej}(\mathbf{X}), \quad (6.6.7)$$

que matricialmente se expresa como:

$$\vec{N}_k(\mathbf{X}) = \mathcal{N}_e \vec{N}_e(\mathbf{X}).$$

De forma análoga, se obtiene el resultado para las derivadas.  $\square$

Así, para cada subtriángulo  $T_e$ , con la matriz de partición  $\mathcal{N}_e$ , se recuperan los valores de las funciones de forma  $N_{ki}$  del triángulo  $T_k$  a partir de los valores de las funciones de forma,  $N_{ej}$ , del triángulo  $T_e$ .

**Teorema 6.6.3** *Sea  $\mathbf{X}$  un punto del elemento  $T_k$  con coordenadas baricéntricas  $(\lambda_i)$ . El punto  $\mathbf{X}^e$  del subelemento  $T_e$  con las mismas coordenadas baricéntricas, esto es,*

$$N_{ej}(\mathbf{X}^e) = \lambda_j,$$

tiene por coordenadas cartesianas,

$$\mathbf{X}^e = [X] \mathcal{N}_e \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix},$$

siendo  $[X]$  la matriz formada por las coordenadas cartesianas de los vértices,  $\mathbf{X}_i$  del triángulo  $T_k$ .

*Demostración.* Puesto que las coordenadas baricéntricas del punto  $\mathbf{X}^e \in T_e$  respecto de las funciones de forma  $N_{ej}$  son las  $\lambda_j$ ,  $\mathbf{X}^e$  se escribe en función de los vértices de  $T_e$  como:

$$\mathbf{X}^e = \sum_{j=1}^3 \lambda_j \mathbf{X}_j^e.$$

Ahora bien, dado que los vértices de  $T_e$  son puntos de  $T_k$ ,

$$\mathbf{X}_j^e = \sum_{i=1}^3 N_{ki}(\mathbf{X}_j^e) \mathbf{X}_i,$$

por lo que

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^e &= \sum_{j=1}^3 \lambda_j \left( \sum_{i=1}^3 N_{ki}(\mathbf{X}_j^e) \mathbf{X}_i \right) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{X}_i \left( \sum_{j=1}^3 \lambda_j N_{ki}(\mathbf{X}_j^e) \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{X}_i \left( \sum_{j=1}^3 (\mathcal{N}_e)_{ij} \lambda_j \right) \end{aligned}$$

de donde se concluye el resultado.  $\square$

**Corolario 6.6.4** Sea  $T_k \in \mathcal{T}_h$  y  $T_e$  un subelemento de  $T_k$  de vértices  $\mathbf{X}_i^e$  y matriz de partición  $\mathcal{N}_e$ . Entonces, el determinante de  $\mathcal{N}_e$  es la proporción de área de  $T_k$  que cae dentro del elemento  $T_e$ , es decir,

$$\det(\mathcal{N}_e) = \frac{\text{Area}(T_e)}{\text{Area}(T_k)}. \quad (6.6.8)$$

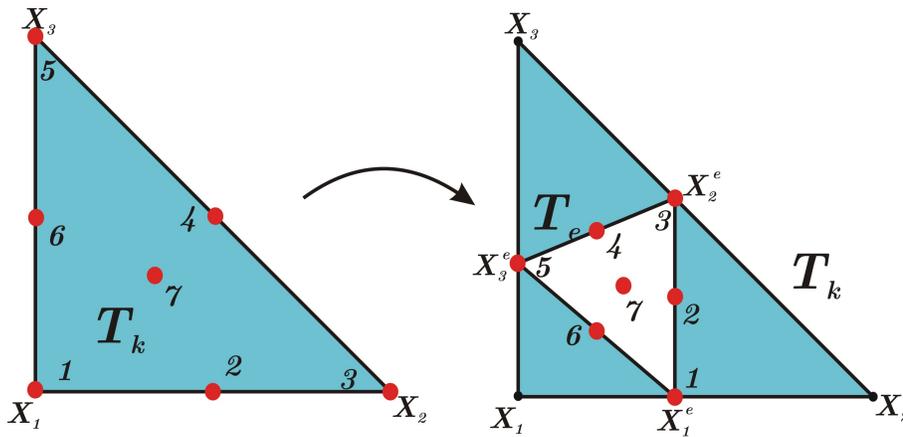


Figura 6.6.2: Puntos en el triángulo  $T_k$  trasladados al subtriángulo  $T_e$

*Demostración.* Es trivial, utilizando el teorema de cambio de variable y el teorema anterior.  $\square$

El teorema anterior permite duplicar en un subelemento una cierta distribución de puntos, como pueden ser los puntos de integración de una cierta fórmula de cuadratura, y calcular fácilmente sus coordenadas cartesianas (ver Figura 6.6.2).

En los siguientes apartados se definirán las matrices de partición, tanto para elementos atravesados por la grieta como para el elemento que contiene al tip, utilizando para ello la información proporcionada por las ternas  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  definidas en las Secciones 6.1 y 6.2 para cada elemento  $T_k$ .

Para distinguir los distintos tipos de elementos, definimos la matriz  $H$  de dimensión  $m_e \times 3$ , siendo  $m_e$  el número de elementos de la malla y 3 el número de aristas de un elemento, cuyas componentes indican el número de cortes de la grieta con cada arista. Como hemos aproximado la grieta por segmentos en cada elemento, la condición **(H)** garantiza que el máximo número de cortes permitido por arista es uno. Para la arista  $i$  del elemento  $T_k$ , la componente  $ki$  de la matriz  $H$  se define a partir de la solución,  $\alpha_i$ , del sistema (6.1.3)–(6.1.4), planteado para los vértices de la arista  $i$ , y de la función  $H_0$  del siguiente modo:

$$H_{ki} = H_0(\alpha_i),$$

donde  $H_0$  es la función Heaviside definida por

$$H_0(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq \delta/2, \\ 1 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

siendo  $\delta$  el parámetro de tolerancia definido en (6.2.2) que establece una distancia mínima de la grieta aproximada a los vértices de la malla.

A partir de estos valores, se construye un nuevo array,  $h$ , que para cada elemento da el número de cortes con la grieta y se define como:

$$h_k = \sum_{i=1}^3 H_{ki}. \quad (6.6.9)$$

Tenemos tres situaciones diferentes:

- $h_k = 0$ . La grieta no interseca al triángulo. En este caso, la metodología de integración es la estándar.
- $h_k = 2$ . Hay dos puntos de corte en diferentes aristas, en cuyo caso  $T_k$  se divide en cuatro subelementos para hacer la integración.
- $h_k = 1$ . El triángulo contiene al tip de la grieta y, en este caso,  $T_k$  se divide en seis subelementos.

### 6.6.2. Interpolación sobre triángulos atravesados por la grieta

Recordemos que en la Sección 6.1, a cada triángulo  $T_k$  se le asignó una terna  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , relacionada con las coordenadas baricéntricas de los puntos de corte de la grieta con cada arista del elemento  $T_k$ . Nos centraremos en analizar un elemento  $T_k$  para el que las tres componentes de  $\vec{\alpha}$  sean no nulas. Aunque esta posibilidad está excluida por las condiciones **(H)**, esta generalización permite evitar casuísticas, lo que simplifica enormemente la programación.

Si  $\alpha_k \neq \mathbf{0}$ , hay tres puntos de corte en el elemento, como se muestra en la Figura 6.6.3, lo que da lugar a una descomposición natural del elemento  $T_k$  en

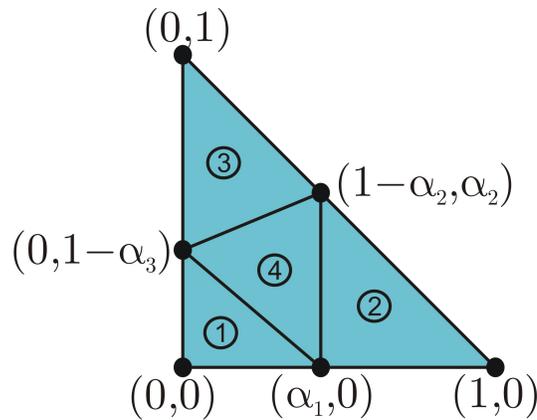


Figura 6.6.3: División general de un triángulo

cuatro hipotéticos subtriángulos, que denotaremos por  $T_e$ , con  $e \in \{1, 2, 3, 4\}$ . En la práctica, puesto que existe algún  $i \in \{1, 2, 3\}$  para el cual  $\alpha_i = 0$ , el triángulo  $i$ -ésimo degenera en un segmento (ver Figura 6.6.4). Sin embargo, admitir la existencia de dicho elemento no perturba la cuadratura, pues, como veremos posteriormente, los pesos asociados a este triángulo serán nulos. Incluso el caso extremo en que el triángulo no presenta ningún corte podría incluirse en el caso general, pues los triángulos  $T_e$ , con  $e \in \{1, 2, 3\}$  degenerarían a segmentos y la partición se reduciría al subtriángulo  $T_4$  que coincidiría con el triángulo  $T_k$ .

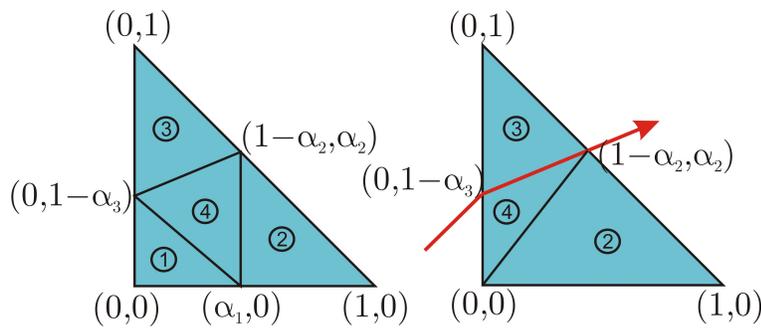


Figura 6.6.4: División de un triángulo Heaviside

Por definición, las matrices de partición  $\mathcal{N}_e$ , asociadas a los cuatro subtriángulos tienen por componentes las coordenadas baricéntricas en  $T_k$  de los vértices

de  $T_e$ ,  $\{\mathbf{X}_j^e\} : j = 1, 2, 3\}$ , esto es,  $(\mathcal{N}_e)_{ij} = N_{ki}(\mathbf{X}_j^e)$ .

Ahora bien, los vértices de los subelementos son, o bien vértices de  $T_k$ , o puntos (hipotéticos) de corte de la grieta con las aristas. Además, para cada arista  $i$  del triángulo  $T_k$ , la información del punto de corte en esa arista está relacionada con el parámetro  $\alpha_i$  introducido en la Sección 6.1, de modo que las matrices de partición para los cuatro subelementos serán:

$$\mathcal{N}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \alpha_1 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N}_2 = \begin{pmatrix} 1 - \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 1 - \alpha_2 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{N}_3 = \begin{pmatrix} \alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha_2 & 0 \\ 1 - \alpha_3 & \alpha_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N}_4 = \begin{pmatrix} 1 - \alpha_1 & 0 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & 1 - \alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 1 - \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Consideremos el triángulo de referencia  $T$  dividido en la familia de triángulos  $\{T_e : e = 1, \dots, 4\}$ .

Veremos a continuación cómo calcular los pesos y puntos de integración sobre los subelementos  $T_e$ .

Consideramos una regla de integración de  $p$  puntos con  $[\omega_i, (\eta_i, \xi_i)]_{i=1, \dots, p}$  como pesos y nodos en el triángulo de referencia. Representamos por  $[N_p]$  la matriz de orden  $3 \times p$  definida por los valores de las funciones de forma estándar referidas al elemento de referencia en los nodos de integración,  $N_j(\eta_i, \xi_i)$ .

Por una parte, los pesos de integración deben verificar que:

$$\sum_{j=1}^p \omega_j = \text{Area}(T). \quad (6.6.10)$$

**Proposición 6.6.5** *Los escalares  $\omega_{ej}$  definidos por*

$$\omega_{ej} = A_e \omega_j, \quad (6.6.11)$$

donde  $A_e = \det(\mathcal{N}_e)$  verifican la condición

$$\sum_{e=1}^4 \sum_{j=1}^p \omega_{ej} = \text{Area}(T).$$

*Demostración.* En efecto,

$$\sum_{e=1}^4 \sum_{j=1}^p \omega_{ej} = \sum_{e=1}^4 \sum_{j=1}^p \det(\mathcal{N}_e) \omega_j, \quad (6.6.12)$$

y, por el Corolario 6.6.4,

$$\sum_{e=1}^4 \sum_{j=1}^p \omega_{ej} = \sum_{j=1}^p \omega_j \left( \sum_{e=1}^4 \frac{\text{Area}(T_e)}{\text{Area}(T_k)} \right) = \sum_{j=1}^p \omega_j = \text{Area}(T).$$

□

**Corolario 6.6.6** Si  $\alpha_i = 0$  para algún  $i \in \{1, 2, 3\}$ , los pesos asociados al subtriángulo  $T_i$  son nulos.

*Demostración.* Los determinantes de cada una de las matrices de partición son de la forma:

$$A_1 = (1 - \alpha_3)\alpha_1, \quad A_2 = \alpha_2(1 - \alpha_1), \quad A_3 = \alpha_3(1 - \alpha_2), \quad A_4 = 1 - A_1 - A_2 - A_3.$$

En consecuencia, si algún  $\alpha_i = 0$ ,  $A_i = \det(\mathcal{N}_i) = 0$ , y los pesos  $\omega_{ij} = 0$  para todo  $j = 1, \dots, p$ . □

Por otra parte, los puntos de cuadratura que se tomarán sobre cada subelemento son aquellos puntos que tienen las mismas coordenadas baricéntricas relativas al subtriángulo  $T_e$  que los puntos  $(\eta_j, \xi_j)$  respecto del triángulo de referencia.

**Proposición 6.6.7** Las componentes de puntos de integración  $(\eta_{ej}, \xi_{ej})$  sobre el triángulo de referencia vienen dadas por la expresión

$$P_e = \mathcal{N}_e[N_p],$$

siendo  $[N_p]$  la matriz de coordenadas baricéntricas de los puntos de integración en el triángulo de referencia,

$$\begin{pmatrix} N_1(\eta_1, \xi_1) & \cdots & N_1(\eta_p, \xi_p) \\ N_2(\eta_1, \xi_1) & \cdots & N_2(\eta_p, \xi_p) \\ N_3(\eta_1, \xi_1) & \cdots & N_3(\eta_p, \xi_p) \end{pmatrix}$$

*Demostración.* Es consecuencia directa del Teorema 6.6.3.  $\square$

**Corolario 6.6.8** *En un elemento  $T_k$  dividido por la grieta, utilizamos la siguiente regla de integración*

$$Q_m(f) = J \sum_{e=1}^4 \sum_{j=1}^p \omega_{ej} f(\eta_{ej}, \xi_{ej})$$

donde  $J$  es el Jacobiano de la transformación afín, los pesos  $\omega_{ej}$  vienen dados por (6.6.11) y las coordenadas de los puntos de integración  $(\eta_{ej}, \xi_{ej})$ , vienen dadas por

$$P_e = [X] \mathcal{N}_e [N_p],$$

donde  $[X]$  es la matriz de componentes de los vértices del triángulo  $T_k$ , que matricialmente se expresa como,

$$\begin{pmatrix} \eta_{e1} & \cdots & \eta_{ep} \\ \xi_{e1} & \cdots & \xi_{ep} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (X_1)_1 & (X_2)_1 & (X_3)_1 \\ (X_1)_2 & (X_2)_2 & (X_3)_2 \end{pmatrix} \mathcal{N}_e \begin{pmatrix} N_1(\eta_1, \xi_1) & \cdots & N_1(\eta_p, \xi_p) \\ N_2(\eta_1, \xi_1) & \cdots & N_2(\eta_p, \xi_p) \\ N_3(\eta_1, \xi_1) & \cdots & N_3(\eta_p, \xi_p) \end{pmatrix}.$$

*Demostración.* Es consecuencia directa de los resultados anteriores.  $\square$

**Observación 6.6.9** *Esta fórmula de cuadratura está bien adaptada a diferentes situaciones. Así, para triángulos que no son intersecados por la grieta, los pesos correspondientes a los subtriángulos 1, 2 y 3 son nulos y el triángulo 4 es el triángulo completo.*

*Es claro que, aunque el número de puntos de integración aumenta, el orden de aproximación es el mismo.*

### 6.6.3. Región del vértice

La información de los puntos de corte del elemento que contiene al tip,  $T^v$ , se almacena por medio del vector  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2, \beta_3)$  donde  $\alpha_i$  son los parámetros definidos en la Sección 6.1 y  $(1 - \beta_2 - \beta_3, \beta_2, \beta_3)$  son las coordenadas baricéntricas del tip. Bajo las condiciones **(H)**, dos de los  $\alpha_i$  son nulos, puesto que

el máximo número de puntos de corte es 1. Sin embargo, y al igual que se hizo en la sección anterior, se considera que los tres parámetros son no nulos, para introducir una metodología general independiente de cuál sea la arista del elemento que es atravesada por la grieta.

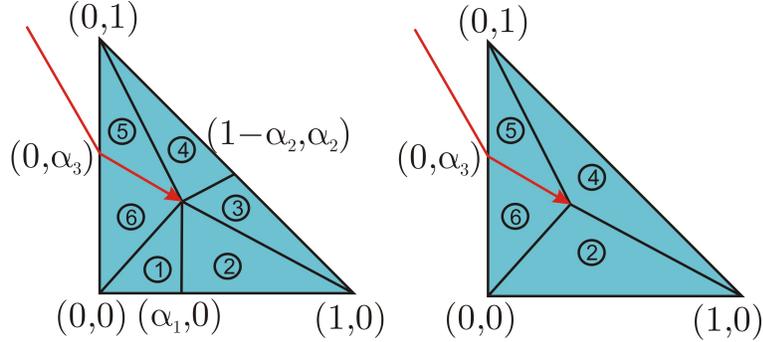


Figura 6.6.5: División del elemento tip.

Análogamente a lo hecho para los elementos atravesados por la grieta, se definen seis matrices de partición de acuerdo con la Definición (6.6.1),  $\mathcal{N}_e^v$ ,  $e \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  que están dadas por:

$$\mathcal{N}_1^v = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \alpha_1 & 1 - \beta_2 - \beta_3 \\ 0 & \alpha_1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N}_2^v = \begin{pmatrix} 1 - \alpha_1 & 0 & 1 - \beta_2 - \beta_3 \\ \alpha_1 & 1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{N}_3^v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 - \beta_2 - \beta_3 \\ 1 & 1 - \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N}_4^v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 - \beta_2 - \beta_3 \\ 1 - \alpha_2 & 0 & \beta_2 \\ \alpha_2 & 1 & \beta_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{N}_5^v = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_3 & 1 - \beta_2 - \beta_3 \\ 0 & 0 & \beta_2 \\ 1 & 1 - \alpha_3 & \beta_3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N}_6^v = \begin{pmatrix} \alpha_3 & 1 & 1 - \beta_2 - \beta_3 \\ 0 & 0 & \beta_2 \\ 1 - \alpha_3 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix}.$$

Si  $\alpha_i = 0$  el triángulo  $2i - 1$  degenera a un segmento, y dado que solo uno de los  $\alpha_i$  es distinto de cero, dos de los triángulos degenerarán a segmentos, y la partición real del triángulo será en cuatro subtriángulos. Pero al igual que en el caso de los elementos Heaviside, no es necesario un análisis casuístico para obtener la regla de cuadratura a utilizar, puesto que los pesos para los

triángulos degenerados serán nulos de forma automática.

Si  $[\omega_j, (\eta_j, \xi_j)]_{j=1, \dots, p}$  son los pesos y nodos de una regla de cuadratura de Gauss en el triángulo de referencia, la fórmula de cuadratura en el triángulo dividido será

$$Q_m(f) = J \sum_{e=1}^6 \sum_{j=1}^p \omega_{ej} f(\eta_{ej}, \xi_{ej}),$$

donde  $J$  es el jacobiano de la transformación y  $\omega_{ej}$  y  $(x_{ej}, y_{ej})$  son los pesos y nodos de la cuadratura de Gauss en el  $e$ -ésimo triángulo, calculados de forma análoga al caso de los elementos Heaviside como  $\omega_{ij} = A_i \omega_j$ , donde

$$A_1 = \alpha_1 \beta_3, \quad A_2 = (1 - \alpha_1) \beta_3, \quad A_3 = \alpha_2 (1 - \beta_2 - \beta_3),$$

$$A_4 = (1 - \alpha_2) (1 - \beta_2 - \beta_3), \quad A_5 = \alpha_3 \beta_2, \quad A_6 = (1 - \alpha_3) \beta_2,$$

y  $(\eta_{ij}, \xi_{ij})$  están dados, al igual que en el caso de los elementos Heaviside, por las componentes de los vectores  $P_e = [X] \mathcal{N}_e^v [N_p]$ , siendo  $X$  la matriz formada por las coordenadas de los vértices del triángulo  $T^v$  y  $\mathcal{N}_e^v$  las matrices definidas anteriormente.

#### 6.6.4. Integración de funciones singulares

Para la integración en los elementos que contienen al tip de la grieta de las funciones de la forma  $\Psi_l$ ,  $l \in \{1, \dots, 4\}$  y de sus derivadas, hay que tener en cuenta no sólo la discontinuidad debida a la grieta, sino también la singularidad presente en el tip. Por ello, se utiliza una regla de integración especial, que permite capturar con mayor precisión dicha singularidad. Esta regla, conocida como “almost polar integration” (ver [59]), se obtiene transformando una regla de cuadratura sobre un cuadrilátero en una cuadratura sobre un triángulo, por medio de la transformación geométrica

$$\zeta : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

que convierte el cuadrado unidad en un triángulo. Usando esta transformación, es posible construir una regla de cuadratura sobre el triángulo a partir de una

regla de cuadratura sobre el cuadrilátero unidad. Los nuevos puntos y pesos de integración  $(\bar{\eta}, \bar{\xi})$  están dados por

$$\bar{\xi} = \zeta(\xi), \quad \bar{\eta} = \eta \det(\nabla \zeta). \quad (6.6.13)$$

De este modo, como se muestra en la Figura (6.6.6), los puntos de integración están más concentrados en la zona del vértice y, por tanto, la aproximación es mejor que al utilizar una fórmula de cuadratura estándar sobre triángulos.

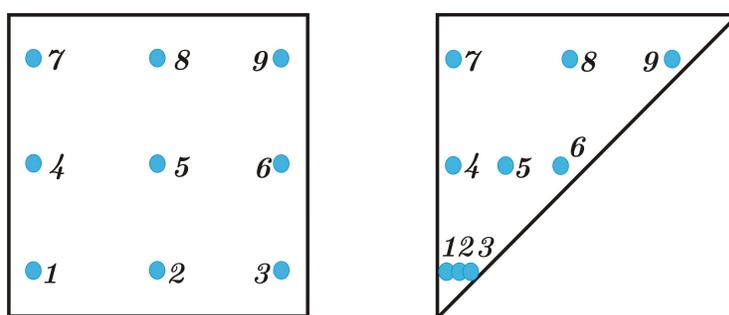


Figura 6.6.6: Transformación de los puntos de integración de un cuadrado a un triángulo

## 6.7. Integración sobre un elemento y ensamblado

Una de las principales dificultades de la implementación práctica del método de elementos finitos extendidos es la disparidad existente entre los tipos y cantidad de grados de libertad correspondientes a cada elemento. Habrá elementos estándar, con seis grados de libertad, o elementos como el que contiene al tip de la grieta, que tiene treinta. Casi cualquier número par (si el dominio bidimensional) entre 6 y 30 puede darse. No todos los vértices de un triángulo son siempre del mismo tipo. Para evitar toda la casuística, se diferencian únicamente tres casos: el elemento contiene sólo nodos estándar, en cuyo caso la metodología es la habitual en elementos finitos, el caso en que el elemento contenga algún nodo heaviside y ningún nodo tip, donde se supondrá, en general, que el elemento tiene doce grados de libertad, y el caso más general, de

treinta y seis grados de libertad (6 estándar, 6 heaviside y 24 tip) que, aunque no puede darse, engloba cualquier combinación posible. Las matrices elementales se construirán por bloques, y para cada elemento se crearán, a lo sumo, tres punteros de destino, que permiten relacionar cada grado de libertad del elemento (según tipo) con el grado de libertad global que le corresponde.

### 6.7.1. Matrices elementales

En este apartado veremos cómo se calculan las matrices de rigidez y de masa elementales en el caso más general, suponiendo que el elemento tiene grados de libertad de los tres tipos. Para ello, utilizaremos las expresiones (6.5.10) y (6.5.17) obtenidas en la Sección 6.5 para los desplazamientos y el tensor de deformación en el caso de un elemento de  $\mathcal{T}_T$ .

Veremos, en primer lugar, el cálculo de la matriz de masa, que se corresponde con la integral,

$$\int_{\Omega_s} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{v}_h dV_X.$$

Por las propiedades de las funciones de forma  $N_I$  la integral sobre el dominio puede calcularse como la suma de las integrales sobre los elementos,

$$\int_{\Omega_s} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{v}_h dV_X = \sum_{T_k \in \mathcal{T}_h} \int_{T_k} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{v}_h dV_X.$$

Como vimos en la Sección 6.5, la restricción de un elemento del espacio  $V_h$  a un elemento  $T_k$  puede expresarse matricialmente como:

$$\mathbf{u}_{h|T_k} = \begin{bmatrix} N_k^S & N_k^H & N_k^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_{I_k} \\ \vec{c}_{I_k} \\ \vec{b}_{I_k} \end{pmatrix},$$

y representaremos su aceleración por

$$\ddot{\mathbf{u}}_{h|T_k} = \begin{bmatrix} N_k^S & N_k^H & N_k^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\vec{u}}_{I_k} \\ \ddot{\vec{c}}_{I_k} \\ \ddot{\vec{b}}_{I_k} \end{pmatrix},$$

aunque los dos puntos sobre los grados de libertad se utilizan solo a efectos de notación. Recordemos también que en los elementos de  $\mathcal{T}_S$  y  $\mathcal{T}_{H_T}$  la formulación matricial era más reducida, interviniendo únicamente  $[N_k^S]$  y  $[N_k^S \ N_k^H]$ , respectivamente. Trabajaremos únicamente con el caso más completo, pues los otros casos se obtienen del mismo modo. Con esta formulación, la integral sobre un elemento  $T_k$  se expresa como:

$$\int_{T_k} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{v}_h dV_X = \int_{T_k} \rho_0 \vec{v}_{I_k}^t [M_k] \ddot{\vec{u}}_{I_k} dV_X,$$

siendo  $[M_k]$  la matriz de masa elemental de dimensión  $36 \times 36$

$$[M_k] = \begin{pmatrix} [N_k^S]^t [N_k^S] & [N_k^S]^t [N_k^H] & [N_k^S]^t [N_k^T] \\ [N_k^H]^t [N_k^S] & [N_k^H]^t [N_k^H] & [N_k^H]^t [N_k^T] \\ [N_k^T]^t [N_k^S] & [N_k^T]^t [N_k^H] & [N_k^T]^t [N_k^T] \end{pmatrix}. \quad (6.7.1)$$

Obsérvese que los bloques no diagonales que involucran funciones de forma tip, no son cuadrados. Así, por ejemplo,  $[N_k^T]^t [N_k^S] \in \mathcal{M}_{24 \times 6}$ . En realidad, las matrices elementales no llegan a ensamblarse nunca, los distintos bloques se calculan y ensamblan por separado. De ahí la existencia de tres punteros de destino, uno para cada tipo de grados de libertad, y que se combinan para ensamblar los distintos tipos de bloques.

Análogamente, la matriz de rigidez, correspondiente al término

$$\int_{\Omega_s} \boldsymbol{\sigma}_h : \boldsymbol{\varepsilon}_h(\mathbf{v}_h) dV_X,$$

se calcula elemento a elemento como

$$\int_{T_k} \boldsymbol{\sigma}_h : \boldsymbol{\varepsilon}_h(\mathbf{v}_h) dV_X = \int_{T_k} \vec{u}_{I_k}^t [K_k] \vec{v}_{I_k} dV_X,$$

siendo  $[K_k]$  la matriz

$$[K_k] = \begin{pmatrix} [B_k^S]^t D [B_k^S] & [B_k^S]^t D [B_k^H] & [B_k^S]^t D [B_k^T] \\ [B_k^H]^t D [B_k^S] & [B_k^H]^t D [B_k^H] & [B_k^H]^t D [B_k^T] \\ [B_k^T]^t D [B_k^S] & [B_k^T]^t D [B_k^H] & [B_k^T]^t D [B_k^T] \end{pmatrix}, \quad (6.7.2)$$

y  $D$  la matriz de elasticidad,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}. \quad (6.7.3)$$

### 6.7.2. Cálculo del puntero de destino

En esta sección veremos cómo organizar los punteros que relacionan los grados de libertad locales con los grados de libertad globales, necesarios para realizar el ensamblado de las matrices elementales.

Consideramos cuatro conjuntos de índices: el conjunto del número grados de libertad estándar por nodo,  $L = \{1, \dots, n_g\}$ , los índices locales de los nodos en el elemento,  $J = \{1, 2, 3\}$ , los índices de elementos en la malla,  $k = \{1, \dots, m_e\}$  y los índices de grados de libertad globales de la malla  $L_G = \{1, \dots, n_{gl}\}$ . En la práctica,  $n_g = 2$ . La aplicación  $C : J \times \mathcal{T}_h \rightarrow \mathcal{P}$  relaciona los índices de nodo locales de cada elemento con los globales y su matriz asociada se denotará igualmente por  $C \in \mathcal{M}_{3 \times m_e}$ .

Para relacionar un grado de libertad específico de un nodo con el número global que le corresponde utilizamos una aplicación local-a-global. Hay dos elementos esenciales a la hora de definir esta aplicación:

- Las aplicaciones  $\wp$  y  $\wp_T$ , que a cada grado de libertad de un cierto tipo (estándar, Heaviside o tip) en un nodo le asigna una posición en el vector de valores nodales elemental correspondiente. El orden es elección del programador. Usaremos las siguientes aplicaciones  $\wp$ :

$$(i, j) \in L \times J \rightarrow \wp(i, j) = i + (j - 1)n_g,$$

$$(i_1, i_2, j) \rightarrow \wp_T(i_1, i_2, j) = i_1 + (i_2 - 1 + 4(j - 1))n_g,$$

donde  $i, i_1 \in L$ ,  $i_2 \in \{1, 2, 3, 4\}$  representan grados de libertad, y  $j \in J$  representa un nodo.

Nótese que para los grados de libertad tip se añade un nuevo índice,  $i_2 \in \{1, 2, 3, 4\}$ , puesto que para cada grado de libertad  $i_1$  se tienen cuatro grados de libertad correspondientes a las funciones  $\Psi$ .

- El operador de conectividad nodo-elemento  $C$ , definido en la Sección 6.3 que asigna el índice global de cada nodo de los elementos.

Veremos en primer lugar cómo se construye el puntero de destino para los

grados de libertad estándar de cualquier elemento. Conocida la aplicación  $\wp$  y el operador  $C$ , el puntero de destino  $Edof_S \in \mathcal{M}_{6 \times m_e}$ , correspondiente al elemento  $T_k$  puede calcularse como

$$Edof(\wp(i, j), k) = \wp(i, C(j, k)), \quad i \in L, \quad j \in J, \quad (6.7.4)$$

ya que el vector de incógnitas almacena en sus primeras  $2 \times n_h$  componentes los coeficientes correspondientes a los nodos estándar.

El siguiente diagrama conmutativo muestra un esquema de la relación (6.7.4)

$$\begin{array}{ccc} L \times J \times \mathcal{T}_h & \xrightarrow{Edof_S} & L_G \\ & \searrow C & \nearrow \wp \\ & & L \times \mathcal{P} \end{array}$$

En lo que sigue, desarrollaremos aplicaciones con la misma filosofía anterior para las distintas clases de nodos. En la práctica, la situación es bastante compleja puesto que un nodo puede tener grados de libertad de diferentes tipos. Además, la matriz de conectividades para una determinada clase puede reducirse a uno o dos nodos en un elemento. Esta idea nos permitirá desarrollar ciertas manipulaciones algebraicas que automatizarán el proceso de asignación de grados de libertad globales. Para construir los operadores de conectividades para los grados de libertad enriquecidos, consideraremos las inclusiones  $n_H : \mathcal{P}_H \hookrightarrow \mathcal{P}$  y  $n_T : \mathcal{P}_T \hookrightarrow \mathcal{P}$  introducidas en la Sección 6.3. A la hora de utilizar las aplicaciones  $\wp$  y  $\wp_T$  para el cálculo de los punteros de destino de grados de libertad Heaviside o tip, tenemos que tener en cuenta dos cuestiones:

- Dado que las matrices de conectividad contienen ceros, la composición con  $\wp$  puede dar lugar a valores negativos.
- Denotemos por  $n_S$  el número de grados de libertad estándar, ( $n_S = 2n_h$ ) y  $n_H$  el número de grados de libertad correspondientes a nodos Heaviside, ( $n_H = 2\sharp(\mathcal{P}_H)$ ). Puesto que los grados de libertad estándar ocupan las primeras  $n_S$  posiciones, la numeración de los grados de libertad Heaviside ha de empezar en  $n_S + 1$  y la numeración de los grados de libertad tip ha de empezar en  $n_S + n_H + 1$ . Pero aquellas posiciones de la matriz

de conectividad que contienen ceros han de seguir dando como resultado cero.

Para resolver estas dos cuestiones se multiplica el resultado de la composición por la función signo, de modo que se definen:

$$Edof_{H\_T}(\varphi(i, j), k) = (\varphi(i, C_{H\_T}(j, k)) + nS) \text{sign}(C_{H\_T}(j, k)), \quad (6.7.5)$$

$$Edof_{TH}(\varphi(i, j), k) = (\varphi(i, C_{TH}(j, k)) + nS) \text{sign}(C_{TH}(j, k)), \quad (6.7.6)$$

$$Edof_T(\varphi_T(i_1, i_2, j), k) = (\varphi_T(i_1, i_2, C_T(j, k)) + nS + nH) \text{sign}(C_T(j, k)). \quad (6.7.7)$$

Obsérvese que la función signo únicamente tomará los valores 0 y 1 puesto que los elementos de las matrices de conectividad son no negativos.

Las posiciones de  $Edof$  que resulten en ceros indicarán qué filas y/o columnas de las matrices de masa y rigidez elementales no hay que ensamblar, puesto que se corresponden con nodos no enriquecidos de elementos en  $\mathcal{T}_H$  y  $\mathcal{T}_T$ . Los vectores  $Edof_S(:, k)$ ,  $Edof_{H\_T}(:, k)$ , y  $Edof_{TH}(:, k)$  tienen dimensión  $6 \times 1$  para cada elemento  $T_k$  mientras que  $Edof_T(:, k) \in \mathcal{M}_{24 \times 1}$ .

Veamos ahora con un sencillo ejemplo el funcionamiento de la matrices de conexión y los punteros de destino. Supongamos que el conjunto  $\mathcal{P}_T$  de una malla consta de los nodos  $\{3, 4, 7\}$  y que el elemento  $T_k$  en  $\mathcal{T}_T$  tiene por vértices los nodos  $\{3, 6, 7\}$ . Entonces la columna  $k$  de las matrices  $C$  y  $C_T$  será

$$C(1 : 3, k) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad C_T(1 : 3, k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad (6.7.8)$$

respectivamente y los grados de libertad en  $Edof_T$  para el nodo 1 y 3 del elemento serán,

$$\begin{aligned} Edof_T(:, k) &= (4 * n_g * (C_T(1 : 3, k) - 1) \\ &+ (i_1 + (i_2 - 1) * n_g + nS + nH)) * (C_T(1 : 3, k) > 0), \end{aligned}$$

que resulta en un vector de componentes  $nS + nH + [1, 2, \dots, 8]$  en las ocho primeras componentes, 0 en las componentes 9 a 16 y  $nS + nH + [17, 18, \dots, 24]$  en las ocho últimas componentes. Obsérvese que, dado que el segundo nodo

del elemento no se enriquece, las posiciones que le corresponderán son cero, al estar multiplicando por la matriz booleana. También, que no aparecen los grados de libertad entre el 9 y el 16 ( $+nS + nH$ ) puesto que están reservados al segundo nodo del conjunto  $\mathcal{P}_T$ , que no pertenece al elemento  $T_k$ .

El ensamblado de las matrices de masa y rigidez se realiza por bloques, utilizando los vectores de *Edof* correspondientes en cada caso. Por ejemplo, para ensamblar un bloque  $[B_k^S]^t D [B_k^T] \in \mathcal{M}_{6 \times 24}$  en la matriz de masa  $[K]$  global, se realiza la siguiente asignación:

$$K(\text{Edof}_S(:, k), \text{Edof}_T(:, k)) = K(\text{Edof}_S(:, k), \text{Edof}_T(:, k)) + [K_k].$$

Nótese que la dimensión de  $K(\text{Edof}_S(:, k), \text{Edof}_T(:, k))$  también es  $6 \times 24$  y, por tanto, la asignación está bien realizada. De querer ensamblar el bloque  $[B_k^T]^t D [B_k^S]$ , el orden de los punteros de destino se intercambiaría.

### 6.7.3. Salto y penalización

Veamos ahora el cálculo de la integral sobre  $\Gamma_C$  del término

$$\frac{1}{\epsilon} \int_{\Gamma_{C,j-1}^{sl+}} B(\mathbf{u}_{hk}) B(\mathbf{v}_h) dA_X,$$

definido en (4.4.23) y que debe ser implementado para simular el posible contacto entre los labios de la grieta.

Sean  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  los grados de libertad *estándar* en los nodos del triángulo,  $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$  los asociados a las funciones de forma de *Heaviside* y  $\vec{b}_{l1}, \vec{b}_{l2}, \vec{b}_{l3}$ ,  $l = 1, \dots, 4$  los correspondientes al enriquecimiento de los nodos *tip*. En el caso en que sólo alguno de los nodos del triángulo sea de tipo *Heaviside* o *tip*, sólo tendremos los grados de libertad añadidos para ese nodo. Con esta notación, el desplazamiento en el punto  $\mathbf{X} \in T_k \in \mathcal{T}_h$  se expresa como:

$$\mathbf{u}_{h|T_k}(\mathbf{X}) = \sum_{I \in I_k} N_I(\mathbf{X}) \left[ \vec{u}_I + \underbrace{H(\mathbf{X}) \vec{c}_I}_{I \in I_k \cap \mathcal{P}_H} + \sum_{l=1}^4 \underbrace{\Psi_l(\mathbf{X}) \vec{b}_I^l}_{I \in I_k \cap \mathcal{P}_T} \right],$$

donde  $N_I$  son las funciones de forma *estándar*,  $H(\mathbf{X})$  es la función de Heaviside,  $\Psi_l$  las funciones definidas en (6.4.2) e  $I_k$  representa al conjunto de los nodos

del elemento  $T_k$ .

Si el punto  $\mathbf{X}$  es un punto de la grieta, la función  $H$  no está definida, y tampoco  $\Psi_1 = \sqrt{r} \sin(\theta/2)$ , pues ambas son discontinuas en la grieta ( $\theta = \pm\pi$ ). La discretización mediante el método de elementos finitos extendidos del salto  $B(\mathbf{u}_h) = [\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}]$  en un punto  $\mathbf{X}$  de la grieta, se reduce a

$$[\mathbf{u}_h(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{n}] = \sum_{I \in \mathcal{P}_H \cap I_k} 2N_I(\mathbf{X}) \mathbf{n} \cdot \vec{c}_I + \sum_{J \in \mathcal{P}_T \cap I_k} 2N_J(\mathbf{X}) \sqrt{r(\mathbf{X})} \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_J^1.$$

Para obtener el operador de salto global  $[S]$  tal que para todo  $\mathbf{X} \in \Gamma_C$

$$[\mathbf{u}_h(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{n}] = [S](\mathbf{X}) \vec{u}_h, \quad (6.7.9)$$

consideramos la matriz elemental cuyas filas están definidas por los siguientes vectores

$$\begin{aligned} S_i^e &= (n_1, n_2) \mathcal{I}((N_1(x_m^i), N_2(x_m^i), N_3(x_m^i))) \\ &= \begin{pmatrix} n_1 N_1(x_m^i) & n_2 N_1(x_m^i) & n_1 N_2(x_m^i) & n_2 N_2(x_m^i) & n_1 N_3(x_m^i) & n_2 N_3(x_m^i) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

para todo  $i \in \mathcal{S}_h$ , siendo  $x_m^i$  el punto medio de la  $i$ -ésima arista,  $e_i$ , y  $(n_1, n_2)$  el vector unitario normal a la grieta con orientación positiva. Así, tenemos

$$[\mathbf{v}_h(x_m^i) \cdot \mathbf{n}] = 2S_i^e(\vec{c}_i + \sqrt{r(x_m^i)} \vec{b}_i),$$

para todo  $i \in \mathcal{S}_h$  siendo  $\vec{c}_i$  y  $\vec{b}_i$  los vectores formados por las componentes de los correspondientes vectores de valores nodales del elemento al que pertenece la arista  $e_i$ . Nótese que las componentes del vector  $\vec{c}_i$  se corresponden con las componentes de índices  $Edof_{H\_T}(:, D_{H\_T}(i))$  y  $Edof_{TH}(:, D_T(i))$  del vector de valores nodales global  $\mathbf{v}_h$ . Por otra parte, las componentes del vector  $\vec{b}_i$  se corresponden con las componentes de índices  $Edof_T(:, D_T(i))$  del vector de valores nodales global  $\mathbf{v}_h$ .

Así, la matriz de salto global  $\mathbf{S}$  tiene por componentes

$$\begin{aligned} S_{S_{H\_T}(i), Edof_{H\_T}(j), D_{H\_T}(i)} &= S_{S_{H\_T}(i), j}^e, & i \in \mathcal{S}_{H\_T}, \\ S_{S_T(i), Edof_{TH}(j), D_T(i)} &= S_{S_T(i), j}^e, & i \in \mathcal{S}_T, \\ S_{S_T(i), Edof_T(h(j), D_T(i))} &= \sqrt{r(x_m^{S_T(i)})} S_{S_T(i), j}^e, & i \in \mathcal{S}_T, \end{aligned}$$

para todo  $j = 1 : 6$  y ceros en las otras posiciones, siendo

$$\hbar(j) = j + 6E \left[ \frac{j-1}{2} \right],$$

los grados de libertad locales correspondientes a la función de forma  $\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}$ .

## 6.8. Aproximación de una función discontinua por funciones del espacio Xfem

Dada una función  $f$  discontinua en la grieta, calcularemos una aproximación en el espacio XFEM interpolando los valores de la función en los nodos, y los saltos en la grieta. Consideraremos simplemente los elementos finitos enriquecidos con las funciones de Heaviside, prescindiendo del enriquecimiento cerca del vértice de la grieta. Esta aproximación vendrá dada por:

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^3 N_{kj}(x, y) f_j + \sum_{j=1}^3 N_{kj}(x, y) H(x, y) c_j, \quad (6.8.1)$$

para  $(x, y) \in T_k \in \mathcal{T}_{H-T}$ . El objetivo de esta sección es calcular  $f_j$  y  $c_j$ . Consideramos los dos subtriángulos  $T_k^r$  y  $T_k^l$  tales que una de sus aristas es el segmento de la grieta contenido en  $T_k$ . Supongamos que para todo  $(x, y) \in T_k^r$ ,  $H(x, y) = 1$  y, por tanto, para todo  $(x, y) \in T_k^l$ ,  $H(x, y) = -1$ . Sean  $\mathbf{X}_i^r$  los vértices del subtriángulo  $T_k^r$ . Entonces, para  $i \in \{1, 2, 3\}$ :

$$f(\mathbf{X}_i^r) = \sum_{j=1}^3 N_{kj}(\mathbf{X}_i^r) f_j + \sum_{j=1}^3 N_{kj}(\mathbf{X}_i^r) H(\mathbf{X}_i^r) c_j = \sum_{j=1}^3 N_{kj}(\mathbf{X}_i^r) [f_j + c_j], \quad (6.8.2)$$

lo que matricialmente puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} f(\mathbf{X}_1^r) \\ f(\mathbf{X}_2^r) \\ f(\mathbf{X}_3^r) \end{pmatrix} = \mathcal{N}_r^t \begin{pmatrix} f_1 + c_1 \\ f_2 + c_2 \\ f_3 + c_3 \end{pmatrix}. \quad (6.8.3)$$

Análogamente, para los vértices del subtriángulo  $T_k^l$  se obtiene

$$f(\mathbf{X}_i^l) = \sum_{j=1}^3 N_{kj}(\mathbf{X}_i^l) f_j + \sum_{j=1}^3 N_{kj}(\mathbf{X}_i^l) H(\mathbf{X}_i^l) c_j = \sum_{j=1}^3 N_{kj}(\mathbf{X}_i^l) [f_j - c_j], \quad (6.8.4)$$

o, equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} f(\mathbf{X}_1^l) \\ f(\mathbf{X}_2^l) \\ f(\mathbf{X}_3^l) \end{pmatrix} = \mathcal{N}_i^t \begin{pmatrix} f_1 - c_1 \\ f_2 - c_2 \\ f_3 - c_3 \end{pmatrix}, \quad (6.8.5)$$

con  $\mathcal{N}_r$  la matriz cuya columna  $j$ -ésima contiene las coordenadas baricéntricas de  $\mathbf{X}_j^r$ .

Estos dos sistemas componen un sistema de 6 ecuaciones y 6 incógnitas que puede escribirse también como:

$$\begin{pmatrix} f(\mathbf{X}_1^r) \\ f(\mathbf{X}_2^r) \\ f(\mathbf{X}_3^r) \\ f(\mathbf{X}_1^l) \\ f(\mathbf{X}_2^l) \\ f(\mathbf{X}_3^l) \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} \mathcal{N}_r^t & \mathcal{N}_r^t \\ \hline \mathcal{N}_i^t & -\mathcal{N}_i^t \end{array} \right) \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}. \quad (6.8.6)$$

**Observación 6.8.1** *A la hora de evaluar  $f$  en puntos de la grieta se ha abusado de la notación puesto que, en sentido estricto, se trata de valores límite tomados a un lado u otro de la interfase según corresponda.*

## 6.9. Resultados numéricos

A continuación se muestran algunos resultados numéricos obtenidos con el método de elementos finitos extendidos, y se realiza una comparación con los resultados obtenidos resolviendo los mismos problemas con el método de elementos finitos estándar. Las mallas utilizadas en el XFEM se adaptan a la grieta de modo que únicamente se modifican los elementos cortados por la grieta, mientras que las mallas en el resto del dominio coinciden. Los elementos cortados se subdividen utilizando la partición presentada en la Sección 6.6. Un ejemplo de malla utilizada para el método de elementos finitos extendidos y su adaptación para ser utilizada con el método clásico se muestra en la Figura 6.9.1.

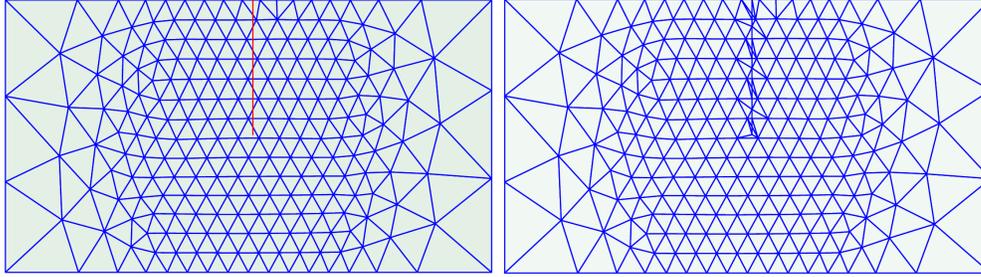


Figura 6.9.1: Malla para la simulación con XFEM y su adaptación para FEM

### 6.9.1. Tests académicos

Para comprobar la eficacia del método de XFEM se resuelven dos problemas con solución conocida, como son los modos de fractura I y II presentados en (5.6.60) multiplicados por una función lineal en tiempo. Al igual que en toda la memoria se consideran las hipótesis de deformaciones planas, y resolvemos un problema bidimensional. Los datos del dominio considerado son los siguientes:

- El dominio es  $\Omega_s = [0, 2] \times [0, 1] \text{ m}^2$ .
- La grieta es el segmento  $\{1\} \times [0.5, 1] \text{ m}$ .
- La frontera  $\Gamma_N$  se corresponde con  $[0, 2] \times \{1\} \text{ m}$ .
- La frontera  $\Gamma_D$  es el complementario de  $\Gamma_N$  en  $\partial\Omega_s$ .
- El intervalo de tiempo considerado es  $[0, T]$  con  $T = 6.42\text{E} - 6 \text{ s}$ .

Los parámetros del material considerados son  $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ ,  $E = 7.4100\text{E} + 10 \text{ N/m}^2$  y  $\nu = 0.3302$ .

Resolvemos, por tanto, el problema:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} - \text{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega_s, \quad (6.9.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_N, \quad (6.9.2)$$

$$\mathbf{u}(X_1, X_2) = \mathbf{u}^D(X_1, X_2) \quad \text{sobre } \Gamma_D, \quad (6.9.3)$$

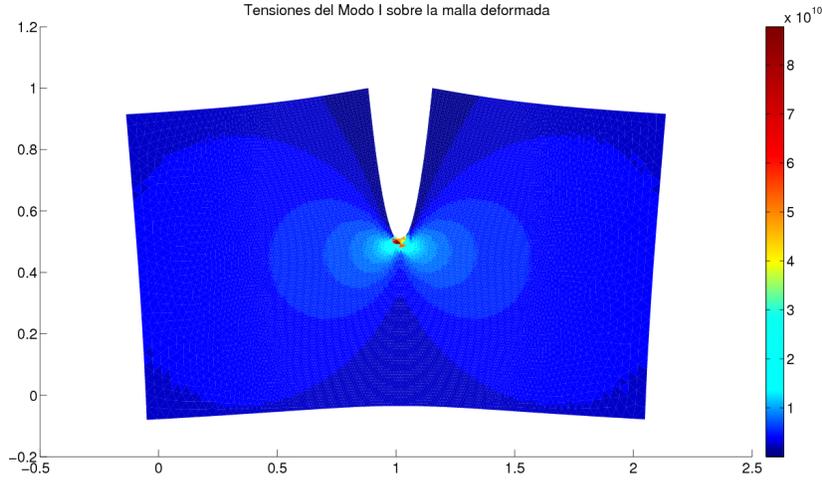


Figura 6.9.2: Norma Von Mises de las tensiones representada sobre la malla deformada de la solución del Modo I.

siendo

$$u_{X_1}^D = t \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( \kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + t \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( \kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right),$$

$$u_{X_2}^D = t \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( \kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) - t \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( \kappa - 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right),$$

donde  $K_I = 1.e + 10 \text{ N/m}^{3/2}$  y  $K_{II} = 0 \text{ N/m}^{3/2}$  para simular el modo I, y  $K_I = 0 \text{ N/m}^{3/2}$  y  $K_{II} = 1.e + 10 \text{ N/m}^{3/2}$  para el modo II. Nótese que no se consideran condiciones de contacto entre los labios de la grieta, puesto que los Modos I y II se suponen libres de esfuerzos en los labios de la grieta.

En la Figura 6.9.2 se representa la malla deformada correspondiente a la solución del problema asociado a un Modo I puro (de apertura) representándose en color la norma Von Mises de las tensiones en los puntos de Gauss de la malla. Como puede verse, las tensiones toman los valores máximos en el entorno del vértice de la grieta.

En la Figura 6.9.3 se representa el máximo de los errores relativos de las tensiones calculados en los puntos de Gauss de la malla para varias mallas. Se han utilizado cinco mallas no estructuradas, más refinadas en la zona cercana a la grieta, como se aprecia en la Figura 6.9.1. A la hora de representar los

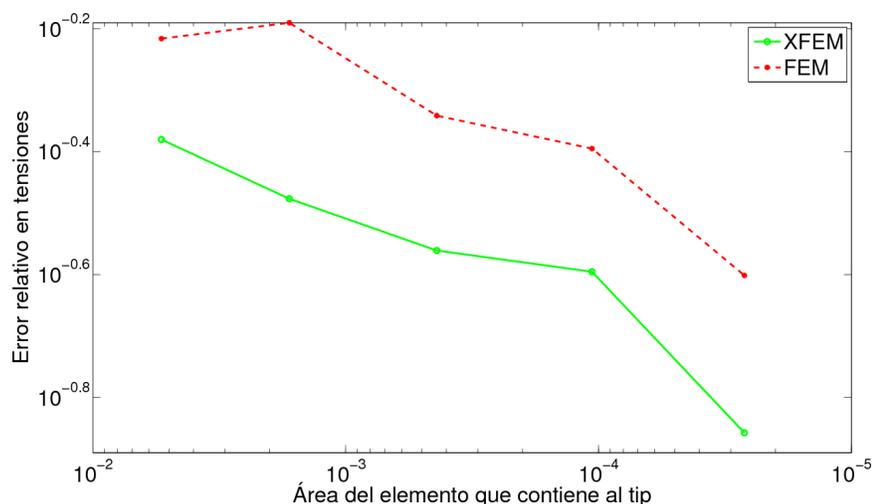


Figura 6.9.3: Errores relativos en tensiones obtenidos con XFEM y con FEM para el Modo I.

errores se toma como parámetro característico de la malla el área del triángulo que contiene al tip de la grieta. Este valor se representa en el eje de abscisas de la Figura 6.9.3 mientras que en el eje de ordenadas se representan los errores relativos obtenidos al realizar el cálculo con elementos finitos clásicos (línea roja) y con elementos finitos extendidos (línea verde). Como puede verse, los errores en tensiones se multiplican por un factor de orden  $10^{-2}$  cuando se realiza el cálculo con XFEM, lo cual era de esperar, pues es precisamente para aproximar mejor la singularidad de las tensiones para lo que se introdujeron las funciones de enriquecimiento cerca del vértice.

En las Figuras 6.9.4 y 6.9.5 se presenta el máximo de los errores absolutos y relativos en desplazamientos respectivamente, calculados en los nodos de la malla y puntos de la grieta. Al igual que antes, se consideran cinco mallas no estructuradas, considerando como parámetro de referencia de la malla el área del triángulo que contiene al tip de la grieta. Puede verse que los errores obtenidos con FEM son muy similares a los obtenidos con XFEM, de hecho, estos últimos son incluso un poco peores. Esto es razonable, puesto que la aproximación XFEM, en términos de desplazamiento, no supone mejora con respecto a la aproximación FEM, en el cual se incluye la discontinuidad del

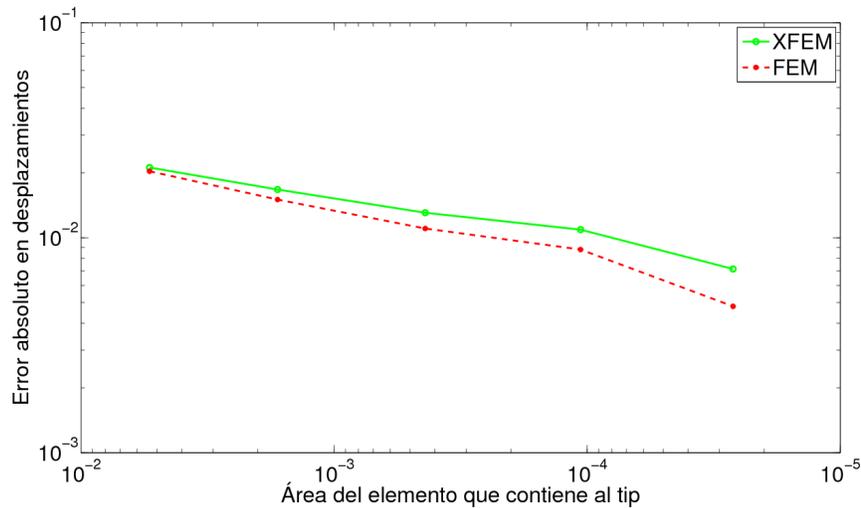


Figura 6.9.4: Errores absolutos en desplazamientos obtenidos con XFEM y con FEM para el Modo I.

desplazamiento adaptando la malla del dominio a la posición de la grieta, de modo que los puntos de la grieta se corresponden con nodos dobles (uno en cada labio de la grieta) por lo que es de esperar que la aproximación en estos puntos sea un poco mejor. Sin embargo, en el método XFEM el desplazamiento en puntos de la grieta ha de calcularse como interpolación de los desplazamientos en los nodos de los triángulos correspondientes, de modo que se añade un pequeño error en dicho cálculo. No obstante, la diferencia es muy pequeña, y la ventaja computacional que conlleva no tener que adaptar la malla del dominio a la grieta compensa los posibles errores de interpolación.

En la simulación del Modo II se obtienen resultados similares. En la Figura 6.9.6 se muestra la malla deformada con los desplazamientos, representándose en color la norma Von Mises de las tensiones.

En la Tabla 6.9.1 se muestra la evolución de los errores absolutos y relativos del desplazamiento considerando varias mallas. Denotaremos por  $h$  el área del elemento que contiene al tip de la grieta en la malla XFEM y adaptamos la malla para su uso con FEM mediante el mismo procedimiento explicado anteriormente. Puede verse que al igual que en el Modo I los errores son muy

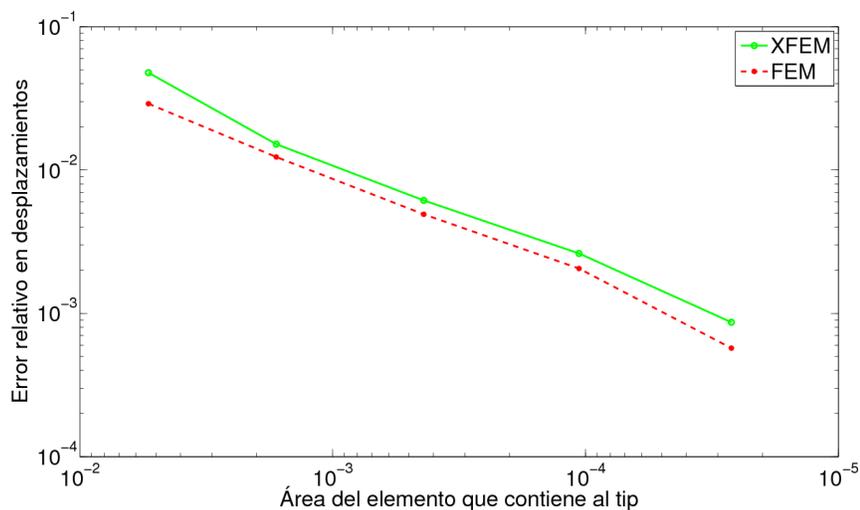


Figura 6.9.5: Errores relativos en desplazamientos obtenidos con XFEM y con FEM para el Modo I.

$h$	1.671E - 3	4.363E - 4	1.061E - 4	2.652E - 5	6.25E - 6
Err. rel. XFEM	0.018926	0.009083	0.004062	0.001334	0.000526
Err. rel. FEM	0.009255	0.003371	0.001113	0.000444	0.000141
Err. abs. XFEM	0.032477	0.030192	0.026591	0.017306	0.013941
Err. abs. FEM	0.019255	0.011464	0.007373	0.005800	0.012394

Tabla 6.9.1: Errores relativos y absolutos en desplazamiento obtenidos con XFEM y FEM

similares en ambos casos.

En la Figura 6.9.7 se muestra el máximo de los errores relativos en la norma Von Mises de las tensiones calculada en los puntos de Gauss de la malla. Al igual que en el caso correspondiente al Modo I, se aprecia que la aproximación de las tensiones es mejor cuando se calcula con el método de elementos finitos extendidos.

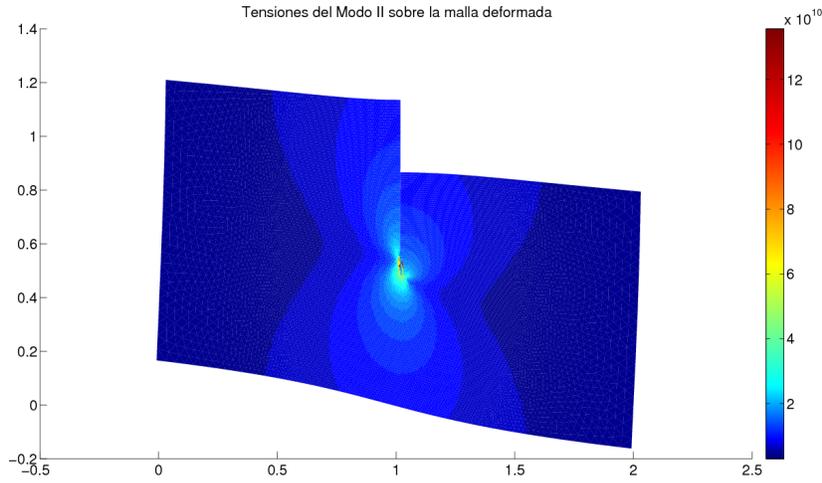


Figura 6.9.6: Norma Von Mises de las tensiones representada sobre la malla deformada de la solución del Modo II.

### 6.9.2. Propagación de ondas de Rayleigh

Con respecto a la propagación de las ondas de Rayleigh en una placa con grieta, comparamos los resultados obtenidos en el Capítulo 4, para la simulación de la propagación de ondas de Rayleigh, con los obtenidos ahora utilizando el método de elementos finitos extendidos.

Se considera un dominio de la forma  $\Omega_s = [0.7854, 0.8114] \times [-0.02, 0] \text{ m}^2$  con una grieta dada por el segmento  $\{0.7942\} \times [-0.0025, 0] \text{ m}$ . Las características del material son las mismas que las del apartado anterior.

Se presentan dos gráficas correspondientes a los desplazamientos experimentados por la superficie de la placa en dos instantes de tiempo, antes de que la onda llegue a la grieta y una vez superada la grieta. En cada gráfica, se muestran tres líneas, correspondientes a los desplazamientos calculados con XFEM, FEM, y los correspondientes a la expresión teórica de la onda de Rayleigh obtenida en el Capítulo 3. Se representa en verde el desplazamiento asociado a una onda de Rayleigh teórica, vibrando en todo momento en una placa sin grieta, en azul la onda calculada por el método XFEM y en rojo la onda calculada por el método FEM. Como puede verse, ambas aproximaciones son

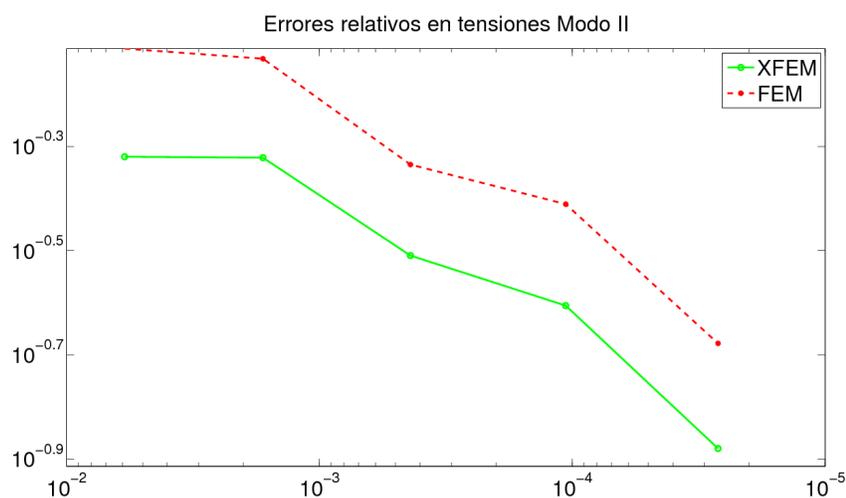


Figura 6.9.7: Errores relativos en tensiones obtenidos con XFEM y con FEM para el Modo II.

prácticamente iguales, con lo que queda validada la metodología XFEM para realizar la aproximación.

En la Figura 6.9.10 se presenta la diferencia, en valor absoluto entre la norma Von Mises de las tensiones, calculadas con XFEM y FEM, para cada punto de integración de la malla, en dos instantes de tiempo, uno antes de que la onda alcance la grieta, y el otro después. En particular, la figura de la izquierda se corresponde con  $t = 1.6E-6$  s y la de la derecha, con  $t = 6.E - 6$  s. Puede verse que la mayor diferencia en tensiones se produce cerca del tip, como era de esperar, pues es la zona de influencia de las funciones del enriquecimiento.

En la Figura 6.9.11 se muestra una porción del dominio considerado, la posición de la grieta, y cuatro puntos, elegidos para realizar un seguimiento de los valores de la tensión en esos puntos con respecto al tiempo. Se toma un punto muy cercano al vértice,  $X1$ , un punto alejado situado después de la grieta,  $X2$  y dos puntos alejados, situados antes de la grieta,  $X1$  y  $X4$ . Éste último además está cerca de la superficie de la placa.

Como puede verse, en el punto  $X1$ , que es el más cercano al tip de la grieta, es donde se aprecian mayores diferencias entre las tensiones calculadas con

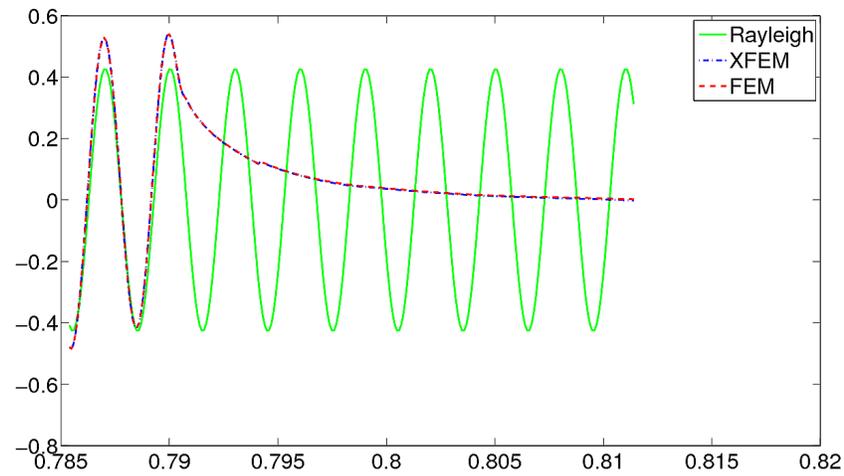


Figura 6.9.8: Desplazamientos en la superficie en el instante  $t = 1.6E-6$ s calculados con XFEM y con FEM.

XFEM y las tensiones calculadas con FEM. Sin embargo, en el punto  $X4$ , que es un punto cercano a la superficie, donde las tensiones predominantes son las propias de la onda de Rayleigh, las tensiones calculadas son prácticamente idénticas con los dos métodos.

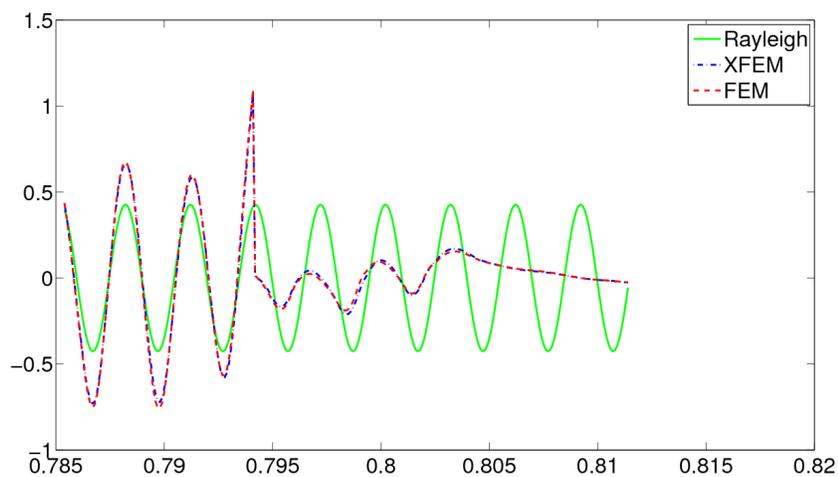


Figura 6.9.9: Desplazamientos en la superficie en el instante  $t = 6.E - 6$  s calculados con XFEM y con FEM

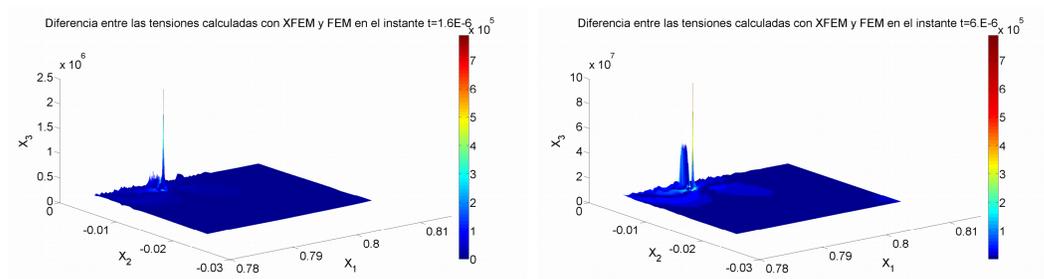


Figura 6.9.10: Diferencia entre la Norma Von Mises de las tensiones calculada con XFEM y con FEM en los instantes  $t = 1.6E-6$  s y  $t = 6.E - 6$  s

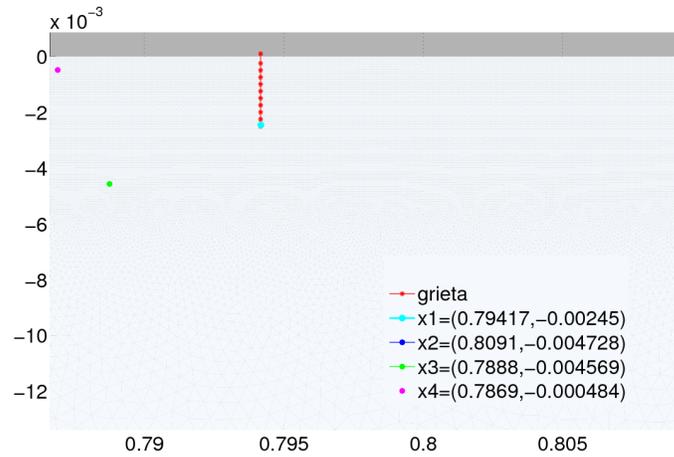


Figura 6.9.11: Puntos en los que se realiza el seguimiento de la tensión

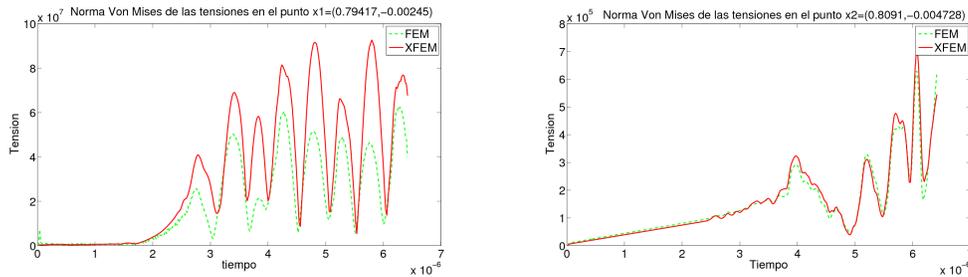


Figura 6.9.12: Norma de Von Mises de las tensiones en los puntos  $X1$  y  $X2$  calculada con XFEM y FEM

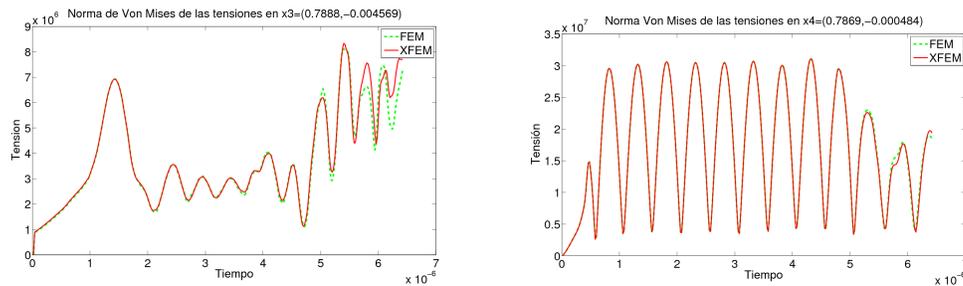


Figura 6.9.13: Norma de Von Mises de las tensiones en los puntos  $X3$  y  $X4$  calculada con XFEM y FEM

# Conclusiones

En esta memoria se han presentado resultados relativos al análisis, modelado matemático y simulación numérica de diversos problemas de contacto dinámicos.

En particular, se consideraron dos problemas: un problema dinámico de contacto con sólido rígido sin fricción, y un problema de contacto entre los labios de una grieta en una placa, considerando en ambos casos condiciones de Signorini en la frontera de contacto.

Para el problema dinámico de contacto con sólido rígido sin fricción, la existencia y unicidad de solución es un problema abierto. Hemos demostrado la existencia de una solución del problema en un sentido débil, es decir, se verifican todas las ecuaciones en el sentido de las distribuciones salvo la condición de compatibilidad que se cumple en el interior del complementario (respecto a la frontera del dominio) de un conjunto de medida menor que  $\delta$ , para cualquier  $\delta > 0$ .

En la resolución numérica de este problema, se ha utilizado una discretización en tiempo mediante un método implícito de la familia de los métodos de Newmark, cuyos parámetros se han escogido de modo que el método sea incondicionalmente estable, mientras que la discretización en espacio se ha realizado utilizando el método de elementos finitos clásico. Para el tratamiento de las condiciones de Signorini se utilizó un multiplicador de Lagrange que permite obtener una formulación como ecuación variacional mediante técnicas de subdiferenciabilidad y operadores maximales monótonos. Para acelerar la convergencia del algoritmo de contacto se modificó éste utilizando una técni-

ca de Newton generalizado, que permite alcanzar convergencia en menos de 10 iteraciones en la mayoría de los casos. La eficiencia del algoritmo se puso a prueba resolviendo un problema simple con solución conocida, variando las condiciones de contorno y los parámetros del problema, obteniendo en todos los casos una buena aproximación de la solución.

Previo al estudio del problema de contacto en una placa con grieta, se plantearon los modelos matemáticos que rigen la vibración por ondas de Rayleigh de un sólido elástico tridimensional semi-infinito sin fisura, de donde se obtuvieron los datos del modelo asociado a una onda de Rayleigh, que fueron utilizados para imponer las condiciones de contorno de los problemas con y sin grieta sobre dominios acotados. Debido a la incompatibilidad de la condición de contorno asociada a una onda de Rayleigh con una condición inicial de reposo, se desarrolló una técnica de descomposición del problema que permite la simulación de la propagación de la onda de Rayleigh partiendo de una placa en reposo.

En el caso de la placa sin grieta se tuvo acceso a resultados experimentales, de modo que se realizó la comparación entre la simulación numérica de la propagación de cinco ciclos de onda de Rayleigh con amplitud variable, y las mediciones experimentales proporcionadas por el grupo de Metrología Óptica del Departamento de Física Aplicada de la Universidad de Vigo. La variación de la amplitud que presentan las ondas experimentales se aproximó por una envolvente gaussiana cuyos parámetros se extrajeron de los datos experimentales. Se consideraron distintas variantes de las condiciones iniciales, y los resultados obtenidos con todas ellas reprodujeron las mismas soluciones. Los errores relativos obtenidos fueron, a lo sumo, del cinco por ciento siendo en la mayoría de los casos menor del tres por ciento, con lo que se valida la simulación numérica de este problema.

De este trabajo se obtuvo también un procedimiento para la determinación de los parámetros de Lamé del material, puesto que las velocidades de las ondas longitudinales y transversales dependen únicamente de las características del material.

El problema con grieta se resolvió considerando dos métodos de elementos finitos para la discretización en espacio, en método FEM clásico y el método de elementos finitos extendidos, XFEM, más reciente. En ambos casos, las condiciones de contacto de Signorini se adaptaron a los saltos de los desplazamientos en los puntos de la grieta.

En el primer caso, la malla ha de adaptarse a la geometría de la grieta y ésta se representa por una colección de nodos dobles. Se estudiaron las trayectorias de un punto cerca de la superficie, comparándose la trayectoria teórica, la trayectoria en una la placa sin grieta y con grieta. En este último caso se apreció la perturbación de la forma elíptica en la trayectoria, lo que sirve como indicador de la presencia de una grieta en la estructura. Además, se compararon los desplazamientos experimentados por los puntos de la superficie en distintos instantes de tiempo tanto en el caso teórico, como en los casos con y sin grieta. Se comprobó que antes de que la onda alcanzase la grieta no presentan diferencias sustanciales, mientras que una vez que la onda ha superado la grieta los efectos de la reflexión y la refracción son evidentes en la amplitud de las ondas. Desafortunadamente, no dispusimos de datos experimentales con los que comparar los resultados numéricos como se hizo en el caso sin grieta.

La utilización de los elementos finitos extendidos, XFEM, permite no sólo utilizar mallas para el dominio independientes de la grieta, sino también obtener una mejor aproximación de las tensiones en la zona cercana al vértice, al añadir a la base del espacio de aproximación ciertas funciones de base que permiten capturar la singularidad. Para obtener dichas funciones, se dedujo la expresión de las tensiones cerca del vértice de la grieta, en el caso de una grieta que avanza con velocidad no nula, utilizando un método directo de resolución y, tras probar que dicho método no conduce a una solución no trivial para el caso de una grieta estática, se utilizó un método inverso mediante la función de Airy para obtener la expresión de las tensiones en el entorno del vértice de una grieta estable.

Para representar la discontinuidad de los desplazamientos en la grieta se consideran funciones de salto de Heaviside que se añaden a la base estándar en los elementos cortados por la grieta.

Se presentó la metodología seguida en la implementación de los XFEM, con especial hincapié en las técnicas destinadas a evitar la casuística que presenta el método, tanto en la integración numérica sobre elementos cortados por la grieta, como en el ensamblado de las matrices elementales, puesto que el número de grados de libertad varía de un elemento a otro. Para abordar la integración numérica se realizó una representación baricéntrica de los puntos de corte de la grieta con las aristas de los elementos lo que genera una subdivisión del triángulo que permite adaptar, automáticamente, cualquier regla de cuadratura. Las matrices elementales se construyeron por bloques, de modo que los productos entre funciones de forma estándar y del enriquecimiento estén bien diferenciados. Para el ensamblado, se construyeron matrices de conectividad y de ensamblado específicas para los distintos tipos de nodos y grados de libertad, de modo que se puedan combinar a la hora de ensamblar bloques que involucren distintos tipos de funciones de forma.

Se comprobó la eficiencia del método de elementos finitos extendidos resolviendo los problemas asociados a los modos de fractura I y II y se compararon los resultados obtenidos con los elementos finitos estándar con los obtenidos utilizando XFEM. Se comprobó que el orden de aproximación en desplazamientos es el mismo, mientras que las tensiones se aproximan mejor con los XFEM, como era de esperar. La misma comprobación se realizó para el problema asociado a la propagación de ondas de Rayleigh sobre placas con grietas, obteniendo prácticamente los mismos desplazamientos en la superficie de la placa.

## Coordenadas cilíndricas y polares.

Base Cartesianas:  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ .

$$\mathbf{u} = u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y + u_z \mathbf{e}_z.$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad (\text{A.1})$$

$$\sigma_x = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad (\text{A.2})$$

$$\sigma_y = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad (\text{A.3})$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right). \quad (\text{A.4})$$

Base Cilíndricas:  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$ .

$$\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z.$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad 2\varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}. \quad (\text{A.5})$$

$$\sigma_r = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad (\text{A.6})$$

$$\sigma_\theta = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right), \quad (\text{A.7})$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right). \quad (\text{A.8})$$

$$u_r = \cos(\theta)u_x + \sin(\theta)u_y, \quad u_\theta = -\sin\theta u_x + \cos(\theta)u_y. \quad (\text{A.9})$$

$$u_x = \cos(\theta)u_r - \sin(\theta)u_\theta, \quad u_y = \sin\theta u_r + \cos(\theta)u_\theta. \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial\theta}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial\theta}. \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta} - \frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\right).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\cos^2(\theta)}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{r}\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\right).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = (\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta))\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\right) + \sin(\theta)\cos(\theta)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\right).$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}. \quad (\text{A.12})$$

# Bibliografía

- [1] J.D. ACHENBACH. *Wave propagation in elastic solids*, North-Holland, 1973.
- [2] J.D. ACHENBACH y Z.P. BAŽ. Elastodynamic near-tip stress and displacement fields for rapidly propagating cracks in orthotropic materials. *Journal of Applied Mechanics*, **42**, no 1, págs. 183-189, (1975).
- [3] R.A. ADAMS, *Sobolev Spaces* (Academic Press, 1975).
- [4] C. ATKINSON y J.D. ESHELBY. The flow energy into the tip of a moving crack. *International Journal of Fracture Mechanics*, **4**, pp. 3-8, (1968).
- [5] S.N. ATLURI. Path-independent integrals in finite elasticity and inelasticity, with body forces, inertia and arbitrary crack face conditions. *Engineering Fracture Mechanics*, **16**, pp. 341-369, (1982).
- [6] P. BARRAL. *Análisis matemático y simulación numérica del comportamiento termomecánico de una colada de aluminio*. Tesis doctoral, Universidad de Santiago de Compostela, 2001.
- [7] P. BARRAL, C. MORENO, P. QUINTELA y M.T. SÁNCHEZ. A numerical algorithm for a Signorini problem associated with Maxwell-Norton materials by using Newton's methods. *Comp. Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **195**, pp. 880-904, (2006)
- [8] P. BARRAL y P. QUINTELA. A numerical method for simulation of thermal stresses during casting of aluminium slabs. *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering*, **178**, pp. 69-88, (1999).

- [9] E. BÉCHET, H. MINNEBO, N. MOËS y B. BURGARDT. Improved implementation and robustness study of the x-fem for stress analysis around cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **64**, pp. 1033-1056, (2005).
- [10] T. BELYTSCHKO y T. BLACK. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **45** no 5, pp. 601-620, (1999).
- [11] T. BELYTSCHKO, N. MOËS, S. USUI y C. PARIMI. Arbitrary discontinuities in finite elements. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **50**, no 4, pp. 993-1013, (2001).
- [12] A. BERMÚDEZ. *Continuum Thermomechanics*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2005.
- [13] A. BERMÚDEZ y C. MORENO. Duality methods for solving variational inequalities. *Comput. Math. Appl.*, **7**, pp. 43-58, (1981).
- [14] S. BRAHIM-OTSMANE, G.A. FRANCFORT y F. MURAT. Homogenization in thermoelasticity. *Publications du Laboratoire d'Analyse Numerique*, R89011, (1989).
- [15] H. BRÉZIS, *Analyse fonctionnelle: théorie et applications* (Masson, 1983).
- [16] H. BRÉZIS. *Opérateurs maximaux monotones et semigroups de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland, 1973.
- [17] M. BURGUERA. *Análisis numérico de una clase de problemas de contacto en plasticidad perfecta*. Tesis doctoral, Universidad de Santiago de Compostela, 1991.
- [18] M.T. CAO, C. MORENO y P. QUINTELA. Simulation of Rayleigh waves in cracked plates, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **30**, pp. 15-42, (2007).
- [19] M.T. CAO, *Simulación de ondas de Rayleigh en placas fisuradas*. Trabajo de Investigación Tutelado, Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Santiago de Compostela, 2003.

- 
- [20] E. CASAS. *Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales*, Universidad de Cantabria, 1992.
- [21] E. CHAHINE, P. LABORDE y Y. RENARD. Quasi-optimal convergence result in fracture mechanics with xfem. *C.R. Math. Acad. Sci. Paris*, **342**, pp. 527-532, (2006).
- [22] E. CHAHINE, P. LABORDE y Y. RENARD. Crack tip enrichment in the xfem method using a cut-off function. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **75** no 6, pp. 629-646, (2008).
- [23] J. CHESSA , P. SMOLINSKI y T. BELYTSCHKO. *The extended finite element method (XFEM) for solidification problems* *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **53** pp. 1959-1977, (2002).
- [24] J. CHESSA, H. WANG, and T. BELYTSCHKO. On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 57, pp. 1015-1038, (2003).
- [25] D. L. CHOPP y N. SUKUMAR. Fatigue crack propagation of multiple coplanar cracks with the coupled extended finite element/fast marching method. *International Journal of Engineering Science*, **41**, no 8, pp. 845-869, (2003).
- [26] M. COCOU. Existence of solutions of a dynamic Signorini's problem with nonlocal friction in viscoelasticity, *Z. angew. Math. Phys.* **53** (2002) 1099–1109.
- [27] M. COCOU y G. SCARELLA. Existence of a solution to a dynamic unilateral contact problem for a cracked viscoelastic body, *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **338** (2004) 341–346.
- [28] J. DOLBOW, N. MOËS, y T. BELYTSCHKO. An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **19**, pp. 6825-6846, 2001.

- [29] M. DUFLOT. A study of the representation of cracks with level sets. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **70**, pp. 1261-1302, (2007).
- [30] G. DUVAUT. y J.L. LIONS. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, París, 1972.
- [31] C. ECK. Existence of solutions to a thermo-viscoelastic contact problem with Coulomb friction, *Math. Models Methods Appl. Sci.* **12** N° 10 (2002) 1491–1511.
- [32] I. EKELAND y R. TEMAM. *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Études Mathématiques (Dunod, 1974).
- [33] P. FERNANDES y G. GILARDI, Magnetostatic and electrostatic problems in inhomogeneous anisotropic media with irregular boundary and mixed boundary conditions, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **7**, (1997) pp. 957–991.
- [34] I. FIGUEIREDO y L. TRABUCHO. A class of contact and friction dynamic problems in thermoelasticity and in viscoelasticity, *Int. J. Engrg. Sci.* **33** (1995) 44–66.
- [35] M. FLEMING, Y.A. CHU, B. MORAN, y T. BELYTSCHKO. Enriched element-free galerkin methods for crack tip fields. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**, no 8, pp. 1483-1504, (1997).
- [36] L.B. FREUND. *Dynamic Fracture Mechanics*, Cambridge University Press, New York, 1990.
- [37] L.B. FREUND y R.J. CLIFTON. On the uniqueness of plane elastodynamic solutions for running cracks. *Journal of Elasticity*, **4**, no 4, pp. 293-299, (1974).
- [38] T. P. FRIES. *The intrinsic XFEM for two-fluid flows*. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*; **60** pp. 437-471, (2009)
- [39] G. GEYMONAT y P. SUQUET. Functional spaces for Norton-Hoff materials, *Math. Methods Appl. Sci.* **8** (1986) 206–222.

- 
- [40] A. GRAVOUIL, N. MOËS, y T. BELYTSCHKO. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets. part II: level set update. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **53**, no 11, 2569-2586, (2002).
- [41] A.A. GRIFFITH. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical transactions. Series A*, **221**, pp. 163-198, (1920).
- [42] P. GRISVARD. *Singularities in boundary value problems*. Masson, París, 1992.
- [43] M. E. GURTIN. *An Introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press, 1981.
- [44] M. E. GURTIN. *Configurational Forces as Basic Concepts of Continuum Physics*, Springer, 2000.
- [45] M. E. GURTIN y P. PODIO-GUIDUGLI. Configurational forces and constitutive theory for crack propagation that allows for kinking and curving, *J. Mech. Phys. Solids*; **46** pp. 1343-1378, (1998)
- [46] W. HAN y M. SOFONEA. *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity. Studies in Advanced Mathematics*, **30**, American Mathematical Society–International Press, 2002.
- [47] A. HANSBO y P. HANSBO. A finite element method for the simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **193**, pp. 3523-3540, (2004).
- [48] I. HLAVÁČEK, J. HASLINGER, J. NECĀS y J. LOVIŠEK. *Solution of Variational Inequalities in Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [49] T.J.R. HUGHES. *The finite element method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, 1987.
- [50] G.R. IRWIN. Fracture dynamics. *Fracturing of metals*. American Society for Metals, Cleveland, OH, pp. 147-166, (1948).

- [51] G.R. IRWIN. Onset of fast crack propagation in high strength steel and aluminium alloys. *Sagamore research conference proceedings*. **2** pp. 289-305, (1956).
- [52] G.R. IRWIN. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*. **24**, pp. 361-364, (1957).
- [53] J. JARUŠEK. Dynamic contact problems with given friction for viscoelastic bodies, *Czechoslovak Math. J.* **46** (121) (1996) 475–487.
- [54] J. JARUŠEK y C. ECK. Dynamic contact problems with small Coulomb friction for viscoelastic bodies. Existence of solutions, *Math. Models Methods Appl. Sci.* **9** N° 1 (1999) 11–34.
- [55] J. JARUŠEK. Dynamical contact problems for bodies with a singular memory, *Boll. Unione Math. Ital.* **7** (9-A) (1995) 581–592.
- [56] J.U. KIM. A boundary thin obstacle problem for a wave equation, *Commun. in Partial Differential Equations* **14** (1989) 1011–1026.
- [57] N. KIKUCHI y J.T. ODEN. *Contact problems in elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods*. Siam, Philadelphia, 1988.
- [58] K.L. KUTTLER. Dynamic friction contact problems for general normal and friction laws, *Nonlinear Analysis, Theory, Meth. Applic.* **28** (1997) 559–575.
- [59] P. LABORDE, J. POMMIER, Y. RENARD y M. SALAUN. High-order extended finite element method for cracked domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **64**, no 3, pp. 354-381, (2004).
- [60] L.D. LANDAU y E.M. LIFSHITZ. *Curso de física teórica. VII: Teoría de la elasticidad*. Reverté, Barcelona, 1966.
- [61] G. LEBEAU y M. SCHATZMAN. A wave problem in a half-space with a unilateral constraint at the boundary, *J. Diff. Eqs.* **53** (1984) 309–361.

- [62] G. LEGRAIN, N. MOËS y E. VERRON. Stress analysis around crack tips in finite strain problems using the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **63**, no 2, 290-314, (2005).
- [63] J.L. LIONS. *Cours d'Analyse numérique* (Hermann, 1973).
- [64] J.L. LIONS. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires* (Dunod, 1969).
- [65] J.L. LIONS y E. MAGENES. *Problèmes aux limites non homogènes et applications, 1* (Dunod, 1968).
- [66] J.A.C. MARTINS y J.T. ODEN. Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal friction and interface laws, *Nonlinear Analysis, Theory, Meth. Applic.* **11** (1987) 407–428.
- [67] N. MOËS, J. DOLBOW, y T. BELYTSCHKO. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **46** no 1, pp. 131-150, 1999.
- [68] N. MOËS, A. GRAVOUIL, y T. BELYTSCHKO. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets. part I: Mechanical model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **53**, no 11, pp. 2549-2568, (2002).
- [69] B. MORAN y C.F. SHIH A general treatment of crack tip contour integrals. *International Journal of Fracture*, **35**, pp. 295-310, (1987).
- [70] N.F. MOTT. Fracture of Metals: Theoretical considerations. *Engineering*, **165**, pp. 16-18, (1948).
- [71] J.E. MUÑOZ RIVERA y R. RACKE Multidimensional contact problems in thermoelasticity. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **58**, pp. 1307-1337, (1998).
- [72] J. NEČAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques* (Masson, 1967).

- [73] D.H. NGUYEN, M. LAZARD, F. BILTERYST, P. LAMESLE y G. DOUR *Modelling the brazed assembly by the coupling of the eXtended Finite Element and the matched asymptotic development methods*
- [74] J. PAREDES. *Simulación numérica de algunos problemas de mecánica de fluidos con frontera libre*. Tesis doctoral, Universidad de Santiago de Compostela (2010).
- [75] A. PAZY. Semigroups of non-linear contractions in Hilbert spaces. En *Problems in Nonlinear Analysis*. C.I.M.E. Ed. Cremonese. Roma, (1971).
- [76] P. QUINTELA. *Ecuaciones diferenciales*. Tórculo, 2000.
- [77] J. RÉTHORÉ, A. GRAVOUIL y A. COMBESCURE. An energy-conserving scheme for dynamic crack growth using the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **63**, no 5, pp. 631-659, (2005).
- [78] J.R. RICE. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, **35**, pp. 379-386, (1968).
- [79] J.R. RICE y G.F. ROSENGREN. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **16**, pp. 1-12, (1968).
- [80] A.D. RODRÍGUEZ-ARÓS. *Análisis variacional y numérico de problemas de contacto en viscoelasticidad con memoria larga*. Tesis doctoral, Universidad de Santiago de Compostela (2005).
- [81] D. ROYER y E. DIEULESAINT. *Elastic waves in solids. Vol I y II*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2000.
- [82] A. SAMARTÍN y C. MORENO. Application of dynamic models to the detection of imperfections in plate structures, in Topping, B.H.V. and Bittnar, Z., eds., *Proceedings of the Sixth International Conference on Computational Structures Technology*, Civil-Comp Press, (2002).

- 
- [83] J. SÁNCHEZ HUBERT y E. SÁNCHEZ PALENCIA. *Vibration and Coupling of continuous systems. Asymptotic methods*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1989.
- [84] L.A. SEGEL *Mathematics applied to continuum mechanics*. Macmillan, New York, 1977.
- [85] C.F. SHIH y J.W. HUTCHINSON. Fully plastic solutions and large-scale yielding estimates for plane stress crack problems. *Journal of Engineering Materials and Technology*, **98**, pp. 289-295, (1976).
- [86] G.C. SHIH. Dynamic aspects of crack propagation. *Inelastic Behavior of Solids*, McGraw-Hill, New York, pp. 607-633, (1970).
- [87] J. SIMON. Compact sets in the space  $L^p(0, T; B)$ . *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **146**, no 1, págs. 65-96, (1987).
- [88] M. STOLARSKA, D. L. CHOPP, N. MOËS y T. BELYTSCHKO. Modelling crack growth by level sets and the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **51**, no 8, págs. 943-960, (2001).
- [89] N. SUKUMAR, D. L. CHOPP y B. MORAN. Extended finite element method and fast marching method for three-dimensional fatigue crack propagation. *Engineering Fracture Mechanics*, **70**, no 1, 29-48, (2003).
- [90] N. SUKUMAR, N. MOËS, B. MORAN y T. BELYTSCHKO. Extended finite element method for three dimensional crack modelling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **48**, pp. 1549-1570, (2000).
- [91] N. SUKUMAR y J.-H. PRÉVOST. Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method. part I: Computer implementation. *International Journal of Solids and Structures*, **40**, no 26, 7513-7537, (2003).
- [92] N. SUKUMAR, Z. Y. HUANG, J.-H. PRÉVOST y Z. SUO. Partition of unity enrichment for bimaterial interface cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **59**, no 8, pp.1075-1102, (2004).

- [93] L. VAN MIEGROET y P. DUYSINX. 3D Shape Optimization with X-FEM and a Level Set Constructive Geometry Approach. *8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization. June 1-5, 2009, Lisbon, Portugal.*
- [94] G. VENTURA. On the elimination of quadrature subcells for discontinuous functions in the extended finite-element method. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **66**, pp. 761-795, (2006).
- [95] J. M. VIAÑO. Análisis de un método numérico con elementos finitos para problemas de contacto unilateral sin rozamiento en elasticidad: Formulación física y matemática de los problemas, *Rev. Internac. Métop. Numér. Cálcl. Diseñ. Ingr.* **1**, 79-93, (1985).
- [96] J. M. VIAÑO. Análisis numérico de un método numérico con elementos finitos para problemas de contacto unilateral sin rozamiento en elasticidad: Aproximación y resolución de los problemas discretos, *Rev. Internac. Métop. Numér. Cálcl. Diseñ. Ingr.* **2**, 63-86, (1986).
- [97] A.A. WELLS. *The condition of fast fracture in aluminum alloys with particular reference to Comet failures.* British Welding Research Association Report, April 1955.
- [98] H.M. WESTERGAARD. Bearing pressures and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, **6**, pp. 49-53, (1939).
- [99] K. YOSIDA. *Functional Analysis.* Springer- Verlag. Berlin, 1980.
- [100] G. ZI y T. BELYTSCHKO. New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **57**, no 15, pp. 2221-2240, 2003.