Análisis de los factores causales relacionados con la competencia matemática: Inteligencia Verbal e Inteligencia no Verbal

Autor: Ricardo Pereira Villar

Tesis doctoral UDC / 2015

DIRECTORA: PILAR VIEIRO IGLESIAS

TUTORA: PILAR VIEIRO IGLESIAS

Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Pilar Vieiro Iglesias, profesora Titular de Psicología Evolutiva y de la Educación de la Universidad de A Coruña, en calidad de Directora de la Tesis Doctoral presentada por Ricardo Pereira Villar titulada "Análisis de los factores causales relacionados con la competencia matemática: Inteligencia Verbal e Inteligencia no Verbal"

INFORMA

que dicho trabajo reúne los requisitos exigidos y en consecuencia

AUTORIZA

su lectura y defensa pública.

Quiero dejar patente mi más sincero agradecimiento a mi directora de Tesis, la Dra. Pilar Vieiro Iglesias por el apoyo y la ayuda que me brindó en esta bonita y laboriosa tarea; sin ella, esta investigación no sería posible.

También me gustaría agradecer la ayuda prestada a los Equipos Directivos de los centros en los que fue posible la recogida de la información necesaria para esta tesis, especialmente a mis compañeros profesores/as y orientadores que me ayudaron enormemente de forma desinteresada.

A todos, gracias, así como a mis padres, por su paciencia y comprensión; y, sobre todo, por su capacidad de sacrificio.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMO

A comprensión de enunciados matemáticos é unha tarefa complexa que adoita ocasionar problemas a algúns nenos/as á hora de resolvelos. Para iso é necesario que os suxeitos teñan unha serie de habilidades que lles permitan comprender a información que proporciona o problema, de maneira que poidan utilizar os datos e realizar as operacións pertinentes. Neste complexo proceso interveñen unha serie de variables tanto intrapersonales como de situación que son onde aparecen as diferentes dificultades que os suxeitos teñen á hora de resolver os problemas matemáticos. A capacidade de razonamiento, capacidade de memoria, o nivel de comprensión lectora son algunhas das variables que inflúen neste proceso; pero tamén o son outras como os coñecementos previos, a capacidade de resolver as operacións, así como outras variables máis relacionadas cos aspectos emocionais e afectivos: ansiedade, motivación, etc.

Os obxectivos deste traballo son establecer: a) un perfil de nivel de competencia matemática, intelixencia verbal e non verbal en cada un dos niveis educativos estudados; b) as relacións entre intelixencia verbal e competencia matemática (cálculo e resolución de problemas), e entre intelixencia non verbal e competencia matemática en cada un dos niveis educativos estudados; c) analizar o valor predictivo da Intelixencia Verbal (semántica/relacións analógicas) e a Intelixencia non-Verbal en tarefas de competencia matemática (cálculo e resolución de problemas) en cada un dos niveis educativos seleccionados. Para iso seleccionouse unha mostra de 226 suxeitos con idades comprendidas entre os 10 e os 14 anos, correspondentes a alumnado de 4º e 6º curso de Educación Primaria e de 2º de ESO. Os resultados amosan: a) un patrón evolutivo ascendente no nivel de eficacia das distintas habilidades estudadas no grupo de 2º de E.S.O.; b) as tarefas que se presentan con menor nivel de eficacia son as de competencia matemática ; c) os alumnos de Educación Primaria son máis eficaces nas tarefas de Intelixencia Verbal que non-Verbal, patrón que se inviste no grupo de Secundaria; d) en Intelixencia Verbal o coñecemento semántico imponse ás habilidades relacionadas con relacións analógicas que se presentan máis deficitarias; e) as variables relacionadas coa Intelixencia Verbal foron altamente predictivas da Resolución de Problemas matemáticos en 4º de E.P.; f) en xeral a Intelixencia Verbal predijo o nivel de eficacia en Resolución de Problemas nos tres niveles educativos, pola súa banda a Intelixencia non-verbal só predijo o Cálculo en 2º de ESO.

PALABRAS CHAVE: cálculo, problemas matemáticos, Intelixencia Verbal, Intelixencia non-Verbal, competencia matemática.

RESUMEN

La comprensión de enunciados matemáticos es una tarea compleja que suele ocasionar problemas a algunos niños/as a la hora de resolverlos. Para ello es necesario que los sujetos tengan una serie de habilidades que les permitan comprender la información que proporciona el problema, de manera que puedan utilizar los datos y realizar las operaciones pertinentes. En este complejo proceso intervienen una serie de variables tanto intrapersonales como de situación que son donde aparecen las diferentes dificultades que los sujetos tienen a la hora de resolver los problemas matemáticos. La capacidad de razonamiento, capacidad de memoria, el nivel de comprensión lectora son algunas de las variables que influyen en este proceso; pero también lo son otras como los conocimientos previos, la capacidad de resolver las operaciones, así como otras variables más relacionadas con los aspectos emocionales y afectivos: ansiedad, motivación, etc.

Los objetivos de este trabajo son establecer: a) un perfil de nivel de competencia matemática, inteligencia verbal y no verbal en cada uno de los niveles educativos estudiados; b) las relaciones entre inteligencia verbal y competencia matemática (cálculo y resolución de problemas), y entre inteligencia no verbal y competencia matemática en cada uno de los niveles educativos estudiados; c) analizar el valor predictivo de la Inteligencia Verbal (semántica/relaciones analógicas) y la Inteligencia no-Verbal en tareas de competencia matemática (cálculo y resolución de problemas) en cada uno de los niveles educativos seleccionados. Para ello se seleccionó una muestra de 226 sujetos con edades comprendidas entre los 10 y los 14 años, correspondientes a alumnado de 4º y 6º curso de Educación Primaria y de 2º de ESO. Los resultados muestran: a) un patrón evolutivo ascendente en el nivel de eficacia de las distintas habilidades estudiadas en el grupo de 2º de E.S.O.; b) las tareas que se presentan con menor nivel de eficacia son las de competencia matemática; c) los alumnos de

Educación Primaria son más eficaces en las tareas de Inteligencia Verbal que no-Verbal, patrón que se invierte en el grupo de Secundaria; d) en Inteligencia Verbal el conocimiento semántico se impone a las habilidades relacionadas con relaciones analógicas que se presentan más deficitarias; e) las variables relacionadas con la Inteligencia Verbal fueron altamente predictivas de la Resolución de Problemas matemáticos en 4º de E.P.; f) en general la Inteligencia Verbal predijo el nivel de eficacia en Resolución de Problemas en los tres niveles educativos, por su parte la Inteligencia no-verbal sólo predijo el Cálculo en 2º de ESO.

PALABRAS CLAVE: cálculo, problemas matemáticos, Inteligencia Verbal, Inteligencia no-Verbal, competencia matemática.

SUMMARY

Comprehension of mathematical statements is a complex task that typically produces problems for some children when they are solving them. It requires that individuals have a set of skills that enable them to understand the information provided by the problem, so they can use the data and make the necessary operations. This complex process involves a number of variables as both intrapersonal situation are where different subjects have difficulties when solving math problems appear. Reasoning ability, memory capacity, the level of reading comprehension are some of the variables that influence this process; but so are others, such as prior knowledge, the ability to resolve operations and other variables more related to emotional and affective anxiety, motivation and go on.

Objectives of this study are to establish: a) a profile-level math, verbal and nonverbal intelligence in each of the educational levels studied competition; b) relationships between non-verbal intelligence verbal intelligence and mathematical literacy (calculation and problem solving), and mathematical competence and in each of the educational levels studied; c) to analyze the predictive value of verbal intelligence (semantic / analogic relations) and non- verbal intelligence in mathematical literacy tasks (calculation and problem solving) in each of the selected educational levels. For this, a sample of 226 subjects aged between 10 and 14 years, corresponding to students of 4th and 6th from Primary Education and 2nd from ESO was selected. Results showed: a) an upward developmental pattern in the level of effectiveness of different skills studied in the group of 2nd ESO; b) tasks with lower efficiency are the math (calculation and solving problems); c) subjects in Primary education are more effective in Verbal Intelligence tasks that nonverbal pattern is reversed in the Secondary education group; d) Verbal Intelligence semantic knowledge is imposed on skills related to analog relationships are presented deficit; e) related variables verbal intelligence were highly predictive of mathematical problem solving in 4th EP; f) general verbal intelligence predicted the level of efficiency in mathematical problem solving in the three educational levels, meanwhile the non-verbal intelligence predicted the calculation only in 2nd ESO.

KeyWords: Calculation, Math Problems, Verbal Intelligence, NonVerbal Intelligence, Maths competence.

INTRODUCCIÓN

Esta investigación tiene como marco de referencia los conocimientos sobre los procesos cognitivos involucrados en el desarrollo de la competencia matemática, ahondando específicamente en el razonamiento lógico matemático y la comprensión de enunciados matemáticos

Investigaciones con estudiantes demuestran que estos suelen presentar más dificultades para comprender, representar y seleccionar conceptos antes que para hacer cálculos matemáticos (Vilenius-Touhimaa, Aunola y Norm, 2008), lo que evidencia que existe una relación entre comprensión lectora y competencia matemática, asociada a la eficacia en la comprensión semántica del enunciado de un problema matemático (Dirks, Spyer, van Lieshout y de Sonneville, 2008). En este sentido Lee (2010), señala que debemos tener precaución con el lenguaje matemático, pues este tiene sus propias reglas semánticas y sintácticas y una misma palabra puede tener distinto significado en el lenguaje natural que en el matemático, además explica que los alumnos tenderán a pensar que no saben matemática si no saben utilizar el lenguaje matemático tanto de manera oral como escrita, lo que podría constituir una barrera para el aprendizaje, debido al desconocimiento de las convenciones específicas necesarias para expresar los conceptos.

Por su parte, la teoría de los modelos mentales de Jonhson-Laird (1990) mantienen que la eficacia en la ejecución de una tarea depende, no sólo del nivel de desarrollo cognitivo del sujeto, sino de la capacidad del individuo para generar un modelo de situación en él.

Cada persona construye activamente sus conocimientos, pues como ya se ha señalado, creamos representaciones mentales internas o modelos mentales basados en nuestra experiencia e interacción con el ambiente. Estos modelos corresponden a las ideas, creencias, estrategias, etc. que dotan de significado lo que aprendemos, orientan nuestra posterior forma de actuar y nos llevan a esperar ciertos resultados. En síntesis, los modelos mentales son referentes para nuestro propio actuar y nos permiten interpretar y dar significado a los hechos.

En este contexto el trabajo que aquí presentamos pretende analizar la influencia que la Inteligencia Verbal vs. no-Verbal ejerce en la competencia matemática medida a través de tareas de cálculo y resolución de problemas matemáticos. Para ello llevamos a cabo un estudio transversal con alumnos de 4º E.P., 6º E.P. y 2º de ESO donde además nos aproximamos a un perfil evolutivo de los mismos desde las distintas medidas utilizadas.

La estructura general de esta tesis está dividida en dos partes, una primera teórica y otra empírica. En la parte teórica realizamos una aproximación al concepto y desarrollo de la competencia matemática, el conocimiento semántico y la inteligencia, organizada en tres capítulos.

En la parte empírica se presenta el trabajo de investigación desarrollado, exponiendo las conclusiones de la investigación, implicaciones educativas, limitaciones y recomendaciones para futuras investigaciones sobre el tema.

Finalmente se especifica la bibliografía utilizada y los anexos de la tesis doctoral.

CAPITULO 1. EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

1.1.- INTRODUCCIÓN

Uno de los supuestos aceptados por todos los integrantes de la comunidad educativa (alumnos, profesores, padres y responsables educativos) se refiere al hecho de considerar que las matemáticas es una materia fundamental en el currículo escolar, tanto por su contribución al desarrollo cognitivo del niño como por la funcionalidad que poseen la mayoría de los aprendizajes matemáticos en la vida adulta (Boylan, 2011; Legnard y Austin, 2014; Putnam, Lampert y Peterson, 1990).

Sin embargo, el aprendizaje de las matemáticas va más allá del mero utilitarismo del cálculo aritmético; de acuerdo con Mialaret (1986) tres elementos fundamentales van a ser determinantes en la necesidad de la enseñanza de las matemáticas: la disciplina matemática, las necesidades de la sociedad en la cual se va a integrar el niño y las necesidades psicológicas de éste.

Si bien es cierto que los niños desarrollan por si mismos un conocimiento matemático fruto de la experiencia vital y de la interacción con su entorno en una sociedad tan desarrollada y tecnificada como la nuestra sería imposible que una persona sin conocimiento matemático alguno pudiese desenvolverse eficazmente (Libertus, 2015). Además, los conocimientos matemáticos que de forma espontánea y a través de la experiencia pudiesen adquirir los individuos serían, con toda probabilidad, insuficientes para afrontar con garantías los retos y los desafíos que diariamente nos plantea una sociedad como la nuestra.

Numerosos estudios (Bjork y Bowyer-Crane, 2013; Hannula y Lehtinen, 2005; Kolkman, Kroesberge y Leseman, 2013; Methe, Begeny y Leary, 2011) han demostrado que la mayoría de los escolares de menor edad dominan las técnicas numéricas básicas como la enumeración, el ordenamiento de números y la correspondencia entre palabras escritas y símbolos (por ejemplo emparejar "cincuenta y ocho" con "58"), combinaciones numéricas básicas y técnicas para el cálculo de números enteros incluyendo la suma y la resta con acarreo. La mayoría incluso pueden resolver problemas matemáticos verbales cuando éstos son rutinarios y exigen una única operación de cálculo (a estas edades operaciones de suma y reta).

A diferencia de otras asignaturas, las matemáticas se perciben como algo preciso, exacto, sin ambigüedades, como una asignatura que diferencia claramente aciertos de errores. A esto se le añade su alto nivel de abstracción y generalización, su carácter impersonal, de manera que muchos alumnos desarrollan unas actitudes y unas creencias hacia esta asignatura relacionadas frecuentemente, con la ansiedad, el miedo y la confusión, provocando, consecuentemente, una actitud de recelo y desconfianza; hasta el punto de que muchos alumnos asumen que no sirven para las matemáticas, de ahí que con mayor frecuencia se esté hablando de problemas de “ansiedad matemática” y trastornos socioemocionales (Ashcraft y Faust, 1994; Heather, 2009).

Es evidente, por tanto, que resulta imprescindible una instrucción planificada y formal que proporcione los conocimientos matemáticos necesarios para que los individuos puedan desenvolverse en un mundo tecnológico y tan sofisticado como el que nos ha tocado vivir. Por eso hoy en día, la enseñanza de las matemáticas va a cumplir cuatro objetivos (Hough y Gough, 2007; Putman y cols., 1990):

1.- Es necesario que los sujetos sepan leer y escribir matemáticamente: nuestra sociedad demanda personas con habilidades que puedan resolver problemas complejos. En este sentido, saber leer y escribir matemáticamente implica la capacidad para explorar, hipotetizar, predecir, conjeturar, razonar lógicamente y usar, consecuentemente, una variedad de métodos matemáticos que nos permitan resolver distintos problemas de diferentes formas.

2.- Aprendizaje para toda la vida: ya que hoy en día es frecuente cambiar de trabajo o, cuando menos, no realizar el mismo trabajo a lo largo de toda la vida. La capacidad para resolver problemas matemáticos nos puede abrir muchas puertas en la vida real y nos va a permitir acomodarnos a nuevas situaciones gracias a la capacidad de crear nuevos conocimientos para la vida.

3.- Las matemáticas han llegado a ser un filtro a nivel de mercado laboral y para la participación en la sociedad: por este motivo deben ser accesibles a todos los ciudadanos.

4.- Es necesario formar a ciudadanos que permitan afrontar la evolución de la tecnología: para lo que es necesario, en determinados campos, ciertos conocimientos matemáticos que nos permitan interpretar ciertas informaciones.

Con todo, y a pesar de la clara utilidad de las matemáticas y de la indispensable necesidad de su aprendizaje, muchos escolares tienen dificultades en su aprendizaje y perciben esta materia como un conocimiento intrínsecamente complejo que genera grandes sentimientos de ansiedad e intranquilidad, siendo causa de frustraciones y actitudes negativas hacia escuela (González-Pienda y Núñez Pérez, 2006). Si a esto añadimos que, en muchos casos, la transmisión de los conocimientos matemáticos se hace con una enseñanza y metodología inadecuadas, es hasta cierto punto lógico que muchos estudiantes desarrollen una auténtica aversión por esta materia (Belbase, 2010). De hecho, muchas personas desarrollan en su vida escolar actitudes negativas hacia las matemáticas y ven condicionadas sus preferencias académicas y profesionales por sus dificultades para dominarlas; hasta el punto de que las dificultades y fracasos escolares que ocasionan las matemáticas la convierten en una materia que actúa como "filtro selectivo" básico en todos los sistemas educativos (Davis y Hersh, 1986; Di Martino y Zan, 2010; Samuelsson y Granstrom, 2007; White-Fredette, 2010).

Hay que tener presente que el nivel de dificultad de los contenidos matemáticos no sólo viene marcado por las características del propio contenido matemático, sino también por las características psicológicas y cognitivas de los alumnos. De hecho, muchos alumnos que son capaces de obtener buenos rendimientos en otras asignaturas del currículum muestran escasos resultados en las matemáticas. Otros son capaces de obtener buenos resultados en situaciones rutinarias y de práctica repetida, pero son incapaces de realizar correctamente tareas cuando se introduce el formalismo más abstracto y riguroso del álgebra o de la geometría.

Lo cierto es que a partir de los conocimientos actuales y de acuerdo con González-Pienda (1998), las causas por las que la materia de matemáticas trae tantas complicaciones al alumnado habrá que buscarlas en varios factores; por un lado factores inherentes a la propia naturaleza de las matemáticas y de su conocimiento muy alejado de las características y formas de pensamiento infantil e, incluso, del pensamiento habitual de muchos adultos. Por otro lado, factores relacionados con las creencias y expectativas que alumnos, profesores y padres tienen en relación con las matemáticas; con los métodos de enseñanza; con los medios y recursos empleados; y con la evaluación de la asignatura.

Por eso a lo largo de este capítulo trataremos de analizar cómo evoluciona el aprendizaje matemático desde la infancia desde dos ámbitos: el cálculo y la resolución de enunciados matemáticos, así como las dificultades que tienen determinados escolares en el aprendizaje de las matemáticas (DAM a partir de ahora), empezando por las dificultades más básicas (contar, enumerar, comparar, etc.) hasta llegar a las dificultades a la hora de resolver enunciados matemáticos analizando también, consecuentemente, las dificultades relacionadas con las tareas de cálculo; ya que sin un correcto aprendizaje de éstas los alumnos no podrían afrontar con garantías la resolución de los problemas matemáticos que se les presenten.

1.2.- EL CÁLCULO: ADQUISICIÓN Y DESARROLLO

Para que un niño llegue a una comprensión adecuada de los conceptos numéricos es necesario comprobar el conocimiento del alumno acerca de los conceptos que pretendemos trabajar. En los primeros niveles hay que partir de la propia actividad para, a partir de ésta, llevarle a la adquisición del lenguaje matemático; lenguaje que se fundamenta en signos y símbolos abstractos que podemos relacionar y aplicar a cualquier realidad (Sarama, Lange, Clements y Wolfe, 2012; Thomas, Van Garderen, Scheuermann y Lee, 2015).

Cuando al niño se le presentan los signos numéricos sin antes haber experimentado y manipulado a través de su propia actividad las relaciones representadas por ellos, éstos carecen de significado real para él, y su comprensión no deja de ser pseudoconocimiento (Abramovich y Brower, 2011; Babai, 2010; González-Pienda y Martín del Buey, 1989; Xenidou-Dervou, van Lieshout y van der Schoot, 2014). Por ello, el concepto de numeración sólo se adquiere después de repetidas experiencias de clasificación, ordenamiento y establecimiento de correspondencias. Sin estas nociones básicas el niño podrá reconocer los distintos números e, incluso, repetir de memoria las tablas, pero desconocerá su significado. Por esta razón hay partir de los conocimientos implícitos de los propios alumnos, cargados de significado matemático intuitivo.

A partir de que el niño tenga conocimiento de los números ya está en condiciones para combinarlos, y a partir de ahí, establecer relaciones entre ellos, es decir, hacer operaciones.

Para que los niños puedan afrontar con éxito las tareas de cálculo han de dominar, tal y como se verá a continuación, una serie de técnicas y habilidades básicas: contar oralmente, enumerar y comparar magnitudes.

De acuerdo con Baroody (2005) la capacidad que tenemos los seres humanos para contar se desarrolla jerárquicamente, de manera que, con la práctica, la habilidad de contar se va haciendo más automática y requiere, por tanto, menos atención. En esta línea se expresan Albayrak (2010), Davis (2009) y Schaeffer, Eggleston y Scott (1974), entre otros, al afirmar que cuando una técnica puede ejecutarse con eficiencia, puede procesarse simultáneamente o integrarse con otras técnicas en la memoria de trabajo (MO) para formar técnicas aún más complejas. Por ejemplo, cuando les pedimos a los alumnos la "sencilla" tarea de que determinen si un conjunto de nueve elementos es "más" o "menos" que uno de ocho, han de poner en funcionamiento una serie de conocimientos que implican cuatro habilidades:

-Generar sistemáticamente los nombres de los números en el orden adecuado: tarea que se complica si al mismo tiempo tienen que contar objetos. Hacia los tres años de edad los niños suelen empezar a contar los elementos de un conjunto a partir del "uno" y a los cinco ya pueden usar la secuencia correcta para contar conjuntos de 10 elementos como mínimo (Fuson, Richards y Briars, 1982).

-Aplicar cada palabra o etiqueta (número) a un único elemento del conjunto: la acción de contar objetos (enumeración), tal y como se ha expuesto en el párrafo anterior, no es una técnica fácil, porque el niño debe coordinar la verbalización de la serie numérica con la acción de señalar cada elemento del conjunto, creando, de este modo, una correspondencia biunívoca entre las etiquetas y los objetos. Como los niños de cinco años ya son capaces de coordinar las técnicas para generar correctamente la serie numérica y señalar al mismo tiempo el objeto con el que se corresponde cada número deben afrontar con éxito la compleja tarea de enumeración.

-Representar los elementos que contiene cada conjunto: y esto se consigue con la denominada *regla del valor cardinal*, que significa que la última etiqueta numérica expresada durante el proceso de enumeración representa el número total de elementos del conjunto; habilidad imprescindible para poder establecer comparaciones acerca de qué conjunto tiene más elementos.

-Comprender que la posición en la secuencia define la magnitud: directamente relacionada con la habilidad anterior, ya que los números de una serie en realidad hacen referencia a cantidades de elementos. En torno a los cinco años de edad los niños pueden hacer comparaciones precisas entre magnitudes de números consecutivos como el 8 y el 9 ya que están muy familiarizados con las relaciones en la secuencia de sucesión numérica (cuando contamos, el 9 viene después del 8, así que el 9 es más grande).

Según Baroody (2005) los psicólogos ofrecen dos explicaciones distintas de la comprensión del significado de los números y del acto de contar en las primeras edades; conocimientos, por otra parte, que son esenciales para que los niños desarrollen paulatinamente la comprensión del número y lleguen, consecuentemente, a dominar las aplicaciones numéricas, imprescindibles para afrontar tareas matemáticas más complejas como por ejemplo las tareas de cálculo y las que implican resolver enunciados matemáticos. Desde el punto de vista de los requisitos lógicos, defendido por autores como Piaget, Elkind, Wohlwill y Lowe entre otros, el desarrollo del concepto de número y de una manera significativa de contar depende de la evolución del pensamiento lógico, o lo que es lo mismo, que los niños irán comprendiendo el número y la acción de contar significativamente en tanto en cuanto su pensamiento avance hacia un estadio más avanzado. Hasta el punto de que Piaget (1965) afirmaba que los requisitos lógicos del número (conceptos de seriación, clasificación y correspondencia biunívoca) aparecen en el "estadio operacional" del desarrollo mental, de manera que hasta que el sujeto no llegase a este estadio no tendría adquirido el pensamiento lógico, es decir: la comprensión de clases (los números forman un orden y constituyen una jerarquía de clases), las relaciones y las correspondencias biunívocas, un verdadero concepto de número y la habilidad de contar de una manera significativa. Por eso consideran al número como un concepto de "todo o nada".

El punto de vista alternativo considera que los números no se aprenden como un concepto de “todo o nada”, sino que los números y la capacidad de contar significativamente se desarrollan de manera gradual, poco a poco, como resultado de aplicar técnicas para contar y conceptos de una sofisticación cada vez mayor. Por eso para que un niño pueda contar de forma satisfactoria y comprender lo que significan los números ha asimilar y comprender una serie de principios: el principio del orden estable, el principio de correspondencia, el de unicidad, el de abstracción, el del valor cardinal y el de la irrelevancia del orden. Una vez que el niño llega a dominar estos conceptos básicos para contar (que se refieren a un solo conjunto), puede aplicar esta acción de contar a contextos más complejos como la comparación de dos conjuntos, por ejemplo para decidir cuántos elementos tiene cada conjunto o qué conjunto tiene más o menos elementos (Friso-van den Bos, Kolkman, Kroesbergen y Leseman, 2014; Obersteiner, Reiss, Ufer, Luwel y Verschaffel, 2014; Sasanguie, De Smedt, Defever y Reynvoet, 2012).

Mediante las experiencias de contar, los niños también van a descubrir los conceptos aritméticos básicos, aunque generales; si los cambios de orden o distribución no alteran el valor cardinal de un conjunto, otras transformaciones sí lo hacen, por ejemplo añadir o quitar elementos. Así, un niño puede entender que añadir un bloque a otro es “dos” y que añadir otro más hacen “tres” (Baroody y White, 1983; Ginsburg y Baroody, 1983; McNeil, Fushs, Keulties y Gibson, 2011; Patel y Canobi, 2010; Von Glaserfeld, 1982). De manera similar, un niño puede determinar en seguida que quitar una galleta de un conjunto de tres, dará como resultado “dos”. A medida que los niños van cogiendo soltura con las técnicas de contar van a resolver mentalmente problemas que implican cálculos sencillos del tipo N+1 y N-1, problemas que establecen relaciones entre un número y su siguiente y/o su anterior. Estas experiencias informales facilitan que los niños consideren la adición como un proceso aumentativo (añadir algo a una cantidad dada) y la sustracción como un proceso de disminución (quitar algo a una cantidad dada). Para ello los niños suelen apoyarse en procedimientos de cálculo basados en contar que, al principio, requieren de objetos o materiales como cubos, garbanzos, o los propios dedos. Pero poco a poco los niños tienden, de manera natural a emplear procedimientos orales o mentales en el cálculo (sumar empezando a contar por el cardinal del sumando mayor, contar hacia atrás en restas sencillas, etc.), hasta el punto de que incluso pueden intuir algunas propiedades aritméticas fruto de estas experiencias con los números, por ejemplo la propiedad conmutativa en la suma (5+3=3+5).

Pero para que los alumnos puedan realizar cálculos y operaciones han de conocer los diferentes símbolos escritos con los que contamos en las matemáticas: para representar los números (por ejemplo 6, 24, 3.5, ½, etc.), las operaciones aritméticas (+, -, x, :) y las relaciones matemáticas esenciales (<, >, =, diferente). Ahora bien, escribir un símbolo es una tarea relativamente compleja porque implica reconocer y traducir una imagen mental del símbolo a acciones motrices que lo plasmen.

Así, desde el modelo cognitivo (por ejemplo Gao y Rogers, 2011; Gibson y Levin, 1975) defiende que para reconocer o leer un símbolo el niño debe conocer en qué se distingue de otros símbolos, lo que implica un análisis visual sofisticado que comporta aprender las características distintivas de cada número. Cuantas más características comunes tengan los símbolos más confusiones podrán generar en los alumnos. Esto explicaría por qué algunos niños tienen tantas dificultades a la hora de reconocer y leer el 6 y el 9, el signo < y el signo >. Por eso la escritura de los números comprende el aprendizaje de las características que los definen y un plan motriz paso a paso para volver a crear las partes componentes y las relaciones entre ellas y el todo para cada número.

En resumen, las técnicas para contar permiten a los alumnos más pequeños familiarizarse con los números, y a su vez con las cantidades a las que se refieren. Ahora bien, en la representación de cada número debe atenderse tanto a la noción de número como a su expresión verbal y gráfica. La construcción del número implica el establecimiento de una red de conexiones entre conjuntos equivalentes, la representación gráfica de esa equivalencia, la representación simbólica del numeral correspondiente, el nombre del número y el símbolo matemático (dígitos) empleado para su construcción (Fernández, Llopis y Pablo de Risco, 1991).

Para ello se ha de empezar con tareas relacionadas con la identificación de la grafía de los números citados a las cantidades que representan, junto con actividades diversas de escritura y lectura de los números correspondientes a distintas grafías. Ahora bien, no hay que olvidar que el paso de la percepción de los elementos de un conjunto a su representación por medio de un número es un proceso relativamente complejo, que ha de hacerse sin prisa, ya que hay que tener presente que para muchos alumnos el paso de la acción a la representación simbólica es difícil y requiere más tiempo, teniendo que volver una y otra vez al nivel manipulativo y perceptivo.

Pero no todos los alumnos desarrollan estas habilidades, de hecho existen niños que, contando con una inteligencia normal, muestran bajos rendimientos en las actividades escolares relacionadas con las matemáticas.

Para referirse a este tipo de dificultades de aprendizaje se suele emplear el término *discalculia*, que etimológicamente significa alteración de la capacidad para calcular, y en sentido más amplio, se usa para referirse a cualquier alteración en el manejo de los números. Otros términos como *acalculia* o *disaritmética* también se utilizan para referirse a este tipo de dificultad.

A pesar de que las investigaciones sobre este tipo de dificultades han sido más bien escasas, sobre todo si se comparan con las numerosas referencias a las dificultades en la lectura (Jordan, Levine y Huttenlocher, 1995), al describir las diferentes manifestaciones de las DAM se diferencian dos tipos de discalculias:

a) *Discalculias evolutivas* para referirse al desorden cognitivo en la niñez que se manifiesta a través de un deterioro en el desarrollo de las habilidades matemáticas de un niño sano, es decir, sin problemas de oído, visión o emocionales y con una inteligencia normal para el aprendizaje de la aritmética. Este trastorno puede afectar a distintos tipos de actividades:

-Lingüísticas: por ejemplo la comprensión y empleo de nomenclatura matemática, comprensión y denominación de las operaciones, etc.

-Perceptivas: relacionadas, por ejemplo, con el reconocimiento de los signos numéricos y/o aritméticos.

-Atencionales: por ejemplo a la hora de recordar las que “se llevan”, al observar los signos de las operaciones, al colocar los números en dentro de las operaciones, etc.

-Matemáticas: respetar la secuencia de los pasos de las operaciones matemáticas, al aprender las tablas de multiplicar, etc.

b) *Discalculias adquiridas* para referirse a las deficiencias en el procesamiento de la información numérica que se manifiesta en una persona normal después de haber sufrido una lesión cerebral afectando, sobre todo, al procesamiento y cálculo numérico (Carlson, 2005; Dehaene, 1992; Noel y Seron, 1992).

De acuerdo con González-Pienda (2006) el aprendizaje de las habilidades matemáticas hace referencia a un largo proceso que es preciso que los profesores tengan en cuenta a la hora de diseñar el contenido de su enseñanza. Conocer los estadios generales del desarrollo cognitivo, representado cada uno de ellos por un modo característico de razonamiento y por unas tareas específicas de matemáticas que el alumnado es capaz de abordar satisfactoriamente , va a ser de vital importancia a la hora de abordar los problemas que van a tener algunos sujetos en el ámbito de la matemática; ya que la comprensión de las DAM exige conocer con claridad los procesos y pasos en el desarrollo y aprendizaje de las matemáticas (Averill y Harvey, 2010; Bideaud, Meljac y Fischer, 1992; Campbell, 1992; Palmer, 2009; Schoenfeld, 1994;

Williamson, 2007). En ese desarrollo se pone de manifiesto que los conocimientos matemáticos son interdependientes y presentan una estructura jerarquizada en sus contenidos que se organizan en función de su naturaleza deductiva y de una lógica interna muy precisa. Esto significa que para adquirir ciertos conocimientos matemáticos es necesario que otros hayan sido adquiridos previamente, piénsese, por ejemplo en la división. Para poder dividir es necesario que se conozca la numeración (números naturales, enteros, etc.), la resta, la tabla de multiplicar, etc. Esto es lo que hace que los aprendizajes matemáticos se asemejen a una cadena en la que cada conocimiento va a enlazarse con los anteriores de acuerdo con un proceder lógico. Lo que ocurre es que, a veces, la lógica interna de las matemáticas y su secuenciación no se ajusta exactamente a la lógica interna del alumno; si a esto le sumamos que muchas veces a los alumnos se les exigen conocimientos previos que no poseen o que no han aprendido correctamente es lógico que se produzcan desajustes. Estos desajustes serán debidos, consecuentemente, a que el alumno recibe unos contenidos inconexos, fraccionados o, cuando menos, poco estructurados, lo que acarreará las consiguientes dificultades o lagunas en el aprendizaje. Es precisamente este carácter jerárquico de la asignatura el "culpable" de que la incomprensión de algunos conceptos en cualquiera de los niveles tenga consecuencias en cadena en la medida en que estos conocimientos sean necesarios para desarrollar los ulteriores.

Es por ello que durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas van apareciendo dificultades que, unas veces, son consecuencia de aprendizajes anteriores mal asimilados, y otras, de las exigencias que van surgiendo de los nuevos aprendizajes. Así, de acuerdo con Fernández Baroja y cols. (1991) son distintos los errores que se producen en la comprensión de las operaciones por falta de interiorización de la numeración, de los que pueden aparecer en la realización de problemas al fallar el razonamiento deductivo.

Así, antes de pasar al análisis de las dificultades matemáticas relacionadas con las habilidades de numeración y cálculo es preciso hacer una breve mención a las dificultades relacionadas con las nociones matemáticas básicas y con los principios numéricos; de esta manera estaremos respetando el orden en que van apareciendo según la competencia cognitiva del alumno.

1.2.1.- DIFICULTADES EN LA ADQUISICIÓN DE LAS NOCIONES BÁSICAS Y PRINCIPIOS NUMÉRICOS

Según la psicología genética las nociones básicas y los principios numéricos son imprescindibles para la comprensión del número, y además, constituyen la base de toda actividad matemática: la conservación, el orden estable, la clasificación, la seriación, la correspondencia, el valor cardinal, la reversibilidad, etc. Su adquisición depende del proceso madurativo y del ritmo de desarrollo de cada sujeto, de manera que en torno a los 5-7 años los/as niños/as adquieren estas nociones a través del juego y de la interacción con el medio y con el entorno que le rodea.

Sin embargo no todos los sujetos adquieren estas nociones a estas edades, los niños/as con un nivel mental bajo o con retraso madurativo suelen presentar un proceso de adquisición de estas nociones más lento y, por consiguiente, de los procesos mentales que dependen de las mismas; de manera que cuando la mayoría de los sujetos ya han alcanzado el período de las operaciones concretas, los que presentan un nivel mental más bajo siguen más tiempo ligados a sus percepciones con un pensamiento intuitivo más propio del período preoperatorio. De acuerdo con González-Pienda (1983) a estos/as niños/as les es más difícil pasar del plano de la acción al de la representación mental de las operaciones. Por eso, con estos niños, se hace imprescindible alargar el período de la práctica manipulativa, como consecuencia del ritmo característico de cada uno. Consecuentemente, esa dificultad y lentitud se va a manifestar en cada uno de los niveles del desarrollo, así como en la adquisición de los conceptos propios de cada uno de esos niveles.

Cuando estas nociones no se adquieren o no se dominan eficazmente, los sujetos tendrán dificultades que conllevarán a repercusiones negativas a lo largo de la escolaridad. Por ello, todo profesor deberá asegurarse de que sus alumnos han integrado y comprendido adecuadamente las nociones básicas anteriormente descritas antes de comenzar con la enseñanza de la numeración y el cálculo.

Por ejemplo, y tal y como se verá en el apartado siguiente de forma más pormenorizada, a la hora de contar, muchos niños (incluyendo los que presentan retraso mental) se inventan términos para los nombres "irregulares" de los números: como "diez y uno" por 11, "diez y dos" por 12, o "veintidiez", "veintionce" para 30 y 31 (Baroody y Ginsburg, 1984; Baroody y Snyder, 1983; Copley, 1999; Ginsburg, 1982). Otro problema relacionado con la habilidad de contar se produce cuando los sujetos no son conscientes de que las decenas (10, 20, 30,..., 90) siguen una pauta paralela a la secuencia de las unidades (Fuson y cols., 1982; Margolis y Laurence, 2008). Por eso para aprender las decenas, o lo que es lo mismo para contar de diez en diez, hemos de hacer algo parecido a aprender a contar de uno en uno: al principio aprender a base de memorización para, a continuación, emplear una pauta para ampliar la secuencia.

En cuanto a la habilidad de enumerar elementos las dificultades se presentan cuando los niños se enfrentan a colecciones grandes y, sobre todo desordenadas, ya que los alumnos tienen que aprender estrategias para llevar la cuenta de los elementos que han contado y de los que no. Cuando los elementos se ponen en fila hace falta poco esfuerzo para no perder la cuenta si se empieza por uno de los extremos. Si la colección está colocada en círculo, el niño solo necesita recordar el elemento por el que ha empezado a contar. Sin embargo, cuando la colección está desordenada los sujetos han de recordar qué elementos han sido etiquetados y cuáles quedan por etiquetar. El empleo de algún método sistemático como contar de izquierda a derecha y de arriba a abajo, o separando los elementos ya etiquetados (por ejemplo haciendo montones) puede ayudar a resolver esta dificultad. Por eso, autores como Annin y Lain (2010), Gelman y Gallister (1978); Gueary, Hoard, Bird- Craven y DeSoto (2004); Sarnecka y Lee (2009) defienden que los errores en la enumeración pueden ser de tres tipos: errores de secuencia (al generar una serie numérica incorrecta: saltarse algún número), errores de partición (al llevar un control inexacto de los elementos contados y los no contados: no saltarse ninguno) y errores de coordinación (al no coordinar la elaboración de la serie numérica y el proceso de control de los elementos contados: empezar a etiquetar sin señalar los elementos a los que se refieren).

Además, cuando son pequeños, los niños no suelen darse cuenta de que la enumeración sirve para numerar de manera que la última etiqueta del proceso de enumeración sirve para indicar la cantidad (lo que se conoce, tal y como se ha visto anteriormente, por *regla del valor cardinal*). Por eso hay niños que después de enumerar cuatro elementos (“1, 2 ,3 ,4”) y ante la pregunta de “¿cuántos elementos hay?” vuelven a decir la serie completa, ya que no comprenden que la enumeración no es un fin en si mismo, sino un medio para llegar a ese fin.

La regla inversa a la del valor cardinal es la *regla de la cuenta cardinal*, regla que especifica que un término cardinal como “7” es la etiqueta asignada al último elemento de un conjunto de siete elementos (Fuson y Hall, 1983; Fuson, Pergament, Lyons y Hall, 1985). La regla de la cuenta cardinal requiere almacenar el objetivo en la MO, un proceso de enumeración y, al mismo tiempo, ir comparando los números del proceso de enumeración con el número almacenado para detener el proceso de enumeración cuando se llegan a igualar ambos (Resnick y Ford, 2008). Además, los niños que no sean conscientes de esta regla van a tener mayores dificultades en tareas relacionadas con la suma y la resta, sobre todo cuando sea preciso utilizar material para resolver estas tareas.

Pero los alumnos también pueden presentar dificultades a la hora de escribir los números ya que, como símbolos que son, tienen una forma característica que los hacen únicos y diferentes. El *modelo del déficit perceptivo-motriz* (Baroody, 2005) parte de la premisa de que los problemas de escritura de los números se deben a deficiencias generales en el tratamiento de la información visual, el control de los movimientos de la mano o la coordinación viso-motora. Sin embargo es probable que la mayoría de las dificultades de la escritura de números sean debidas a un plan motriz deficiente en vez de a problemas perceptivo-motrices generales (Kirk, 1981; Marr y Hagston, 2007; van Loosbroek, Dirkx, Hulstijn y Janssen, 2009). Por eso para escribir los números correctamente los niños deben antes de empezar por dónde deben hacerlo y qué dirección deben seguir hasta hacerlo de forma automatizada. Es más, sin un plan motriz incluso la tarea de copiar un número es difícil, si no imposible.

1.2.2.- DIFICULTADES RELACIONADAS CON LAS HABILIDADES DE NUMERACIÓN Y CÁLCULO

Tal y como acabamos de exponer, los niños, desde muy pequeños, son capaces de decir los números de forma seriada (consecutiva). Esto es debido a que el conocimiento y la memorización de los nombres de los números no suele presentar dificultad; las complicaciones, sin embargo, aparecen a la hora de asociar los números con las cantidades o el número de objetos a los que nos estamos refiriendo. Aunque los niños sean capaces de recitar los números memorísticamente puede que tengan dificultades para relacionar esos números con los objetos que representan al no tener asimilada la correspondencia uno a uno.

Dicho de otro modo, el que el niño sepa contar no garantiza que comprenda el significado de los números ni menos aún, el uso que se pueda hacer de ellos. Esto se conseguirá cuando los números tengan significado para él, es decir, cuando los niños identifiquen los números con las cantidades que representan. Así, a muchos niños les va a resultar difícil comprender que un número es algo más que una mera palabra que sirve para designar un símbolo; un número se refiere a un conjunto, a un todo formado por unidades más pequeñas que lo conforman de manera concreta y exacta. Por ejemplo, el número 7 hace referencia a un conjunto conformado por 1+1+1+1+1+1+1 elementos, y que además, en la serie numérica, va entre los números 6 y 8, ya que tiene una unidad más que 6 y una menos que 8. Esta dificultad de abstracción aumenta a partir del número 10, al no reflejar los nombres la secuencia exacta de la composición de los números. Así, el 10, 11, 12, 13, 14 y 15 si siguiesen una nomenclatura lógica habría que denominarlos diez y uno, diez y dos, diez y tres, etc. hasta llegar al número 16 y sucesivos. Estos errores indican que los niños no se limitan a imitar a los adultos, sino que tratan de construir sus propios sistemas de reglas (Baroody y Ginsburg, 1982). Se trata de errores razonables porque son ampliaciones lógicas, aunque incorrectas, de las pautas de la serie numérica que el niño ha abstraído.

Lo mismo ocurre con los números 20, 30, 40, etc., que, además de ser números cuyo nombre no hace referencia al 2, al 3, al 4, como al resto de las decenas, implican cantidades grandes y difícilmente manipulables mediante objetos o elementos tangibles, de ahí que sea necesario asociarlos a unas reglas que requieren de la intuición y de la capacidad de abstracción más allá de la experiencia directa.

Además, otras dificultades relacionadas con la numeración y el cálculo van a depender de los diferentes sistemas de numeración empleados. En el sistema decimal hay que tener en cuenta que 10 unidades forman una unidad de orden superior, la decena; de manera que la decena debe ser utilizada como tal para operar y no como un conjunto de 10 elementos. Lo mismo ocurre al pasar de las decenas a las centenas y de éstas a la unidad de millar, y así sucesivamente. Muchos niños tardan en entender estas equivalencias, de manera que se van a ocasionar innumerables errores de cálculo, por ejemplo, y tal y como se podrá ver más adelante, al sumar o restar cantidades con llevadas.

Peor aún cuando les pedimos a nuestros niños que resuelvan problemas que requieran pasar de un sistema de numeración a otro. Por ejemplo cuando es necesario pasar del sistema decimal al sistema sexagesimal (empleado para operar con medidas horarias: segundos, minutos, horas). Si les pedimos a nuestros alumnos que nos digan cuantos minutos son 1,25 horas (una hora y cuarto) es probable que algunos respondan erróneamente 85 minutos, como resultado de sumar 60 (una hora) + 25 (minutos); cuando lo acertado sería que contestasen 75 (60 minutos+15 minutos). Los más despistados responderán que son 125 minutos, al considerar que una hora son 100 minutos a los que hay que sumar los 25 restantes.

Pero volviendo al sistema decimal, y teniendo en cuenta las particularidades de la escritura de las cantidades mediante números (se escriben de izquierda a derecha, curiosamente dirección opuesta al orden en que aparecen las unidades numéricas), es frecuente encontrar niños que tienen dificultades para comprender la noción del *valor posicional de las cifras* en función del lugar que ocupa cada una dentro de un numeral. Así, el 5 no tiene el mismo valor en el número 56 que en el 125, sino que este valor viene dado por el lugar que ocupa en cada número. Algo parecido acontece cuando el número cero aparece en escena. La mayoría de los niños no tienen dificultad para reconocer el cero como “ningún elemento” o “conjunto vacío”, pero las complicaciones aparecen cuando el cero pasa a formar parte de otro número, pues indica que no hay unidades en alguno de los órdenes pero sí en otros. Por ejemplo, a algunos niños les cuesta comprender que en 210 no hay ninguna unidad, y sin embargo son 2 centenas y 1 decena, o lo que es lo mismo 21 decenas, es decir, ni más ni menos que 210 unidades (adaptado de González-Pienda y Núñez Pérez, 2006).

Pero el cero (directamente relacionado con lo anterior) también ocasiona dificultades a la hora de escribir cantidades, sobre todo al dictado, ya que algunos niños escriben las unidades inmediatamente anteriores al cero y a continuación el resto de las cifras; por ejemplo 402 escriben 4002; en 5328 escriben 5000300208.

No hay que olvidar que los números, al igual que las letras, son símbolos. Como símbolos que son, tienen una forma y un significado concreto (James, 2006). Por ello hay niños que, sobre todo al principio del aprendizaje matemático, tienen dificultades a la hora de *escribir y representar gráficamente los números*: escritura en espejo, inversiones de números (letras), cambiar la dirección de la escritura de las cantidades (escribir de derecha a izquierda y no al revés, por ejemplo 834 escriben 438), errores la grafía de los números (el 8 lo escriben como ∞). Evidentemente, estos errores se hacen más palpables en los que presentan déficits viso-espaciales o en el desarrollo madurativo.

Las *seriaciones*, por otro lado, implican descubrir la relación o la clave entre los números que la forman. Por tanto, por muy sencillas que sean, implican siempre un proceso lógico en el que es necesario saber qué operación hemos de aplicar para que la serie continúe, pero también hemos de tener interiorizado una serie de conceptos como: antes-después, mayor-menor, primero-último, etc. Además, no es lo mismo ordenar una serie de elementos por tamaño (que no es ni más ni menos que hacer un trabajo de seriación) que hacerlo con números que, como se ha expuesto anteriormente, son símbolos que se refieren a cantidades concretas, de manera que los sujetos han de reconocer los números, saber a qué cantidad nos estamos refiriendo con cada número y cómo ordenar esos números en función de las cantidades que representan. Esto implica, en el mejor de los casos, conocer perfectamente el sistema decimal para “recorrerlo” con soltura en un sentido o en otro, sobre todo a la hora de trabajar con cantidades grandes (ya que además exige saber perfectamente cuál es valor que tiene cada número en función del lugar que ocupe dentro de la cantidad). El trabajo con series numéricas se hace más complejo, lógicamente, cuando se trabaja con series inversas o descendentes, ya que exige, además, haber interiorizado y comprendido el concepto de reversibilidad sobre el que se fundamenta el proceso lógico utilizado.

En cuanto a la *práctica de las cuatro operaciones básicas*, se pueden considerar dos cuestiones: una referente a lo que son las operaciones y qué significan, y otra lo referido a la mecánica de las mismas, es decir, a cómo deben hacerse. En ambos aspectos entran en juego una serie de factores que son los que hay que tener en cuenta, ya que constituyen el origen de muchas dificultades.

Respecto a la *comprensión del significado de las operaciones*, los niños deben poseer un dominio lo más completo posible de la composición y descomposición de los números inferiores a 10, y haber asimilado y comprendido (a través de actividades manipulativas) lo que significa cada una de las operaciones básicas a través de una gran cantidad de vocabulario sobre el que hemos de reflexionar; por ejemplo, para sumar: unir, juntar, etc.; para restar: separar, eliminar, retirar, gastar, perder, etc.; para dividir: repartir, distribuir, etc. Además muchos niños no saben ni que operación concreta han de utilizar, ya que a veces se producen interferencias entre la suma y la multiplicación, y entre la resta y la división; esto constituye una fuente de errores, ya que de manera simplista tanto la suma como la multiplicación hace que el resultado aumente, mientras que al restar o al dividir una cantidad disminuye.

En cuanto a la *mecánica de las operaciones*, el niño tiene que aprender una serie de reglas y de pasos que le resultarán tanto más difíciles cuanto menos interiorizadas tengan las nociones anteriores y que van desde saber qué implica cada símbolo (por ejemplo el símbolo + requiere juntar, unir las cantidades y no restarlas, ni multiplicarlas, ni dividirlas) hasta otros aspectos no menos importantes que se pueden resumir en:

1.- Estructuración espacial de cada operación: en cada una de las cuatro operaciones hay que disponer las cantidades de una determinada forma, siguiendo unas pautas fijas. En la suma y resta, cuando se disponen verticalmente, tienen que coincidir en las mismas columnas unidades con unidades, decenas con decenas, centenas con centenas, etc. Sin embargo la cosa se complica en las demás operaciones; en la resta, además, es necesario colocar arriba las cantidades más grandes; en la multiplicación de cantidades varias cifras hay que desplazar las cantidades una columna a la izquierda de cada fila. La división, por su parte, presenta una disposición espacial bastante complicada, ya que en ella se combinan las demás operaciones en varias direcciones, lo que supone utilizar un conjunto de datos simultáneamente para obtener el resultado previsto.

2.- Los automatismos para llegar al resultado: se refieren al aprendizaje y dominio de las tablas con la atención y memoria que esto supone, sobre todo, a la hora de memorizar la tabla de multiplicar. Los niños, además, tienen que conocer el orden que hay que seguir, por dónde empezar cada operación, donde colocar los resultados, cómo expresarlo de forma abreviada, etc. y todo ello teniendo en cuenta la disposición espacial ya indicada y con el dominio del vocabulario correspondiente (para ver ejemplos concretos de este tipo de dificultades véase González Pienda y Núñez Pérez, 2006).

Por eso Geary (1993), a partir de un análisis de la literatura cognitiva sobre este tipo de dificultades de cálculo y numeración, las resumía todas en tres tipos:

1.-Dificultades a la hora de representar y recuperar los hechos numéricos de la memoria: de manera que los niños que presentan este tipo de dificultades tienen problemas en el aprendizaje y en la automatización de los hechos numéricos (por ejemplo, 5+6 son 11, ó 4x7 son 28) con independencia del entrenamiento y de la práctica que hayan recibido.

2.-Dificultades con los procedimientos de solución de operaciones: lo que supone el uso de procedimientos aritméticos evolutivamente inmaduros, retrasos en la adquisición de conceptos básicos de procedimiento falta de precisión en la ejecución de los procedimientos del cálculo.

3.-Déficit en la representación espacial y en la interpretación de la información numérica: relacionados con las dificultades a la hora de leer los signos aritméticos, con la alineación de los números en problemas aritméticos con varios dígitos y con la comprensión del valor posicional de los números.

Más recientemente Geary (2010) afirma que a pesar de que hay evidencias de contribuciones viso-espaciales relacionadas con algunos aspectos del aprendizaje de las matemáticas, todavía no se ha logrado identificar de qué manera el déficit viso-espacial subyacente puede influir en algunas formas de las DAM. Sin embargo este autor considera que existen una serie de sistemas cerebrales que estarían estrechamente ligados al desarrollo y a la expresión de esos déficits, concretamente todo lo relacionado con la MO; hasta el punto de que las actuales líneas de investigación en este campo apoyan esta teoría.

En esta línea se expresan Rotzer, Loenneker, Kucian, Martin, Klaver y von Aster (2009) al afirmar que si bien hasta la fecha los pocos estudios que examinan la activación de la función cerebral en niños con discalculia se enfocan básicamente en tareas de numeración y conteo, los estudios basados en aspectos matemáticos más complejos relacionados con el desarrollo aritmético (como la memoria de trabajo) son prácticamente nulos (Swanson, Oroso y Lussier, 2014). Sin embargo para estos investigadores la memoria va a ser uno de los factores más directamente implicados en las DAM; hasta el punto de que han tomado como referencia algunos estudios que muestran la relación directa entre el desarrollo de la discalculia y la memoria de trabajo espacial (Camos, 2008; De Smedt y Gilmore, 2011; Geary, 1993; McLean y Hitch, 1999; Raghubar, Barnes y Hecht, 2010; Roselli, Matute, Pinto y Ardila, 2006; Sieguel y Ryan, 1989; von Aster y Shalev, 2007) para afirmar que, si bien la relación entre esos dos mecanismos aún no está totalmente clara, una baja capacidad de MO espacial podría dificultar la adquisición de la representación espacial de los números en niños con discalculia.

1.3.- COMPRENSIÓN DE ENUNCIADOS MATEMÁTICOS: ADQUISICIÓN Y DESARROLLO

Comenzaremos este apartado con una breve descripción de lo que diferentes autores consideran que implica la resolución de un problema matemático así como con las implicaciones instruccionales que dicha tarea implica.

Para Baroody (2005) la resolución de problemas en la etapa de primaria consiste, frecuentemente, en poco más que resolver problemas de enunciado verbal extraídos de libros de textos; y normalmente se emplean para ello técnicas básicas previamente aprendidas; es decir, no se pretende desarrollar la propia capacidad de resolver problemas. Esto significa que la resolución de problemas de enunciado verbal suele implicar resolver ejercicios que se realizan después de haberse introducido una operación con una triple finalidad (Le Blanc, Proudfit y Putt, 1980): a) dominar los datos numéricos básicos de la operación, b) practicar el algoritmo o los algoritmos de cálculo relacionados con ella, y c) reforzar aplicaciones específicas de las operaciones relacionadas con el mundo real.

Con el fin de practicar técnicas básicas, los ejercicios de resolución de problemas suelen consistir en una serie de problemas rutinarios de enunciado verbal; problemas que, normalmente, sólo proporcionan la información específica que hace falta para realizar la operación que se está trabajando, es decir, el procedimiento correcto para encontrar la solución es, simplemente, la operación a practicar. Es más, con frecuencia, todos los problemas presentados requieren la misma operación y suelen tener una única respuesta correcta a la que sólo se llega de acuerdo a la realización correcta de las operaciones a practicar. El objetivo no es otro que el de automatizar o peraciones, técnicas de cálculo, datos, etc. de manera que los/as alumnos/as realicen los ejercicios con rapidez (Ruby, Crosby-Cooper y Vanderwood, 2011).

Si analizamos objetivamente los enunciados matemáticos que aparecen en las diferentes lecciones de los libros de texto podemos comprobar que incluso una lectura superficial revela la incógnita (la información que se pretende obtener), los datos necesarios y el procedimiento para la solución (la operación aritmética necesaria).

Por contra, los problemas que nos encontramos en la vida real y que requieren de la aplicación de conocimientos matemáticos son sustancialmente diferentes, ya que exigen un análisis más detallado para definir la incógnita, los datos necesarios y, consecuentemente, la estrategia a seguir. La incógnita de los “problemas reales” puede no estar especificada con claridad, de manera que requiera de exhaustivo un análisis para captar con exactitud el objetivo del problema en cuestión. Eso sin contar con que los problemas con los que nos encontramos en la vida real suelen contener mucha información que es preciso analizar para decidir cuál es relevante y necesaria para resolver el problema en cuestión y cuál es innecesaria (van Merrienboer, 2013).

Varias investigaciones (Carpenter, Hiebert y Moser, 1981; Carpenter y Moser, 1982, 1983; Guarino, Dieterle, Bargagliotti y Mason, 2013) demuestran que los niños pequeños son capaces de analizar y resolver problemas aritméticos sencillos (de adición y sustracción) de enunciado verbal antes de su enseñanza formal, para lo cual suelen emplear objetos que permitan representar las cantidades descritas en dichos problemas (bloques, dedos, lápices, garbanzos, etc.). El disponer de ayudas concretas incrementa notablemente el éxito en la resolución de enunciados matemáticos de carácter verbal por parte del alumnado de menor edad, y parecen menos competentes cuando carecen de estos medios auxiliares (Antle, 2013; Carpenter y Moser, 1984; Charleswort y Leali, 2012; Swanson, Orosco y Lussier, 2014). Además, los niños pequeños pueden emplear estrategias informales que modelan el significado de problemas básicos de adición y sustracción. En realidad, si a los niños se les presenta un problema con el que no están familiarizados, tienden a construir una estrategia que modela directamente el significado del problema. Por ejemplo, para problemas de *cambio* (A ← B =__), que implican sumar algo a un conjunto existente para hacerlo más grande, y para problemas de *combinación* (A + B =), que implican la reunión de dos (sub)conjuntos para formar una totalidad, los niños de 5 a 6 años suelen emplear una estrategia concreta consistente en contar todos los elementos.

A medida que se desarrollan, los niños emplean estrategias mentales en lugar de estrategias concretas. Tal y como puede verse en la tabla 1 los problemas sencillos de adición (cambio y combinación) se resuelven mediante los métodos CTP o CPP. Los problemas de restar se resuelven contando hacia atrás, y los problemas de primer sumando ausente, segundo sumando ausente, sustracción aditiva y comparación (o diferencia) se resuelven mentalmente contando progresivamente. Así, de acuerdo con Baroody (2005, pag. 234) "tanto las estrategias concretas como las mentales pueden modelar directamente el significado de los problemas de enunciado verbal".

Tabla 1

Estrategias de contar concretas y mentales para modelar distintos tipos de problemas de adicción y sustracción de enunciado verbal

Tipo de problema	**Ejemplo**	**Estrategia para la solución**	
		Concreta	**Mental**
Cambio (A ← B =)	Juan tiene 2 canicas. Compra 4 más. ¿Cuántas tiene en total?	Contarlo todo de forma concreta	**CTP o CPP**
Combinar (A + B =__)	Juan tiene 2 canicas rojas y 4 azules. ¿Cuántas tiene en total?	Contarlo todo de forma concreta	**CTP o CPP**
Quitar (C – A =)	Juan tenía 6 canicas. Ha perdido 2 en una partida. ¿Cuántas le quedan?	Separación	**Retrocontar**
2º sumando ausente (A + = C)	Juan tiene 6 canicas en total. Dos son rojas y el resto son azules. ¿Cuántas canicas azules tiene?	Contar a partir del número dado	**Cuenta progresiva**
Sustracción aditiva (A ← = C)	Juan tiene 2 canicas. Necesita 6 para poder jugar. ¿Cuántas canicas más debe comprar?	Contar a partir del número dado	**Cuenta progresiva**
1er sumando ausente (← B = C)	Juan tenía unas canicas. Ha comprado 4 en la tienda y ahora tiene 6. ¿Cuántas tenía al principio?	Contar a partir del número dado	**Cuenta progresiva**
Comparar (A ↔ B = C)	Juan tiene 2 canicas y Julia 4. ¿Cuántas canicas más tiene Julia?	Establecer correspondencias	**Cuenta progresiva**

(Adaptada de Baroody, 2005).

En nuestra investigación nos vamos a centrar en la resolución de enunciados matemáticos pero no de carácter verbal, sino en aquellos enunciados matemáticos que los niños tienen que leer para poder resolverlos. Aún así, en general, los niños de 6-8 años suelen tener éxito en la resolución de problemas rutinarios que implican un único paso, como los que suelen aparecer en sus libros de texto (Carpenter, Matthews, Lindquist y Silver, 1984). Sin embargo otros estudios americanos demuestran que los estudiantes de todas las edades tienen mayores dificultades con problemas no tan rutinarios que requieran algo más de pensamiento y análisis para su correcta resolución; por ejemplo a la hora de resolver enunciados matemáticos que incluyen información distractora (extra) con datos que no hacen falta para resolver el problema.

De acuerdo con Mayer (2002), para resolver enunciados matemáticos los alumnos deben poseer una serie de habilidades que se pueden agrupar en torno a cinco tipos de conocimiento: el conocimiento lingüístico, el semántico, el esquemático, el estratégico y el procedimental.

1.- Conocimiento lingüístico: ya que para solucionar un problema matemático es necesario conocer la lengua en la que está escrito.

2.- Conocimiento semántico: necesario para interpretar la información que el enunciado nos proporciona, para lo cual va a ser indispensable un conocimiento general del mundo que permita comprender las ideas que aparecen en el problema matemático. Por ejemplo, un problema que pregunte cuántas docenas hay en 72 caramelos requiere que el sujeto "sepa" que una docena es una unidad de medida de cantidades que equivale a 12 cosas.

3.- Conocimiento esquemático: que implica reconocer los distintos tipos de problemas así como qué información es relevante y necesaria, y cómo se representar el problema a través de un diagrama o dibujo.

4.- Conocimiento estratégico: también denominado, heurístico, necesario para crear y monitorizar un plan de solución del problema; o lo que es lo mismo, dividir el problema en submetas cuya resolución progresiva nos lleve a encontrar la respuesta enunciado matemático.

5.- Conocimiento procedimental: necesario para aplicar las reglas aritméticas que permitan resolver las operaciones matemáticas que sean precisas para hallar la solución al problema.

Por lo tanto podemos afirmar que resolver un enunciado matemático implica mucho más que obtener una respuesta a una pregunta. Tal y como puede verse en la tabla 2 es necesario que los alumnos tengan adquiridos unos conocimientos que permitan abordar con éxito los cuatro componentes (Mayer, 2002):

Tabla 2

Los cuatro componentes de la resolución de problemas matemáticos

Componente	Tipo de conocimiento
Traducción del problema	**Conocimiento lingüístico** **Conocimiento semántico**
Integración del problema	**Conocimiento esquemático**
Planificación de la solución y supervisión	**Conocimiento estratégico**
Ejecución de la solución	**Conocimiento procedimental**

(Adaptada de Mayer, 2002).

Veamos a continuación a qué nos estamos refiriendo cuando hablamos de los componentes implicados en la resolución de enunciados matemáticos.

La *traducción del problema* es el primer paso a la hora de resolver un enunciado matemático, para lo cual es preciso transformar cada afirmación del enunciado en una representación interna que tenga sentido para el sujeto que aborda la resolución de dicho enunciado. Esto no se puede llevar a cabo, lógicamente, sin el sujeto carece del necesario conocimiento sobre la lengua (conocimiento lingüístico) y sobre el mundo (conocimiento semántico), hasta el punto de que algunas investigaciones (Mayer, 1987) sugieren que algunos alumnos pueden carecer de un conocimiento lingüístico apropiado para representar componentes relacionales en la memoria. En esta línea se expresan Hegarty, Mayer y Monk (1995) al afirmar que los sujetos que resuelven enunciados matemáticos hábilmente son mucho más capaces que aquéllos que no tienen éxito usando su conocimiento lingüístico para determinar el significado de los componentes relacionales.

Ahora bien numerosos estudios sugieren que este proceso de transformación se hace más difícil en función de cómo esté planteado el problema; de manera que cuando un enunciado matemático tiene planteamientos que expresan una relación cuantitativa entre variables (es decir, que tiene frases relacionales) su dificultad de resolución aumenta (Loftus y Suppes, 1972; Mayer, 1981; Soloway, Lockhead y Clement, 1982; Oroso, 2014).

En cuanto al conocimiento semántico como componente clave en la transformación del problema es necesario, sobre todo, para comprender los conceptos que el enunciado matemático contenga (por ejemplo saber que un kilo equivale a 1000 gramos, que una docena hace referencia a 12 elementos, etc.), de manera que los problemas que implican conversiones de escalas son mucho más difíciles que los que no lo requieren (Loftus y Suppes, 1972). Por ejemplo convertir 30 centímetros en 0,3 metros requiere saber que 100 centímetros equivalen a 1 metro.

Así pues, los sujetos que resuelven bien los problemas matemáticos lo hacen porque son capaces de comprender correctamente las afirmaciones que plantean los enunciados matemáticos. En otras palabras, los sujetos que no tienen éxito a la hora de resolver correctamente los problemas matemáticos puede que no comprendan correctamente sus planteamientos, es decir, carecen de las necesarias habilidades de transformación.

Los distintos instrumentos estandarizados de evaluación de la capacidad de resolución de enunciados matemáticos muestran como diversas variables y factores intervienen, a diferentes niveles (neuropsicológico, cognitivo, atencional, etc.) en su ejecución.

Así, mientras históricamente las diferencias individuales fueron valoradas en términos de rasgos, posteriormente se catalogaron en términos de capacidades o aptitudes, frente a la categorización actual que habla de habilidades. Se defiende la idea de que existe una relación entre la ejecución realizada en los diferentes tests psicométricos y esa misma ejecución en tareas concretas de aprendizaje; ya que la ejecución en ambas situaciones exige el uso de diversos procesos cognitivos. De ahí que con la evaluación de las habilidades se pretenda comprobar, no sólo el nivel de ejecución que presenta el sujeto a la hora de resolver los diferentes items que se proponen en los tests, sino también situar al sujeto en una escala en función de las puntuaciones que obtenga, sino que los resultados de esa evaluación han de ser analizados pormenorizadamente para conocer los puntos fuertes y los puntos débiles que el alumno presenta con carácter general. Estos resultados se podrán constatar después en la práctica misma de aprendizaje diario con la finalidad de orientar la posible modificación de los puntos débiles.

Para obtener información acerca de las habilidades y, por consiguiente, de las dificultades que presentan algunos sujetos con relación a los aprendizajes matemáticos existen numerosas pruebas y tests estandarizados, que se pueden clasificar en función de los aspectos concretos que evalúan (para una revisión más detallada véase González-Pienda y Núñez Pérez, 2006):

a) Nivel neuropsicológico: batería de Rourke (1981), Monedero (1984), Benedet (1986), y TOVA (1996).

b) Capacidades y habilidades cognitivas: Weschler (1997), WISC-IV (2005), pruebas como Evalúa 1, 2, 3 (2009)

c) Nivel perceptivo y de organización espacio-temporal

d) Nivel psicopedagógico: TALE, EDIL-1, etc.

e) Prueba de habilidades sociales, personalidad y autoconcepto: TAMAI, ESPQ, CPQ, SDQ 1 y 2, etc.

Ahora bien, a pesar de que las baterías de estos tests de aptitudes suelen incluir una sección matemática “cuantitativa” y a pesar de que las puntuaciones obtenidas en los mismos suelen predecir bastante bien los futuros rendimientos de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas (y en otras ciencias que exigen una buena capacidad matemática) lo cierto es que no se sabe con certeza la relación entre estas puntuaciones y el rendimiento del alumnado (Resnick y Ford, 2008); ya que si bien es cierto que los tests se apoyan mucho en el conocimiento matemático adquirido, también exigen otras habilidades (de razonamiento, deductivas, memorísticas, etc.) que no se enseñan directamente en los currículos de matemáticas, y que, independientemente de su entrenamiento, van a ser propios de cada individuo.

En este sentido se expresan Sánchez Huete y Fernández Bravo (2003) al afirmar que en la resolución de enunciados matemáticos intervienen una serie de variables que pueden clasificarse en dos grandes grupos: las variables intrapersonales y las variables de situación. Las primeras se relacionan con el sujeto que resuelve el problema o que hacen referencia a la interacción problema-sujeto. Se consideran variables intrapersonales, por tanto, las cognitivas (entre las que se pueden destacar el grado de memoria, el desarrollo del razonamiento lógico, la comprensión lectora, el grado de creatividad o la intuición del resolutor); los fundamentos matemáticos previos de la persona que resuelve el problema, la comprensión de las operaciones y su aplicación, su didáctica;

los aspectos emocionales y afectivos; y las variables de formación de aprendizaje (formas de aprender, variabilidad de estímulos, creencias sociales, dificultades y errores, etc.)

Por contra, las variables de situación hacen referencia a aquellas que se relacionan con situaciones que el sujeto implicado en la resolución de la tarea no puede controlar: metodología didáctica, características socio-económicas y culturales, disposición del profesor, etc.

A continuación se hará un análisis más detallado de algunas de las variables intrapersonales más interesantes por ser las más directamente relacionadas con el presente estudio.

Igual que hemos expuesto en el apartado del cálculo, analizaremos a continuación las dificultades que encuentran los alumnos en la comprensión de los enunciados matemáticos.

Baroody (2005) afirma que en las escuelas se tiene relativo éxito en enseñar técnicas pero no tanto en fomentar competencias que requieran la comprensión de los enunciados matemáticos, fruto de ello es que muchos escolares tienen serias dificultades para resolver con éxito los enunciados matemáticos a los que se enfrentan. Pero los niños tienen estas dificultades por múltiples razones, cuestión que trataremos de analizar en este apartado.

La resolución de problemas matemáticos implica la interpretación de la información que los componen, bien sean a nivel verbal o escrito. Se presenta, consecuentemente, una comunicación que debe ser entendida por el que recibe el mensaje; sin embargo en muchas ocasiones esto no sucede así y la comunicación puede llegar a ser ininteligible, bien porque el lenguaje utilizado en la situación problema no es familiar al sujeto que pretende resolver el problema, o bien porque dicho sujeto no domina suficientemente el lenguaje, el vocabulario o las estructuras gramaticales utilizadas (Sánchez Huete y Fernández Bravo, 2003). Por ello es necesario una serie de habilidades lingüísticas que implican, a su vez, la comprensión y la asimilación de un conjunto de conceptos y procesos relacionados con la simbolización, representación, aplicación de reglas generales, traducción de unos lenguajes a otros, etc., que ya no es posible reducirlos a la aplicación sin más de las operaciones básicas. De hecho, una de las características básicas de las matemáticas consiste en utilizar un lenguaje formal distinto al lenguaje natural que se usa habitualmente.

Una vez que el niño ha comprendido el significado de cada operación y, por tanto, conoce cómo se realiza y para qué sirve, en principio, la resolución de problemas no tendría por qué producir mayores dificultades; sin embargo esto no siempre es así. La realidad muestra que no es tan sencillo y aparecen numerosas dificultades de muy diversa índole. Los autores que se ocupan de la capacidad de resolución de problemas (Halladay, 2012; Hegarty, Mayer y Monk, 1995; Montague y Applegate, 1993; Moran y Neumann, 2011; Perícola, Harris y Graham, 1992; Van Lieshout, Jaspers y Landewé, 1994) observan que el bajo rendimiento de los alumnos con DAM está más relacionado con su incapacidad para comprender, representar los problemas y seleccionar las operaciones adecuadas, que con los errores de ejecución.

La resolución de problemas implica la comprensión y el dominio de un conjunto de conceptos y procedimientos que ya no es posible reducir a la mera ejecución de operaciones matemáticas. En primer lugar, el dominio de códigos simbólicos especializados (por ejemplo, operadores, términos numéricos, reglas sintácticas de la aritmética o del código algebraico) y, en segundo lugar, la capacidad para traducir la información desde otros códigos (imágenes, lenguaje, etc.) a los códigos matemáticos y viceversa. Pero el dominio de los símbolos aritméticos, por ejemplo, es mucho más complejo de lo que aparece a primera vista. Los estudios sobre la simbolización de la cantidad, sobre el conteo, suma y resta (Bermejo y Rodríguez, 1993; Bermejo y cols., 1994), multiplicación y las fracciones ponen de manifiesto que "lejos de producirse un proceso simple de transposición o el empleo de los símbolos aritméticos convencionales, las construcciones aritméticas que se realizan en un determinado plano (el de acción) han de reconstruirse en nuevos planos (por ejemplo, el de la codificación convencional en la aritmética)" (Rivière, 1990, pag. 177). Lo que demuestran estas investigaciones es que uno de los problemas fundamentales consiste en que el alumnado debe aprender a sustituir los procedimientos intuitivos y los códigos propios del lenguaje natural u ordinario por los procedimientos formales y códigos propios del lenguaje matemático. Ello constituye un proceso complicado de enseñanza que en muchos casos la escuela no promueve.

Las dificultades de traducción se producen no sólo entre la acción y la simbolización, sino también entre ésta y el lenguaje verbal. Desde un enfoque cognitivo, es útil distinguir entre los procesos utilizados para construir la representación de un problema y los procesos que interviene en su resolución. La investigación cognitiva pone el énfasis en los procesos de comprensión, sin quitar, por ello, importancia al papel crucial otras habilidades cognitivas implicadas en la resolución de problemas matemáticos (como por ejemplo los procedimientos de cálculo). El resaltar los problemas de comprensión se deriva de la evidencia de que la mayor parte de los alumnos con bajo rendimiento tienen más dificultad a la hora de construir una representación útil del problema que en realizar las operaciones necesarias para resolverlo. Así pues, parece que los alumnos que no tienen éxito a la hora de intentar resolver los problemas basan su plan de solución en números y palabras clave que seleccionan a partir del problema. Es lo que se denomina “estrategia de traducción directa o literal”, “calcula primero y piensa después” (Stingler, Lee y Stevenson, 1995), “método de la palabra clave” o “agarrarse a los números” (Littlefield y Riesser, 1993). Lo que ocurre es que el sujeto trata de traducir directamente las proposiciones clave del enunciado del problema a una serie de operaciones que llevarán a la respuesta y, realmente, no construye una representación cualitativa de la situación descrita en el problema.

Además, hay que tener en cuenta que la traducción entre el lenguaje natural y el matemático tampoco es directa, ya que exige una comprensión de las relaciones establecidas en los problemas formulados con palabras. Mientras que el lenguaje natural es redundante y sus significados tienen un margen inevitable de ambigüedad sin la cual perderían gran parte de su poder creativo y comunicativo (ya puede transmitir información a pesar de los abusos o deficiencias sintácticas como el uso incorrecto de las reglas gramaticales o los errores ortográficos) el lenguaje matemático transmite información precisa y concreta, ya que cada signo o conjunto de signos tiene un significado preciso y riguroso, alejado de toda ambigüedad, al mismo tiempo que suprimen intenciones, afectos, emociones, valores y afectos. Se trata de un lenguaje formal cuya utilidad no es sólo facilitar la comunicación, sino la inferencia. Las reglas formales con las que opera el lenguaje matemático pueden ir más allá del dominio original de su aplicación y esto es lo que hace que la experiencia matemática sea una actividad dinámica, cambiante y creativa.

A esto hay que añadir que como el leguaje matemático forma parte del lenguaje natural, va a originar confusiones semánticas al utilizar palabras “comunes” a ambos lenguajes: más, menos, diferencia, primo, potencia, índice, raíz, etc. (Clark y Clarck, 1977; Coghill, 1978; Edwards, Maloy y Anderson, 2009; Halliday, 1975; Korhonen, Linnanmaki y Aunio, 2012; Pimm, 1990; Stubbs, 1983; Toll y Johannes, 2014). Además, no hay que olvidar que mientras que el conocimiento infantil es de tipo narrativo, orientado a la comprensión de fenómenos concretos, el conocimiento matemático se basa justamente en lo contrario: representaciones abstractas y generales, lo que constituye un verdadero obstáculo cognitivo para entender los conceptos matemáticos.

El texto de un problema matemático se procesa en pasos ascendentes, identificando lo que los expertos denominan las *designaciones*, que expresan el valor de una determinada variable; las *relaciones*, que expresan la relación cuantitativa entre dos variables; y las *preguntas*, que expresan que el valor de una determinada variable es desconocido. De acuerdo con González-Pienda y Núñez Pérez (2006) estos pasos sobrepasan los límites de la simple comprensión del lenguaje empleado, ya que es necesaria una interpretación matemática.

En suma que es necesario conocer el lenguaje utilizado en el problema para traducir la información al lenguaje matemático (proceso de comprensión) para saber qué datos nos proporciona el problema así como el orden en que aparecen y para qué los vamos a utilizar (análisis del problema, que requiere una representación matemática específica); a partir de aquí, estableceremos el proceso a seguir en la resolución del problema matemático para lo cual serán necesarias una serie de operaciones (razonamiento, para lo cual es necesario, tal y como se verá más adelante, la construcción de un plan de solución).

Así, en cada uno de estos pasos puede estar el origen de algunas dificultades específicas al estar implicados en ellos diversos factores relacionados con los siguientes parámetros:

1.- *Procesos de comprensión:* A la hora de resolver un problema matemático hay que pensar que los sujetos reciben una cierta información que se supone que tienen que dominar, por ello es fundamental que el alumno domine el vocabulario de manera que tanto la información como las preguntas que plantea el problema sea comprensible. Resolver un problema exige comprensión lectora (es necesario que el alumno piense y analice toda la información, y no sólo que se fije en palabras como “menos” para restar o “más” para sumar) y conocimiento del lenguaje utilizado así como del contexto al que se refiere el enunciado. Esta comprensión lleva consigo la valoración que hace el alumno respecto de su posibilidad de resolver o no la actividad matemática. Tal y como se ha afirmado anteriormente, el texto de un problema matemático se procesa en pasos ascendentes. Primero se lee un enunciado, una frase o una proposición que expresa una información sobre una de las variables o valores del problema. Para construir una base textual, el sujeto debe representar el contenido de esta proposición e integrarlo con la otra información que forma parte de la representación del problema. Conforme los sujetos leen las sucesivas afirmaciones del problema deben de ir integrando la nueva información con su texto base. Esta integración implica hacer conexiones entre las diferentes afirmaciones del problema y así construir una representación de significados integrados. Pero para llegar al dominio de esa representación es importante que los primeros pasos estén lo más cerca posible de la realidad observable.

A la comprensión de los problemas matemáticos se llega de forma gradual. El empleo de técnicas o estrategias que contribuyen al análisis de un problema se denominan heurísticas (Polya, 1973). Por ejemplo, una técnica heurística para analizar mejor un problema es hacer un dibujo (o esquema) que represente el problema (por ejemplo, véanse Davis y McKillip, 1980; LeBlanc y cols., 1980), ya que un dibujo puede ayudar a un niño a definir el problema y a decidir un procedimiento para hallar la solución.

Por ello, al principio es necesario el empleo de objetos, que se van a ir sustituyendo por su dibujo y después por su nombre, por su símbolo y, finalmente, por los números. Un problema que se resuelve fácilmente con números bajos puede convertirse en insuperable si las cantidades a numerar son altas. Al principio conviene insistir en el significado de los términos y conceptos implicados. Muchas de las dificultades de los alumnos radican más en la construcción adecuada de la presentación inicial del problema que en la ejecución misma de la operación seleccionada. Así, la forma en que se presente el enunciado del problema (al menos en los primeros niveles) va a influir a la hora de facilitar o dificultar la solución. De acuerdo con González- Pienda (1983), en la comprensión de los enunciados matemáticos, al principio, influyen, sobre todo, el tipo de expresión, la forma y la estructura del enunciado. Resumiendo, los enunciados de los problemas, desde el punto de vista matemático se pueden formular de múltiples maneras, facilitando, o no, su resolución. Sirva a modo de ejemplo estas tres formas tomado de González- Pienda (2006):

.-Forma concreta: es la forma en la que más se facilita la comprensión. Juan tiene 50 euros más que Rubén y juntos tienen un total de 420 euros.

¿Qué cantidad tiene cada uno de ellos?

.-Forma semiabstracta: calcular dos números sabiendo que sumados dan 310y que si se resta el menor al mayor se obtiene 220.

.-Forma abstracta: calcular dos números sabiendo su suma y su diferencia.

2.- *Análisis del problema: representación matemática específica*. Ya hemos dicho que el procesamiento lingüístico no es suficiente para dar solución al problema; es necesaria un estrategia para identificar lo que se sabe y lo que ha que descubrir. Para ello hay que realizar una representación matemática específica o lo que algunos autores denominan el "espacio del problema", o lo que es lo mismo, hacer una representación de la situación inicial del problema, de la meta y de todas las etapas intermedias (con las respectivas operaciones que hay que realizar). La dificultad está en que esta representación interna no es una mera copia de la situación externa, ya que exige procesos activos de pensamiento: ser consciente de la información que proporciona el problema, añadir información, interpretar la información, desechar información irrelevante, etc. Aquí, en la construcción de esta representación, es donde radican las dificultades para muchos alumnos; a pesar de que no tienen dificultades para extraer el significado de cada frase, sin embargo, no comprenden el sentido global del problema, es decir, son incapaces de realizar una *ordenación lógica de las partes del mismo*. En otras palabras, y de acuerdo con Polya (1973), los sujetos que se enfrentan a la resolución de problemas no rutinarios tendrían dificultades para definir el problema, para planificar una estrategia para la solución, para poner en práctica la estrategia planificada y para comprobar los resultados obtenidos.

Así pues, el texto proporciona una serie de datos que hay que analizar desde el punto de vista estrictamente matemático mediante los cuales, realizando unas determinadas operaciones, se obtiene el resto de la información necesaria para resolver el problema. Por ello, tal y como se ha dicho anteriormente, lo primero será saber cuáles son los datos con los que se cuenta, qué significan y para qué nos van a servir.

Comprender un problema implica tener una representación mental adecuada, lo que a su vez implica poseer una cantidad suficiente de datos y conceptos (Riley, Greeno y Heller, 1983; Sánchez Huete y Fernández Bravo, 2003). Esto conlleva a numerosas dificultades para algunos alumnos que se enfrentan a los datos sin identificar su significado por no saber procesar la información a través del enunciado, o bien que no son capaces de establecer las relaciones oportunas entre los diferentes datos que nos proporciona el problema (véase un ejemplo concreto en Baroody, 2005). Sin embargo, hay algunos alumnos que usan la "traducción directa", centrándose en la información textual del problema, sobre todo en los números y en palabras clave (más, menos, quedan, etc.). Así, "la aplicación rutinaria de reglas basadas en palabras clave puede llevar a resultados extraños" (Baroody, 2005, pag. 242). Por ejemplo ante un problema de comparación del tipo: "Antonio tiene 5 canicas y Vera tiene 2. ¿Cuántas canicas más tiene Antonio que Vera?" un niño que aplique mecánicamente la regla de que "y" significa sumar responderá 7 (adaptado de Kilpatrick, 1985). Esta es la razón de que, en algunos casos, los alumnos no sean capaces de encontrar la solución correcta, si bien es cierto que los estos "trucos superficiales" mediante el empleo de palabras clave pueden funcionar con una gama limitada de problemas, pero en el fondo, pueden llegar a interferir con intentos más serios de resolver problemas mediante el análisis profundo (semántico) de los problemas (Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist y Reys, 1980; Compton, Fuchs, Fuchs, Lambert y Hamlett, Carol, 2012; Fernández Bravo, 2005; Pandey, 2012)

Por todo ello, es necesario definir correctamente qué datos tenemos, qué información tenemos que hallar y cuál es la pregunta que hay que contestar para resolver el problema. Posteriormente hay que comprobar que la secuencia establecida sigue un orden lógico, ya que en algunos problemas la exposición narrativa ofrece unos hechos sucedidos en tiempos diferentes, a veces desordenados, que hay que ordenar de forma secuencial. Para ello los sujetos han de saber, tal y como se ha dicho anteriormente, qué información explícita proporciona el problema para poder relacionarla con el conocimiento del mundo necesario para organizar los datos y resolver el problema (por ejemplo el conocimiento de las relaciones temporales pertinentes). Es obvio que los alumnos que no comprendan o que no interpreten correctamente las, por ejemplo, relaciones temporales tendrán mayores dificultades para resolver correctamente los problemas con este tipo de informaciones. En este sentido, tal y como afirman Morris y Walter (1991), estas dificultades son más frecuentes en aquellos alumnos que presentan déficits visoespaciales y los que tienen una desorganización o falta de estructuración mental.

3.- Razonamiento matemático: construcción de un plan de solución. Cuando se ha comprendido el problema y hecha la representación de la información, “sólo” queda la planificación de los cálculos aritméticos necesarios para su correcta resolución, es decir, qué operación u operaciones hay que hacer para resolverlo. Para ello es necesario razonar acerca de la información del problema y del proceso lógico que hay que seguir para resolverlo. De acuerdo con Resnick y Ford (2008) las teorías del procesamiento de la información conciben que la mente humana posee, además de estructuras de conocimiento, un repertorio de estrategias de resolución de problemas que ayudan a interpretar los problemas, a localizar el conocimiento y los procedimientos almacenados y a generar relaciones nuevas entre los items almacenados en la memoria por separado. Estas estrategias organizan el proceso de pensamiento, y recurren a diversos componentes del conocimiento para preparar un plan de acción que permita resolver la tarea planteada.

A algunos alumnos les es muy difícil saber qué hacer con todos los datos e informaciones del problema. De acuerdo con González-Pienda y Núñez Pérez (2006) nos vamos a encontrar con sujetos que lo que hacen es operar con algunos datos sin saber muy bien por qué lo hacen y con qué finalidad. Otros, aún sabiendo lo que les pide el problema, no saben qué tipo de operación deben realizar. En este caso los errores más frecuentes consisten en sumar o multiplicar las cantidades que aparecen, y más aún, cualquier número que aparezca en el enunciado (aunque se trate de información irrelevante); de manera que las operaciones inversas (división y resta) casi nunca se aplican. También son frecuentes los casos de niños que tratan de encontrar una regla general que les sirva para resolver problemas semejantes; lo que tratan es de aprender esquemas de resolución de problemas que les sirvan para "todos los posibles", de manera que cuando varía el contexto en que son presentados ya no saben cómo resolverlos.

Así pues, la comprensión de la semántica que subyace al problema es mucho más importante que la rutina de las operaciones que conlleva. Es frecuente que los problemas se reduzcan a ejercicios destinados a evaluar si los alumnos han aprendido un determinado concepto, algoritmo o procedimiento y si son capaces de aplicarlo y generalizarlo, de manera que pasan a ser un simple instrumento formal para entrenarse en la aplicación de ciertos procedimientos al margen de cualquier significado. Los alumnos son conscientes de que los problemas tienen una única solución que es necesario hallar, sin embargo no suelen ver la relación de los problemas matemáticos con la solución de problemas que se pueden presentar cotidianamente en la vida real.

De lo que se trata es de que las matemáticas, y más concretamente lo relativo a la resolución de enunciados matemáticos, sean significativas para los alumnos, que exijan el descubrimiento de soluciones de manera que tengan que elaborar y utilizar sus propios conocimientos para relacionarlos con los procedimientos matemáticos. De esta manera ayudaremos a nuestros alumnos a descubrir el carácter instrumental de las matemáticas y experimentar que la actividad matemática debe ser un medio para resolver problemas y no un fin en sí mismo, a relacionar los aspectos conceptuales y los procedimentales, a favorecer la discusión, la exploración y la contextualización de las operaciones, dando a los sujetos un protagonismo y un margen de iniciativa que no tienen cuando se limitan a aplicar la solución a problemas sin sentido y descontextualizados.

En este proceso desempeña un papel importante la memoria, es decir, el proceso de grabación, conservación y reproducción por el individuo de las experiencias que anteceden al presente. Este proceso es consecuencia del acontecer de sucesos, hechos o fenómenos en la interacción del sujeto con el mundo que lo rodea. La memoria es una capacidad relacionada con el pensamiento y las formas de actividad derivadas de él de la misma manera que los resultados se relacionan con los medios.

Velasco (1996) afirma que la memoria a corto plazo es la responsable de mantener y procesar la información requerida en los problemas de razonamiento. Cuantos más complejos sean los problemas, más saturaremos la memoria de trabajo y más dificultad tendremos para resolverlos. Hitch y Baddeley (1976) señalaron que un aumento de la carga de la memoria de trabajo perjudica los problemas de razonamiento verbal, dependiendo de la complejidad lingüística.

La memoria de trabajo desempeña un papel fundamental en las tareas que requieran la consideración de diversas unidades de información o atributos, como por ejemplo en tareas de cálculo mental, resolución de problemas, el seguimiento de una explicación o debate, etc.; en definitiva, en la mayor parte de las tareas de aprendizaje. Ahora bien, para llevar a cabo estas labores es preciso recurrir a información almacenada en la MOLP (Rogers, 2004; Swanson y cols., 2014; Zheng, Swanson y Marcoulides, 2011).

De lo expuesto anteriormente se deriva que el aprendizaje de la resolución de problemas depende de la capacidad de memoria que un individuo tenga, de manera que pueda retener una serie de acciones “recetarios”. Sin embargo esta afirmación es tan imprecisa como real (Fernández Bravo, 2003), ya que la memoria que hace avanzar la construcción del conocimiento de las situaciones problemas no es la memoria "mecánica" sino la memoria lógica, que implica preliminarmente el trabajo del pensamiento, recordando el sentido de la actividad que se aprende y no la actividad concreta; desglosándola, dividiéndola en subtareas, analizándola críticamente, distinguiendo las partes y los datos más importantes, etc., de ahí que el patrón de memoria necesario para afrontar con éxito la resolución de un problema matemático dependa tanto de la información que haya en el propio problema como de la perspectiva del lector (Mayer, 2003). Por eso la memoria incide en la resolución de problemas como fuente de conocimiento más que como hábito. La memoria "mecánica" sin embargo, haría que los alumnos tuviesen éxito dependiendo de lo que es capaz de recordar en tanto a la reproducción de lo aprendido previamente. Por eso la reproducción no puede ser finalidad en el aprendizaje de la resolución de problemas, sino una fase intermedia capaz de provocar un cambio cualitativo, una transformación, una exposición creativa.

Además en la resolución de enunciados matemáticos son necesarias una serie de estructuras lógicas correctas de pensamiento, estructuras que permitan generar ideas en la estrategia de resolución de un determinado problema. Esas ideas serán los razonamientos que indicamos como necesariamente lógicos, ya que son inferidos de las premisas expresadas en los enunciados; hasta el punto de que un pensamiento que no haya pasado por la fase lógica no podrá llegar a una fase matemática (Sánchez Huete y Fernández Bravo, 2003).

En esta línea ya se expresaba Vigotsky (1973) al afirmar que los alumnos con escasa capacidad matemática se caracterizan por un insuficiente desarrollo del componente lógico-verbal de la actividad intelectual; de manera que si bien un elevado nivel de desarrollo de dicho componente no garantiza la habilidad matemática si es cierto que un bajo desarrollo del componente lógico- verbal del pensamiento determina dificultades para la comprensión de las matemáticas.

Además hay que tener en cuenta que los enunciados matemáticos se componen de conceptos, datos y juicios que afirman o niegan algo, de manera que a partir de ellos el sujeto tendrá que obtener las conclusiones que están implícitas en el problema; o lo que es lo mismo, el alumno ha de inferir información del enunciado matemático mediante su propio razonamiento (bien sea deductivo, inductivo o analógico). Sin embargo muchos sujetos se dejan llevar por aspectos superficiales y no lógicos en la selección de la información de un problema.

En este sentido se expresan Velasco y García Madruga (1997) cuando afirman que uno de las causas que mayores problemas ocasiona en el razonamiento humano a la hora de procesar la información de los problemas está en la selección de la información necesaria para la correcta interpretación (y consecuentemente resolución) de los enunciados. Mientras que para algunos sujetos les resulta fácil extraer los aspectos lógicos relevantes de la tarea de manera que llegarán a la resolución correcta de la misma, otros, por el contrario, cometerán errores como consecuencia de considerar aspectos irrelevantes del problema (informaciones, datos, etc.), lo que les llevará a cometer errores. Así, muchos sujetos se dejarán llevar por aspectos superficiales y no lógicos de la tarea.

Por su parte la creatividad es una faceta de la inteligencia que debe formar parte de las estrategias de resolución de problemas y a la que la escuela no suele darle excesiva importancia. Esto es debido, en gran parte, a que los problemas que se presentan en el aula son problemas cerrados, de los que se esperan una operación o conjunto de operaciones para ser resueltos, de manera que no permiten a los alumnos aplicar y desarrollar potencialidad alguna de tipo creativo lo que acarreará el empobrecimiento de las relaciones y la extensión de los conceptos.

Unida a la creatividad hemos de considerar la intuición, ya que es difícil explicar la creación del tipo que sea en ausencia de intuición. Desde el punto de vista matemático las intuiciones operatorias (o empíricas) son las únicas que nos pueden interesar. Estas intuiciones empíricas hacen referencia a las propiedades físicas de los objetos o a las propiedades psicológicas vinculadas a acciones u operaciones, ya se refieran éstas a objetos o se desliguen de ellos más o menos (Piaget, 1968; citado en Sánchez Huete y Fernández Bravo, 2003); y evolucionan en función de los progresos que proporciona la experimentación. Por eso a medida que los sujetos avanzan en el proceso de desarrollo (y de aprendizaje), el papel cognoscitivo de la intuición disminuye en términos relativos; ya que las intuiciones empíricas ceden el paso o se someten a las técnicas de experimentación estrictas, y las intuiciones simbólicas (a partir de imágenes) se subordinan cada vez más a las intuiciones operatorias, intuiciones, estas últimas que competen a los mecanismos mismos de la inteligencia y que pasan por tres grandes estadios de desarrollo: intuiciones vinculadas a la acción material sobre los objetos, luego a la acción interiorizada en operaciones (pero todavía aplicable a los objetos), y por fin a operaciones independientes de toda posible acción (Moore y Carlson, 2012; Staal y Wells, 2011).

Finalmente, no debemos olvidarnos de las variables afectivas. Éstas hacen referencia a una serie de variables que podrían atribuirse a las dimensiones afectivas que conlleva el afrontar la resolución de un enunciado matemático: interés, confianza, perseverancia, complacencia, ansiedad, motivación, etc. siendo ésta última, tal vez, la variable que más puede influir a la hora de resolver con éxito un problema matemático hasta el punto de que un alumno motivado aprende mejor otro sin motivación; de manera que a igualdad las diferencia de motivación pueden dar cuenta de gran parte de las diferencias observadas en la realización de problemas (Sternberg,1983; Grigorenco, Jarvin, Diffley, Goodyear, Shanahan y Sternber, 2009; Maure y Marimón, 2014).

En esta línea se expresan Núñez Pérez, González-Pienda y Carbonero Martín (2006) cuando afirman que los factores motivacionales y afectivos también contribuyen a la aparición de dificultades de aprendizaje. Un niño que ha fracasado en el aprendizaje, por una u otra razón, tiende a tener bajas expectativas de logro, escasa persistencia ante las tareas escolares y desarrollan una baja autoestima. Tales actitudes reducen la motivación y generan sentimientos negativos respecto del trabajo académico hasta el punto de que algunos alumnos puedan tener serios problemas comportamentales y mostrar un patrón de conducta caracterizado por pasividad y falta de interés, llegando, incluso, a crear sentimientos de incompetencia y de dependencia de los demás (Pearl, Donahue y Bryan, 1986) a la hora de abordar la resolución de los enunciados matemáticos.

Ahora bien, hay que tener en cuenta que a mayor dificultad de las tareas también se precisará una mayor motivación para afrontarlas. Sin embargo la ley de Yerkes-Dodson (Skemp, 1999) establece justamente lo contrario: el grado óptimo de motivación para una tarea dada decrece con la complejidad de ésta; o lo que es lo mismo, para una tarea simple, cuanto más fuerte sea la motivación mejor será la realización. Pero para las tareas más complejas (como en el caso de resolución de ciertos enunciados matemáticos) esto solo se cumple hasta cierto punto, de manera que más allá de un cierto grado de motivación, un incremento posterior no produce mejora alguna de realización sino justamente lo contrario, es decir, un deterioro. Hasta el punto de que cuanto más compleja sea la tarea puede que el grado más bajo de motivación llegue a dar el mejor resultado.

Algo similar pasa con la ansiedad, relacionada en cierta medida con el componente motivacional del aprendizaje. Un cierto grado de ansiedad puede ser un estímulo útil para el aprendizaje o la realización de ciertas tareas, por lo que el aprender a usarla para orientarla al aprendizaje sería fundamental (lo que se conoce como “adaptación a la ansiedad”). Ahora bien, tal y como se ha dicho anteriormente, a medida que aumenta la ansiedad también aumentan las dificultades en la realización las tareas llegando, incluso, al bloqueo de todo aprendizaje.

Sin embargo hay que tener en cuenta que los trabajos centrados en los componentes afectivos relacionados con la resolución de enunciados matemáticos no son muy frecuentes, pero desde la psicología cognitiva se comprobado que los procesos cognitivos implicados en la resolución de problemas son particularmente susceptibles al influjo de los factores afectivos (Caballero, Blanco y Guerrero, 2011; Mc Leod, 1989, 1990; De Corte, 1993). En esta línea se expresa Skemp (1999, 2006) cuando afirma que evaluar la motivación en humanos no es tarea fácil, ni algo que pueda medirse con precisión; ya que la motivación (al igual que otros componentes afectivos) es un factor interno propio de cada persona y no es directamente observable, de manera que para evaluar la motivación de forma experimental será necesario establecer condiciones que se supongan tengan ciertos efectos motivacionales sobre los sujetos.

1.4.- CONCEPTO DE COMPETENCIA MATEMÁTICA

En este último epígrafe haremos referencia al concepto de competencia matemática, del mismo modo que lo haremos en el siguiente capítulo al de competencia lectora, por este motivo consideramos necesario comenzar la explicación realizando una aproximación al concepto de competencia.

El concepto de competencia nació en el contexto laboral y posteriormente se generalizó a otros campos como el educativo. En este sentido, habrá que diferenciar las competencias profesionales que sirven para determinar los objetivos que han de guiar la formación universitaria de las básicas o claves que abarcan aquello que cabe esperar de la escolarización obligatoria.

Por otra parte también resulta necesario diferenciar el concepto de capacidad del de competencia. El proceso de cambio del primer término por el segundo no supone un cambio radical, sino una evolución caracterizada por la búsqueda de la funcionalidad y la relevancia de los aprendizajes escolares.

Los términos de capacidad (potencialidad) y competencia (dominio) se utilizan en a veces como sinónimos insertos en los procesos educativos- Las competencias incluyen un saber aplicado a la diversidad de contextos en los que el sujeto se desenvuelve, no considerándose como la simple acumulación de conocimientos. De esta forma, se podría afirmar que tienen un carácter integrador de conocimientos, procedimientos y actitudes y, además, se construyen con la interrelación de saberes de diferentes ámbitos educativos. Goñi (2008) define competencia como la capacidad de un individuo para hacer uso de los recursos de los que dispone de forma integral, eficiente y responsable con la finalidad de hacer frente a distintas situaciones relevantes en cada ámbito de la vida cotidiana. Se trata de poner en práctica, en diferentes contextos y situaciones, los conocimientos (saber teórico), las habilidades (conocimientos prácticos) y las actitudes personales adquiridas (personalidad individual).

La OCDE (2005) establece la capacidad del alumno para aplicar conocimientos y habilidades y para analizar, razonar y comunicarse con eficacia ante problemas relacionados en distintas situaciones.

El aprendizaje basado en competencias consiste en lograr una serie de estrategias mínimas que le permita un desenvolvimiento adecuado ante el aumento del nivel de exigencia y la necesidad de un mayor nivel de formación con una preparación que permita la resolución de problemas específicos de la vida cotidiana.

La competencia se caracteriza por conocimientos, habilidades y actitudes, su propósito movilizador al orientar a la actuación ante situaciones nuevas y su contextualización tras permitir responder a situaciones diferentes adecuándose a las características de cada contexto.

Según la OCDE (2005) las competencias:

- Tienen un carácter holístico, integrado y contextual.
- Incluyen una dimensión ética.
- Conforman un proceso creativo de transferencia a cada contexto.
- Tienen en cuenta el carácter aplicativo de los aprendizajes.
- Poseen un carácter dinámico.
- Se muestran interdisciplinares y transversales.
- Poseen un carácter reflexivo.
- Se encuadran dentro del desarrollo evolutivo a lo largo de la vida.
- Promueven el desarrollo de capacidades.
- Se consideran un punto de encuentro entre la calidad y la equidad.

- Tienen carácter universal.

En el ámbito de las matemáticas, el Consejo Europeo establece la *Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología*, que se ha concretado en nuestro sistema educativo en dos competencias básicas: la *Matemática* y la de *Conocimiento e interacción con el mundo físico*.

Dicha competencia se generaliza en nuestro ámbito educativo en el desarrollo del área de matemática:

- Como una agrupación de procesos generales y como conjunto de competencias o niveles de complejidad cognitiva expresables mediante una escala.

- Como una detección y análisis de situaciones familiares a partir de las cuales se seleccionan las técnicas adecuadas para calcular, representar e interpretar a partir de la información disponible y aplicar las estrategias de resolución de problemas adecuadas.

PISA (2013) engloba: razonar y argumentar, matematizar, elaborar estrategias para resolver problemas, representar, comunicar, usar lenguaje formal, técnico, simbólico y las operaciones y, por último, usar herramientas matemáticas. Todas ellas desarrolladas en distintas situaciones: *personales* (contexto inmediato del alumno) *educativas o laborales* (escuela o entorno laboral), *públicas* (relacionadas con el contexto social) y *científicas* (análisis de procesos relacionados con la tecnología y las propias matemáticas).

Estas características de las capacidades matemáticas van orientadas a los procesos fundamentales de formular situaciones matemáticas, utilizar conceptos y procedimientos de razonamiento matemático e interpretar, generalizar y evaluar situaciones y contenidos de este dominio, aspectos interrelacionados e incluidos en la definición de alfabetización matemática.

Además del informe PISA debemos también destacar el estudio desarrollado por la IEA denominado TIMSS (ver Martin, Mullis y Foy, 2008) Las áreas que conforman esta evaluación son el conocimiento y las destrezas en matemáticas y ciencias y evalúan el rendimiento del alumnado de 4º de Educación Primaria y 2º de ESO. Debido a que estos niveles educativos son objeto de estudio de nuestro trabajo, consideramos hacer referencia a dicho estudio.

Para evaluar la competencia matemática de alumnos 4º de E.P. se valoran los siguientes contenidos y dominios cognitivos (INEE, 2012 a y b):

- *Áreas de contenidos:* números (números naturales, fracciones y decimales, expresiones numéricas con números naturales y modelos y relaciones), formas y mediciones geométricas (puntos, líneas y ángulos y formas bidimensionales y tridimensionales) y representación de datos (números naturales, organización y representación).
- *Dominios cognitivos:* conocer (recordar, reconocer/identificar, recuperar, medir y clasificar/ordenar), razonar (analizar, generalizar/especializar la resolución de un problema,

integrar/sintetizar, justificar con pruebas de validez matemática y resolver problemas no rutinarios en contextos no conocidos) y aplicar (seleccionar un método o estrategia para solucionar un problema, representar, modelizar, poner en práctica y resolver problemas rutinarios).

En 2º de ESO se evalúan los siguientes contenidos y dominios cognitivos (INEE, 2011):

- *Áreas de contenidos:* números (números enteros, fracciones y decimales y razón, proporción y porcentaje), álgebra (patrones, expresiones algebraicas y ecuaciones/ fórmulas y funciones), geometría (formas y medidas geométricas y posición y movimiento) y datos y probabilidad (organización, representación e interpretación de datos y probabilidad).
- *Dominios cognitivos:* conocimiento (hechos, procedimientos y conceptos), razonamiento (forma de enfrentamiento a situaciones nuevas, contextos y problemas complejos) y aplicación (resolver problemas o responder a cuestiones).

CAPÍTULO 2. LA SEMÁNTICA DEL DISCURSO

2.1.- INTRODUCCIÓN

Para Puente (1995) el cerebro es una maravillosa máquina que permite reducir la variabilidad de los objetos para agruparlos en función de la semejanza y de la familiaridad. Permite, por tanto, asimilar objetos dentro de un mismo concepto o de una misma categoría, y es que el hecho de incluir objetos o eventos en categorías simplifica la forma de relacionarnos con el mundo; es lo que se conoce como la *función sistematizadora* y organizadora del proceso de pensar. Un ejemplo lo tenemos si pensamos en una pelota. Bajo el concepto pelota podemos encontrarnos pelotas de futbol, de tenis, de baloncesto, de cuero, de goma, hinchables, etc. Pero todas pertenecen a la categoría “pelota”.

Esto significa que cuando logramos abstraer las características comunes de los objetos y conseguimos generalizar las propiedades fundamentales para identificarlos de forma inmediata e inequívoca lo que hemos hecho es formar un concepto mediante los procesos de *categorización*, *formación de conceptos* y *clasificación*. Dichas actividades suelen ser consideradas generalmente como características del pensamiento inductivo, que implican procesos complejos, aunque es muy probable que participen en su funcionamiento componentes tanto deductivos como inductivos. Para Bruner, Goodnow y Austin (1956) categorizar implica expresar cosas diferentes (a nivel perceptivo) que podrían ser, a simple vista, equivalentes, lo que va a permitir agrupar los objetos, los acontecimientos y las personas que nos rodean en clases, y responder de ellos en términos de pertenencia a una clase más que a su carácter único. En este sentido se expresa también Oerter (1975) al afirmar que los conceptos hacen referencia a reglas de clasificación que van a permitir agrupar los objetos según ciertas notas o atributos comunes a todos los miembros de la categoría.

Pues bien, el lenguaje juega un papel destacado en la formación de conceptos. De hecho Bolton (1972) sostiene que, al deducir una conclusión a partir de unas premisas, la mayoría de las personas utilizan también el conocimiento del mundo, para lo que es de suma importancia el lenguaje que manejamos habitualmente; pero también formar hipótesis acerca de las reglas de clasificación en cuestión. Un objeto es lo que es porque lo etiquetamos con una serie de palabras que lo definen. Las palabras que empleamos para definir un objeto no se refieren a un objeto aislado o concreto, sino a una particularidad o característica formal que es común a una serie de objetos o de elementos de la realidad. Se observa así que el proceso de abstracción de las propiedades comunes va unido a la capacidad humana de denominación, es decir, de asignar características mediante el uso de etiquetas. De esta manera, cualquier aspecto de la realidad puede ser interpretado de manera inteligible, aunque, obviamente, con más o menos corrección lógica, dependiendo del grado de información previa que se posea acerca de esa parcela de conocimiento así como de las operaciones inferenciales que se pongan en funcionamiento para el desarrollo de nuevas estructuras cognoscitivas.

Ahora bien, es posible que algunos objetos tengan rasgos característicos comunes entre ellos, pero tienen otros importantes rasgos que son diferentes y que son, precisamente, lo que hace que los objetos sean unos y no otros. Esto nos permite distinguir los rasgos que son comunes y los que son diferentes, al igual que permiten establecer relaciones entre los rasgos; en otras palabras, nos permiten comparar.

Por tanto una forma de adquirir conceptos es distinguir un concepto de otros con los cuales mantiene relación.

A medida que podemos aprender más cosas de los objetos la representación mental que hacemos de los mismos se va haciendo más exacta. Si bien los primeros conceptos de los niños son formados a través del contacto con los objetos y las categorías naturales que aparecen en los ambientes, a medida que los niños se hacen mayores van aprendiendo más conceptos ata el punto de tener que adquirirlos de forma abstracta, es decir, a través de las palabras que simbolizan a los objetos. A medida que los sujetos desarrollan su capacidad cognitiva, estratégica o inferencia adquiere muchos y nuevos conceptos, derivando conclusiones mediante el razonamiento y la evidencia; hasta el punto de inferir el significado de un concepto usando claves del contexto no solo en el discurso oral sino también en los textos escritos.

En este sentido, para adquirir un concepto son necesarias una serie de dimensiones y, además, han de ser suficientes para que no haya lugar a equívocos; son las denominadas *dimensiones relevantes*. Lógicamente todas las otras dimensiones a mayores serán las irrelevantes. Cuanto más complejo sea el concepto que queramos formar mayor será el número de dimensiones y valores que lo definen. Evidentemente si el concepto es simple el número de dimensiones y valores será pequeño (Cohen, 1977).

Pues bien, con el objetivo de conocer cómo los sujetos aprenden los conceptos los psicólogos han utilizado varias clases de objetos, los cuales se pueden encuadrar en tres grandes grupos: objetos naturales (aparecen directamente en la naturaleza), objetos fabricados por el hombre y objetos artificiales (construidos por los experimentadores en los laboratorios con fines de investigación).

Entre los años 1950 y 1970 se empleaban precisamente los objetos artificiales para investigar el proceso de adquisición de conceptos. Esto se debe a que sus rasgos están determinados de una manera precisa, lo cual facilita el proceso de clasificación. Además estos rasgos o atributos se combinan según unas reglas. Por ello, una vez que los sujetos reconocen los atributos que son relevantes y cómo estos se combinan se puede identificar el concepto.

Para lograr la identificación de los conceptos los sujetos utilizan diferentes estrategias conocidas con el nombre de *enfoque conservador* y *enfoque de juego*. En el enfoque conservador lo importante es ir cambiando un solo atributo cada vez hasta identificar un concepto (por ejemplo el juego

¿Quién es quién?); esto hace que sea un proceso lento pero seguro. Por contra, en el enfoque de juego los sujetos toman dos atributos o más de cada vez. Si el sujeto acierta es un proceso rápido, pero existe el riesgo de que el sujeto falle, por lo tanto tiene que averiguar cuál de las dos atributos modificados es el erróneo, haciendo que el enfoque de juego se vuelva aún más lento que el conservador.

A partir de la década de los setenta se comienzan a utilizar, sin embargo, los objetos naturales, ya que de acuerdo con Rosch (1973) los conceptos artificiales son poco representativos de la clase de conceptos que los sujetos encontramos en el mundo; los objetos cotidianos no se pueden clasificar de manera tan nítida ya que el mundo no se divide de manera tan clara como lo hacen las situaciones experimentales de laboratorio. Si queremos conocer cómo los sujetos identifican los objetos que nos rodean, cómo los enmarcan en determinadas categorías, cómo los factores lingüísticos y culturales intervienen en su adquisición, etc. es lógico que lo tengamos que analizar, precisamente, con estos objetos cotidianos (Ankerstein, Varley y Cowell, 2012).

Pues bien, un aspecto fundamental a tener en cuenta será analizar cómo los seres humanos construimos las categorías, es decir, cómo se definen estas categorías, o lo que es lo mismo, en base a qué aspectos son organizados y agrupados los estímulos.

Los seres humanos tenemos varias formas de categorizar los objetos, esto es, de construir categorías. Sin embargo, la forma más probable de definirlas es en base a los atributos que poseen los objetos, por ejemplo atendiendo a la similitud de funciones, los usos y/o el parecido físico entre ellos.

Sin embargo para los investigadores y psicólogos las diferentes categorías se organizan en tres niveles: el nivel básico o genérico (por ejemplo perro), el nivel subordinado o específico (pastor alemán) y el nivel superordinado (animal); siendo las categorías de nivel básico las que más se han utilizado en las investigaciones llevadas a cabo por los psicólogos de la cognición en los últimos tiempos, ya que las categorías de nivel básico poseen cinco aspectos fundamentales: 1) son categorías muy frecuentes en el lenguaje humano, 2) son las categorías más codificadas, codificables y más usadas, 3) suelen representar objetos concretos, 4) son los conceptos que primero dominan los niños y 5) son objetos que, generalmente, se pueden representar con imágenes que reflejan la categoría completa (Connolly, Fodor, Gleitman y Gleitman, 2007; Varela, Thompson y Rosch, 1991; Wills y Pothos, 2012).

2.2.- REPRESENTACIÓN DEL CONOCIMIENTO: ADQUISICIÓN Y DESARROLLO

2.2.1.- Categorías y contexto verbal

Una manera de clasificar los objetos es en función de cómo han sido percibidos y codificados. Este hecho ha sido demostrado ampliamente (Haskell, Mansfield y Brewer, 2011; Labov, 1973; Roth y Shoben, 1983) y se ha llegado a la conclusión de que el contexto lingüístico en el cual las personas encuentran las categorías juega un papel fundamental a la hora de juzgarlas, y también, que las categorías no están representadas en la memoria de una manera estable por conjuntos de atributos fijos, sino que depende de los contextos donde se encuentren (Barsalou y Medin, 1986).

Además, las categorías no son fijas, ya que cambian a medida que el conocimiento de los sujetos aumenta. También influyen otros factores como el punto de vista de las personas (sus creencias) y el conocimiento que tienen de las categorías. Como regla general, el punto de vista de las personas influye en la producción y ordenación de los objetos dentro de una determinada categoría. Por ejemplo para un habitante de la india la vaca será vista como un animal sagrado, a venerar, mientras que para un argentino será un buen ejemplo de un asado. A medida que los sujetos se van desarrollando y aprendiendo las categorías que poseen se van modificando y enriqueciendo, lo que implica que se estructuren mejor.

2.2.2.- Categorías perceptuales

Hacen referencia a la capacidad que tenemos los humanos (probablemente de naturaleza fisiológica) para reconocer, por ejemplo, los colores y las formas prototípicas. Para ello Rosch (1973) realizó diversos experimentos relacionados con el color, basándose en la hipótesis de que algunos colores son mejores ejemplos de la categoría que otros, lo que se conoce como prototipos. Para ello consideró que las personas, independientemente de la cultura, responderían de manera semejante ante los colores prototipo. Para contrastar esta hipótesis realizó una investigación con una tribu primitiva (los Dani) de Nueva Guinea, ya que son un pueblo que en su cultura solo existen dos categorías de colores, el oscuro y el claro. Los resultados de sus investigaciones confirmaron la hipótesis planteada; los Dani reconocen los colores puros más rápidamente que los periféricos. Lo mismo ocurrió con el reconocimiento de formas prototípicas cuadradas, triangulares, etc. llegando a la conclusión de que esta hipótesis era cierta.

2.2.3.- Categorías semánticas

Diversos autores (Battig y Montague, 1969; Mather y Plunkett, 2011; Medin y Shoben, 1988; Poggioli y Puente, 1989) también analizaron si, al igual que las formas y colores prototípicos, estos prototipos se daban en otras categorías: animales, deportes, muebles, herramientas, frutas, etc., llegando a la conclusión de que dentro de estas categorías semánticas también existían ejemplos prototipos. En la línea de lo anterior, cuando se le pide a un sujeto que reconozca si un objeto pertenece a una categoría semántica se da un mayor nivel de acierto en aquellos objetos que se han calificado como buenos ejemplos, ya que dentro de los elementos prototipos existen algunos objetos que no se consideran tan buenos ejemplos como otros; llegando a la conclusión de que los ejemplos prototipos pueden ser mejores o peores ya no solo por el hecho de poseer uno o varios atributos, sino porque entre sus miembros existen semejanzas o parecidos familiares; por ejemplo en el caso de mamíferos es más lógico enmarcar a los perros y a los gatos que a las ballenas, ya que perros y gatos comparten más atributos que perros y ballenas o que gatos y ballenas. Los parecidos son más evidentes de acuerdo a sus características físicas, hasta el punto de que para enmarcar a las ballenas dentro de la categoría semántica de mamíferos es necesario conocer una serie de características e informaciones de mayor complejidad que las meramente de apariencia física (por ejemplo que son vivíparos, que tienen pulmones, etc.).

2.2.4.- La memoria semántica

Un aspecto importante que se encuentra muy ligado al aprendizaje y a la formación de conceptos es el de que éstos se encuentran relacionados entre sí de modo sistemático, formando estructuras de conocimiento integradas en la memoria a largo plazo, lo que se conoce como *Memoria Semántica*. Pues bien, la memoria semántica es encargada de almacenar los significados de las palabras, los conceptos y las relaciones entre ellos. Esta estructura cognitiva, por tanto, almacena e integra el conocimiento semántico del que dispone el sujeto, normalmente vinculado al lenguaje, aunque también a conceptos no lingüísticos (ligados a distintas modalidades sensorio-perceptivas).

Es un hecho conocido que se la capacidad de almacenamiento de la MLP es infinita, por lo tanto es preciso conocer cómo los sujetos podemos recuperar de la memoria una información concreta y no otra; ya que no parece lógico pensar que los sujetos exploren todos los elementos almacenados en la memoria de una forma más o menos azarosa; un procedimiento de este estilo sería demasiado exhaustivo y, consecuentemente, lento. Sin embargo cuando recuperamos información de nuestra memoria lo hacemos en apenas segundos.

Tal y como se detallará más adelante, muchos psicólogos creen que la asociación es un principio básico de organización del pensamiento, de manera que consideran que el pensamiento no es un conjunto de conceptos aislados e independientes, sino una red de conceptos y ejemplos interconectados (nódulos).

2.3.- MODELOS TEÓRICOS EXPLICATIVOS SOBRE EL PROCESO DE RECUPERACIÓN DE LA INFORMACIÓN

Veamos, pues, las teorías que describen este proceso de recuperación de la información.

2.3.1.- Mecanismo de activación

Uno de los mecanismos de recuperación planteado por la psicología cognitiva es la activación de conceptos y categorías. De una manera simple podríamos definir la activación como el proceso de hacer consciente algo, es decir, traer un concepto que se encuentra "latente" en la MLP a un estado "activo" en la MCP. Las investigaciones han confirmado que cuando un concepto pasa de un estado pasivo a uno activo vuelve también activos otros conceptos que están relacionados con él. Por ejemplo, si pedimos a un individuo que diga el nombre de un animal que empiece por "p" el participante tiene que activar la categoría "animal" y buscar en la memoria un ejemplo de animal que satisfaga el criterio ("perro"). Si a continuación le pedimos al participante que diga un animal que empiece por “f”, generalmente el tiempo necesario para producir el segundo ejemplo es menor. Este fenómeno (denominado *efecto priming* o de preparación) se explica porque el sujeto ya ha activado previamente la categoría “animal” de manera que ya se encuentra en estado activo, con lo cual a la hora de buscar un nuevo ejemplo dentro de esta categoría parte del proceso ya está hecho, con lo cual el tiempo será menor. Esto implica que los conceptos han de estar interrelacionados, de manera que la primera tarea va a facilitar la ejecución de la segunda.

2.3.2.- Teoría de las redes jerárquicas: búsqueda jerárquica

Lo que esta teoría propone es que los conceptos se presentan en la memoria como unidades independientes, lo que pasa es que están conectadas por medio de una red de relaciones. Técnicamente hablando se podría decir que estos mecanismos han sido formalizados en la teoría de las redes jerárquicas (Baddeley, 1976; Collins y Quillian, 1969; Murphy, Hampton y Milovanovic, 2012; Quillian, 1968) y considera que la recuperación de conceptos de la memoria semántica funciona de modo similar a como lo haríamos en un juego de adivinación, esto es, haciendo preguntas que vayan reduciendo las alternativas hasta llegar al concepto deseado. Por lo tanto, cuando los sujetos tienen que recordar una palabra específica lo que hacen es buscar a través de un “árbol” de decisiones cuyas ramas corresponden a las diferentes categorías.

Pues bien, los psicólogos consideran que hay dos tipos de relaciones que presupone implícitamente la teoría: la relación de *subconjunto* y la relación de *propiedad*. La relación de subconjunto lleva implícita una organización jerarquizada, de manera que los conjuntos (de conceptos) más amplios y abstractos se ubicarían en la parte superior de la estructura jerárquica; por contra, los conjuntos más pequeños y concretos se encontrarían en la base de la estructura. La mayor o menor proximidad entre estos conjuntos y propiedades hará que la activación de los conceptos sea mayor y más rápida.

Por otro lado, la relación de propiedad hace referencia a tres cuestiones: es, tiene y puede. Cuanto más alto sea el nivel jerárquico al que hagamos estas tres cuestiones, mayor tiempo será necesario para recuperar el concepto de la memoria semántica; por ejemplo si presentamos afirmaciones a un sujeto y le pedimos que nos diga si las afirmaciones son ciertas o falsas con relación a determinados conceptos se puede comprobar que cuanto más alejados estén los conceptos a nivel jerárquico, mayor será el tiempo necesario para activarlos y viceversa.

Además, de las investigaciones de Collins y Quillian (1969) se deriva otro dato de interés: las afirmaciones subconjuntas, normalmente, necesitan menos tiempo que las afirmaciones de propiedad.

De todo esto se deriva que la teoría de redes responde a un mecanismo que evita las redundancias en los conceptos, que se centra en lo realmente importante y deshecha lo irrelevante; sólo así se puede explicar que la memoria economice su espacio de almacenamiento, es decir, existe una economía cognitiva que se centra en las propiedades definitorias de los conceptos (por ejemplo un canario puede *cantar* y es *amarillo*), pero que sin embargo no se asocia con otras propiedades menos específicas del concepto en cuestión (por ejemplo no se considera que un canario puede *volar*, es *pequeño*, tiene *plumas*, etc.). En otras palabras, las propiedades comunes de los conceptos se obvian en la teoría de redes, dando mayor importancia a aquellas propiedades más específicas y definitorias.

Sin embargo la teoría de las redes jerárquicas no responde de forma satisfactoria cuando se analizan las informaciones que normalmente no están tan estructuradas ni tan organizadas jerárquicamente, o bien a la hora de explicar la recuperación de determinadas inferencias, sobre todo aquellas que hacen referencia a informaciones que nunca antes se han visto u oído.

2.3.3.- Teoría de la propagación de la activación

Esta teoría se ofrece como alternativa a la de redes jerárquicas y trata de explicar cómo ocurre la recuperación de inferencias. Parte de la idea de que la estructura de la memoria semántica está estrechamente interconectada con relaciones que van en múltiples direcciones. Esto hace que renuncie al principio de economía cognitiva (defendida en la teoría de redes) y, parcialmente, al principio de estructura jerárquica; en su lugar propone una estructura en forma de red, multidireccional en base a relaciones de semejanza y distancia semántica. Haciendo un símil se podría comparar con un paseo por una ciudad, en el sentido de que para ir a un punto concreto se puede ir por múltiples vías, aunque, dependiendo del punto de partida, ciertas conexiones son más probables que otras. El nivel de probabilidad estará en función de la semejanza de los conceptos, de la frecuencia de uso y del número de conexiones que posea cada concepto.

Esto último es importante, ya que esta teoría considera que los conceptos se activan secuencialmente, es decir, de uno en uno; por eso la propagación decrece en función de la distancia entre conceptos.

2.3.4.- Modelos de memoria asociativa y sistema ACT

La memoria asociativa y el sistema de producción ACT (“Adaptative Control Though”) son modelos que pretenden explicar de una manera comprensiva cómo representamos los seres humanos la información de manera significativa y cómo actuamos a la hora de relacionarnos con los objetos que nos rodean y comparten, básicamente, las mismas propiedades de las ideas asociativas desarrolladas por Quillian, Loftous y Collins que acabamos de exponer; hasta el punto de que este modelo asociativo se inspira en estas ideas anteriores. El modelo ACT es, sobre todo, de naturaleza computacional; y se basa en la convicción de que la memoria humana es asociativa por naturaleza, es decir, los sujetos almacenamos información en la memoria pero relacionándola con otras en función del grado de asociación. Esto hace que nuestra memoria sea un sistema altamente estructurado que organiza sus informaciones y contenidos y guía, además, las ejecuciones de los sujetos en relación con el mundo que les rodea.

Sin embargo este modelo va más allá que los vistos anteriormente y establece tres novedades importantes con respecto a aquéllos: en primer lugar propone que la información puede ser procesa en la memoria de forma paralela (Van Overschelde, Rawson y Dunlosky (2004), sobre todo en aquellas tareas que son bien conocidas o familiares; depende, por lo tanto, de la naturaleza de la tarea. Recordemos que los modelos anteriores consideraban únicamente el procesamiento secuencial, en serie. Con esta nueva visión el sistema de la cognición humana adquiere una capacidad, una potencia y una rapidez de procesamiento equiparable a los sistemas inteligentes. Ahora bien, esto no elimina el que el procesamiento pueda tener carácter secuencial, de hecho cuando la tarea es muy compleja y exigente requiere que se realice de forma consciente, por eso desde el punto de vista de los recursos es probable que se utilice el procesamiento secuencial (Anderson, 1976; Anderson, 2005; Schneider y Anderson, 2012).

En segundo lugar, en el modelo ACT se diferencian dos clases de conocimientos: el conocimiento declarativo (hace referencia al conocimiento acerca de las cosas) y el conocimiento procedimental (es el conocimiento que hace referencia a cómo se ejecutan las acciones). Lo cierto es que la distinción entre conocimiento declarativo y conocimiento procedimental (también denominado procedural o procesual) ha tenido una repercusión definitiva en la psicología cognitiva y en la investigación realizada desde esta perspectiva conceptual (Jiménez, Puente, Alvarado y Arrebillaga, 2009). De hecho, la mayoría de las habilidades implican ambos tipos de conocimiento; sin embargo en términos generales, el conocimiento declarativo se diferencia del procedimental en que aquél puede traducirse a palabras, mientras que el conocimiento procedimental es, por norma general, difícil de verbalizar explícitamente.

Además, el conocimiento declarativo no desencadena acciones sobre el mundo, pero sí puede activar el conocimiento procedimental responsable de esas acciones; es por eso que se considera que el concepto de activación tiene un origen central, ya que sólo los conceptos que se hallan activados en la memoria de trabajo tendrán influencia sobre el conocimiento procedimental.

Ahora bien, conviene señalar que no todo conocimiento procedimental implica una secuencia motriz, es decir, una habilidad de procedimiento que implique movimiento (escribir, dibujar, moverse, etc.). Por ejemplo a la hora de realizar operaciones matemáticas mentales (por ejemplo cálculo mental para sumar 274+149) requieren para su resolución la activación en la memoria de una serie de procesos: establecer una jerarquía en la que el objetivo de la operación se logra mediante la consecución de los subobjetivos; ejecutar la operación en forma de cascada, de manera que los resultados intermedios obtenidos se han de mantener activos en la memoria porque servirán como inputs de los pasos posteriores; requiere coordinar continuamente, en la memoria activa, los datos exteriores con los procedentes de la memoria a largo plazo; y por último, ser conscientes de que la correcta finalización de la tarea se consigue justamente al final y no a cada paso (Linch y Bolyard, 2012). Es evidente que para este tipo de tareas no es necesaria actividad motriz alguna, y sin embargo es necesario un proceso, un procedimiento.

Para Schneider y Anderson (2012) a las diferencias entre el conocimiento declarativo y el procedimental también se dan en cuanto a su representación. Si bien el conocimiento procedimental se representa por medio de producciones, la representación del conocimiento declarativo se realiza por medio de proposiciones y por medio de imágenes mentales. Veamos, pues, a que nos estamos refiriendo:

a) Proposiciones

En general, una proposición corresponde, aproximadamente, a una idea, y se definen como la unidad de significado más simple. La idea de que la información declarativa se representa en la memoria en proposiciones es el enfoque más ampliamente aceptado entre lingüistas y psicólogos. Frecuentemente, las proposiciones se expresan con palabras, aunque no deben confundirse; las palabras sirven para expresar significados, mientras que la proposición es el significado. Esto implica que aunque las palabras cambien de orden en una oración el significado puede no variar; por ejemplo si decimos "Jorge compra pan" o "el pan es comprado por Jorge" nos estamos refiriendo a la misma idea, es decir, el significado de ambas oraciones no varía. Pero las proposiciones no sólo se expresan con palabras. En el lenguaje lógico- matemático las proposiciones se representan mediante símbolos: por ejemplo "Andrea tiene más dinero que Jorge" se podría representar como A>B, siendo A "el dinero que tiene Andrea" y B "el dinero que tiene Jorge".

Pues bien, estas proposiciones se representan mediante redes semánticas. En estas redes semánticas las proposiciones se conectan con otras en función de relaciones y argumentos, donde el *argumento* es el tema de la proposición (normalmente los temas son los nombres o los pronombre) y la relación (generalmente mediante verbos, adjetivos y/o adverbios) restringe el tema. Por ejemplo, ante el enunciado "el pájaro vuela alto” estaremos descartando y restringiendo a otros pájaros que no estén volando alto.

b) Imágenes mentales

A pesar de que no existe un acuerdo total entre los psicólogos la mayoría defienden que la información puede representarse en la memoria mediante imágenes mentales (Eichenbaum, 2010). El psicólogo que ha defendido con más fervor la idea de las imágenes mentales es Allan Paivio (2006a) quien, en torno a la década de los setenta del siglo pasado, propuso la teoría del *doble código*, que considera que la información se almacena de dos formas: como una cadena verbal, articulatoria; y como una imagen visual. Los resultados de un gran número de investigaciones (Madan, Glaholt y Caplan, 2010; Paivio y Yuille, 1969; Vigliocco, Kousta, Vinson, Andrews y Del Campo, 2013) apoyan la hipótesis del doble código. Estos estudios muestran que las palabras, frases y párrafos que son fáciles de representar con imágenes se recuerdan con más facilidad que aquéllas que no son tan fáciles de representar. Además, la mayor o menor facilidad de representación viene determinada por los niveles de abstracción y/o concreción del concepto. De acuerdo con la hipótesis del doble código los materiales, cuanto más concretos sean o cuando más fácilmente se puedan representar mediante imágenes, podrán representarse en la memoria en las dos formas que se han visto: la verbal y la imaginal; mientras que los materiales que son muy abstractos sólo se van a poder representar en la memoria de forma proposicional (verbal).

c) Producciones

Las producciones son la forma en la que se representan las imágenes mentales: son reglas sobre condiciones y acciones; en otras palabras, programan ciertas acciones para que se ejecuten cuando existan unas determinadas condiciones. Por ello las producciones hacen referencia a dos cláusulas: SI y ENTONCES. Por ejemplo, si hablamos de animales podemos decir: SI tiene pelo, anda a cuatro patas y hace "guau" ENTONCES es un perro. Tal y como puede deducirse la cláusula SI especifica las condiciones, mientras que la cláusula ENTONCES especifica las acciones.

Por lo tanto se podía decir que las *proposiciones* y las *producciones* se diferencian en que las producciones están más próximas al entorno, mientras que las proposiciones están algo más alejadas; pareciera que estas últimas están en la mente, como esperando, mientras que las primeras se disparan inmediatamente ante las condiciones del entorno. Esto permite utilizar las proposiciones para imaginar situaciones posibles y sus consecuencias sin tener que vivirlas realmente.

Para Anderson, Lee y Finchan (2014) el conocimiento procedimental pasa por tres etapas: declarativa, compilación y ajuste; y es que todo aprendizaje procedimental comienza, precisamente con un aprendizaje declarativo. El aprendiz codifica en forma de proposiciones o afirmaciones verbales las fases de un procedimiento, de manera que esta etapa termina cuando el aprendiz es capaz de representar mentalmente el procedimiento.

Lo cierto es que en algún punto del proceso el conocimiento declarativo se convierte en producciones o procedimientos de alto nivel (Harvey y Anderson, 1996; Schneider, Rittle-Johnson y Star, 2011), siendo la *compilación* el mecanismo básico del modelo ACT. La compilación implica dos subprocesos: el procedimiento y la composición. El procedimiento hace que se elaboren versiones procedimentales del conocimiento declarativo. La información declarativa se convierte en producciones relativamente torpes pero bastante más automatizadas que en la etapa anterior. La composición representa la fusión de varias producciones. Durante el procedimiento, las producciones se organizan en secuencias pero no existe una ligazón fina entre las diversas secuencias de una producción. Con la composición todas las secuencias se compilan en una sola producción.

La tercera y última etapa es el *ajuste*, proceso que afina el procedimiento y lo automatiza. La base del ajuste se encuentra en tres mecanismos de aprendizaje: la *generalización*, la *discriminación* y el *fortalecimiento*.

La generalización es el proceso mediante el cual las reglas de producción se aplican a otras situaciones. Cuando dos producciones tienen condiciones comunes (o similares) tienden a generalizarse.

La discriminación hace que las reglas de producción se restrinjan a su rango de aplicación. Para ello es necesario que el "sistema" disponga de ejemplos, no-ejemplos y contraejemplos, así, mediante comparaciones de estos casos, los aprendices discriminan cuando se debe aplicar una u otra regla de producción.

Por último, el fortalecimiento hace que las reglas más eficaces se fortalezcan, mientras que las menos eficaces se debilitan. Este mecanismo garantiza mayor rapidez y eficacia de emparejamiento en las producciones.

d) Los esquemas

La tercera novedad que propone el modelo ACT, aparte de que la información pueda ser procesada en paralelo y de que además del conocimiento declarativo exista un conocimiento procedimental, es la inclusión de una memoria particular, activa, que se sirve de la memoria declarativa y de la memoria procedimental (de producción) así como de sus procesos (almacenamiento, recuperación, comparación, aplicación y ejecución) para explicar cómo los humanos aprendemos y almacenamos los conocimientos, pero no solo la información verbal, sino también los esquemas de acción que nos permiten actuar con los objetos y/o ante determinados eventos (Lum y Bleses, 2012).

Los esquemas son formas populares de representación del conocimiento. Según Kant son disposiciones innatas de la mente que permiten integrar y ordenar los datos procedentes del mundo exterior.

Lo cierto es que desde que la cognición se impuso como teoría de la psicología contemporánea, el esquema es un concepto omnipresente. Para Rumelhart y Norman (1988), citados en Puente (1998), un esquema es la unidad de significado y procesamiento del sistema cognitivo humano (...) son estructuras interrelacionadas de conocimiento (...) comprometidas en la comprensión de la información que llega, y que guía la ejecución de operaciones de procesamiento. En general es una red de interrelaciones entre sus partes constituyentes, las cuales son en sí mismas otros esquemas.

En otras palabras, los esquemas son estructuras abstractas almacenadas en la memoria que representan lo que uno piensa acerca del mundo que nos rodea. A pesar de ser abstractos, los esquemas dirigen los comportamientos, y crean expectativas acerca del comportamiento de las personas. Cuando no hay equivalencia entre el comportamiento y los esquemas que se tienen formados se rompen.

De acuerdo con la teoría piagetiana el esquema es como el marco cognitivo que emplean los individuos para organizar percepciones, los pensamientos y las experiencias; no son, por tanto, simples ideas, también son acciones motoras que conjuntamente dirigen los mecanismos de asimilación y acomodación, mecanismos fundamentales para la adaptación del individuo al medio.

Ahora bien, los psicólogos no han interpretado los esquemas de manera unívoca. Existen, al menos, cuatro versiones: el esquema como guión de teatro, el esquema como una teoría, el esquema como un programa de ordenador y el esquema como un analizador de los comportamientos humanos. A pesar de la existencia de diferentes versiones las funciones que se le asignan a los esquemas son las mismas, y es que los esquemas intervienen en los procesos de codificación y recuperación de información. En relación con la codificación los esquemas dirigen la atención para captar la información que está en consonancia con el esquema y rechazar aquella información que es irrelevante; funciona como un filtro durante la percepción. Una vez recibidos los estímulos, el esquema abstrae los significados y posteriormente los integra a los conocimientos previamente almacenados en la memoria. En el proceso de recuperación los esquemas ofrecen pistas para evocar los contenidos almacenados en la MLP.

Numerosos estudios (Bartlett, 1932,; Dooling y Christiaansen, 1977; Reimann, Gut, Frischknecht y Grob, 2013; Roediger y McDermott, 1995) demuestran que la memoria es selectiva y constructiva debido, precisamente a los esquemas, ya que intervienen en la selección de los hechos que serán codificados así como en la asimilación de los recuerdos. Esto hace que las personas asimilen las informaciones a partir de ciertos esquemas mentales, los cuales pueden dar origen a omisiones, distorsiones y transformaciones.

Los esquemas, por lo tanto se van a ir modificando, completando, haciéndose cada vez más complejos. Rumelhart y Norman (1988), como alternativa al modelo presentado por Anderson, plantearon un modelo basado en la lógica y en el sentido común que incluye tres etapas en el proceso de formación y modificación de esquemas: la fase de acumulación, la de reestructuración y la de ajuste.

La *acumulación* es la adición de nuevos conocimientos a los esquemas existentes, de manera que enriquecen la estructura de conocimiento a la vez que consolida los esquemas existentes. Para los psicólogos el proceso de acumulación es importante, pero insuficiente.

Simplemente mediante la repetición, la memorización mecánica y la asociación podemos introducir información nueva en nuestra memoria.

La *reestructuración* consiste en formar nuevos esquemas. Ocurre cuando los esquemas previos son inadecuados para explicar determinados fenómenos. Es la etapa más exigente en cuanto a esfuerzo cognitivo. No puede haber reestructuración si no hay adición de nuevos conocimientos.

El *ajuste* hace referencia al acoplamiento sutil del conocimiento a la tarea. Puede que existan esquemas y conocimientos adecuados pero que no alcancen su propósito de modo eficiente, ya sea porque son demasiado generales o porque no se corresponden de modo exacto con el uso particular que se requiere de ellos, de manera que es preciso ajustar el conocimiento, adaptarlo continuamente a la tarea. Sólo mediante la práctica se puede conseguir el ajuste, necesitándose, en ocasiones, miles de horas de prácticas para alcanzar lo que sería un nivel de experto. Quizá sea esta la forma más lenta de aprendizaje, pero es la que convierte el mero conocimiento en un rendimiento diestro.

Aunque los tres tipos de aprendizajes coexisten en todo el proceso de modificación de los esquemas su importancia relativa varía según una pauta temporal: al principio del proceso de aprendizaje va a imperar la agregación, pero la acumulación se sucede hasta un punto en el cual ocurre la reestructuración de los esquemas. Durante la fase de ajuste o refinamiento los esquemas se tornan automáticos, con lo cual se produce una mayor eficacia (en términos de rendimiento) y eficiencia, ya que el esfuerzo requerido para su producción es menor.

En la literatura también aparece el esquema ligado a término guión, y es que, como se ha visto anteriormente, el esquema no ha sido interpretado de manera uniforme por los psicólogos. De hecho Bower, Black y Turner (1979), Schank y Abelson (1977) hablan de guiones en lugar de esquemas, aunque en esencia sean lo mismo.

En definitiva se mantiene que, los esquemas van a cumplir tres funciones principales: 1) permiten planificar y ejecutar acciones, a partir de expectativas o predicciones ante una determinada situación; 2) facilitan la comprensión cuando las actividades son descritas por terceras personas y, finalmente 3) orientan el recuerdo de hechos vividos o de información escuchada.

En este sentido se expresa Gernsbacher (1997) al afirmar que cuando un sujeto se enfrenta a la comprensión de un texto lo que hace es asimilar y procesar una información que modifica las estructuras de conocimiento ya existentes en la memoria, es decir, los nodos de memoria.

Sin embargo ningún texto es completamente explícito, sólo contiene la información que se considera suficiente para que el sujeto construya, a partir de los dado, una representación semántica integrada mediante el uso de inferencias que relacionan explícitamente unas proposiciones con otras por medio de nexos temporales, espaciales, causales, etc., y unos elementos de una proposición con los de otra descubriendo que son correferenciales (Millis y Graesser, 1994; Carlson, Seipel y McMaster, 2011).

e) Procesos inferenciales durante la comprensión del texto

Desde la década de los 80 los investigadores han intentado identificar y explicar, desde diferentes perspectivas, qué tipo de inferencias se generan en el curso de la comprensión y en qué circunstancias, dando lugar a diferentes hipótesis y modelos. Sin embargo, y a pesar de la amplia investigación en las últimas décadas acerca de las inferencias no contamos con una teoría general sobre la generación de inferencias, sino con diversos modelos y miniteorías que, en la mayoría de los casos, se aplican a circunstancias particulares.

El concepto de inferencia constituye uno de los elementos fundamentales en cualquier teoría sobre la comprensión. Sin embargo no resulta fácil encontrar una definición del término que sea aceptada por todos, más aún si consideramos que este vocablo se utiliza no sólo en la ciencia cognitiva, sino también en el lenguaje cotidiano y en el ámbito de la lógica formal (Kintsch, 1993).

Según Schank (1975), las inferencias son el componente primordial de la comprensión, ya que nos permiten mantener la coherencia local y global de un texto y, además, son necesarias para la construcción del modelo mental de la situación descrita en el texto. Ya hemos visto que una característica básica del sistema cognitivo humano es su capacidad limitada y restringida. De este modo, cuando leemos, los diferentes procesos implicados en esta tarea están limitados por los recursos cognitivos de la memoria operativa (Schank y Abelson, 1977; Schank, 1986).

Para superar estas limitaciones en la capacidad de procesamiento y almacenamiento, la mente de los seres humanos utiliza dos mecanismos básicos: el *desarrollo de estrategias* y la *automatización de los procesos*. Mediante las estrategias, la mente humana es capaz de enfocar su atención, y activar todos sus recursos en el logro de la comprensión de un texto. Las estrategias, procesos controlados y utilizados voluntariamente, van a facilitar que todos los recursos disponibles puedan ser asignados a una tarea compleja en cada momento, permitiendo así su correcta realización.

Mediante la automatización podemos lograr que un proceso que es en principio costoso desde el punto de vista de los recursos que exige, se convierta en algo que no demande prácticamente recursos, aunque ello implique la pérdida de la conciencia de lo que realmente estamos haciendo. Este es un mecanismo fundamental en la comprensión de textos, ya que la complejidad de la tarea lectora supera enormemente la capacidad de procesamiento de nuestro sistema cognitivo.

El concepto de inferencia tiene, cuando menos, dos orientaciones, en función de si se analiza desde el punto de vista de la psicología del pensamiento o de la psicología de la comprensión de textos. Desde el punto de vista de la psicología del pensamiento una inferencia es un proceso de pensamiento mediante el cual se extrae, o se genera, información nueva que no está explícita en el texto. Estas inferencias pueden ser inductivas cuando la información semántica que se genera es realmente nueva; o deductivas, cuando la información semántica está ya dada, implícitamente, en las premisas.

Sin embargo desde el punto de vista de la comprensión de textos, una inferencia se refiere bien a un proceso cognitivo que implica la recuperación de información desde la MOLP, o bien como un proceso de generación de nuevos conocimientos que no están previamente almacenados en la MOLP del lector.

Ahora bien, la realización de inferencias consume recursos cognitivos e incrementa el tiempo de lectura. Sin embargo, como las inferencias son procesos automáticos, serán más rápidos y consumirán menos recursos que si tuviésemos que buscar la información en la MOLP o si tuviésemos que generar esta nueva información.

La realización de inferencias como elemento primordial de la comprensión para lograr la coherencia global de un texto se explica mediante la Teoría del Esquema de Rumelhart (1980). Según este autor los esquemas son estructuras de datos para la representación de conceptos genéricos almacenados en la memoria. Estos esquemas poseen variables cuyos valores deben rellenarse mediante la información ambiental, la almacenada en la MOLP o bien mediante la realización de inferencias.

A lo largo de la literatura se han propuesto diversas taxonomías de los procesos inferenciales, aunque resumiendo, y de acuerdo con García Madruga (2006) las inferencias se pueden clasificar atendiendo, por un lado según el tipo de proceso mental implicado y, por otro, según el tipo de tarea y nivel de representación con el que se relacionan.

1.-Clasificación según el tipo de proceso mental implicado:

Según Kintsch (1988) este tipo de inferencias pueden ser automáticas o controladas, y al mismo tiempo, que supongan la recuperación de información de la MOLP o bien la generación de información no explicitada previamente en el texto. Podemos hablar, entonces, de cuatro tipos posibles de inferencias:

.-Inferencias puente: Serían procesos de recuperación de información automáticos.

.-Inferencias transitivas: Son procesos automáticos que implican la generación de información.

.-Inferencias que requieren la búsqueda activa de conocimiento relacionado: Son procesos controlados que requieren recuperar información de la MOLP.

.-Inferencias lógicas: Hacen referencia a procesos controlados que permiten generar información.

Las inferencias que permiten generar información serían las inferencias en sentido estricto. De las dos posibles, serían las inferencias lógicas las más complejas, ya que son deductivas, requieren tiempo y exigen mayor cantidad de recursos cognitivos. En este sentido, el papel que cumple la memoria operativa en la realización de este tipo de inferencias se ha convertido en un asunto clave a la hora de explicar su dificultad e incluso su desarrollo desde la infancia a la adolescencia y a la edad adulta (García Madruga, Gutiérrez, Carriedo, Luzón y Vila, 2005; Johnson-Laird y Byrne, 1991; Markovits y Barrouillet, 2004).

2.-Clasificación según la representación con la que se relacionan:

Según las diversas tareas que el lector tiene que llevar a cabo y según los niveles de representación que tiene que construir durante la lectura (nivel lingüístico superficial, nivel proposicional y nivel de modelo mental) se puede hablar, entre otras, de las siguientes inferencias:

.-Inferencias Puente: también llamadas hacia atrás y conectivas (Clark, 1975; Haviland y Clark, 1974) y son necesarias para integrar o conectar diversas oraciones de un texto. Dentro de las inferencias los psicólogos establecen, a su vez, la siguiente distinción: *inferencias referenciales* e *inferencias causales*. Las inferencias referenciales también se llaman anafóricas (Graesser y Kreuz, 1993), en las cuales una palabra (por ejemplo un pronombre) o una frase se une referencialmente a un elemento previo del texto. Las inferencias causales (Graesser y Kreuz, 1993; Haberlandt, 1982) hacen referencia a una cadena causal entre el acontecimiento de que se trata y el pasaje previo.

.-Inferencias Elaborativas: también denominadas hacia adelante y opcionales (Sanford y Garrod, 1994; Schank, 1975; Just y Carpenter, 1987; Whitney, Ritchie y Clark, 1991) y permiten enriquecer la representación de un texto y establecer conexiones entre lo que se está leyendo y el conocimiento del lector, por ejemplo, en la lectura de un texto narrativo de intriga, sabemos que la aparición de un nuevo personaje supone una relación con los personajes anteriores que hemos de tener en cuenta. Según Sanford y Garrod (1994) la realización de inferencias elaborativas depende de la disponibilidad o accesibilidad del conocimiento general durante la comprensión del texto.

.-Inferencias Perceptivas (Swinney y Osterhout, 1990): son inferencias automáticas que se realizan durante el procesamiento perceptivo del lenguaje escrito, ya que cuando leemos no leemos todas las letras de las palabras sino que a partir de la lectura de unas pocas letras se infiere la palabra completa. Están implicadas en el establecimiento de la correferencia durante la comprensión del lenguaje.

.-Inferencias Cognitivas (Swinney y Osterhout, 1990): dependen de estrategias que hacen uso de conocimiento general, operando de forma lenta, controlada y elaborada; por ejemplo cuando tenemos que identificar las ideas principales de un texto. Intervienen en los procesos de integración que tienen lugar en una fase posterior del procesamiento. A la hora de hablar de las inferencias cognitivas se suelen clasificar en inferencias *necesarias* y *optativas* (Just y Carpenter, 1987; Sanford y Garrod, 1994; Gutiérrez-Calvo, 1999). Las primeras (también denominadas implicaturas) serían aquéllas que sirven para vincular una oración con la inmediatamente precedente. La realización de inferencias de este tipo es necesaria para asegurar la coherencia del texto y, por tanto, para la comprensión. Existe evidencia empírica que sugiere que las inferencias de este tipo se extienden más allá de la identificación de relaciones de eventos adyacentes (Myers y Duffy, 1990).

Las inferencias optativas, sin embargo, no son imprescindibles para la comprensión, ya que sólo rellenan lagunas y aportan matices al discurso general, y son, además, de naturaleza prospectiva (McKoon y Ratcliff, 1992).

Tal y como puede deducirse, las limitaciones en la capacidad de la memoria de trabajo y las diferencias individuales en esta capacidad van a afectar, en general, al procesamiento inferencial. Cuanto mayor sea la capacidad de memoria operativa mayor va a ser el número de inferencias necesarias que se realizan, ya que la capacidad de la memoria de trabajo es un factor especialmente crítico para la realización de inferencias necesarias cuando los elementos que deben conectarse se encuentran distantes en el texto (Singer, Halldorson, Lear y Andrusiak, 1992).

2.3.5.- Modelos de procesamiento inferencial

Como se ha expuesto anteriormente existe una amplia variedad de inferencias dependiendo del modelo teórico al que nos refiramos. Lo cierto es que esta amplia diversidad de planteamientos teóricos ha conllevado, en numerosas ocasiones, resultados y conclusiones poco convergentes, los cuales han culminado con la formulación de las teorías Minimalista (McKoon y Ratcliff, 1992, 1995) y Constructivista (Graesser, Singer y Trabasso, 1995; Singer, Graesser y Trabasso, 1994), teorías que tratan de explicar el procesamiento inferencial que se produce durante la comprensión de un texto.

2.3.5.1.- Inferencias on-line vs inferencias off-line

Una de las cuestiones fundamentales a las que las teorías acerca de la comprensión han intentado dar respuesta se refiere a si las inferencias se producen normalmente en el curso de la comprensión o si, por el contrario, se producen posteriormente cuando se recupera lo comprendido (véase, p.ej., Balota, Flores d´Arcais y Rayner, 1990; Corbett y Dosher, 1978; Graesser y Bower, 1990; Graesser y Kreuz, 1993; Graesser y cols., 1994; Johnson, Bransford y Solomon, 1973; Singer, 1979a, b, 1988, 1994).

Las inferencias on-line (en-curso) se definen como aquéllas que se procesan durante la comprensión de manera rápida y automática, aproximadamente en 650 mseg. (Kintsch, 1988; McKoon y Ratcliff, 1992), o bien con más esfuerzo y tiempo, quizás algún segundo (Graesser y Kreuz, 1993). Por el contrario, las inferencias off-line (durante la recuperación) se generan durante una tarea posterior a la comprensión, por ejemplo durante el recuerdo, el resumen o tras una pregunta (Graesser y otros, 1994).

Por convenio, los autores clasifican todas las inferencias en alguno de estos dos intervalos discretos, si bien se reconoce que entre ambos existe un continuo en el nivel de activación. Esto es debido a que una inferencia, al igual que cualquier elemento textual, esté más o menos activada en función de diferentes factores como la habilidad lectora, las características del texto, el tipo de inferencia, los objetivos del lector, las características de la tarea,... De ahí que cuando se afirma que una inferencia A se genera on-line y que una tipo B se genera of-line, realmente debemos interpretarlo en el sentido de que "...las inferencias tipo A tienen un nivel de activación o una probabilidad de generarse on-line mayor que las inferencias tipo B" (Graesser, Swamer, Baggett y Sell, 1996, pag. 15).

En este sentido, Magliano, Graesser y Trabasso (1999) puntualizan que el término on-line, con respecto a la comprensión, se puede interpretar en tres sentidos: a) inferencias que se generan en-curso de manera automática e invariablemente durante la comprensión, en los 650 mseg. posteriores a la lectura del elemento textual que las ha suscitado (Kintsch, 1988); b) inferencias que aún no siendo automáticas y tardando más de 650 mseg. se generan de forma inevitable e invariable; y, c) inferencias que se procesan de forma estratégica en función de las metas del lector y del género textual.

La teoría minimalista se centra en la distinción entre las inferencias automáticas (on-line) que se generan durante la lectura y las estratégicas (off- line) que son fruto de la aplicación de procesos estratégicos, controlados por los propósitos o metas de los sujetos. Esta teoría defiende que las únicas inferencias que se generan automáticamente durante la lectura son las que se basan en la información fácilmente disponible o que son necesarias para asegurar la coherencia local. De esta manera, estos autores se centran en el estudio del tipo de inferencias conectivas, asegurando que son las únicas que se generan on-line, es decir, durante la lectura.

Aunque esta concepción minimalista resulta bastante estricta en su concepción sobre las inferencias on-line (automáticas), las categorías automáticas/ estratégicas no se consideran totalmente contrapuestas y excluyentes; ya que hay veces que el lector puede construir inferencias estratégicas tan rápida y cómodamente como las inferencias mínimas.

Desde la teoría constructivista sobre la comprensión de textos, las inferencias son analizadas en el discurso a partir del modelo mental que los sujetos construyen cuando comprenden un texto. Desde este modelo se considera al lector/oyente como un agente que, además de extraer la información explícita, elabora de forma activa la información que está implícita en el texto. Así, desde la teoría constructivista (Graesser, Singer y Trabasso, 1994; García Madruga y otros, 1999; León, 2004) se realiza un análisis de los componentes básicos de la comprensión a partir de los cuales se pueda establecer qué inferencias se realizan on-line (durante la lectura) y cuáles off- line (durante los procesos posteriores de recuperación). El primer componente de la teoría hace referencia a los motivos o metas del lector. El segundo trataría de precisar el tema principal que se trata de transmitir en el texto. El tercer componente se centra específicamente en los textos narrativos y hace referencia a las inferencias relacionadas con los personajes narrativos, las causas de sus acciones, las metas y motivos que tienen, y qué explican sus acciones. El cuarto componente está relacionado con los esfuerzos del lector para comprender el texto, mediante la generación de inferencias conectivas que permiten establecer la coherencia local del texto.

Además de las inferencias conectivas relacionadas con el cuarto componente básico anterior (que ya la teoría minimalista sostenía que se realizaban on-line, y que eran las encargadas de asegurar la coherencia local del discurso), los teóricos de la concepción constructivista sostienen que durante la lectura se generan también inferencias elaborativas relacionadas con los otros componentes básicos anteriores. Así, serán consideradas inferencias on-line las inferencias temáticas globales relacionadas con el tema principal del texto, las inferencias de metas supraordenadas relacionadas con los propósitos básicos de los personajes de un texto y las inferencias de causas antecedentes que explican los motivos o razones de sus acciones.

Además de las inferencias anteriores, la teoría constructivista sostiene que otro tipo de inferencias elaborativas, las inferencias instrumentales, probablemente también son generadas on-line; debido a que la comprensión implica la construcción de modelos situacionales de la situación descrita, de manera que los lectores representan las acciones y objetos descritos en el texto y, por lo tanto, los instrumentos básicos para la construcción del modelo situacional. Así, los estudios parecen mostrar que la realización de inferencias instrumentales depende, además de las características del lector y de sus propósitos de lectura, de las características del texto y del propio carácter central o no del instrumento en cuestión con el objetivo de lograr la comprensión global del texto.

Entre las inferencias que desde el punto de vista de la concepción constructivista no estarían realizadas on-line estarían, por ejemplo, las inferencias sobre metas subordinadas (metas que están incluidas dentro de una meta superior) así como las inferencias sobre la intención del autor del texto.

En resumen, el modelo constructivista defiende que el lector/oyente realiza, fundamentalmente, inferencias que: 1) satisfagan sus objetivos y propósitos en relación con la comprensión del texto, 2) permitan construir una representación mental coherente de éste a nivel local y global y 3)intente encontrar una explicación de los hechos que se narran o por qué se menciona cierta información. En cualquier caso, el hecho de que este modelo se haya centrado en los textos narrativos es, precisamente, el principal argumento que utilizan los críticos de este modelo (Singer y cols., 1994).

2.3.6.- Modelos de la situación o Modelos Mentales

En la teoría de Kintsch y Van Dijk (1978) la comprensión de un texto se limitaba al análisis de su contenido proposicional (independientemente del contexto en el que se usaba) y a la construcción de una representación integrada de sus proposiciones componentes. En este sentido se expresa Elosúa (2000) al afirmar que hasta la década de los ochenta se consideraba que, en la comprensión de textos, el lector producía una construcción y una recuperación de la representación mental del texto y no tanto de la situación descrita en él.

Sin embargo si asumimos que el proceso de compresión de un texto concluye con la simple construcción de una representación proposicional, habría ciertos matices difíciles de explicar (López-Higes, 2003), por ejemplo por qué los sujetos dan interpretaciones distintas ante un mismo enunciado. Queda claro que cuando un sujeto se enfrenta a la comprensión de un texto (o de un discurso) lo que hace es construir una representación mental en la que integra la información explícita del texto/discurso junto con la información que infiere del mismo, integrando esta información en los conocimientos previos y creando un *modelo mental* (Johnson-Laird, 1983) semejante a la situación que el texto describe.

Una serie de autores, como Garnham y Oakhill (1996), consideran las aportaciones de Bransford y Franks (1971) y Bransford, Barclay y Franks (1972) como las precursoras de las teorías de los modelos mentales. Así Garnham y Oakhill (1996) defienden que las tres ideas centrales propuestas por Bransford permanecen en la actualidad en las teorías de los modelos mentales; a pesar de que reconocen la existencia de algunas ideas erróneas en las aportaciones iniciales de Bransford, relacionadas, por ejemplo, con la sobreestimación de la producción de inferencias de tipo elaborativo.

La primera de estas ideas considera que la representación mental de un texto no se corresponde con la representación lingüística; de manera que para comprender un texto, generalmente, no es necesario retener detalles sobre la representación sintáctica o semántica del mismo (Garnham y Oakhill, 1996). A no ser que el recuerdo de estos detalles sea una finalidad de la tarea, esta información va a desaparecer rápidamente de la memoria.

La segunda idea que Garnham y Oakhill defienden de la propuesta inicial de Bransford, hace referencia a la comprensión como un proceso de integración. Hoy en día se afirma que la integración de la información desde diferentes partes de un texto implica algo más que la mera yuxtaposición deoraciones individuales, tal y como defendían las teorías basadas en el procesamiento sintáctico.

La última de las ideas defendida por Bransford y otros (1972) es la que hace referencia a la comprensión como un proceso constructivo, de tal forma que en el momento de crear una representación mental de un texto va a ser necesario que se combine la información textual con el conocimiento relevante acerca del mundo que posea el lector. De esta forma se puede decir que la construcción y la integración van a quedar interconectadas en el sentido de que muchas veces el conocimiento previo va a contribuir a la integración de la información desde las diferentes partes del texto.

Lo cierto es que no será hasta los años ochenta cuando empiece a utilizarse el término de Modelos Mentales (Garnham, 1987; Johnson-Laird, 1983; van Dijk y Kintsch, 1983), también denominados “escenarios” o “modelos de situación” (Fletcher, 1994).

Según Johnson-Laird (1983) un modelo mental sería una representación de la situación o contexto de un texto más que una representación del texto en sí mismo. De acuerdo con Vieiro, García Madruga y Peralbo (1997) un modelo mental es un modelo interno de una situación descrita por una oración que se deriva de una representación proposicional a través del uso de inferencias basadas en el conocimiento general del mundo. La estructura está implícita en el propio modelo mental, es decir que se deriva del procesamiento semántico, de la situación a la que se refiere e texto y no del mismo texto (Johnson-Laird, 1983; van Dijk y Kintsch, 1983). Por este motivo se dice que si el lector no descubre el referente del texto su comprensión fracasa y el recuerdo es escaso, aún cuando las palabras y las oraciones sean inteligibles por sí mismas (Bransford y Johnson, 1973).

El propio Jonhson-Laird (1983) hace una reflexión sobre el problema que plantean las teorías de comprensión que únicamente utilizan el formato proposicional para la representación textual; ya que considera que la comprensión del significado global del texto quedaría reducida, únicamente, a relaciones de tipo referencial entre dichas proposiciones. Por lo tanto este autor considera que los modelos mentales se elaboran a partir del nivel proposicional del discurso y suponen, siempre, una mayor profundidad en la comprensión.

La construcción de un modelo mental del discurso se lleva a cabo, por tanto, a medida que se va procesando la información del texto o del discurso (Glenberg, Meyer y Lindem, 1987); en este sentido, una propiedad característica de los modelos mentales es que incluyen más información que la que el propio texto contiene en relación con los objetos, acciones y representaciones descritas. Así, en el curso de la comprensión, las representaciones proposicionales construidas en el análisis lingüístico dan lugar a un proceso de traducción cuyo resultado es la formación de un modelo mental del discurso (van Dijk y Kintsch, 1983; Perring y Kintsch, 1985). Este proceso de traducción finaliza, de acuerdo con Johnson-Laird (1983), en la activación de alguno de los procedimientos que se reseñan dependiendo del conocimiento previo, de la referencia de las expresiones y del contexto que se representa en el modelo del discurso vigente.

En este sentido, van Dijk y Kintsch (1983) señalan tres argumentos a favor relacionados con la obtención de la coherencia global del discurso: la referencia, que apela a que lo que resulta cognitivamente relevante no es el texto en sí, sino el modelo mental construido por el lector sobre la situación que describe el texto; la correferencia, que da cuenta de que las expresiones que aparecen en un texto no se refieren a otras expresiones del mismo texto, sino a los elementos que forman el modelo mental; y, por último, la coherencia, ya que mediante el modelo mental el lector puede conseguir establecer relaciones no explícitas en el texto y conectar elementos, de forma que se logre la coherencia global de dicho texto.

Por otra parte, Luque, García Madruga, Gutiérrez, Elosúa y Gárate (1999) sintetizan una serie de argumentos que determinan la necesidad y la realidad de dichos modelos mentales:

- Muchas veces el lector puede rellenar lagunas de información que aparecen en el texto acerca del lugar, tiempo,... a través del modelo mental.
- Mediante el modelo mental, el lector, puede reordenar los hechos narrados de acuerdo a sus conocimientos previos o según el orden que puedan tener.
- El modelo mental se convierte en un punto de referencia para las diferentes perspectivas que se pueden plantear en un texto.

- La traducción de textos a diferentes lenguas supone hacer explícitos los modelos mentales subyacentes que dan significado global al texto.

- Si bien ante una misma información, dos personas la pueden interpretar de diferente forma, pone de manifiesto la importancia del modelo mental; ya que la representación superficial sería la misma.

- Los textos suelen ajustarse a la audiencia a la que se destinan, de manera que cuando nos dirigimos a niños, es más probable que intentemos hacer más explícito nuestro modelo mental para explicarnos con mayor claridad.

- Cuando un lector recuerda un texto no recuerda las expresiones literales del mismo, sino su esencia semántica representada en el modelo situacional.

- La solución de problemas está basada en la construcción mental del texto de tipo global u de carácter semántico, y es en ella en donde se demuestra el aprendizaje que ha realizado el lector.

- Los sujetos, cando integran la información, lo hacen desde diferentes fuentes tanto textuales como no textuales y pueden actualizar su modelo mental cuando reciben nueva información.

Ahora bien, cabe preguntarse si en realidad un modelo mental es lo mismo que un esquema cognitivo. Según De Vega, Díaz y León (1990), habría que tener en cuenta dos aspectos importantes. En primer lugar, los modelos mentales son construcciones de tipo episódico que representan conocimiento individual sobre determinados personajes, acciones, metas, entorno, etc. mientras que los esquemas son paquetes de conocimiento genérico y estereotipado que no se corresponden con la experiencia particular sino que se abstraen en base a un conjunto de experiencias análogas. En segundo lugar, y como otra de las diferencias fundamentales, podemos señalar aquélla que radica en su capacidad para explicar las inferencias temáticas, ya que éstas no siempre son tan estereotipadas como las que se podrían derivar del conocimiento de tipo esquemático, sino que con frecuencia, son "inteligentes" y se asemejan más a una simulación mental de estados físicos del mundo, o incluso, a una resolución de problemas.

Lo cierto es que entre modelo y esquema mental podría existir algún tipo de conexión, ya que es probable que los esquemas se abstraigan a partir de modelos mentales análogos o, también, que éstos se elaboren a partir de contenidos esquemáticos.

2.4.- LAS ESTRUCTURAS DE CONOCIMIENTO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS: EL PAPEL DE LA MEMORIA SEMÁNTICA

En este contexto destaca la importancia que las distintas investigaciones han dado al papel desempeñado por la memoria, en concreto la memoria semántica Gullick, Sprute y Temple, 2011; Raghubar, Barnes y Hecht, 2010; Toll y Van Luit, 2013).

Antes de analizar el papel de la misma, consideramos necesario realizar una breve revisión a los planteamientos teóricos sobre el funcionamiento de la memoria de cara a contextualizar el papel de la memoria semántica en el objeto de estudio de la presente investigación.

De acuerdo con González- Pienda y Núñez Pérez (2006) desde el actual modelo de procesamiento de la información se pueden encontrar dos tipos de explicaciones respecto al funcionamiento de la memoria: la explicación estructural (organizativa) y la procesual (funcional).

El modelo *estructural* (Atkinson y Shiffrin, 1968, 1971; Wauhg y Norman, 1965) explica el funcionamiento de la memoria al considerarla como una estructura formada por tres almacenes que se encargan de recoger, traspasar y almacenar las informaciones, a saber: AIS (almacén de información sensorial, que se encarga de almacenar la información que entra por nuestros sentidos), MCP (memoria a corto plazo, que se encarga de retener la información proporcionada por el AIS) y la MLP (memoria a largo plazo, donde se almacena la información de un modo más o menos permanente). Este modelo estructural defiende que la información que el sujeto recibe del medio sigue una ruta fija a través de los diferentes almacenes que componen la memoria. Para Atkinson y Shiffrin (1968) la información procedente de los sentidos se procesa a través del almacén sensorial durante un breve período de tiempo, que oscila entre los 100 y los 500 msgs. Este almacén sensorial transmite la información a un almacén a corto plazo, cuya capacidad de almacenamiento se limita a 15-30 sg. Esta capacidad limitada en tiempo también lo es en el espacio, pudiéndose almacenar alrededor de 7^{+}- 2 unidades o items (chunks, en inglés)

(Miller, 1956). De este almacén a corto plazo (MCP) la información relevante pasaría al denominado almacén a largo plazo (MLP), almacén con capacidad de almacenar información de forma ilimitada, tanto en el tiempo como en espacio.

El modelo *procesual*, por otro lado, tiene su origen en el modelo de niveles de procesamiento de Craik y Lockhart (1972) y supuso una alternativa al modelo estructural. La explicación procesual analiza y examina los procesos de codificación que se realizan sobre la información señalando que esta información se codificará de un modo superficial o profundo en función de los estímulos a procesar y del tiempo disponible para su procesamiento. Desde esta explicación se defiende que lo que determina el recuerdo a largo plazo es la naturaleza de los procesos de codificación que tienen lugar en la memoria a corto plazo, entendiendo que estos procesos de codificación consisten en actividades de percepción y comprensión que el sujeto realiza durante sus experiencias (González-Pienda y Núñez Pérez, 2006).

Tal y como se va a ver más adelante, un rasgo importante de este modelo es que considera la memoria como un sistema organizado en una jerarquía de niveles de análisis que va de menor a mayor profundidad. A partir de este modelo también vamos a encontrar que el término memoria a corto plazo (MCP) se va a sustituir por el de memoria de trabajo u operativa (MOCP). Así, mientras que el término MCP se refiere al tiempo o a la duración de la información en la memoria, el término MOCP se refiere al lugar donde se efectúan las operaciones mentales de un modo consciente (y estratégico) destinadas a retener la información que necesitamos en cada momento.

De acuerdo con Tulvin (1972, 1983) la información que se almacena en la MOLP posee diferentes características, lo que nos lleva a diferenciar entre una *memoria episódica*, también denominada memoria experimental, y otra información más esquematizada denominada *memoria semántica*. Así, cuando un aprendizaje se ha realizado de un modo vivo y activo (es decir, cuando se ha experimentado) la información se graba en la memoria episódica de una manera muy detallada; por el contrario, si ese aprendizaje se ha realizado de forma más teórica y receptiva, las informaciones se van a simplificar, esquematizar y generalizar a situaciones diversas, favoreciendo entonces su almacenamiento en la memoria semántica. Es decir, el almacenamiento de la información en la MOLP va a depender del nivel de análisis o de procesamiento que el sujeto realice; nivel de procesamiento superficial, que se basa en una elaboración sensorial, o un nivel más profundo, que se basa en el análisis del significado y que es, por tanto de carácter semántico. Es a este tipo de memoria a largo plazo a la que vamos a dedicar el presente capítulo. En concreto nos centraremos en el papel de la Memoria Semántica.

Para Resnick y Ford (2008), y coincidiendo con lo expuesto anteriormente, en las actuales teorías del aprendizaje se entiende por memoria semántica la memoria a largo plazo en la que se almacena todo lo que sabe el individuo, de forma permanente y durante tiempo ilimitado. El problema que surge es tratar de explicar cómo se almacena la información y cómo puede afectar la forma de almacenarse a nuestra comprensión.

Una posibilidad es que se considere la memoria semántica como una lista en la que se almacenan todas las informaciones. Sin embargo, la actual teoría del procesamiento de la información desecha este argumento ya que en caso de querer recuperar la información sería preciso recorrer mentalmente toda la lista de "recuerdos" hasta encontrar el ítem (la información) deseado. Es evidente que la lista de recuerdos sería enorme y la gente no podría recuperar la información con la rapidez suficiente, sería un trabajo agotador, poco eficiente y además no explicaría cómo los seres humanos somos capaces de hacer inferencias. Por si estos fuesen pocos argumentos, en un supuesto de que se olvidase un "item" o se confundiese con otro de la "lista", sería imposible, en un modelo de búsqueda secuencial pura, que el individuo fuese capaz de "deducir" cuál sería el item perdido, o de reconstruir información nueva.

Para que la psicología del procesamiento de la información sea capaz de explicar las capacidades de los seres humanos de comprender, de generalizar y de inventar, es preciso que recurra a un concepto más rico y complejo sobre cómo almacenan y recuperan el conocimiento los seres humanos. Para explicar esta compleja gama de habilidades humanas (almacenar y recordar información y realizar deducciones) parece claro que debemos concebir nuestras memorias (nuestros almacenes de conocimiento) y nuestro conocimiento como organizadas y estructuradas (Anderson, 1976; Anderson y Bower, 1978; Norman y Rumelhart, 1975);

un punto de vista de la memoria parecido, en cierto sentido, al modelo gestáltico de la mente humana y similar a las concepciones asociacionistas.

Cuando los teóricos de la memoria semántica hablan de cómo se organiza el conocimiento, tienden a hacerlo en términos de *estructuras del conocimiento* específicas (Collins y Quillian, 1969, 1972). La estructura se compone de unidades, y cada unidad tiene ciertas propiedades asociadas que se relacionan, a su vez, con otras unidades formando un complejo entramado. Esta estructura presenta unas características particulares en forma de red que coloca ciertos elementos del conocimiento en posiciones centrales o "nodulares" que hacen que el conocimiento se organice en bloques interrelacionados. De acuerdo con Resnick y Ford (2008) las uniones entre elementos de la red no son muy diferentes de los "vínculos" de Thorndike.

En este modelo, estas unidades y propiedades están ordenadas de forma jerárquica; pero lo que los teóricos se preguntan es si estas unidades están ordenadas verdaderamente de forma jerárquica en la mente humana. La mayoría de los modelos de memoria semántica especifican redes de asociaciones que no están organizadas necesariamente en jerarquías estrictas.

Además, en este modelo (al igual que todos los modelos de memoria semántica actuales) la asociación se basa en una relación particular entre las diferentes unidades, de manera que el número de relaciones posibles es finito. Esto implica que el conocimiento no puede limitarse a asociaciones de simple contigüidad o cercanía (Humphreys, Murray y Maguire, 2009; Kuchinke, van der Meer y Krueger, 2009).

La teoría semántica del conocimiento puede explicar, por ejemplo, que las personas duden o tarden más en contestar a preguntas o a hacer afirmaciones en determinados casos (véase Resnick y Ford, 2008), y esto lo explican apoyándose en que a mayor "distancia" entre conceptos, más tiempo se tardará en decidir si existe una relación entre los mismos. También puede explicar cómo las personas son capaces de hacer deducciones e inferencias a partir de items e unidades de la red sin que los sujetos tengan que recurrir a todos estos items, ya que la mente humana puede elaborar conocimiento (o lo que es lo mismo descubrir nuevas relaciones entre conceptos) además de recibir conocimiento a partir de sucesos del entorno.

Por lo tanto, según las teorías de la memoria semántica, la mente humana es una registradora activa de las asociaciones externas; o lo que es lo mismo, el cerebro humano puede estructurar el conocimiento de formas significativas, es algo más que una simple colección desordenada de elementos de información. No es casualidad el cierto parecido de esta concepción con las de Bruner, Piaget y los teóricos de la Gestalt, en el sentido de que los psicólogos que están desarrollando modelos de memoria semántica están buscando explicar (en términos de modelos expresados de forma rigurosa) algunas de las características del pensamiento humano que advirtieron algunos de los primeros teóricos: 1) se adaptan específicamente al contenido del campo del conocimiento que se estudia; 2) pueden incluir a la vez reglas de acción y relaciones conceptuales dentro de las mismas redes. Es debido a estas características que los modelos de memoria semántica permiten la asociación teórica de los procedimientos de cálculo y de los principios que subyacen en dichos procedimientos (véanse estudios de las "redes de procedimientos" en Brown y Burton, 1978; Greeno, 1978; Ruiz-Contreras y Cansino, 2005).

Los modelos de memoria semántica (en términos neoasociacionistas de las redes semánticas) parecen explicar en gran medida, al menos por el momento, lo que se conoce por *estructura* en el pensamiento matemático. Si bien en un principio el trabajo de la memoria semántica ha tenido un contenido más lingüístico y psicolingüístico que matemático, no es menos cierto que actualmente ha sido adoptado en este campo con la finalidad de ayudarnos a conocer qué tipo de conocimientos serán más fáciles de aprender, de utilizar e recordar (Alonso y Fuentes, 2001).

La Figura 1 muestra dos elementos o "nódulos" (multiplicación y división) con sus posibles estructuras de conocimiento. Por "nódulos" entendemos los conceptos centrales que se asocian con un determinado número de conceptos. En este sentido y conforme a las estructuras que aparecen en la figura, la multiplicación se define como una operación de "n veces" (x n). La operación **x n** tiene un *objeto* (la cantidad sobre la que se ejecuta la operación), en este caso la cantidad **m**, y esto nos da un *resultado*, la cantidad **mn**. Por otro lado, la división también se define como una operación (: n) y esta operación **:n** también tiene objeto **mn** y resultado **m**. Pues bien, esta figura representa la estructura de conocimiento de un sujeto que conoce la multiplicación y la división pero que no comprende la relación inversa que se establece entre ambas. Tal y como puede verse, las estructuras de la multiplicación y de la división no están unidas.

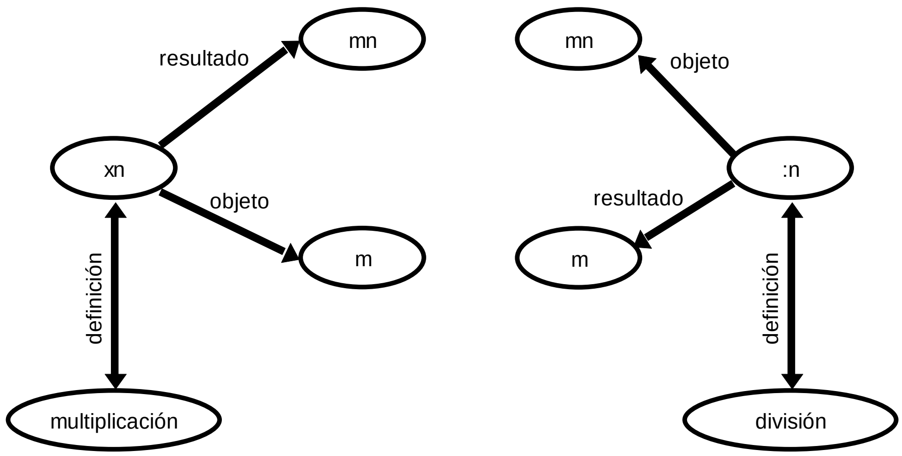

Figura 1. Estructura de conocimiento para la multiplicación y la división en sujetos que no comprenden la relación entre ambas reglas aritméticas (adaptado de Resnick y Ford, 2008).

Para comprender que la multiplicación y la división son operaciones inversas la una con respecto a la otra es necesario reconocer que existe una relación especial entre ellas, concretamente entre las cantidades objeto y las cantidades resultado de ambas operaciones. Concretamente, si multiplicamos una cantidad por algún número (llamémosle **n** para seguir con el ejemplo expuesto en la Figura 1) y luego dividimos el resultado por el mismo número (n) llegamos nuevamente a la cantidad original. Cuando un sujeto llega a comprender esta relación entre la división y la multiplicación comprende que la cantidad resultado de una operación no es ni más ni menos que la cantidad objeto de la otra. Esta comprensión se representa en la Figura 2; ahora las estructuras de conocimiento de la multiplicación y de la división están unidas, y la estructura total se simplifica con dicha unión.

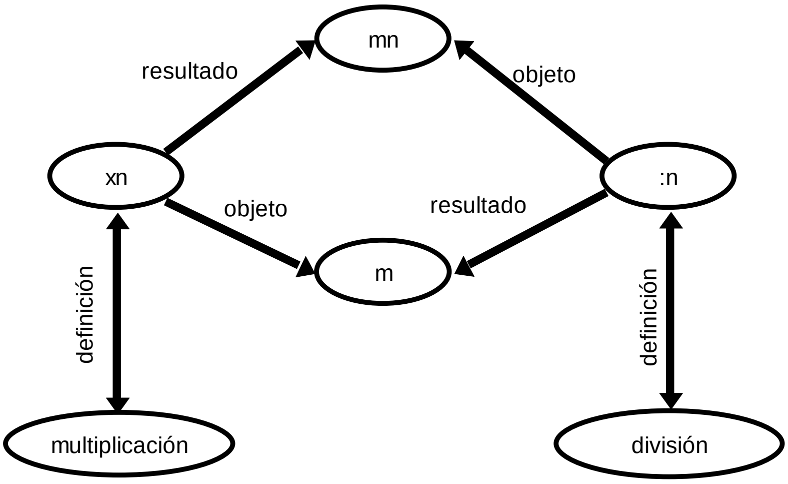

Figura 2. Estructura de conocimiento que relaciona multiplicación y división (adaptado de Resnick y Ford, 2008).

Es evidente que aunque estas teorías de la memoria semántica se basan en el asociacionismo de vínculos e ideas, van un poco más allá, ya que cada conexión supone una relación particular entre elementos, y a su vez estas relaciones implican diferentes formas de utilizar las conexiones. Los items de la memoria (y las ideas) no están simplemente "conectados" entre sí, están relacionados de formas significativas y definibles. Además, otro aspecto de esta visión de conocimiento que se ilustra aquí es que todo ítem de la memoria es un "nódulo" de una gran red, con la posibilidad de tener varias conexiones a partir de una misma operación.

Lo mismo se podría extrapolar para la suma y la resta ya que son operaciones inversas donde cada una tiene una cantidad objeto y una cantidad resultado; de manera que ambas operaciones, al igual que ocurría con la división y con la multiplicación, están directamente relacionadas. Además, si tenemos en cuenta que la multiplicación no es ni más ni memos que la suma de un número repetido "n veces", y que la división no es sino una resta repetida también “n veces”. Una persona que posea una estructura conceptual aritmética bien desarrollada podría llegar a establecer una red que relacionase las cuatro reglas aritméticas (Figura 3).

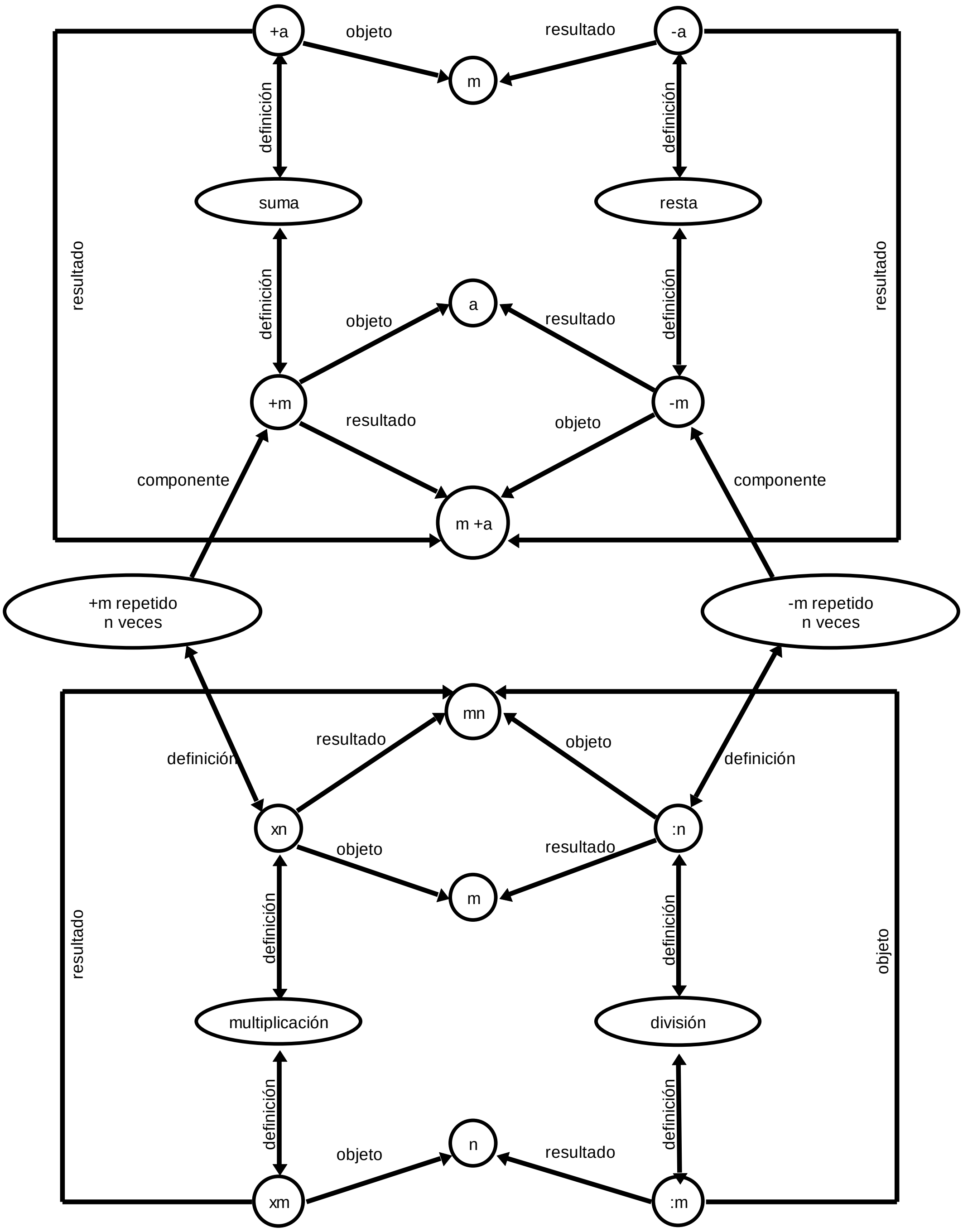

Figura 3. Estructura de conocimiento integrado con relación a las cuatro reglas aritméticas (adaptado de Resnick y Ford, 2008).

Resnick y Ford (2008) argumentan que esta Figura 3 se podría ampliar con muchos más conocimientos (elementos) sobre las operaciones aritméticas y sus interrelaciones; al ir aumentando el conocimiento conceptual de la aritmética de un sujeto también crecería el número de relaciones de unión en nuestra representación estructural. Sin embargo estos autores afirman que sólo se añadirían unos pocos nódulos más, ya que llega un momento en el que aprender "más" supone la adquisición de un conocimiento más organizado y relacionado, más que la presencia de un número mayor de unidades de información desarrollándose estrategias de alto nivel (conocimiento procedimental). Por lo tanto, la persona cuyo conocimiento pudiese representarse por la estructura de la Figura 2 sabe más aritmética que la persona que se representa en la Figura 1. Sin embargo la estructura de la Figura 2, a pesar de lo que pueda parecer, es más sencilla, porque el conocimiento ha permitido que los mismos "nódulos" o elementos de información ocupen menos espacio en la memoria al funcionar a la vez en los sistemas de conocimiento de la división y de la multiplicación.

Lo mismo pasaría en un sujeto cuya estructura de conocimiento se pudiese representar como la Figura 3. Su conocimiento aritmético sería mayor que el de un sujeto que supiese emplear las cuatro reglas aritméticas pero cuya estructura de conocimiento se representase con cuatro redes independientes, es decir, una estructura para cada regla aritmética.

Así pues, de lo que se trataría sería de que la enseñanza de las matemáticas tuviese como objetivo el de ayudar a los estudiantes a adquirir un conocimiento "bien estructurado" de dicha materia. Pero ya que es imposible observar directamente los diagramas de red en las mentes de las personas, las estructuras de conocimiento se pueden deducir a partir de sus conductas. Mediante diferentes métodos de investigación (las medidas de latencia de respuesta, los estudios de formaciones de errores y el análisis de protocolos de actuación, y pensar en voz alta) los investigares están tratando de deducir las estructuras del conocimiento de las personas.

Sin embargo es preciso saber qué se entiende por conocimiento bien estructurado. Greeno (1978) ha indicado tres criterios que se nos pueden servir para evaluar el grado de comprensión que se refleja en un sistema semántico: 1) la integración de la representación; 2) el grado de conexión de la información con los conocimientos que ya posea la persona; y 3) la correspondencia de la representación con el material que se debe comprender. Analicemos un poco más en detalle a qué nos estamos refiriendo.

Estimación de la integración: Hace referencia al grado en que se asocian entre si los conceptos de la red. Un sujeto con un conocimiento bien estructurado implica que los conceptos que conforman su red semántica se asocian de formas ricas y ordenadas (Tirapu-Ustárroz y Muñoz-Céspedes, 2005). De acuerdo con Larkin (1977) la información que se agrupa alrededor de un concepto organizador o “nódulo” se denomina “bloque” (chunk). Según la teoría de las redes semánticas, el tiempo de acceso se relaciona con el número de conexiones que se tienen que recorrer hasta llegar a un concepto determinado, o bien con el tiempo necesario para descubrir la relación entre dos o más conceptos. Por tanto, cuanta más información posea un sujeto alrededor de sus nódulos, o lo que es lo mismo, cuanta más información conforme cada bloque, menor será el tiempo de respuesta de un sujeto a una pregunta relacionada con ese concepto en concreto (por ejemplo en una tarea de recuerdo libre cronometrada), ya que el tiempo necesario para relacionar el concepto nodular con la información que lo complementa será menor.

Consecuentemente, parece lógico pensar que el paso de “principiante” a “experto” en un tema o materia estaría supeditado a la capacidad de aquéllos para formar bloques con las informaciones o ideas acerca de esa materia o tema. Por lo tanto se podría estimar el progreso de un estudiante en el aprendizaje examinando sus pautas temporales de recuerdo y buscando muestras de si la información que posee el sujeto se organiza en bloques, lo que indicaría, por extensión, que el conocimiento estaría integrado. Sin embargo la teoría de Larkin no nos permite más que afirmar que efectivamente la información que almacenan las personas se organiza en bloques, pero no nos indica qué ideas o items pertenecen al mismo bloque. A pesar de que los principiantes pueden dar muestras de que sus pautas de recuerdo forman cada vez más bloques (como en el caso de los que “chapan o empollan” para un examen) es obvio que seguirán sin igualar las pautas de contenido del conocimiento de los expertos. El hecho de que el conocimiento se estructure efectivamente en bloques y se creen las relaciones oportunas entre las diferentes informaciones (por ejemplo cuando un estudiante utiliza reglas mnemotécnicas que le permiten establecer asociaciones entre diferentes items) no garantiza el ser experto en ese tema mientras el sujeto no sea capaz de descubrir los vínculos característicos del pensamiento de los expertos en esa materia (Resnick y Ford, 2008).

Estimación de la correspondencia: Resnick y Ford (2008) sostienen que las medidas de la integración sólo resultan útiles cuando disponemos también de algún medio para estimar la correspondencia de las estructuras del conocimiento de los estudiantes con la estructura del contenido que se les está enseñando. También es posible comparar en este sentido las estructuras de los principiantes con las de los expertos prestando atención a qué conceptos se agrupan y a qué relaciones se expresan. Shavelson (Shavelson, 1974; Shavelson y Stanton, 1975) y Gesling (1973, 1974) han desarrollado una serie de estrategias (tests de asociación de palabras, de elaboración de gráficos y de ordenación de tarjetas) como métodos para determinar el ajuste de las estructuras cognitivas de los individuos a la estructura del contenido representada por los enseñantes y por los libros de texto.

De estos estudios se comprobó que en el transcurso de la enseñanza las agrupaciones de conceptos en la memoria de los estudiantes (principiantes) se iban pareciendo más a las agrupaciones que poseían los profesores (expertos) así como a las agrupaciones de conceptos expresadas en la estructura del material pedagógico.

Por otro lado, las investigaciones de Thro (1978) con estudiantes y profesores de la Facultad de Física también demostraron que las agrupaciones mentales de conceptos de los estudiantes tendían a asemejarse a las de los profesores en el transcurso del tiempo en los tests de asociación de palabras. Pero además, de estos estudios, Thro descubrió que los estudiantes que obtenían mejores resultados en los problemas de física tenían, a fin de curso, estructuras cognitivas que se ajustaban más a las del profesor. Esto nos lleva a pensar que el grado de correspondencia entre una estructura de conocimiento y las estructuras formales de contenido está asociado directamente al rendimiento en la ejecución de problemas semialgorítmicos. Sin embargo, de acuerdo con Resnick y Ford (2008), esta relación entre las medidas de asociación de palabras y la capacidad de resolver problemas no puede establecerse con firmeza.

Estimación de la conexión: Parece que no podemos basarnos completamente en las medidas de asociación a la hora de estudiar las estructuras cognitivas; también es necesario, desarrollar formas de deducir las estructuras de conocimiento, bien a partir de las actuaciones en la resolución de problemas o cuando se les pide a los sujetos que expliquen las bases de su actividad en la resolución de problemas. Si bien estos métodos son difíciles de cuantificar pueden tener una importancia capital a la hora de asociar el conocimiento de procedimientos con el conocimiento conceptual, y consecuentemente, constituirá una forma de estudiar los grados de conexión, así como la integración y la correspondencia de las estructuras de conocimiento de las personas (Cowan, 2014; Resnick y Ford, 2008,).

2.4.1.- Utilización del conocimiento y de las estrategias en la resolución de problemas.

Las actuales teorías del procesamiento de la información conciben que la mente humana posee, además de estructuras de conocimiento, un repertorio de *estrategias* de resolución de problemas que ayudan a interpretar los problemas, a localizar el conocimiento y los procedimientos almacenados porlas redes y a generar nuevas relaciones entre los diferentes items de la memoria (Pozo, del Puy, Domínguez, Gómez y Postigo, 1994). Estas estrategias organizan el proceso de pensamiento y recurren a diversos componentes del conocimiento para preparar un plan de acción que permita resolver la tarea planteada. Por eso, para explicar la resolución de los problemas matemáticos es necesario considerar tanto los tipos de rutinas algorítmicas que son capaces de ejecutar, como las estrategias que poseen para acceder a sus conocimientos, para establecer y detectar relaciones así como para elegir entre las acciones disponibles. Por ello, es necesario analizar tres estrategias que van a ser fundamentales en la resolución de problemas matemáticos: 1) representación del problema; 2) el entorno de la tarea; y 3) instrucciones de la tarea.

1.-Representación del problema.

En cualquier situación de resolución de problemas es conveniente, como primera estrategia, elaborar la representación de los mismos, es decir, advertir las características del problema y codificarlas de tal manera que sean más fácilmente interpretables para el sujeto. Cuando se ha elaborado una representación del problema, la probabilidad de que se lleve a cabo una resolución correcta del mismo depende de si la persona que lo resuelve posee en la memoria un conjunto de procedimientos adecuados al problema. Por ejemplo, en la mayoría de problemas que requieren soluciones algorítmicas, una vez que se ha llegado a una representación se puede decir que ya se ha efectuado la parte más importante del trabajo intelectual.

El propio Bruner (1964) ya formaba parte de un creciente número de psicólogos norteamericanos que, a mediados del siglo pasado, protagonizaron un resurgimiento del interés por los *procesos cognoscitivos* propios del pensamiento y del aprendizaje humanos, es decir, por “los medios por los que los organismos, consiguen, retienen y transforman la información” (Bruner, Goodnow y Austin, 1956). Sobre este fondo de experimentación con adultos en situaciones de laboratorio, Bruner decidió examinar los procesos cognoscitivos de los niños, y se preocupó especialmente de cómo representaban los niños los conceptos e ideas que iban aprendiendo.

Bruner afirmaba que lo más importante de la memoria no es la capacidad de almacenamiento de la experiencia pasada, sino la recuperación de lo que es relevante, en un formato que sea lo más operativo y utilizable posible. Esto va a depender de cómo se codifica y procesa la experiencia anterior, para que pueda ser relevante y aprovechable en el presente cuando se necesite. El producto final de tal sistema de codificación y procesamiento es lo que se puede llamar representación.

En este sentido Bruner describe tres modos de representación: enactiva, icónica y simbólica. La representación *enactiva* es “un modo de representar eventos pasados mediante una respuesta motriz adecuada" (Bruner, 1964, pag. 2). Por ejemplo, cuando los niños pequeños resuelven problemas sencillos de sumas dándose con los dedos en la barbilla o en la mesa en lo que evidentemente es una tarea de conteo, se supone que este movimiento de conteo se corresponde con un acto motriz. Esta tarea de conteo también se puede llevar a cabo mediante el empleo de diferentes recursos (también llamados materializaciones) que facilitan la realización de determinadas operaciones matemáticas y cuya finalidad no es otra que la de materializar de forma concreta las estructuras matemáticas. Entre estos recursos están *los bloques de Dienes* (o bloques aritméticos multibase), *los bloques de atributos*, *las varas de Cuisenaire*, etc.

La representación *icónica* (o visual) supone un paso de lo concreto y de lo físico para entrar en el terreno de las imágenes mentales. Para Bruner la representación icónica es lo que sucede cuando un niño se imagina una operación como forma no sólo de recordar el acto, sino de recrearlo mentalmente cuando sea preciso. Tales imágenes mentales no incluyen todos los detalles, sino que expresan únicamente los más importantes. Un ejemplo de representación simbólica sería el dibujar o el hacer pequeños esquemas que faciliten la resolución de determinados problemas matemáticos.

La representación *simbólica*, que para Bruner es la tercera manera de capturar las experiencias en la memoria, es posible gracias a la aparición de la competencia lingüística. De acuerdo con Resnick y Ford (2008) la simbolización es importante porque eleva la actividad matemática a un plano superior, ya que se supone que hasta este momento las experiencias se han registrado como manipulaciones físicas (representación enactiva) o imágenes mentales de las manipulaciones y de sus resultados (representación icónica). Cuando hablamos de símbolos nos referimos a palabras o marcas que representan algo pero que no tienen que parecerse necesariamente a esa cosa. Los símbolos se inventan para referirse a ciertos objetos, sucesos e ideas, y sus significados se comparten principalmente porque hay un consenso entre los usuarios de estos símbolos. Cuando los niños empiezan a escribir las operaciones matemáticas utilizando símbolos (números, signos de operación como +, -, =,...) están capacitados para representar simbólicamente lo que aparece en un texto, en un enunciado o en una representación icónica, así como para "leer" dichas anotaciones matemáticas. Pronto empezarán a pensar en sus ejecuciones en términos de los mismos símbolos, lo que les abrirá las nuevas posibilidades del pensamiento abstracto. De hecho, la transición a la representación simbólica debe permitir que estas imágenes se lleguen a evocar por los símbolos matemáticos que aquéllas llevan asociados (Dienes, 1963). Al aplicarse los símbolos, las experiencias matemáticas se liberan de sus referentes concretos y se convierten en herramientas que permiten nuevos tipos de manipulaciones mentales.

Para Bruner, estos tres modos de representación se relacionan entre sí evolutivamente, ya que se van a desarrollar en ese orden, de manera que cada modo va a depender del anterior y va a exigir mucha práctica para cada tipo de representación antes de que se puedan avanzar al modo siguiente. Los trabajos de Bruner (Bruner, 1964, 1966) sirvieron para afirmar que si la mente humana se desarrolla en el orden enactivo-icónico-simbólico también sería lógico que estos conceptos, en el aula, se enseñen siguiendo ese orden. Así Bruner (1966, pag. 44) afirma que “toda idea o problema o cuerpo de conocimientos se puede representar de una forma lo suficientemente sencilla como para que cualquier estudiante determinado lo pueda comprender de forma reconocible”.

Ahora bien, las acciones, las imágenes y los símbolos tienen diferentes niveles de dificultad y de utilidad para las personas de edades diferentes, entornos diferentes, estilos diferentes, etc. Además, cada forma de representación va a ser más apropiada para ciertos problemas y situaciones que otras; por ejemplo, mientras que un problema de derecho sería difícil de representar icónicamente, probablemente sea la ésta la forma más idónea para representar un problema de geografía. En el caso de las matemáticas, las posibilidades que nos ofrecen los tres tipos de representaciones nos obligan a escoger el modo de representación más apropiado para cada momento.

2.-El entorno de una tarea.

El entorno de una tarea hace referencia a todos los elementos de la tarea que están disponibles y son percibidos por la persona que intenta resolver el problema, en otras palabras, el entorno de la tarea hace referencia a los datos del problema.

Es obvio que los problemas se pueden presentar de múltiples formas: físicamente (con bloques, figuras, etc.), en forma de diagrama (utilizando gráficos, esquemas, dibujos, etc.), verbalmente (en los problemas orales) o simbólicamente (por escrito, ya sea con letras o símbolos). Lo más corriente es que los problemas se presenten de forma combinada mezclando esquemas, símbolos, etc. Lo que sí que está claro es que el planteamiento del problema, cualquiera que sea su forma, proporciona los datos brutos a partir de los cuales nuestra mente puede elaborar una representación del problema. Esta representación va a determinar, a su vez, la estrategia más apropiada para su resolución.

El entorno de la tarea es un poderoso factor determinante de la gama de estrategias que puede aplicar la persona que resuelve un problema (tal y como demuestran los experimentos sobre la fijación funcional, línea de investigaciones que surge de la labor de la Gestalt sobre el papel del *insight* en la resolución de problemas). Mientras que unos estímulos del entorno de una tarea pueden inspirar estrategias de resolución habituales con éxito, otros puede que impliquen justamente lo contrario; esto es debido a que el entorno de la tarea está compuesto tanto por los elementos objetivos de la tarea (incluidas las instrucciones o el enunciado de la tarea) como por los elementos físicos de la misma (dibujos, diagramas u objetos concretos)

3.-Instrucciones de la tarea.

Las instrucciones de la tarea pueden tener una eficacia especial, bien como ayuda a la resolución del problema, bien como disuasión de la misma, dado su poder de generar representaciones. Las instrucciones de la tarea establecen esquemas de aprendizaje o representaciones mentales totalmente diferentes del problema en cuestión (véase Katona, 1940).

Para Resnick y Ford (2008) las instrucciones que facilitan la elaboración de una representación rica inspirando conceptos aprendidos de antemano, tienen un efecto diferente al de las instrucciones que tienden al descubrimiento o a la copia de reglas. Al parecer, hay estudios que demuestran que las diferencias entre las instrucciones de una misma tarea a varios grupos de sujetos implican diferencias en la representación de los problemas y en la tenacidad con que los sujetos se aferran a una u otra representación.

2.4.2.- Estrategias para el análisis de los problemas y la búsqueda de estructuras de conocimiento.

Una vez que el sujeto ha elaborado una representación del problema la probabilidad de que se lleve a cabo una resolución correcta del mismo va a depender de una cosa: de que la persona que lo resuelve tenga en la memoria un conjunto adecuado de procedimientos que se ajusten al problema tal como se presenta. Sin embargo muchas veces los sujetos que tratan de resolver un problema saben que los procedimientos que conocen no sirven para una determinada situación, o que los conocimientos que posee no tienen el nivel necesario para afrontar con éxito la resolución del problema planteado. En este caso, el “problema” puede radicar en el hecho de que no es evidente la correspondencia entre los datos y el conocimiento almacenado, en que la información necesaria para la resolución del problema no está disponible, o bien que el sujeto tenga que recorrer enormes cantidades de información para ubicar la correspondencia. Por ello es frecuente que los sujetos respondan mal a los problemas que se les platean, ya que el estudiante no es capaz de reconocer que una rutina que unas veces le ha dado éxito puede que ahora no sea la adecuada.

Sin embargo, cuando se ha detectado la imposibilidad de aplicar los procedimientos conocidos, existen una serie de estrategias para ayudar a localizar la información almacenada en la memoria semántica o para reconstruir la información que falta a partir de elementos del conocimiento que puede que no estuviesen asociados entre sí.

La estrategia de *generación y ensayo*, por ejemplo, se utiliza cuando sabemos qué tipo de información nos falta pero no que elementos se ajustan al criterio, de manera que si podemos “recorrer” la lista de elementos candidatos y vamos probando (ensayando) cuáles se ajustan al criterio podremos obtener la respuesta. Por ejemplo, si lo que queremos es nombrar todos los números primos entre 1 y 50, probablemente no los sepamos todos de memoria; sin embargo podemos “deducirlos” sabiendo que todos los números pares se pueden eliminar de la lista y, además, todos aquéllos que puedan ser divididos por otro número. En otras palabras, la información sobre la estructura de los números sirve de elemento *heurístico*, de estrategia para reducir el espacio de búsqueda.

La estrategia de empleo de sub-objetivos también va a facilitar la resolución de determinados problemas matemáticos. Cuando un problema no se puede resolver directamente quizás se puede resolver buscando por la memoria conocimientos que permiten ir resolviendo partes del problema. La resolución de estas partes contribuirá a la resolución del objetivo original del problema. La generación de un sub-objetivo implica el establecimiento de una representación intermedia y nueva del problema. Esta representación sirve para reestructurar o replantear el problema, resolviendo partes del mismo con la esperanza de ir acercándose a la resolución completa. En este sentido, los estudios de Larkin (1977) compararon las actuaciones de principiantes y expertos en la resolución de problemas de física; estos estudios pusieron de manifiesto que mientras que los principiantes tendían a resolver los problemas tal y como se les presentaban (es decir, empezando inmediatamente a aplicar los principios conocidos y a establecer ecuaciones), los expertos solían empezar por un análisis cualitativo del problema, reformulando la información que se presentaba en forma de diagrama (o esquemas) antes de elegir las estrategias de resolución. Además comprobó que los expertos tenían mayor habilidad que los principiantes a la hora de descomponer los problemas mediante el establecimiento de sub-objetivos resolubles.

Las investigaciones de Greeno (1978) en el campo de la geometría indican que en las situaciones reales de resolución de problemas los individuos van generando objetivos a medida que avanzan en la resolución del mismo; siempre empezando por el objetivo más próximo al estado de resolución. En caso de que no se pueda satisfacer ese objetivo, los sujetos expertos generan un sub-objetivo e intentan resolverlo, así sucesivamente hasta la resolución total del problema.

Resumiendo, la memoria semántica no sólo es la encargada de almacenar las diferentes informaciones de forma más o menos permanente, sino que permite, además, estructurar el conocimiento de acuerdo a unas jerarquías, es decir, de forma significativa. Esto va a permitir establecer relaciones entre conceptos e informaciones (nódulos), o lo que es lo mismo, generar conocimiento.

El que los sujetos puedan establecer estas relaciones entre conceptos va a permitir economizar capacidad de memoria. Cuanto mejor funcione nuestra memoria semántica mejor se estructurará nuestro conocimiento, más relaciones se podrán establecer entre los diferentes nódulos (conceptos), mejor se podrán integrar y más complejas y ricas serán las redes semánticas. Pero, además, la memoria semántica no sólo va a almacenar y relacionar informaciones, también va a permitir almacenar y recordar una serie de estrategias que vamos a poner en funcionamiento siempre y cuando sea preciso como, por ejemplo, a la hora de comprender, interpretar y resolver un problema matemático (Cowan, 2014; Schleepen y Jonkman, 2012).

2.5.- LA COMPETENCIA LECTORA.

El concepto de competencia lectora es mucho más amplio y menos restrictivo que el de comprensión lectora, ya que esta última no abarca todas las aptitudes, habilidades y destrezas que deben considerarse. Podemos decir, por lo tanto, que el término competencia lectora incluye el anterior.

De este modo la competencia lectora, frente a la simple denominación de lectura, hace referencia al conjunto de habilidades, conocimientos, actitudes y estrategias muy diversas, tanto cognitivas, como lingüísticas, pragmáticas etc.., que adquieren sentido solamente en el uso, en la aplicación en diferentes situaciones y con distintos fines. Es decir, se trata de “hacer algo” con lo que se lee y revisar y valorar lo que se está leyendo.

Debemos considerar que la comprensión lectora es uno de los grandes objetivos a conseguir en la educación primaria. Sin embargo, para conseguir esa comprensión los alumnos deben conseguir antes la suficiente fluidez y velocidad lectora para retener en la memoria operativa la cantidad de elementos necesarios para dotar de sentido las oraciones. A pesar de que estos elementos son necesarios, no significa que una buena fluidez lectora y velocidad adecuada implique niveles óptimos de comprensión del texto.

Un lector competente será capaz de llevar a cabo diferentes procesos: obtener información, comprender un texto, hacer una interpretación del mismo, reflexionar y valorar la forma y contenido del texto etc.…

La obtención de información supone localizar o buscar datos explícitos en el texto. Además también será necesario procesar lo que leemos y darle sentido al texto. Por su parte, la elaboración de una interpretación implica la identificación de ideas e informaciones que no están explicitas en el texto sino que subyacen en el conjunto del mismo. Por último la reflexión y valoración tanto de la forma como del contenido del texto supondrá activar los conocimientos previos del lector para relacionarlos con la nueva información. Del mismo modo el lector deberá evaluar la calidad lingüística del texto y contrastar la información del texto con la adquirida en otras fuentes.

Además de comprender el texto es necesario tomar decisiones sobre que leer, con qué nivel de detalle, si hay que parar de leer algo y pasar a otra sección o si ya hemos obtenido la información que necesitábamos y no es preciso seguir leyendo.

Todas estas situaciones de lectura implican utilizar de forma eficaz los textos para conseguir diferentes propósitos. Esta toma de decisiones resulta la clave para poder establecer una distinción entre comprensión y competencia lectora.

Además de los procesos de comprensión, hay otros procesos psicológicos implicados en las situaciones en las que se requiere competencia lectora. Según Llorents y Cerdán (2012), dentro de los procesos implicados en la competencia lectora incluiríamos los siguientes:

1. Toma de decisiones: la interacción entre el lector y el texto en función de los objetivos del lector, resultan un elemento clave en las situaciones donde se requiere competencia lectora; el lector tiene que tomar decisiones continuamente mientras lee (lectura superficial o detallada, hacer pausas, releer…)
2. Autorregulación: hace referencia a la tarea que llevan a cabo los lectores a la hora de regular su proceso lector en la medida en que sus objetivos se van alcanzando.
3. Implicación: dependiendo de si los objetivos del lector son internos o externos, su implicación en situaciones de competencia lectora va a ser muy importante. La implicación va ligada a las expectativas, autoeficacia y otros constructos psicológicos asociados también a la motivación y que tienen un gran impacto en los objetivos de logro.

Estos tres procesos son interdependientes, por lo tanto podemos decir que el éxito en situaciones de competencia lectora puede verse como el conjunto de los ciclos de comprensión, toma de decisiones y autorregulación mantenidos por la implicación de los lectores con la tarea.

Los aspectos clave en relación a la competencia lectora tienen que ver con el texto, la tarea y el lector. Los procesos básicos de comprensión son imprescindibles para tener una buena competencia lectora. Sin embargo como ya hemos señalado anteriormente además de procesos tales como el parafraseo, realización de inferencias o elaboración de macro ideas, también es necesario poner en marcha otras estrategias como la toma de decisiones, la autorregulación y el compromiso con la tarea (Dörfler, Golke y Artelt, 2009).

Veamos pues, las estrategias que ponen en marcha los lectores cuando se enfrentan a tareas de competencia lectora. Cuando los lectores interactúan con el texto al realizar una lectura tienen dos tipos de recursos: los de información y los de memoria.

Con respecto a los aspectos clave de los que hablábamos antes, los recursos de información se refieren al texto y a la tarea a realizar. Por otro lado, los recursos de memoria hacen referencia al propio lector en cuanto a sus conocimientos previos, la representación mental del texto o la elaboración mental de la respuesta.

Varios estudios que han analizado las estrategias que caracterizan a lectores competentes han llegado a estas conclusiones (Llorens y Cerdan, 2012; Vidal-Abaraca y cols., 2014):

- Los lectores competentes realizan una lectura inicial del texto antes de leer las preguntas. Este proceso favorece a la comprensión final del texto así como a la selección y procesamiento de la información necesaria para resolver las preguntas.

- Los lectores competentes construyen representaciones mentales integradas y coherentes de los enunciados. Es decir, comprenden mejor las preguntas y son capaces de detectar contradicciones en las proposiciones de los enunciados.

- La búsqueda de información en el texto ayuda a los estudiantes a responder correctamente a las preguntas.

- Los buenos lectores llevan a cabo un proceso de búsqueda eficaz de información, dedican más tiempo y esfuerzo a la información relevante y la utilizan para responder a las preguntas que se le plantean.

El primer requisito que el alumno necesita para llevar a cabo la tarea es entender la meta que se le demanda. Esto tiene mucho que ver con la resolución de problemas ya que, estudiantes que tienen dificultades para la integración de ideas, tienen representaciones mentales pobres, lo que les dificulta la resolución correcta del problema. A pesar de que el alumno controle las operaciones aritméticas, una deficiente comprensión de lo que le pide la tarea, hará que le resulte complicado resolver el problema con éxito.

CAPITULO 3.- ENFOQUES COGNITIVOS DE LA INTELIGENCIA: PROCESOS DE DECISIÓN Y RAZONAMIENTO

3.1. INTRODUCCIÓN

Aprender a resolver problemas matemáticos de modo correcto implica no sólo conocer y dominar las operaciones de cálculo (tal y como hemos visto en el Capítulo 1), sino también generar un modelo mental fruto de las experiencias del mundo que nos aproximan esta tarea o una tarea de comprensión lectora (Capítulo 2), además de una capacidad de razonamiento basado no sólo en el mundo real sino también en las relaciones lógicas implicadas en la conexión entre los conceptos necesarios para dicha resolución. Por ello decimos que en el polo opuesto a los problemas realistas están todos aquellos ejercicios que no se asocian a un contexto situacional, sino que sólo necesitan la resolución de operaciones matemáticas en base a un modelo de razonamiento lógico.

Así, Reusser (1998) comprobó cómo los alumnos /as de 5º curso de primaria generan distintos niveles de representación del problema: modelo matemático y modelo situacional; llegando a la conclusión que los alumnos más competentes se benefician más del modelo matemático que del situacional, haciendo uso de este último solamente cuando en el problema hay claves contextuales que faciliten su generación.

La interacción entre conocimiento del mundo y conocimiento de operaciones matemáticas parece que está ampliamente justificada en la literatura existente (Hudson, 1983; Mayer, 1981; Stern y Lehrndorfer, 1992; Vicente, 2006), por ello la justificación de los capítulos anteriores; sin embargo en la presente investigación pretendemos dar un paso más y analizar el papel que desempeña la Inteligencia No Verbal a la hora de resolver problemas matemáticos. Dicho objetivo justifica el presente capítulo, en el que analizaremos los procesos lógicos relacionados con el pensamiento deductivo, inductivo, con la formación de conceptos y razonamiento analógico desde el punto de vista conceptual y evolutivo.

3.2.- CONCEPTUALIZACIÓN

Los procesos de pensamiento lógico han sido abordados desde diversos puntos de vista, tanto científicos como filosóficos desde modelos teóricos clásicos.

En este sentido, diversas y variadas disciplinas como la Lógica (Frege, 1918; Hilbert y Ackermann, 1972; Husserl, 1913; Falguera y Martínez, 1999), la Epistemología (Piaget, 1970; Russell, 1948), la Filosofía de la Mente (Ezquerro, 1995; García Carpintero, 1995; García Suárez, 1995; Vázquez Sánchez, 2007), la Semiótica (Bobes, 1979), la

Filosofía de la Matemática (Russell, 1956) e incluso la Metafísica (Leibniz, 1983) han abordado el fenómeno del pensamiento de la vida mental y del razonamiento humano. Por otro lado, diversas ciencias empíricas, tanto pertenecientes al ámbito natural como al social, se han ocupado, también, de definir, estudiar y analizar los fenómenos mentales en general, y de razonamiento en particular; entre ellas la Psicología del Pensamiento y de la Inteligencia (Bolton, 1972; González Labra, 1998; Wason y Johnson-Laird, 1972), la Psicología del Desarrollo Intelectual (Donaldson, 1979; Piaget, 1923, 1933, 1952, 1953, 1964, 1967; Vygotsky, 1934) la Neuropsicología del Lenguaje (Ellis y Young, 1988; Goldstein, 1948; Goodglass y Kaplan, 1983; Kaplan, 2003; Luria, 1974, 1975, 1980, 1995) y de las Funciones Ejecutivas (Blanco y Aguado, 2002), diversos desarrollos en el ámbito de las Neurociencias Cognitivas (Gazzaniga, 1994), además de diversas ramas de las actuales Ciencias de la Computación y la Cibernética, como la Teoría de las Redes Neuronales (Armentrout, Reggia y Weinrich, 1994) o la Inteligencia Artificial (Schank y Abelson, 1977).

Los numerosos autores provenientes del campo de la Filosofía se han ocupado de los procesos lógicos y del razonamiento mucho antes de que la Psicología se configurase como ciencia empírica a partir del último tercio del siglo XIX. En este sentido, filósofos como Aristóteles o Filón de Megara en la Antigüedad Clásica, Alberto Magno y Ramón Llull en el Medievo o Leibniz en la época posterior al Renacimiento, contribuyeron a desarrollar la Lógica como una ciencia descriptiva y normativa a la vez, por lo que , en general, fue considerada durante mucho tiempo como una descripción adecuada de las leyes que rigen el pensamiento, tratando, además, de codificar de manera normativa estas leyes con la finalidad de ofrecer un canon de corrección de las actividades intelectuales. No obstante, el desarrollo posterior de la Lógica como ciencia puramente deductiva y de la Psicología como disciplina empírica contribuyó a la eliminación de la mayoría de los presupuestos lógicos de la Filosofía y de las consideraciones gnoseológicas, psicológicas e incluso ontológicas en la Lógica Formal (Agazzi, 1964; Muñoz, 1972).

Además, tal y como se verá posteriormente, el pensamiento lógico y el razonamiento, unidos al método científico, van a ser estrictamente necesarios para la resolución de los diversos problemas que se van a encontrar los seres humanos en su proceso de desarrollo y maduración así como en su necesaria necesidad de adaptarse al medio.

De este modo, pueden considerarse sinónimos (por lo menos hasta cierto punto) los términos “pensamiento lógico” y “razonamiento”, si consideramos que los problemas planteados al ser humano deben ser resueltos con éxito, empleando una metodología racional que tenga en cuenta la situación de partida, el fin perseguido, los medios disponibles y las restricciones del proceder al llevar a término la solución planeada.

Lo cierto es que en Psicología Experimental y del Desarrollo han aparecido autores que se han ocupado de estudiar la relación entre pensamiento natural, capacidad de razonamiento y estructuras lógicas. A modo de ejemplo paradigmático se pueden citar los trabajos de Jean Piaget (1953; 1967), las investigaciones de Wolgang Köler (1921) o de Max Wertheimer (1945).

Sin embargo, tal y como se ha citado anteriormente, este panorama comenzó a cambiar a finales del siglo XIX tras la superación del paradigma conductista dominante, como consecuencia de la aparición de los modelos teóricos cognitivos en Psicología, el desarrollo de las investigaciones en el campo de la Cibernética y la elaboración de la Teoría Matemática de la Información, de manera que al lado de las investigaciones clásicas anteriores, aparecen nuevas teorías que tratan de explicar los procesos de resolución de problemas por medio de operaciones de procesamiento de la información similares a los que utilizan los ordenadores (García, 1993; González, 1998; Hunt, 1968; Miller, Galanter y Pribram, 1960).

En este sentido, de acuerdo con González Marqués (1991) el campo de los procesos de razonamiento y pensamiento lógico se ha venido dividiendo, tradicionalmente, en tres apartados generales: inducción, deducción y resolución de problemas; división ésta de acuerdo a la estructura lógica y, en algunos casos, de los requerimientos cognitivos de las diferentes tareas planteadas. Este autor considera, en línea con las hipótesis taxonómicas de Johnson-Laird (1991), que la diferencia entre estos tipos de pensamiento Radica en que mientras que la inducción conduce a un conocimiento sólo probablemente verdadero, los procesos deductivos permiten inferir conclusiones verdaderas necesariamente, ya que en el caso de los procesos inductivos habría un aumento de la información semántica del sistema, mientras que la deducción se movería en un ámbito puramente sintáctico que no implicaría el aumento de la información semántica del mismo. Además, propone una clasificación de diversas tareas de pensamiento lógico basada en esta división inductivo vs. deductivo; división en la que no se incluye la resolución de problemas al considerar que englobaría situaciones experimentales con una estructura más compleja y no tan bien especificada como en el caso de la inducción o de la inducción.

Ahora bien, en esta clasificación de tareas experimentales de pensamiento lógico es discutible, en palabras de Blanco Menéndez (2013), el establecer una dicotomía rígida entre inducción y deducción, ya que al incluir las habilidades de clasificación y categorización relativas a la inducción se pasa por alto que a todos estos comportamientos subyace una estructura perteneciente a la lógica de clases (Piaget, 1953), aspecto directamente relacionado con la lógica deductiva (Hilbert y Ackermann, 1973). Además, las tareas de formación de conceptos (tan ligadas al ámbito de la inducción) también participan en gran medida de la deducción, ya que existen numerosas pruebas a favor de la importancia de la formación y verificación (o falsación) de hipótesis en estos procesos, en los que se manejarían estructuras lógicas proposicionales (deductivas). Por todo ello parece obvio que no puede hablarse de una distinción rígida entre razonamiento deductivo (lógico) e inductivo (probabilístico), ya que las personas, al ejercitar el pensamiento, emplean parte de sus conocimientos del mundo (almacenados en la memoria semántica), de manera que tienen en cuenta algo más que la simple estructura formal del problema (su contenido); a la inversa, cuando los humanos realizamos actividades de inducción, hemos de guiarnos por experiencias previas que nos permiten formular hipótesis, las cuales tienen una forma lógica expresada en términos proposicionales (disyunción, condicionalidad, bicondicionalidad) o categóricos (relaciones entre clases).

Por lo que respecta a las actividades de resolución de problemas hay que señalar que tienen una estructura lógica y psicológica más compleja, ya que además de ser necesarias las capacidades tanto deductivas como inductivas, van a ser necesarias una serie de habilidades relacionadas con la memoria de trabajo, la atención, los procesos de planificación, etc. (Martínez, 1991).

3.3.- MODELOS TEÓRICOS SOBRE LA INTELIGENCIA

Los antecedentes principales en la medición de la inteligencia están Binet y Simon a comienzos del siglo XX. Ambos diseñaron el primer test de inteligencia para predecir el rendimiento escolar de aquellos alumnos con riesgo de fracaso escolar. También Stern se planteó medir lo que él denominó *Cociente de Inteligencia* (CI), es decir, el cociente entre la edad mental y la edad cronológica, posteriormente multiplicado por 100. Por su parte Terman realizó con una muestra inicial de 1.528 alumnos con alto CI un estudio longitudinal pionero que duraría 50 años (1920-1970). El objetivo del mismo era analizar las características, evolución personal, escolar, social y profesional del grupo y el grado de estabilidad de la inteligencia, fundamentalmente.

Spearman (1927) diseñó el modelo de *inteligencia general o factor g (Teoría Bifactorial)*. Para él la inteligencia es una capacidad mental subyacente y ligada al aprendizaje escolar y a sus contenidos, la considera como una capacidad de aprendizaje. Para él existe un *factor general g* y un *factor específico s* que representa aquellas habilidades específicas que muestra un sujeto cuando se enfrenta a una determinada tarea.

Thurstone (1938) desarrolla el modelo de *aptitudes mentales primarias* que considera la inteligencia compuesta por una serie de aptitudes que equivaldrían a la división del factor g en aptitudes más elementales: comprensión y fluidez verbal, cálculo o capacidad matemática, memoria, razonamiento inductivo y deductivo, rapidez perceptiva, relaciones espaciales y coordinación motora. Estos componentes básicos serían esencialmente independientes entre ellos y su combinación equivaldría al rendimiento intelectual.

Dentro de los modelos de inteligencia factorial aparece la *estructura del intelecto* de Guilford (1959) quien incluye factores como la creatividad, definida como un proceso mental que exige utilizar las siguientes habilidades:

- Sensibilidad para detectar dificultades o deficiencias de un producto o situación.
- Fluidez mental: verbal, de asociación, de expresión y de ideas.
- Flexibilidad de pensamiento.

- Redefinición del problema.
- Elaboración.
- Tolerancia a la ambigüedad.
- Flexibilidad espontánea.
- Flexibilidad de adaptación.
- Originalidad.
- Asociaciones remotas.
- Interés por el pensamiento convergente.
- Interés por el pensamiento divergente.

Dentro de los modelos de inteligencia factorial tenemos los modelos jerárquicos y, entre ellos, el modelo de Vernon (1971) y el modelo de inteligencia fluida y cristalizada de Catell (1963). El primero está formado por cuatro niveles que denomina factor g, factores de grupo, factores menores de grupo y factores específicos. Estos niveles aparecen de mayor a menor generalidad y la estructura jerárquica de los factores considera Vernon que varía con la edad. En cuanto al modelo de Catell, partiendo de los factores mentales primarios obtuvo otros dos factores: *inteligencia fluida y cristalizada*, variando ambos a lo largo del desarrollo evolutivo. La primera estaría formada por relaciones, inducción y memoria y aparecería libre de la influencia del ambiente del sujeto, es decir es innata. La segunda estaría formada por las capacidades cognitivas desarrolladas por medio del aprendizaje previo, por lo que estaría más vinculada a los estímulos ambientales y al aprendizaje escolar.

Tomando como referencia los modelos de carácter general propuestos desde la Psicología Cognitiva para explicar los procesos de razonamiento a continuación nos vamos a centrar en tres, al considerarlos como los más significativos y acordes a nuestra investigación: el modelo de Sternberg (englobado en el seno de su teoría triárquica de la inteligencia), el modelo taxonómico de pensamiento de Johnson-Laird (modelo que ya se ha visto en parte en el capítulo 2) y que se enmarca dentro de su teoría de los modelos mentales semánticos, así como en el modelo de las inteligencias múltiples de Howard Gardner, dado el contexto y el planteamiento de la presente investigación.

a) Teoría Triárquica de Sternberg (1984)

Se trata de una teoría general de la inteligencia y de la resolución de problemas, en la cual se encuentran incluidas las capacidades de pensamiento deductivo e inductivo.

1.- Subteoría componencial: representaciones simbólicas de objetos y situaciones, y que subyacen a la resolución de problemas y el pensamiento. Relaciona la inteligencia con el mundo interno del individuo, especificando los mecanismos mentales que conducen a un comportamiento más o menos inteligente. En este sentido, las capacidades inductivas y deductivas quedan englobadas en la inteligencia fluida, mientras que aquellas habilidades que van a depender más estrechamente del conocimiento previo y/o de los factores culturales estarían clasificados dentro de la inteligencia cristalizada.

Los procesos de orden superior que se utilizan para planificar, controlar y evaluar la ejecución de una tarea, por lo tanto, hacen referencia a los aspectos ejecutivos y de control de los procesos cognitivos elementales. Sternberg distingue, a su vez, seis metacomponentes básicos en la ejecución de una tarea o en la solución de un problema: la identificación de una situación problema, la comprensión de su estructura, la selección de uno o varios tipos de organización y representación de la información, la selección de una estrategia de combinación de los componentes de nivel inferior, la decisión del ajuste entre velocidad y exactitud en la resolución del problema y, por último, la monitorización y control de la solución del mismo (Beltrán y Pérez, 1996).

En este sentido, la inteligencia experiencial aborda el tratamiento de la novedad y de la automatización del procesamiento mental, de manera que la inteligencia no se va a considerar tanto la habilidad de aprender con sistemas conceptuales familiares, sino que se va a considerar, más bien, como la capacidad para aprender y pensar con sistemas conceptuales nuevos que puedan, posteriormente, relacionarse con los conocimientos previos que posean los sujetos. Ahora bien, la novedad puede darse de dos maneras: por un lado, al enfrentarse a una tarea nueva y, por otro, al enfrentarse a una tarea familiar pero que se produzca en situaciones no familiares.

Pero además de las situaciones novedosas la inteligencia ha de abordar también situaciones rutinarias; consecuentemente, las dos formas de inteligencia se combinan. Cuando nos enfrentamos a una tarea novedosa se pone en marcha la inteligencia que afronta la novedad a través de lo que se conoce como *insight* (Heller, 2012; Sternberg, 2000). Ahora bien, cuanto más eficiente sea el sujeto en la automatización de la ejecución, más recursos cognitivos podrá dedicar al tratamiento de situaciones nuevas y viceversa. Esto explica que sujetos muy inteligentes puedan tener graves dificultades en el aprendizaje debido, entre otras razones, a deficiencias en la automatización de ciertas áreas (lectura, cálculo, etc.).

2.- Subteoría experiencial: capacidad de manejar situaciones nuevas, y automatización del procesamiento de la información.

Sternberg (1984) considera que los componentes de resolución de problemas interactúan con el nivel de experiencia del que el sujeto dispone en función de situaciones previas similares. Es por ello que van a ser muy importantes las habilidades que tengan los sujetos para enfrentarse a problemas nuevos, es decir, la flexibilidad para adaptarse a situaciones nuevas va a hacer que los sujetos sean más capaces de resolver nuevos problemas. A esta capacidad de adaptarse hay que añadir otra habilidad muy importante, que es la capacidad para automatizar le procesamiento de la información. Esta capacidad permitirá reservar el máximo de recursos cognitivos para las demandas de mayor complejidad y relevancia.

Nos estamos refiriendo a los procesos de manipulación y transformación de la información, es decir, son los procesos utilizados para ejecutar una tarea. Mientras que los metacomponentes deciden qué hay que hacer, los componentes de ejecución lo realizan. Sternberg divide este proceso en base a seis aspectos:

1.- Codificación: actividad por medio de la cual el sujeto codifica los términos del problema y recupera de la MOLP el conocimiento del que dispone de ese tipo de problemas.

2.- Inferencia: hace referencia a la detección de relaciones entre dos objetos o conceptos, la cual puede ser de tipo concreto o abstracto.

3.- Cartografiado o “mapping”: al hacer un trasvase de información de una situación conocida a una nueva situación problema.

4.- Aplicación: en la que el sujeto emplea las relaciones entre los elementos pasados de la situación y la decisión tomada acerca de ellos en el pasado, con la finalidad de actualizar esas decisiones a la situación presente.

5.- Justificación: consistente en verificar cuál es la mejor alternativa, de entre varias, para solucionar el problema.

6.- Respuesta: que puede ser verbal, gestual, motriz o de otra índole, dependiendo de la situación problema a la que nos hayamos enfrentado.

Se puede decir que unos son más importantes que otros; por ejemplo los componentes de razonamiento inductivo (como inferir y aplicar relaciones) son esenciales, ya no sólo en las tareas académicas, sino en la vida misma, de manera que las personas pueden resolver diferentes tareas usando diferentes componentes de ejecución.

Los componentes de adquisición, retención y transferencia están directamente relacionados con los anteriores, de manera que los de adquisición implican procesos mediante los cuales se pone a disposición del sistema cognitivo información nueva; los de retención tienen que ver con la habilidad de recuperar de la MOLP información previamente aprendida; por último los componentes de transferencia incluyen procesos de generalización de la información entre un contexto o una situación previa y una nueva. No cabe duda que la habilidad para aprender es una parte esencial de la inteligencia, pero es, sobre todo, el aprendizaje significativo lo que importa para la habilidad intelectual. La clave está en aprender o adquirir información del contexto, por lo que los sujetos han de ser capaces de separar lo relevante de lo irrelevante (codificación selectiva), de organizar y/o de estructurar lo seleccionado (combinación selectiva) y de relacionar lo seleccionado y organizado con los conocimientos previos (comparación selectiva).

3.- Subteoría contextual: inteligencia práctica e inteligencia social y hace referencia a la actividad mental implicada en la adaptación, transformación y selección del ambiente que es relevante para la vida de una persona, ya que la inteligencia implica, por supuesto, la adaptación al medio de cada uno. Por lo tanto Sternberg a través del nivel contextual analiza los factores más dependientes del contexto sociocultural de los individuos, es decir, trata temas de inteligencia práctica e inteligencia social, definida como el pensamiento que se dirige a una o más metas del comportamiento incluyendo, entre otras, la adaptación al ambiente, la transformación y/o conformación del ambiente a las propias exigencias así como a la selección de ambientes donde el sujeto interactúe con mayores garantías de éxito. Además, es aquí, en la subteoría contextual, donde se van a tener en cuenta los resultados obtenidos en las investigaciones transculturales y de orientación contextualista.

b) *Teoría de las Inteligencias Múltiples.*

Gardner (1997) en su obra la *Teoría de la Inteligencias Múltiples* define la inteligencia como la capacidad de resolver problemas y/o productos habituales que son importantes en un ámbito cultural o en una comunidad, es decir, no concibe la inteligencia como algo unitario, cuantificable e inmodificable, sino que aporta una visión más amplia sobre la estructura de la mente y sus potencialidades.

De este modo plantea la existencia de "siete inteligencias" independientes que ayudan a explicar el comportamiento inteligente de los individuos.

Gardner habla de inteligencias, no de aptitudes o talentos, porque cada una de ellas cumple los siguientes requisitos: estar localizadas en un lugar específico del cerebro, funcionar a distintos niveles, tener un patrón evolutivo propio y un correlato filogenético y ontogenético, ser evaluadas de manera psicométrica por varios tests, poseer evidencia experiencial, tener un conjunto de operaciones esenciales y contar con sus propios sistemas simbólicos.

Además conforman una parte esencial de las capacidades superiores aunque no son los únicos factores que aparecen en el fenómeno de la alta capacidad. Se consideran una condición importante pero no suficiente ya que aparecen otro tipo de variables con un papel importante en la complejidad de este concepto, es el caso de la motivación hacia la tarea, la creatividad y los factores socioculturales, educativos y familiares. La interrelación de estos aspectos favorecerá la manifestación del potencial de un sujeto particular. Esto significa que los sujetos más capaces no pueden incluirse en un grupo homogéneo con similares características y potenciales, existiendo distintos períodos de evolución, diferentes desajustes y disincronías y diversas formas de manifestación.

A diferencia de las teorías anteriormente tratadas Gardner (1983) propone la existencia de múltiples inteligencias básicas, concretamente de siete tipos de inteligencias: lingüística, lógico-matemática, espacial, corporal (o kinestésica), musical, interpersonal e intrapersonal. Sin embargo esta teoría se ha topado con el rechazo de muchos críticos que argumentan que más que hablar de inteligencias, Gardner debería de hablar de talentos o aptitudes.

Sin embargo Gardner (1994) se defiende afirmando que estas inteligencias que propone su teoría poseen unas características propias de lo que se considera inteligencia, ya que cada una de ellas ha pasado las pruebas establecidas para ello en forma de criterios delimitantes, concretamente superando los ocho criterios siguientes:

1.- Aislamiento potencial por daño cerebral: Gardner considera que las personas poseen siete sistemas cerebrales autónomos; por ello los individuos que tengan afectados alguno de estos siete sistemas es probable que tengan dañados una parte de la inteligencia sin que otras inteligencias se hayan visto afectadas. Así, en ciertos casos de individuos con lesiones cerebrales debido a accidentes o a enfermedades se produce un empobrecimiento de la inteligencia que dependa de esta área cerebral. Las investigaciones llevadas a cabo por Gardner descubrieron que, por ejemplo, una persona con una lesión cerebral en el lóbulo frontal izquierdo (área de Broca) podía tener dañada una parte sustancial de la inteligencia lingüística y, consecuentemente, experimentar una gran dificultad para hablar, leer y escribir, mientras que era capaz de cantar, de resolver problemas matemáticos, de montar en bicicleta, etc.

2.- La existencia de personas con inteligencias fuera de lo normal: en el sentido de que existen sujetos con inteligencia funcionado a diferentes niveles, hasta llegar a encontrarnos con personas prodigio o excepcionales dependiendo de la inteligencia concreta en la que sobresalgan. En este sentido, mientras que unas personas demuestran habilidades superiores en una inteligencia determinada (musical, lingüística, etc.) las otras funcionan a unos niveles inferiores.

3.- Esquema temporal distinto para cada inteligencia: para Gardner cada inteligencia tiene su propia trayectoria evolutiva, es decir, tiene su propio tiempo de aparición (normalmente en la infancia), de consolidación (en la edad adulta) y de declive (en la tercer edad). Mientras que las habilidades musicales parecen estar más tempranamente desarrolladas en un alto nivel de experticia (Mozart tenía solamente cuatro años cuando empezó a componer), las habilidades matemáticas no comienzan a desarrollarse a altos niveles de forma tan prematura aunque, bien es cierto, pronto alcanzarán su punto más alto.

4.- Raíces asentadas en el proceso evolutivo de las especies: ya que cada una de las siete inteligencias propuestas por Gardner ha ido evolucionando desde los más remotos antepasados de nuestra especie (evolución ontogenética y filogenética) e, incluso, de otras especies, como por ejemplo la inteligencia musical (a través de la imitación de los sonidos de de otros animales: pájaros, lobos, etc.).

5.- Apoyo de hallazgos psicométricos: que defienden la existencia de estas siete inteligencias, como por ejemplo el test de inteligencia para niños de Weschsler (que incluye sub-tests que analizan la inteligencia lingüística, la lógico-matemática, la espacia, la corporal-kinestésica, etc.) o la escala de madurez de Vineland (que incluye una serie de pruebas asociadas a las inteligencias múltiples: relación social, desarrollo corporal y motor, etc.).

6.- Apoyo de las tareas psicológicas experimentales: ya que los estudios psicológicos de carácter experimental ofrecen numerosas evidencias que permiten afirmar que cada inteligencia trabaja por separado en relación con las otras inteligencias; un sujeto puede dominar la lectura de forma sobresaliente y sin embargo puede no comprender un enunciado matemático para llevar a cabo su correcta resolución.

7.- Un conjunto definido de operaciones: que hacen que las diferentes inteligencias se desarrollen de forma individual pero al mismo tiempo de forma conjunta. La sensibilidad y la capacidad para discriminar entre diferentes estructuras rítmicas pueden estar directamente relacionadas con la facilidad para escribir versos o para recitar poemas, es decir, las operaciones esenciales de una determinada inteligencia pueden servir para dirigir las actividades propias de otra inteligencia diferente.

8.- Susceptibilidad para la codificación simbólica: ya que uno de los mejores indicadores de la conducta inteligente es la capacidad de los seres humanos para usar símbolos (letras, dibujos, planos, números, gestos, etc.) que proporcionan información en las diferentes áreas de la vida.

En resumen, para Garner las personas tienen siete inteligencias fruto de las diferentes capacidades que cada persona tiene en cada una de estas siete inteligencias. Lo cierto es que a pesar de que algunas personas parecen poseer niveles extraordinariamente altos de funcionamiento en todas o en la mayor parte de las inteligencias (aspecto que permite afirmar que las siete inteligencias funcionan conjuntamente de manera única en cada persona), lo más habitual es encontrarnos con sujetos que poseen diferentes niveles en las diferentes inteligencias, es decir, puede que nos encontremos con personas que poseen desarrollos altos en alguna de las inteligencias, desarrollos más moderados en otras e incluso desarrollos relativamente subdesarrollados en el resto.

c) *La teoría de los Modelos Mentales de Johnson-Laird (1988).*

Una aportación importante al estudio de los procesos intelectuales y de razonamiento es la teoría de los modelos mentales semánticos de Johnson-Laird (1988) quien establece una taxonomía de los diversos procesos que se pueden calificar como de pensamiento (Fernández y Carretero, 1995; González Labra, 1988; González Marqués, 1991).

Tal y como se ha visto anteriormente (capítulo 2) para Johnson-Laird las personas usan modelos mentales para razonar en vez de usar una lógica mental. La teoría de Johnson-Laird (1995a, b) se centra principalmente, en los procesos de pensamiento deductivo, es decir, pone el énfasis en los aspectos semánticos del razonamiento; dicho de otra forma, la teoría de los modelos mentales se centra en el significado de los fenómenos descritos en las situaciones problema más que en los aspectos formales de las mismas.

La característica más destacada de la teoría de Johnson-Laird es que los Modelos Mentales son *representaciones analógicas* de la realidad; frente a una determinada situación los modelos que son elegidos para interpretarla así como las relaciones percibidas o imaginadas entre ellos, determinan una representación interna que actúa como “sustituto” de esa situación. Se puede decir que los modelos mentales son *modelos de trabajo* de situaciones y acontecimientos del mundo y que permiten, mediante su manipulación mental, comprender y explicar fenómenos de ese mundo y actuar de acuerdo con las predicciones resultantes (Greca y Moreira, 2001). Para Johnson-Laird, la imposibilidad de aprehender el mundo directamente hace que los sujetos construyan representaciones internas que actúan como intermediarias entre el individuo y su mundo, posibilitando su comprensión y su actuación en él. Según él, el razonamiento se lleva a cabo con modelos mentales y la mente humana opera con ellos como si fueran piezas cognitivas que se combinan de múltiples maneras y que representan los objetos o las situaciones a las que nos enfrentamos, captando sus elementos y atributos más característicos.

Así, a partir de la información presentada en las premisas los sujetos elaboran un modelo mental que va a depender de la naturaleza del problema así como de su estructura lógica para, a partir de aquí, formular una conclusión que satisfaga el modelo. Es decir, el sujeto va a avanzar algo concordante con el modelo mental creado, pero no contenido directamente en las premisas.

Este modelo postula la existencia de, por lo menos, tres clases de representaciones mentales distintas: a) las *representaciones proposicionales*, definidas como cadenas de símbolos, similares al lenguaje natural, en el sentido que necesitan de reglas sintácticas (relaciones de la lógica formal o reglas de producción) para combinarse; b) los *modelos mentales*, análogos estructurales del mundo; y c) las *imágenes*, definidas como visuales del modelo. Así el propio Johnson-Laird (1983, pag. 165) afirma que "las representaciones proposicionales son cadenas de símbolos que corresponden al lenguaje natural, los modelos mentales son análogos del mundo y las imágenes son modelos vistos desde un determinado punto de vista".

Se requiere, por tanto, que los sujetos traten de construir representaciones alternativas que satisfagan las premisas pero que hagan falsa la conclusión. Así, cuantos más modelos alternativos de las premisas se hayan considerado y analizado, mayor será la seguridad a la hora de elaborar una conclusión (Fernández y Carretero, 1995; Santamaría, 1995).

Ahora bien, cuando a un sujeto se le presenta un problema o un enunciado textual (bien sea matemático o de cualquier otra índole) tiende a formar un modelo mental, es decir, una representación de la situación descrita en dicho enunciado así como de la comprensión que hace del mismo, más que de la información literal en sí. En este sentido, los sujetos introducimos nuestros conocimientos previos y realizamos inferencias sobre la situación descrita, yendo más allá de los datos presentados. Por eso se puede afirmar que los modelos mentales de una persona están limitados por factores como sus conocimientos y sus experiencias previas con estados de cosas similares y por la propia estructura del sistema de procesamiento humano (Gentner y Stevens, 1983).

Por eso los modelos mentales nunca son completos, sino que van siendo ampliados, modificados y mejorados a medida que las nuevas informaciones o las nuevas premisas van siendo incorporadas, de forma análoga a lo que ocurre en la comprensión del discurso. Es por ello que los modelos mentales han de ser funcionales, es decir, los sujetos los crean para explicar y hacer previsiones sobre un evento, objeto o situación concreta; esto implica que se usen y se descarten, es decir, son modelos temporales. Sin embargo, también se puede hablar de modelos mentales consistentes cuando ante situaciones diferentes se pueden utilizar modelos mentales similares debido a su funcionalidad. En este caso algunos modelos mentales irían adquiriendo una cierta estabilidad y, consecuentemente, quedarían almacenados en la MOLP.

d) *Otras teorías*

- *Modelo de los tres anillos y del triple enriquecimiento*.

Renzulli (1986) establece tres factores complejos e interdependientes: capacidad intelectual superior a la media, creatividad y motivación de logro o compromiso con la tarea.

El modelo se representa mediante un diagrama con tres anillos y los alumnos superdotados serían los sujetos que ocupan la intersección de los tres anillos. En su programa del triple enriquecimiento, denominado *Schoolwide Enrichment Model* (SEM), la detección se realiza otorgando un peso similar a los tests colectivos de inteligencia y a las estimaciones realizadas por los docentes. La intervención educativa parte del enriquecimiento del currículo en una aula especial dentro del centro ordinario, con tres niveles de complejidad centrados en el contenido, el proceso y el producto.

- *Modelo de* Tannebaum (1986)

Tannebaum (1986) representa a los modelos socioculturales, que manifiestan que la cultura se asienta en una serie de aspectos que van conformando la personalidad del individuo desde la infancia a través del proceso de socialización.

Para este autor los los factores de la personalidad y los aspectos sociales y culturales ejercen una profunda importancia en el desarrollo de la propia capacidad intelectual.

- *Teoría de la Mente.*

El eje central de esta teoría es la habilidad para atribuir estados mentales a uno mismo y a los demás, pudiendo comprender, explicar, reflexionar y predecir la conducta humana en función de los mismos (Hughes et al., 2007). Entre los estudios principales con esta teoría destacar los realizados con niños pequeños para comprender los estados internos de otras personas, caso del alumnado con autismo (Galende et al., 2013).

- *Teoría de la Inteligencia Emocional.*

Mayer y Salovey (1993, 1997) plantean un modelo de inteligencia emocional que abarca cinco componentes o dimensiones:

1. El conocimiento de las propias emociones, reconociendo un sentimiento en el momento en que aparece.

2. La capacidad de controlar las emociones, adecuándose al momento.

3. La capacidad de motivarse uno mismo, el autocontrol emocional, la capacidad de demorar la gratificación y sofocar la impulsividad.

4. El reconocimiento de las emociones ajenas (empatía).

5. El control de las relaciones, la habilidad para relacionarse con las emociones ajenas y la eficacia interpersonal.

- *Teoría Dual del Razonamiento y los procesos de pensamiento lógico*

Esta teoría se caracteriza fundamentalmente por la existencia de dos unidades cognitivas en el cerebro humano denominadas genéricamente como Sistema 1 y Sistema 2 (Stanovich y West, 2000). El primero de los sistemas engloba el ámbito intuitivo más o menos irracional que se aprende de la experiencia y que es utilizado con gran rapidez y de forma inconsciente, mientras que el segundo queda definido por aquellos procesos mentales analíticos que demandan cierto tiempo de reflexión por parte del sujeto.

- *Teoría de la Desintegración Positiva.*

Esta teoría se debe a Dabrowski (1964) y está centrada en el análisis y la observación del desarrollo humano hacia estadios psicológicos más avanzados. Señala que en la evolución interna del sujeto existen cinco fases interconectadas dentro de su crecimiento personal. Cada una de ellas presenta unas características cognitivo-emocionales distintivas que denomina *dinamismos* que determinarán las elecciones y logros del individuo a lo largo de su desarrollo personal. Estas etapas son: integración primaria, desintegración uninivel, desintegración multinivel espontánea, desintegración multinivel organizada e integración secundaria.

- *Teoría de la Resonancia Adaptativa.*

Carpenter y Grossberg (2003) elaboran un modelo de red neuronal artificial centrado en la forma en la que el cerebro realiza el procesamiento de la información ante patrones de entrada. De esta forma definen una serie de redes neuronales que, por medio de métodos de aprendizaje con y sin supervisión, analizan cómo es el reconocimiento y la predicción ante tales patrones. En consecuencia, una de sus premisas centrales es la estabilidad y plasticidad del aprendizaje mediante mecanismos de retroalimentación de neuronas.

3.4.- EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO EN LA INFANCIA

Gran parte del progreso intelectual que se produce en la infancia puede verse como el proceso por el que el niño llega a categorizar las cosas que le rodean en función de semejanzas y diferencias percibidas, estableciendo, consecuentemente, relaciones entre las distintas categorías construidas. Para Delval (1996) la principal tarea de los niños en su desarrollo cognitivo inicial es el de “organizar” el mundo que le rodea, a fin de entenderlo y poder desenvolverse adecuadamente dentro del mismo.

En este sentido puede afirmarse que el desarrollo conceptual (es decir, la formación de las categorías o clases con las que organizar la experiencia) y el desarrollo operacional (la capacidad de abstracción de los principios lógicos que subyacen a las relaciones que se han observado) no son más que distintos planos de un mismo proceso por el cual se va construyendo la inteligencia.

De hecho, para Piaget (1946), los sujetos van progresando (desde la más tierna infancia) a través de una serie de estadios en los que va construyendo una serie de estructuras cognitivas (estadios) progresivamente más complejas, pasando de un escaso conjunto de destrezas sensoriomotoras y de reflejos muy rudimentarios que le permiten interactuar de manera muy básica con el medio a crear representaciones mentales acerca de objetos y de sucesos no presentes (función simbólica). De esta manera, el comportamiento inteligente es construido progresivamente a lo largo de una serie de etapas, siendo cada una de ellas una forma de equilibrio más perfeccionada que la anterior y en la que se integran las adquisiciones de las etapas previas. Para Piaget es justamente con esta *capacidad simbólica* como se inicia el verdadero pensamiento, ya que ahora los individuos van a ser capaces de elaborar representaciones que trascienden las categorías meramente perceptivo- motoras propias del período sensorio-motor, propiciando el desarrollo de la categorización propiamente “conceptual”.

Este tránsito no es repentino ni inmediato, sino que está marcado por el propio desarrollo “operacional”; es decir, a partir de las adquisiciones que los individuos van adquiriendo a lo largo del período sensoriomotor y de su trasformación lenta y sucesiva (mediante reelaboraciones y reconstrucciones), los sujetos van a ser capaces de realizar operaciones mentales propias del pensamiento preoperatorio. De hecho Piaget consideró esta reconstrucción como una única etapa intermedia (entre la *sensoriomotora* y la de las *operaciones formales*), si bien la describió según dos fases características: una preoperatoria (entre los 2 y los 7 años aproximadamente) dominada por la representación simbólica (pero todavía pre- conceptual) y una segunda etapa propiamente operatoria (entre los 7 y los 12 años)caracterizada ya por un pensamiento conceptual y lógico pero sólo aplicado a lo concreto (período de las *operaciones concretas*).

A las edades que nos estamos refiriendo en nuestra investigación nos hemos de centrar, precisamente, en el período de las operaciones concretas, caracterizado por un pensamiento conceptual. Si bien en la etapa preoperatoria los individuos tienden a concentrar su atención en los estados sucesivos de las cosas más que en el proceso de cambio por el que un estado deviene en otro, llega un momento evolutivo en el que los sujetos van a ser capaces ya no sólo de captar las condiciones momentáneas de las cosas o de las situaciones, sino de ligarlas en un todo integrado que recoja las transformaciones que unifican el conjunto y le dan coherencia desde el punto de vista lógico. En otras palabras, los individuos se dan cuenta de que los estados pasan a ser simples elementos de las transformaciones, las imágenes empiezan a estar subordinadas a las operaciones: las acciones meramente reproductivas del pensamiento intuitivo ahora se interiorizan, lo que permite su movilidad y reversibilidad. El hecho de que os individuos ahora puedan anticipar mentalmente la variación que se ocasionaría si se ejecutara una acción (o viceversa) va a provocar que el pensamiento se haga flexible y móvil, lo que permitirá que los individuos puedan comprender las transformaciones más allá de las configuraciones y distorsiones aparentes.

Ahora bien, hay que tener presente que la reversibilidad del pensamiento que suponen las operaciones mentales (como acciones interiorizadas)también se apoya en la construcción de una serie de invariantes, es decir, nociones sobre lo que permanece a través de los cambios; o lo que es lo mismo, durante estas edades los individuos construyen los *esquemas de conservación* que le van a permitir comprender que las relaciones cuantitativas entre dos objetos permanecen constantes pese a las transformaciones sufridas en aspectos cualitativos más o menos irrelevantes, y aunque ello conlleve cambios perceptibles notables. Son precisamente estos esquemas de conservación los que van a permitir hacer los recorridos mentales de ida y vuelta que pueden explicar las transformaciones ocurridas, bien sea mediante acciones humanas o bien sea de manera espontánea en el entorno. Lo cierto es que ahora los individuos van a ser conscientes de que en cualquier cambio o transformación que se produzca hay algo que se modifica y algo que se conserva. Pero es preciso tener en cuenta que en esta progresión del pensamiento hay que añadir otro aspecto evolutivo importante; y es que las distintas nociones de conservación tampoco se elaboran todas al mismo tiempo, sino que se producen algunos desfases horizontales sobre todo a la hora de comprender las distintas conservaciones en función de los distintos contenidos (cantidad, peso, volumen, superficies, etc.). Para García Madruga y Delval (2010) los niños demuestran, a estas edades, una incapacidad para actuar dentro del mismo nivel de desarrollo cuando se enfrentan a problemas que son similares desde un punto de vista lógico pero que están relacionados con áreas o contenidos de conocimiento distintos.

Pues bien, la respuesta a esta cuestión la explica Piaget al atribuir estos desfases inter-conservación a la distinta resistencia que ofrecerían los distintos contenidos a las mismas operaciones lógicas. De hecho es aquí donde se demostraría lo “concreto” de las operaciones propias de esta etapa. Las operaciones concretas, como el propio nombre indica, se refieren a lo material, a lo directamente observable, a lo presente, a la realidad concreta y, por tanto, todavía el pensamiento dependería de ella. Así, la mayor dificultad de conservación de un contenido respecto a otro reflejaría, simplemente, su mayor dependencia de esa realidad concreta; o lo que es lo mismo, la mayor dificultad del niño para desprenderse de la configuración perceptiva respecto a la pura transformación: mayor respecto al volumen, intermedia respecto al peso y menor respecto a la cantidad de sustancia.

Es justamente sobre a base de lo conservado como mentalmente se puede reconstruir (o regresar) a la situación de partida de un proceso que puede ser, incluso, irreversible (por ejemplo comprender que es imposible devolver el zumo a un limón exprimido).

Sin embargo es preciso entender que los esquemas de conservación se constituyen y se apoyan en una organización cognitiva estructurada y de conjunto que se ajustaba o reflejaba estructuras lógico-matemáticas elementales. En otras palabras, estas estructuras lógicas se toman como modelos de la estructura del conocimiento que se va elaborando y perfeccionando a partir de las acciones del sujeto; los individuos han dejado de centrarse en los objetos y en sus propiedades para empezar a captar y analizar las relaciones lógico-matemáticas y espacio-temporales que existen entre los objetos y que conectan unos sucesos con otros.

En resumen, con la llegada del pensamiento operatorio caracterizado, tal y como se ha expuesto, por la reversibilidad, el pensamiento se hace, consecuentemente, más flexible. Esta característica le permite ahora al sujeto "desprenderse" y liberarse completamente del efecto de los datos perceptivos y figurativos (las denominadas configuraciones) para así centrarse en la captación de los procesos (las denominadas transformaciones).

Además, los sujetos empiezan a aplicar una lógica de clases, con relaciones de inclusión jerárquica. Es decir, los niños van a comprender que las cases tienen distinto nivel de generalidad y que unas pueden estar incluidas (subordinadas) dentro de otras. El hecho de que los sujetos puedan ahora manejar de forma sistemática y consciente distintos tipos de clasificación e incluso combinarlos les va a permitir clasificar objetos, ordenar, comparar el "todo" con la "parte", la clase general con la subclase y manejar los términos cuantificadores (todos, algunos, pocos, etc.) adecuados a sus niveles de inclusión.

El que los sujetos sean capaces de realizar este tipo de clasificaciones jerárquicas (junto con las conservaciones) va a ser, además del indicio de un desarrollo conceptual completo, el criterio para establecer si se había alcanzado el estadio de las "operaciones concretas"

(Inhelder y Piaget, 1959). De hecho los estudios llevados a cabo por Piaget e Inhelder (1963) defienden que las propiedades lógicas más complejas de la inclusión, concretamente la asimetría y la transitividad, no se comprenden y se manejan de forma consistente hasta los 9 años aproximadamente, lo que condicionaría, por ejemplo, las relaciones de "orden" a la hora de organizar seriaciones diversas.

Una vez que los sujetos pueden establecer relaciones lógicas entre los elementos de un conjunto ya van a poder hacer inferencias deductivas de manera acertada (p.ej. si A>B y B>C, entonces A>C) y, al mismo tiempo comprender y utilizar la reversibilidad (tomando como ejemplo el anterior el sujeto va a poder inferir que C<A). Fruto de este doble conocimiento los sujetos van a poder realizar lo que Piaget denominaba "agrupaciones y seriaciones múltiples", o lo que es lo mismo, los niños ya están en condiciones de clasificar y de ordenar elementos con respecto a más de un criterio (dimensión). Sin embargo, de acuerdo con García-Madruga (2010) los niños de este nivel evolutivo carecen todavía de la combinatoria formal, es decir, se centran en clasificar, seriar y establecer correspondencias, pro sin llegar a imaginar todas las combinaciones posibles.

Ahora bien, como en otros aspectos inherentes a la teoría piagetiana se han realizado numerosos estudios orientados a contrastar sus postulados acerca de las operaciones concretas así como a replicar sus observaciones empíricas desde el punto de vista evolutivo. Así, los estudios de Rodrigo (1999) y Bermejo (1990), a pesar de no ser muy uniformes ni coincidentes, ponen de manifiesto que las capacidades intelectuales de los niños se desarrollan antes de lo que Piaget sugirió.

Pero los argumentos críticos a este respecto inciden tanto en la perspectiva teórica general adoptada por Piaget como en la particular y "discutible" metodología empleada en sus estudios. En este sentido, de acuerdo con Gutiérrez, García-Madruga y Carriedo (2003) Piaget basa su conceptualización teórica en la observación de la ejecución en determinadas tareas, y a partir de ello infiere la presencia (o la ausencia) de ciertas competencias en los niños y las niñas, de manera que los críticos piagetianos defienden que se interesó casi exclusivamente en el descubrimiento de competencias generales sin apenas fijarse en los factores ejecutivos que las determinan y que, sin embargo, parecen tener incluso mayor importancia que las actuaciones concretas.

Por este motivo los errores que Piaget encontraba en la ejecución individual de los sujetos no permiten inferir directamente la "falta de competencia" ya que pueden ser debidos a otros factores relacionados con la tarea. En este sentido los críticos con la teoría de Piaget consideran crucial tener en cuenta la capacidad de los individuos para entender el lenguaje, que como es lógico, va a ir aumentando con la edad. A estas edades los niños pueden tener dificultades para comprender el lenguaje (sobre todo durante el período preoperatorio) a la hora de producirlo, lo que puede acarrear que los sujetos sepan resolver las tareas pero que no sepan justificarlas verbalmente.

A estas dos críticas hay que sumarle que las tareas propuestas por Piaget eran, probablemente, tareas demasiado difíciles para estas edades, por ejemplo el problema piagetiano de inclusión (en el que un individuo al que se le presenta una categoría de objetos-por ejemplo flores- divisible en dos subclases mutuamente exclusivas y en la que una de las cuales presenta más elementos que otra, de manera que se le pide al individuo compare la extensión de la clase y de la subclase mayor a través de preguntas como "¿hay más rosas o más flores?, "si quitas todos las rosas, ¿quedarán flores?, etc." tal y como han defendido diversos autores (Alonso, Tapia y Gutiérrez, 1986; Markman y Callanan, 1984).

Así, se ha insistido en la idea de que los progresos del niño en este periodo los progresos psicológicos de los niños están mediados por el desarrollo de su capacidad de procesamiento, entendida ésta como la amplitud funcional de la Memoria Operativa; en este sentido (tal y como se ha visto en el apartado 2.3 de la presente investigación) muchos psicólogos defienden que las funciones de procesamiento y de almacenamiento de la MO están coordinadas, de manera que cuanto más eficaz es el procesamiento mayor es la capacidad para mantener simultáneamente la información en proceso así como los productos del mismo.

3.5.- EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO EN LA ADOLESCENCIA

De acuerdo con la teoría piagetiana (así como con los estudios más recientes) en la mente de los sujetos se producen una serie de cambios y transformaciones espectaculares que permiten distinguir, consecuentemente, los cambios que se producen entre las capacidades cognitivas de los sujetos tanto en la infancia y en la adolescencia como en la edad adulta. Durante este intervalo de edad los niños adquieren en diferentes contextos, especialmente en el ámbito escolar, múltiples conocimientos de muy diversos tipos, nuevos procedimientos y estrategias de resolución de tareas, así como un incipiente control metacognitivo de sus recursos cognitivos. De acuerdo con la teoría de Piaget, todas estas adquisiciones y desarrollos, implican que los escolares poseen un nuevo tipo de capacidad intelectual que les va a permitir operar mentalmente sobre la realidad, mostrando ya ciertas habilidades lógicas, aunque restringidas todavía a la presencia física de objetos.

El pensamiento infantil, concreto, incapaz de separarse de las ataduras de los objetos y de la “lógica” de los sentidos va evolucionado y tomando un carácter más abstracto. Este carácter abstracto se pone de manifiesto en que las operaciones no se aplican sólo sobre el mundo real y concreto, empíricamente observable, sino que van a operar ya en el mundo de lo hipotético, de lo posible. Los cambios fisiológicos que los individuos sufren a nivel cerebral son los responsables de la activación de los procesos y funciones ejecutivas necesarios para que la actividad cognitiva de los individuos (adolescentes) pueda tener la flexibilidad y eficacia que requiere el pensamiento formal.

Los cambios cognitivos que se producen en la adolescencia se ponen también de manifiesto en la habilidad y el gusto que demuestran los adolescentes por la elaboración de teorías y generalizaciones en campos muy diversos; ya que a estas edades los individuos adquieren la capacidad de elaborar y formular teorías basadas en lo abstracto, en lo hipotético, así como comprobarlas empíricamente.

Sin embargo, a pesar de encontrarnos en el período de las operaciones formales (a partir de los 13 años aproximadamente) los psicólogos identifican dos subperíodos: el subperíodo formal incipiente (entre los 13 y los 15 años) y el formal avanzado (a partir de los 15 años).

Ya hemos visto que durante la etapa de las operaciones concretas los individuos van estructurando la realidad por campos o dominios de conocimiento concretos, observables, como por ejemplo con las variaciones de volumen, tamaños, pesos, etc. así como con las conservaciones de los mismos. Además, los niños sólo pueden hacer vagas y simples "hipótesis" cuando tenga que considerar datos que son sólo "posibilidades" a la hora de realizar prolongaciones imaginables de las acciones u operaciones aplicadas a un contenido dado. En otras palabras, los individuos van a ir adquiriendo una cierta extensión del razonamiento de lo real a lo virtual, a lo posible, aunque con limitaciones.

En la medida en que los niños logran estructurar la realidad de cada uno de los campos de conocimiento, van tomando conciencia de que la transformación sobre un elemento es reversible y siempre se puede volver a su forma original (aunque sea a nivel imaginario y no real como por ejemplo, y tal y como se ha visto anteriormente, al intentar devolver el zumo a un limón). Ahora bien, llega un momento en que este equilibrio, esta capacidad de reversibilidad no es suficiente para resolver todos los problemas que la vida plantea; por ejemplo a la hora de enfrentarse a problemas en los que intervienen varios dominios, ya que muchas veces los sujetos se encuentran con resultados incoherentes o contradictorios.

Es entonces cuando se dan cuenta de que los datos de la experiencia se les van imponiendo y se dan cuenta de que las estructuras operatorias que poseen no pueden dar respuesta a estas situaciones. En este momento se crea un desequilibrio que el sujeto podrá resolver utilizando dos métodos distintos: a) coordinando los resultados de las operaciones concretas para evitar contradicciones aparentes a las que conduce su empleo, cuando sus contenidos interfieren de modo complejo; o b) coordinando entre sí las propias operaciones, o lo que es lo mismo, coordinando las diversas agrupaciones de clases en un sistema global. Tanto la utilización de la primera estrategia como la segunda conducen a la aparición de operaciones formales, puesto que ambas implican la utilización de una combinatoria así como la realización de operaciones sobre otras ya existentes; lo que se conoce como *operaciones de segundo* orden u operaciones sobre operaciones.

De acuerdo con Inhelder y Piaget (1955) estas operaciones de segundo orden ya no se aplican directamente sobre los objetos del mundo, sino sobre las proposiciones que los describen, sobre lo posible, lo que en última instancia permitirá al pensamiento de los adolescentes y de los adultos aplicarse reflexivamente y/o metacognitivamente sobre sí mismo. El carácter proposicional del pensamiento formal pone de manifiesto la importancia del componente verbal del lenguaje, requisito necesario para el pensamiento en este período. No obstante según Inhelder y Piaget (1955) este carácter proposicional no se reduce a su aspecto verbal, sino que destaca la aparición de una lógica proposicional que se superpone a la lógica de clases, y que permite que las proposiciones se combinen y se relacionen entre sí mediante conectivas lógicas (conjunción, disyunción, condicional, etc.) dando lugar a nuevas proposiciones de segundo orden.

De esto se deduce, tal y como defiende Carretero (1985), que la relación que establecen los sujetos entre lo real y lo posible supone un cambio en la orientación general del intelecto de gran relevancia. De hecho, en esta etapa, lo posible ya no es una simple prolongación de lo real (como lo era en la etapa anterior de las operaciones concretas), sino que se considera un subconjunto de lo posible. La capacidad que tienen ahora los sujetos para generar hipótesis a la hora de resolver problemas les va a permitir razonar y diseñar operaciones que podría realizar sin que sea necesaria su ejecución real.

Hay que tener en cuenta que el razonamiento de los sujetos no se realiza ya sobre la realidad percibida, sino sobre enunciados verbales (o escritos) hipotéticos; es decir, mediante proposiciones que formulan determinadas explicaciones o hipótesis sobre determinados fenómenos. De estas hipótesis se deducirán las consecuencias pertinentes que serán, posteriormente contrastadas con la realidad, bien de forma activa (sobre la realidad concreta) o bien de forma figurada.

Además, no hay que olvidar que el desarrollo psicológico de los sujetos situados en la etapa de las operaciones concretas también llegan a formular hipótesis en un intento de dar explicación a los fenómenos y a los problemas a los que se enfrentan, pero lo hacen de forma más rudimentaria y, tal y como hemos expuesto anteriormente, lo hacen como una “prolongación” de lo real.

Sin embargo, el desarrollo psicológico característico en la etapa de las operaciones formales le va permitir a los individuos abordar la resolución de problemas de forma más compleja que los sujetos que se encuentren posicionados en la etapa anterior. De acuerdo con García-Madruga (2010) estas diferencias pueden resumirse de acuerdo a tres aspectos fundamentales. En primer lugar, los sujetos adolescentes pueden descartar mentalmente las hipótesis más simples y primitivas (características de los niños más pequeños). En segundo lugar, los adolescentes construyen y formulan hipótesis más complejas y avanzadas como resultado de la mejor comprensión de los problemas y del bagaje experimentado en la etapa anterior. Por último, los sujetos que se encuentran en la etapa de las operaciones formales son capaces de comprobar empíricamente las hipótesis que han formulado, realizando un análisis detallado de todas las combinaciones posibles de las variables que intervienen en el problema así como de las consecuencias que se pueden extraer; y las comprueban variando los factores que intervienen en el problema de modo independiente mientras mantienen constantes el resto. Vemos como aparecen las bases del razonamiento científico, los rasgos principales que definen, según Piaget, una de las características básicas del razonamiento formal adolescente.

3.5.1.- Características estructurales del pensamiento formal

Además de las propiedades generales del pensamiento formal que acabamos de citar el estadio de las operaciones formales está caracterizado por una estructura de conjunto formulable en términos lógico-matemáticos (Inhelder y Piaget, 1955). Esta estructura general consta de dos estructuras integradas que son el retículo de las 16 combinaciones binarias de la lógica de proposiciones y el grupo de las cuatro transformaciones (INRC) o grupo de Klein. Además, Inhelder y Piaget proponen una serie de subestructuras que proceden de la estructura de conjunto general, y que proporcionan instrumentos cognitivos especializados en determinados grupos de tareas y problemas. Estas subestructuras menos generales son los llamados esquemas operatorios formales.

La capacidad de los individuos que se encuentran en el periodo de las operaciones formales les permite resolver adecuadamente los problemas del razonamiento proposicional con enunciados que incluyan, por ejemplo, conjunciones, disyunciones y condicionales; sin embargo esta teoría no siempre se cumple. En particular las proposiciones condicionales (del tipo **si p, entonces q**) han sido foco de atención de los investigadores ya que tanto los niños como los adultos experimentan especiales dificultades para razonar a partir de ellas. En cualquier caso, desde el punto de vista psicológico, se pueden formar 16 combinaciones posibles a partir de dos proposiciones cualquiera, formando un modelo matemático llamado retículo. Pues bien, para Inhelder y Piaget la lógica proposicional en sí misma constituye una de las características estructurales del pensamiento formal (García-Madruga, 2010).

Otro de los rasgos lógicos del pensamiento formal es su carácter reversible, tal y como hemos visto anteriormente. También hemos comentado en el período de las operaciones concretas los niños ya eran capaces de establecer cierta reversibilidad en los razonamientos siempre y cuando los sujetos pudiesen ver y manipular los objetos (por ejemplo para razonar que una bola de 20 g. de plastilina y un rulo alargado de 20 g. de plastilina tienen la misma cantidad de plastilina a pesar de que el rulo pueda medir medio metro). Los sujetos que se encuentran en el periodo de las operaciones formales, por el contrario, son capaces de extender este razonamiento de reversibilidad, tal y como hemos visto, al mundo de lo posible, es decir, de razonar de forma reversible a partir de operaciones mentales y enunciados verbales. Para dar cuenta de la reversibilidad del pensamiento formal en los adolescentes Inhelder y Piaget (1955) proponen el grupo de las cuatro transformaciones o grupo de Klein, que explica la reversibilidad del razonamiento formal e implica las operaciones de identidad, negación, reciprocidad y correlación.

Por último, además de estas dos estructuras lógicas, Inhelder y Piaget proponen también los esquemas operatorios formales, cuya función es la de tratar de explicar la actuación de los sujetos a la hora de abordar determinadas tareas matemáticas (por ejemplo las relacionadas con las nociones de combinación, probabilidad, proporción y correlación) y físicas (para explicar equilibrio de objetos, fuerzas que intervienen en el desplazamiento de un móvil en un plano inclinado, etc.) y que no son explicables en base a las estructuras anteriores, de manera que el nivel de generalidad de estos esquemas es, por así decirlo, intermedio entre las estructuras globales anteriores y los conceptos particulares; su aplicabilidad no es sobre un problema concreto o particular, sino sobre un conjunto de problemas que comparten una misma estructura específica.

Sin embargo, el estadio de las operaciones formales de Piaget es, tal vez, el que más críticas y controversias ha levantado entre los psicólogos y los investigadores del razonamiento, hasta el punto de que el propio Piaget plantea en torno a la década de los 70 del siglo pasado una revisión del período formal, llegando a afirmar que puede que las edades a las que se refiere Piaget en un principio para acceder a las operaciones formales no sean muy exactas, pero que en todo caso lo importante de su teoría es la sucesión de los diferentes estadios evolutivos más que las edades de adquisición de los mismos (Piaget, 1970).

Otras críticas hacen referencia a las tareas empleadas por Piaget en sus investigaciones, de manera que tras modificar algunas de las tareas piagetianas (eliminando o simplificando las tareas en cuanto a carga de memoria, familiaridad del contenido de las tareas, etc.) ya en los años 70 algunos investigadores demostraron que niños de edades mucho más tempranas a las propuestas por Piaget ya eran capaces de resolver estas tareas de carácter “formal” pero simplificadas (Gelman y Gallister, 1978; Siegler, 1976).

Esto ha llevado a criticar la existencia misma de los estadios propuestos por Piaget, y más concretamente de las operaciones formales; llegando a afirmar que los cambios que se producen en el desarrollo psicológico de los individuos al finalizar la infancia son meros cambios por acumulación de conocimientos. De manera que para algunos investigadores (Wellman y Gelman, 1998; Gelman y Williams, 1998) las adquisiciones básicas se producen en edades muy tempranas del desarrollo, y es a través de la experimentación y de los estímulos que los sujetos reciben en las diferentes áreas o dominios de conocimiento cómo se produce el desencadenamiento de los comportamientos o de las capacidades que ya están presentes en los individuos a nivel potencial.

Lo cierto es que hoy en día no hay un acuerdo unánime entre los investigadores y los teóricos, ya que si bien es cierto que al finalizar la adolescencia se producen unos cambios cognitivos de gran relevancia que se manifiestan en una forma diferente de abordar los problemas intelectuales, más abstracta y menos ligada a los objetos de la realidad (Gray, 1990; Keating, 1980; Moshman, 1998) aún no está muy claro que estos cambios puedan ser consecuencia de cambios cualitativos y/o estructurales. En cualquier caso, parece claro que a partir de los 11-12 años se da un cambio evolutivo real por el que los sujetos adquieren un nuevo pensamiento, más formal, que no estaba presente de manera tan objetiva en las edades precedentes. Sin embargo de acuerdo con García-Madruga (2010) estos cambios no parecen que estén caracterizados como consecuencia de un cambio estructural tal y como decía Piaget, ya que está caracterizado por la existencia de desfases y de una gran variabilidad intra e intersujetos como consecuencia, probablemente, de la influencia de determinados factores externos (exógenos) relacionados con la estimulación recibida: conocimiento y familiaridad de las tareas, tipos de tareas, etc.

4. ESTUDIO EXPERIMENTAL

4.1. PLANTEMAMIENTO DEL PROBLEMA

El estudio de la competencia matemática en el ámbito escolar es, quizás, uno de los temas más recurridos a la vez que controvertidos en las investigaciones sobre aprendizaje escolar llevadas a cabo en la última década por psicólogos, psicopedagogos y estudiosos del ámbito matemático y/ o pedagógico en general (Godino, 2002; Goñi, 2010; Linares, 2003).

Tal y como hemos tratado en la fundamentación teórica, las investigaciones actuales definen la competencia matemática como la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral (Sáenz-Castro, 2007).

La competencia matemática se estructura en grandes bloques denominados dimensiones. Cada una de estas dimensiones agrupa una serie de subcompetencias. Las cuatro dimensiones de la competencia matemática son: cantidad, espacio y forma, cambios, relaciones e incertidumbre, y por último la resolución de problemas.

En cuanto a las cuatro primeras decir que para que un niño llegue a una comprensión adecuada de los conceptos numéricos es necesario comprobar el conocimiento del alumno acerca de los conceptos que pretendemos trabajar. A partir de que el niño tenga conocimiento de los números ya está en condiciones para establecer relaciones entre ellos, y a partir de ahí, combinarlos, establecer relaciones entre ellos, es decir, hacer operaciones.

Para que los niños puedan afrontar con éxito las tareas de cálculo han de dominar una serie de técnicas y habilidades básicas: contar oralmente, enumerar y comparar magnitudes.

Las nociones básicas y los principios numéricos son imprescindibles para la comprensión del número, y además, constituyen la base de toda actividad matemática: la conservación, el orden estable, la clasificación, la seriación, la correspondencia, el valora cardinal, la reversibilidad, etc. Su adquisición depende del proceso madurativo y del ritmo de desarrollo de cada sujeto, de manera que en torno a los 5-7 años los/as niños/as adquieren estas nociones a través del juego y de la interacción con el medio y con el entorno que le rodea. Es lo que se conoce como aprendizaje informal del cálculo y de las operaciones aritméticas (Cordero, 2003) a partir de aquí viene el aprendizaje instrumental.

Las operaciones de cálculo son aplicables a una tarea más compleja que forma parte de la competencia matemática y que es la resolución de problemas. Resolver un problema implica traducir las situaciones reales a esquemas o modelos matemáticos; plantear, formular y definir distintos tipos de problemas; resolver esos problemas seleccionando las estrategias más adecuadas y por último comprobar las soluciones obtenidas.

Por lo tanto, la competencia matemática implica la combinación creativa del conocimiento matemático y las destrezas para realizar operaciones, en respuesta a las condiciones determinadas en una situación exterior. Es decir, el individuo tratará de poner el conocimiento matemático en acción para resolver los problemas que se pueden presentar en diferentes situaciones de la vida cotidiana.

La resolución de problemas es una parte fundamental del razonamiento matemático y, por ello, tendrá que considerarse como un eje vertebrador del mismo. Su importancia radica en la orientación hacia la reflexión, el análisis, la toma de conciencia y el mantenimiento de una actitud crítica ante la realidad. La adquisición por parte de los alumnos de estrategias para resolver problemas favorece el desarrollo de la autonomía y la iniciativa personal, la capacidad de tomar decisiones con fundamento, el desarrollo de la lectura comprensiva, la flexibilidad en el pensamiento y la perseverancia hacia el trabajo escolar, entre otros. Su interés no se centra solo en el campo de la competencia matemática sino que va más allá y se extiende también a otras competencias.

Como vemos, la propuesta de competencia matemática acentúa su carácter instrumental y de puesta en práctica; los elementos y razonamientos matemáticos se utilizan para enfrentarse a aquellas situaciones cotidianas que los requieren (Cocks y Watt, 2004). La competencia se pone de manifiesto cuando el alumno en el contexto de una tarea o problema, utiliza una serie de habilidades o destrezas que le van a permitir continuar hacia adelante, desde una fase inicial de comprensión de la tarea hasta su resolución o incluso generalización a otras situaciones pasando por la reflexión, tanteos, diseño de estrategias, etc.

En este contexto se mantiene que las dificultades en el aprendizaje matemático están relacionadas con el funcionamiento poco eficaz de los diferentes procesos implicados en la realización de los cálculos y en la resolución de problemas (Witt, 2012). Además, en las numerosas y diferentes investigaciones realizadas, la competencia matemática siempre se ha relacionado con una serie de variables académicas y cognitivas que han dado como resultado la consideración de la Memoria de Trabajo (también denominada Working Memory o Memoria Operativa) como uno de los factores principales en el funcionamiento matemático (Alloway, 2009; Fuchs, Compton, Fuchs, Paulsen, Bryant y Hamlett, 2005; Geary, Brown y Samaranayake, 1991; Hitch y McAuley, 1991; Passolunghi y Siegel, 2004; Swanson y Beebe-Frankenberger, 2004; Swanson y Sachse-Lee, 2001; Wilson y Swanson, 2001).

Los hallazgos de dichos trabajos junto a los datos aportados por las investigaciones que hemos ido mostrando en la primera parte de este trabajo han permitido describir con mayor precisión el perfil cognitivo de los sujetos en habilidades de competencia matemática, de este modo hemos identificado algunas de las variables que mejor predicen el rendimiento y el ritmo de aprendizaje de las matemáticas, al tiempo que se nos han abierto nuevos interrogantes en un área donde, en los últimos años se ha producido un continuo avance del conocimiento.

Los estudios revisados se centran en líneas de interés relacionadas con aspectos de tipo evolutivo en relación con las aptitudes intelectuales (Lucuniak y Jordan, 2008; Mazzoco y Myers, 2003; Passolunghi y Lanfranchi, 2011; Stock y cols., 2009), en el desarrollo de las funciones ejecutivas relacionadas con el desarrollo de la Memoria Operativa (Bull y Scerif, 2001; Lee, Ng, Ng y Lim, 2004; Lee, Pe, Ang y Stankov, 2009; Lucuniak y Jordan, 2008; Passolunghi y Lanfranchi, 2011; Toll, Van der Ven, Kroesbergen y Van Luit (2011); con el ejecutivo central (Baddeley, 1986; Bull y Scerif, 2001; Cowan, Donlan, Shepherd, Cole-Fletcher, Saxton y Hurry, 2011; Gathercole y Pickering, 2000b; Holmes y Adams, 2006; Logie, 1993; Swanson y Kim, 2007), con el lazo fonológico (Bull y Johnston, 1997; Gathercole y Baddeley, 1993; Hecht, Torgesen, Wagner y Rashotte, 2001; Henry y MacLean, 2003; Holmes y Adams, 2006; Lee y Kang, 2002; Logie y Baddeley, 1987; Swanson y Kim, 2007) y con la agenda viso-espacial (Bull, Johnston y Roy, 1999; Gathercole y Pickering, 2000a; Holmes y Adams, 2006; Holmes, Adams y Hamilton, 2008; Jarvis y Gathercole, 2003; McLean y Hitch, 1999; Rasmussen y Bisanz, 2005; Van der Sluis, Van der Leij y de Jong, 2005). Otras sin embargo se han centrado en el papel de la memoria a largo plazo (D'Amico y Passolunghi, 2009), la memoria viso-espacial (Passolunghi y cols., 2011), las habilidades viso-espaciales (Mazzoco y Myers, 2003), la atención visual (Aunola, Leskinen, Lerkkanen y Nurmi, 2004), y otras funciones ejecutivas como la inhibición (D'Amico y Passolunghi, 2009; Toll y cols., 2011), la velocidad de procesamiento (Passolunghi y Lanfranchi, 2011) y la flexibilidad cognitiva y la monitorización (Toll y cols., 2011).

Otros estudios además se interesan por incorporar el análisis de las habilidades verbales (Aunola y cols., 2004; Passolunghi, 2011) y de lectura (Jordan y cols., 2003a y 2003b; Mazzoco y Myers 2003), la habilidad del sentido numérico y conteo en niveles iniciales de Educación Infantil (Jordan, y cols., 2007), la fluidez en el cálculo los primeros cursos de Educación Primaria (Acosta, Miranda, Fernández, Tárraga y Colomer, 2012; Fernández, Pastor, Tárraga y Feo, 2012; Fernández, Tárraga y Colomer, 2012; Lucuniak y Jordan, 2008), la habilidad de conteo en segundo y tercer ciclo de Educación Primaria (Acosta, y cols., 2012; Fernández, y cols., 2012). La habilidad de conteo también ha demostrado ser un potente predictor del rendimiento matemático (Aunola y cols., 2004; Desoete y cols., 2009). En la misma línea, la investigación de Desoete y cols., (2009) muestra que en la etapa de educación infantil la capacidad para comparar elementos no simbólicos predecía el rendimiento aritmético y la recuperación de hechos numéricos y la capacidad para comparar elementos no simbólicos.

Más específicamente en el campo de la resolución de problemas matemáticos los investigadores han ideado formas muy diferentes para inferir los procesos cognitivos y metacognitivos que subyacen a los procedimientos de solución de problemas. Así por ejemplo en el trabajo de Montague y van Garderen (2003) se han analizado las estrategias metacognitivas que subyacen a ambos grupos derivando de dicho estudio el *Mathematical Problem Solving Assessment* (MPSA). En esta línea, de acuerdo con Fernández, Tárraga y Colomer (2012) los resultados obtenidos a través de estos procedimientos han dado lugar a la formulación de diferentes modelos de procesos cognitivos que subyacen a la resolución de los problemas matemáticos. Paralelamente a estos trabajos, otras investigaciones han tratado de identificar cuáles de los constructos necesarios para la resolución de problemas son relevantes, tratando de explicar de forma más fehaciente la forma en que los sujetos se enfrentan a estas situaciones y, consecuentemente, poder diseñar procedimientos de enseñanza más eficaces y estrategias de recuperación más acertadas para los estudiantes que puedan presentar dificultades en este tipo de tareas.

En muchos alumnos, la dificultad a la hora de resolver un problema radica en el proceso mental de la comprensión del mensaje que transmiten las frases del enunciado de cada problema matemático. Los estudiantes se limitan a decodificar letras y formar palabras, pero no realizan a nivel intelectual la interpretación de la información que percibe, y por tanto, no consiguen encontrar la operación matemática que se requiere para solucionar cada situación.

Paralelamente, los trabajos sobre problemas matemáticos y memoria de trabajo, ya citados anteriormente, cálculo comprensión lectora e inteligencia como habilidad moduladora del resto de los constructos (Fernández, Tárraga y Colomer, 2012) han centrado la investigación en este campo.

En cuanto a la comprensión lectora, numerosos estudios han puesto de manifiesto la estrecha relación entre la capacidad para comprender los enunciados lingüísticos de los problemas matemáticos y la capacidad para resolverlos correctamente. En este sentido Fuchs y Fuchs (2002), Jordan y Hanich (2000), Vilenius, Aunola y Nurmi (2008) encontraron tal efecto. En una línea similar se han llevado a cabo numerosas investigaciones encaminadas a diferenciar los patrones de rendimiento en la resolución de problemas entre estudiantes con dificultades de aprendizaje de las matemáticas y lectura, y entre estudiantes con dificultades de aprendizaje únicamente en matemáticas, hallándose diferencias importantes entre ambos grupos, presumiblemente relacionadas con la capacidad para comprender los enunciados matemáticos (Fuchs y Fuchs, 2002; Jordan y Hanich, 2000).

Locuniak y Jordan (2008), Passolunghi y Lanfranchi (2011), Toll y cols. (2011), incluyen en sus trabajos la relación entre variables propias del rendimiento matemático y las aptitudes intelectuales. En ellos se constató la existencia de vínculos significativos entre medidas de habilidad en el cálculo y solución de problemas, hallando una correlación menos intensa entre la habilidad para solucionar problemas y las medidas de CI. En esta misma línea de investigación destaca el reciente trabajo de Campos, Almeida, Martínez y Ramalho (2012) donde se demuestra la importancia de los factores cognitivos relacionados con la memoria de trabajo, la atención y la inteligencia general en relación a la resolución de problemas matemáticos; en concreto con relación al factor *g* de inteligencia general, para lo cual utilizan las Matrices Progresivas de Raven (Raven, Court y Raven, 1995). Los resultados de este trabajo muestran que el factor *g* correlaciona tanto con la resolución de problemas matemáticos como con la resolución de tareas de cálculo.

Por su parte, Aragón, Delgado, Aguilar, Araújo y Navarro (2013) encontraron que los alumnos con mayor puntuación en la escala de Raven obtuvieron mejores resultados en las pruebas de matemáticas en una muestra de alumnos de Educación Infantil.

En línea con lo anterior, un gran número de estudios han respaldado la importancia que tiene la memoria de trabajo en el rendimiento en cuanto a la resolución de problemas matemáticos (Swanson, Jerman y Zeng, 2008; Zeng, Swanson y Marcoulides, 2011). Swanson y Jerman (2006) realizaron un metaanálisis de 28 estudios publicados desde 1983 en los que se compara el rendimiento en tareas cognitivas de alumnos con dificultades de aprendizaje (DA) y alumnos sin DA. En este trabajo se corroboró el déficit en los diferentes almacenes de memoria de los alumnos con DA, déficit que cuantifica en un tamaño del efecto de -0.70 en memoria de trabajo verbal, -0.63 en memoria de trabajo viso-espacial, y -0.07 en memoria a largo plazo. Sin embargo, los modelos lineales jerárquicos llevados a cabo por Swanson indicaron que la memoria de trabajo verbal es el único proceso cognitivo capaz de predecir el funcionamiento cognitivo general de los estudiantes con DA, una vez controlado el efecto del resto de variables cognitivas contempladas en el metaanálisis.

Por su parte, trabajos como los de Toll y cols. (2011) con alumnos de segundo curso de Educación Primaria, consideran que, de entre las diferentes funciones ejecutivas, la memoria de trabajo destaca como variable predictora del rendimiento matemático; quedando demostrado que, junto con la velocidad de procesamiento, la memoria de trabajo ejerce una influencia directa en la competencia matemática en sujetos de 6 años

(Passolunghi y Lanfranchi, 2011). Sin embargo, en poblaciones de estudiantes de edades superiores a 8 años hay pocos estudios que identifiquen variables predictoras del rendimiento matemático (Acosta, 2013). Dicho análisis implicaría el estudio de habilidades matemáticas de orden superior (operaciones aritméticas, resolución de problemas con números naturales, decimales y fraccionarios, etc.). De hecho, estas competencias matemáticas son habilidades que muestran más dificultades en los estudiantes medios según los datos reflejados en la evaluación de competencias matemáticas de los estudiantes de Educación Primaria realizada por el INEE (Instituto Nacional de Evaluación Educativa) en el año 2007.

Además a pesar del amplio espectro de variables que se han contemplado en las investigaciones precedentes, la principal limitación que les afecta consiste en el análisis de estos dominios por separado. En cuanto al análisis conjunto de dichas variables destacar el trabajo de Fernández, Tárraga y Colomer (2012) que han tratado de analizar estas variables de manera conjunta, con la finalidad de determinar el efecto que tienen en la resolución de problemas determinadas variables como son la inteligencia, la comprensión lectora, la memoria a corto plazo, la memoria de trabajo y la habilidad en el cálculo; llegando a la conclusión que, de este conjunto de variables, el mejor conocimiento de las operaciones aritméticas fue el mejor predictor en la resolución de problemas, por encima de los otros factores analizados y que se habían mostrado como factores estrechamente relacionados con la resolución de problemas matemáticos en investigaciones previas (Fuchs y Fuchs, 2002; Jordan y Hanich, 2000; Pape, 2004).

En este contexto el presente trabajo también se centra en el estudio de la competencia matemática y pretende profundizar más en la influencia de la inteligencia considerando dos dimensiones de la misma (verbal y no-verbal) desde una perspectiva transversal y considerando su efecto diferencial en tareas de cálculo y resolución de problemas matemáticos.

Hemos realizado las diferentes pruebas en tres poblaciones con edades diferentes, en función de que los sujetos se encuentren cursando 4º y 6º de Educación Primaria y 2º de ESO. Para ello se han propuesto una serie de tareas de cálculo, de problemas matemáticos adecuados y adaptados de sus libros escolares a cada nivel estudiado. Además se han utilizado una serie de pruebas estandarizadas que nos permiten relacionar una serie de variables que consideramos que pueden tener relevancia en el rendimiento matemático de los sujetos, analizando, en este sentido, las posibles relaciones que puedan darse entre la Inteligencia Verbal y la Inteligencia no Verbal con la competencia matemática así como entre las dos pruebas utilizadas para estudiar la Inteligencia Verbal (relaciones analógicas y conocimiento semántico).

En consecuencia, y tal y como describimos detalladamente a continuación el presente estudio ha sido realizado con un doble objetivo: *a)* evaluar su competencia matemática, al inteligencia verbal y no verbal en un estudio trasversal; *b)* analizar las interrelaciones entre estas tres variables cognitivas.

Siguiendo a la OCDE (2005) al establecer como competencia matemática la capacidad del alumno para aplicar conocimientos y habilidades y para analizar, razonar, comunicarse con eficacia ante problemas relacionados con distintas situaciones hemos diseñado distintas tareas de cálculo y resolución de problemas contextualizados en el sentido que su enunciado mantuviese un modelo mental cercano al alumno y fuesen extraídos del libro un libro de texto correspondiente a su nivel educativo.

Objetivo 1.

Establecer un perfil de nivel de competencia matemática, inteligencia verbal y no verbal en cada uno de los niveles educativos estudiados, estableciendo una doble perspectiva sincrónica y diacrónica en el grado de eficacia en cada una de las tareas propuestas.

Nuestras hipótesis respecto a este objetivo son que:

- Esperamos encontrar un patrón diferencial en el nivel de eficacia de las tareas de inteligencia verbal, no verbal, cálculo y resolución de problemas en los tres niveles educativos estudiados.

- En los niveles de 4º y 6º de Educación Primaria esperamos que el mayor nivel de eficacia se centre en las tareas de cálculo, si bien en 6º se producirá un aumento en el nivel de eficacia en todas las tareas no alcanzando las diferencias entre las mismas significatividad estadística

- En 2º de ESO habrá una igualación en el nivel de eficacia en las tres tareas propuestas.

Objetivo 2.

Establecer las relaciones entre inteligencia verbal y competencia matemática (cálculo y resolución de problemas), y entre inteligencia no verbal y competencia matemática en cada uno de los niveles educativos estudiados.

Nuestras hipótesis respecto a este objetivo son que:

- Esperamos que exista una relación positiva y altamente significativa entre inteligencia verbal y no verbal y resolución de problemas matemáticos en los tres niveles educativos.
- La relación significativa en las dos tareas de inteligencia verbal y resolución de enunciado matemáticos será similar en los niveles de 4º y 6 de Educación Primaria, siendo superior la de relaciones conceptuales frente a semántica en alumnado de 2º de E.S.O. debido al nivel de lectura experta contextualizada.
- No esperamos que la relación entre inteligencia verbal y cálculo sea significativa, pero sí entre inteligencia no-verbal y cálculo en los tres niveles educativos.

Objetivo 3.

Analizar el valor predictivo de la Inteligencia Verbal (semántica/relaciones analógicas) y la Inteligencia no-Verbal en tareas de competencia matemática (cálculo y resolución de problemas) en cada uno de los niveles educativos seleccionados.

En este sentido, nuestras hipótesis son:

- La Inteligencia no-Verbal se manifestará como un factor altamente predictivo en ambas tareas de competencia matemática (cálculo y resolución de problemas) en los tres niveles educativos estudiados.

-La Inteligencia Verbal será un factor altamente predictivo en Resolución de Problemas, ejerciendo mayor peso la IV2 (relaciones analógicas en el nivel de 2º de E.S.O.).

4.2.- MÉTODO

4.2.1.- Participantes

En esta investigación se han seleccionado 226 sujetos (de una muestra total de 221 sujetos) con edades comprendidas entre los 10 y los 14 años, sujetos correspondientes a alumnado de 4º y 6º curso de Educación Primaria y de 2º de ESO, con una media de edad de 10:3

para los 79 sujetos de 4º de Educación Primaria, de 12:5 para los 72 sujetos de 6º de EP y de 14:2 para los 45 sujetos de 2º de ESO.

Tabla 3

Designación y características de la muestra por nivel educativo y el género.

	4º EP	**6º EP**	**2º ESO**
NIÑOS	35	34	31
NIÑAS	44	38	24
TOTAL	79	72	75

En cuanto a la distribución de la muestra por género, decir que no se esperan diferencias relativas al mismo, tal y como muestran los estudios previos de Aragón, Delgado, Aguilar, Araújo y Navarro (2013) y Spelke (2005), entre otros, donde no encontraron diferencias significativas en cuanto al género en el rendimiento matemático a pesar de que los resultados del informe PISA sí muestran diferencias en función de esta variable, a pesar de que estas diferencias parecen haber disminuido desde el informe PISA-2000 hasta el PISA-2006.

Los estudiantes fueron seleccionados de 3 centros públicos (CEIP) y un centro concertado (Educación Secundaria) que con anterioridad habían colaborado en estudios realizados por el grupo de investigación al que se adscribe este trabajo. Respecto a la localización de los centros escolares, los públicos se ubican en la provincia de La Coruña, en zona rural de interior, el Centro Concertado se ubica en la ciudad de La Coruña.

Como criterios de inclusión de la muestra se establecieron:

- No presentar dificultades de aprendizaje, en especial en tareas de lectura y escritura según informe del tutor/a de cada grupo.
- Escolarización en cada uno de los niveles seleccionado.
- Presentar una amplitud de memoria a corto plazo similar de acorde al nivel educativo en tarea de Dígitos.

Sin embargo, de la muestra inicial fueron eliminados 5 alumnos/as pertenecientes a 4º de Educación Primaria, a pesar de cumplir según informe del tutor y psicopedagogo, porque puntuaron 0 en ambas pruebas de competencia matemática y un alumno de 6º de Educación Primaria porque, a pesar de tener buenas puntuaciones en las pruebas estandarizadas, no se presentó a clase el día en el que se realizaron las tareas de competencia matemática.

4.2.2- Instrumentos

Se han utilizado tres instrumentos diferentes: uno para Inteligencia Verbal y no Verbal (estandarizado) y dos de conocimiento matemático (no estandarizados).

a) Pruebas de Inteligencia Verbal y no-Verbal

El BADyG es un test que está orientado a medir la inteligencia general y el razonamiento lógico mediante la aplicación de unas subpruebas (relaciones analógicas, completar oraciones, tareas de cálculo, etc.). Del BADyG se han utilizado las subpruebas **Sv** (Completar oraciones), **Rv**

(Relaciones analógicas) y **Re** (Matrices lógicas). Para los sujetos de 4º de primaria se ha utilizado el BADyG E2 renovado (Yuste, 1998). Para el nivel de 6º de primaria se ha utilizado el BADyG E3 renovado (Yuste, Martínez y Galve, 2007). Para los sujetos de 2º de ESO se ha utilizado el BADyG M (Yuste y Martínez, 2011).

Los motivos por los que se han seleccionado las pruebas **Sv** (Completar oraciones) y **Rv** (Relaciones analógicas) han sido los siguientes:

- La prueba Sv evalúa el nivel de conocimiento semántico, lo que implica que los sujetos han de realizar una serie de operaciones de reconocimiento de vocabulario así como de rememorar experiencias o conocimientos previos. Requiere, por tanto, una serie de conocimientos previos, tanto de sintaxis de la lengua como de cultura general (inteligencia pragmática); conocimientos implícitos en la tarea de comprensión de enunciados matemáticos

- La prueba Rv evalúa relaciones conceptuales de tipo verbal. Se utilizan contenidos verbales, conceptos y se pide reconocer relaciones analógicas entre parejas lo que conlleva una operación de reconocimiento de significado y relaciones semánticas (que podríamos denominar de primer orden). No es exactamente una prueba de compresión, ni de vocabulario, sino de razonamiento inductivo que permite medir la Inteligencia Verbal.

A la hora de comprender un enunciado matemático debemos activar nuestra memoria semántica, acceder de modo correcto a los conceptos allí presentes y, posteriormente, establecer una relación entre ellos. En este sentido una evaluación del nivel de competencia para establecer relaciones conceptuales ha hecho que seleccionemos, por tanto, la prueba Rv.

La tarea de completar oraciones consta de una serie de oraciones que hay que completar con la palabra que mejor se adapte al enunciado en cuestión, con cinco alternativas de respuesta; por ejemplo: *en el sobre de las cartas....................el sello antes de echarlas al correo* (quitamos, sacamos, pintamos, cambiamos, pegamos).

La tarea de relaciones analógicas es una prueba específica de razonamiento y compresión verbal y trata de buscar la palabra (de una serie de cinco alternativas de respuesta) que continúe mejor el sentido de cada expresión analógica; por ejemplo: *El elefante es grande, pero los ratones son.......................* (pequeños, numerosos, roedores, miedosos, animales).

Para el estudio de la **inteligencia no verbal** se ha utilizado la subprueba de Matrices lógicas (Re) del BADyG.

La prueba de las matrices lógicas implica relacionar, de manera lógica, conjuntos de datos codificados visualmente en forma de figuras geométricas; de manera que, de un conjunto de 5 elementos posibles, hemos de seleccionar el que complete la serie o el dibujo de manera correcta.

En estudios precedentes contamos con referencias sobre el uso de las Escalas de Matrices Progresivas Raven Color (CPM), realizada por Raven (1938) que como bien es sabido estima la capacidad deductiva y el factor “g” de la inteligencia general. Sin embargo se trata de un test no verbal donde el sujeto ha de utilizar habilidades perceptuales, de observación y razonamiento analógico. Al no valorar Inteligencia Verbal decidimos utilizar una misma prueba que contemplase dichos aspectos y que fuese la misma (obviamente baremada para distintas edades) la utilizada.

b) Pruebas de competencia matemática

También se han elaborado unas pruebas de cálculo y de resolución de problemas matemáticos adaptados a cada uno de los niveles estudiados, en concordancia con los expuestos en los libros de matemáticas de cada nivel en cuestión, si bien la evaluación de la competencia matemática puede ser evaluada a través de pruebas estandarizadas destinadas a este fin tales como los cuadernillos de la Batería Psicopedagógica EVALÚA (García, González, García y García, 2009)

Sin embargo, debido a que no contábamos con una prueba que contemplase todo el ciclo evolutivo estudiado en esta investigación y de cara a contextualizar lo máximo posible el estudio, preferimos optar por la selección de estos materiales de evaluación a partir de tareas de cálculo y resolución de problemas presentes en los libros de texto de cada nivel educativo.

En los criterios de selección de las tareas tuvimos en cuenta los criterios de competencia matemática de 4º y 6º de EP y ESO previamente expuestos en la parte teórica (INEE, 2011, INEE, 2011b).

Así en E. P. seleccionamos las tareas en base a las áreas de contenidos: números (números naturales, fracciones y decimales, expresiones numéricas con números naturales y modelos y relaciones), formas y mediciones geométricas (puntos, líneas y ángulos y formas bidimensionales y tridimensionales) y representación de datos (números naturales, organización y representación). Así como los dominios cognitivos: conocer (recordar, reconocer/ identificar, recuperar, medir y clasificar/ ordenar), razonar (analizar, generalizar/ especializar la resolución de un problema, integrar/sintetizar, justificar con pruebas de validez matemática y resolver problemas no rutinarios en contextos no conocidos) y aplicar (seleccionar un método o estrategia para solucionar un problema, representar, modelizar, poner en práctica y resolver problemas rutinarios). En 2º de ESO nos guiamos por los siguientes contenidos y dominios cognitivos: a) áreas de contenido: números (números enteros, fracciones y decimales y razón, proporción y porcentaje), álgebra (patrones, expresiones algebraicas y ecuaciones-fórmulas y funciones), geometría (formas y medidas geométricas y posición y movimiento) y datos y probabilidad (organización, representación e interpretación de datos y probabilidad). T en el de dominios cognitivos: conocimiento (hechos, procedimientos y conceptos), razonamiento (forma de enfrentamiento a situaciones nuevas, contextos y problemas complejos) y aplicación (resolver problemas o responder a cuestiones).

Para ello se contó con la ayuda de los docentes a la hora de seleccionar las tareas concretas que a continuación enumeramos y explicamos:

Problemas de 4º de Educación Primaria

Para los sujetos de 4º de Educación Primaria se han elaborado problemas matemáticos que requieren la utilización de sumas y restas sencillas y combinadas, así como problemas que implican divisiones sencillas que implican conocer el cociente y el resto. También se ha propuesto un problema que requiere multiplicar por la unidad seguida de ceros.

El primer enunciado requiere resolver una operación sencilla de dividir **a** entre **b**, donde el resultado y el resto responden a las dos preguntas que propone el enunciado.

El segundo problema requiere resolver una operación sencilla de sustracción del tipo **a-b=c**; donde **c** es la solución al problema.

El tercer problema implica realizar las siguientes operaciones matemáticas combinadas de suma y resta: **a-b=c**; **c=d+d+d+e**; donde **a**, **b** y **e** son cantidades conocidas de manera que el sujeto ha de buscar el valor de **d**.

En el ejercicio número cuatro los sujetos han de resolver las siguientes multiplicaciones: **a x 10=b**; **a x 100= c**; donde **b** y **c** son las soluciones del problema.

En el último problema los sujetos han solucionar las siguientes operaciones de fracciones: **1/3 de a=b**; **b/10=c**; donde **a** es una cantidad conocida y **c** es la solución.

Problemas para 6º de Educación Primaria

Para los sujetos de 6º de Primaria se han utilizado problemas matemáticos que requieren el empleo de sumas y restas (sencillas y combinadas), de multiplicaciones sencillas y de fracciones (para calcular una fracción a partir de una cantidad).

El primer enunciado matemático implica resolver la siguiente operación de sumas y restas sencillas **a=b+c-d+e**.

El segundo problema implica realizar una serie de operaciones combinadas de sumas y restas sencillas del tipo **a=b-c**; **d=e-f**; **g=a-d**.

El tercer problema requiere resolver una multiplicación sencilla del tipo **a=b x c**, donde **b** es un número de dos cifras y **c** es un número de una cifra.

El cuarto de los enunciados requiere identificar dos fracciones y decidir qué fracción es mayor, del tipo **a/b** donde a y b son números de una cifra.

El último de los problemas matemáticos requiere resolver una fracción de una cantidad dada del tipo **x=2/5 de y**; donde y es una cantidad de tres cifras.

Problemas para 2º de ESO

Para los sujetos de 2º de ESO se han propuesto una serie de problemas que requieren el empleo de reglas de tres, fracciones y resta de la unidad, la utilización del Teorema de Pitágoras y la realización de sumas, restas y multiplicaciones combinadas.

Cálculo para 4º de Educación Primaria

Para los alumnos de 4º de Primaria se han propuesto ejercicios para multiplicar cantidades decimales por la unidad seguida de ceros; el cálculo de operaciones combinadas de suma, resta y multiplicación de cantidades simples; la resolución de operaciones simples de multiplicación y división a la que le falta un factor, y el cálculo de fracciones sencillas.

El primer ejercicio implica multiplicar cantidades decimales por la unidad seguida de ceros.

La segunda tarea requiere completar operaciones sencillas de multiplicación o división a las que les falta uno de los factores, del tipo **a x b=c**; **a/b=c** siendo **a** y **c** números sencillos conocidos.

El tercer ejercicio requiere resolver una serie de operaciones combinadas de sumas, restas y multiplicaciones de números de una cifra, aplicando las reglas de multiplicar y de resolver los paréntesis en primer lugar, del tipo **a x b + c= d**; **(a+b) x c=d**; **axb- c x d=e**.

El cuarto ejercicio requiere calcular fracciones de una cantidad, del tipo **a/b de x**, siendo **x** una cantidad sencilla múltiplo de **b**.

La quinta y última tarea consiste en relacionar divisiones que tengan el mismo cociente, del tipo **a:b**; **a:c**; **a:d** para relacionarlas con otras del tipo **e:f**; **g:h**; **i:j**.

Cálculo para 6º de Educación Primaria

Para el alumnado de 6º de Primaria se han utilizado tareas similares en cuanto a la utilización de estas mismas operaciones, es decir, sumas y restas de cantidades, pero a mayores se han propuesto tareas de escribir cantidades decimales en forma de fracción, sumas y restas de fracciones y ordenar fracciones.

El primero de los ejercicios requiere escribir en forma de fracción decimal una serie de cantidades, del tipo **x=y/100**; siendo **x** un número decimal e **y** un número natural.

El segundo ejercicio implica ordenar de mayor a menor una serie de fracciones, del tipo **a/b**; **c/d**; **e/f**; **c/a**, siendo **a, b, c, d, e, f** números naturales de una cifra.

El tercer ejercicio consiste en completar operaciones de sumas y restas a las que les falta un factor, del tipo **a-b=c**; **a+b+c+d=e**; siendo **a, b, c, d, e** números de dos cifras con dos decimales.

La cuarta tarea implica sumar y restar fracciones a partir de buscar el mínimo común múltiplo, del tipo **a/b+c/b+a/d=x**; siendo **a, b, c, d** números naturales de una cifra, y **x** una fracción resultante de las primeras.

La última tarea consiste en resolver operaciones combinadas de suma, resta y multiplicación, aplicando las prioridades de resolver primeramente los paréntesis y las multiplicaciones, del tipo **a+b-c=d**; **a-(b+c)+d=e**, siendo **a, b, c, d** números naturales de dos cifras; y del tipo

$(a+b) \times c \times d=e$, siendo **a** y **b** dos números naturales de dos y una cifra respectivamente, y **c** y **d** dos números naturales de una cifra.

Cálculo para 2º de ESO

En cuanto a las tareas de cálculo para los sujetos de 2º de ESO se han propuesto: tareas con fracciones en las que han de determinar cuál de dos fracciones es mayor, resolución de ecuaciones de primer y segundo grado, ejercicios de sistema métrico que implica operar con la unidad seguida de ceros.

El primer ejercicio implica determinar que fracción es mayor de una serie de parejas de fracciones del tipo **a/b** vs. **c/d**, donde **a**, **b**, **c** y **d** son números naturales conocidos de una o dos cifras, de manera que los sujetos han de determinar, en caso necesario, el mínimo común múltiplo.

El segundo y el tercer ejercicio requieren resolver una serie de ecuaciones sencillas de primer y segundo grado realizando operaciones con números naturales conocidos.

El cuarto ejercicio demanda la resolución de una potencia, del tipo **$(a_x b_x c)^d$**, siendo **a, b, c** y **d** números naturales conocidos de una cifra.

El quinto y último ejercicio requiere el cambio de unidades de medidas lineales consistentes en multiplicar o dividir por la unidad seguida de ceros, es decir, pasar de **km.** a **m.**, de **hm.** a **cm.**, en medidas de capacidad.

4.2.3.- Procedimiento

Para realizar esta investigación se han aplicado todas las pruebas del apartado anterior a los sujetos de forma colectiva y en horario escolar; en sesiones amablemente cedidas por tutores y maestros.

Una vez seleccionados los grupos de edad con los que queríamos realizar nuestra investigación nos hemos puesto en contacto con los Centros. Para ello se acordaron una serie de visitas informativas con tutores y orientadores de los mismos; para explicar nuestra investigación y para pedir su colaboración a la hora de pasar las diferentes pruebas a cada grupo de edad.

Una vez obtenido el visto bueno de tutores y orientadores se elaboraron unas autorizaciones para que los niños pudiesen presentar en sus casas, informando de que las pruebas que se les iban a pasar a los niños servirían para obtener información sobre ellos, de manera que tanto los tutores como los Departamentos de Orientación de los centros recibirían unos informes que les permitirían, en última instancia, valorar, evaluar y mismo detectar posibles dificultades en los alumnos. Estas pruebas servirían, al mismo tiempo, como muestra para mi investigación, tratando siempre, evidentemente, e forma confidencial los resultados obtenidos.

Tras autorizar la realización de las pruebas por parte de las familias, tanto tutores como orientadores se prestaron a ceder sus horas lectivas para la recogida de datos, llegando a colaborar de manera directa en la recogida de los mismos apoyándome y ayudándome en numerosas ocasiones.

Primeramente se pasaron las subpruebas del BADYG, tanto las relativas al análisis de la Inteligencia Verbal (Completar oraciones y Relaciones analógicas) como de la Inteligencia No Verbal (Matrices lógicas). Para ello se les leía a los sujetos las instrucciones del cuadernillo de cada una de las subpruebas y se resolvían los ejemplos de muestra. A continuación se les pedía a los sujetos que resolviesen la subprueba correspondiente respetando los tiempos asignados para cada prueba y grupo de edad.

Finalmente, se les pasaba una serie de Problemas Aritméticos (5 problemas) y unos ejercicios de Cálculo (5 ejercicios), de manera que tanto la resolución de los problemas como los ejercicios de cálculo implicaban la realización de operaciones matemáticas similares y adaptadas, lógicamente, a cada nivel educativo.

No se contrabalanceó la presentación de las tareas ya que al medir aspectos diferenciados no se esperaba un sobreaprendizaje de unas sobre otras.

4.2.3.1. Puntuación de las pruebas

En el caso de las subpruebas del BADYG se asignan unos centiles a las puntuaciones directas obtenidas en cada sujeto de cada grupo de edad de acuerdo a la escala del test (ver Anexo 1).

En cuanto a la resolución de Problemas Matemáticos se le ha asignado 1 punto a cada enunciado interpretado y por lo tanto planteado correctamente.

En lo que respecta a la resolución de las operaciones matemáticas de Cálculo también se le ha asignado 1 punto a cada ejercicio correctamente resuelto. También se da la posibilidad de que las diferentes operaciones matemáticas que conforman cada ejercicio no estuviesen correctamente resueltas en su totalidad; en este caso se atribuye una puntuación proporcional a las operaciones correctamente resueltas.

4.2.4.- Diseño

En función de los objetivos planteados de esta investigación se deriva un doble estudio:

En primer lugar llevamos a cabo un estudio experimental de corte transversal donde analizamos nuestro primer objetivo. A continuación realizamos un estudio correlacional entre las distintas medidas al tiempo que analizamos el valor predictivo de la Inteligencia Verbal y no-Verbal sobre las medidas de competencia matemática. Para posteriormente evaluar el valor predictivo de las variables cognitivas: Inteligencia Verbal/Inteligencia no-Verbal.

Las variables Inteligencia Verbal y No Verbal fueron evaluadas a través del Badyg con las siguientes subtareas: Completar oraciones **Sv** y Relaciones analógicas **Rv** en el caso de Inteligencia Verbal y de Matrices lógicas **Re** en Inteligencia no Verbal (tareas descritas en el apartado instrumentos).

La competencia matemática la evaluamos a través del cálculo y la resolución de problemas, en las tareas de cálculo los sujetos de cada grupo de edad han tenido que resolver una serie de ejercicios con tareas similares a las operaciones de los enunciados matemáticos.

4.3.- ANÁLISIS ESTADÍSTICOS

Inicialmente se realizó un análisis descriptivo por niveles educativos de los resultados tras la aplicación de las diferentes pruebas que se emplearon en el estudio. Para ello iremos identificando, en primer lugar, el perfil del alumnado en los diferentes niveles educativos y en las diferentes tareas.

A) PERFIL DEL ALUMNADO DE 4º DE PRIMARIA.

Tabla 4.

Puntuaciones descriptivas referidas a los porcentajes obtenidos en las distintas pruebas en 4º de E.P.

	Máx.	Mín.	DESV. TÍPICA	MEDIA
Inteligencia Verbal 1	100	20	14.13	66.80
Inteligencia Verbal 2	100	26	13.68	64.95
Inteligencia no Verbal	100	25	17.45	57.33
Resolución de Problemas	100	23	16.71	51.93
Cálculo	100	22	14.60	53.11

Los porcentajes medios de aciertos en las tareas muestran que las más sencillas son las relacionadas con la Inteligencia Verbal 1 (Semántica, Completar oraciones) e Inteligencia Verbal 2 (Relaciones Analógicas), seguidas por las tareas de Inteligencia no Verbal; siendo las tareas de Cálculo y Resolución de Problemas las que presentan mayor dificultad.

Una vez analizados los resultados descriptivamente, procedimos a realizar el contraste de medias entre las distintas puntuaciones. Los resultados aparecen en las Tablas 5 y 6.

Tabla 5

Niveles de significación del contraste de medias entre las puntuaciones de inteligencia verbal (IV1), inteligencia no verbal (INV) y de competencia matemática obtenidas por el grupo de 4º de Primaria en las diferentes pruebas

	IV1-IV2	***IV1-InV***	***IV1-Cálculo***	***IV1- Problemas***
Contrastes de Medias	$t_{(2,79)}$=12,333 .698	$t_{(2,79)}$=11,763 .037*	$t_{(2,79)}$=17,399 .0001**	$t_{(2,79)}$=18,365 .0009**

*p<.05;**p<.001

Tabla 6

Niveles de significación del contraste de medias entre las puntuaciones de inteligencia verbal (IV2), inteligencia no verbal (INV) y competencia matemática, así como entre las medidas de competencia matemática entre sí, obtenidas por el grupo de 4º de Primaria en las diferentes pruebas

	IV2-InV	**IV2-Cálculo**	**IV2-Problemas**	**InV-Cálculo**	**InV-Problemas**	**Cálculo-Problemas**
Contrastes de Medias	$t_{(2,79)}$=9,877 .018*	$t_{(2,79)}$=15,309 .0009**	$t_{(2,79)}$=18,917 .001*	$t_{(2,79)}$=19,338 .059	$t_{(2,79)}$=14,877 .039*	$t_{(2,79)}$=10,077 .061

*p<.05;**p<.001

Los resultados muestran diferencias significativas entre todas las variables a excepción de IV1-IV2, y de Inteligencia No Verbal- Cálculo y las dos tareas de competencia matemática, siendo los niveles de significatividad estadística mayores con relación a la resolución de problemas matemáticos y cálculo ($p<.001$).

La eficacia en IV2 se presentó significativa con respecto a todas las demás medidas, siendo los niveles de significatividad estadística mayores con relación a la resolución de problemas matemáticos y cálculo ($p<.001$).

Los alumnos mostraron un nivel significativamente mayor en Inteligencia no Verbal (INV) que en las tareas de competencia matemática alcanzando la significatividad estadística sólo con relación a la resolución de problemas.

Con relación a las dos pruebas de competencia matemática los sujetos se mostraron mejores en cálculo que en resolución de problemas. Las diferencias no fueron estadísticamente significativas.

B) PERFIL DE ALUMNADO DE 6º DE PRIMARIA.

A continuación se presentan los datos correspondientes al grupo de 6º Educación Primaria.

Tabla 7

Puntuaciones descriptivas referidas a los porcentajes obtenidos en las distintas pruebas en 6º de E.P

	Máx.	**Mín.**	**DESV. TÍPICA**	**MEDIA**
Inteligencia Verbal 1	100	22.88	12.51	55.96
Inteligencia Verbal 2	100	20.28	11.47	57.93
Inteligencia no Verbal	100	19.28	12.46	53.95
Resolución de Problemas	86.6	13,06	15.09	50.71
Cálculo	80	11	16.45	40.21

Las tareas más sencillas son las relacionadas con Inteligencia Verbal 1 (Completar Oraciones, semántica) y la Inteligencia Verbal 2 (Relaciones Analógicas) seguidas por las tareas de Inteligencia no Verbal1 siendo, nuevamente, las tareas de Resolución de Problemas y Cálculo las que presentan mayor dificultad.

Los contrastes de medias (ver Tablas 8 y 9) muestran lo siguiente: las diferencias son significativas sólo entre IV1 y competencia matemática, a favor de IV1.

Tabla 8

Niveles de significación del contraste de medias entre las puntuaciones de inteligencia verbal (IV1), inteligencia no verbal (INV) y de competencia matemática obtenidas por el grupo de 6º de Primaria en las diferentes pruebas

	IV1-IV2	***IV1-InV***	***IV1-Cálculo***	***IV1- Problemas***
Contrastes De Medias	$t_{(2,79)}=15,433$	$t_{(2,79)}=17,709$	$t_{(2,79)}=21,569$	$t_{(2,79)}=15,390$
	.279	.572	.0001**	.049*

p<.05;p<.001*

Tabla 9

Niveles de significación del contraste de medias entre las puntuaciones de inteligencia verbal (IV2), inteligencia no verbal (INV) y competencia matemática, así como entre las medidas de competencia matemática entre sí, obtenidas por el grupo de 6º de Primaria en las diferentes pruebas

	IV2- InV	**IV2-Cálculo**	**IV2-Problemas**	**InV-Cálculo**	**InV-Problemas**	**Cálculo-Problemas**
Contrastes	$t_{(2,79)}=9,800$	$t_{(2,79)}=19,099$	$t_{(2,79)}=23,987$	$t_{(2,79)}=13,800$	$t_{(2,79)}=19,099$	$t_{(2,79)}=23,987$
de Medias	.605	.0009**	.049*	.005	.076	.009*

p<.05;p<.001*

C) PERFIL DEL ALUMNADO DE 2º DE ESO.

En cuanto a las puntuaciones del grupo de 2º de ESO, se pueden observar en la Tabla 10 y en la Figura 4.

Tabla 10

Puntuaciones descriptivas referidas a los porcentajes obtenidos en las distintas pruebas en 2º de ESO.

	Máx.	**Mín.**	**DESV. TÍPICA**	**MEDIA**
Inteligencia Verbal 1	100	57.14	9.33	77.15
Inteligencia Verbal 2	90	40	12.12	67.96
Inteligencia no Verbal	100	50	14.81	79.11
Resolución de Problemas	100	12.6	15.09	60.39
Cálculo	100	33.25	16.42	77.01

Las tareas más sencillas son las relacionadas con la Inteligencia No Verbal, seguidas muy de cerca, y prácticamente al mismo nivel, por las tareas de Inteligencia Verbal 1 (Completar Oraciones) y las tareas de Cálculo; siendo las tareas de Inteligencia Verbal 2 (Relaciones Analógicas) y las tareas de Resolución de Problemas matemáticos las que presentan mayores dificultades, especialmente, estas últimas.

Posteriormente, se procedió al contraste de medias que se presentan en las Tablas 11 y 12, que mostraron lo siguiente:

Tabla 11

Niveles de significación del contraste de medias entre las puntuaciones de inteligencia verbal (IV1), inteligencia no verbal (INV) y de competencia matemática obtenidas por el grupo de 2º ESO en las diferentes pruebas

	IV1-IV2	***IV1-InV***	***IV1-Cálculo***	***IV1- Problemas***
Contrastes	$t_{(2,79)}=18,788$	$t_{(2,79)}=19,876$	$t_{(2,79)}=13,877$	$t_{(2,79)}=17,766$
de Medias	.021*	.543	.987	.004*

**p<.05*

Tabla 12

Niveles de significación del contraste de medias entre las puntuaciones de inteligencia verbal (IV2), inteligencia no verbal (INV) y competencia matemática, así como entre las medidas de competencia matemática entre sí, obtenidas por el grupo de 6º de Primaria en las diferentes pruebas

	IV2-InV	**IV2-Cálculo**	**IV2-Problemas**	**InV-Cálculo**	**InV-Problemas**	**Cálculo-Problemas**
Contrastes de Medias	$t_{(2,79)}=11,433$	$t_{(2,79)}=23,871$	$t_{(2,79)}=21,911$	$t_{(2,79)}=14,338$	$t_{(2,79)}=15,022$	$t_{(2,79)}=22,222$
	.005*	.009*	.003*	.865	.0001**	.0006**

p<.05;p<.001*

Diferencias significativas entre IV1 e IV2 siendo más eficaces en la primera prueba; entre IV2- InV y las dos tareas de competencia matemática a favor de la InV y el Cálculo y a favor de la IV2 con relación a los problemas.

En cuanto a las tareas de competencia matemática fueron significativamente mejores en Cálculo que en problemas.

D) PERFIL EVOLUTIVO DE LOS TRES GRUPOS ANALIZADOS.

El patrón de eficacia en las distintas pruebas por los distintos grupos de edad muestra un patrón de eficacia en ciertos aspectos coincidentes y en gran parte diferente:

- El grupo de 2º de ESO se mostró como el más eficaz en las distintas tareas.

- El grupo de 4º E.P. se mostró, sorprendentemente, más eficaz que el de 6º E.P.

- El grupo de 2º de ESO y 4º de EP presentan un patrón de eficacia similar aunque en las tareas de en competencia matemática mientras que los de 4º muestran un patrón similar en ambas tareas, los de 2º son más eficaces en cálculo.

- En Inteligencia Verbal el patrón es similar entre 4º y 6º de EP siendo mayor el de 4º. En 2º de ESO se produce un decremento en el nivel de Inteligencia Verbal referente a relaciones analógicas.

- A nivel de Inteligencia no-Verbal los grupos de Educación Primaria presentan un nivel de eficacia inferior con respeto a la Inteligencia Verbal, invirtiéndose esta relación en el grupo de 2º de ESO donde esta variable se presenta como la de mayor puntuación.

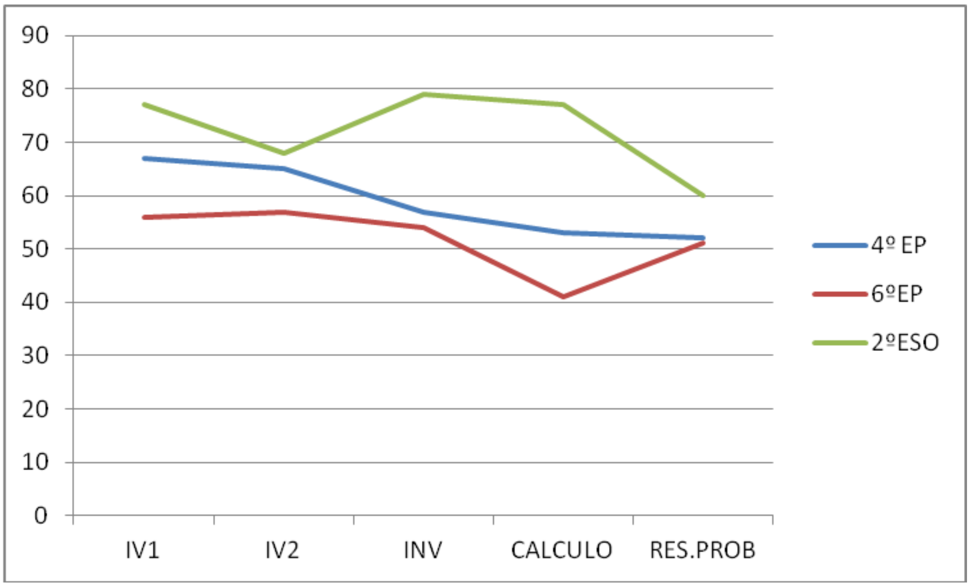

Figura 4. *Pauta comparativa de desarrollo, expresada en porcentajes, de las distintas pruebas en los tres niveles educativos.*

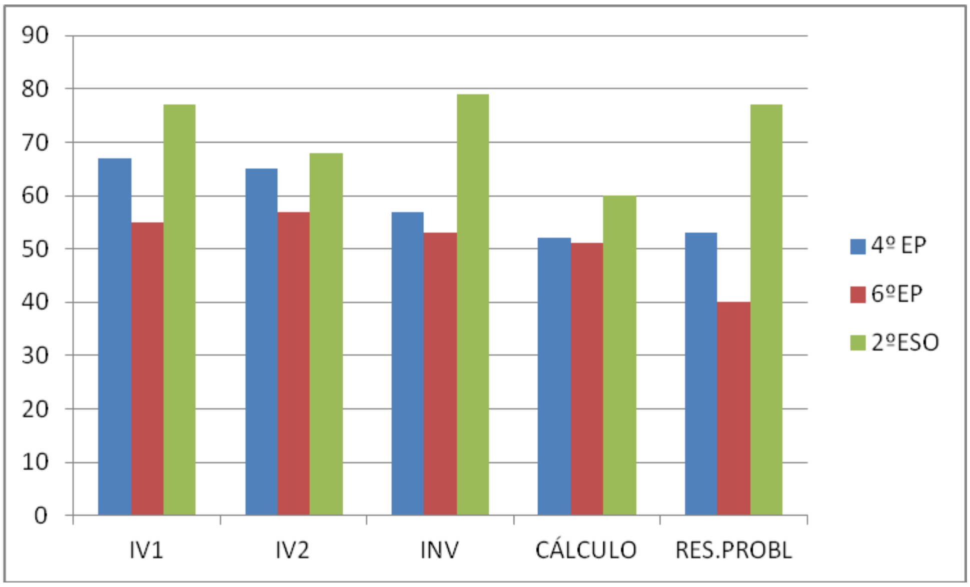

Figura 5. *Comparación de porcentajes de medias obtenidas en función de cada prueba en cada uno de los distintos niveles educativos evaluados*

En base a los datos obtenidos se realizaron los consiguientes Anovas y pruebas a posteriori:

Los análisis de varianza para comprobar el efecto de la variable edad sobre las distintas medidas mostró tener un efecto significativo sobre las variables objeto de estudio: Inteligencia no-verbal $F_{(3,97)}$= 21,456; p<.01;Inteligencia Verbal I (semántica) $F_{(3,97)}$= 12,345; p<.01; Inteligencia Verbal II (relaciones analógicas) $F_{(3,97)}$ =16,766; p<.05; Cálculo $F_{(3,97)}$= 21,488; p<.001 y Resolución de problemas matemáticos $F_{(3,97)}$=23,876; p<.05.

Los contrates de medias intergrupo a través de la prueba Scheffé en las distintas medidas mostraron:

- Diferencias significativas entre 4º - 6º de E.P. en IV1 (semántica) y en IV2 (relaciones analógicas) a un nivel p<.05 a favor del grupo de 4º de Educación Primaria. No se encontraron diferencias significativas en INV (Inteligencia no-Verbal) y Resolución de Problemas. Pero sí en cálculo a favor de 4º de EP ($p<.01$).

- Diferencias significativas entre 4º EP y 2º ESO a un nivel $p<.001$ en las medidas de Inteligencia no Verbal y Cálculo y a un nivel de $p<.05$ en Cálculo e IV1 a favor del grupo de Secundaria.
- Diferencias significativas entre 6º de E.P. y 2º de ESO en IV1 (semántica), INV y Cálculo a un nivel de significación ($p<.001$), en IV2 (relaciones analógicas) ($p<.01$) y en Resolución de Problemas ($p<.05$) a favor del grupo de 2º de Educación Secundaria.

E) RELACIÓN ENTRE LAS DISTINTAS VARIABLES

A continuación procedimos a analizar la relación entre las distintas medidas en cada uno de los niveles educativos. Los índices de correlación de Pearson en los tres niveles educativos para el total de participantes se muestran en las Tablas 13,14 y 15.

Los resultados muestran que todas las pruebas correlacionan significativamente a nivel intergrupo, a excepción de la IV2 (referida a las Relaciones Analógicas) entre 4º de EP y 2º de ESO, de la INV entre 4º y 6º de EP, y la Resolución de Problemas entre 6º de EP y 2º de ESO.

En las tablas siguientes mostramos los niveles de significación para las diferentes variables derivados de aplicar la prueba de Pearson.

Tabla 13

Niveles de significación de la prueba de Pearson para el grupo de 4º de Primaria en las diferentes pruebas

	IV1	IV2	INV.	Problemas	Cálculo
IV1	1	.681*	.504*	.304*	.084
IV2		1	.409*	.301*	.119
INV			1	.346*	.213
Problemas				1	.425*
Cálculo					1

*p<.05 bilateral

Tal y como muestra la Tabla 13, en 4º de Primaria las correlaciones mostraron que las medidas de Inteligencia Verbal correlacionan de forma positiva y significativa entre sí, así como las de Inteligencia Verbal y No Verbal con la Resolución de Problemas. También se encontraron correlaciones positivas y significativas entre Resolución de Problemas y Cálculo.

Por el contrario no se encontró una correlación significativa entre Inteligencia Verbal e Inteligencia No Verbal con el Cálculo.

Tabla 14

Niveles de significación de la prueba de Pearson para el grupo de 6º de Primaria en las diferentes pruebas

	IV1	IV2	INV.	Problemas	Cálculo
IV1	1	.746*	.450*	.377*	.412*
IV2		1	.525*	.372*	.427*
INV			1	.258	.431*
Problemas				1	.399*
Cálculo					1

*p<.05 bilateral

La Tabla 14 muestra como para el grupo de 6º de Primaria todas las variables correlacionan positiva y significativamente entre sí, a excepción de la Inteligencia No Verbal con la Resolución de Problemas.

Tabla 15

Niveles de significación de la prueba de Pearson para el grupo de 2º de ESO en las diferentes pruebas.

	IV1	IV2	INV.	Problemas	Cálculo
IV1	1	-.123	.682*	.547*	.390*
IV2		1	-.117	-.132	-.257
INV			1	.666*	.237
Problemas				1	.261
Cálculo					1

*p<.05 bilateral

En la Tabla 15 se aprecia como en los sujetos de secundaria la IV1 correlaciona positiva y significativamente con la INV, con la Resolución de Problemas y con el Cálculo. También se encontraron correlaciones positivas entre la INV y la Resolución de Problemas Matemáticos.

Por el contrario, no se encontraron correlaciones significativas en para la IV2 con ninguna de las otras variables, así como tampoco entre el Cálculo con la IV2, la INV y la Resolución de Problemas.

F) VALOR PREDICTOR DE LA INTELIGENCIA VERBAL Y NO VERBAL EN LA COMPETENCIA MATEMÁTICA:

Para analizar este aspecto se aplicó un modelo de regresión múltiple a fin de identificar el valor predictor de la Inteligencia Verbal y No-Verbal en las tareas de competencia matemática (cálculo y resolución de problemas). Los resultados mostraron:

La regresión de la variable IV1 (semántica) en 4º de E.P. es significativa únicamente con las medidas de Resolución de Problemas explicando el 19,5% de la varianza (F= 11,65, Beta = 0,44; B = 0,19; p <,002), la Inteligencia Verbal 2 (relaciones analógicas) con la Resolución de problemas explicando el 15% de la varianza (F= 11,65, Beta = 0,44; B = 0,19; p <,005) y la Inteligencia no- Verbal también con la Resolución de Problemas explicando el 9,6% de la varianza (F= 5,13, Beta = 0,31; B = 0,13; p <,03).

La regresión de la variable IV1 (semántica) en 6º de E.P. es significativa con las medidas de Resolución de Problemas y Cálculo explicando el 20,5% y 24,7% respectivamente de la varianza (F= 18,64, Beta = 0,53; B = 0,14; p<,002); (F= 21,54, Beta = 0,49; B = 0,18; p <,001), la Inteligencia Verbal 2 (relaciones analógicas) con la Resolución de problemas y el cálculo explicando el 23,5% y 18,8% de la varianza respectivamente (F= 18,23, Beta = 0,65; B = 0,16; p <,001; (F= 23,87, Beta = 0,95; B = 0,36; p <,002) y la Inteligencia no- Verbal con las tareas de Cálculo explicando el 17,6% de la varianza (F= 15,13, Beta = 0,41; B = 0,18; p <,09).

La regresión de la variable IV1 (semántica) en 2º de ESO es significativa con las medidas de Resolución de Problemas y Cálculo explicando el 25,5% y 22,7% respectivamente de la varianza (F= 10,64, Beta = 0,73; B = 0,44; p<,001); (F= 24,54, Beta = 0,44; B = 0,11; p <,003) y la Inteligencia no-Verbal con las tareas de Resolución de Problemas explicando el 20,3% de la varianza (F = 25,11, Beta = 0,81; B = 0,16; p <,002).

4.4.- DISCUSIÓN

A continuación discutiremos los resultados obtenidos a la luz de los resultados obtenidos en función de las hipótesis planteadas:

- Hipótesis 1.

Esperamos encontrar un patrón diferencial en el nivel de eficacia de las tareas de inteligencia verbal, no verbal, cálculo y resolución de problemas en los tres niveles educativos estudiados.

En los niveles de 4º y 6º de Educación Primaria esperamos que el mayor nivel de eficacia se centre en las tareas de cálculo, si bien en 6º se producirá un aumento en el nivel de eficacia en todas las tareas no alcanzando las diferencias entre las mismas significatividad estadística

En 2º de ESO habrá una igualación en el nivel de eficacia en las tres tareas propuestas.

El patrón de resultados intragrupo en las distintas no fue del todo similar. En los grupos de 4º y 6º de E.P. las tareas de Inteligencia Verbal llevaron un patrón similar, sin embargo en 2º de ESO se produjo un descenso en IV2 (relaciones analógicas) con respeto a la IV1 (semántica), la Inteligencia no Verbal se incrementa con la edad, siendo los grupos de 6º y 2º de ESO los que muestran un alto nivel de eficacia en esta tarea. Por el contrario en 4º se presenta como la habilidad más deficitaria.

Los alumnos de E.P. se mostraron más eficaces en resolución de problemas que en cálculo frente a los de 2º de ESO donde la tendencia se invirtió.

Con relación a esta hipótesis planteada hay que resaltar que se confirma en parte, ya que en 6º y 4º de Primaria se produce una igualación en la eficacia de las tareas propuestas de IV1, IV2 e InV, también ambos grupos son más eficaces en resolución de problemas y fallan más en cálculo aunque sin alcanzar la significatividad estadística en 4º de E.P.

Los resultados de 6º de EP no confirman nuestra hipótesis en ninguna de las tareas, además se muestran menos eficaces que los pertenecientes a 4º de Primaria.

El grupo de 6º fue más eficaz en resolución de problemas que en cálculo, en este sentido hemos de recordar el trabajo de Eliene Kintsch (1990) donde encontró cómo los buenos comprendedores, ante tareas que ellos consideran muy familiares y, por lo tanto, más sencillas, bajan su nivel de eficacia comportándose como malos comprendedores. Esta explicación nos puede hacer entender los malos resultados en las tareas de cálculo.

El patrón de resultados de 2º de ESO no confirma nuestra hipótesis, estos descienden significativamente en tareas de Inteligencia Verbal 2 (relaciones analógicas) y en resolución de problemas. Podemos interpretar este dato como un déficit en la generación de un modelo mental que guíe la comprensión (Puente, 1993; Vicente, Orrantia y Verschaffel, 2008) que muestran como la reescritura y los dibujos matemáticos favorecedores de un modelo mental incrementan el acierto (especialmente para los alumnos más competentes).

A pesar de que la dificultad de las operaciones es la misma que la que presentan las operaciones que hay que desarrollar en los problemas, sin embargo, en estos últimos la dificultad se incrementa ya que son los alumnos/as los que han de decidir qué operación realizar después de establecer relaciones semánticas entre los conceptos susceptibles de seleccionar para la correcta ejecución del problema.

Investigaciones previas dirigidas a estudiar las consideraciones realistas que efectúan los estudiantes de Educación Secundaria en la resolución de problemas (Greer, 1993; Reuser y Stebler, 1997; Godino, 2002) muestran como los alumnos de ESO encuentran las operaciones aritméticas necesarias para resolverlos, pero muestran grandes dificultades para dar sentido a la solución numérica teniendo en cuenta el contexto planteado. Reuser y Stebler (1997) al igual que otros autores como Yoshida, Verschaffel y de Corte (1997) atribuyen las dificultades asociadas a la realización de consideraciones a factores de dos tipos: por un lado, “factores textuales" (los problemas con los que se trabaja en clase están enmarcados dentro de una determinada lección lo que proporciona todas las herramientas necesarias para encontrar el modelo matemático que encaja en la situación convirtiéndolos en tareas dirigidas sobre la naturaleza estereotipada de los problemas usados en los libros de texto) y, por otro lado, a "factores contextuales" asociados a la resolución de problemas dentro del aula (los estudiantes tienen que hacer uso de sus propios recursos, con lo cual, no desarrollan una actitud de búsqueda que les permita encontrar las herramientas necesarias, o bien, elaborar sus propias estrategias de resolución).

- Hipótesis 2.

Esperamos que exista una relación positiva y altamente significativa entre inteligencia verbal y no verbal y resolución de problemas matemáticos en los tres niveles educativos.

La relación significativa en las dos tareas de inteligencia verbal y resolución de enunciado matemáticos será similar en los niveles de 4º y 6 de Educación Primaria, siendo superior la de relaciones conceptuales frente a semántica en alumnado de 2º de E.S.O. debido al nivel de lectura experta contextualizada.

No esperamos que la relación entre inteligencia verbal y cálculo sea significativa, pero sí entre inteligencia no-verbal y cálculo en los tres niveles educativos.

Se confirma nuestra hipótesis sobre la relación entre Inteligencia Verbal y resolución de problemas en los tres grupos de edad, a excepción del grupo de 2º de ESO donde el razonamiento analógico no correlaciona significativamente con la resolución de problemas.

En los grupos de E. Primaria se confirma nuestra hipótesis y de ello deducimos que en 4º y 6º de Primaria el conocimiento semántico y el pensamiento inductivo (habilidades implicadas en las tareas de Inteligencia Verbal guardan una importante relación con la capacidad de resolver problemas).

Por el contrario, la no relación entre Inteligencia Verbal y No Verbal podría estar explicando la existencia de inteligencias particulares en contra de la idea de inteligencia general (Ferrándiz, Bermejo, Sainz, Ferrando y Prieto, 2008; Gardner, 1995; Gardner, 2006; Laughlin y Foley, 2012; Núria, 2010). En este sentido nuestro trabajo presenta una aportación novedosa al ámbito de investigación objeto de estudio. Por lo general, como ya hemos visto anteriormente en el planteamiento del problema, los estudios precedentes que relacionan la Inteligencia con la competencia matemática lo hace sólo desde la perspectiva del factor “g” de Inteligencia General.

La competencia matemática comienza con la Aritmética escolar y las nociones básicas de número, avanza por los sistemas numéricos superiores (enteros, racionales y decimales) y continúa con el estudio sistemático de las relaciones numéricas que aborda la teoría de números, la iniciación a los procesos infinitos que dan lugar al sistema de los números reales y los principales conceptos del análisis, vistos desde una perspectiva numérica. Denominamos conocimiento numérico a este modo de priorizar y caracterizar determinadas ramas de la matemática mediante el uso de las herramientas conceptuales que llamamos estructuras numéricas. Sin embargo a la hora de resolver un problema matemático el alumno/a ha de generar un modelo mental que relacione los conceptos allí implicados de cara a resolver dicha tarea. La comprensión de los escolares sobre los campos conceptuales antes mencionados constituye, junto con el conocimiento de la organización, sistematización y desarrollo de diferentes competencias cognitivas (Rico, 1997). En el mismo sentido el estudio de García, García, Sainz, Prieto y Sánchez (2008) encuentra un efecto significativo, al margen del género de la muestra, entre Inteligencia Verbal y Resolución de Problemas.

Se confirma la relación significativa entre la Inteligencia no Verbal y el cálculo sólo en Educación Primaria donde también lo fue con la Inteligencia Verbal.

- *Hipótesis 3.*

La Inteligencia no-Verbal se manifestará como un factor altamente predictivo en ambas tareas de competencia matemática (cálculo y resolución de problemas) en los tres niveles educativos estudiados. La Inteligencia Verbal será un factor altamente predictivo en Resolución de Problemas, ejerciendo mayor peso la IV2 (relaciones analógicas en el nivel de 2º de E.S.O.)

La variable IV1 (semántica) e Inteligencia Verbal 2 (relaciones analógicas) en 4º de E.P. se mostraron altamente predictivas desde un punto de vista significativo en la Resolución de Problemas. La Inteligencia no Verbal sólo fue significativamente predictiva en Resolución de Problemas y no en cálculo como preveíamos.

La variable IV1 (semántica) en 6º de E.P. es significativa con las medidas de Resolución de Problemas, y la Inteligencia Verbal 2 (relaciones analógicas) en la Resolución de problemas y el Cálculo

La Inteligencia no-Verbal se mostró significativa como predictora del Cálculo.

En el grupo de 2º de ESO la variable IV1 (semántica) fue significativamente predictora en las medidas de Resolución de Problemas y Cálculo y la Inteligencia no-Verbal en las tareas de Resolución de Problemas.

En función de estos resultados verificamos parcialmente las hipótesis planteadas ya que sólo preveíamos que la Inteligencia verbal influyese en los Problemas Matemáticos y la No-Verbal en el cálculo, aunque obviamente, en los primeros, están implicadas tanto tareas de compresión como cálculos aritméticos.

También esperábamos un factor predictor de la Inteligencia No Verbal en todos los niveles educativos con relación a la tarea de Cálculo. Sólo se confirmó nuestra hipótesis en el grupo de 6º de EP, atribuimos estos resultados a dos causas: en el grupo de 4º las tareas de cálculo requieren operaciones aritméticas de menor dificultad que el nivel de abstracción que requieren las tareas de inteligencia no verbal y en el grupo de 2º de ESO, etapa que coincide con el desarrollo metacognitivo puede hacer decaer dicha influencia al estar ya más automatizados los procesos de alto nivel. En este sentido nuestra interpretación con relación al grupo de Secundaria va en la línea del trabajo de Bjork y Bowyer-Crane (2013) y de González y Gómez (2005) sobre el desarrollo del pensamiento reflexivo y conceptual en alumnos de 2º de ESO y su influencia sobre el aprendizaje de las matemáticas.

Al margen de las hipótesis planteadas consideramos interesante y necesario preguntarnos acerca del nivel de competencia matemática desarrollado por la muestra de sujetos objeto de estudio en esta investigación.

Siguiendo la línea argumental planteada y considerando ésta como la búsqueda de la funcionalidad y la relevancia de los aprendizajes, en nuestro caso, analizados a través de la interacción entre habilidades de cálculo y resolución de problemas encontramos una correlación significativa en los niveles educativos correspondientes a Educación Primaria pero no en el grupo de Educación Secundaria.

Entendiendo que las competencias superan la enseñanza compartimentada en áreas, subáreas o materias estancas y su desarrollo es responsabilidad de las decisiones metodológicas consensuadas y compartidas, entendemos que en este nivel educativo predomina la enseñanza transmisiva de nuevos conocimientos de carácter declarativo (conocimiento aislado de las reglas que rigen las operaciones de cálculo) ocupan un lugar preferente en cuanto a anterior en el tiempo, frente al aprendizaje activo e interactivo en base a un modelo mental inserto en un enunciado matemático.

4.5.- CONCLUSIONES

Del presente estudio se derivan las siguientes conclusiones:

1.- Se aprecia un patrón evolutivo ascendente en el nivel de eficacia de las distintas habilidades estudiadas en el grupo de 2º de E.S.O.; sin embargo los alumnos de 6º de E.P. fueron menos eficaces que los de 4º de E.P. en todas las tareas.

2.- Las tareas que se presentan con menor nivel de eficacia son las de competencia matemática y dentro de ellas las de resolución de problemas a excepción del grupo de 2º de E.S.O.

3.- Los alumnos de Educación Primaria son más eficaces en las tareas de Inteligencia Verbal que no-Verbal. Este patrón se invierte en el grupo de Secundaria.

4.- En general el patrón de resultados es más coincidente en los grupos de Primaria con relación al de Secundaria.

5.- En Inteligencia Verbal el conocimiento semántico se impone a las habilidades relacionadas con relaciones analógicas que se presentan más deficitarias.

6.- Las variables relacionadas con la Inteligencia Verbal fueron altamente predictoras de la Resolución de Problemas matemáticos variable en en 4º de E.P.

7.- En el grupo de 4º de E.P. la Inteligencia no-Verbal sólo fue significativamente predictiva en Resolución de Problemas y no en cálculo. Por su parte, la Inteligencia Verbal (semántica y relaciones analógicas) predijo de modo significativo la eficacia en Resolución de Problemas.

8.- En el grupo de 6º de E.P. la Inteligencia Verbal fue significativamente predictiva en medidas de Resolución de Problemas, y la Inteligencia Verbal 2 (relaciones analógicas) en la Resolución de Problemas y el Cálculo. Por su parte la Inteligencia no-Verbal se mostró significativa como predictora del Cálculo.

9.- En el grupo de 2º de ESO la variable IV1 (semántica) fue significativamente predictora en las medidas de Resolución de Problemas y Cálculo y la Inteligencia no-Verbal en las tareas de Resolución de Problemas.

4.6.- LIMITACIONES DEL ESTUDIO Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Los resultados obtenidos en las pruebas de competencia matemática en 6º de EP muestran que los sujetos tienen, al contrario que en los otros niveles estudiados en nuestra investigación, peores resultados en todas las tareas a excepción de la resolución de problemas que casi se igualan. Como ya hemos indicado anteriormente este grupo fue seleccionado siguiendo los mismos criterios de inclusión que los demás grupos, las tareas fueron seleccionadas de pruebas estandarizadas para ese nivel de edad, y las tareas de competencia matemática extraídas de libros de texto correspondientes a su nivel educativo.

Ampliar la muestra sería una de las líneas de investigación abiertas, lo cual daría mayor capacidad de generalización a los resultados.

Por otro lado las características intrínsecas del trabajo lo limitan en si mismo ya que el propio modelo de competencias básicas se coloca dentro de la perspectiva de la conceptualización multidimensional de la inteligencia. El uso de otras formas de evaluación de la competencia matemática que también deberán utilizarse para una valoración multidimensional y más matizada. Por ejemplo, la utilización de metodologías e instrumentos de evaluación como portafolios, observación y registros de estrategias on-line.

La orientación de la evaluación apropiada para realizar una evaluación en torno a competencias está directamente relacionada con la evaluación procesual y formativa, es decir, con una concepción de la evaluación como posibilidad de mejora del aprendizaje. En este sentido, nuestra investigación se vería ampliada y reforzada por información referente al control cognitivo y metacognitivo de las estrategias utilizadas en las tareas propuestas del tipo plantillas de autoevaluación y coevaluación, pensamiento en voz alta, análisis de estrategias de aprendizaje contextualizada tipo Bernad (2000) de cara a medir el proceso de transferencia se han seguido los alumnos a la hora de resolver problemas (transfer de bajo nivel o “low road” vs. transfer de alto nivel o “high road”).

Por otro lado hemos de resaltar que los participantes en nuestro estudio fueron seleccionados por unos baremos de igualación en cuanto a su amplitud de Memoria de Trabajo, de contar con una muestra mayor que nos permitiese seleccionar a los mismos en función de esta variable podría aportar una nueva dimensión al trabajo. Por este motivo consideramos que sería interesante evaluar el efecto de la amplitud de M.O. como covariable influyente en la resolución de las tareas planteadas. Este aspecto ha sido estudiado en recientes trabajos de investigación como ha quedado patente a lo largo de este trabajo. Sin embargo, la relación de esta variable cognitiva en relación con la Inteligencia Verbal y no-Verbal aportaría novedad a la investigación.

4.7.- IMPLICACIONES EDUCATIVAS

Las principales implicaciones educativas de este estudio las podemos formular desde la idea inicial contemplada en el título del trabajo: influencia de la Inteligencia Verbal y no-Verbal en las tareas de competencia matemática.

Los resultados mostraron el alto nivel predictivo de la Inteligencia Verbal en la resolución de Problemas Matemáticos, lo cual conlleva sus consecuentes implicaciones educativas a la hora de mejorar los esquemas mentales, modelos de situación, redes semánticas y relaciones conceptuales concretas. No hemos de olvidarnos que el primer paso para plantear un problema matemático es comprender como lector su enunciado.

Acosta, G., Miranda, A., Fernández, M. I., Colomer, C. y Tárraga, R. (2012). Evolución del funcionamiento ejecutivo en alumnos con y sin dificultades de aprendizaje en la resolución de problemas matemáticos. Un estudio longitudinal. En J. Navarro, M. T. Fernández, F. J. Soto y F. Tortosa (Coords.), *Respuestas flexibles en contextos educativos diversos*. Murcia: Consejería de Educación, Formación y Empleo.

Alloway, T. P. (2009). Working memory, but not IQ, predicts subsequent learning in children with learning difficulties. *European Journal of Psychological Assessment, 25*, 92-98.

Alonso, D. y Fuentes, L. J. (2001). Mecanismos cerebrales del pensamiento matemático. *Revista de Neurología*, *33*(6), 568-576.

Anderson, J. R. (1976). *Language, memory and thought*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Anderson, J. R. (2005). *Cognitive Psychology and Its Implications*. New York: Worth Publishing.

Anderson, J. R. y Bower, G. H (1978). *Human associative memory*. Nueva York: Halsted Press.

Anderson, J. R., Lee, H. S. y Fincham, J. M. (2014). *Discovering the structure of mathematical problem solving*. Neuroimage, *97*, 163-177.

Ankerstein, C., Varley, R. y Cowell, P. (2012). Feature Types and Object Categories: Is Sensorimotoric Knowledge Different for Living and Nonliving Things?. *Applied Psycholinguistics*, *33*(3), 539-569.

Antle, A. (2013). Exploring how children use their hands to think: an embodied interactional analysis. *Behaviour & Information Technology, 32*(9), 938-954.

Armentrout, S., Reggia, J. A. y Weinrich, M. (1994). A neural model of cortical map reorganization following a focal lesion. *Artificial Intelligence in Medicine, 6* (5), 383–400.

Ashcraft, M. T. y Faust, M. W. (1994). Mathematics anxiety and mental arithmetic performance: An exploratory investigation. *Cognition and Emotion, 8*, 97-125.

Atkinson, R. C. y Shiffrin, R. M. (1968). Human memory: a proposed system and its control processes. En K. W. Spence y J. T. Spence (Eds.), *The psychology of learning and motivation: Advances in research and theory* (vol.2). New York: Academic Press.

Atkinson, R. C. y Shiffrin, R. M. (1971). The control of the short-term memory. *Scientific American*, *225*, 82-90.

Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M. K. y Nurmi, J. E. (2004). Developmental dynamics of math performance from preschool to grade 2. *Journal of Educational Psychology*, *96*(4), 699−713.

Baddeley, A. D. (1976). *The Psychology of Memory.* New York: Basic Books Inc.

Baddeley, A. D. (1986). *Working memory*. Oxford: Oxford University Press.

Baddeley, A. D. (2000). The episodic buffer: a new component of working memory? *Trends in Cognitive Sciences*, *4*, 417-423.

Baddeley, A. D. y Hitch, G. (1974). Working memory. In G. A. Bower (Ed.), *The psychology of learning and motivation: advances in research and theory* (Vol. 8, pp. 47-89). New York: Academic Press.

Balota, D. A., G. Flores D'Arcais, G. y Rayner, K. (1990). The role of meaning in word recognition. *Comprehension Processes in Reading*, 9-32.

Bartlett F. (1932). *Remembering: A study in Experimental and Social Psychology*. Cambridge: Cambridge University Press.

Baroody, A. J. (2005). *El pensamiento matemático en los niños*. Madrid: Machado libros.

Baroody, A. J. y Ginsburg, H. P. (1982b).Preschooler´ s informal mathematical skills: Research and diagnosis. *American Journal of Diseases of Children*, *136*, 195-197.

Baroody, A. J. y Ginsburg, H. P. (1984). *TMR and EMR children´ s ability to learn counting skills and principles*. Ponencia presentada en el congreso anual de la American Educational Research Association. Nueva Orleans.

Baroody A. J. y Snyder, P. (1983). A cognitive analysis of basic arithmetic abilities of TMR children. *Educational and Training of the Mentally Retarded*, *18*, 253-259.

Baroody, A.J. y White, M. (1983). The development of counting skills and number conservation. *Child Study Journal*, *13*, 95-105.

Barsalou, L. W. y Medin, D. M. (1986). Concepts: Static definitions or context-dependent representations?. *Cahiers de Psychologie Cognitive*, *6*, 187- 202.

Battig W. F. y Montague W. M. (1969). Category norms of verbal items in 56 categories. A replication and extension of the Connecticut category norms. *Journal of Experimental Psychology*, *80*(3), 1-46.

Behred, J. L. (1994). *Mathematical problem-solving processes of primary-grade students identified as learning disabled*. Unpublished doctoral dissertation. University of Wisconsin: Madison.

Beltrán, J. (1993). *Procesos, estrategias y técnicas de aprendizaje*. Madrid: Síntesis.

Beltrán, J. y Pérez, L. (1996). Inteligencia, pensamiento crítico y pensamiento creativo. En J. Beltrán y C. Genovard (Eds.), *Psicología de la instrucción I. Variables y procesos básicos* (pp.429-503). Madrid: Síntesis.

Bermejo, V. y Rodríguez P. (1993). Children´s understanding of the communicative law of addition. *Learning and Instruction, 3*, 35-72.

Bermejo, V., Lago, M. O. y Rodríguez P. (1994). Desarrollo del pensamiento matemático. En V. Bermejo (Ed.), *Desarrollo cognitivo*. Madrid: Síntesis Psicología.

Bernad, J.A. (2003). *Una escala de evaluación de las estrategias de aprendizaje contextualizada.* Madrid: Narcea.

Bideaud, J., Meljac, C. y Fischer, J.C. (1992). *Pathways to number*. Hillsdale, NJ: LEA, Inc.

Bjork, I. M. y Bowyer-Crane, C. (2013). Cognitive Skills Used to Solve Mathematical Word Problems and Numerical Operations: A Study of 6- to 7- Year-Old Children. *European Journal of Psychology of Education*. *28*(4), 1345- 1360.

Bolton, N. (1978). Lógica y psicología. En Introducción a la psicología del pensamiento. Barcelona: Herder.

Bower, G. H.; Black, J.B. y Turner, T.J. (1979). Scripts in memory for text. *Cognitive Psychology, 11*, 177-220.

Boylan, H.R. (2011). Improving Success in Developmental Mathematics: An Interview with Paul Nolting. *Journal of Developmental Education*, *34*(*3*), 20- 27.

Bransford, J. D., Barclay, J. R. y Franks, J. J. (1972). Sentence memory: A constructive versus interpretative approach *Cognitive Psychology*, *3*, 193- 209.

Bransford, J. D. y Franks, J. J. (1971). The abstraction of linguistic ideas.

Cognitive Psychology, 2, 331-350.

Bransford, J. D. y Johnson, M. (1973). Considerations in some problems of comprehensions. En W. Chase (Ed.), *Visual information processing*. Nueva York: Academic Press.

Brown, J. S y Burton, R. R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science*, *2*, 155-192.

Bruner, J. S. (1964). The course of cognitive growth. *American Psychologist*, *19*, 1-5.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Bruner, J. S; Goodnow, J. J y Austin, G. A. (1956). *A study of thinking*. Nueva York: Wiley.

Bull, R. y Johnston, R. S. (1997). Children's arithmetical difficulties: contributions from processing speed, item identification, and short-term memory. *Journal of Experimental Child Psychology*, *65*, 1-24.

Bull, R., Johnston, R. S. y Roy, J. A. (1999). Exploring the roles of the visuospatial sketch pad and central executive in children's arithmetical skills: views from cognition and development neuropsychology. *Developmental Neuropsychology*, *15*, 421-442.

Bull, R. y Scerif, G. (2001). Executive functioning as a predictor of children's mathematics ability: inhibition, switching, and working memory. *Developmental Neuropsychology*, *19*, 273-293.

Caballero, A.; Blanco, L. y Guerrero, E. (2011). Problem Solving and Emotional Education in Initial Primary Teacher Education. *EURASIA Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *7*(4), 281-292.

Cambbell, J. I. D. (Ed.) (1992). *The nature and origins of mathematical skills*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers.

Carlson, S., Seipel, B. y McMaster, K. (2011). Using a New Reading Comprehension Assessment to Measure Discourse Representations and Identify Types of Comprehenders. *Society for Research on Educational Effectiveness.*

Carmine, D. (1991).Curricular interventions for teaching higher order thinking to all students: introduction to the special series. *Journal of Learning Disabilities*, *24*, 261-269.

Carmine, D. (1997). Instructional designing mathematics for students with learning disabilities. *Journal of Learning disabilities, 30*(2), 130-141.

Carpenter, T. P., Corbitt, M. K., Kepner, H. S., Lindquist, M. M., y Reys, R. E. (1980). Solving verbal problems: Results and implications from National Assessment. *Arithmetic Teacher*, *28*(1), 8-12.

Carpenter, T. P.; Hiebert, J. y Moser, J. M. (1981). Problem structure and first grade children´s initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *12*, 27- 39.

Carpenter, T. P.; Matthews, W.; Lindquist, M. M. y Silver, E. A. (1984). Achievement in mathematics: Results from the National Assessment. *Elementary School Journal*, *84*, 485-495.

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. En T. P. Carpenter, J. M. Mosder y T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, (pp. 9-24). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1983). The acquisition of addition and subtration concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 7-44). Nueva York: Academic Press.

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*, 179-202.

Cattell, R. B. (1963). Theory of fluid and crystallized intelligence: A critical experiment. *Journal of educational psychology*, *54*(1), 1.

Charlesworth, R. y Leali, S. A. (2012). Using Problem Solving to Assess Young Children's Mathematics Knowledge. *Early Childhood Education Journal*, *39*(6), 373-382.

Clark, H. H. (1975). “Bridging”. En P.N. Johnson-Laird y P.C. Wason (Comps.). *Thinking. Readings in Cognitive Sciences*. Cambridge: University Press.

Clark, H. H. y Clark, E. V. (1977). *Psychology and Language*. Nueva York: Hacourt Brace Jovanovich.

Cocks, R. J., y Watt, H. M. (2004). Relationships among perceived competence, intrinsic value and mastery goal orientation in English and maths. *The Australian Educational Researcher*, *31*(2), 81-111.

Coghill, V. (1978). Infant School Reasoning. En G. Corran y V. Walkerdine. *The Practice of Reason*. Londres: University of London Institute of Education.

Cohen, G. (1977). *The psychology of cognition*. Academic Press: Londres. Traducción española: 1983, *Psicología cognitiva*. Madrid: Alhambra.

Collins, A. M y Quillian, M. R. (1969). Retrieval time from semantic memory. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behaviour*, *8*, 240-247.

Collins, A. M y Quillian, M. R. (1972). How to make a language user. En E. Tulving y W. Donaldson (comps.). *Organization of memory*. Nueva York: Academic Press.

Compton, D., Fuchs, L., Fuchs, D., Lambert, W. y Hamlett, C. (2012). The Cognitive and Academic Profiles of Reading and Mathematics Learning Disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 45*(1), 79-95.

Connolly, A., Fodor, J., Gleitman, L. y Gleitman, H. (2007). Why Stereotypes Don't Even Make Good Defaults. *Cognition*, *103*(1), 1-22.

Corbett, A.T. y Dosher, B. A. (1978). Instrument inferences in sentence encoding. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior*, *17*, 479-491.

Cordero, F. (2003*). Lo social en el conocimiento matemático: reconstrucción de argumentos y de significados*. Tesis Doctoral, Universidad de Valencia

Cowan, N. (2014). Working Memory Underpins Cognitive Development, Learning, and Education. *Educational Psychology Review*, *26*(2), 197-223.

Cowan, R., Donlan, C., Shepherd, D.-L., Cole-Fletcher, R., Saxton, M. y Hurry, J. (2011). Basic calculation proficiency and mathematics achievement in elementary school children. *Journal of Educational Psychology*, *103*(4), 786- 803.

Craik F. y Lockhart R. (1972). Levels of processing: A framework for memory research. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior, 11*(6), 671- 684.

D'Amico, A. y Passolunghi, M. C. (2009). Naming speed and effortful and automatic inhibition in children with arithmetic learning disabilities. *Learning and Individual Differences, 19*, 170- 180.

Davis, P. J. y Hersh, R. (1986). *Descarte´s Dream: The world According to Mathematics*. Inglaterra: Penguins books.

Davis, P. J. y McKillip, W. D. (1980). Improving story-problem solving in elementary school mathematics. En S. Krulik y R. E. Reys (Eds.), *Problem solving in school mathematics* (pp. 80-91). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

De Corte, E. (1993). La mejora de habilidades de resolución de problemas matemáticos: hacia un modelo de intervención basado en la investigación. En J. Beltrán y cols. (Eds.), *Intervención psicopedagógica* (pp. 145-168). Madrid: Pirámide.

De Smedt, B. y Gilmore, C. K. (2011). Defective Number Module or Impaired Access? Numerical Magnitude Processing in First Graders with Mathematical Difficulties. *Journal of Experimental Child Psychology*. *108*(2), 278-292.

De Vega, M., Díaz, J. M. y León, I. (1999). Procesamiento del discurso. En M. de Vega y F. Cuetos (Eds.), *Psicolingüística del español*, 271-289. Madrid: Trotta.

Dörfler, T., Golke, S., & Artelt, C. (2009). Dynamic assessment and its potential for the assessment of reading competence. *Studies in Educational Evaluation*, *35*(2), 77-82.

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, *44*, 1-42.

Deshler, D., Ellis, E. S. y Lenz, H K. (1996). *Teaching adolescents with learning disabilities: Strategies and methods*. Denver, Colorado: Love Publishing Company.

Dienes, Z. P. (1963). *An experimental study of mathematics learning*. Nueva York: Hutchinson & Co. Ltd.

Dirks, E., Spyer, G., van Lieshout, E. y de Sonneville, L. (2008).Prevalence of combined reading and arithmetic disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 41*, 460-473

Dooling, J. y Christiaansen, R. (1977). Episodic and Semantic Aspects of Memory for Prose. *Journal of Experimental Psychology: Human Learning and Memory*, *3*(4), 428-436.

Edwards, S., Maloy, R. y Anderson, G. (2009). Reading Coaching for Math Word Problems. *Literacy Coaching Clearinghouse.*

Eichenbaum, H. (2010). Memory systems. *WIREs Cognitive Science*, *1*, 478-490.

Elosúa, M. R. (2000): *Procesos de la composición, memoria y aprendizaje de textos*. Madrid: Sainz y Torres.

Ericsson, K. A. y Kintsch, W. (1995). Long term working memory. *Psychological Review*, *2*, 211-245.

Fernández, M. F., Llopis, L. M. y Pablo de Risco, C. (1991) *Matemáticas básicas: dificultades de aprendizaje y recuperación.* Madrid: Santillana.

Ferrándiz C., Bermejo R., Sainz M., Ferrando M. y Prieto M. D. (2008). Estudio del razonamiento lógico-matemático desde el modelo de las inteligencias múltiples. *Anales de Psicología*, *24*(2), 213-222.

Fletcher, C. (1994). Levels of representation in memory for discourse. En

M. Gernsbacher (Ed.),*Handbook of Psycholinguistics,* 589-607. Nueva York: Academic Press.

Friso-van den Bos, I.; Kolkman, M. E.; Kroesbergen, E. H. y Leseman, P. M. (2014). Explaining Variability: Numerical Representations in 4- to 8-Year-Old Children. *Journal of Cognition and Development*, *15*(2), 325-344.

Fuchs, L. S. y Fuchs, D. (2002). Mathematical problem-solving profiles of students with mathematics disabilities with and without co-morbid reading disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, *35*, 563–573.

Fuchs, L. S., Compton, D. L., Fuchs, D., Paulsen, K., Bryant, J. D. y Hamlett, C. L. (2005). The prevention, identification, and cognitive determinants of math difficulty. *Journal of Educational Psychology*, *97*, 493-513.

Fuson, K. C. y Hall, J. W. (1983). The acquisition of early number word meanings: A conceptual analysis and review. En H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 49-107). Nueva York.

Fuson, K. C., Pergament, G. G., Lyons, B. G. y Hall, J. W. (1985). Children's Conformity to the Cardinality Rule as a Function of Set Size and Counting Accuracy. *Child Development*, *56*(6), 1429-1436.

Fuson, K. C., Richards, J. y Briars, D. J. (1982). The acquisition and elaboration of the number work sequence. En C. Brainerd (Ed.), Children´ s logical and mathematical cognition: Progress in cognitive development (pp. 33- 92). Nueva York: Springer-Verlag.

Gagné, R. M. (1965). *The conditions of learning*. Holt, Rinehart and Winston: Nueva York. Trad. española: 1971, *Las condiciones del aprendizaje*. Madrid: Aguilar.

García Madruga, J. A.; Gutiérrez, F, Carriedo, N., Luzón J.M. y Vila, J. O. (2005). Working memory and propositional reasoning: Searching for new working memory tests. En V. Girotto y P.N. Johnson-Laird (eds.), *The shape of reason. Essays in honour of Paolo Legrenzi* (pp. 69-90). Londres: Psychology Press.

Garcia Madruga, J. A.; Elosúa, M. R.; Gutiérrez, F.; Luque, J. L. y Gárate, M. (1999). *Comprensión lectora y memoria operativa. Aspectos evolutivos e instruccionales*. Barcelona: Paidós.

García, C. F., García, M. R. B., Sainz, M., Prieto, M. F., y Sánchez, M. D. P. (2008). Estudio del razonamiento lógico-matemático desde el modelo de las inteligencias múltiples. *Anales de psicología*, *24*(2), 213-222.

Gardner, H. (1995). *Inteligencias múltiples: La teoría en la práctica*. Barcelona: Paidós.

Gardner, H. (2006). *Multiple intelligences: New horizons*. New York: Basic Books.

Garnham, A. (1987). *Mental models as representation of discourse and text.* New York: Wiley & Sons.

Garnham, A. y Oakhill, J. (1996). The mental models theory of language comprehension, en B. K. Britton y A. C. Graesser (Eds.), *Models of understanding text*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Garrido, C. y Prieto, M. D. (1998). La mejora de los procesos de pensamiento en alumnos con dificultades de aprendizaje. En J. García (Dir.). *Instrucción, aprendizaje y dificultades*. Barcelona: L.U.

Gathercole, S. E. y Baddeley, A. D. (1993). Phonological working memory: a critical building block for reading development and vocabulary acquisition? *European Journal of Psychology of Education*, *8*, 259-272.

Gathercole, S. E. y Pickering, S. J. (2000a). Working memory deficits in children with low achievements in the national curriculum at 7 years of age. *British Journal of Educational Psychology*, *70*, 177-194.

Gathercole, S. E. y Pickering, S. J. (2000b). Assessment of working memory in six- and seven-year old children. *Journal of Educational Psychology*, *92*, 377-390.

Geary, D. C. (1993). Mathematical disabilities: Cognitive, neuropsychological, and genetic components. *Psychological Bulletin*, *114*, 345- 362.

Geary, D. C. (2010). Mathematical Disabilities: Reflections on Cognitive, Neuropsychological and Genetic Components. *Learning and Individual Differences*, *20*(2), 130-133.

Geary, D. C., Brown, S. C. y Samaranayake, V. A. (1991). Cognitive addition; a short longitudinal study of strategy choice and speed-of-processing differences in normal and mathematically disabled children. *Developmental Psychology*, *27*, 787-797.

Gelman, R. y Gallistel, C. R. (1978). *The child´ s understanding of number*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Gentner, D. y Stevens, A. L. (1983). *Mental models*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gernsbacher, M. A. (1997). Two decades of structure building. *Discourse Processes*, *23*, 265-304.

Gesling, W. E. (1974). *Comparison of content structure and cognitive structure in the learning of probability*. Chicago: American Educational Research Association.

Gesling, W. E. (1973). *An exploratory analysis of contents structure and cognitive structure in the context of a mathematics instructional unit*. Tesis doctoral inédita. Universidad de Stanford.

Gibson, E. J. y Levin, H. (1975). *The psychology of reading*. Cambridge: The M.I.T. Press.

Ginsburg, H. P. (1982). *Children´s arithmetic*. Austin, TX: Pro-Ed.

Ginsburg, H. P. y Baroody, A. J. (1983). *The test of early mathematics ability*. Austin, TX: Pro-Ed.

Glenberg, A. M.; Meyer, M. y Lindem, K. (1987). Mental models contribute to foregrounding during text comprehension. *Journal of Memory and Language*, *26*, 69-83.

Godino, J. D. (2002). Competencia y comprensión matemática:¿ Qué son y cómo se consiguen?. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *8*(29), 9-19.

González, R. L., y Gómez, J. J. G. (2005). Relación entre los estilos de aprendizaje, el rendimiento en matemáticas y la elección de asignaturas optativas en alumnos de enseñanza secundaria obligatoria (ESO). *Junta de Gobierno de la FISEM*, 25.

González-Pienda J. A. (1998). Matemáticas. En B. Santiuste y J. Beltrán (Coords.), *Dificultades de aprendizaje*. Madrid: Síntesis.

González-Pienda, J. A. (1983). *Discalculias escolares*. Madrid: Editorial Universidad Complutense.

González-Pienda, J. A. y Martín del Buey, F. (1989). Tratamiento de las dificultades de aprendizaje. En J. Mayor (Dir.), *Manual de Educación Especial*. Madrid: Anaya.

González-Pienda, J. A. y Núñez Pérez, J. C. (2006). *Dificultades del aprendizaje escolar*. Madrid: Pirámide.

Goñi, J.M. (2008). *Didáctica de las matemáticas:* siete *ideas para el desarrollo de la competencia matemática*. Barcelona: Editorial Graó.

Goñi, J. M. (2010). El desarrollo de la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa*, *17*(189), 17-22.

Graesser, A. C. (1981). *Prose comprehension beyond the word*. Nueva York: Springten-Verlag.

Graesser, A. C. y Bower, G. H. (1990). The Psychology of Learning and Motivation: Inferences and text comprehension. New York: Academic Press.

Graesser, A. C. y Kreuz, J. (1993). A theory of inference generation during text comprehension. *Discourse processes*, *16*, 145-160.

Graesser, A. C., Swamer, S. S., Baggett, W. B. y Sell, M. A. (1996). New models of deep comprehension. En B.K. Britton y A.C. Graesser, (Eds.), *Models of understanding text* (pp. 1-32). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Graesser, A. C., Singer, M. y Trabasso, T. (1995). Constructing inferences during narrative text comprehension. *Psychological Review*, *101*, 371-395.

Graesser, A. C. y Zwaan, R. (1995). Inference Generation and the Construction of Situation Models. En C. Weaver, S Mannes y C. Fletcher (eds.), *Discourse Comprehension: Essays in Honor of Walter Kintsch* (pp. 117-139). Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Greca, I. M. y Moreira, M. A. (2002). Mental, physical, and mathematical models in the teaching and learning of physics. *Science Education*, *86*, 106- 121.

Greeno, J.G. (1978). Understanding and procedural knowledge in mathematics education. *Educational Psychologist*, *12* (3), 262-283.

Greer, B. (1997) Modelling reality in mathematics classrooms: the case of word problems. *Learning and Instruction, 7* (4), 293-307.

Godino, J. D. (2002) Competencia y comprensión matemática: ¿qué son y cómo se consiguen?. *Uno Revisa de Didáctica de las matemáticas, 29*, 9-19.

Guarino, C.; Dieterle, S.; Bargagliotti, A. y Mason, W. (2013). What Can We Learn about Effective Early Mathematics Teaching? A Framework for Estimating Causal Effects Using Longitudinal Survey Data. *Journal of Research on Educational Effectiveness*, *6*(2), 164-198.

Gullick, Margaret M., Sprute, Lisa A., Temple, Elise (2011). Individual Differences in Working Memory, Nonverbal IQ, and Mathematics Achievement and Brain Mechanisms Associated with Symbolic and Nonsymbolic Number Processing. *Learning and Individual Differences*, *21*(6), 644-654.

Gutiérrez-Calvo, M. (1999). Inferencias en la comprensión del lenguaje. En Cuetos, F. y de Vega, M. (coords.), *Psicolingüística del español,* Madrid: Trotta.

Haberlandt, K. (1982). Reader expectations in text comprehension. In J.F. Le Ny y W. Kintsch (Eds), *Language and language comprehension* (pp. 239-249), Amsterdam: North-Holland.

Halladay, J. L. y Neumann, M. (2012). Connecting Reading and Mathematical Strategies, *65*(7), 471-476.

Halliday, M. A. K. (1975). Some aspects of sociolinguistics. En E. Jacobsen (Ed.), *Interactions between linguistics and mathematical educations* (pp. 64-73). Nairobi: UNESCO.

Harvey, L. y Anderson, J. R. (1996). Transfer of declarative knowledge in complex information processing domains. *Human-Computer Interaction*, *11*, 69- 96.

Haskell, T., Mansfield, C. y Brewer, K. (2011). Linguistic Markedness and Category Learning. *Language and Cognitive Processes*, *26*(8), 1022-1054.

Haviland, S. E. y Clark, H. H. (1974). What´s new? Acquiring new information as a process in comprehension. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behaviour*, *13*, 512-521.

Hecht, S. A., Torgesen, J. K., Wagner, R. K. y Rashotte, C. A. (2001). The relations between phonological processing abilities and emerging individual differences in mathematical computation skills: a longitudinal study from second to fifth grades. *Journal of Experimental Child Psychology*, *79*, 192-227.

Hegarty, M.; Mayer, R. y Monk, C. (1995). Comprehension of arithmetic Word Problems: A comparison of Successful and Unsuccessful Problem Solvers. *Journal of Educational Psychology*, *87*(1), 18-32.

Heller, K. (2012). Different Research Paradigms Concerning Giftedness and Gifted Education: Shall Ever They Meet?. *High Ability Studies*, *23*, 73-75.

Hembree, R. (1992). Experiments and Relational Studies in Problem Solving: A Meta-Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*(3), 242-273.

Henry, L. A. y MacLean, M. (2003). Relationships between working memory, expressive vocabulary and arithmetical reasoning in children with and without intellectual disabilities. *Educational and Child Psychology*, *20*, 51-64.

Hitch, G. J. y McAuley, E. (1991). Working memory in children with specific arithmetical learning difficulties. *British Journal of Psychology*, *82*, 375- 386.

Holmes, J. y Adams, J. W. (2006). Working memory and children's mathematical skills: implications for mathematical development and mathematics curricula. *Educational Psychology*, *26*, 339-366.

Holmes, J., Adams, J. W. y Hamilton, C. J. (2008). The relationship between visuospatial sketchpad capacity and children's mathematical skills. *European Journal of Cognitive Psychology*, *20*, 272-289.

Hough, S. y Gouh, S. (2007). Realistic Mathematics Education. *Mathematics teaching Incorporating Micromath*, *203*, 34-38.

Hudson, T. (1983). Correspondences and Numerical Differences between Disjoint Sets. *Child Development*, *54*(1), 84-90.

Humphreys, M.S.; Murray, K.C. y Maguire, A.M. (2009). Contexts and Control Operations used in accessing list-specific, generalized an semantic memories. *Cognitive Psychology*, *58*(3), 311-337.

Inhelder, B. y Piaget, J. (1955). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente.* Barcelona: Paidós.

Instituto Nacional de Evaluación Educativa. (2011). *TIMSS 2007: Guía del usuario para la base de datos internacional*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Instituto Nacional de Evaluación Educativa. (2012a). *Panorama de la Educación. Indicadores de la OCDE: informe español*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Instituto Nacional de Evaluación Educativa. (2012b). *PIRLS-TIMSS 2011: Estudio internacional de progreso en Comprensión Lectora, Matemáticas y Ciencias. Volumen I: Informe Español*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Jarvis, H. y Gathercole, S. (2003). Verbal and non-verbal working memory and achievements on National Curriculum tests at 11 and 14 years of age. *Educational and Child Psychology*, *20*, 123-140.

Jiménez, V; Puente, A.; Alvarado,J.M. y Arrebillaga, L. (2009). Measuring Metacognitive Strategies Using the Reading Awareness Scale ESCOLA. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *7*(2), 779-804.

Johnson, M. K., Bransford J. D. y Solomon S. (1973). Memory for tacit implications of sentences. *Journal of experimental psychology*, *98*, 203-205.

Johnson-Laird, P. N. (1983). *Mental Models. Towards a Cognitive Science of Language, Inference and Consciousness.* Cambridge: Harvard University Press.

Johnson- Laird, P. N. (1995a). Inference and mental models. En S. E. Newstead y J. St. B. T. Evans (Eds.), *Perspective of thinking and reasoning: Essays in honor of Peter Wason*. Hove, UK: Psychology Press.

Johnson- Laird, P. N. (1995b). Mental Models, deductive reasoning and the brain. En M. S. Gazzaniga (Ed.), *The cognitive neurosciences* (pp. 987- 1008). Cambridge, MA: MIT Press.

Johnson-Laird, P. N. y Byrne, R. M. J. (1991). *Deduction*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum.

Jones, E. D., Wilson, R. y Bhojwani, S. (1997). Mathematics instruction for secundary students with learning disabilities. *Journal of learning disabilities*, *30*(2), 151-163.

Jordan, N. C. y Hanich, L. B. (2000). Mathematical thinking in second- grade children with different types of learning difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, *33*, 567–578.

Jordan, N. C., Hanich, L. B. y Kaplan, D. (2003a). A longitudinal study of mathematical competencies in children with specific mathematics difficulties versus children with comorbid mathematics and reading difficulties. *Child Development, 74*, 834−850.

Jordan, N. C, Hanich, L. B. y Kaplan, D. (2003b). Arithmetic fact mastery in young children: A longitudinal investigation. *Journal of Experimental Child Psychology*, *85*, 103–119.

Jordan, N., Levine, S. y Huttenlocher, J. (1995). Calculation abilities in young children with different patters of cognitive functioning. *Journal of Learning Disabilities*, *28*, 53-64.

Just, M. A. y Carpenter, P. A. (1987). *The psychology of reading and language comprehension*. Newton, Mass: Allyn & Bacon.

Kane, R. B., Byrne, M. A. y Hater, M. A. (1974). *Helping Children Read Mathematics*. Nueva York: American Book Company.

Katona, G. (1940). *Organizing and memorizing*. Nueva York: Columbia University Press.

Kilpatrick, J. (1985). Doing mathematics without understanding it: A commentary on Higbee and Kunihira. *Educational Psychologist*, *20*, 65-68.

Kintsch, E. (1990). Macroprocesses and microprocesses in the development of summarization skill. *Cognition and Instruction, 7*(3), 161-195.

Kintsch, W. (1974). *The representation of meaning in memory*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kintsch, W. (1988). The role of knowledge in discourse comprehension. A reconstruction integration model. *Psychological Review*, *2*, 163-182.

Kintsch, W. (1993). Information accreditation and reduction in text processing inferences. *Discourse Processes*, *16*, 193-202.

Kintsch, W. y van Dijk, T. (1978). Toward a model of text comprehension and production. *Psychological Review*, *85*, 363-393.

Kirk, U. (1981). Learning to copy letters: a cognitive rule-governed task. *Elementary School Journal*, *81*, 29-33.

Kolkman, M.; Kroesbergen, E. y Leseman, P. (2013). Early Numerical Development and the Role of Non-Symbolic and Symbolic Skills. *Learning and instruction*, *25*, 95-103.

Korhonen, J.; Linnanmaki, K. y Aunio, P. (2012). Language and Mathematical Performance: A Comparison of Lower Secondary School Students with Different Level of Mathematical Skills. *Scandinavian Journal of Educational Research*, *56*(3), 333-344.

Kuchinke, L.; van der Meer, E. y Krueger, F. (2009). Differences in processing of taxonomic and sequential relations in semantic memory: an FMRI investigation. *Brain and Cognition*, *69*(2), 245-251.

Kulak, A. G. (1993). Parallels between maths and reading disability: common issues and approaches. *Journal of Learning Disabilities*, *26*(10), 666- 673.

Labov, W. (1973). The boundaries of words and their meanings. En C.J Bailey y R. W. Shuy (Eds.), *New ways of analyzing variation in English* (pp. 340-373). Washington D.C.: Georgetown University Press.

Larkin, J.H. (1977). *Problem solving in physics*. Documento de trabajo, Universidad de California, Berkeley, Group in Science and Mathematics Education and Department of Physics.

Laughlin K. y Foley A. (2012). Intelligences That Plants Can Pass On: Play Dough, Fun and Teaching Strategies with Insights to Multiple Intelligences. *Journal of Adult Education*, *41*(1), 22-28.

LeBlanc, J. F., Proudfit, L. y Putt, L. J. (1980). Teaching problem solving in elementary school. En S. Krulik y R. E. Reys (Eds.), *Problem solving in school mathematics* (pp. 104-116). Reston, V. A.: National council of teachers of Mathematics.

Lee, C. (2010). El *lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.

Lee, K. y Kang, S. (2002). Arithmetic operation and working memory: differential suppression in dual tasks. *Cognition*, *83*, 63-68.

Lee, K., Ng, E. L. y Ng, S. F. (2009). The contributions of working memory and executive functioning to problem representation and solution generation in algebraic word problems. *Journal of Educational Psychology*, *101*, 373-387.

Lee, K., Ng, S. F., Ng, E. L. y Lim, Z. Y. (2004). Working memory and literacy as predictors of performance on algebraic word problems. *Journal of Experimental Child Psychology*, *89*, 140-158.

Legnard, D. y Austin, S. (2014). The Math Promise: Celebrating at Home and School. *Teaching Children Mathematics*, *21*(3), 178-184.

León, J. A. (1986). *La memoria de los niños a través de los cuentos: Un análisis experimental*. Madrid: UNED.

León, J. A. (1996a). *Prensa y Educación. Un enfoque cognitivo*. Buenos Aires: AIQUE.

León, J. A. (1996b). La psicología cognitiva a través de la comprensión de textos. *Revista de Psicología General y Aplicada*, *49*(1), 13-25.

León, J. A. (2004). *Adquisición de conocimiento y comprensión. Origen, evolución y método*. Madrid: Biblioteca Nueva.

León, J. A. y Escudero, I. (2000). La influencia del género del texto en el procesamiento de inferencias elaborativas. En J. A. León (ed.), *La comprensión del discurso escrito a través de las inferencias: claves para su investigación*. Barcelona: Paidós.

León, J. A. y García Madruga, J. A. (1991). Comprensión y Memoria de Textos. En J.M. Ruiz Vargas (Comp.), *La Psicología de la memoria* (pp. 315- 338). Madrid: Alianza.

Libertus, M. E. (2015). The Role of Intuitive Approximation Skills for School Math Abilities. *Mind, Brain, and Education*, *9*(2), 112-120.

Littefield, J. y Rieser, J. J. (1993). Semantic features of similarity and children´ s strategies for identification of relevant information in mathematics story problems. *Cognition & Instruction*, *11*, 133-188.

Llinares, S. (2003). Matemáticas escolares y competencia matemática. *Didáctica de las matemáticas*, 3-30.

Llorens, A. C., & Cerdán, R. (2012). Assessing the Comprehension of Questions in Task-Oriented Reading. *Revista de Psicodidáctica*, *17*(2), 233-252.

Locuniak, M. N. y Jordan, N. C. (2008). Using kindergarten number sense to predict calculation fluency in second grade. *Journal of Learning Disabilities, 41*, 451-459.

Logie, R. H. (1993). Working memory in everyday cognition. En G.M. Davies y R.H. Logie (Eds.), *Memory in everyday life* (pp. 173-218). Amsterdam: North-Holland.

Logie, R. H. y Baddeley, A. D. (1987). Cognitive processes in counting. *Journal of Experimental Psychology*, *13*, 310-326.

López- Higes, R. (2003). *Psicología del lenguaje*. Ediciones Pirámide. Madrid.

Lum, J. y Bleses, D. (2012). Declarative and Procedural Memory in Danish Speaking Children with Specific Language Impairment. *Journal of Communication Disorders*, *45*(1), 46-58.

Luque, J. L., García Madruga, J. A., Gutiérrez, F.; Elosúa, R. y Gárate, M. (1999). La construcción de la representación semántica de los textos En J. A. García Madruga, R. Elosúa, F. Gutiérrez, J. L. Luque y M. Gárate, *Comprensión lectora y memoria operativa. Aspectos evolutivos e instruccionales*. Barcelona: Paidós.

Lynch, S. y Bolyard, J. (2012). Putting Mathematical Discourse in Writing. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *17*(8), 486-492.

Madan, C., Glaholt, M., Caplan, J. (2010). The Influence of Item Properties on Association-Memory. *Journal of Memory and Language, 63*(1), 46-63.

Magliano J. P., Graesser A. C y Trabasso, T. (1999). Strategic processing during comprehension. *Journal of educational psychology*, *91*(4), 615-629.

Mandler, J. M. (1984). *Stories, scripts and scenes: Aspects of schema theory*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Markovits, H. y Barrouillet P. (2004). Introduction: Why is Understanding the Development of Reasoning Important? *Thinking and Reasoning, 10*(2), 113- 121.

Martin, M., Mullis, I., y Foy, P. (2008). TIMSS 2007. *International Science Report. TIMSS&PIRLS International Study Center, Boston College*.

Martínez Arias, M. R. (1991). Inteligencia y procesos superiores. En R. Martínez Arias y M. Yela (Coords.). *Tratado de Psicología General* (pp. 63- 101). Tomo 5, Pensamiento e Inteligencia. Madrid: Alambra Universidad.

Mather, E. y Plunkett, K. (2011). Same Items, Different Order: Effects of Temporal Variability on Infant Categorization. *Cognition*, *119*(3), 438-447.

Maure, L. y Marimón, O. (2014). Examining the role of college student's approach to Math. *Educational Research and Reviews*, *9*(19), 761-770.

Mayer, E. R. (1987). *Educational psychology*. Boston: Little Brown.

Mayer, R. E. (1981). Frequency norms and structural analysis of algebra story problems into families, categories, and templates. *Instructional Science*, *10*, 135-175.

Mazzocco, M. M. y Myers, G. F. (2003). Complexities in identifying and defining mathematics learning disability in the primary school-age years. *Annals of Dyslexia, 53*, 218-253.

McKoon, G. y Ratcliff, R. (1992). Inference during reading. *Psychological Review*, *99*(3), 440-466.

McLean, J. F. y Hitch, G. J. (1999). Working memory impairments in children with specific arithmetic learning difficulties. *Journal of Experimental Child Psychology*, *74*, 240-260.

McLeod, D. B. (1990). Information-processing theories and mathematics learning: The role of affect. *International Journal of Educational Research, 14*, 13-29.

Medin, D. L. y Shoben, E. J. (1988). Context and Structure in Conceptual Combination. *Cognitive Psychology*, *20*, 158-190.

Mercer, C., Jordan, L. y Miller, S. (1994). Implication of constructivism for teaching math to students with moderate to mild disabilities. *The Journal of Special Education*, *28*(3), 290-306.

Methe, S.; Begeny, JC. y Leary, L. (2011). Development of Conceptually Focused Early Numeracy Skill Indicators. *Assessment for Effective Intervention. 36*, 230-242.

Mialaret, G. (1986). *Las matemáticas: cómo se aprende, cómo se enseñan: un texto base para psicólogos, enseñantes y padres*. Madrid: Visor.

Miller, G. A. (1956). The magic number seven, plus o minus two: some limits on our capacity for processing information. *Psychological Review*, *63*, 81- 97.

Millis, K., y Graesser, A. C. (1994). The time-course of constructing knowledge-based inferences for scientific texts. *Journal of Memory and Language*, *33*, 583–599.

Minsky, M. (1975). A framework for representing knowledge. En P.H. Winston (comp.). *The psychology of computer vision*. Nueva York: Mc Graw- Hill.

Minsky, M. (1985). A framework for representing knowledge. En P.H. Winston (ed.). *The psychology of computer vision*. Nueva York: Mc Graw-Hill.

Montague, M. (1997). Cognitive Strategy Instruction in Mathematics for Students with Learning Disabilities. . *Journal of Learning Disabilities*, *30*(2), 167- 177.

Montague, M. y Applegate, B. (1993). Mathematical problem solving characteristics of middle school students with learning difficulties. *The Journal of Special Education*, *7*, 175-201.

Montague, M. y Boss C. (1986). The effect of cognitive strategy training on verbal math problem solving performance of learning disabled student. *Journal of Learning Disabilities*, *19*, 26-33.

Moore, K. C. y Carlson, M. (2012). Students' Images of Problem Contexts when Solving Applied Problems. *Journal of Mathematical Behaviour, 31*(1), 48-59.

Moran, A. (2011). *The Effects of Comprehension Intervention on Mathematics Problem Solving for Students with Mathematics Disability*. ProQuest LLC. Tesis Doctoral. California.

Morris, R. D. y Walter L. W. (1991). Subtypes of arithmetics-disabled adults: validating childhood findings. En B. P. Rourke (Ed.), *Neuropsychological validation of learning disability subtypes* (pp. 330-346). Nueva York: Guilford Publications.

Murphy, G., Hampton, J. y Milovanovic, G. (2012). Semantic Memory Redux: An Experimental Test of Hierarchical Category Representation. *Journal of Memory and Language, 67*(4), 521-539.

Myers, J. L. y Duffy, S. A. (1990). Causal inferences and text memory. *The Psychology of Learning and Motivation, 25*, 159-173.

Noël, M. P. y Seron, X. (1992). Notational constraints and number processing: A reappraisal of the Gonzales and Kolers (1982) study. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, *45*(3), 451-478.

Norman, D. A. y Rumelhart, D. E. (1975). *Explorations in cognition*. San Francisco: W.H. Freeman.

Núñez, J. C, González-Pienda, J. A. y Carbonero, M. A. (2006). Dificultades de aprendizaje. En J. C. Núñez y J. A. González-Pienda

(Coord.). *Dificultades de aprendizaje escolar* (pp. 45-66). Madrid: Ediciones Pirámide.

Núria, A. (2010). Una mirada a la educación desde las competencias básicas y las inteligencias múltiples. *Aula de Innovación Educativa*, *17*(188), 61-65.

Obersteiner, A., Reiss, K., Ufer, S., Luwel, K. y Verschaffel, L. (2014). Do First Graders Make Efficient Use of External Number Representations? The Case of the Twenty-Frame. *Cognition and Instruction*, *32*(4), 353-373.

Oerter, R., Dreher, E. y Dreher, M. (975*). Developmental Changes in Problem Solving as a Function of Level of Socialization*. Paper presented at the Biennial Meeting of the Society for Research in Child Development. Denver, Colorado.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (2005). *The definition and selection of key competencies. Executive summary*. Recuperado de ttp://www.OECD.org/edu/statistics/deseco

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. Recuperado el 2 de noviembre, 2013, de http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511

Orosco, M. J. (2014). A Math Intervention for Third Grade Latino English Language Learners at Risk for Math Disabilities. *Exceptionality: A Special Education Journal*, *22*(4), 205-225.

Paivio, A. (1986). *Mental representations*. Oxford: Oxford University Press.

Paivio, A. (2006). *Mind and its evolution; A dual coding theoretical interpretation*, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Paivio, A. y Yuille, J. (1969). Changes in associative strategies and paired-associate learning over trials as a function of work imagery and type of learning set. *Journal of Experimental Psychology*, *79*(3), 458-463.

Pandey, A. (2012). Issues in Education: Language Building Blocks for Climbing the Learning Tree. *Childhood Education*, *88*(6), 388-390.

Pape, S. J. (2004). Middle school children's problem-solving behavior: A cognitive analysis from a reading comprehension perspective. *Journal for Research in Mathematics Education,* 187-219.

Passolunghi, M. C. y Lanfranchi, S. (2011). Domain-specific and domain- general precursors of mathematical achievement: a longitudinal study from kindergarten to first grade. *British Journal of Educational Psychology, 82*, 42-63.

Passolunghi, M. C. y Siegel, L. S. (2001). Short-term memory, working memory, and inhibitory control in children with difficulties in arithmetic problem- solving. *Journal of Experimental Child Psychology*, *80*, 44-57.

Pearl, R., Donahue, M. y Bryan, T. (1986). Social relationship of learning disabled children. En J.K. Torgesen y B. Y. L. Wong (Eds.), *Psychological and educational perspectives on learning disabilities*. San Diego, CA: Academic Press.

Pericola, L., Harris, K. y Graham, S. (1992). Improving the mathematical problem-solving skills of students with learning disabilities: Self-regulated strategy development. *The Journal of Special Education*. *26* (1), 1-19.

Perring, W. y Kintsch, W. (1985). Propositional and situational representations of text. *Journal of Memory and Language*, *24*, 503-518.

Piaget, J. (1965). *The child´s conception of number*. Nueva York: Norton.

Poggioli L. (1989). *Estrategias cognoscitivas: Una revisión teórica y empírica*. En A. Puente, L. Poggioli y A. Navarro (Eds.), *Psicología Cognoscitiva: Desarrollo y perspectivas*. Caracas: McGraw Hill.

Polya, G. (1968). *Mathematical discovery, Vol. II. On understanding learning and teaching problem solving*. NJ: Wiley Press.

Polya, G. (1973). *How to Solve It?*. Princeton, NJ: Princeton University.

Pozo, J., del Puy, M., Domínguez, J., Gómez, M. A y Postigo, Y. (1994). *La solución de problemas*. Madrid: Santillana.

Prieto, M. D. y Pérez, L. (1993). *Programas para la mejora de la inteligencia. Teoría, aplicación y evaluación*. Madrid: Síntesis.

Primm, D. (2002). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Morata.

Puente, A. (1993). Modelos mentales y habilidades en la solución de problemas aritméticos verbales. *Revista de psicología general y aplicada:*

Revista de la Federación Española de Asociaciones de Psicología, *46*(*2*), 149- 160.

Puente, A. (1995). *Memoria Semántica. Teorías y Modelos. Psicología Cognoscitiva*. Caracas: Editorial Mc. Graw Hill.

Putman, R. T., Lampert, M. y Peterson, P. L. (1990) Alternative perspectives on knowing Mathematics in elementary schools. En C. B. Cazden, *Review of research in education* (pp. 57-150). Washington: AERA.

Quillian, M. (1968). Semantic Memory, in M. Minsky (ed.), *Semantic Information Processing* (pp. 227-270).

Raghubar, K.; Barnes, M.; Hecht, S. (2010). Working Memory and Mathematics: A Review of Developmental, Individual Difference, and Cognitive Approaches. *Learning and Individual Differences*, *20*(2), 110-122.

Rasmussen, C. y Bisanz, J. (2005). Representation and working memory in early arithmetic. *Journal of Experimental Child Psychology*, *91*, 137-157.

Raven, J. C. (1938). *Progressive matrices: A perceptual test of intelligence*. Londres: H. K. Lewis.

Rawson, K. y Van Overschelde, J. (2008). How does knowledge promote memory? The distinctiveness theory of skilled memory. *Journal of Memory and Language*, *58*, 646-668.

Reimann, G., Gut, J., Frischknecht, M. y Grob, A. (2013). Memory Abilities in Children with Mathematical Difficulties: Comorbid Language Difficulties Matter. *Learning and Individual Differences*, *23*, 108-113.

Resnick, L. B y Ford, W. W. (2008). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona: Paidós.

Reusser, K. (1998). Problem solving beyond the logic of things: Contextual effects on understanding and solving word problems. *Instructional Science*, *17*, 309-338.

Reuser, k. y Stebler, R. (1997) Every word problem has a solution – the social rationality of mathematical modeling School. *Learning and Instruction, 7* (4), 309-327

Rico, L. (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Síntesis.

Riley, M. S.; Greeno, J. G. y Hellar, J. I. (1983). Development of children´s problem-solving ability in arithmetic. En H. P. Ginsburg (Ed.). *The development of mathematical thinking* (pp. 153-200). Nueva York: Academic Press.

Rivière A. (1990). Problemas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva cognitiva. En A. Marchesi, C. Coll y J. Palacios (Comps.), *Desarrollo psicológico y educación, III. Necesidades educativas especiales y aprendizaje escolar*. Madrid: Alianza Psicología.

Roediger, H. L. y McDermott, K. B. (1995). Creating false memories: Remembering words not presented in lists. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, & Cognition, 21,* 803–814.

Rosch, E. (1973). On the internal structure of perceptual and semantic categories. En T. E. Moore (Ed.), *Cognitive development and the acquisition of language*. New York: Academic Press.

Roth, E. y Shoben, E. (1983). The effect of context on the structure of categories. *Cognitive Psychology, 15*, 346-378.

Ruby, S.; Crosby-Cooper, T.; Vanderwood, M. (2011). Fidelity of Problem Solving in Everyday Practice: Typical Training May Miss the Mark. *Journal of Educational & Psychological Consultation*, *21*(3), 233-258.

Ruiz Contreras, A. y Cansino, S. (2005). Neurofisiología de la interacción entre la atención y la memoria episódica: revisión de estudios en modalidad visual. *Revista de Neurología*, *41*(12), 733-743.

Rumelhart, D. E. (1980). Schemata: The building blocks of cognition. En Spiro, R.J., Bruce, B. C. y Brewer, W. F. (Eds.). *Theoretical issues in reading comprehension*. Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum.

Rumelhart, D. E. y Norman, D. (1988). Representation in memory. En R.C. Atkinson y otros (Eds.), *Stevens´ Handbook of experimental psychology*. New York: Wiley.

Rumelhart, D. E y Ortony, A. (1977). The representation of knowledge in memory. En R.C. Anderson, R.J. Spiro y W.E. Montague (eds.), *Shooling and the acquisition of knowledge* (pp. 99-135). Hillsdale, NJ: Erlbaum

Sáenz Castro, C. (2007). La competencia matemática (en el sentido de PISA) de los futuros maestros. *Enseñanza de las Ciencias* , *Vol. 25* 355-366.

Sanford, A.J. y Garrod, S. (1994). Resolving sentences in a discourse context: How discourse representation affects language understanding. En M. Gernsbacher (Ed.) *Handbook of Psycholinguistics* (pp. 675-698). New York: Academic Press.

Sarama, J.; Lange, A.; Clements, D. y Wolfe, C. (2012). The Impacts of an Early Mathematics Curriculum on Oral Language and Literacy. *Early Childhood Research Quarterly*, *27*, 489-502

Sasanguie, D.; De Smedt, B.; Defever, E. y Reynvoet, B. (2012). Association between Basic Numerical Abilities and Mathematics Achievement. *British Journal of Developmental Psychology*, *30*(2), 344-357.

Schaeffer, B.; Eggleston, V. y Scott, J. (1974). Number development in young children. *Cognitive Psychology*, *6*, 357-379.

Schank, R. C. (1975). El papel de la memoria en el procesamiento del lenguaje. En C. Cofer (Ed.), *Estructura de la memoria humana*. Barcelona: Omega.

Schank, R.C. (1986). *Explanation Patterns: Understanding Mechanically and Creatively*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Schank, R.C. y Abelson, R. (1977). *Scripts, plans, goals and understanding: An inquiti into human knowledge structures*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Scheid, K. (1990). *Cognitive-based methods for teaching mathematics to student with learning problems*. Columbus OH: LINC Resources, Inc.

Schleepen, T. y Jonkman, L. (2012). Children's Use of Semantic Organizational Strategies Is Mediated by Working Memory Capacity. *Cognitive Development*, *27*(3), 255-269.

Schneider, D. W. y Anderson, J. R. (2012). Modelling fan effects on the time course of associative recognition. *Cognitive Psychology*, *64*, 127-160.

Schneider, M., Rittle-Johnson, B. y Star, J. (2011). Relations between conceptual knowledge, procedural knowledge, and procedural flexibility in two samples differing in prior knowledge. *Developmental Psychology*. *47*(6), 1525– 1538.

Schoenfeld, A. H. (1992).Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense make in mathematics. En D. Grouws (Ed.). *Handbook o Research on Mathematics Learning and Teaching* (pp. 334-370). Nueva York: MacMillan.

Schoenfeld, A. H. (Eds.) (1994). *Mathematics thinking and problem solving*. Hillsdale, NJ: LEA.

Secadas, (1992). *Procesos evolutivos y escala observacional del desarrollo. Vol. II*. Madrid: TEA Ediciones.

Sharkey, A. J. y Sharkey, N. E. (1992) Weak contextual constrains in text and word priming. *Journal of Memory and Language*, *31*, 507-524.

Shavelson, R. J. (1974). Methods for examining representations of a subject-matter structure in a student´ s memory. *Journal of Research in Science Teaching*, *11*(3), 231-249.

Shavelson, R. J y Stanton, G. C. (1975). Construct validation: Methodology and application to three measures of cognitive structure. *Journal of Educational Measurement*, *12*(2), 67-85.

Singer, M. (1979a). Processes of inference during sentence encoding. *Memory* and *Cognition, 7*, 192-200.

Singer, M. (1979b). Temporal locus of inferences in the comprehension of brief passages: Recognizing and verifying inferences about instruments. *Perceptual* and *Motor Skills, 49*, 539-550.

Singer, M. (1988). Inferences in reading comprehension. En M. Daneman, G. McKinnon y T. Waller (Eds.), *Reading research: Advances in theory and practice* (pp. 177-219). New York: Academic Press.

Singer, M. (1994). Discourse inference processes. En Gernsbacher, M.A. *Handbook of Psycholinguistics*. Nueva York: Academic Press.

Singer, M., Graesser, A. C. y Trabasso, T. (1994). Minimal or global inference during reading. *Journal of Memory and Language*, *33*, 421-441.

Singer, M., Halldorson, M., Lear, J. C. y Andrusiak, P. (1992). Validation of causal bridging inferences in discourse understanding. *Journal of Memory and Language*, *31*, 507-524.

Skemp, R. (1999). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.

Staal, N. y Wells, P. J. (2011). Teaching Math Is All Write. *Teaching Children Mathematics, 18*(4), 224-232.

Stern, E. y Lehrndorfer, A. (1992), The role of situational context in solving word problems. *Cognitive Development*, *7*, 259-268.

Sternberg, R. J. (1987). Razonamiento, solución de problemas e inteligencia. En R.J. Sternberg (Ed.), *Inteligencia humana. Cognición, personalidad e inteligencia*. Buenos Aires: Paidós.

Sternberg, R. J. (2000). The concept of intelligence. En R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of intelligence*. NewYork: Cambridge University Press.

Stingler, J. W., Lee, S-Y y Stevenson, H. W. (1995). *Mathematical knowledge of Japanese, Chinese and American Elementary school children*. V. A: National Council of Teachers of Mathematics.

Stock, P., Desoete, A. y Roeyers, H. (2009). Predicting Arithmetic Abilities The Role of Preparatory Arithmetic Markers and Intelligence. *Journal of Psychoeducational Assessment*, *27*(3), 237-251.

Stubbs, M. (1983). *Lenguaje y escuela*. *Análisis sociolingüístico de la enseñanza*. Madrid: Cincel-Kapelusz.

Swanson, H. L. y Beebe-Frankenberger, M. (2004). The relationship between working memory and mathematical problem-solving in children at risk and not at risk for serious math difficulties. *Journal of Educational Psychology*, *96*, 471-491.

Swanson, H. L, Jerman, O. y Zheng, X. (2009). Generative Strategies, Working Memory, and Word Problem Solving Accuracy in Children at Risk for Math Disabilities. *Learning Disability Quarterly*, *36*, 203-214.

Swanson, H. L. y Kim, K. (2007). Working memory, short-term memory, and naming speed as predictors of children's mathematical performance. *Intelligence*, *35*, 151-168.

Swanson, H. L., Orosco, M. y Lussier, C. (2014). The Effects of Mathematics Strategy Instruction for Children with Serious Problem-Solving Difficulties. *Exceptional Children*, *80*(2), 149-168.

Swanson, H. L. y Sachse-Lee, C. (2001). Mathematical problem-solving and working memory in children with learning disabilities: both executive and phonological processes are important. *Journal of Experimental Child Psychology*, *79*, 294-321.

Swartz, R. y Perkins, D. (1990). *Teaching thinking: Issues and approaches*. Pacific Grove, CA: Midwest Publications.

Swinney, D. A. y Osterhout, L. (1990). Inference generation during auditory language comprehension. *The Psychology of Learning and Motivation*, *75*, 17-33.

Thomas, C. N., Van Garderen, D., Scheuermann, A. y Lee, E. J. (2015). Applying a Universal Design for Learning Framework to Mediate the Language Demands of Mathematics. *Reading & Writing Quarterly*, *31*(3), 207-234.

Thornton, C. A., Langrall, C. W. y Jones, G. A. (1997). Mathematic instruction for elementary students with learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, *3*(2), 142-150.

Thro, M.P. (1978). Relationship between associative and content structure of physics concepts. *Journal of Educational Psychology*, *70*(6), 971- 978.

Till, R. E., Mross, E. F. y Kintsch, W. (1988). Time course of priming for associate and inference words in a discourse context. *Memory and Cognition*, *16*, 283-298.

Tirapu-Ustárroz, J. y Muñoz-Céspedes, J.M. (2005). Memoria y funciones ejecutivas. *Revista de Neurología*, *41*(8), 475-484.

Toll, S. y Van Luit, J. (2013). The Development of Early Numeracy Ability in Kindergartners with Limited Working Memory Skills. *Learning and Individual Differences, 25*, 45-54.

Toll, S. y Van Luit, J. (2014). The Developmental Relationship between Language and Low Early Numeracy Skills throughout Kindergarten. *Exceptional Children*, *81*(1), 64-78.

Trabasso, T. y Sperry, L. (1985). Causal relatedness and importance of story events. *Journal of Memory and Language*, *2*, 224-242.

Tulving E. (1972). Episodic and semantic memory. En E. Tulving y W. Donaldson (Eds.), *Organization of memory*. New York: Academic Press.

Tulving, E. (1983). *Elements of Episodic Memory*. New York: Oxford University Press.

Van den Broek, R.; Fletcher, C. R. y Ridsen, K. (1993). Investigations of inferential processes in reading: A theoretical and methodological integration. *Discourse and Processes*, *16*, 169-180.

Van der Sluis, S., Van der Leij, A. y de Jong, P. F. (2005). Working memory in Dutch children with reading- and arithmetic-related LD. *Journal of Learning Disabilities*, *38*, 207-221.

Van Dijk, T. A. y Kintsch, W. (1983). *Strategies of discourse comprehension*. New York: Academic Press.

Van Lieshout, E. C. D., Jaspers, M. W. y Landewé, B. H. (1994). Mathematical word problem solving of normally achieving and mildly mentally retarded children. En J. E. H. Van Luit (Ed.), *Research learning and instruction of mathematics in kindergarten and primary schools* (pp. 344-365). Doetinchem/ Rapallo: Graviant Publishing Company.

Van Merrienboer, J. (2013). Perspectives on Problem Solving and Instruction. *Computers & Education*. 153-160.

Van Overschelde, J. P., Rawson, K. A. y Dunlosky, J. (2004). Category norms: An updated and expanded version of the Battig and Montague (1969) norms. *Journal of Memory and Language*, 50(3), 289–335.

Varela, F., Thompson E. y Rosch E. (1991). *The Embodied Mind: Cognitive Science and Human Experience.* Cambridge, MA: MIT Press.

Velasco, J. y García Madruga, J. A. (1997). El desarrollo de los procesos meta-lógicos y el razonamiento lógico durante la adolescencia. *Cognitiva, 9*, 139-150.

Vicente, S., Orrantia, J., y Verschaffel, L. (2008). Influencia del conocimiento matemático y situacional en la resolución de problemas aritméticos verbales: ayudas textuales y gráficas. *Infancia y Aprendizaje*, 31(4), 463-483.

Vidal-Abarca, E., Gilabert, R., Ferrer, A., Ávila, V., Martínez, T., Mañá, A., Y Serrano, M. Á. (2014). TuinLEC, an intelligent tutoring system to improve reading literacy skills/TuinLEC, un tutor inteligente para mejorar la competencia lectora. *Infancia y Aprendizaje*, *37*(1), 25-56.

Vernon, PA (1971). The structure of human abilities. London: Methuen.

Vieiro P., García Maruga, J. A. y Peralbo, M. (1997). Procesos de adquisición de la lectoescritura. Madrid: Visor.

Vieiro, P. y Gómez, I. (2004). *Psicología de la lectura*. Madrid: Pearson Prentice Hall.

Vigliocco, G., Kousta, S., Vinson, D., Andrews, M., Del Campo, E. (2013). The Representation of Abstract Words: What Matters? Reply to Paivio' s (2013) Comment on Kousta et al. (2011). *Journal of Experimental Psychology: General*, *142*(1), 288-291.

Vilenius-Tuohimaa, P. M., Aunola, K., y Nurmi, J. E. (2008). The association between mathematical word problems and reading comprehension. *Educational Psychology*, *28*(4), 409-426.

Von Glaserfeld, E. (1982). Subitizing: The role of figural patterns in the development of numerical concepts. *Archives de Psychologie*, *50*, 191-218.

Wauhg, N. C. y Norman, D. A. (1965). Primary memory. *Psychological Review*, *72*, 89-104.

Whitney, P., Ritchie, B. G. y Clark, M. B. (1991). Working memory capacity and the use of elaborative inferences in text comprehension. *Discourse Processes*, *14*, 133-145.

Wills, A. y Pothos, E. (2012). On the Adequacy of Current Empirical Evaluations of Formal Models of Categorization. *Psychological Bulletin*. *138*(1), 102-125.

Wilson, K. M. y Swanson, H. L. (2001). Are mathematics disabilities due to a domain-general or a domain specific working memory deficit? *Journal of Learning Disabilities*, *34*, 237-248.

Wyer, R. y Gordon, S.E. (1984). The cognitive representation of social information. En R. Wyer y T. Srull (eds.), *Handbook of social cognition* (pp.73- 150). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Xenidou-Dervou, I., van Lieshout, E. y van der Schoot, M. (2014). Working Memory in Nonsymbolic Approximate Arithmetic Processing: A Dual- Task Study with Preschoolers. *Cognitive Science*, *38*(1), 101-127.

Xu, J. y Griffiths, T. (2010). A Rational Analysis of the Effects of Memory Biases on Serial Reproduction. *Cognitive Psychology*, *60*(2), 107-126.

Yoshida, H.; Verschaffel, L. y de Corte, E. (1997) Realistic considerations in solving problematic word problems: do Japanese and Belgian children have de same difficulties?. *Learning and Instruction, 7* (4), 329-338.

Zheng, X., Swanson, H. L. y Marcoulides, G. (2011). Working Memory Components as Predictors of Children's Mathematical Word Problem Solving. *Journal of Experimental Child Psychology, 110*(4), 481-498.

ANEXO A

BAREMACIONES DE PUNTUACIONES DEL BADYG

Puntuaciones para 4º de primaria en la tarea Rv (relaciones analógicas), en la tarea Re (matrices lógicas) y en la tarea Sv (completar oraciones)

Centil	Nº de aciertos Rv	Nº de aciertos Re	Nº de aciertos Sv
6	0-5	0-6	0-5
15	6-7	7-8	6-7
30	8-10	9-11	8-9
70	11-15	12-15	10-14
85	16-17	16-17	15-16
94	18-19	18-19	17-18
99	20-24	20-24	19-24

Puntuaciones para 6º de primaria en la tarea Rv (relaciones analógicas), en la tarea Re (matrices lógicas) y en la tarea Sv (completar oraciones)

Centil	Nº de aciertos Rv	Nº de aciertos Re	Nº de aciertos Sv
6	0-6	0-9	0-10
15	7-10	10-12	11-13
30	11-14	13-15	14-16
70	15-21	16-21	17-23
85	22-23	22-23	24-26
94	24-26	24-25	27-28
99	27-32	26-32	29-32

Puntuaciones para 2º de ESO en la tarea Rv (relaciones analógicas), en la tarea Re (matrices lógicas) y en la tarea Sv (completar oraciones)

Centil	Nº de aciertos Rv	Nº de aciertos Re	Nº de aciertos Sv
6	0-6	0-6	0-8
15	7-9	7-8	9-11
30	10-12	9-11	12-14
70	13-20	12-17	15-21
85	21-23	18-20	22-24
94	24-26	21-22	25-26
99	27-32	23-32	27-32

ANEXO B

PRUEBAS DE COMPETENCIA MATEMÁTICA 4º DE PRIMARIA

Nombre y Apellidos:

Curso:

1.- Tengo 38 €, 4 libros y unos patines.

¿Cuántos libros de 17 € puedo comprar?

Solución:...............................

¿Cuánto dinero me sobra?

Solución:...

2.- Andrea tiene 11 años y Jorge 8. Luis no tiene hermanos. ¿Cuántos años tenía Andrea cuando nació Jorge?

Solución:...............................

3.- Sara compró varios refrescos a un euro cada refresco, y compró un pastelito de 80 céntimos de euro. Pagó con un billete de 5 €, y le devolvieron 1,20 €. ¿Cuántos refrescos compró Sara?

Solución:.................................

4.- Antón avanza en cada paso 0,65 m. pero cuando tiene prisa, avanza 0,75 m. Hoy Antón tiene prisa.

¿Cuántos metros recorre si da diez pasos? Solución:........................

¿Y si da 100 pasos? Solución:...................................

5.- Jorge tiene 7050 canicas. La tercera parte la repartió en 10 cajas.

¿Cuántas canicas puso en cada caja? Solución:.............................

Nombre y Apellidos:

Curso:

6.-Calcula:

a) 9,4 x 100 =

b) 9,4 x 10 =

c) 9,4 x 1.000 =

7.- Completa:

a) 4x ____ =16

b) 25: ____ =5

c) _____ :10=100

8.-Calcula:

a) 4 x 8 + 2=

b) (4 + 2) x 3=

c) 6 x 3 – 4 x 3=

9.- Calcula:

a) 4/5 de 35=

b) 2/3 de 6=

c) 3/4 de 28=

10.- Sin hacer las divisiones, relaciona las que tengan el mismo cociente.

30 : 2	15 : 3
30 : 5	60 : 4
30 : 6	90 : 15

ANEXO C

PRUEBAS DE COMPETENCIA MATEMÁTICA 6º DE PRIMARIA

Nombre y Apellidos:

Curso:

1.-Marisa tenía en su cuenta bancaria 3.120 €. Hoy fue al banco e hizo las siguientes gestiones: ingresó 690 €, después sacó 120 € y finalmente, volvió a ingresar 2.000 €. ¿Cuánto dinero tiene ahora Marisa en su cuenta?

Solución:......................................

2.-Una zapatería está en rebajas. Las botas que costaban 98 € las rebajaron 15 €. Los zapatos que costaban 70 € los rebajaron 12 €. ¿Cuánto cuestan ahora las botas más que los zapatos?

Solución:...

3.-Andrea empieza a leer un libro el lunes. Cada día lee 14 páginas. ¿Cuántas páginas habrá leído en total al final de la semana?

Solución:.......................................

4.- Jorge reparte 5 galletas a partes iguales entre 6 niños, y cuatro bizcochos a partes iguales entre 7 niñas.

¿Qué fracción de galleta le corresponde a cada niño?:...............................

¿Qué fracción de bizcocho le corresponde a cada niña?:.................................

¿Cuál es la fracción mayor, la de galleta o la de bizcocho?:....................................

5.- La longitud del río Vilares es de 120 Km. En las dos quintas partes de su recorrido se puede practicar piragüismo. ¿En cuántos quilómetros se puede practicar este deporte?

Solución:.......................................

Nombre y Apellidos:

Curso:

6. Escribe en forma de fracción decimal:

a) 0,25=

b) 0,3=

c) 3,14=

7. Ordena de mayor a menor estas fracciones

a) 3/4	2/5	1/6	2/3
b) 5/6	8/6	9/9	3/7
c) 4/5	6/6	8/9	7/2

8. Completa:

a) 10,45 - = 4,39

b) 42,56 + 63,5 + = 134,12

c) 89,55 - = 40,38

9. Calcula

a) 4/3 + 1/3 + 4/5=

b) 3/2 – (3/4 + 1/2)=

c) 5/4 – 1=

10. Calcula

a) 45 + 28 – 59 =

b) 76 – (25 + 43) + 95 =

c) (23 + 7) x 2 x 3 =

ANEXO D

PRUEBAS DE COMPETENCIA MATEMÁTICA 2º DE ESO

Nombre y Apellidos:

Curso:

1.- Un grifo tarda en llenar un depósito de 250 litros de agua 32 minutos. ¿Cuánto tardará en llenar otro depósito de 7,25 metros cúbicos de capacidad?

Solución:.......................................

2.- Una escalera de 7,3 m de altura se proyecta con el pie a 4,8 de la pared para arregar un problema de la azotea de la casa ¿A qué altura se encuentra la azotea?

Solución:..

3.-Entre la casa de Alejandro y Pedro, ¾ de la de Alejandro, hay 25,32 km que es la distancia entre la casa de Alberto y Pedro. Alberto visita a Pedro y desde allí va a ver a Alejandro ¿Qué distancia recorre Alberto?

Solución:..

4.- Ángel, un famoso director de cine, ha realizado un total de 5 películas para las que ha utilizado 3 años de trabajo. ¿Cuánto tardará en hacer 7 películas?.

Solución:..

5. Un padre tiene 35 años y su hijo 5 ¿Al cabo de cuántos años será la edad del padre tres veces mayor que la del hijo?

Solución:..

Nombre y Apellidos:

Curso:

1 Ordena de mayor a menor las siguientes fracciones:

a) 3/4; 5/6; 7/9; 1/14; 9/2

b) 1/6:6; 1/2:2; 1/7; 7/3:1/3

c) 7/3; 5/4;1/2:4/2

2. Resuelve

a) $\frac{2}{3} - \frac{5x}{4} = 2x - 7$

b) $\frac{x}{6} - \frac{x-1}{2} = \frac{x-13}{9}$

c) $\frac{5}{8} + \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{1}{4}x - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right) - \frac{5}{4}\right] = \frac{3}{4} \cdot \left(x - \frac{1}{6}\right) - x$

3. Resuelve:

a) $3x^2 = -x^2$

b) $5x(3x + 7)(8x^2 - 24)$

c) $x^2 - 5x + 6 = 0$

4. Resuelve:

a) $[(-2)^{-2}]^3 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4 =$

b) $[(-2)^6 : (-2)^3]^3 \cdot (-2) \cdot (-2)^{-4} =$

c) $[(-3)^6 : (-3)^3]^3 \cdot (-3)^0 \cdot (-3)^{-4} =$

5. Convierte y efectúa

a) 5,3 ha 42 a 5 ca---------------- en m^2

b) 23 dm^3 -5dL=------dm^3

c) 35 l + 0,7 m^3 + 3 dl=-----dm^3