Análisis de las metáforas utilizadas en un proceso de instrucción sobre representación de gráficas funcionales

Jorge I. Acevedo y Vicenç Font

Universitat de Barcelona

Resumen:

En este trabajo aplicamos herramientas de la teoría de Lakoff y Núñez (2000) y de la teoría de las funciones semióticas (Godino, Contreras y Font, 2004) al análisis de una sesión de clase de bachillerato en la que se estudia la representación gráfica de funciones. Como unidad primaria de análisis didáctico se propone la configuración didáctica, constituida por las interacciones profesor-alumno a propósito de una tarea matemática y usando unos recursos materiales específicos. Dentro de cada configuración didáctica enfocamos nuestro análisis a los fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor y en el de los alumnos. Terminamos con algunas consideraciones sobre las posibles causas de estos fenómenos.

Summary:

In this paper, we apply tools of the theoretical framework about the embodiment of mind proposed by Lakoff and Núñez (2000) and the theoretical framework about semiotic function (Godino, Contreras y Font, 2004) to the analysis the teacher's discourse when explaining the graphical representation of functions at high school. We propose as primary unit of analysis the didactic configuration, constituted by the interactions teacher-student concerning a mathematical task and using some specific material resources. Inside each didactic configuration, we focus our analyses to the phenomenon related with the use of metaphors in the professor's discourse and student's discourse. We end up with some considerations about the possible causes of this phenomenon

1 MARCO TEÓRICO

El marco teórico utilizado en esta investigación fundamentalmente es la teoría sobre "qué son las matemáticas", propuesta por Lakoff y Núñez (2000). El núcleo central de esta teoría está basado en la importancia que tiene el cuerpo sobre la mente, y en los relativamente recientes hallazgos en lingüística cognitiva. Su tesis principal afirma que el origen de las estructuras matemáticas que construyen las personas, y también las que se construyen en instituciones, hay que buscarlo en los procesos cognoscitivos cotidianos, como son los esquemas de las imágenes y el pensamiento metafórico. Según estos autores, dichos procesos permiten explicar cómo la construcción de los objetos matemáticos, tanto los personales como los institucionales, está sostenida por la manera de relacionarse nuestro cuerpo con los objetos de la vida cotidiana. En segundo lugar, también tendremos en cuenta algunos constructos de la Teoría de las Funciones Semióticas (TFS a partir de ahora).

1.1 Pensamiento metafórico

En esta investigación asumimos la interpretación de la metáfora como la comprensión de un dominio en términos de otro. Las metáforas se caracterizan por crear un puente conceptual entre un dominio de partida y un dominio de llegada que permite proyectar propiedades del dominio de partida en el de llegada. En otras palabras, crean un cierto "isomorfismo" que permite que se trasladen una serie de características y estructuras. Ahora bien, las metáforas sólo dejan ver un aspecto del dominio de llegada que no engloba su totalidad, la metáfora nos sirve para mostrar el aspecto que deseamos evidenciar y ocultar otros aspectos, de los cuales muchas veces ni siquiera somos conscientes. Otra de las funciones que cumple la metáfora es la de conectar diferentes sentidos y, por tanto, ampliar el significado que tiene para una persona un determinado objeto matemático.

Nuestra representación del mundo está siempre influida por las metáforas que inyectamos en él, casi siempre de una manera inconsciente. La mayor parte de los seres humanos conceptualizamos cosas abstractas en términos de cosas concretas. Por ejemplo, cuando entendemos el sentimiento de cariño por medio de la experiencia térmica utilizamos diferentes metáforas (por ejemplo, "un caluroso abrazo"). Una posible explicación de estas metáforas, llamadas metáforas conceptuales, es que se sustentan en las experiencias fenoménicas que vive nuestro cuerpo para relacionarse con su entorno físico y cultural.

En relación con las matemáticas, podemos distinguir dos tipos de metáforas conceptuales.

- Grounding metáforas: Son las que tienen su dominio de partida dentro de las matemáticas, pero su dominio de llegada fuera de ellas. Por ejemplo: "Las clases son contenedores", "los puntos son objetos", etc.

- Linking metáforas: Tienen su dominio de partida y de llegada en las mismas matemáticas. Por ejemplo, "los números reales son los puntos de una recta", las funciones de proporcionalidad directa son rectas que pasan por el origen de coordenadas".

La importancia que tiene el pensamiento metafórico en la construcción del significado de los objetos matemáticos es reconocida por una gran mayoría de los investigadores en didáctica de las matemáticas y es el origen de una teoría sobre las matemáticas propuesta por Lakoff y Núñez (2000). Según este punto de vista, la naturaleza de las matemáticas hay que buscarla en las ideas de las personas, no en las demostraciones formales, axiomas y definiciones ni en mundos trascendentes platónicos. Estas ideas surgen de los mecanismos cognitivos y corporales de las personas. Por razones de tipo evolutivo, todos desarrollamos los mismos mecanismos cognitivos de los que surgen las ideas matemáticas. Debido a su origen común, las ideas matemáticas no son arbitrarias, no son el producto de convenciones completamente sociales y culturales –aunque los aspectos sociales e históricos juegan papeles importantes en la formación y desarrollo de estas ideas–[1].

A la pregunta ¿Cuáles son las capacidades cognitivas, basadas en la importancia del cuerpo sobre la mente, que permiten a una persona pasar de las habilidades numéricas básicas innatas a un entender profundo y rico de, por ejemplo, las matemáticas de una licenciatura universitaria de una facultad de ciencias? Lakoff y Núñez (2000) responden que éstas no son independientes del aparato cognitivo usado fuera de la matemática. Según estos autores, la estructura cognitiva necesaria para la matemática avanzada usa el mismo aparato conceptual que el pensamiento cotidiano en las situaciones ordinarias no matemáticas, esto es: *"(...) esquemas de la imagen, esquemas aspectuales, mezclas conceptuales y la metáfora conceptual."* (Núñez, 2000, pág. 4) Para dicha teoría, de todos estos procesos es el pensamiento metafórico el más importante para la construcción de las matemáticas.

1.2 Metáforas relacionadas con las gráficas de funciones

También hemos tenido en cuenta trabajos más concretos en los que se aplica la teoría anteriormente expuesta a las funciones:

1) En Núñez, Edwards y Matos (1999) se muestra como el tipo de metáfora que relaciona un objeto matemático con un campo no matemático de la vida cotidiana, es básico para entender las dificultades cognitivas relacionadas con la continuidad de funciones.

2) Según Font (2000) las gráficas se han estructurado históricamente a partir de las siguientes metáforas: a) Las curvas son secciones b) Las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones c) Las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones y el análisis de estas condiciones permite encontrar una ecuación que cumplen los puntos de la curva. d) La grafica de una función f es el conjunto formado por los puntos de coordenadas $(x, f(x))$. Por otra parte, en Font (2000, pág. 122) se observó que el hecho de utilizar una variación de la metáfora c de manera inconsciente en el discurso del profesor producía la siguiente dificultad en los alumnos:

   (...) *observamos que había alumnos que, cuando movían el punto A, pensaban que el nuevo punto continuaba siendo el punto A y que la nueva recta tangente era la misma que antes pero con diferente inclinación. De hecho, es como si estructurasen la situación en términos de una persona que se mueve (punto A) con un saco en la espalda (recta tangente) por una carretera que primero sube y después baja (gráfica) y considerasen que la persona y el saco siempre son los mismos a pesar de estar en diferentes lugares y tener diferente inclinación.*"

[1] En Johnson (1991) se puede encontrar la justificación filosófica que permite a esta teoría distanciarse tanto del objetivismo realista como del relativismo.

3) En Font y Acevedo (2003) y Acevedo, Font y Giménez (2003) se detectó el siguiente fenómeno al analizar el discurso del profesor cuando explica la representación gráfica de funciones en el bachillerato: el profesor usa expresiones que sugieren, entre otras, metáforas del tipo «la gráfica de una función se puede considerar como la traza que deja un punto que se mueve sobre la gráfica». También se muestra que: 1) el profesor usa de manera poco consciente estas metáforas y cree que sus efectos en la comprensión de sus alumnos son inocuos, 2) contrariamente a lo que cree el profesor, los alumnos estructuran su conocimiento sobre las funciones en los términos metafóricos que ha utilizado el profesor de manera inconsciente.

1.3 Configuraciones didácticas

La TFS (Godino, Contreras y Font 2004) proporciona un marco en el que es posible analizar la interacción entre el profesor y los alumnos a propósito de un contenido matemático específico. Una *configuración didáctica* se compone de una configuración epistémica, esto es, una tarea, las acciones requeridas para su solución, lenguajes, reglas (conceptos y proposiciones) y argumentaciones, las cuales pueden estar a cargo del profesor, de los estudiantes o distribuidas entre ambos. Asociada a una configuración epistémica habrá también una configuración docente y otra discente en interacción (además de las correspondientes cognitivas, emocionales y mediacionales). El docente puede desempeñar las funciones de asignación, motivación, recuerdo, interpretación, regulación, evaluación. El discente puede a su vez desempeñar los roles de exploración, comunicación, validación, recepción, autoevaluación, etc.

La configuración didáctica se concibe como un sistema abierto a la interacción con otras configuraciones de la trayectoria didáctica de la que forma parte. Esta noción va a permitir realizar un análisis detallado de los procesos de instrucción matemática. El proceso de instrucción sobre un contenido o tema matemático se desarrolla en un tiempo dado mediante una secuencia de configuraciones didácticas. En la sesión de clase completa sobre "representación gráfica de funciones" que usamos como ejemplo hemos identificado una secuencia de 14 configuraciones didácticas. En los apartados siguientes vamos a analizar cuatro, no consecutivas, que son las que, en nuestra opinión, permiten ilustrar mejor el tipo de análisis que proponemos.

2 ANÁLISIS DE LAS METÁFORAS PRESENTES EN ALGUNAS CONFIGURACIONES DIDÁCTICAS

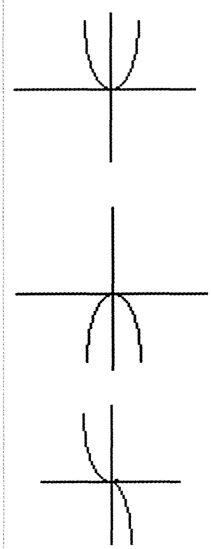
En la primera configuración de la transcripción de la sesión de clase el profesor propone la resolución de un problema seleccionado del libro de texto (esbozo de la gráfica de las funciones

$$f(x)=2x^4,\ g(x)=-\ 2x^4 \text{ y } h(x)=-2x^5)$$

que los alumnos tenían que resolver en casa. Con la información disponible no se puede saber el grado de asunción de la tarea por parte de los alumnos, en particular cuántos de ellos trataron de resolver el "ejercicio para casa" y qué fueron capaces de hacer. No hay comunicación por parte de los alumnos, sino sólo presentación de la solución por parte del profesor quien regula la forma de resolver la tarea. Hay un momento de evaluación colectiva mediante la pregunta genérica *¿De acuerdo?* Hay un momento en que el profesor "cambia de tarea", iniciándose la segunda *configuración didáctica.*

La segunda configuración didáctica se organiza en torno a la tarea de determinar máximos, mínimos y puntos de inflexión de manera visual a partir del esbozo de las tres funciones obtenidas en la configuración anterior. Sólo se observa la presentación de la solución por parte del profesor.

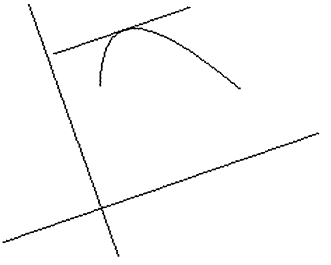
Configuración didáctica 3: Cálculo de la derivada en x=0.

Transcripción de la primera parte de la CD3	Pizarra	Observaciones
La parte *c*, para cada una de las funciones se ha de encontrar una derivada en $x = 0$, comencemos por la primera, la efe, la primera derivada............ $8x^3$... la segunda derivada $24x^2$, pensemos que la primera en la función $f(x)$ en $x = 0$ presenta un mínimo y la derivada en $x = 0$ es 0, como cabía esperar, porque ahora esta tangente es horizontal, y la segunda derivada en $x = 0$ también da 0		El profesor hace el gesto de poner la mano indicando la posición horizontal de la recta tangente en cada gráfica.

La tercera configuración didáctica se organiza en torno a la tarea de determinar la derivada en $x = 0$ para cada una de las tres funciones de las configuraciones anteriores. No hay comunicación por parte de los alumnos, sino sólo presentación de la solución por parte del profesor quien además da una interpretación geométrica al resultado obtenido analíticamente. El profesor hace observar a los alumnos que la derivada en los tres casos es cero debido a que en las tres gráficas la recta tangente en $x = 0$ es horizontal.

En esta explicación se puede observar el uso de una metáfora orientacional (Lakoff y Johnson 1991, pág. 50) por parte del profesor puesto que en su explicación utiliza el término "horizontal" en lugar de utilizar la expresión "paralela al eje de abscisas".

Esta metáfora es muy habitual en las clases de bachillerato y puede facilitar errores en los alumnos, puesto que éstos ante la gráfica siguiente pueden considerar que, cuando x es la abscisa del máximo, la derivada no es cero ya que la recta tangente no es "horizontal"



Este posible error no suele manifestarse debido a que en los libros de texto, y en las explicaciones de los profesores, se suelen presentar sistemas de coordenadas que tiene el eje de abscisas en posición horizontal y el eje de ordenadas en posición vertical. Se trata de un típico fenómeno de generación de ejemplos prototipos.

La cuarta configuración consiste en un comentario del profesor sobre el hecho de que si la derivada segunda es cero, podemos tener máximos, mínimos o puntos de inflexión. Primero calcula las derivadas primera y segunda de las tres funciones anteriores haciendo observar a los alumnos que en los tres casos en $x = 0$ la derivada segunda se anula. Después utiliza las gráficas de las funciones cuyo esbozo estaba dibujado en la pizarra para hacerles ver que en la primera función en $x = 0$ hay un máximo, en la segunda un mínimo y en la tercera un punto de inflexión. No hay diálogo por parte de los alumnos y el profesor se limita a explicarlo.

La quinta configuración se organiza en torno a la técnica que propone el profesor para determinar si tenemos un máximo, un mínimo o un punto de inflexión en $x = a$ cuando $f''(a) = 0$. Para ilustrar dicha técnica toma el caso particular "$a = 0$", y propone realizar el estudio de la variación de la derivada primera en un entorno del punto de abscisa $x = 0$.

En esta configuración, el discurso metafórico del profesor puede inducir al alumno a entender el cero como un punto determinado sobre un camino que se recorre o una línea por la cual se transita. Palabras como "antes de cero", "después de cero" pueden producir este efecto en el alumno. Para Lakoff y Núñez (2000, pág. 38) esta es una poderosa metáfora utilizada muy a menudo por los profesores en todos los niveles de enseñanza. En dicha metáfora se sugiere una organización espacial, se tiene un origen ("de"), un camino ("pasa por", "aquí", "a lo largo"), y un fin ("a", "hasta") y además se contempla algo que se mueve (punto, objeto, etc.) y que se puede localizar en un momento dado.

A pesar de que el profesor termina esta configuración con una pregunta que, a nuestro entender, tiene una función evaluativa, los alumnos siguen sin intervenir. Esta configuración la consideramos de tipo argumentativo, ya que el profesor recuerda una serie de propiedades generales que aplica a casos particulares.

Configuración didáctica 5: Criterio suficiente de máximos, mínimos y puntos de inflexión. Estudio de la variación de la derivada en un entorno del punto

Transcripción	Pizarra	Observaciones
En la actividad anterior se ha de observar que si la primera derivada en $x=a$ es 0, y la segunda derivada en $x = a$ también es 0, son posibles diversas situaciones. En este caso, es conveniente hacer el estudio del comportamiento del signo de la derivada primera en un entorno de $x = a$, para determinar en que situaciones nos encontramos.	Siguen dibujadas las gráficas de la CD3	El profesor lee este párrafo literalmente del libro de texto.
Esto quiere decir que si nosotros sabemos que hay en $x = a$ un máximo o un mínimo o un punto de inflexión, y al hacer la segunda derivada da cero. La segunda derivada no nos aporta nueva información.		
Lo que se ha de hacer es una tabla de variación. Si antes del cero es creciente, si después de cero es creciente, si antes del cero y después del cero es creciente tenemos un punto de inflexión. Si antes del cero es creciente y después del cero es decreciente, un máximo. Si antes del cero es decreciente y después de cero es creciente, un mínimo.		Acompaña este comentario con gestos sobre las gráficas dibujadas en la pizarra.
Haced la tabla de cada función.		
¿Hay alguna pregunta?		

3 EL PAPEL DE LA METÁFORA EN LA NEGOCIACIÓN DE SIGNIFICADOS

En una configuración didáctica posterior (la n.º 8) el profesor tiene por objetivo recordar el concepto "dominio de una función" y de las técnicas estudiadas para su determinación. Para ello, el profesor propone dos ejemplos, el primero de los cuales es la función racional $f(x)=1/(x+1)$. El profesor primero introduce la formulación: *el dominio es el conjunto de valores de la variable independiente que tienen imagen* y a continuación introduce la siguiente: *son los valores de los cuales se puede calcular la imagen*. Esta segunda formulación resulta más operativa para el cálculo del dominio que la primera, ya que facilita entrar en un "juego de lenguaje" que permite llegar a un consenso sobre cuál es el dominio de la función. Las características de este juego de lenguaje son:

- *Introducción de un elemento genérico*. El profesor introduce el elemento genérico x sobre el cual realizar las operaciones indicadas en la fórmula de la función mediante la frase "cuando yo substituyo la x (señala la x de la fórmula con el dedo) por esos números, puedo hacer todo este cálculo (con la mano rodea la fracción $1/(x+1)$)" y después dice "tomemos un número" y espera que los alumnos mentalmente encuentren los valores para los cuales se pueden realizar las operaciones indicadas en la fórmula de la función.

- *Consenso sobre el rango de valores del elemento genérico*. Los alumnos formulan hipótesis sobre el dominio hasta llegar a un consenso que es aceptado por los alumnos y, sobre todo, por el profesor. En este caso varios alumnos dicen "todos menos el -1" y el profesor da por buena esta afirmación.

En el segundo ejemplo se reproduce el mismo juego de lenguaje con las siguientes variantes. La primera variante es que en este caso el elemento genérico es un punto de la parte negativa del eje de abscisas. En efecto, el profesor en este caso dibuja la gráfica de la función $f(x)= \ln x$ y espera que los alumnos mentalmente apliquen la técnica de: 1) pensar en un punto de la parte negativa del eje de abscisas, 2) trazar la perpendicular al eje de abscisas por este punto, 3) observar que esta recta no corta a la gráfica de la función logaritmo neperiano y 4) que este razonamiento es válido para cualquier punto de la parte negativa del eje de abscisas y también para el origen de coordenadas (esta técnica gráfica de determinación del dominio ya ha sido trabajada en una unidad anterior). La segunda variante es que, cuando los alumnos responde "de cero a más infinito", el profesor considera ambigua esta respuesta para llegar a un consenso y decide intervenir pidiendo a los alumnos si el cero es del dominio, para después aceptar como buena la respuesta de los alumnos de que el cero no es del dominio.

Es importante remarcar que el consenso al que se llega está expresado en términos metafóricos ya que, tanto los alumnos como el profesor, utilizan la expresión "de cero a más infinito", los alumnos lo hacen oralmente, mientras que el profesor, a esta expresión oral, asocia la representación $(0,+\infty)$ y también la gesticulación sobre la parte positiva del eje de abscisas (mueve la mano desde el origen de coordenadas hacia la derecha). Se trata de la metáfora que considera la semirrecta numérica como un camino con un comienzo y con un horizonte (el infinito).

La combinación del lenguaje dinámico y el movimiento de la mano permite entender el dominio, un caso de infinito actual puesto que es un intervalo abierto, como el resultado de un movimiento sin fin que tiene un principio. Según Lakoff y Núñez (2000, p. 158), entendemos este caso de infinito actual como resultado de un movimiento sin fin que tiene un principio, gracias a que proyectamos metafóricamente sobre este tipo de procesos nuestro conocimiento de los procesos que tienen principio y final. Lakoff y Núñez afirman que los procesos que continúan indefinidamente se conceptualizan metafóricamente como teniendo un final y un último resultado. Para estos autores, este tipo de conceptualización es el resultado de la aplicación de lo que ellos llaman la Metáfora Básica del Infinito.

4 CONSIDERACIONES FINALES

En este trabajo se constata la importancia que tiene el uso de la metáfora tanto en el discurso del profesor como en el del alumno. Este uso, probablemente inevitable e inconsciente, es fundamental en la construcción de los objetos matemáticos de los alumnos y en la negociación de significados en el aula.

Las causas que puede explicar este fenómeno son complejas. Por una parte, tal como señalan Lakoff y Núñez, el uso de la metáfora es fundamental en la comprensión de cualquier tema –y, por tanto, en su explicación –; ahora bien, en nuestra opinión, también puede haber causas relacionadas con las matemáticas, ya que la representación gráfica de funciones necesita, además de una descripción en términos globales, la introducción de conceptos locales tales como crecimiento y decrecimiento en un punto, etc. Estos conceptos locales presentan una gran dificultad para los alumnos, motivo por el cual, a nuestro entender, hay profesores que los dejan en un segundo plano y prefieren utilizar explicaciones dinámicas en las que el uso de la metáfora es fundamental.

REFERENCIAS

ACEVEDO, J.I.; FONT, V. y GIMÉNEZ, J. (2004) Class Phenomena related with the use of metaphors, the case of the graph of functions. In Giménez,, J, Fitzsimons, G, Hahn, C (ed) *Globalisation and mathematics Education. CIEAEM 54* (pp. 336-342). Barcelona: Graó.

FONT, V. (2000) Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades. Tesis doctoral no publicada. Universitat de Barcelona.

FONT, V. y ACEVEDO, J.I. (2003) Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las Ciencias,* 21, 3, 405-418.

GODINO, J.D.; CONTRERAS, A. y FONT, V. (2004) *Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática.* XX Jornadas del SI-IDM. Madrid 2004.

JOHNSON, M. (1991) *El cuerpo en la mente.* Madrid: Debate.

LAKOFF, G. y JOHNSON, M. (1991) Metáforas de la vida cotidiana. Madrid: Cátedra

LAKOFF, G. y NÚÑEZ, R. (2000) *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* New York: Basic Books.

NÚÑEZ, R. (2000) Mathematical idea analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics, en Nakaora T. y Koyama M. (eds.). *Proceedings of PME24* (vol.1, pp. 3-22). Hiroshima: Hiroshima University.

NÚÑEZ, R.; EDWARDS, L. y MATOS, J.F. (1999) Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics,* 39, 45-65.