



UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Filtro de Kalman lineal variable basado
en cuaternas para unidad de medida
inercial, con aplicación en dinámica de
vehículos

MEMORIA

que, para optar al grado de Doctora Ingeniera Industrial, presenta

ANA MARÍA DÍAZ DÍAZ

Ferrol, abril de 2012

Ós meus pais

Agradecimientos

Me gustaría agradecer el constante apoyo y ayuda de tanta gente durante todo este tiempo. También me gustaría dar las gracias a todos los que de algún modo han contribuido a la consecución de este trabajo desde diversos puntos de vista: material, intelectual, administrativo, formal. Finalmente, un agradecimiento especial a mi familia; sin ella esto no habría sido posible.

A. Díaz

Resumen

El seguimiento preciso en tiempo real de un sólido rígido tiene muchas aplicaciones en distintos ámbitos industriales; se podrían señalar entre ellos robótica, ingeniería aeroespacial, realidad virtual y otros. Una industria de especial relieve que impulsa la investigación en este campo es la industria del automóvil. Resolver el posicionamiento de un sistema mecánico complejo como un vehículo automóvil de forma exacta y precisa, bien sea en su simulación, bien sea a partir de datos medidos experimentalmente, considerado como uno de los pasos que permiten resolver la cinemática y la dinámica del sistema, es un amplio campo de estudio para nuevos métodos y formulaciones dentro de las técnicas de simulación de sistemas multicuerpo; se puede así llegar a la caracterización de la pérdida de estabilidad. Además de lo anterior, la simulación de automóviles se extiende a otros campos de gran actualidad como son el control y todas sus aplicaciones de seguridad activa y pasiva, la necesidad de que se desarrolle en tiempo real o por debajo de él, la inclusión de dispositivos de medida que sean independientes de las condiciones de contorno; todo este conjunto ha servido como motivación para el presente trabajo. En el Laboratorio de Dinámica de Vehículos de la Universidad de La Coruña se ha trabajado en el desarrollo de una metodología para la caracterización del posicionamiento de un vehículo utilizando la teoría de filtrado de Kalman para el diseño del mismo.

En aplicaciones orientadas a la simulación en tiempo real, no es frecuente la notación de las ecuaciones de la dinámica en cuaternas. Proponer esta formulación para simulación en tiempo real ha sido otro de los motivos de este trabajo.

Índice

Agradecimientos	V
Resumen	VII
Índice	IX
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Objetivos y metodología	2
1.3. Estructura del documento	3
2. Estado del arte	5
2.1. Contenido del apartado	5
2.2. Proyectos ITS	6
2.3. Vehículos inteligentes	8
2.3.1. Vehículos totalmente autónomos	9
2.3.2. Control longitudinal	11
2.3.3. Control lateral	16
2.3.4. Control vertical	16
2.4. Estimadores de posicionamiento	17
2.4.1. Problema de posicionamiento	17
2.4.2. Estimadores	20
2.5. Modelos de la dinámica de vehículos	21
2.5.1. Tiempo real	23

3. Filtrado de datos	25
3.1. Teoría de filtrado	25
3.1.1. Procesos estocásticos	26
3.1.2. Filtrado y teoría de los mínimos cuadrados	29
3.1.3. Filtro de Wiener	31
3.1.4. Filtro de Kalman	36
3.1.5. Filtro de Kalman discreto	36
3.1.6. Filtro de Kalman extendido	39
3.1.7. Filtrado complementario	41
3.2. Vector de estado y filtro de Kalman	48
3.3. Aproximación mínimos cuadrados	48
3.4. Aproximación de mínima varianza	51
4. Descripción del estimador	71
4.1. Desarrollo del estimador	71
4.2. Ecuaciones del estimador de Kalman	72
4.3. Eficiencia del filtro propuesto	80
5. Conclusiones	95
5.1. Conclusiones	95
5.2. Futuras líneas de investigación	96
A. Álgebra de las cuaternas	97
A.1. Ecuaciones en cuaternas	97
A.2. Álgebra de cuaternas	98
B. Instrumentación del prototipo	105
B.1. Obtención de datos	105
B.2. Sensores	105
B.2.1. Velocidad de Rotación de las Ruedas	109
B.2.2. Aceleraciones Lineales del Chasis	112
B.2.3. Velocidades Angulares del Chasis	113

B.2.4. Intensidad del Campo Magnético	114
B.2.5. Posición de las Suspensiones y la Dirección	114
B.2.6. Otros Sensores	115
B.3. Actuadores	115
B.4. Enlace de Radiofrecuencia	116
B.5. Sistema mixed signal	117
C. Caracterización de los sensores	119
C.1. Rate-Gyros	119
C.2. Acelerómetros	123
C.3. Magnetómetros	127

Índice de tablas

3.1. Comparativa de filtros	69
4.1. Varianzas máximas en la medida de los sensores	89
B.1. Características de los RateGyros	113
B.2. Características de los servomecanismos	115

Índice de figuras

3.1. Sistema lineal en el dominio del tiempo	29
3.2. Sistema lineal en el dominio de frecuencias	29
3.3. Esquema Ciclo del Filtro de Kalman	39
3.4. Diagrama de Bloques de un Filtro Complementario	42
3.5. Diagrama de un Filtro en el Dominio de Transformadas	43
3.6. Ejemplo bidimensional de una transformación de la media y la covarianza a través de un sistema no lineal	62
4.1. Representación del sistema de coordenadas inercial y los vectores de gravedad e intensidad del campo magnético en la superficie de la tierra.	81
4.2. Evolución del Péndulo doble en el plano XZ	82
4.3. Evolución del Péndulo doble en el plano YZ	82
4.4. Evolución del péndulo doble	83
4.5. Péndulo doble en el instante inicial.	84
4.6. Simulación en el plano XZ - Giros <i>fuera</i> del plano.	85
4.7. Simulación en el plano XZ - Giro en el plano.	86
4.8. Simulación en el plano YZ - Giros <i>fuera</i> del plano.	87
4.9. Simulación en el plano YZ - Giro en el plano.	88
4.10. Comparación de las velocidades angulares $\dot{\varphi}_2$ antes y después de añadir el ruido blanco.	90
4.11. Muestra de una señal que sólo contiene ruido.	91
4.12. Simulación en el plano XZ - Giros <i>fuera</i> del plano.	92
4.13. Simulación en el plano XZ - Giro en el plano.	92

4.14. Simulación en el plano YZ - Giros <i>fuera</i> del plano.	93
4.15. Simulación en el plano YZ - Giro en el plano.	93
C.1. Datos de caracterización del giróscopo del eje x.	120
C.2. Datos de caracterización del giróscopo del eje y.	121
C.3. Datos de caracterización del giróscopo del eje z.	122
C.4. Datos de caracterización del acelerómetro del eje x.	124
C.5. Datos de caracterización del acelerómetro del eje y.	125
C.6. Datos de caracterización del acelerómetro del eje z.	126
C.7. Datos de caracterización del magnetómetro x.	127
C.8. Datos de caracterización del magnetómetro y.	127
C.9. Datos de caracterización del magnetómetro z.	128

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

El posicionamiento preciso en tiempo real de un sólido rígido y la estimación de su estado dinámico tiene muchas aplicaciones en distintos ámbitos industriales; se podrían señalar entre ellos robótica, ingeniería aeroespacial, realidad virtual y otros. Una industria de especial relieve que impulsa la investigación en este campo es la industria del automóvil. Resolver el posicionamiento de un sistema mecánico complejo como un vehículo automóvil de forma exacta y precisa, bien sea en su simulación, bien sea a partir de datos medidos experimentalmente, considerado como uno de los pasos que permiten resolver la cinemática y la dinámica del sistema, es un gran campo para el estudio de nuevos métodos y formulaciones dentro de las técnicas de simulación de sistemas multicuerpo.

Por otro lado, en relación con la estimación de su estado dinámico, la simulación de automóviles se extiende a otros campos de gran actualidad como son el control y todas sus aplicaciones de seguridad activa y pasiva. La necesidad de caracterizar la pérdida de estabilidad, que se desarrolle en tiempo real o por debajo de él, la inclusión de dispositivos de medida que sean independientes de las condiciones de contorno, han servido como motivación para este trabajo.

Los sistemas de control de estabilidad de vehículos automóviles deben estar diseñados para comenzar a trabajar en circunstancias especiales, cuando se detecta falta de estabilidad [27], [34]. En el Laboratorio de Dinámica de Vehículos de la Universidad de La Coruña se ha trabajado en el desarrollo de un algoritmo para la estimación del posicionamiento de un vehículo automóvil, utilizando para el diseño del mismo la teoría de filtrado de Kalman [51], [113]. La aplicación de estas metodologías a problemas de caracterización de la pérdida de estabilidad en vehículos automóviles se refleja en múltiples investigaciones, con frecuencia para la determinación de estados del sistema que no son medibles

directamente [7], [8], [14], [15], [104], [105], [122].

Este problema se aborda desde una perspectiva novedosa en este trabajo con respecto a la notación. En aplicaciones orientadas a la simulación en tiempo real, no es frecuente la notación de las ecuaciones en cuaternas [16], [117]. Verificar la idoneidad de esta formulación es otro de los motivos de este trabajo.

1.2. Objetivos y metodología

El principal objetivo de este trabajo es el desarrollo de un estimador de posicionamiento mediante un nuevo algoritmo basado en cuaternas con aplicación en la estimación del estado dinámico de un vehículo automóvil. Para esto se requiere:

- modelizar el problema de posicionamiento, estableciendo cuáles son las variables y los parámetros que deben ser conocidos,
- desarrollar un modelo virtual de filtro para simular el control,
- investigar la utilización de cuaternas para la formulación del problema,
- desarrollar un algoritmo de filtrado eficiente desde el punto de vista computacional (número de operaciones) y en términos de precisión (adecuación de resultados y realidad) para determinar el posicionamiento y
- validación de la eficiencia del filtro: los datos obtenidos serán objeto de un tratamiento numérico que permita obtener las magnitudes que son representativas del problema

1.3. Estructura del documento

Teniendo en cuenta los objetivos mencionados y los pasos metodológicos requeridos para alcanzarlos, propuestos en el apartado anterior, se detalla a continuación la estructura que presenta este trabajo.

En el presente capítulo se introduce el tema, se justifica el interés que tienen los desarrollos en esta dirección y se plantean los objetivos. Los capítulos 2 y 3 se dedican al estudio detallado del estado del arte tanto en las cuestiones relativas a los sistemas automáticos introducidos en el automóvil para aumentar la seguridad (control en automoción), como a la teoría general de filtrado y, en particular, a los algoritmos que pueden ser de aplicación al problema de estimación de la orientación.

Una vez analizadas las ventajas e inconvenientes de las soluciones estudiadas, en el capítulo 4 se presenta el nuevo estimador basado en el filtro de Kalman lineal variable, formulado en cuaternas y se justifica, tanto a nivel teórico, con los correspondientes desarrollos matemáticos, como desde el punto de vista práctico, estudiando su comportamiento.

Por último, en el capítulo 5 se presentan las conclusiones finales.

Capítulo 2

Estado del arte

La estimación de los datos cinemáticos y dinámicos de un vehículo obtenidos de un sistema de seguimiento en tiempo real, es una de las etapas en el desarrollo de un proyecto de automatización del mismo, con la posibilidad de poder ser utilizados posteriormente para controlar el vehículo. En la industria del automóvil, la automatización abarca diversos ámbitos como son los relativos a técnicas de control, instrumentación y modelización del vehículo [2], [12], [59]. Hay distintos enfoques con intereses diversos.

2.1. Contenido del apartado

En este apartado se resume la evolución de la automatización de los automóviles señalando los principales programas internacionales relacionados con este trabajo. A continuación se realiza una aproximación a problema de posicionamiento en general. Posteriormente, se recogen algunos de los modelos empleados en el estudio de la dinámica de vehículos y formulaciones empleadas. Por último, se describen algunos de los principales sistemas de automatización con aplicación en vehículos.

Tomando como referencia de partida la automatización en la industria del automóvil, los principales objetivos en este campo de la investigación se relacionan con la seguridad en la conducción: reducir el riesgo de accidentes, mejorar la seguridad, mejorar la capacidad de tráfico en la carretera [46], [100]. La circulación de los vehículos menos brusca guiada por un sistema automatizado puede también reducir el consumo de combustible y el desgaste del motor. También surge una nueva problemática al aumentar e número de vehículos en circulación que es la capacidad de las vías. Se ha intentado automatizar todos estos aspectos a lo largo de varias décadas, si bien es cierto que el nivel de desarrollo de la tecnología en el campo de los sensores y la electrónica ha retrasado el desarrollo

y aplicación de estas investigaciones. Es a finales del siglo XX cuando aparecen programas, tanto privados como estatales, en Estados Unidos, Europa y Japón [35]. El principal interés residía en aumentar la capacidad de las carreteras y la seguridad al automatizar tanto infraestructuras como vehículos. Inicialmente la investigación se centró en el desarrollo de Sistemas Avanzados de Carreteras (*Advanced Highway Systems*) y posteriormente se pasó a la Iniciativa en Vehículo Inteligentes (*Intelligent Vehicle Initiative, IVI*); toda la investigación desarrollada para la primera fase sirvió de base para su aplicación en la segunda. Todo este conjunto de investigación se agrupa en el denominado Sistemas de Transporte Inteligente (*Intelligent Transportation Systems, ITS*). En la actualidad algunos de estos sistemas de asistencia a la conducción ya han sido introducidos por los fabricantes en algunos modelos, véase por ejemplo el Control Adaptativo de Crucero (ACC), aunque quedan todavía muchas cuestiones por resolver, por ejemplo en todo lo relativo al campo de sensores. Por otro lado se han realizado diferentes propuestas para el aumento de la seguridad vial, el aumento de capacidad de las carreteras y el confort. Sin embargo en muchas ocasiones no es fácil pues surgen inconsistencias entre los distintos puntos de vista desde los que se aborda el problema [90].

2.2. Proyectos ITS

La investigación sobre sistemas ITS en Europa se ha desarrollado dentro de los programas DRIVE (*Dedicated Road Infrastructure for Vehicle Safety in Europe*) y PROMETHEUS (*Program for European Traffic with Highest Efficiency and Unprecedented Safety*). El programa DRIVE estaba dedicado al aumento de seguridad en las infraestructuras, mientras que el programa PROMETHEUS se ocupaba de la mejora de la eficiencia en el tráfico por carretera, ambos con un objetivo como es la mejora de la seguridad en la conducción.

El programa PROMETHEUS (1987 – 1995) ha sido el proyecto más largo hasta el momento dedicado al desarrollo de equipos de ayuda a la navegación en los vehículos. Comenzó como parte de la plataforma European Research Coordination Agency (EUREKA), llevado a cabo por 18 compañías europeas de automóviles, autoridades estatales y más de 40 instituciones dedicadas a la investigación. Su investigación se dividió fundamentalmente en las siguientes categorías: mejora de la información del conductor, asistencia activa al conductor, establecimiento de red de comunicaciones entre vehículos que sea capaz de proporcionar al conductor información acerca del estado del tráfico en algún tramo de la ruta establecida, gestión del tráfico.

Dentro de este área se situarían los sistemas de navegación y control. El mecanismo de filtrado de datos de estos sistemas es una de los objetivos analizados en este trabajo.

La organización que aglutina a la mayoría de los países europeos y un elevado número de instituciones que sirve de puente entre el mercado y los desarrollos obtenidos con estos programas es la *European Road Transport Telematics Implementation Coordination Organization* (ERTICO).

En lo que respecta a otras áreas geográficas, Japón fue el primer país en introducir sistemas de control de tráfico, debido a que las limitaciones de espacio y elevado número de vehículos eran muy importantes ya en el año 1970. Se han instalado dispositivos de control de tráfico en todas las grandes ciudades y en la mayoría de las zonas interurbanas, orientados fundamentalmente a proporcionar información al conductor. La creación en 1994 de la *Vehicle, Road and Traffic Intelligence Society* (VERTIS) supone la unificación en Japón de todos estos esfuerzos en investigación y desarrollo. VERTIS será a partir de junio de 2001 ITS Japan. Los objetivos de ITS Japan planeados en 1995 para un plazo de treinta años son: reducir el número de accidentes mortales a la mitad de la cifra del momento, eliminar las congestiones de tráfico, reducir el consumo de combustible y CO₂ en un quince por ciento, reducir la emisión de óxidos de nitrógeno, NO_x, en zonas urbanas un treinta por ciento. La investigación en ITS Japan se ha organizado en las siguientes áreas:

- Avances en sistemas de navegación.
- Sistemas de telepeaje.
- Asistencia para la seguridad en la conducción.
- Optimización de la gestión del tráfico.
- Aumento de la eficiencia en la gestión de carreteras.
- Asistencia al transporte público.
- Aumento de la eficiencia en el trabajo de vehículos comerciales.
- Asistencia a peatones.
- Asistencia a vehículos en situación de emergencia.

Los principales proyectos de investigación en vehículos avanzados y sistemas de carretera en los Estados Unidos han sido promovidos dentro del programa PATH (*Partners for Advanced Transit and Highways*), fundado en 1986 por el *California Department of Transportation* y el *Institute of Transportation Studies* de la Universidad de Berkeley. La investigación en PATH se divide en cuatro áreas:

- Comportamiento en conducción.

- Transporte y sistemas de información.
- Tráfico.
- Comunicaciones.

2.3. Vehículos inteligentes

Como ya se ha mencionado, en los años 90 la investigación en Estados Unidos y Europa estaba más orientada a proporcionar al conductor una mayor información, desarrollándose proyectos AHS (*Automated Highway System*), los cuales necesitan infraestructuras tanto en los vehículos como en las carreteras.

Por problemas económicos y limitaciones prácticas, la investigación a corto plazo se ha desplazado desde los AHS hasta los IVI (*Intelligent Vehicle Initiative*), y se ha centrado en sistemas de asistencia al conductor.

Muchos desarrollos realizados en el terreno de la automatización de carreteras también son aplicables en ese campo puesto que los requerimientos de control y sensorización son similares. Sin embargo, no hay que olvidar que existen numerosas deficiencias en el planteamiento conceptual que hacen que la incidencia de cada uno de estos sistemas en la seguridad, confort de la conducción y capacidad de las carreteras pueda ser diferente. Una posible clasificación de las distintas posibilidades de automatización es considerar el control total, o sistemas que se centran en control longitudinal, lateral o vertical [58].

2.3.1. Vehículos totalmente autónomos

Fuera del ámbito experimental, los vehículos totalmente autónomos resultan inviables por el momento, aunque son un banco de ensayos para aplicaciones que luego llegan a vehículos comerciales.

El primer vehículo autónomo se construyó en Japón en 1977; poseía un sistema de control que podía manejar el vehículo durante aproximadamente 50 m, utilizaba un motor adosado a la barra de dirección, y estaba basado en visión artificial y control proporcional [98].

En Estados Unidos la mayoría de los primeros proyectos significativos de este tipo fueron financiados por el Ministerio de Defensa. En 1986 se inició el proyecto NavLab de la Universidad Carnegie Mellon, en el que se disponía de varios prototipos capaces de circular de forma autónoma en autopistas con líneas bien marcadas en el asfalto. Entre estos vehículos se encuentran tanto turismos como autobuses o vehículos todo terreno para realizar expediciones campo a través con fines militares. Como instrumentación, el sistema funciona

con una simple cámara en color de bajo coste, un radar y un ordenador personal corriente, demostrando la viabilidad de resolución de problemas de navegación autónoma. Se desarrollaron hasta once versiones de vehículos dentro del proyecto. En 1997 se realizó una prueba en San Diego, patrocinada por el NASHC (*Nacional Automated Highway System Consortium*) de Estados Unidos. Un autobús fue conducido de forma manual hasta la autopista y, a partir de ahí, el conductor conmutó el sistema a funcionamiento automático. El conductor retoma la conducción cuando sale de la autopista. Este sistema también mantiene una distancia de seguridad con el vehículo precedente, y realiza maniobras de cambio de carril utilizando un sistema basado en radar instalado en el vehículo. El funcionamiento depende de las líneas pintadas en la calzada, por esto es difícil su implementación en entornos urbanos.

En Europa se han desarrollado varios prototipos. En Alemania, Dickmanns trabajó en un prototipo que era capaz de guiarse autónomamente por las autopistas alemanas, con tráfico real y llegando a velocidades de hasta 130 Km/h. Otros vehículos dentro del proyecto Prometheus son el VITA₂ de Daimler Benz y el VaMP. Ambos utilizan ordenadores personales PC-Pentium [30].

En la Universidad de Parma durante la década de los 90 se desarrolló el proyecto ARGO, dentro del proyecto europeo EUREKA PROMETHEUS. ARGO finalizó en 1994, pero esta Universidad continuó investigando financiada por el Consejo de Investigación Nacional Italiano. Un vehículo Lancia Thema fue equipado con lo necesario para la conducción autónoma en autopistas: sistema de adquisición trinocular, el procesador es un PC-Pentium bajo Linux junto al Hardware PAPRICA desarrollado específicamente para esta aplicación. En 1998 el vehículo condujo más de 2000 km de forma autónoma en un viaje de demostración por Italia [29]. En España se ha llevado a cabo el proyecto Autopía en el que se han sensorizado varios vehículos autónomos. Se utilizan controladores basados en lógica borrosa y un controlador PID, y el posicionamiento se realiza mediante GPS [72].

A continuación se presenta una relación de distintos sistemas que suponen un cierto grado de automatización. En muchos casos se han respetado los nombres en inglés que son más utilizados frente a una traducción al castellano poco establecida.

2.3.2. Control longitudinal

2.3.2.1. Sistema *Cruise Control*, CC (Control de Crucero)

Se limita a regular la velocidad; el conductor debe vigilar la distancia a los vehículos precedentes y, si es necesario, reducir la velocidad.

2.3.2.2. Sistema *Adaptative Cruise Control*, ACC (Control Adaptativo de la Velocidad de Crucero)

Puede detectar la distancia al vehículo precedente y mantener un espaciamiento constante entre ambos [97]. Puede funcionar sin vehículo precedente (modo autónomo) y en seguimiento de un vehículo precedente (modo adaptativo) [77]. Entre los sensores que requiere se encuentra un radar Doppler de buena resolución, un rango de operación entre 4 y 100 m con cono de apertura entre 8° y 16°, y un tiempo de refresco inferior a 65 ms para medir la distancia entre vehículos; también hay que medir la velocidad relativa. Los sistemas ACC no pueden funcionar con velocidades inferiores a 30 km/h y, por tanto, no resultan de utilidad en zonas urbanas. En éstas se necesitan sistemas de control del tipo *stop and go*. La tendencia actual en este campo de la investigación es llegar a unir los dos tipos de sistemas [73].

2.3.2.3. *Cooperative Adaptative Cruise Control* (Control Activo Adaptativo de la Velocidad de Crucero) CACC

Se añade un sistema de comunicación en el sistema de control que determina la maniobra a realizar por el ACC, de tal forma que es posible pasar esta información a vehículos adyacentes e incorporarla dentro del sistema de control [115].

2.3.2.4. Sistema *Stop and Go*

Es una extensión de los ACC para el tránsito en zonas urbanas. El vehículo es capaz de acelerar y frenar automáticamente. Se necesita una toma de datos muy precisa, que es posible recibir de varios sensores como puede ser radar, láser, sistemas de visión o una combinación de los tres. También se pueden suministrar datos al sistema de control del vehículo mediante una comunicación wireless [52].

2.3.2.5. Sistema *Automated Vehicle Following* AVF

Para disminuir el tráfico en las carreteras se forman grupos de vehículos totalmente automatizados, de tal forma que la distancia entre ellos pueda reducirse al mínimo posible. Para esto es necesario instrumentar los carriles con imanes, y los vehículos con radar, magnetómetros y GPS, además de una indispensable comunicación entre vehículos [115].

2.3.2.6. *Advanced Driver Assistance Systems* ADAS (Sistemas de Alarma y Asistencia al Conductor)

Son sistemas avanzados de asistencia al conductor diseñados para evitar errores durante la conducción. Muchos de los componentes de estos sistemas son similares a los estudiados en el caso de AHS y la diferencia fundamental reside en los diferentes planteamientos.

De entre ellos se señalan los siguientes:

Sistema *Collision Warning System* CWS (Sistema de Alarma de Colisión) Alertan al conductor en el caso de una colisión inminente. En los Estados Unidos los sistemas CWS se encuentran en uso desde hace unos años en flotas de camiones y autobuses y han demostrado un comportamiento satisfactorio.

Sistema *Lane Departure Warning* LDW (Sistema de Alerta de Cambio Involuntario de Carril) Entre los diversos prototipos tecnológicos que se han presentado en salones de automoción y congresos internacionales incorporando la función LDW cabe destacar el SCC de Volvo. Este vehículo fue presentado por primera vez en el Salón de Detroit del año 2001 y pretendía ser un muestrario de las diversas tecnologías encaminadas a mejorar la seguridad sobre las que se estaba trabajando en aquel entonces en Volvo (de ahí su nombre, Security Concept Car). Además de sistemas como el ACC, Night Vision, Lane Change Assistant o AFS destacaba el Sistema de Alerta de Cambio Involuntario de Carril. Utilizaba una cámara para realizar un tratamiento de imágenes y determinar así los límites del carril por el que circulaba. El conductor recibía aviso sonoro en caso de pérdida involuntaria de trayectoria.

Cuatro años después, en el mismo Salón de Detroit se presentó el Audi Allroad Concept. Es quizás una de las últimas interpretaciones a nivel de Concept Car de lo que es un Sistema de Alerta de Cambio Involuntario de Carril. El Sistema LDW del Allroad Concept se basa en el reconocimiento de imágenes mediante una cámara montada en el pie del retrovisor interior. El aviso al conductor consiste en esta ocasión en la vibración del volante en caso de desvío de trayectoria.

A nivel nacional, diversos grupos han trabajado de manera intensa en la investigación y desarrollo de Sistemas LDW. En especial, es interesante destacar los trabajos de investigación y predesarrollo llevados a cabo en el Centro Técnico de SEAT en el marco de los proyectos Toledo ACC Avanzado y Alhambra ADAS.

Sistema de Frenado de emergencia Servofreno de emergencia con detección de obstáculos. Variante del servofreno de emergencia que puede detectar

un obstáculo frontal susceptible de causar una colisión y, en tal caso, aplicar toda la capacidad de frenado del vehículo aunque el conductor sólo pise un poco el pedal.

Generalmente está asociado al programador de velocidad activo ACC y normalmente funciona con sensores radar o láser. La información acerca de la distancia a la que se encuentran los posibles obstáculos y la velocidad de aproximación a los mismos la recibe una centralita que determina cuándo es preciso actuar. Si es necesario, realiza una precarga del circuito hidráulico de frenos.

Mientras que el servofreno de emergencia sólo tiene en cuenta la velocidad con que el conductor pisa el pedal del freno, el sistema con detección de obstáculos tiene en cuenta la presencia de obstáculos frente al vehículo y puede aplicar la máxima presión en el circuito de frenado, independientemente de la fuerza de accionamiento del pedal. Para ello, el sistema precarga el circuito hidráulico de frenos antes de que el conductor presione el pedal de freno, con lo que la máxima deceleración está disponible desde el inicio de la frenada.

Al interpretar que va a haber una colisión, el conductor recibe un aviso recomendándole que inicie la frenada, a la vez que se precarga el circuito de frenos. Cuando el conductor toca el pedal de freno, toda la presión disponible es aplicada al sistema. Esto produce la máxima deceleración posible durante un periodo de tiempo mayor que el conseguido únicamente con un sistema de asistencia a la frenada convencional. De esta forma, se pretende evitar la previsible colisión o reducir la velocidad de impacto en la medida de lo posible.

Adaptive Light Control (ALC) Se ha desarrollado con el objetivo de mejorar la seguridad en la conducción nocturna. El ALC mejora la iluminación a través de una continua adaptación de los faros según la situación de la conducción y las condiciones climatológicas.

Sistemas de Adaptación Inteligente de la Velocidad Los dispositivos conocidos genéricamente como ISA (*Intelligent Speed Adaptation*) o Adaptación o Control Inteligente de la Velocidad son sistemas diseñados para proporcionar al vehículo y al conductor información sobre el límite de velocidad existente en cada punto de su recorrido. Por el momento se trata de sistemas en su fase de experimentación en la mayor parte de los casos, aunque su paso a la comercialización en masa podría darse en cualquier momento, dado el avanzado estado de madurez de la tecnología. La principal aplicación comercial de estos sistemas en la actualidad utiliza como soporte los sistemas de navegación o navegadores de conducción, algunos de los cuales ya cuentan en su cartografía con una base de datos de límites de velocidad, y son capaces de informar al conductor cuando se está sobrepasando el límite existente. No hay un único planteamiento de diseño para el control inteligente de velocidad, ya que algunos

sistemas únicamente se proponen facilitar al conductor información sobre la limitación de velocidad existente en cada tramo, mientras que otros han sido diseñados para actuar y adaptar la velocidad del vehículo de modo autónomo.

Aunque muchos modelos ofrecen ya algún tipo de regulador o limitador de la velocidad, éstos tienen que ser activados y regulados por el conductor, y no se pueden considerar sistemas “dotados de inteligencia”. Por lo general, los dispositivos inteligentes forman parte de proyectos de investigación financiados, total o parcialmente, por las administraciones públicas, con el objetivo básico de adquirir conocimientos sobre la influencia y la aceptación por parte de los conductores en relación con los diferentes dispositivos de información y/o control de velocidad máxima de circulación. Las principales iniciativas desarrolladas hasta el momento en relación con estos dispositivos están localizadas fundamentalmente en el continente europeo, y el proyecto más importante llevado a cabo hasta el momento ha sido el realizado en Suecia entre 1999 y 2002, en las ciudades de Umeå, Borlänge, Lund y Lidköping, con la participación de casi 5,000 vehículos y aproximadamente 10,000 conductores. Holanda, Bélgica y Reino Unido son otros de los países en donde se ha experimentado esta tecnología. La Generalitat de Cataluña también ha participado, en colaboración con la empresa de ingeniería INTRA, en un proyecto de investigación europeo: el proyecto PROSPER, que tiene lugar, entre otras localizaciones europeas, en la ciudad de Mataró. En esta población catalana circulan una veintena de vehículos dotados con un sistema de acelerador activo. El acelerador activo tiene la particularidad de que el pedal ofrece una cierta resistencia cuando se excede el límite de velocidad. Este proyecto ha sido financiado por la Comisión Europea, cuenta con la coordinación científica de la Universidad de Lund en Suecia, y se ha desarrollado a lo largo de 2003 – 2006. También se puede citar otra investigación española desarrollada por el INSIA con financiación del, entonces, Ministerio de Ciencia y Tecnología y realizada entre los años 2001 – 2004 en la Comunidad de Madrid (Proyecto SAGE). El objetivo principal de dicho proyecto fue desarrollar un sistema adaptativo de ayuda a la selección en tiempo real de la velocidad del vehículo basado en el empleo conjunto de las tecnologías de GPS, de mapas digitales y de procesamiento digital de imágenes para la detección de líneas blancas del trazado. El dispositivo ISA considerado fue del tipo informativo, y a los conductores se les aconsejaba sobre velocidad segura en cada momento en función de las características de la vía [46].

2.3.3. Control lateral

Parte del control lateral se orienta a maniobras automáticas de cambio de carril y de ayuda para mantener al vehículo en el propio carril. Los errores propios en estas maniobras suelen ser el error en distancia entre el centro del parachoques delantero y el centro del carril, y el error angular con respecto

al centro de la carretera. Como instrumentación, estos sistemas necesitan un magnetómetro colocado bajo el parachoques frontal y trasero que se emplean para evaluar el ángulo de guiñada del vehículo y la velocidad de cambio de este ángulo, con respecto a una línea que describa la carretera [38]. Se están desarrollando sistemas de control de frenada y estabilidad del vehículo al describir una trayectoria, que tienen como objetivo que el vehículo se comporte de acuerdo con la maniobra trazada por el conductor. Debido a las características no lineales del neumático, la fuerza longitudinal ordinariamente presenta un margen de saturación, incluso cuando las fuerzas laterales están cercanas a esa saturación. Bajo estas condiciones, el control de las fuerzas longitudinales del neumático es un método efectivo para actuar en el movimiento lateral del vehículo. Un sistema VDC, también conocido como ESP puede controlar el momento de guiñada generando fuerzas longitudinales diferenciales en los neumáticos. Se han desarrollado modelos para explicar cómo varía el ángulo de guiñada en función del ángulo de deriva. Cuando el ángulo de deriva lateral es pequeño, se genera el momento de guiñada para reducir ese ángulo de deriva lateral del vehículo; sin embargo para valores altos del ángulo de deriva el momento de guiñada decrece. La disminución de la recuperación del momento de guiñada cuando el ángulo de deriva lateral es mayor es la causa fundamental del derrape del vehículo (spin); añadiendo un momento de guiñada se recupera la estabilidad del vehículo [121].

2.3.4. Control vertical

Los sistemas de control vertical se proponen por una parte mejorar la calidad de guiado del vehículo y por otra mejorar la estabilidad del vehículo en carreteras en malas condiciones y/o situaciones de emergencia. Estas dos direcciones de investigación son divergentes desde el punto de vista del diseño de control de las suspensiones. Para mejorar el guiado del vehículo en situaciones normales en las que las fuerzas proporcionadas por los neumáticos no han alcanzado la saturación, hay que manipular la suspensión para que el vehículo mantenga junto con la estabilidad unos valores adecuados de rigidez del muelle y de la amortiguación, y unos valores mínimos para la aceleración y su derivada en las tres direcciones y en los tres ángulos. En situaciones de emergencia, en cambio, hay que procurar que cada rueda proporcione la tracción necesaria, tanto longitudinal como transversal. La tracción de cada rueda depende de la fuerza normal sobre la misma, de la rigidez del neumático y del deslizamiento del mismo. No es posible actuar sobre la rigidez del neumático, que depende de la presión y de las características establecidas por el fabricante. El deslizamiento se puede medir en tiempo real, usarlo para estimar el coeficiente de adherencia con la carretera, y más tarde la fuerza que suministra el neumático. Sólo se puede actuar sobre la fuerza normal del neumático, esta es la tarea de los sistemas de suspensión activa y semiactiva [94].

2.4. Estimadores de posicionamiento

2.4.1. Problema de posicionamiento

Se puede definir el problema de posicionamiento como el de situar en el espacio un sólido indeformable. Para esto se necesita conocer un conjunto de datos geométricos suficiente. Si el cuerpo se mueve, estos datos irán variando a lo largo del tiempo. De esta forma definir el movimiento del sólido equivale a establecer las ecuaciones que rigen las variaciones de estos datos geométricos a lo largo del tiempo. El problema de posicionamiento o de determinación de la orientación de un vehículo se resuelve respecto de un sistema de referencia. Este sistema de referencia frecuentemente es fijo respecto a la tierra y es denominado habitualmente sistema inercial. La forma matemática de representar la orientación es muy diversa. Una de las más utilizadas es la representación a través de la cuaterna de rotación, con sólo un parámetro redundante; es la mínima parametrización no singular de la orientación. Históricamente se ha utilizado para problemas de posicionamiento en el campo aeroespacial [47].

Se comienza describiendo el problema general de posicionamiento y definiendo la noción de vector de observaciones. Se centra en una representación matemática específica del posicionamiento. Este problema de determinación de la orientación (*attitude determination*) a partir de un vector de observaciones se puede definir como sigue: Considérese un sólido rígido en el espacio y sea un sistema de coordenadas cartesiano local, rígidamente unido al sólido (triedro móvil). El problema fundamental de determinación de posicionamiento es especificar la orientación de los ejes del sistema de referencia local respecto a un sistema de referencia cartesiano R dado (triedro fijo).

Si se escribe un vector generalizado \mathbf{x} (caracterizado por una dirección y una longitud) con respecto a cada una de las bases B, R , serán \mathbf{b}, \mathbf{r} respectivamente: matrices columna de 3×1 componentes las que lo representan en cada uno de los sistemas de referencia. Se nota \mathbf{A} como la matriz de rotación que lleva los ejes de R sobre los ejes de B . Esta matriz es conocida como la matriz de cosenos directores o *attitude matrix*. Las magnitudes vectoriales medidas a bordo en vehículos como aviones son el campo magnético terrestre, la dirección con respecto al sol, la luna u otro cuerpo celeste. En general, los vectores de referencia \mathbf{r} son conocidos con suficiente precisión a través de tablas o almanaques, mientras que los vectores con respecto a la base local \mathbf{b} se obtienen a través de medidas que están *ensucidas* por errores. Como resultado, un modelo matricial de medida del posicionamiento se describe a través de la siguiente ecuación lineal: $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{r} + \delta\mathbf{b}$ donde $\delta\mathbf{b}$ es el error en \mathbf{b} . En un problema de posicionamiento, cuando se utiliza el vector de observaciones, se quiere estimar \mathbf{A} a partir de una secuencia dada de pares \mathbf{b}, \mathbf{r} . Hay que hacer notar que, dadas dos observaciones no colineales, es posible determinar \mathbf{A} a través de algoritmos

determinísticos. De todas formas una observación simple es suficiente para llegar a una matriz de posicionamiento sin ambigüedades. La matriz \mathbf{A} es una parametrización, entre otras, del posicionamiento del sólido rígido. Como ya se ha mencionado, otra forma de representar el posicionamiento es la utilización de cuaternas de rotación, descritas como \mathbf{q} . La cuaterna \mathbf{q} es una matriz columna real 4×1 con una parte vectorial \mathbf{e} , y una parte escalar q , que está definida en la esfera unitaria de \mathbb{R}^4 . La relación entre \mathbf{q} y \mathbf{A} , es

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = (q^2 - \mathbf{e}^T \mathbf{e})\mathbf{I}_3 + 2\mathbf{e}\mathbf{e}^T - 2q\tilde{\mathbf{e}} \quad (2.1)$$

donde, según la ecuación (2.1), \mathbf{I}_3 es la matriz identidad de orden tres, \mathbf{e}^T denota la traspuesta de \mathbf{e} , y la matriz de producto vectorial $\tilde{\mathbf{e}}$ viene definida como

$$\tilde{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix}$$

donde $e_i, i = 1, 2, 3$ son las componentes de la parte vectorial \mathbf{e} de la cuaterna \mathbf{q} .

Es conocido desde tiempos de Euler¹ que se necesitan tres parámetros independientes para especificar la orientación de un sólido rígido en el espacio. Por definición, las cuaternas de rotación están formadas por cuatro elementos, esto es, una cuaterna de rotación es una especificación de la rotación con cuatro parámetros, y tiene por lo tanto una componente redundante. Otra deficiencia de las cuaternas es que no son una representación unívoca del grupo rotación. Stuelpnagel [96] demuestra que la parametrización mínima de un posicionamiento global necesita un conjunto de cinco elementos. De hecho, según la ecuación (2.1), las cuaternas \mathbf{q} y $-\mathbf{q}$ representan el mismo posicionamiento. A pesar de este aparente inconveniente, el uso de las cuaternas resulta apropiado e incluso ventajoso porque proporciona una representación del posicionamiento global; es decir, no hay problema de singularidades en ninguna orientación del sólido rígido. Más aún, las ecuaciones de movimiento del sólido rígido son ecuaciones diferenciales lineales en las componentes de \mathbf{q} . Esta última es una propiedad deseable en el desarrollo de algoritmos de estimación y control. Sobre todo, las cuaternas son una parametrización relativamente eficiente computacionalmente hablando ya que, contrariamente a los ángulos de Euler, no implican la evaluación de funciones trigonométricas al operar la matriz de posicionamiento y tiene solamente un parámetro redundante, al contrario de lo que sucede con los seis elementos redundantes de una matriz de posicionamiento según Euler.

¹Euler fue el primero en demostrar que el grupo de rotaciones de un espacio tridimensional euclídeo es en sí mismo un espacio de tres dimensiones.

2.4.2. Estimadores

Los estimadores de posicionamiento que utilizan las cuaternas como herramienta analítica, se han desarrollado históricamente en dos grupos. El primero, para resolver el problema de estimación determinística, o problema de Wahba [108]; de ahí surge el *q-método*: estimación determinística de mínimos cuadrados con restricciones. El segundo grupo está constituido por estimadores que hacen un modelo de la cuaterna como vector de estado estocástico, y desarrollan filtros de Kalman extendidos para la estimación de la mínima varianza de la cuaterna. Ambas aproximaciones están dentro de la teoría de estimación por mínimos cuadrados, donde el término mínimos cuadrados tiene tanto el significado clásico como el de mínima varianza.

A partir de las primeras estimaciones de posicionamiento con cuaternas basadas en filtros de Kalman extendidos, se han desarrollado nuevas aproximaciones que conducen, en algunos casos, a mejores resultados. La mayoría de éstas mantienen la estructura básica del filtro de Kalman extendido, pero emplean varias modificaciones que conducen a una mejor convergencia o mejoran otras características de funcionamiento. Ejemplos de los filtros revisados son el filtro QUEST, el QUEST extendido [64] o filtros que propagan y actualizan un conjunto discreto de puntos sigma más que utilizar ecuaciones lineales para la media y la covarianza [101].

Todas estas aproximaciones se basan en una premisa acerca de la función de densidad y probabilidad: suponen que es de tipo gaussiano, es decir, perfectamente especificada a través de su media y su covarianza. Otras aproximaciones que no requieren esta condición son por ejemplo los filtros de partículas y los filtros bayesianos basados en una función de densidad de probabilidad no gaussiana. Existen también variantes de estimadores construidas sobre filtros predictivos, observadores no lineales y aproximaciones adaptativas [1], [3], [19], [22], [64].

2.5. Modelos de la dinámica de vehículos

Para una aplicación eficiente de la simulación en procesos de investigación es necesario conocer las características, limitaciones y posibilidades del modelo utilizado y de su representación informática. Para comprender el comportamiento del vehículo, tradicionalmente se separan la dinámica lateral, longitudinal y vertical [75] utilizando para cada una de ellas modelos simples.

Para investigaciones centradas en las características de giro del vehículo, respuesta al cambio de dirección y análisis de estabilidad se utiliza un modelo de dos ruedas conocido como *modelo bicicleta*. La característica esencial de este modelo es la combinación de los dos neumáticos de un eje en un único neumático que los sustituye, situado éste en el plano central del vehículo. Se desprecia la altura del centro de gravedad sobre la superficie de la carretera; así resulta un modelo plano del vehículo. Este modelo se suele linealizar al considerar ángulos pequeños y linealizar las fuerzas laterales desarrolladas por los neumáticos en estado estacionario. En la mayoría de los casos la velocidad longitudinal se supone constante y las fuerzas longitudinales de los neumáticos se desprecian con respecto a su influencia en la dinámica lateral. También se suelen despreciar las fuerzas aerodinámicas.

Con respecto a la dinámica longitudinal, se puede utilizar un modelo plano del vehículo que no tiene en cuenta el movimiento independiente de las ruedas con respecto al chasis. Así, no se incluyen las fuerzas de la suspensión o debidas a la dinámica relativa al chasis. Se pueden investigar distintas consideraciones del tren de dirección y del sistema de frenado; para esto hay que añadir a este modelo una representación del sistema de transmisión y del freno, aunque puede no considerarse en casos relativamente sencillos.

Se puede utilizar asimismo un modelo plano para el estudio de la dinámica vertical, en el que se consideran las suspensiones para la investigación de la sensibilidad del conductor a las vibraciones, relacionadas con el confort en la conducción.

Se han desarrollado también modelos en tres dimensiones utilizando formulaciones simbólicas matriciales y códigos numéricos personalizados.

Algunos de estos modelos han sido desarrollados como programas específicos, adaptados a componentes y estructuras particulares. Estos modelos tienen en cuenta la velocidad relativa de cada rueda, con frecuencia utilizan cálculos previos para la determinación del movimiento del centro de la rueda o de su plano de orientación.

Con estos modelos que tienen en cuenta el contacto con el suelo e incluyen una compleja modelización del neumático, se puede realizar un estudio más amplio del comportamiento del vehículo, incluidas las no linealidades. Para

que el modelo sea congruente, es necesario describir con igual nivel de detalle el comportamiento de la dirección y de la transmisión del vehículo, aunque, con frecuencia, el comportamiento de estos sistemas es calculado aparte. Con respecto a los modelos de vehículos MBS (Multibody Systems), hoy en día, la mayoría de las simulaciones se realizan empleando un software comercial (ADAMS 2002, SIMPACK 2003, DADS 2001), que destaca en la posibilidad de una modelización detallada de los componentes del vehículo y su conexión con el mismo.

Dentro de los elementos determinantes de la pérdida de estabilidad está el estudio de la interacción neumático-suelo [13], [44], [88]. Respecto a la estimación de los parámetros del neumático, teniendo en cuenta un determinado modelo de neumático como puede ser el modelo de Pacejka [76], se han realizado experimentos con maniobras estándar en condiciones de giro en régimen permanente, identificando en un primer paso las fuerzas de giro a través de un filtro de Kalman extendido, y luego haciendo una estimación tanto de las cargas verticales como de los ángulos de deslizamiento [14]. Dentro de este apartado, cabe también mencionar la técnica que recibe el nombre de *soft sensor*; un método para inferir el valor de parámetros no medidos a partir de las medidas de otros parámetros y un modelo matemático que describa la relación entre ambos [37]. Un caso de técnica *soft sensor* es la utilización de filtros de extendidos de Kalman para la fase de estimación. Distintos grupos han realizado diferentes ensayos experimentales tanto para la identificación de dichos parámetros [41], como para el diseño de sistemas de medida integrados en un sistema mecánico [67], [107].

2.5.1. Tiempo real

Para diseñar y verificar distintos sistemas de ayuda al conductor (ABS, ESP, etc) se necesita realizar muchas pruebas con el vehículo; si se realizasen con el vehículo real, serían siempre costosas en tiempo y en dinero, además de peligrosas a veces, y serían inviables modificaciones del diseño que, en un modelo virtual son factibles. Los modelos dinámicos descritos en el apartado anterior aunque sirven en la fase de diseño de vehículos, a veces no son útiles para proporcionar resultados en tiempo real. En la investigación sobre sistemas de ayuda al conductor es esencial disponer de un modelo de vehículo capaz de ejecutarse en tiempo real, la constante de tiempo de este modelo debe ser menor que la constante de tiempo del vehículo real, es decir, su dinámica más rápida. Se puede utilizar un modelo multicuerpo como observador de estados de tal forma que, junto con la información proporcionada por sistemas de adquisición de datos, sirvan para determinar situaciones de emergencia: en una situación de riesgo el sistema se encargaría de alertar al conductor, o guiar la dirección del vehículo para evitar una posible colisión, o minimizar los daños si ésta fuese inevitable.

La exigencia de tiempo real implica que las ecuaciones de movimiento tienen que ser generadas y resueltas numéricamente suficientemente rápido, de tal forma que las actuaciones proporcionadas por la unidad de control lleguen en el momento oportuno; esto implica que el planteamiento e integración de las ecuaciones de la dinámica tiene que realizarse al menos una vez dentro de un ciclo de simulación. La simulación en tiempo real es el punto de encuentro entre el mundo virtual y el mundo real, entre el modelo multicuerpo de un vehículo y la correspondiente unidad de control electrónico, ECU. Se realiza simulación en tiempo real en simuladores de conducción, en plataformas de pruebas, en pruebas de unidades de control electrónico. Se puede emplear como prototipo virtual un modelo multicuerpo que represente el comportamiento mecánico del vehículo y proporcione a la ECU la información necesaria. Para verificar el comportamiento del vehículo completo hay que poner en comunicación el modelo virtual con el hardware de la ECU, sería un caso de simulación *hardware-in-the-loop* (HIL). La respuesta de la unidad de control se haría como se realiza en el vehículo real e influye sobre la dinámica del vehículo.

En la simulación de la dinámica del vehículo son habituales los pasos de tiempo de simulación entre 0,5 y 2 ms. Si se introducen en la simulación actuadores y sensores es posible que se necesiten pasos de tiempo más pequeños. Los integradores empleados en la resolución en tiempo real de sistemas multicuerpo suelen ser integradores explícitos o semi-implícitos de paso fijo. De hecho, se suele recurrir a un esquema de integración simple como puede ser el de Euler explícito. Esto implica describir la dinámica del modelo multicuerpo como un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias no stiff, es decir, las soluciones contienen componentes que varían de modo suave. Sin embargo, hay sistemas y elementos, por ejemplo suspensiones, sistema de dirección, bushings, que conducen a ecuaciones diferenciales ordinarias o ecuaciones diferenciales algebraicas stiff (soluciones que contienen, junto con componentes que varían de un modo suave, funciones que decrecen muy rápidamente). Para resolver esta dificultad, los procedimientos más comunes son: escribir modelos multicuerpos particulares para cada nuevo prototipo virtual empleando modelos simplificados de las suspensiones, la dirección y el chasis; utilizar tablas para recoger el comportamiento cinemático y elastocinemático de estos elementos; recurrir a formulaciones topológicas adaptadas a la topología y a la estructura de cada prototipo, utilizar pasos de integración inferiores a 0,5 s (2 Hz) [85], [106].

Capítulo 3

Filtrado de datos

Un sistema de seguimiento en tiempo real, trabaja con datos recibidos desde los sensores. En el anexo B de esta memoria se recoge la etapa de sensorización del prototipo utilizado en el Laboratorio de Dinámica de Vehículos de esta universidad, que determina las variables de ese vehículo que permitirán, tras su tratamiento mediante el nuevo algoritmo propuesto, resolver el problema de posicionamiento. La sensorización se ha realizado también teniendo en cuenta el posible incremento del estado del estimador, por lo que además de aceleraciones lineales, campo magnético local y velocidades angulares del chasis, se adquirirán también la posición y la velocidad angular de cada una de las suspensiones. Se necesita realizar un filtrado de estos datos recibidos a través del sistema de adquisición de datos mediante el nuevo algoritmo propuesto. A continuación se recoge una revisión de la teoría de filtrado de datos, un desarrollo de la teoría relacionada con el filtro de Kalman y una aplicación de la misma.

3.1. Teoría de filtrado

La consideración de los ruidos en un determinado proceso, que constituyen componentes probabilísticos del proceso, puede efectuarse mediante el empleo de la teoría de procesos estocásticos [68], [74]. En aplicaciones a problemas físicos reales, las señales de salida de un sensor son comúnmente procesadas a través de procesadores digitales con la intención de llegar a alguna determinación respecto al mundo físico. Ejemplos de estas determinaciones pueden incluir determinaciones de velocidad, aceleración, posición, temperatura, presión, etc. [21], [99], [111], [116], [120]; en aplicaciones de sistemas multicuerpo, un objetivo puede ser utilizar las señales de los sensores para hacer una estimación de la orientación de los distintos sólidos.

A esta consideración se añade que la señal de salida se corromperá por el

ruido. Por esto es necesario procesar los datos de salida de una forma más rigurosa, para separar la parte que corresponde de verdad a la señal y la que es ruido y llegar a la mejor estimación posible teniendo en cuenta la imprecisión propia de los sensores. Los algoritmos utilizados en el procesamiento de las señales que se obtienen de los sensores generalmente se llaman algoritmos de filtrado. Un filtro es un proceso mediante el cual a una señal cualquiera se le modifica su contenido espectral. El principal propósito de un filtro o algoritmo de filtrado en el área de instrumentación es separar la señal del ruido. Ejemplos clásicos de este tipo de filtrado incluyen filtros de paso bajo y de paso alto cuyo objetivo es separar ruidos de baja y alta frecuencia, respectivamente, de la señal. El quitar el ruido de la señal supondrá una suavización de la señal de salida. Filtros más sofisticados pueden incluso combinar señales de distintos sensores para producir una estimación que sea *óptima* respecto a unos criterios determinados. Estos tipos de filtros están usualmente basados en modelos probabilísticos de la señal que debe ser estimada así como de todo el sistema con el que está relacionada. La encapsulación de este modelo dentro del algoritmo suministra una capacidad adicional de predicción. Esto puede ser importante en aplicaciones en las que sea crítica la puntualidad, la rapidez de existencia de ese dato, ya que un valor predicho se podría utilizar en vez de una estimación actual.

3.1.1. Procesos estocásticos

Para poder trabajar con el output de un determinado sensor, es necesario que esta señal venga descrita en términos matemáticos. En la teoría de filtrado, las características de una señal quedan englobadas en la noción de proceso estocástico o proceso random o aleatorio. Si los sucesos que admite un fenómeno aleatorio son susceptibles de recibir una asignación de probabilidad, se dice que el fenómeno es estocástico o que estamos en ambiente de riesgo [65]. El concepto de proceso aleatorio asocia el tiempo con una variable aleatoria. Según este procedimiento, se quiere significar que lo que ocurre es similar a una serie de experimentos idénticos que se producen de forma simultánea. En cada uno de esos experimentos se genera la señal aleatoria de interés. Así, el valor o estado de un proceso aleatorio X , se puede examinar en cualquier valor de tiempo t . Para un valor fijado del tiempo t , el resultado del proceso aleatorio viene descrito por una variable aleatoria x :

$$X(t) = x \tag{3.1}$$

Como se puede observar en la ecuación (3.1), si el parámetro es discreto, entonces X es un proceso aleatorio de tiempo discreto [11]. Si el parámetro t es continuo, entonces X es un proceso aleatorio en tiempo continuo. Ya que X es un proceso aleatorio, el valor de t generalmente no será el mismo para todos los experimentos. Es interesante centrar la atención en el *valor esperado* y cómo el proceso es correlado consigo mismo a lo largo del tiempo, y en la forma cómo

el proceso está correlado en el tiempo con otros procesos. La manera en que un proceso está correlado consigo mismo a lo largo del tiempo se expresa a través de una *función de autocorrelación*. La relación entre el estado en el tiempo t_1 y el estado en el tiempo t_2 viene dada por:

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E[X(t_1), X(t_2)] = E[x_1 x_2] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde f es la función de densidad de probabilidad de segundo orden para X . Si el proceso está altamente correlado consigo mismo, el valor de la ecuación (3.2) será positivo. Si la ecuación (3.2) toma un valor de cero, el proceso no está correlado consigo mismo en el tiempo. En procesos estacionarios el valor de la ecuación (3.2) sólo va a depender de la diferencia $\tau = |t_1 - t_2|$. Un proceso estocástico estacionario describe la variación en el tiempo de un fenómeno aleatorio tal que ninguno de los factores que tienen influencia sobre él cambian a lo largo del tiempo. La que se puede llamar potencia de una señal viene dada por su función de autocorrelación cuando $t_1 = t_2$. Esto es,

$$R_X(t, t) = E[X(t), X(t)] = E[X^2(t)] \quad (3.3)$$

La relación entre dos procesos viene expresada a través de la *función de correlación cruzada*. La función de correlación entre los procesos X e Y en los instantes t_1 y t_2 viene dada por

$$\begin{aligned} R_{XY}(t_1, t_2) &= E[X(t_1), Y(t_2)] = E[x_1 y_2] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 f(x_1, y_2, t_1, t_2) dx_1 dy_2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

De nuevo, si el proceso es no correlado, la expresión (3.4) tomará un valor nulo. Valores negativos indican que el proceso está correlado negativamente. Autocovarianza y covarianza cruzada son versiones de media cero de las funciones de autocorrelación y correlación cruzada, respectivamente. En teoría de filtrado, tanto los *inputs* como los *outputs* de un filtro o un sistema se consideran como procesos aleatorios. Así, para diseñar un filtro hay que hacer un análisis previo para ver cómo los procesos de *input* del sistema están relacionados con los procesos de *output*. En la práctica, suelen considerarse una serie de premisas que simplifican el planteamiento. Se suponen los procesos como *Wide Sense Stationary* (WSS) procesos estocásticos estacionarios en sentido amplio queriendo esto significar que la función de densidad de probabilidad de segundo orden es invariante con la variable tiempo, es decir, la media y la autocorrelación no

cambian con un cambio en el origen del tiempo. Para todo valor de t , tanto la media como la varianza son finitas y constantes, y la función de autocorrelación existe y solo depende de $\tau = t_2 - t_1$.

Es también común considerar que estos procesos son ergódicos, es decir, para obtener toda la información necesaria de la señal de un proceso solamente es necesaria una muestra de esa señal. Demostrar que dos procesos son independientes requiere que cualquier momento de la función de densidad de probabilidad sea nulo. Como esto realmente es muy difícil, la independencia de sistema se asume sólo a partir de datos empíricos.

3.1.2. Filtrado y teoría de los mínimos cuadrados

Un sistema es un modelo matemático que relaciona una señal de entrada o input x con una señal de output o salida y .

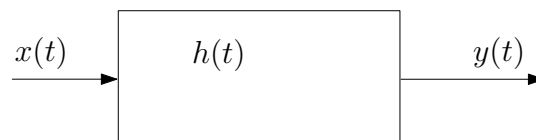


Figura 3.1: Sistema lineal en el dominio del tiempo

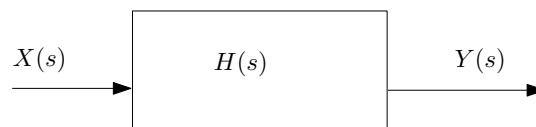


Figura 3.2: Sistema lineal en el dominio de frecuencias

La Figura 3.1 muestra un diagrama de bloques de sistemas lineal, en el dominio de tiempo; la Figura 3.2 muestra otro en el dominio de frecuencias.

En cada una de los diagramas de bloques, la entrada se relaciona con una salida a través de una función. Si se trabaja en el dominio del tiempo, esta función recibe el nombre de *respuesta a un impulso* ($h(t)$ en la Figura 3.1). La función análoga en el dominio de frecuencias es la denominada *Función de Transferencia* ($H(s)$ en la Figura 3.2). En términos matemáticos, la salida de un sistema lineal se expresa a través de una integral de convolución. En el dominio

del tiempo, esta integral se escribe como

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau \quad (3.5)$$

En el dominio de las frecuencias, la integral de convolución se convierte en una simple multiplicación:

$$Y(s) = H(s)X(s) \quad (3.6)$$

Si tanto la salida como la entrada de un sistema se pueden considerar procesos aleatorios, se hace necesario determinar la respuesta esperada del sistema a una entrada determinada. En el dominio del tiempo y para un sistema lineal, la ecuación 3.5 toma la expresión

$$E[Y(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)X(t - \tau)d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)E[X(t - \tau)]d\tau \quad (3.7)$$

Los filtros se describen como sistemas en los que tanto las entradas (los *input*) como las salidas (*output*) son procesos aleatorios. En un sistema lineal, la función de transferencia, o respuesta a una entrada impulso se aplica a una entrada con ruido, para conseguir una estimación de la señal limpia sin ruido. Esto se puede escribir como

$$\hat{Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)X(t - \tau)d\tau \quad (3.8)$$

Se puede decir que el propósito de un filtro, teniendo en cuenta la teoría de los mínimos cuadrados, es minimizar el error de estimación [95]. En concreto, si la estimación de la salida libre de ruidos es perfecta $Y(t)$, la diferencia entre estos dos valores será nula. Minimizar los valores al cuadrado del error esperado se expresa según

$$e = E \left\{ [Y(t) - \hat{Y}(t)]^2 \right\} \quad (3.9)$$

donde e representa el criterio del mínimo cuadrado del error. Si esta estimación del mínimo del error es lineal, significa que se entiende que $X(t)$ e $Y(t)$ están relacionadas por una función lineal. Se puede sustituir en la ecuación 3.8 el valor de e por su significado según la expresión 3.9 en función del valor de entrada y de la respuesta del sistema a un impulso:

$$e = E \left\{ \left[Y(t) - \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)X(t - \tau)d\tau \right]^2 \right\} \quad (3.10)$$

Si la estimación se realiza sobre un proceso no lineal, esto significa que se están considerando las funciones de entrada y de salida del sistema relacionadas por medio de una función no lineal. En este caso el criterio de los mínimos cuadrados se convierte en:

$$e = E \{ [Y - g(X)]^2 \} \quad (3.11)$$

donde g es alguna función no lineal de X . La forma de elegir esta función g responde a diversas posibilidades. En teoría, el mejor estimador de esta función viene dado por

$$g(X) = E[Y|X] \quad (3.12)$$

En la práctica, es difícil encontrar esta función de correlación [69]. En muchos casos se resuelve este problema aproximando su solución con un planteamiento lineal. Los diferentes tipos de filtros se podrán caracterizar por la forma exacta de determinar su función de transferencia. Entre otros se pueden considerar los filtros de Wiener y los filtros de Kalman.

Los filtros de Wiener son filtros lineales para procesos aleatorios estacionarios. Una especialización de éstos son los filtros complementarios, en los que no se tiene en cuenta la naturaleza de la señal, y no se puede suponer ninguna característica especial sobre ella. Los filtros de Kalman son también filtros que minimizan el cuadrado del error, en los que el proceso de estimación es recursivo. Un filtro de Kalman extendido se aplica a procesos no lineales, aunque la estimación en sí es lineal [95].

3.1.3. Filtro de Wiener

Se podría decir que la teoría del filtrado comienza con el trabajo de Norbert Wiener [114]. El objetivo de este trabajo es conseguir separar una señal con apariencia de ruido, de otra. El resultado final muestra como deben ser tenidos en cuenta de forma ponderada valores anteriores en el tiempo de la señal para hacer una estimación de la señal en el instante actual. La teoría desarrollada está caracterizada por las siguientes premisas:

- Tanto la señal como el ruido son procesos aleatorios con funciones conocidas de correlación cruzada y autocorrelación.
- El criterio de “mejor filtrado” es minimizar el error cuadrático.
- Se llega a una función óptima de ponderación de filtrado a través de una formulación escalar.

La primera premisa indica que todas las características espectrales tanto del ruido como de la señal deben ser conocidas. Se hace necesario el conocimiento de las características espectrales para que el filtro de Wiener produzca una estimación óptima. La tercera hipótesis enfatiza la relación del filtro de Wiener con los métodos escalares. Esta relación hace difícil aplicar la teoría del filtro de Wiener a sistemas con varias entradas y salidas.

3.1.3.1. Filtro de Wiener continuo

Si se asume que todos los procesos son estacionarios y que el filtro no varía con el tiempo, los problemas de predicción, filtrado y suavizado se resuelven con un filtro de Wiener. Si la señal de entrada $X(t)$ es continua, la estimación de la salida $\hat{Y}(t)$ con el filtro de Wiener para un tiempo t se formula como

$$\hat{Y}(t) = \int_b^a h(t - \tau)X(\tau)d\tau \quad (3.13)$$

donde el tiempo t puede estar o no en el intervalo $[a, b]$. $X(t)$ representa los datos medidos. $h(\tau)$ es tratada como un conjunto de funciones de ponderación. El error debe ser ortogonal a los datos. Así,

$$\begin{aligned} E[(Y(t) - \hat{Y}(t))X(s)] &= \\ &= E[(Y(t)X(s) - \int_a^b h(t - \tau)X(\tau)X(s)d\tau)] = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Esto implica que,

$$E[Y(t)X(s)] = E\left[\int_a^b h(\tau)X(t - \tau)X(s)d\tau\right]$$

o lo que es lo mismo,

$$R_{YX}(t, s) = \int_a^b h(t - \tau)R_X(\tau, s)d\tau \quad (3.15)$$

Esta última ecuación se conoce como la ecuación Wiener-Hopf. Teóricamente, este resultado se puede utilizar para resolver la función de ponderación, teniendo en cuenta que tanto la función de autocorrelación como la función de correlación cruzada son conocidas. De todas formas no existe un método general para la solución en la práctica. Por lo general se resuelven a partir de fórmulas en las que se incluyen una o más simplificaciones. Los filtros de Wiener pueden

ser causales o no causales. La función de ponderación de un filtro no causal requiere una actualización del filtro en tiempo real y utilizar datos que aún no están disponibles. La estimación de la salida en un determinado tiempo t , para un filtro no causal viene dada por

$$\hat{Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)X(\tau)d\tau$$

y las relaciones de autocorrelación y correlación cruzada se pueden expresar como

$$R_{YX}(S) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)R_X(S - \tau)d\tau \quad (3.16)$$

si se asume que los procesos que se están teniendo en cuenta son WSS (*Wide Sense Stationary*: las funciones de densidad de probabilidad son de segundo orden e invariantes en el tiempo), se puede encontrar una solución de forma cerrada para la función de ponderación, en el dominio de frecuencias. Tomando la transformada de Fourier en ambos miembros de la ecuación (3.16) se obtiene,

$$S_{YX}(j\omega) = H(j\omega)S_X(j\omega)$$

Y, reordenando esta ecuación,

$$H(j\omega) = \frac{S_{YX}(j\omega)}{S_X(j\omega)} \quad (3.17)$$

Si la variable de entrada medida es de la forma

$$X(t) = Y(t) + n(t)$$

donde $n(t)$ es ruido gaussiano no correlado, entonces la ecuación (3.17) llega a expresarse como

$$H(j\omega) = \frac{S_{YY}(j\omega)}{S_{YY}(j\omega) + S_{nn}(j\omega)}$$

Los sistemas causales dependen solamente de valores anteriores y actuales de la variable de entrada; ésta es la razón por la cual son utilizables en aplicaciones en tiempo real. La estimación de la salida, para un filtro causal se puede escribir como

$$\hat{Y}(t + \lambda) = \int_{-\infty}^0 h_\lambda(\alpha)X(t + \alpha)d\alpha \quad (3.18)$$

donde t es el momento actual. Como no hay una solución de forma cerrada (*closed solution*) para la función de ponderación en (3.18), es necesario aplicar

métodos como factorización espectral o innovación [9]. Un estudio de distintos métodos de factorización se puede encontrar en [89]. La aplicación de esta teoría de filtros continuos a señal digital que supone procesar datos de muestreo puede presentar dificultades por esto se procede a la discretización de la función de transferencia.

3.1.3.2. Filtro de Wiener discreto

El filtrado Wiener de datos discretos es una aproximación a través de funciones de ponderación. Estas funciones de ponderación de nuevo intentan valorar todos los datos anteriores de tal forma que se produzca la mejor estimación. Dadas n medidas del ruido de entrada desde el tiempo t_1 hasta t_n su estimación viene a expresarse como

$$\hat{Y} = a_1X(t_1) + a_2X(t_2) + \dots + a_nX(t_n)$$

y el error cuadrático medio (mean square error) se expresa como

$$e = E \{ [Y(t) - (a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n)]^2 \} \quad (3.19)$$

para encontrar el mínimo de esta función aplicando el criterio de los mínimos cuadrados en (3.19) se plantea la derivada parcial respecto de cada uno de los a_i y se obtiene un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial a_i} &= E[Y(t) - \hat{Y}(t)X(t_i)] = \\ &= E[Y - (a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n)X_i] = \\ &= E[YX_i - a_1X_iX_1 - a_2X_iX_2 - \dots - a_nX_iX_n] = \\ &= E[YX_i] - a_1E[X_iX_1] - a_2E[X_iX_2] - \dots - a_nE[X_iX_n] = \\ &= R_{XY}(t, t_i) - a_1R_X(t_i, t_1) - a_2R_X(t_i, t_2) - \dots - \\ &\quad - a_nR_X(t_i, t_n) = 0 \end{aligned}$$

estas n ecuaciones resultantes se pueden expresar de modo matricial a través de la expresión,

$$\mathbf{R}\mathbf{a} = \begin{bmatrix} R_X(t_1, t_1) \cdots R_X(t_n, t_1) \\ \vdots \\ R_X(t_1, t_i) \cdots R_X(t_n, t_i) \\ \vdots \\ R_X(t_1, t_n) \cdots R_X(t_n, t_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{XY}(t_1, t) \\ \vdots \\ R_{XY}(t_n, t) \end{bmatrix} = \mathbf{R}_0$$

esto implica que \mathbf{a} puede resolverse invirtiendo la matriz cuadrada \mathbf{R} ,

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}_0$$

En lo anterior cada una de las funciones de autocorrelación y correlación cruzadas son conocidas. El cálculo de la inversa de \mathbf{R} puede ser computacionalmente muy caro. Hay que realizar esta inversión cada vez que se requiera una nueva estimación. Como el tamaño del conjunto de datos crece con el tiempo, el crecimiento de la dimensión de \mathbf{R} hace el problema intratable. Se debe establecer por esto un límite en el número de medidas anteriores consideradas, pero el cálculo de la inversa de una matriz $n \times n$ seguirá siendo necesario cada vez que se reciban nuevos datos. Hay que hacer notar que en las anteriores ecuaciones consideran solamente una señal de entrada y una de salida. Si se tienen en cuenta múltiples salidas, se establecerán múltiples matrices que deben ser invertidas.

3.1.4. Filtro de Kalman

El filtro de Kalman es un método alternativo para formular el problema de minimización del error por la técnica de mínimos cuadrados, utilizando la expresión de vector de estado para definir el sistema. Los principales hitos de la formulación del problema por Kalman son la modelización vectorial del proceso aleatorio y procesado recursivo del vector de datos de medida de ruido. A diferencia del filtro de Wiener, que reprocesa todos los datos previos cada vez que se realiza una nueva estimación, los procesos recursivos permiten una estimación actualizada utilizando solamente los resultados de la estimación previa. La teoría de filtrado de Kalman supone que las características espectrales del proceso considerado son conocidas. Todos los ruidos son blancos (esto significa que los valores de ruido no están correlados en el tiempo y tienen igual potencia para todas las frecuencias) y gaussianos (la amplitud del ruido describe una campana gaussiana). La densidad de probabilidad de un ruido gaussiano queda perfectamente definida al conocer su media y su varianza. Teniendo en cuenta estas premisas, el filtro de Kalman producirá una estimación óptima de las variables de interés. Este resultado se obtiene como consecuencia de la aplicación del teorema de Bayes y las propiedades de las funciones de probabilidad condicionada [65]. Los filtros de Kalman continuos tienen sólo un interés teórico; el estudio de los sistemas en tiempo discreto y muestreados tiene en sí el suficiente interés como para ser objeto de atención. El factor que más ha contribuido a su desarrollo ha sido la utilización del ordenador como elemento de control [74]. Éstos, al actuar de forma discreta, sólo pueden tratar la evolución de una variable en el tiempo como una secuencia de números. La denominación digital hace alusión a la necesidad de codificar cada elemento de la secuencia según una cadena con un número limitado de cifras o dígitos con objeto de poder almacenarlos en una memoria.

3.1.5. Filtro de Kalman discreto

La teoría del filtro de Kalman discreto se basa en un modelo del proceso y en la ecuación de medida. El modelo del proceso expresa las características físicas del sistema. Predice cómo el estado del sistema cambia desde un instante al siguiente. La ecuación de transición de estado es la siguiente:

$$X_{n+1} = \Phi_n X_n + W_n \quad (3.20)$$

donde X_{n+1} y X_n son vectores de estado que expresan el estado del sistema en los tiempos $n + 1$ y n respectivamente. Φ_n es la matriz de transición de estado que expresa las ecuaciones físicas que gobiernan las transiciones de estado del sistema. W_n es el vector de ruido del proceso. Las n fuentes independientes de ruido tienen una covarianza conocida y asume las imprecisiones del sistema. La ecuación de medida del proceso

$$Z_{n+1} = H_n X_n + V_n \quad (3.21)$$

expresa la forma en que los datos medidos están relacionados con el estado del sistema. A partir de un conjunto de medidas, esta ecuación define cual debería ser el estado esperado del sistema. A continuación se explica el significado de cada uno de los términos por separado.

- Z_n es un vector $m \times n$ de datos medidos en el tiempo n .
- X_n es un vector de estado $n \times 1$ que expresa el estado del sistema.
- H_n es la matriz constante de tamaño $m \times n$ de medidas del sistema que relaciona las medidas con los estados del sistema.
- V_n es el vector $n \times 1$ de medida de ruido. Se identifican n fuentes independientes de ruido blanco, al modelizar las posibles imprecisiones en las medidas; estas fuentes de ruido no están correladas con las que se definen a través de W_n de la ecuación 3.20 y su covarianza es conocida.

Las matrices de covarianza respectivas, tanto del vector de ruido del proceso W_n , como del vector de medida del ruido V_n , vienen dadas por las relaciones

$$Q_k = E[W_k W_k^T] = E[W_k^2] \quad (3.22)$$

$$R_k = E[V_k V_k^T] = E[V_k^2] \quad (3.23)$$

La estimación del error se expresa como

$$e_{\bar{k}} = X_k - \hat{X}_{\bar{k}} \quad (3.24)$$

y la matriz de covarianza asociada al error

$$P_{\bar{k}} = E[e_{\bar{k}}e_{\bar{k}}^T] = E[(X_k - \hat{X}_{\bar{k}})(X_k - \hat{X}_{\bar{k}})^T] \quad (3.25)$$

donde el indicador 'menos' sobre los subíndices indica la mejor estimación a priori antes de considerar los datos de la medida actual en el tiempo correspondiente. La estimación lineal discreta es

$$\hat{X}_k = (I - K_k H_k) \hat{X}_{\bar{k}} + K_k Z_k \quad (3.26)$$

Para una mejor comprensión, la anterior ecuación se puede reescribir de la forma

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{\bar{k}} + K_k (Z_k - H_k \hat{X}_{\bar{k}}) \quad (3.27)$$

El segundo término a la derecha de la igualdad expresa el error de actualización. La sustracción que aquí aparece produce la diferencia entre la medida actual y la medida esperada. La matriz de ponderación K_k es la matriz de ganancia de Kalman que viene dada por la siguiente expresión:

$$K_k = P_{\bar{k}} H_k^T (H_k P_{\bar{k}} H_k^T + R_k)^{-1} \quad (3.28)$$

se puede comprobar que para evaluar la expresión (3.28) hay que invertir una matriz de tamaño $n \times n$. Una vez determinadas la estimación inicial del vector

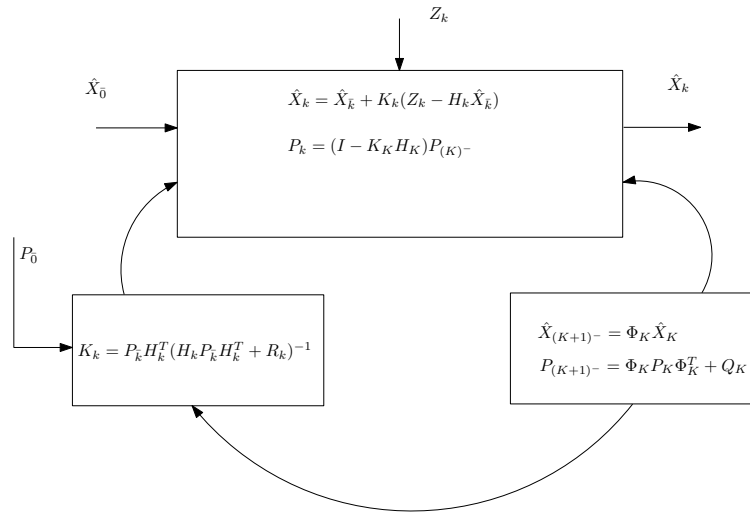


Figura 3.3: Esquema Ciclo del Filtro de Kalman

de estado ($\hat{X}_{\bar{k}}$) y la covarianza del error ($P_{\bar{k}}$) las ecuaciones (3.20) y (3.21) se utilizan repetidamente para actualizar las estimaciones de estado del sistema,

como se puede observar en Figura 3.3. Los elementos de la matriz de ganancia de Kalman varían continuamente a lo largo del proceso.

Examinando la ecuación (3.28) se observa que el único término no constante viene dado por la matriz de covarianza del error. Esto significa que los cambios en la matriz de ganancia del filtro están directamente relacionados con la precisión estimada de la actual estimación del estado del sistema. En efecto, un filtro de Kalman automáticamente da información acerca de la calidad de los estimadores mientras realiza una estimación a través de P_k .

3.1.6. Filtro de Kalman extendido

En muchas aplicaciones, tanto las ecuaciones dinámicas como las ecuaciones de medida pueden ser no lineales. Para un determinado sistema, puede ocurrir que la ecuación de medida sea una función no lineal de las variables de estado, que el modelo del proceso sea una función no lineal de estas variables de estado, o bien que se den los dos casos a la vez. Las relaciones que pueden expresar esto se podrían escribir como

$$X_{n+1} = g(X_n) + W_n \quad (3.29)$$

$$Z_{n+1} = f(X_n) + V_n \quad (3.30)$$

donde f y g son funciones no lineales de estado.

Las ecuaciones (3.29) y (3.30) se pueden linealizar a través del cálculo de las derivadas parciales de estas funciones. Teniendo en cuenta estas condiciones, tanto la matriz de transición como la matriz de medidas ya no serán constantes, y deberán ser actualizadas cada vez que se realice una nueva estimación del sistema.

Existen dos métodos básicos de linealización. En un filtro de Kalman linealizado, la derivada parcial de f o g se toma respecto a alguna trayectoria nominal que no tiene en cuenta los datos medidos. En un filtro de Kalman extendido, estas derivadas parciales se toman teniendo en cuenta la estimación del estado actual. La matriz resultante o Jacobiano viene dada por

$$H_n = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad \Phi_n = \frac{\partial g}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

en ambos casos el filtro permanece lineal y realiza la estimación utilizando un modelo linealizado o una aproximación al problema no lineal.

Ninguna técnica de linealización se realiza sin contrapartidas. Los filtros de Kalman extendidos o linealizados no se puede decir que sean óptimos teniendo

en cuenta los teoremas de Bayes [109]. En un filtro de Kalman extendido teóricamente existe la posibilidad de una mala estimación que lleve a una eventual divergencia del mismo por empeorar y hacerse mayor a lo largo del tiempo. Esto es especialmente posible en circunstancias tales como las que se dan cuando tanto los errores de medida iniciales como la indeterminación inicial son grandes. Los filtros de Kalman linealizados serán imprecisos en situaciones en las que la trayectoria nominal no coincide con la trayectoria actual. Reconocer y corregir esta mala adecuación al objetivo de actuación del filtro es una clave importante en el diseño de dichos filtros.

La ganancia de un filtro de Kalman expresa la diferencia entre lo que está siendo actualmente medido y la mejor predicción de estado disponible. La ganancia de un filtro de Kalman en un tiempo i se puede expresar como:

$$S_i = Z_i - f(\mu_X) - \mu_V$$

donde μ_X es la media del estado del sistema y μ_V es la media del ruido de la medida. La magnitud de este término adimensional conocido como ganancia viene dada por

$$DS_i = S_i^T (H_i P_i (-H_i^T) + R_i) S_i \quad (3.31)$$

Si sucede que la magnitud de la ecuación (3.31) se hace muy grande comparado con el número de componentes de S_i , significa que el filtro ha perdido estabilidad. Los filtros de Kalman extendidos y los filtros de Kalman generalizados tienen un buen funcionamiento en multitud de aplicaciones. De todas formas hay que reconocer que la complejidad añadida que presentan estos tipos de filtros hacen que su respuesta en tiempo real sea más lenta que la de otros. Recalcular el Jacobiano en cada actualización del ciclo consume tiempo, la complejidad de los modelos no lineales que se consideran hacen difícil actualizar el estado estimado en tiempo real de una forma adecuada [66].

3.1.7. Filtrado complementario

Las teorías de filtrado tanto de Wiener como de Kalman se desarrollan basándose en la premisa de considerar como datos conocidos las características espectrales del proceso en curso. En la práctica, esta premisa es difícil de satisfacer. No es práctico modelar la señal de entrada como un proceso aleatorio con características espectrales conocidas, por esto se utilizan los filtros complementarios, que no dependen de condiciones tan estrictas. Tanto la teoría de Wiener como la de Kalman se pueden utilizar para seleccionar una función de transferencia apropiada, puesto que no se necesita ningún método.

Los filtros complementarios filtran la señal de entrada sin retardos o distorsiones innecesarias. El filtrado complementario fundamenta su desarrollo en la

utilización y disponibilidad de múltiples medidas independientes de la misma señal; se supone que puede haber ruido en esas medidas. Si las medidas tienen características espectrales complementarias, las funciones de transferencia han de elegirse de tal forma que se minimice el error de estimación. El requisito general es que una de las funciones de transferencia complemente la suma de las otras. Así, para n medidas de una señal

$$1 - H_1(s) - H_2(s) - \dots - H_{n-1}(s) = H_n(s) \quad (3.32)$$

Esto permite a la componente de la señal pasar a través del sistema no distorsionada, ya que la salida del sistema siempre suma la unidad.

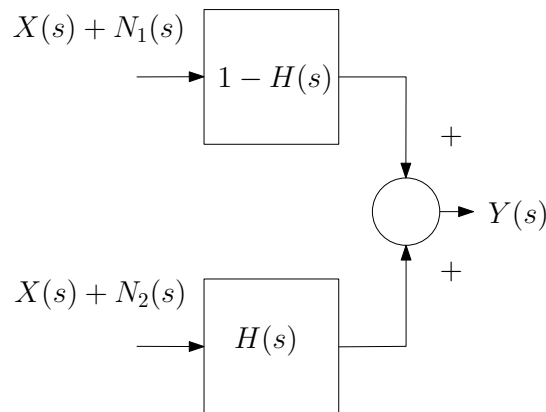


Figura 3.4: Diagrama de Bloques de un Filtro Complementario

El filtro complementario más simple tiene en cuenta dos medidas de la señal contaminadas con ruido. Esta situación se refleja en la figura Figura 3.4. Si N_1 es un ruido de frecuencia predominante baja, y N_2 es un ruido de alta frecuencia, las dos fuentes de ruido tienen características espectrales complementarias. Elijiendo $H(s)$ para un filtro paso bajo, se atenúan ambas señales de ruido. La señal de salida se puede escribir como,

$$Y(s) = X(s) + N_1(s)[1 - H(s)] + N_2(s)H(s) \quad (3.33)$$

donde,

$$H(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$$

que cumple las condiciones requeridas en la ecuación (3.32).

Como se utilizan los datos tanto de alta como de baja frecuencia, la salida del filtro no sufre ningún retardo en la respuesta dinámica por este filtro paso-bajo. Un examen de la ecuación (3.33) indica que el filtro sólo opera sobre los

errores y ruidos del sistema. La función de transferencia no afecta directamente a la señal de entrada en sí misma. Por esta razón, este tipo de filtrado recibe a veces el nombre de filtro sin distorsión, tal como se refleja en la Figura 3.5.

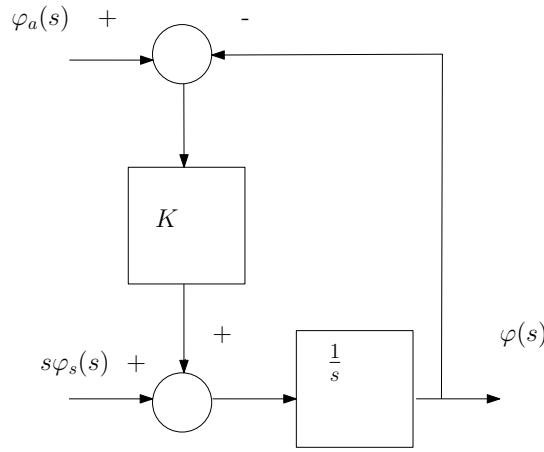


Figura 3.5: Diagrama de Bloques de un Filtro en el Dominio de Transformadas

3.1.7.1. Estimación de posicionamiento

Se puede utilizar un filtro complementario de ganancia constante para la estimación del posicionamiento. La transformada del ángulo de giro (*roll*) desde las lecturas de un acelerómetro debido a la gravedad es $\varphi_a(s)$, y $\varphi_s(s)$ es el ángulo de giro obtenido por integración ponderada de dichas señales.

Si el acelerómetro estuviese libre de ruidos y midiese sólo la aceleración debida a la gravedad, el valor de k se establecería como infinito y la estimación de la orientación estaría enteramente basada en las lecturas del acelerómetro. La utilización de rate gyros que además no presentan deriva, permitiría la estimación de la orientación utilizando solamente esos sensores, y k se podría considerar cero. Como no existe ningún sensor ideal, hay que encontrar un valor de compromiso para la constante k , que lleve a la mejor estimación.

A la vista de la figura 3.5, la salida del filtro viene dada por

$$\varphi(s) = \frac{1}{s}(k\varphi_a(s)) - k\varphi(s) + s\varphi_s(s)$$

la función de transferencia del filtro basada solamente en los datos de entrada del acelerómetro, con $\varphi_s(s) = 0$ viene dada por

$$G_a(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi_a(s)} = \frac{ks^{-1}}{1 + ks^{-1}} = \frac{k}{s + k} = \frac{1}{1 + \tau s} \quad (3.34)$$

donde $\tau = \frac{1}{k}$ si se considera una entrada escalón unitario $u(t)$, la señal de salida del filtro en el dominio de frecuencias es

$$\varphi_a(s) = \frac{1}{s} \left(\frac{k}{s+k} \right) = \frac{k}{s(s+k)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+k} \quad (3.35)$$

A la última expresión a la derecha del signo igual se llega a través del desarrollo con fracciones simples de la expresión inicial. Transformándola al dominio del tiempo llega a,

$$\varphi_a(t) = 1 - e^{-kt} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.36)$$

Teniendo en cuenta que $e^{-1} \approx 0,37$, cuando t iguala a τ , la señal de salida del filtro producida por las entradas del acelerómetro se ha incrementado a $1 - 0,37 = 0,63$, o lo que es lo mismo, al sesenta y tres por ciento de su valor de referencia (*steady state value*). Así, la entrada del acelerómetro ha quedado filtrada por las frecuencias menores, es un filtro paso bajo (*low pass filter*). De forma similar, la función de transferencia para las señales de entrada de los rate gyros solamente, es decir $\varphi_a(s) = 0$ es

$$G_s(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi_s(s)} = \frac{1}{1+ks^{-1}} = \frac{s}{s+k} = \frac{\tau s}{1+\tau s} \quad (3.37)$$

en el dominio de frecuencias, la respuesta del sensor a una entrada escalón unitario es

$$\varphi_s(s) = \frac{1}{s} \left(\frac{s}{s+k} \right) = \frac{1}{s+k} = \frac{\tau s}{\tau s + 1} \quad (3.38)$$

calculando la antitransformada para volver al dominio del tiempo, esta respuesta queda expresada como

$$\varphi_s(t) = e^{-kt} = e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.39)$$

en este caso, cuando $t = \tau$, la salida debida a la entrada medida del sensor habrá decrecido un treinta y siete por ciento respecto de su valor inicial. La ecuación (3.39) constituye un filtro paso alto de los datos recibidos por el sensor. De las ecuaciones (3.34) y (3.37), la función de transferencia combinada debida a las entradas tanto del acelerómetro como de los sensores de posición es

$$\frac{\varphi(s)}{\varphi_a(s)} + \frac{\varphi(s)}{\varphi_s(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} + \frac{\tau s}{\tau s + 1} = 1 \quad (3.40)$$

que siempre suma la unidad, independientemente del valor de k . Utilizando la antitransformada para encontrar la expresión en el dominio del tiempo, la respuesta total del filtro es

$$(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 \quad (3.41)$$

esto significa que la respuesta inicial del filtro a un cambio de escalón procede totalmente de las entradas del *rate gyro*. La señal de posición decae exponencialmente a lo largo del tiempo y es reemplazada por la señal complementaria *en baja frecuencia* producida por las entradas del acelerómetro.

3.1.7.2. Frecuencia de corte

La frecuencia de corte de un filtro complementario representa el valor por debajo del cual las señales de un tipo de sensor tienen mayor peso, y por encima del cual señales de otro tipo son favorecidas. A la frecuencia de corte, las señales de ambos tipos tienen el mismo peso, tienen un tratamiento idéntico. Para el filtro presentado en la figura 3.4, por debajo de la frecuencia de corte tienen más peso las señales del acelerómetro. Por encima, las señales recibidas de los *rate gyros* son más consideradas. Para un filtro como el de la figura 3.4 la frecuencia de corte se puede encontrar analíticamente igualando los valores absolutos de las funciones de transferencia. A partir de las ecuaciones (3.34) y (3.37), se tiene

$$\left| \frac{\varphi(j\omega)}{\varphi_a(j\omega)} \right| = \left| \frac{\varphi(j\omega)}{\varphi_s(j\omega)} \right| \quad (3.42)$$

las magnitudes de las funciones de transferencia vienen dadas por

$$\left| \frac{\varphi(j\omega)}{\varphi_a(j\omega)} \right| = \left| \frac{1}{1 + j\tau\omega} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} \quad (3.43)$$

y

$$\left| \frac{\varphi(j\omega)}{\varphi_s(j\omega)} \right| = \left| \frac{j\tau\omega}{1 + j\tau\omega} \right| = \frac{\tau\omega}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} \quad (3.44)$$

en la frecuencia de corte se cumple $1 = \tau\omega$, lo que implica $\omega = \frac{1}{\tau}$ expresando lo anterior en hercios, la frecuencia de corte, en adelante f_c , se puede escribir como

$$f_c = \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{k}{2\pi} \quad (3.45)$$

y se puede ajustar variando la ganancia del filtro k .

3.1.7.3. Resumen

Cada uno de los tipos de filtros revisados en el apartado anterior tiene sus propias debilidades y sus puntos fuertes. Difieren en dificultad computacional, requerimientos de memoria y aplicabilidad en computadores para su implementación discreta.

De todas formas, el primer objetivo de cada uno es producir la mejor estimación posible para la variable o variables de interés a través de la minimización de errores debidos al ruido que corrompe las medidas y a las imprecisiones debidas a las limitaciones de los sensores y a la precisión del sistema. La teoría de filtrado de Wiener es aplicable a problemas de filtrado que conllevan la separación de una señal que parece ruido, de otra.

La teoría del filtro de Wiener se basa en que son conocidas las características espectrales tanto de la señal como del ruido, y ésta es la única información que

se utiliza para la media cuadrática del error. De todas formas, en la mayoría de las aplicaciones prácticas, las funciones de autocorrelación y correlación cruzada pueden ser desconocidas. La formulación escalar de la teoría del filtro de Wiener hace difícil su aplicación a sistemas que tengan que tener en cuenta múltiples señales de entrada y señales de salida. Aunque pueda haber múltiples entradas, sólo se puede estimar una única salida escalar. Quizá el mayor obstáculo para la implementación discreta de un filtro de Wiener en un computador sea que la solución debe ser recalculada enteramente cada vez que se obtienen nuevos datos. Esto requiere que todos los datos de las medidas previas deben ser almacenados en memoria y estar disponibles para recalcular la solución. A medida que el tamaño de los datos crece, la inversión de la matriz de covarianza se hace impracticable. La teoría del filtro de Kalman, al igual que la teoría de Wiener asume que las características espectrales de cada señal están completamente especificadas. Mientras el filtro de Wiener utiliza ganancias constantes, el filtro de Kalman presenta ganancias que varían con el tiempo, que se calculan a partir de la matriz de ganancia de Kalman. El filtro de Kalman incorpora un modelo del proceso físico como parte del proceso de estimación. El resultado final es una ecuación diferencial o ecuación en diferencias que relaciona entradas y salidas. La formulación matricial del filtro de Kalman lo hace aplicable a gran cantidad de problemas que tienen en cuenta múltiples inputs y salidas, así como relaciones complejas entre procesos y medidas realizadas sobre esos procesos. Los filtros de Kalman discretos son objetivo fácil para implementar en computador debido a su naturaleza recursiva. No se requiere que todos los datos previos sean almacenados y procesados cada vez que se realiza una nueva medida. Solamente los más recientes, estimados y medidos, son necesarios para llegar a una nueva estimación del estado del sistema.

La teoría de filtrado de Kalman supone todos los ruidos blancos y gaussianos. Sin embargo, se puede demostrar que la suma de múltiples fuentes de ruido rosa constituye una distribución gaussiana, y en ese caso el filtro de Kalman trabajará bien aunque las premisas de partida no se cumplan. El filtro de Kalman tradicional se basa en la supuesta linealidad tanto del modelo del proceso como de las ecuaciones de medida. Aunque no se puede decir que en este caso el filtro sea óptimo, se puede utilizar un modelo de proceso no lineal en un filtro de Kalman extendido o linealizado. Formular un modelo para un proceso como el mencionado puede ser extremadamente difícil, y consumir mucho tiempo. Se pueden presentar además otras dificultades debidas a las demandas computacionales adicionales con motivo de la linealización. Los filtros de Kalman son altamente dependientes de la existencia de los estadísticos completos de las medidas, y de un modelo preciso del proceso. En ausencia de cualquiera de estos requerimientos, se puede llegar a imprecisión en la estimación del estado del sistema. Los filtros complementarios no se basan en la premisa de existencia de información estadística acerca de las señales que forman parte del problema, y

por esta razón suelen ser más robustos. Lo más usual es que sean diseñados para combinar múltiples medidas de la misma señal de una forma complementaria. El primer objetivo continúa siendo la minimización del cuadrado del error esperado. Cualquier técnica de optimización de parámetros puede utilizarse para resolver el problema de minimización. Habitualmente los filtros complementarios se ajustan utilizando datos empíricos obtenidos en ensayos experimentales del sistema. La formulación de un filtro complementario es usualmente más sencilla y simple que la de un filtro de Kalman. Aunque no sea lo óptimo, un filtro complementario puede producir estimaciones con una precisión comparable a la obtenida con un filtro de Kalman, con menor coste computacional y menos tiempo de desarrollo.

El problema de posicionamiento se ha resuelto utilizando filtros complementarios para integrar los datos obtenidos a partir de sensores complementarios. Ha habido autores que han tenido éxito utilizando un filtro de Kalman extendido de orden reducido, en aplicaciones en las que intervienen sensores inerciales. Una solución al problema dinámico del sistema podría ser un filtro de Kalman extendido que incorpore el modelo dinámico del sistema, y medidas estadísticas de los sensores.

3.2. Vector de estado y filtro de Kalman

La descripción interna de un sistema dinámico se basa en el concepto de vector de estado. El estado de un sistema dinámico es la menor colección de variables cuyo valor, en un cierto instante, resume el pasado dinámico del sistema y es suficiente para predecir su evolución futura. Las variables que representan el estado no tienen que corresponder necesariamente a magnitudes físicas medibles. La descripción interna establece entre las señales de entrada y salida de un sistema una relación indirecta, que se hace explícita a través de las funciones de transición y lectura [74].

En los sistemas dinámicos lineales en tiempo discreto el espacio de los estados es un espacio vectorial de n dimensiones y las funciones de transición y de lectura son aplicaciones lineales. Una cuestión importante es la estimación estadística de las variables de estado de un sistema dinámico [20]. El filtro de Kalman clásico fue desarrollado en su momento para estimar el vector de estado, supuesta una secuencia de medidas de este vector columna.

3.3. Aproximación con la restricción de mínimos cuadrados

En 1965, Wahba había formulado el problema de posicionamiento utilizando el vector de observaciones como un problema de estimación por mínimos cuadrados con restricciones: Dados los dos conjuntos de n vectores $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ y $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, $n \geq 2$ donde cada par (r_i, b_i) corresponden a un vector generalizado \mathbf{x}_i encontrar la correspondiente matriz ortogonal \mathbf{A} que lleva al primer conjunto sobre el segundo a través de mínimos cuadrados. Es decir, encontrar \mathbf{A} que minimice

$$\sum_{i=1}^n \|b_i - \mathbf{A}r_i\|^2 \quad (3.46)$$

sujeta a las restricciones de ortogonalidad de \mathbf{A} y $\det(\mathbf{A}) = 1$. Este problema es genéricamente conocido como problema de Wahba. La ecuación (3.46) se conoce como función de coste ponderada de Wahba y se puede transformar en una función cuadrática de la cuaterna, según

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i \|b_i - \mathbf{A}r_i\|^2 = 1 - q^T K q \quad (3.47)$$

Donde, sin pérdida de generalidad, se asume que los coeficientes de peso a_i suman la unidad. De esta forma este problema es equivalente a la maximización de una forma cuadrática de q . El problema de determinar los valores estacionarios de una forma cuadrática en una esfera unitaria lleva a resolver un problema de autovalores. Como resultado de lo anterior, el autovector correspondiente al mayor autovalor de \mathbf{K} será la estimación óptima de q .

Se ha propuesto por ejemplo una versión modificada del método de la potencia [53] para la búsqueda de este autovector. Hay que hacer notar que en esta formulación, el problema de Wahba es un problema de determinación de orientación de un paso; es decir, se asume que las medidas vectoriales que se procesan para estimar la orientación han sido obtenidas para una orientación constante. Normalmente esto toma lugar en un único valor del tiempo. Una familia de soluciones para el problema de Wahba es la relativa a la determinación de esa matriz óptima \mathbf{A} , mientras otra familia es la relativa a la determinación de la correspondiente cuaterna óptima. Se verán las soluciones relativas a la determinación de la cuaterna óptima.

3.3.0.4. Estimadores de cuaternas de un paso

El método q es un estimador en cuaternas de un paso. En 1968, Davenport diseñó un método de un paso para computar la cuaterna óptima (*optimal single*

frame quaternion) [26]. Este método, conocido en la literatura como método q se resume en lo siguiente. Dado un conjunto de n observaciones simultáneas (r_i, b_i) con sus correspondientes pesos a_i se definen las siguientes matrices 3×3 B y S , el vector 3×1 z , y el escalar σ

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \sum_{i=1}^n a_i b_i r_i^T & z &= \sum_{i=1}^n a_i (b_i \times r_i) \\ \mathbf{S} &= \mathbf{B} + \mathbf{B}^T & \sigma &= \text{tr}(\mathbf{B}) \end{aligned}$$

Donde “tr” denota el operador traza. Entonces, se construye la matriz simétrica 4×4 \mathbf{K} ,

$$K \equiv \begin{bmatrix} S - \sigma I_3 & z \\ z^T & \sigma \end{bmatrix} = - \sum_{i=1}^m a_i \Omega(\tilde{b}_i) \Gamma(r_i) \quad (3.48)$$

Las matrices Ω y Γ conmutan entre sí. La traza de esta matriz es igual a cero. La orientación óptima está representada a través de una cuaterna al maximizar el miembro derecho de la ecuación (3.48), sujeta a la restricción de norma unitaria para la cuaterna. No es difícil comprobar que la cuaterna óptima es igual al autovector normalizado de K de mayor autovalor, es decir la solución de,

$$K \mathbf{q}_{opt} = \lambda_{m\acute{a}x} \mathbf{q}_{opt} \quad (3.49)$$

Con las ecuaciones 3.61,

$$J(A) = \lambda_0 - \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T) \quad (3.50)$$

y $\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T) = \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}$, dan la función de coste óptima de la forma

$$J(A_{opt}) = \lambda_0 - \lambda_{m\acute{a}x} \quad (3.51)$$

El algoritmo QUEST se basa en la observación de Shuster sobre la obtención más fácil de $\lambda_{m\acute{a}x}$ a través de un método iterativo de Newton-Raphson, comenzando con λ_0 como valor inicial, ya que la ecuación (3.51) muestra que $\lambda_{m\acute{a}x}$ está muy cercano a λ_0 si la función de coste optimizada toma un valor pequeño. De hecho, en general es suficiente una sola iteración. QUEST es en principio menos robusto que el método Davenport, pero ha demostrado muchas veces superarlo en aplicaciones prácticas. Desde el punto de vista de la aproximación de Wahba, se puede destacar que supone trabajar con algoritmos *closed-form*, que no necesitan una estimación a priori de la cuaterna; también hay que tener en cuenta que se preserva la restricción de norma unitaria de la cuaterna. Por otra parte esta aproximación por mínimos cuadrados conduce a estimadores que carecen de significado probabilístico. De hecho, uno de los fallos inherentes a esta aproximación es la elección correcta de los coeficientes de peso. Otro defecto de los estimadores desarrollados siguiendo esta aproximación es la dificultad para incluir parámetros distintos del posicionamiento, son subóptimos con respecto a los ruidos propagados en el tiempo (*time propagation noises*).

3.4. Aproximación de mínima varianza

Siguiendo la aproximación de mínima varianza, el problema de determinación de la orientación ha quedado embebido en la teoría del filtro de Kalman. La cuaterna de orientación se considera como una variable de estado. Se llega a la ecuación de espacio de estados del proceso a partir de una ecuación cinemática en cuaternas $\dot{q} = \frac{1}{2}\Omega q$ y la ecuación de medidas se obtiene sustituyendo $\mathbf{A}(q)$ de la ecuación $\mathbf{A}(q) = (q^2 - \mathbf{e}^T \mathbf{e})I_3 + 2\mathbf{e}\mathbf{e}^T - 2q\tilde{\mathbf{e}}$ en la ecuación, $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{r} + \delta\mathbf{b}$. Un proceso estocástico es una función de dos variables; una determinista, en este caso el tiempo, y otra aleatoria $X(x,t)$ es una familia de funciones temporales. Si se fija x se tiene una función temporal llamada realización del proceso. Las entradas estocásticas de este sistema son el vector de error ε en la velocidad angular de medida y el vector de ruido de posicionamiento de los sensores, $\delta\mathbf{b}_{k+1}$. Este último aparece en la ecuación de medida como un ruido aditivo. Se asume que ω es la salida de una tríada de gyros solidarios al cuerpo móvil que tienen un error aditivo ε . Este error actúa como un ruido multiplicativo en la ecuación $\dot{q} = \frac{1}{2}\Omega q$. La aproximación más común es modelar el proceso dinámico como un proceso estocástico según

$$\dot{q} = \frac{1}{2}\Omega q + w$$

Donde el vector de ruido del proceso, denotado por la cuaterna w que representa el vector ruido, es decir, será una cuaterna con parte escalar nula y parte vectorial correspondiente al ruido. Esta cuaterna de ruido se añade para tener en cuenta el conocimiento imperfecto en la matriz de la dinámica Ω . Se puede aproximar w como una función lineal de ε y del estado q . De esta forma, el modelo estadístico de w se puede deducir del modelo estadístico de q . La ecuación del proceso junto con la ecuación de la medida resulta en el modelo de vector de estado del sistema de la cuaterna de orientación variable en el tiempo

$$\mathbf{b}_{k+1} = \mathbf{A}(q_{k+1})\mathbf{r}_{k+1} + \delta\mathbf{b}_{k+1} \quad (3.52)$$

La expresión de $\mathbf{A}(q_{k+1})$ no es lineal en la cuaterna q_{k+1} . Por esto se debería aplicar un filtro de Kalman extendido en vez de un filtro lineal siempre que sean conocidos los modelos estadísticos de w y $\delta\mathbf{b}_{k+1}$. La dependencia del vector de estado del modelo estadístico de w se soluciona sustituyendo el estado verdadero por el estado estimado en la expresión de w . Por otra parte, la aproximación de Kalman, conduce, por definición, a estimaciones secuenciales de la cuaterna, que siguen el criterio de la mínima varianza, y permiten la estimación de otros parámetros, además del posicionamiento, de una forma directa. De todas formas el filtro de Kalman no está diseñado para preservar las restricciones impuestas en las variables de estado estimadas. Aparece la dificultad para mantener la propiedad de norma unitaria en la estimación de la cuaterna y se intenta arreglar de varias formas. Una de ellas ha sido por ejemplo desarrollar un paso de actualización de la medida en el filtro extendido de Kalman donde el

error entre la cuaterna estimada y la verdadera es en sí mismo una cuaterna y es multiplicada (multiplicación de cuaternas) con la cuaterna estimada a priori, para llegar a la estimación a posteriori. Esta clase de filtro extendido de Kalman recibe el nombre de filtro extendido de Kalman multiplicativo. Otra forma es normalizar la estimación a posteriori después de la clásica actualización de la medida (de forma aditiva) en el EKF. Un método alternativo para preservar la propiedad de norma unitaria de la cuaterna es llegar a un modelo de medida en cuaternas ficticio a partir de la ecuación que expresa dicha propiedad. Este modelo, llamado modelo de pseudomedida ha sido implementado en un filtro de Kalman extendido aditivo.

1. Filtro de Kalman extendido. (EKF, Extended Kalman Filter) Filtro con parametrización mínima. El grupo rotación tiene tres dimensiones, luego la implementación directa de un EKF será una parametrización tridimensional de la orientación. Las primeras publicaciones utilizaban las secuencias de los ángulos de Euler. Es conocido que son inapropiados para, por ejemplo, aviones rápidos, porque se pueden presentar posiciones en las que la representación a través de estas expresiones presente singularidades, por ejemplo cuando el ángulo medio es de noventa grados; sólo es apropiada esta fórmula cuando no hay mucha distancia respecto de la referencia. Para observatorios astronómicos por ejemplo, se utilizan EKF de mínima parametrización con parámetros de Rodrigues [43]. Esta forma de EKF no ha encontrado una gran aplicación.
2. Filtro de Kalman extendido multiplicativo MEKF Como ya se ha mencionado, representa el posicionamiento como el producto de una orientación estimada y la desviación respecto de esa estimación. Se utiliza una representación no singular de la orientación estimada, y una representación de la desviación en función de tres parámetros. La implementación más común utiliza cuaternas para parametrizar la orientación. En este caso el producto es

$$q = \delta q(\Phi) \otimes \hat{q} \quad (3.53)$$

Donde \hat{q} es la cuaterna unitaria estimada y $\delta q(\Phi)$ es una cuaterna unitaria que representa la rotación desde la cuaterna \hat{q} al actual posicionamiento q , parametrizado a través de un vector de tres componentes Φ . Con esta notación los errores están representados en coordenadas locales [61], [79]. La idea básica de los MEKF es que un EKF estima el vector tridimensional Φ mientras que la cuaterna \hat{q} de cuatro componentes correctamente normalizada proporciona una representación del posicionamiento no singular. Esto se puede interpretar como que Φ es una representación de tres componentes del error de posicionamiento, y su covarianza es la covarianza del error de posicionamiento en coordenadas relativas. La ventaja fundamental de los MEKF es que \hat{q} es una cuaterna unitaria por definición,

la matriz de covarianza tiene la mínima dimensión y el vector Φ nunca va a aproximar una singularidad, ya que representa solamente pequeños errores de posicionamiento [78].

3. Filtro de Kalman extendido aditivo(AEKF). Se utiliza una parametrización no singular de la orientación en el vector de estado del filtro. La mayoría de los AEKF han utilizado cuaternas [18], si bien la matriz de orientación también ha sido empleada en algunas ocasiones [103]. Los AEKF expresados en cuaternas relajan la condición de normalización de la cuaterna, y tratan las cuatro componentes de la misma como parámetros independientes. Si se definen la estimación \hat{q} y el error Δq como

$$\begin{aligned}\hat{q} &= E \{q | \tilde{\mathbf{y}}\} \\ \Delta q &= q - \hat{q}\end{aligned}\tag{3.54}$$

Esto significa que

$$\begin{aligned}E \{ \|q\|^2 | \tilde{\mathbf{y}} \} &= E \{ \|\hat{q} + \Delta q\|^2 | \tilde{\mathbf{y}} \} = \\ &= \|\hat{q}\|^2 + E \{ \|\Delta q\|^2 | \tilde{\mathbf{y}} \} \geq \|\hat{q}\|^2\end{aligned}\tag{3.55}$$

donde $\tilde{\mathbf{y}}$ representa el vector de medidas.

La igualdad en la ecuación (3.55) es válida sólo si Δq es idénticamente nulo. También muestra esta ecuación que si la variable aleatoria q tiene norma unitaria y no está libre de errores, la norma de su valor esperado debe ser menor que la unidad. La expresión habitual para la matriz de orientación como una función cuadrática homogénea de la cuaterna es una matriz ortogonal solamente si la cuaterna tiene norma uno. Muchos AEKF han utilizado la forma cuadrática homogénea, lo que significa que la matriz de orientación es solo aproximadamente ortogonal. Se puede demostrar de todos modos, que se acerca a esa ortogonalidad a medida que el filtro converge [6]. Se garantiza que la matriz de orientación es ortogonal si es computada utilizando la cuaterna normalizada en la forma cuadrática homogénea, resultando un modelo de representación tipo rayo: ya que cualquier cuaterna a lo largo de un rayo o línea recta que pasa por el origen en un espacio de cuaternas euclídeo representa la misma orientación, con la excepción de la cuaterna nula en el origen. Este modelo es también conocido como modelo de matriz ortogonalizada linealizada (LOM) [6], [62]. Choukroun, Bar-Itzhack, y Oshman formulan un modelo de medida basado en la factorización matricial de la matriz de orientación [18], resultando un modelo de la medida que es lineal en la cuaterna pero con un ruido de medida dependiente del estado. Este ruido puede corresponder o no a una observación de vector unitario. Este modelo da la misma propagación de covarianza y estado que la representación radial del AEKF en el límite, para medidas continuas, pero presenta ligeras diferencias para medidas

discretas. Una desventaja de los AEKF es que su matriz de covarianza incluye elementos que expresan la varianza de la incertidumbre de la norma de la cuaterna y la correlación de la incertidumbre de la norma con todos los otros parámetros estimados. Estos términos, que no aparecen en el MEKF, no son ni conceptualmente ni computacionalmente deseables.

4. EKF de suavizado hacia atrás.(EKF superiterado). Resuelve un problema de suavizado no lineal para los intervalos de muestreo actual y pasado utilizando técnicas numéricas iterativas. El paso k -ésimo en un problema de filtrado no lineal puede considerarse como un problema de estimación de la máxima probabilidad a posteriori (MAP) si se escribe la función de densidad de probabilidad como $p_k = \exp(-J_k)$ con la función de coste,

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= [\tilde{y}_{i+1} - h_{i+1}(x_{i+1})^T] \\ J_k &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} \{ \mathbf{z} R_{i+1}^{-1} \mathbf{z} + w_i^T Q_i^{-1} w_i \} \\ &+ \frac{1}{2} (x_0 - \hat{x}_0)^T P_0^{-1} (x_0 - \hat{x}_0) \end{aligned} \quad (3.56)$$

La estimación \hat{x}_k es el vector x_k junto con x_i y con un ruido de proceso $w_i, i = 0, 1, \dots, k-1$ minimiza J_k sujeto a la ecuación dinámica

$$x_{i+1} = f_i(x_i, w_i), i = 0, 1, \dots, k-1 \quad (3.57)$$

La covarianza de ruido del proceso es Q_i , la covarianza de ruido de la medida es R_i , \tilde{y}_{i+1} es la medida en el tiempo t_{i+1} , $h_{i+1}(x_{i+1})$ es el modelo no lineal de la medida y \hat{x}_0 es la estimación a priori del estado con covarianza P_0 . Se puede observar que el tamaño del problema crece con k . Los filtros EKF usuales evitan este crecimiento al recalcular de forma implícita los valores de \hat{x}_i para $i < k$ cuando x_k es optimizada en el paso k .

El EKF iterado perfecciona al EKF iterando la ecuación no lineal de actualización de la medida para \hat{x}_k , linealizando otra vez sobre el estado actualizado estimado en cada iteración, pero no recalcula explícitamente los valores de \hat{x}_i para $i < k$. Cualquier filtro de Kalman implícitamente recalcula el estado anterior estimado en una nueva actualización de la medida, pero esto muchas veces se pasa por alto porque las estimaciones en el pasado en general no tienen interés. Para sistemas y medidas lineales, estas estimaciones pasadas son óptimas, pero no lo son en el caso no lineal. Por este motivo, las linealizaciones de la medida y del estado alejan de la estimación óptima. El filtro superiterado de suavizado de paso hacia atrás (BSEKF) mejora al EKF iterado relinealizando un número finito de medidas anteriores, cuando es procesada una nueva medida. El BSEKF combina algunas de las propiedades del EKF, que supone un suavizado, y

de un estimador por lotes. Toma x_k junto con x_i y con un ruido de proceso $w_i, i = k - m(k), \dots, k - 1$ para minimizar la función de coste,

$$\begin{aligned}
 J_k &= \frac{1}{2} \sum_{i=k-m(k)}^{k-1} \{ \mathbf{z} R_{i+1}^{-1} \mathbf{z} + w_i^T Q_i^{-1} w_i \} \\
 &+ \frac{1}{2} [(x_{k-m(k)} - \hat{x}_{k-m(k)}^*)^T] [P_{k-m(k)}^*]^{-1} \cdot \\
 &\cdot [(x_{k-m(k)} - \hat{x}_{k-m(k)}^*)]
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

sujeta a la ecuación dinámica

$$x_{i+1} = f_i(x_i, w_i), i = k - m(k), 1, \dots, k - 1 \tag{3.59}$$

donde se ha tomado,

$$\mathbf{z} = [\tilde{y}_{i+1} - h_{i+1}(x_{i+1})^T]$$

La función de coste en la ecuación (3.58) conserva todas las no linealidades de los $m(k)$ estados más recientes; los efectos de no linealidad de todos los estados previos están representados por el segundo término cuadrático, que es una aproximación a la función de coste $J_{k-m(k)}$ para un x_{m-k} fijado optimizada para los x_i y w_i para $i < k - m(k)$. Se elige un valor adecuado para m , el número de pasos a tener en cuenta, para tener en cuenta a la vez precisión y esfuerzo computacional. El BSEKF resuelve el problema no lineal de mínimos cuadrados utilizando un método de Gauss Newton [82], [83].

5. Estimador determinístico tipo EKF. Tienen una estructura similar a la de los EKF pero no se supone el ruido blanco, se sustituye por el producto de una matriz por un vector de ruido determinístico de seis componentes integrable por cuadraturas. El estimador determinístico en el límite es el MEKF. Este problema no lineal es mucho más difícil, porque hay que resolver una desigualdad en ecuaciones diferenciales parciales [63].
6. Filtro de Kalman entrelazado(IKF). La idea básica de este filtro es reemplazar el modelo no lineal por dos modelos pseudolineales y estimar el estado utilizando dos filtros de Kalman entrelazados funcionando simultáneamente. Se han aplicado por ejemplo para suavizar el ruido de las medidas de los giros en aviación. Los filtros de Kalman simultáneos estiman, uno el vector de velocidad de giro y el otro el producto de las componentes del vector de estado [1]. Por otra parte, además de los distintos filtros de Kalman Extendidos, están los filtros basados en la estimación de la cuaterna por mínimos cuadrados.

7. Filtro QUEST y sus variantes El Filtro QUEST (*quaternion estimation*) y sus variantes están basados en el problema de Wahba [108], que se puede redefinir como el problema de encontrar la adecuada matriz ortogonal A que minimiza la función de coste

$$J(A) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m a_i \left\| \tilde{b}_i - Ar_i \right\|^2 \quad (3.60)$$

Donde a_i son los pesos no negativos, y m es el número total de medidas. Si se escribe la función de coste como

$$J(A) = \lambda_0 - \text{tr}(AB^T) \quad (3.61)$$

Con $\lambda_0 = \sum_{i=1}^m a_i$, $B = \sum_{i=1}^m a_i \tilde{b}_i r_i^T$, se puede comprobar que $J(A)$ es minimizada cuando la traza de (AB^T) es maximizada. Esto es equivalente a encontrar la matriz A ortogonal más cercana a B según la norma euclídea, teniendo en cuenta que el determinante de A debe ser $+1$. Shuster señala que las nueve componentes de la matriz B contienen toda la información sobre los tres grados de libertad de la orientación y las seis componentes independientes de la matriz de covarianza del error angular, y que elegir los pesos como la inversa de las varianzas, $a_i = \sigma_i^{-2}$ convierte al problema de Wahba en un problema de estimación de máxima verosimilitud (estimación máximo verosímil, [87]) [93]. Hay muchos algoritmos que resuelven este problema, los más utilizados son el método q de Davenport [57] y el método QUEST [91]. Davenport parametriza la matriz de orientación con una cuaterna unitaria, de tal forma que $\text{traza}(AB^T) = q^T K q$ donde K es la matriz simétrica de traza nula siguiente

$$\begin{aligned} K &= \begin{bmatrix} B + B^T - \text{traza}(B)U_{3 \times 3} & \sum_{i=1}^m a_i \tilde{b}_i \times r_i \\ (\sum_{i=1}^m a_i \tilde{b}_i \times r_i)^T & \text{traza}(B) \end{bmatrix} = \\ &= - \sum_{i=1}^m a_i \Omega(\tilde{b}_i) \Gamma(r_i) \end{aligned} \quad (3.62)$$

La cuaterna óptima es igual al autovector normalizado de K que corresponde al mayor autovalor, es decir, $K q_{opt} = \lambda_{\text{máx}} q_{opt}$. A continuación se revisan dos filtros basados en los métodos mencionados: el filtro QUEST, y el filtro QUEST extendido. Como un algoritmo de filtrado es preferentemente utilizado cuando las observaciones se obtienen sobre un rango de tiempos, Shuster propone el algoritmo de filtrado QUEST, basado en la propagación y actualización de B [92]

$$B(t_k) = \mu \Phi_{3 \times 3}(t_k, t_{k-1}) B(t_{k-1}) + \sum_{i=1}^{m_k} a_i \tilde{b}_i r_i^T \quad (3.63)$$

Donde $\Phi_{3 \times 3}(t_k, t_{k-1})$ es la matriz de transición de estado de la matriz de orientación, μ es un factor de amortiguación de memoria, y m_k es el número de observaciones en el tiempo t_k . La orientación óptima en t_k se encuentra a partir de $B(t_k)$ con el algoritmo QUEST [92]. Un algoritmo secuencial alternativo, el REQUEST (recursive QUEST) propaga y actualiza la matriz K de Davenport [5]. REQUEST es un algoritmo recursivo para ajuste por mínimos cuadrados de la cuaterna de posicionamiento, que utiliza un factor de memoria heurística para filtrar ruidos de propagación. Para estimar la matriz K , el autor propone una estrategia de estimación óptima y se introduce el algoritmo REQUEST en un filtro de Kalman. Teniendo en cuenta los principios de la teoría de filtrado adaptativa, se desarrollan distintos filtros para la estimación adaptativa del ruido del proceso y del ruido de la medida. Los filtros QUEST y el REQUEST son matemáticamente equivalentes, pero el filtro QUEST requiere menos operaciones. No son tan competitivos como un filtro EKF, debido en su mayor parte a la suboptimización que supone la aproximación de amortiguación del ruido del proceso. Si se opera el factor de amortiguación de memoria a través de un algoritmo de ganancia de Kalman, se obtiene un mejor rendimiento, pero se sacrifica gran parte de la simplicidad atractiva de este método [17]. El filtro QUEST extendido (extended QUEST) es un algoritmo que resuelve el posicionamiento y parámetros adicionales. Se resuelve minimizando una función de coste en la que intervienen la cuaterna de orientación, el vector de estados auxiliares de filtrado x_k , valores de la cuaterna en el tiempo $k - 1$, y el ruido del proceso [84].

8. Estimador de la posición en dos pasos. Fue propuesto como una alternativa al EKF [40]. Se ha desarrollado para problemas con medidas no lineales, discretas. La motivación para el desarrollo de este algoritmo ha sido concebir un estimador recursivo que garantice minimizar la función de coste. El estimador de dos pasos alcanza este objetivo con una formulación recursiva dividiendo la función de coste en dos partes, un primer paso lineal y un segundo paso no lineal. En comparación con los algoritmos subóptimos EKF y EKF iterado, el algoritmo en dos pasos obtiene la estimación óptima para problemas en los que las derivadas del vector de estado pueden separarse de las incógnitas. Los tres algoritmos presentan una cierta deriva debido a su formulación en mínimos cuadrados, pero la deriva del estimador en dos pasos decrece rápidamente a medida que se incrementa el número de medidas. En el caso de que no se pueda separar las incógnitas de la variación respecto al tiempo, se hace una aproximación de la no linealidad, lo que permite tratar la dinámica del segundo paso como una perturbación de la dinámica del primer paso. Aunque esta aproximación podría hacer pensar que convierte al estimador en subóptimo, se demuestra que la aproximación de este algoritmo en dos pasos es

mejor que la del EKF o la del EKF iterado, debido a que la no linealidad es tratada como una pequeña perturbación dinámica en el momento de la actualización, más que como una linealización de la ecuación de medida.

9. Filtrado inodoro (unscented filter, UKF). Se basa en la premisa de que con un número fijo de parámetros sería más fácil aproximar una distribución gaussiana que aproximar una función arbitraria no lineal. Lo que se consigue es preservar la distribución normal de las variables a través de transformaciones no lineales. El EKF presenta dos problemas potenciales importantes:
 - Determinar las matrices del Jacobiano, que son las aproximaciones lineales de las funciones no lineales; esto puede ser complejo y causar dificultades de implementación
 - Esta linealización puede llevar a inestabilidades del filtro si el paso de tiempo no es lo suficientemente pequeño.

Para arreglar esta limitación Julier y Uhlman desarrollan el filtro UKF [50], [49]. El filtro UKF opera con la premisa citada de que es más fácil aproximar una distribución gaussiana que aproximar una función no lineal arbitraria. En vez de linealizar utilizando las matrices Jacobianas, el UKF utiliza una aproximación de muestreo determinístico para capturar la estimación de la media y la covarianza con un mínimo conjunto de puntos muestra. El UKF es una técnica de estimación no lineal muy potente y se ha demostrado que constituye una alternativa superior al EKF en gran número de aplicaciones, incluyendo la estimación de estado y posición de un vehículo automóvil, estimación de parámetros para un modelo de series de tiempo, para el entrenamiento de redes neuronales.

Aunque el EKF y el UKF presentan un rendimiento equivalente, el *overhead computacional*¹ del UKF y la naturaleza casi lineal de la dinámica de cuaternas, hace al EKF apropiado para la estimación de la orientación en aplicaciones de Realidad Virtual [56]. También se han desarrollado filtros de este tipo para el problema de posicionamiento [4], [54], [60]. Como se ha mencionado, UKF es un estimador lineal que utiliza el principio de que un conjunto de puntos muestra discretos se pueden utilizar para parametrizar media y covarianza, el estimador funciona como un filtro de Kalman para sistemas lineales e incluso se puede generalizar a sistemas no lineales, sin los pasos de linealización que requiere un EKF. Se demuestra analíticamente que la funcionalidad esperada con este nuevo filtro es superior a la de un EKF, y se puede equiparar a un filtro de Gauss de segundo orden.

¹Desperdicio de ancho de banda, causado por la información adicional (de control, de secuencia, etc.) que debe viajar además de los datos, en los paquetes de un medio de comunicación. El *overhead* afecta al rendimiento de la conexión

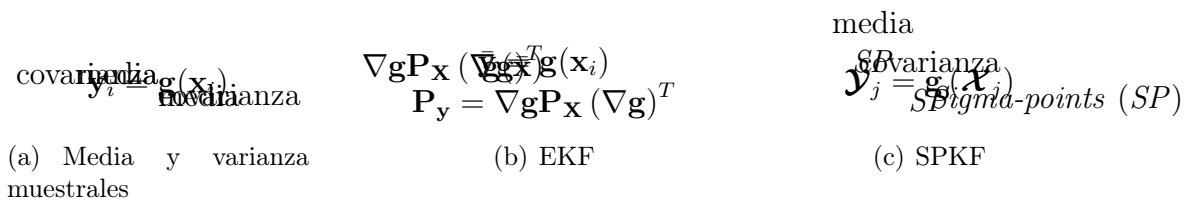


Figura 3.6: Ejemplo bidimensional de una transformación de la media y la covarianza (representada mediante *elipses de error estándar*) a través de un sistema no lineal [102].

El método no está restringido a considerar que las distribuciones de ruido sean gaussianas. Se destaca la facilidad de implementación y las estimaciones más aproximadas que se alcanzan, por esto se recomienda utilizarlo mejor que un EKF en, virtualmente, todas las aplicaciones [21].

A continuación, se presenta un esquema del desarrollo del filtro *unscented*, partiendo de un filtro de Kalman:

- a) Aumentar el vector de estado con los términos referentes al ruido del proceso $v(k)$ para llegar a un vector de dimensión $n^a = n + q$, de la

$$\text{forma } x^a(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix}$$

- b) El modelo del proceso se reescribe como una función de $x^a(k)$:

$$x(k + 1|k) = f[x^a(k), u(k), k]$$

- c) La transformación *unscented* utiliza $2n^a + 1$ puntos sigma que vienen

descritos por su valor estimado y una matriz de covarianzas

$$\hat{x}^a(k|k) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k|k) \\ O_{qx1} \end{bmatrix}$$

$$P^a(k|k) = \begin{bmatrix} P(k|k) & P_{xv}(k|k) \\ P_{xv}(k|k) & Q_k \end{bmatrix}$$

A continuación se presenta el algoritmo de predicción de este método:

a) El conjunto de puntos sigma es creado aplicando las ecuaciones

$$X_0 = \bar{x}, \quad W_0 = k/(n+k)$$

$$X_i = \bar{x} + (\sqrt{(n+k)P_{xx}})_i, \quad W_i = 1/2(n+k)$$

$$X_{i+n} = \bar{x} - (\sqrt{(n+k)P_{xx}})_i, \quad W_{i+n} = 1/2(n+k)$$

donde $k \in R$, $(\sqrt{(n+k)P_{xx}})_i$ es la fila o columna i -ésima de la matriz raíz cuadrada de $(n+k)P_{xx}$ y W_i es el peso asociado al punto i . Al sistema aumentado dado por la ecuación

$$\hat{x}^a(k|k) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k|k) \\ O_{qx1} \end{bmatrix}$$

$$P^a(k|k) = \begin{bmatrix} P(k|k) & P_{xv}(k|k) \\ P_{xv}(k|k) & Q_k \end{bmatrix}$$

b) El conjunto transformado viene dado por la inicialización de cada punto a través del modelo del proceso:

$$X_i(k+1|k) = f[X_i^a(k|k), u(k), k]$$

c) La media predicha se computa como

$$\hat{x}(k+1|k) = \sum_{i=0}^{2n^a} W_i X_i^a(k+1|k)$$

d) Y la covarianza

$$P(k+1|k) =$$

$$= \sum_{i=0}^{2n^a} W_i \{X_i(k+1|k) - \hat{x}(k+1|k)\} \cdot$$

$$\cdot \{X_i(k+1|k) - \hat{x}(k+1|k)\}^T$$

- e) Se representa cada uno de los puntos de predicción a través del modelo de observación

$$Z_i(k+1|k) = h[X_i(k+1|k), u(k), k]$$

- f) La observación predicha se calcula por

$$\hat{z}(k+1|k) = \sum_{i=1}^{2n^a} W_i Z_i(k+1|k)$$

- g) Como el ruido de observación es aditivo e independiente, la covarianza de innovación es:

$$\begin{aligned} P_{vv}(k+1|k) &= R(k+1) + \\ &+ \sum_{i=0}^{2n^a} W_i \{Z_i(k|k-1) - \hat{z}(k+1|k)\} \cdot \\ &\cdot \{Z_i(k|k-1) - \hat{z}(k+1|k)\}^T \end{aligned}$$

- h) Finalmente, la matriz de correlación cruzada viene determinada por,

$$\begin{aligned} P_{xz}(k+1|k) &= \\ &= \sum_{i=0}^{2n^a} W_i \{X_i(k|k-1) - \hat{x}(k+1|k)\} \cdot \\ &\cdot \{Z_i(k|k-1) - \hat{z}(k+1|k)\}^T \end{aligned}$$

Desde un punto de vista abstracto, un filtro de Kalman opera sobre la distribución de probabilidad de vector de estado n-dimensional. Esta distribución está caracterizada por sus dos primeros momentos estadísticos: la media y la covarianza. Los modelos del proceso y de la medida transforman esta distribución. Proyectan esta distribución en el tiempo o en el espacio vectorial de las medidas, que es m-dimensional. Se computan nuevos valores para la media y la covarianza para parametrizar la distribución transformada. Por último, se utiliza el residuo entre la medida predicha y el valor medido para computar una actualización de la distribución de probabilidad. La influencia de esta actualización viene determinada por la ganancia de Kalman K, matriz m por n cuyas componentes dependen del tamaño relativo entre las covarianzas de lo estimado y de lo medido. K realiza dos funciones: da pesos a la actualización y transforma el residuo desde el espacio de medidas al espacio del vector de estado. Tanto el filtro de Kalman clásico como el UF siguen el mismo esquema, aunque lo realizan de modo diferente. En el proceso recursivo de un UKF se suponen conocidas las estimaciones previas del vector de estado \hat{x}_{k-1} , y sus covarianzas P_{k-1} .

10. Filtros de partículas(PF). Los filtros de partículas comprenden una serie de filtros no lineales subóptimos basados en simulaciones secuenciales de Monte Carlo, en las que las distribuciones son aproximadas por partículas ponderadas (muestras aleatorias) que son generadas utilizando generadores numéricos pseudoaleatorios. El coste computacional y la estimación de la precisión alcanzable para los PF varía mucho [3]. Los filtros PF permiten un modelo estado espacio en tiempo discreto más general que los UF, dado por

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= f_k(x_k, y_k, w_k) \\ \tilde{y}_k &= h_k(x_k, v_k)\end{aligned}\tag{3.64}$$

Se suponen el ruido del proceso w_k y el ruido de la medida v_k ruidos blancos. No se requiere que los ruidos sean gaussianos. Las distribuciones de x_0, w_k y v_k , denotadas respectivamente por $p(x_0), p(w_k), p(v_k)$ se suponen conocidas y mutuamente independientes. Se pueden deducir del anterior modelo las probabilidades $p(x_{k+1}|x_k), p(y_k|x_k)$ y se supone que están disponibles para muestreo y evaluación. La predicción de un tiempo medido al siguiente se realiza a través de una integración de Monte Carlo por muestreo de importancia, técnica de reducción de varianza que se fundamenta en la siguiente idea: ciertos valores de las variables aleatorias de entrada en una simulación tienen mayor impacto que otros, en el parámetro que tiene que ser estimado, hay una evaluación y ponderación de los datos. Para la etapa de corrección se realiza un muestreo de Monte Carlo de la densidad condicional utilizando en el ciclo muestreo secuencial de importancia, y remuestreo. El paso de remuestreo mejora la degeneración inherente al muestreo ponderado anterior, pero también reduce el número de partículas distintas, algo que se conoce como el problema de empobrecimiento de las partículas. Los filtros PF son superiores a filtros no lineales convencionales en aplicaciones difíciles de filtrado no lineal y no gaussiano. Como contrapartida, los filtros PF son computacionalmente caros [32].

A continuación, se analiza en detalle un nuevo filtro presentado por Choukroun, formulado en cuaternas. Como ya se ha mencionado anteriormente, en los filtros de Kalman extendidos se utiliza un modelo de la medida en cuaternas no lineal y el procedimiento de linealización induce efectos no deseados tales como sensibilidad a condiciones iniciales, desviaciones en los errores de estimación, y a veces un incremento en la carga computacional, en particular cuando la derivada de las matrices de error deben ser evaluadas por métodos numéricos. En el nuevo filtro presentado por Choukroun el modelo evita el procedimiento de linealización. Utilizando esta aproximación, el ruido de la medida es dependiente de la cuaterna. La dependencia con respecto a la cuaterna es lineal, es la usual para una amplia gama de ruidos dependientes del estado. Desarrolla expresiones

generales exactas para las matrices de covarianza como ruidos dependientes del estado. Un análisis muestra como estas aproximaciones en el diseño del filtro pueden ser computadas eficientemente. Una característica de su modelo es que es ruido del proceso tiene el mismo patrón que el ruido de la medida [18].

También recoge otro filtro de cuaternas para la estimación por el método de mínimos cuadrados. Si se define la siguiente función de coste:

$$J(q) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_k \|\bar{q}_k - q\|^2$$

se busca minimizar la función de coste

$$\min_{q_1^T q_1 = 1} \{J_{1/1}(q_1)\}$$

En el problema de filtrado para el tiempo t_1 se supone que se han realizado n observaciones vectoriales independientes ($n \geq 2$), esto quiere decir que son dato α_1, q_1 . El vector \bar{q}_1 lleva el coste $J_{1/1}$ a cero, que es el mínimo global. Como \bar{q}_1 tiene norma unitaria, es la solución de la ecuación anterior. Luego $\hat{q}_{1/1} = \bar{q}_1$ Es decir, la estimación del filtro de q_1 en el tiempo t_1 es \bar{q}_1 . Si se define

$$\gamma_{1/1} \triangleq \alpha_1$$

Se modifica la expresión de la función de coste

$$J_{1/1}^*(q) = \frac{1}{2} \gamma_{1/1} \sum \alpha_k \|\hat{q}_{1/1} - q_1\|^2 + \hat{J}_{1/1}$$

Donde $\hat{J}_{1/1} = 0$ El problema inicial es equivalente al siguiente problema:

$$\min_{q_1^T q_1 = 1} \left\{ \frac{1}{2} \gamma_{1/1} \|\hat{q}_{1/1} - q_1\|^2 \right\} \quad (3.65)$$

El procedimiento de reescritura de la función de coste como función de q_1 y de $\hat{q}_{1/1}$, su estimación a posteriori en el tiempo t_1 , es el principio básico del método de programación dinámica (DP method). Esto permite una formulación secuencial y la solución del problema de estimación. El coeficiente de peso $\gamma_{1/1}$ de $\hat{q}_{1/1}$ se define a lo largo del procedimiento. El autor compara los métodos de multiplicadores de Lagrange y el método de programación dinámica. En el tiempo t_1 la primera estimación y los coeficientes de peso son idénticos en ambos casos; incluso la función de coste desaparece como tal. En el problema de filtrado para un valor del tiempo t_2 : se asume que se adquieren n nuevas observaciones, lo que implica que α_2, \bar{q}_2 son datos. La función de coste queda expresada de esta forma como suma de tres términos.

$$J_{2/2}(q_2) = \frac{1}{2} \gamma_{1/1} \|\hat{q}_{1/1} - q_2\|^2 + \frac{1}{2} \alpha_2 \|\bar{q}_2 - q_2\|^2 + \hat{J}_{1/1}$$

El primero está relacionado con la estimación a posteriori de la cuaterna de orientación en el tiempo t_1 , el segundo término se refiere a la nueva medida, el tiempo t_2 . Cada término está ponderado de acuerdo a su respectiva dependencia (evaluadas por $\gamma_{1/1}$ y α_2 respectivamente) de la estimación a posteriori de la nueva medida. El tercer término es el coste optimizado en el tiempo t_1 . El problema de estimación es formulado secuencialmente. Demostrará que se hace la misma aproximación en la formulación del problema de predicción y filtrado del caso dinámico. Existen dos métodos clásicos para resolver el problema de minimización que presenta la ecuación (3.65); el primero es el método de multiplicadores de Lagrange. El segundo consiste en sustituir directamente la restricción en la función de coste. La búsqueda del extremo se puede hacer por diferenciación o por inspección de la función de coste. El autor utiliza la segunda técnica mencionada. Bachmann y Yun desarrollan un nuevo algoritmo simplificado basado en cuaternas para la estimación de la orientación. Los datos de partida se obtienen de magnetómetros y acelerómetros que miden la gravedad y el campo magnético local. Con respecto al campo magnético, se tienen en cuenta que hay variaciones en la dirección de dicho campo, y sólo se utilizan estos datos para la determinación de la rotación alrededor del eje vertical, no se tienen en cuenta para determinar el balanceo (*roll*) o el cabeceo (*pitch*). Las variaciones magnéticas sólo provocan errores en la estimación del azimut. La salida del algoritmo es una cuaterna que representa la orientación. Al utilizar cuaternas, se evita el coste computacional que supone evaluar funciones trigonométricas. Se introduce también un método para evitar las singularidades que permite al algoritmo funcionar en todas las posibles orientaciones. La precisión de este algoritmo es esencialmente idéntica a la del algoritmo QUEST, y computacionalmente es más eficiente [118], [119].

Concepto	Kalman Extendidos	Unscented	Recursivos Lineales	Recursivos no lineales	No Recursivos
Estadísticos propagados por el algoritmo	Vector de media y matriz de covarianzas	Vector de media y matriz de covarianzas	Densidad de probabilidad condicionada de las medidas	Estadísticos suficientes	Vector de media y matriz de covarianzas
Predicción de los estadísticos de un tiempo de medida al siguiente	Aproximación lineal de la dinámica	Aproximación de las integrales multidimensionales utilizando la transformación <i>unscented</i>	Integración de Monte Carlo utilizando muestreo por importancia	Integración numérica de EDOs para los estadísticos suficientes en la familia exponencial de densidades de probabilidad	Integración numérica
Corrección de los estadísticos en el tiempo de medida	Aproximación lineal de las ecuaciones de medida	Aproximación de las integrales multidimensionales utilizando la transformación <i>unscented</i>	Muestreo de Monte Carlo de la densidad condicionada utilizando muestreo por importancia y remuestreo	Regla de Bayes para la familia exponencial de funciones de densidad de probabilidad	Minimización numérica de la función de coste (máxima verosimilitud)
Precisión de la estimación del vector de estado	A veces buena pero pobre comparada con la precisión óptima teórica	A veces suponen una mejora con respecto a los EKF, pero otras veces no	Rendimiento óptimo para problemas de menor dimensión, pero pueden volverse altamente subóptimos para dimensiones grandes por estar limitadas por el tiempo real de computación	Mejora significativa con respecto a los EKF para algunas aplicaciones	Mejora significativa con respecto a los EKF para algunas aplicaciones
Carga computacional del algoritmo en tiempo real	Del orden de d^3 para vectores de estimación de estado de dimensión d	Equivalente a la de EKF	Es baja para problemas sencillos si se diseña con cuidado el filtro, pero no en el resto de casos	Del mismo orden que los EKF para la mayoría de los problemas, y polinomial en d	Del mismo orden que los EKF para problemas sin ruido, pero mucho mayor que los EKF si hay ruido
Referencias	[70], [45]	[21], [48]	[3], [32], [31]	[24], [23], [25]	[81], [80]

Tabla 3.1: Comparativa de filtros

Capítulo 4

Descripción del estimador

4.1. Desarrollo del estimador

Se plantea el desarrollo de un estimador para resolver el problema de orientación; en concreto para determinar la orientación del chasis del vehículo utilizado en el Laboratorio de Dinámica de Vehículos de la Universidad de A Coruña, un prototipo dotado de unos determinados sensores, en concreto acelerómetros, magnetómetros y rate gyros [28]. La descripción de este prototipo utilizado en el Laboratorio se refleja en uno de los anexos de este trabajo.

A partir de una situación en la que no existe el algoritmo de estimación, se hace una primera aproximación acerca del alcance de cada uno de los parámetros que necesita verificar el sistema de seguimiento. Con respecto a los desplazamientos verticales del chasis del vehículo, se puede asumir que la aceleración vertical del chasis no será mayor de $1g$. A esta se añade la aceleración, medida en los sensores debida a la gravedad. Las aceleraciones horizontales tampoco serán muy superiores a este valor, ya que estas fuerzas se obtienen como consecuencia de las fuerzas de histéresis y fricción sobre los neumáticos, que están limitadas a los valores en la frontera del círculo de fricción. Las velocidades lineales, en todo caso estarán por debajo de 30m/s.

La aplicación de estas metodologías a problemas de caracterización de la pérdida de estabilidad en vehículos automóviles se refleja en múltiples investigaciones, con frecuencia para la determinación de estados del sistema que no son medibles directamente [7], [8], [14], [15], [104], [105], [122].

4.2. Ecuaciones del estimador de Kalman

Se utilizarán las ecuaciones del filtro de Kalman para un sistema lineal. El sistema lineal es, en este caso, el chasis y los sensores del vehículo. El vector \mathbf{x}_k es el vector de estado en el instante k y describe el estado del proceso. El sistema se puede describir con las siguientes ecuaciones de estado y de medida

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{H}(t) \cdot \mathbf{x}_k\end{aligned}\tag{4.1}$$

No obstante, para homogeneizar la notación con aquella que se emplea habitualmente en los estimadores de Kalman, se cambiará el nombre de las matrices que describen el comportamiento del sistema. El estimador de Kalman además supone que sobre el sistema y sobre las medidas actúan ruidos, que se modelarán mediante las variables \mathbf{w} y \mathbf{v} . Las ecuaciones (4.1) quedan, entonces, de la siguiente forma:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}\tag{4.2}$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k\tag{4.3}$$

La ecuación (4.2) es la ecuación del proceso, y gobierna la evolución del mismo. La ecuación (4.3) es la ecuación de las medidas, e indica cual debería ser el vector de medidas obtenidas, conociendo el vector de estado \mathbf{x} . Por otra parte, \mathbf{w} y \mathbf{v} son el ruido del proceso y el ruido de las medidas respectivamente. El vector \mathbf{x} contiene, como se ha dicho ya, el estado del proceso, es decir, la mínima información que se requiere de él en ese instante para predecir el comportamiento futuro del sistema; está constituido por los siguientes elementos:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \\ q_1 \\ q_2 \\ T \end{bmatrix}\tag{4.4}$$

Estos elementos que componen el vector de estado son de forma detallada:

- $\mathbf{a}_i = (a_{xi}, a_{yi}, a_{zi})^T$ es el vector de aceleración lineal del origen de coordenadas local, referido al sistema de referencia inercial (fijo en tierra), en un determinado instante k . La integración doble de este vector, realizada en cada iteración fuera del filtro de Kalman, proporciona la velocidad y la posición del centro de gravedad del chasis del vehículo.
- $q_1 = (q_{1wi}, q_{1xi}, q_{1yi}, q_{1zi})^T$ es la cuaterna de orientación del chasis del vehículo: representa la rotación necesaria para llevar cualquier vector del sistema local desde la orientación que ocupaba en el instante inicial hasta la que

ocupa en el instante actual k , expresados ambos en el sistema de referencia inercial. La diferenciación doble de esta cuaterna proporciona la velocidad y la aceleración angulares del chasis. Si se supone el sistema de referencia inercial formado por los vectores $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ y que el sistema de referencia local es coincidente con el inercial el instante inicial, entonces el vector resultante (cuaterna pura) del producto

$$q_1 \otimes \mathbf{e}_x \otimes q_1^* \quad (4.5)$$

es el vector \mathbf{e}_x del sistema de referencia local en el instante actual, expresado en la base inercial. De forma análoga se podrían expresar los vectores $\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$. Por otra parte, q_1 también representa un cambio de base. La expresión

$$q_1^* \otimes \mathbf{x} \otimes q_1 \quad (4.6)$$

expresa el vector \mathbf{x} del sistema de referencia (base) inercial en la base local, que resulta de rotar los vectores de la base inercial mediante la ecuación (4.5).

- $q_2 = (q_{2w}, q_{2x}, q_{2y}, q_{2z})^T$ es la cuaterna de rotación incremental del chasis del vehículo. Describe el cambio de orientación que se produce en cualquier vector del chasis desde el instante k hasta el $k+1$, referidos ambos vectores al sistema de referencia local en el instante k .

Como en el punto anterior q_2 puede entenderse también como una cuaterna de cambio de base, es decir construir a partir de ella un operador de cuaternas de cambio de base análogo al utilizado en (4.6),

$$q_2^* \otimes \mathbf{x} \otimes q_2 \quad (4.7)$$

La anterior expresión se puede escribir también en notación matricial como:

$$q_2^* \otimes \mathbf{x} \otimes q_2 = \mathbf{Q}_2^{+T} \mathbf{Q}_2^- \mathbf{x}$$

representa el cambio de base necesario para expresar cualquier vector \mathbf{x} referido a la base local en el instante k , en la base local del instante $k+1$. Las cuaternas q_1 y q_1 pueden concatenarse para hacer el cambio de base de la inercial a la local en el instante $k+1$ de forma directa:

$$q_2^* \otimes q_1^* \otimes \mathbf{x} \otimes q_1 \otimes q_2 = (q_1 \otimes q_2)^* \otimes \mathbf{x} \otimes (q_1 \otimes q_2) = q_3^* \otimes \mathbf{x} \otimes q_3 \quad (4.8)$$

La cuaterna q_3 así obtenida representa la rotación necesaria para llevar cualquier vector del chasis desde el instante inicial hasta el instante $k+1$. Esto se utilizará en la fase de estimación del filtro de Kalman.

La notación matricial que corresponde a esta cuaterna q_3 es la siguiente:

$$q_3 = q_1 \otimes q_2 = \begin{bmatrix} q_{1w}q_{2w} - [\mathbf{q}_1]^T \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_1 q_{2w} + [q_{1w} \mathbf{U} + \tilde{q}_1] \mathbf{q}_2 \end{bmatrix}$$

T es la temperatura del interior del vehículo. Con suficiente aproximación, representa la temperatura a la que se encuentran los sensores inerciales instalados a bordo, y se utilizará para modelar con más precisión el comportamiento de los mismos.

La matriz del sistema se representa a continuación, de modo esquemático, mediante bloques:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{A}_{44} \end{bmatrix}$$

Se asume que los bloques 0 corresponden a matrices nulas, de la dimensión adecuada en cada caso. Los bloques no nulos corresponden a las siguientes submatrices:

- \mathbf{A}_{11} efectúa la predicción de la aceleración lineal (inercial) en función de la del instante anterior. En este caso, se supone que es constante: $\mathbf{A}_{11} = \mathbf{U}_{3 \times 3}$.
- \mathbf{A}_{22} realiza la predicción de la cuaterna q_1 en función de la orientación del chasis y de su velocidad angular:

$$q_{1,k+1} = q_{1,k} \otimes q_{2,k}$$

$$\mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} q_{2w} & -q_{2x} & -q_{2y} & -q_{2z} \\ q_{2x} & q_{2w} & q_{2z} & -q_{2y} \\ q_{2y} & -q_{2z} & q_{2w} & q_{2x} \\ q_{2z} & q_{2y} & -q_{2x} & q_{2w} \end{bmatrix}$$

- \mathbf{A}_{33} efectúa la estimación de la cuaterna q_2 en función de la información del instante anterior. q_2 contiene la información de la velocidad de rotación del chasis (local), y se supone que es constante, por lo que:

$$\mathbf{A}_{33} = \mathbf{U}_{4 \times 4}$$

- \mathbf{A}_{44} realiza la estimación de la temperatura en función de su valor actual. En este caso la estimación consiste simplemente en suponer que la temperatura no varía:

$$\mathbf{A}_{44} = \mathbf{U}$$

Construcción de la matriz \mathbf{H} de observación del sistema

La matriz \mathbf{H} de la ecuación de medidas, representada por bloques, es de la forma:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

$$\begin{bmatrix} a_{local} \\ m_{local} \\ r_{local} \\ T_{medida} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{H}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{H}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \\ q_1 \\ q_2 \\ T_{sist} \end{bmatrix}$$

Esta matriz se utiliza, en el filtro de Kalman, para obtener los valores que serían de esperar en los sensores, suponiendo que el sistema se encontrase en el estado definido por el vector \mathbf{x}_k . Esta estimación de la lectura de los sensores será utilizada, una vez que se compare con las lecturas reales de los sensores, para corregir la predicción y obtener, así, la estimación del vector de estado en el instante actual. En la confección de la matriz \mathbf{H} , así como en la de \mathbf{A} , se ha tenido en cuenta que la caracterización del estado del sistema se basa, fundamentalmente, en los sensores de aceleración y campo magnético, y se utiliza el resto de sensores para ayudar a eliminar los errores y los ruidos introducidos en el sistema. Los resultados de los productos de los bloques de la matriz de observación son los siguientes:

$$ac_{local} = \mathbf{H}_{11} \cdot a_i + \mathbf{H}_{12} \cdot q_1 \quad (4.9)$$

$$mg_{local} = H_{22} \cdot q_1 \quad (4.10)$$

$$rg_{local} = H_{33} \cdot q_2 \quad (4.11)$$

$$T_{medida} = H_{44} \cdot T_{sist} \quad (4.12)$$

Los bloques obtenidos, no nulos, de la matriz \mathbf{H} son los siguientes:

1. \mathbf{H}_{11} representa las operaciones de cuaternas necesarias para relacionar la aceleración del sistema con la aceleración medida, expresada ésta en coordenadas locales. Si se tiene en cuenta que los acelerómetros miden además parte de aceleración debida a la gravedad, obtener en coordenadas locales la aceleración del sistema supone, sobre la aceleración medida en locales, sustraer el término correspondiente a la cuaterna pura $g = [0 \ 0 \ 0 \ \gamma]^T = 0 + \mathbf{g}$. Este es el motivo por el que se considera el bloque \mathbf{H}_{12} . Ya que las magnitudes a, g del sistema se refieren a coordenadas inerciales, hay que aplicar además el operador de cuaternas que representa la rotación, o lo que es equivalente, el cambio de sistema de referencia de global a local para ambas magnitudes.

Como se ha mencionado, aunque parece más lógico considerar el operador cuaterna $\mathbf{q}_1^* \mathbf{v} \mathbf{q}_1$ y expresar el resultado del triple producto de cuaternas como el giro de un vector \mathbf{v} según la cuaterna unitaria \mathbf{q}_1 , así el resultado sería expresable también como el producto de una matriz 3×3 de rotación por el vector \mathbf{v} , en este caso interesa explicitar ac_{local} en función de a_i . Esto se puede lograr realizando los productos de cuaternas intermedios $q_1^* \otimes a_i$, y dejando este resultado intermedio expresado de la forma matriz 4×4 de coeficientes de q_1^* por vector columna 4×1 , multiplicando lo

anterior por a_i , cuaterna en forma de vector 4×1 .

$$\begin{aligned}
 a_{Clocal} &= a_{local} + g_{local} = \\
 &= H_{13} \cdot a_i + H_{14} \cdot q_1 = \\
 &= q_1^* \otimes a_i \otimes q_1 + q_1^* \otimes g \otimes q_1 = \\
 &= q_1^* \otimes a_i \otimes q_1 + \gamma(q_1^* \otimes e_z \otimes q_1)
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

El primer sumando de a_{Clocal} se puede escribir, entonces como:

$$\begin{aligned}
 a_{local} &= q_1^* \otimes a_i \otimes q_1 \rightarrow \\
 &\rightarrow (q_1^*)^{-1} a_{local} = a_i q_1
 \end{aligned}$$

y, escribiendo completas las expresiones matriciales,

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} q_{1wi} & q_{1xi} & q_{1yi} & q_{1zi} \\ -q_{1xi} & q_{1wi} & q_{1zi} & -q_{1yi} \\ -q_{1yi} & -q_{1zi} & q_{1wi} & q_{1xi} \\ -q_{1zi} & q_{1yi} & -q_{1xi} & q_{1wi} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_{wlocal} \\ a_{xlocal} \\ a_{ylocal} \\ a_{zlocal} \end{bmatrix} &= \\
 &= \begin{bmatrix} q_{1wi} & -q_{1xi} & -q_{1yi} & -q_{1zi} \\ q_{1xi} & q_{1wi} & q_{1zi} & -q_{1yi} \\ q_{1yi} & -q_{1zi} & q_{1wi} & q_{1xi} \\ q_{1zi} & q_{1yi} & -q_{1xi} & q_{1wi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{wi} \\ a_{xi} \\ a_{yi} \\ a_{zi} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

De donde, se puede despejar,

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} a_{wlocal} \\ a_{xlocal} \\ a_{ylocal} \\ a_{zlocal} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} q_{1wi} & q_{1xi} & q_{1yi} & q_{1zi} \\ -q_{1xi} & q_{1wi} & q_{1zi} & -q_{1yi} \\ -q_{1yi} & -q_{1zi} & q_{1wi} & q_{1xi} \\ -q_{1zi} & q_{1yi} & -q_{1xi} & q_{1wi} \end{bmatrix} \cdot \\
 &\cdot \begin{bmatrix} q_{1wi} & -q_{1xi} & -q_{1yi} & -q_{1zi} \\ q_{1xi} & q_{1wi} & q_{1zi} & -q_{1yi} \\ q_{1yi} & -q_{1zi} & q_{1wi} & q_{1xi} \\ q_{1zi} & q_{1yi} & -q_{1xi} & q_{1wi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{wi} \\ a_{xi} \\ a_{yi} \\ a_{zi} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Y, efectuando el producto de matrices, se llega a,

$$\begin{bmatrix} a_{wlocal} \\ a_{xlocal} \\ a_{ylocal} \\ a_{zlocal} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{22} & \kappa_{23} & \kappa_{24} \\ 0 & \kappa_{32} & \kappa_{33} & \kappa_{34} \\ 0 & \kappa_{42} & \kappa_{43} & \kappa_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{wi} \\ a_{xi} \\ a_{yi} \\ a_{zi} \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned}
\kappa_{22} &= 1 - 2(q_{1zi}^2 + q_{1yi}^2) \\
\kappa_{23} &= 2(q_{1xi}q_{1yi} + q_{1wi}q_{1zi}) \\
\kappa_{24} &= 2(q_{1xi}q_{1zi} - q_{1wi}q_{1yi}) \\
\kappa_{32} &= 2(q_{1xi}q_{1yi} - q_{1wi}q_{1zi}) \\
\kappa_{33} &= 1 - 2(q_{1zi}^2 + q_{1xi}^2) \\
\kappa_{34} &= 2(q_{1yi}q_{1zi} + q_{1wi}q_{1xi}) \\
\kappa_{42} &= 2(q_{1xi}q_{1zi} + q_{1wi}q_{1yi}) \\
\kappa_{43} &= 2(q_{1yi}q_{1zi} - q_{1wi}q_{1xi}) \\
\kappa_{44} &= 1 - 2(q_{1xi}^2 + q_{1yi}^2)
\end{aligned}$$

Esta matriz es la inversa de la matriz de rotación (coincide con la traspuesta por ser unitaria) porque es una matriz de cambio de base desde el sistema de referencia inercial al local. La submatriz inferior derecha es \mathbf{R}^T .

A continuación se desarrolla el segundo sumando de la expresión 4.13. En notación matricial se puede escribir:

$$\begin{aligned}
g_{local} &= \gamma(q_1^* \otimes \mathbf{e}_z \otimes q_1) = \\
&= \gamma q_1^* \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T q_1 = \\
&= \gamma q_1^* \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} q_{1wi} & q_{1xi} & q_{1yi} & q_{1zi} \end{bmatrix}^T = \\
&= \gamma \begin{bmatrix} q_{1zi} & q_{1yi} & -q_{1xi} & -q_{1wi} \\ -q_{1yi} & q_{1zi} & -q_{1wi} & q_{1xi} \\ q_{1xi} & q_{1wi} & q_{1zi} & q_{1yi} \\ q_{1wi} & -q_{1xi} & -q_{1yi} & q_{1zi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{1wi} \\ q_{1xi} \\ q_{1yi} \\ q_{1zi} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Entonces,

$$g_{local} = \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 2q_{1xi}q_{1zi} - 2q_{1wi}q_{1yi} \\ 2q_{1yi}q_{1zi} + 2q_{1wi}q_{1xi} \\ q_{1wi}^2 - q_{1xi}^2 - q_{1yi}^2 + q_{1zi}^2 \end{bmatrix}$$

A partir de estos resultados en cuaternas, se extraen las submatrices correspondientes a los cálculos de la parte vectorial tanto de la aceleración como de la gravedad.

2. El bloque \mathbf{H}_{22} relaciona la cuaterna \mathbf{q}_1 con las medidas a obtener del magnetómetro, a partir del estado actual, expresadas éstas en coordenadas locales, mg_{local} . Para esta predicción se supone que la orientación del campo magnético terrestre permanece constante en el entorno en el que

se mueve el sistema. La orientación del campo magnético en coordenadas locales viene dada por el ángulo α , que forma el campo magnético con respecto al campo gravitatorio g de la posición anterior. Luego el giro del campo magnético respecto a g se representa a través de la aplicación de una cuaterna que indica el giro de ángulo α alrededor del eje z :

$$\begin{aligned}
mg_{local} &= \eta (q_\alpha^* (q_1^* \mathbf{e}_z q_1) q_\alpha) = \\
&= \eta (q_1^* \cos \alpha \mathbf{e}_x q_1) + \eta (q_1^* \sin \alpha \mathbf{e}_z q_1) = \\
&= \eta \cos \alpha \begin{bmatrix} q_{1xi} & -q_{1wi} & q_{1zi} & -q_{1yi} \\ q_{1wi} & q_{1xi} & -q_{1yi} & -q_{1zi} \\ -q_{1zi} & q_{1yi} & q_{1xi} & -q_{1wi} \\ q_{1yi} & q_{1zi} & q_{1wi} & q_{1xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{1wi} \\ q_{1xi} \\ q_{1yi} \\ q_{1zi} \end{bmatrix} + \\
&\quad + \eta \sin \alpha \begin{bmatrix} q_{1zi} & q_{1yi} & -q_{1xi} & -q_{1wi} \\ -q_{1yi} & q_{1zi} & -q_{1wi} & q_{1xi} \\ q_{1xi} & q_{1wi} & q_{1zi} & q_{1yi} \\ q_{1wi} & -q_{1xi} & -q_{1yi} & q_{1zi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{1wi} \\ q_{1xi} \\ q_{1yi} \\ q_{1zi} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

3. El bloque \mathbf{H}_{33} relaciona la predicción de la lectura de los *rate-gyros* expresada en coordenadas locales, con la velocidad de rotación actual. Para representar la velocidad de rotación del sistema se utiliza la cuaterna \mathbf{q}_2 .

$$\begin{aligned}
rg_{local} &= \mathbf{q}_2^* \otimes \mathbf{r}g_{local_ant} \otimes \mathbf{q}_2 \\
\mathbf{H}_{33} &= \begin{bmatrix} 2/\Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 2/\Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 2/\Delta t \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

4. El bloque \mathbf{H}_{44} relaciona la temperatura del sistema con la temperatura medida. En una primera aproximación, se van a suponer iguales, por lo que el bloque \mathbf{H}_{44} será la matriz identidad \mathbf{U}_1 . Estas ecuaciones corresponden a la etapa de predicción del filtro del Kalman.

Los operadores de cuaternas de cambio de sistema de referencia y operador de rotación se pueden considerar conjugados el uno respecto del otro: el convenio utilizado es:

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_{local} &= q^{-1} \otimes \mathbf{r} \otimes q \\
\mathbf{p}_{rotado} &= q \otimes \mathbf{p} \otimes q^{-1}
\end{aligned}$$

donde q representa una cuaterna unitaria de rotación, \mathbf{r} una magnitud vectorial expresada respecto de un sistema de referencia inercial, \mathbf{b}_{local} representa en cuaternas la misma magnitud vectorial en coordenadas locales, \mathbf{p}_{rotado} es la representación en cuaternas de la cuaterna después de aplicar la rotación que indica la cuaterna unitaria q . Como se ha dicho, el resultado en términos de matrices será la matriz traspuesta.

La expresión $\mathbf{z}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$ está relacionada linealmente con el vector de estado. Sin embargo, las componentes correspondientes a los magnetómetros y *rate gyros* no están relacionadas linealmente con el vector de estado. La relación no lineal es bastante complicada, como se ha desglosado en las ecuaciones anteriores. Como consecuencia, el filtro de Kalman diseñado con esta ecuación de salida podría ser computacionalmente ineficiente. Una mejora en el diseño del filtro está en utilizar un método para operar las medidas del acelerómetro y las del magnetómetro.

Esta cuaterna resultante se combina con las medidas de velocidad angular, y se presentan al filtro de Kalman como las medidas del sistema. Haciendo esto, la salida de las ecuaciones del filtro de Kalman es lineal y se simplifica el diseño del mismo. Es posible una implementación de orden reducido del método de Gauss Newton.

4.3. Eficiencia del filtro propuesto

Con el fin de probar el algoritmo se ha diseñado un experimento numérico. Se trata de alimentar el filtro con los datos obtenidos en la simulación de la dinámica de un mecanismo, para comprobar posteriormente que el filtro es capaz de reproducir la evolución del mismo.

Se ha elegido un péndulo doble que se mueve en un plano vertical sometido a la acción de la gravedad. Las uniones son ideales; esto es, no hay rozamiento.

El sistema de referencia inercial está situado sobre la esfera de la superficie terrestre: el eje X es tangente al meridiano local y apunta al norte magnético; el eje Y apunta hacia el este en la dirección del paralelo local y el eje Z se orienta hacia al centro de la tierra (Fig. 4.1).

El sistema de referencia local es tal que coincide con el global cuando el mecanismo está en reposo y equilibrio (los dos elementos del péndulo están alineados y apuntan hacia el centro de la tierra).

Habida cuenta de que la evolución del mecanismo se produce en un sólo plano, para tratar de generalizar las posibles conclusiones, se ha repetido el experimento para los planos XZ e YZ (ver figuras 4.2 y 4.3).

El modelo matemático del movimiento se deriva de aplicar las ecuaciones de Lagrange que, si se eligen como grados de libertad los ángulos φ_1 y φ_2 que forman las barras con la vertical (figura 4.4), llevan a un sistema de ecuaciones



Figura 4.1: Representación del sistema de coordenadas inercial y los vectores de gravedad e intensidad del campo magnético en la superficie de la tierra.

diferenciales que tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m_1 L_1^2 + I_1 + 4m_2 L_1^2 & 2m_2 L_1 L_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ 2m_2 L_1 L_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) & m_2 L_2^2 + I_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{Bmatrix} = \\ & = \begin{Bmatrix} -2m_2 L_1 L_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - (m_1 + 2m_2) g L_1 \sin \varphi_1 \\ 2m_2 L_1 L_2 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2 g L_2 \sin \varphi_2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

donde L_1 y L_2 , m_1 y m_2 , I_1 e I_2 son las longitudes, masas e inercias de cada una de las barras.

El péndulo doble parte del reposo con valores iniciales de φ_1 y φ_2 iguales a $\pi/2$ (Fig. 4.5). La integración numérica de estas ecuaciones permite conocer los valores de φ_1 y φ_2 a lo largo del tiempo. Se estudia la evolución del péndulo durante los 8 s siguientes al instante inicial. La integración se efectúa mediante la regla trapezoidal con un tamaño de etapa de 10^{-3} s.

Se supone que en el centro de gravedad del elemento 2 (Fig. 4.5) se han instalado un magnetómetro y un acelerómetro triaxiales y un dispositivo para medir las velocidades angulares en los tres ejes (*rate-gyro*). De esta manera, la simulación proporciona, para cada instante de tiempo (equivaldría a una frecuencia de muestreo de 1000 Hz), las aceleraciones, las velocidades angulares y el vector campo magnético, supuestamente medidos por los sensores y todos ellos referidos al sistema de referencia local.

Hay que hacer notar que el filtro propuesto está diseñado de manera que la

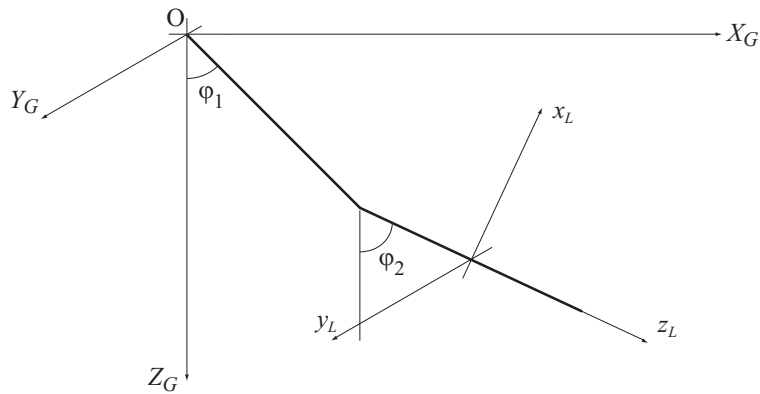


Figura 4.2: Evolución del Péndulo doble en el plano XZ .

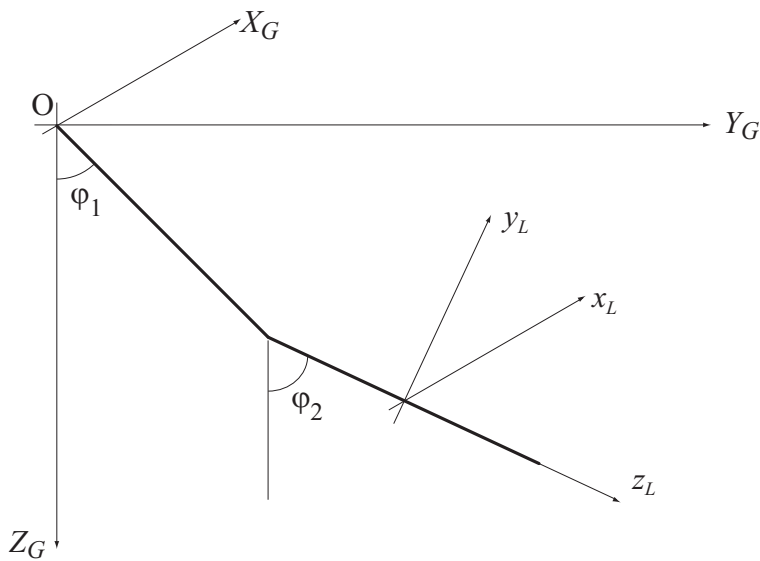


Figura 4.3: Evolución del Péndulo doble en el plano YZ .

orientación se obtiene primariamente en base a la medida del campo magnético y que, tanto las aceleraciones como las velocidades angulares son de alguna manera complementarias. Bien es verdad que, según la teoría de Kalman, la mezcla de toda la información proporcionada por los sensores conduce, al ser el filtro lineal, a un resultado óptimo [51].

Si se tiene en cuenta la forma del campo magnético y la orientación del sistema inercial (Fig. 4.1), el vector \mathbf{H} que lo representa no tiene componente según el eje Y global y además el ángulo α que forman sobre el plano XZ el vector de la gravedad \mathbf{G} y el del campo magnético \mathbf{H} se puede considerar constante¹.

¹En realidad el campo magnético en un mismo lugar varía continuamente en función de los distintos movimientos de la tierra. Tampoco la gravedad tiene un valor único constante

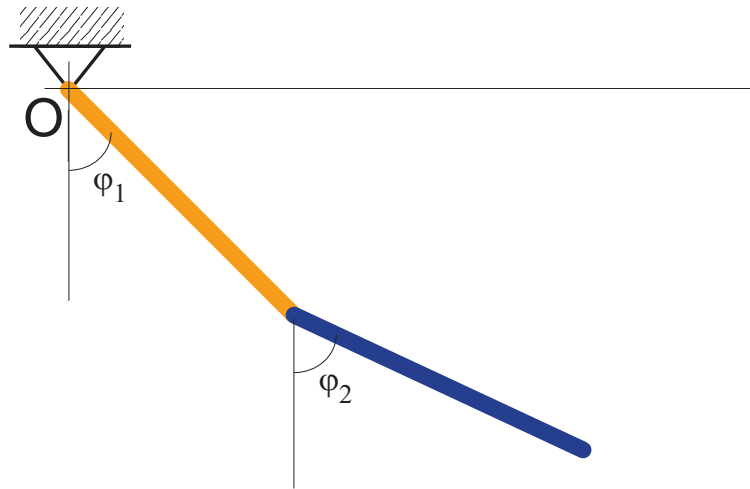


Figura 4.4: Evolución del péndulo doble

Es importante resaltar que la evolución del péndulo en el plano XZ , produce una medida del campo magnético en coordenadas locales (lo que ve el magnetómetro) que sólo tiene componentes según los ejes x y z ; o lo que es lo mismo, el magnetómetro debería proporcionar un valor nulo para la componente y del campo magnético en cada muestra. Además, lógicamente, sólo habrá velocidad angular en el eje Y (local y global que, en este caso, coinciden a lo largo de toda la simulación).

La misma forma de razonar lleva a la conclusión de que la evolución del péndulo doble en el plano YZ , produce una medida del campo magnético en el sistema de referencia local (lo que lee el magnetómetro) que es diferente en cada instante de tiempo para las tres componentes mientras haya movimiento. Respecto a las velocidades angulares, en este caso sólo habrá componente según los ejes X , tanto local como global.

Así pues, aunque aparentemente iguales, ambas simulaciones difieren sustancialmente. En la primera, la no existencia de velocidades angulares en los ejes x y z refuerza el hecho de que el campo magnético no tenga componente según los ejes Y e y . Sin embargo, en el segundo caso, aunque haya también dos componentes nulas de la velocidad angular, el campo magnético tienen componentes según los tres ejes y resulta *a priori*, al menos aparentemente, más propenso a que la reconstrucción del movimiento mediante el filtro refleje oscilaciones fuera

en todos los puntos de la superficie de la tierra. Sin embargo, estas variaciones son tan lentas que son despreciables en el cálculo.

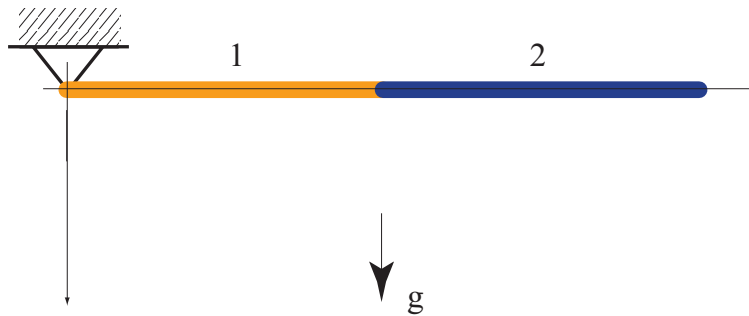


Figura 4.5: Péndulo doble en el instante inicial.

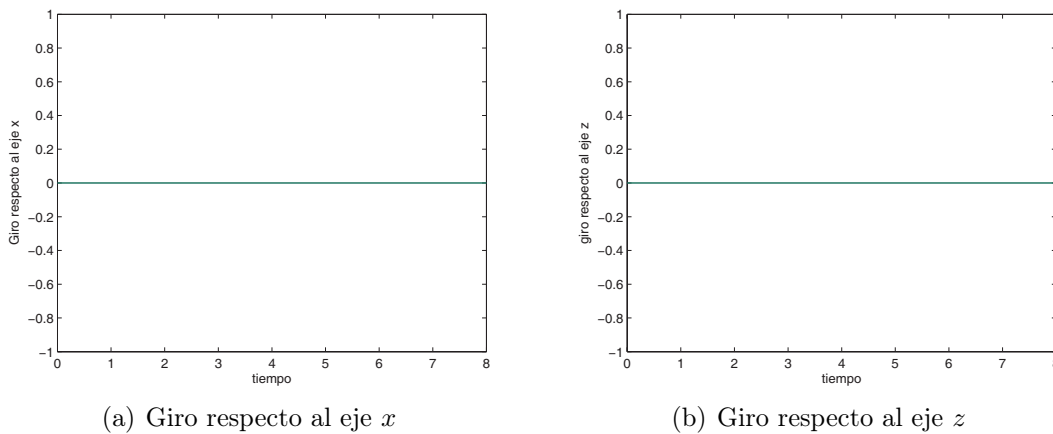


Figura 4.6: Simulación en el plano XZ - Giros *fuera* del plano.

del plano en el que evoluciona realmente el péndulo.

La adecuación entre los resultados obtenidos por integración de las ecuaciones diferenciales y mediante el filtrado de los datos provenientes de los sensores se resume en las figuras 4.6 a 4.9, que representan la diferencia entre los ángulos girados respecto a cada uno de los ejes² procedentes de la simulación y obtenidos mediante el filtrado.

En el primer caso, cuando la evolución del péndulo se produce en el plano XZ (figura 4.2), los ángulos realmente girados respecto a los ejes X y Z son iguales a cero (el péndulo no se sale del plano). La reconstrucción del movimiento mediante el filtrado de datos conduce efectivamente a un movimiento

²En el caso de la dinámica de vehículos corresponderían al *balanceo* (*roll*), *cabeceo* (*pitch*) y *guiñada* (*yaw*).

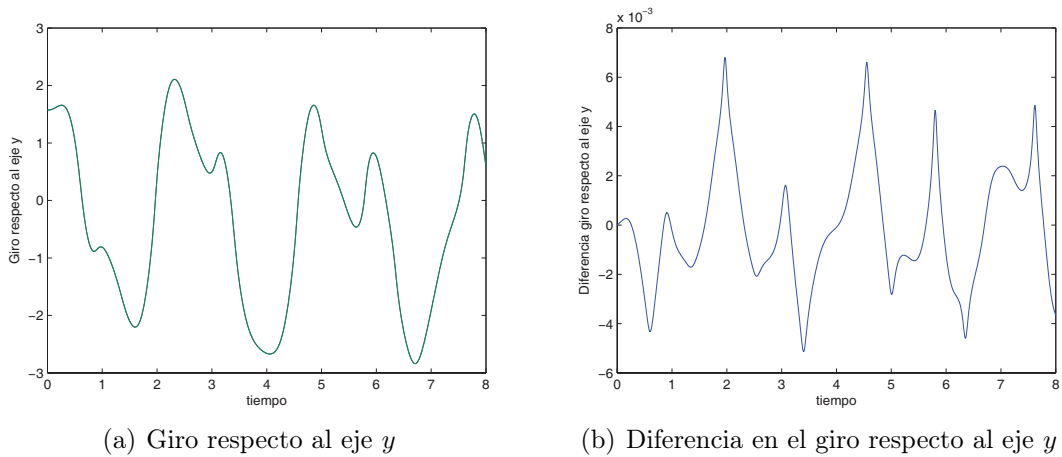


Figura 4.7: Simulación en el plano XZ - Giro en el plano.

completamente contenido en el plano tal como acreditan las figuras 4.6(a) y 4.6(b). Además, la figura 4.7(a) muestra la aparente coincidencia entre los valores del ángulo φ_2 (giro alrededor del eje Y) procedentes de la integración y el filtrado (las gráficas se superponen). Hace falta calcular la diferencia del valor de este ángulo simulado y reconstruido mediante el filtro (figura 4.7(b)) para comprobar que difieren ligeramente (en el orden de las milésimas de radián).

En el segundo caso (figura 4.3), cuando la simulación del movimiento del péndulo se realiza en el plano YZ (giro respecto al eje X), los resultados difieren ligeramente. Tal como se había previsto, el hecho de que el campo magnético medido tenga componentes según los tres ejes provoca que, en la reconstrucción mediante filtrado, aparezcan pequeñas oscilaciones fuera del plano, tal como se aprecia en las figuras 4.8(a) y 4.8(b). Estos giros fuera del plano son pequeños en términos absolutos, porque se comparan frente a cero; en concreto, del orden de 10^{-5} rad. Una cantidad tan pequeña es atribuible tanto a la propia naturaleza de la aproximación que entraña el filtro, como a los posibles errores numéricos que se derivan de los cálculos efectuados.

Nuevamente, no hay una diferencia apreciable a simple vista entre el ángulo φ_2 (en este caso el giro alrededor de X) procedente de la integración de las ecuaciones de la dinámica y el obtenido mediante el filtro propuesto (figura 4.9(a)). Para poder apreciar esa discrepancia, que efectivamente existe, hay que recurrir a representar la diferencia entre el ángulo de la simulación y el calculado por filtrado de los datos (figura 4.9(b)). Como en el caso anterior, los errores o discrepancias están en el orden de la milésima de radián.

Estos resultados permiten adelantar algunas conclusiones sobre el funcionamiento del filtro propuesto. Como se ha dicho, el filtro determina la orientación

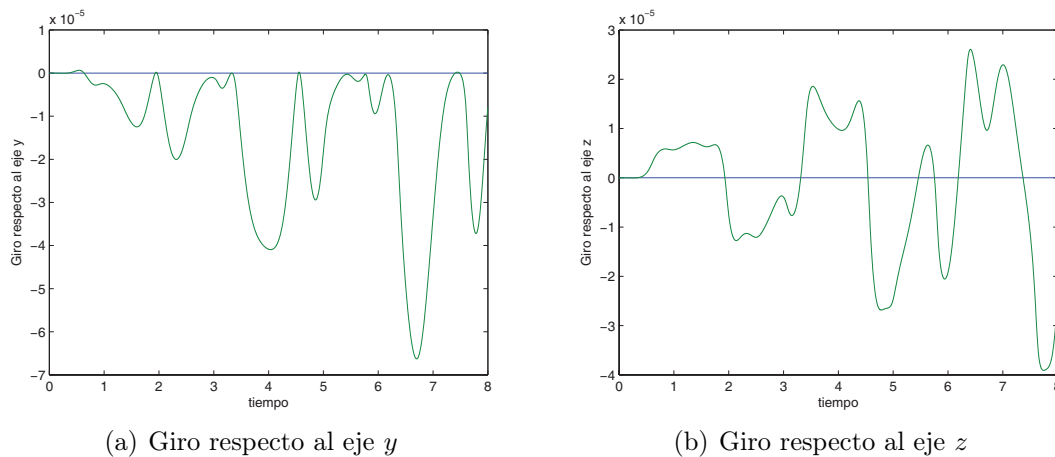


Figura 4.8: Simulación en el plano YZ - Giros *fuera* del plano.

basado principalmente en la medida proporcionada por el magnetómetro triaxial. Las posibles indeterminaciones de los giros alrededor del eje del campo magnético se resuelven con la información sobre aceleraciones y velocidades angulares. De ahí que el filtro no tenga un comportamiento *tan bueno*, en términos de error de estimación, en el segundo caso. Así y todo, la adecuación entre resultados simulados y obtenidos mediante filtrado son perfectamente concordantes.

No resulta complicado suponer que en un caso real, a pesar de que el movimiento sólo se produjera en un plano, podrían aparecer velocidades, aceleraciones o componentes del campo magnético *medidas* por los sensores que indicasen movimientos fuera ese plano. Por ejemplo, en el caso que se expone, cuando el movimiento se desarrolla en el plano XZ , los *rate gyros* sólo pueden devolver medida no nula de la componente en el eje y . Sin embargo, debido a la tecnología de estos dispositivos, cabe la posibilidad de *leer* valores no nulos en los otros dos ejes debidos a *imperfecciones* de la señal. Este mismo razonamiento sería válido también para los acelerómetros y el magnetómetro. En general, los valores que se obtienen de los sensores están, pues, contaminados por cierto *ruido*.

La teoría del filtro de Kalman se basa en suponer que las características espectrales del proceso que se filtra son conocidas. Se presupone que todas las fuentes de ruido son *ruido blanco*³ y *Gausiano* [68]. Suponer que los ruidos sean blancos implica exigir que sean incorrelados en el tiempo, y que tengan igual potencia en todas las frecuencias⁴. Además, admitir que sean gaussianos implica

³Aunque no es propiamente una referencia sobre el *ruido blanco*, se puede encontrar una descripción detallada en el manual sobre el filtro de Kalman que publicaron Welch y Bishop como guía para el *Course 8* en SIGGRAPH 2001 [112].

⁴Igual potencia (no nula) en todas las frecuencias implicaría potencia infinita. Aunque esto no es posible, se puede aceptar que en realidad se trata de *ruido gaussiano coloreado*, que

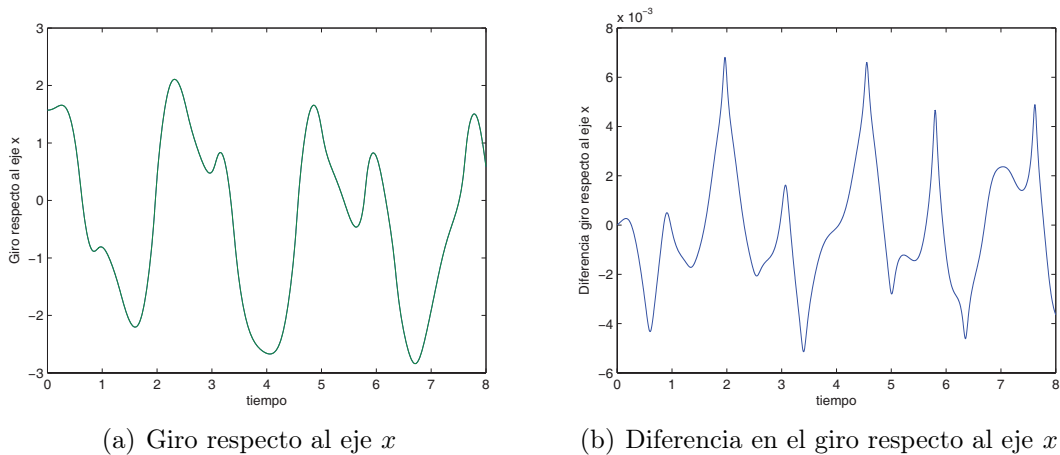


Figura 4.9: Simulación en el plano YZ - Giro en el plano.

presuponer que su función de densidad tiene la forma de una *Campana de Gauss* y su función de distribución es una Normal⁵, que estará perfectamente definida si se conocen la media y la desviación típica.

En resumen, es necesario admitir que todos los ruidos, tanto los de modelado, como los de adquisición o filtrado posterior, son blancos, gaussianos, de media nula y desviación típica conocida.

Atendiendo a estas consideraciones, para tratar de simular de una manera más precisa los resultados que se obtendrían en un caso real, se añade ruido blanco a las supuestas medidas de los sensores obtenidas mediante el proceso de integración de la evolución del péndulo doble.

Deibe [28] caracterizó las medidas de un acelerómetro, un *rate-gyro* y un magnetómetro en los tres ejes. En el Apéndice C se muestran las gráficas de dispersión en función de la temperatura y el rango de la magnitud que mide cada uno de ellos. A modo de resumen, en la tabla 4.1 se recogen las varianzas máximas de la desviación de las medidas de estos sensores según su tipo, para

tiene igual potencia en un rango de frecuencias finito. De todas formas, si se tiene en cuenta que cualquier sistema por el que se haga pasar una señal tendrá una respuesta en frecuencia limitada –se representaría mediante un *filtro paso banda*–, considerar que se trata de *ruido gaussiano coloreado*, o de *ruido blanco* que ha atravesado un sistema con una respuesta en frecuencia limitada, resulta equivalente en este caso.

⁵Tampoco esto supone una restricción severa en cuanto a la aplicabilidad de los filtros de Kalman a problemas reales. Por un lado, el *Teorema del Límite Central* permite constatar que la distribución Normal es la que se produce con más frecuencia (de ahí su nombre). Por otra parte, aún cuando se desconozca la naturaleza de los ruidos, o no sea posible caracterizarlos, la Normal es siempre la mejor opción, ya que permite modelar la señal conociendo únicamente su media y desviación típica; esto es, los estadísticos de primer y segundo orden. En una buena parte de los casos, estos datos son los únicos que se pueden obtener empíricamente.

Sensor	Eje	Varianza máxima
<i>Rate-gyro</i>	eje x	0,0225
	eje y	0,0289
	eje z	0,01
Acelerómetro	eje x	0,0676
	eje y	0,04
	eje z	0,059
Magnetómetro	eje x	0,0016
	eje y	0,0018
	eje z	0,0015

Tabla 4.1: Varianzas máximas en la medida de los sensores

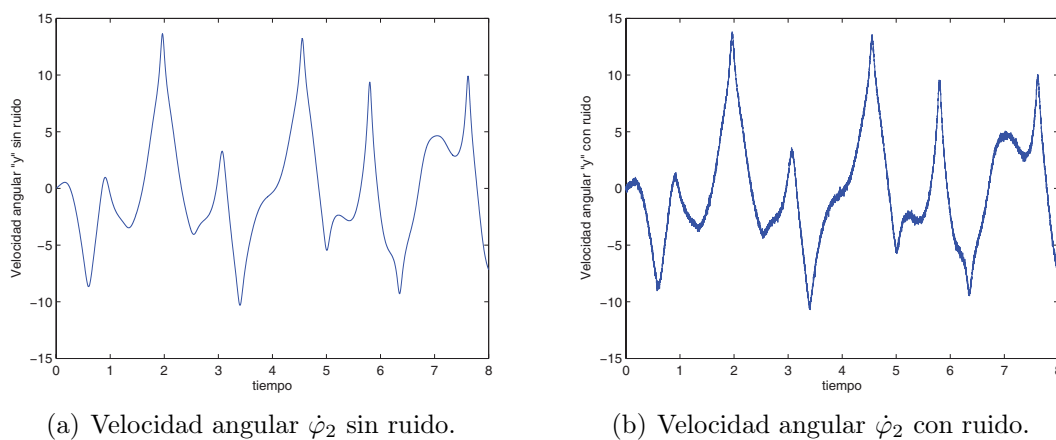


Figura 4.10: Comparación de las velocidades angulares $\dot{\varphi}_2$ antes y después de añadir el ruido blanco.

cada uno de los ejes, resultantes en el experimento de caracterización.

La *cantidad de ruido* añadido a la medida de cada sensor es la que corresponde a la varianza máxima de su desviación. De esta manera, supuestamente se alimenta el filtro con los datos más *contaminados* que proporcionaría cada uno de los sensores –los que proviniesen de las peores condiciones de trabajo posibles en cuanto a temperatura y rango de funcionamiento–.

Para ilustrar gráficamente el efecto del ruido se muestra la figura 4.10, que representa la velocidad angular en el eje Y ($\dot{\varphi}_2$) obtenida en la simulación en el plano XZ antes y después de añadirle el ruido blanco. En la misma simulación y para abundar en la idea de lo que supone *ensuciar* una señal al añadirle el ruido, en la figura 4.11 se compara el valor que debería proporcionar el sensor que mide la velocidad angular alrededor del eje X (debería ser cero) con la

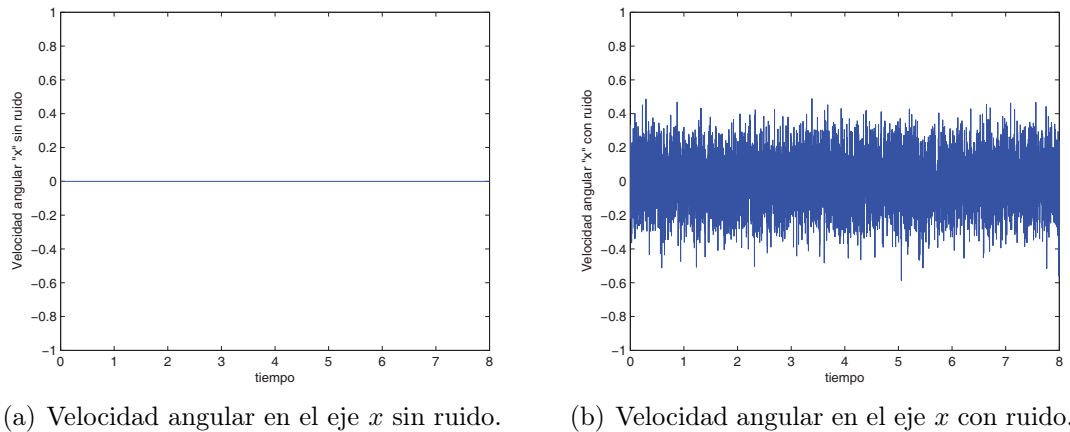


Figura 4.11: Muestra de una señal que sólo contiene ruido.

que realmente mediría, caracterizada por la varianza de la desviación en sus medidas.

Una vez *ensuciadas* todas las señales, se repiten nuevamente ambos experimentos y se representan las diferencias entre los ángulos obtenidos mediante simulación y filtrado.

Los resultados de la simulación en el plano XZ se representan en las figuras 4.12 y 4.13. Los que corresponden al plano YZ en las figuras 4.14 y 4.15.

A la vista de estos resultados, se pueden extraer algunas conclusiones:

1. En primer lugar hay que decir que el comportamiento del filtro, en lo que se refiere a la fidelidad para reconstruir el movimiento y, por tanto, a determinar la posición en base a la información proporcionada por unos sensores caracterizados por su varianza es muy buena. En este sentido, las figuras 4.13(a) y 4.15(a) representan el ángulo φ_2 obtenido por integración y mediante filtrado, cuando el movimiento se da en el plano XZ y cuando lo hace en el plano XY , respectivamente. A simple vista no se puede apreciar la diferencia entre ambos. Hay que recurrir como se ha hecho en el paso previo, cuando no había ruido, a representar la diferencia entre los ángulos obtenidos por integración y con el filtro propuesto (figuras 4.13(b) y 4.15(b)).
2. Los errores máximos absolutos entre los valores procedentes de la simulación y del filtro están por debajo de las dos décimas de radián (en trono a $1,15^\circ$) y,
3. Los *movimientos prohibidos* máximos fuera del plano, que ahora aparecen tanto en la simulación en el plano XZ como en el YZ , están también en

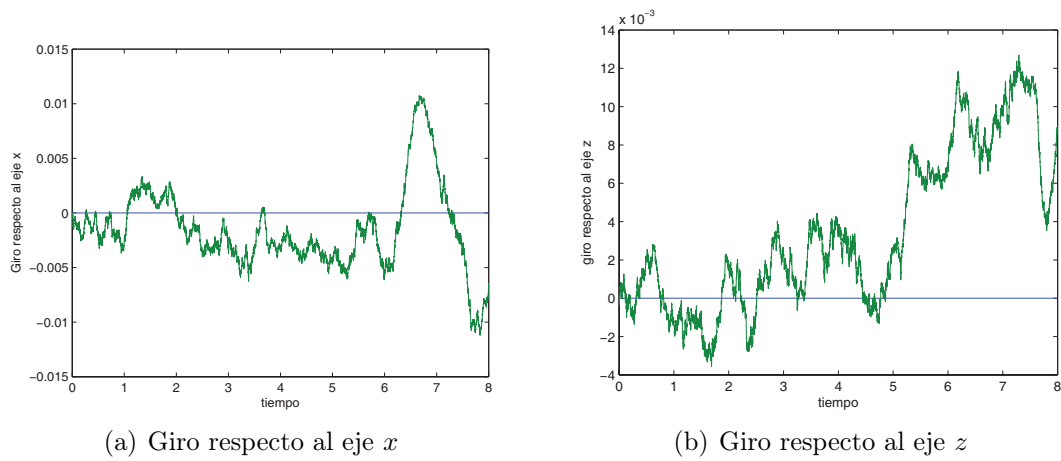
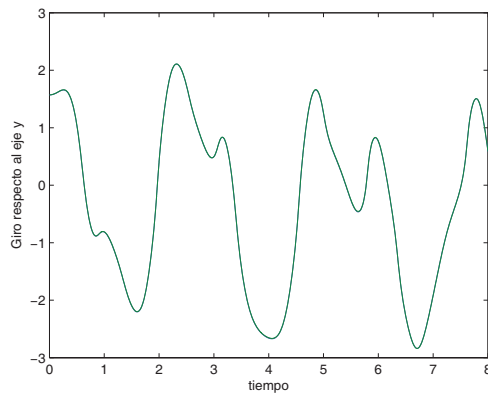
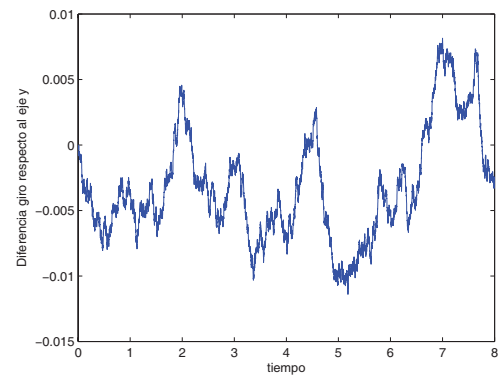
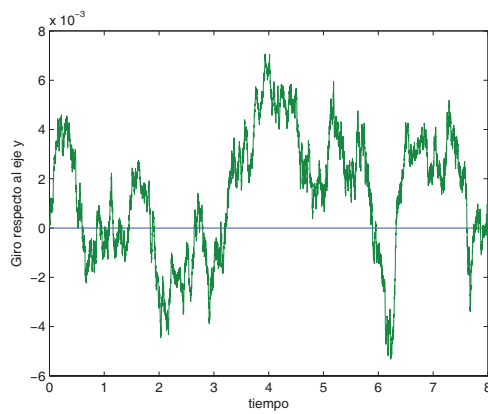
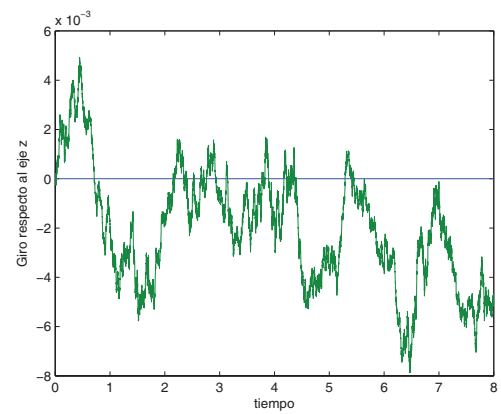
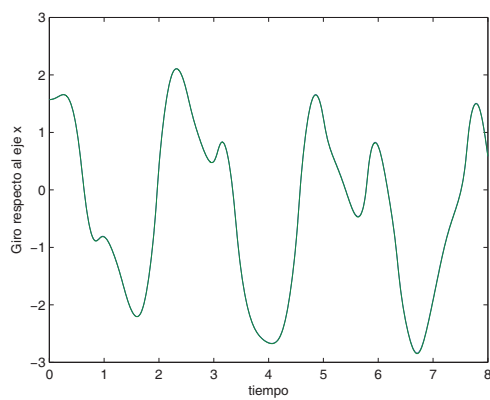
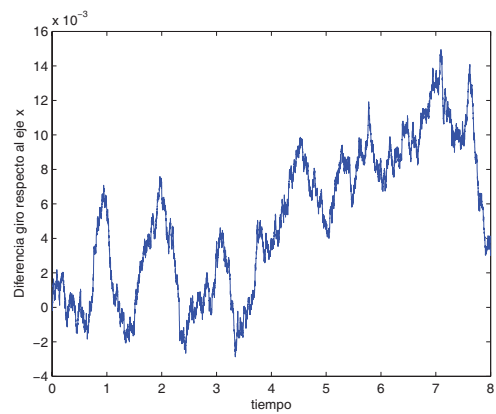


Figura 4.12: Simulación en el plano XZ - Giros *fuera* del plano.

torno a las dos décimas de radián y se aprecia que tienen un carácter más bien oscilatorio en torno al cero que una tendencia creciente o decreciente que pueda provocar la divergencia del filtro.

(a) Giro respecto al eje y (b) Diferencia en el giro respecto al eje y **Figura 4.13:** Simulación en el plano XZ - Giro en el plano.(a) Giro respecto al eje y (b) Giro respecto al eje z **Figura 4.14:** Simulación en el plano YZ - Giros *fuera* del plano.

(a) Giro respecto al eje x (b) Diferencia en el giro respecto al eje x **Figura 4.15:** Simulación en el plano YZ - Giro en el plano.

Capítulo 5

Conclusiones y futuras líneas de investigación

5.1. Conclusiones

En este trabajo se presenta una nueva formulación del Filtro de Kalman para la determinación de la orientación que tiene como características más reseñables:

- El filtro es lineal (y variable) y, por tanto, según la teoría de Kalman es óptimo: obtiene la mejor estimación posible dentro de las limitaciones del modelo que se proponga,
- Está formulado en cuaternas y, en consecuencia,
 - la evaluación de funciones trigonométricas de las variables de estado, exigidas por otras formas tradicionales de expresar la orientación de un sólido en el espacio (ángulos de Euler, parámetros de Euler, cosenos directores, etc.) es sustituida por operaciones algebraicas, con la consiguiente mejora en efectividad,
 - la sustitución de las funciones trigonométricas por operaciones algebraicas es lo que posibilita que el filtro sea lineal,
 - no existen las singularidades propias de esas otras formas de expresar la orientación de un sólido en el espacio y, además,
 - el error en la determinación de la orientación es homogéneo.
- En términos comparativos, la linealidad conduce a una eficiencia computacional mayor que la de otras soluciones tales como los filtros extendidos (EKF) o los *sigma point* (SPKF).

- Se ha comprobado numéricamente la eficacia del filtro propuesto con resultados satisfactorios tanto en lo que se refiere a la exactitud como a la precisión y a la estabilidad.

5.2. Futuras líneas de investigación

A partir del trabajo expuesto en esta Tesis Doctoral se pueden apuntar algunas nuevas líneas de investigación que lo complementen. Entre ellas, quizá las más destacables son:

- Elaborar un protocolo de pruebas que permita comparar la exactitud, precisión y estabilidad del filtro propuesto frente a otras formulaciones tales como los EKF ó SPKF.
- Estudiar la posibilidad de ampliar el vector de estado de manera que se incluyan otras variables que describan el estado dinámico de un automóvil (velocidad de las ruedas, posición de suspensiones y dirección, etc.), sin que se pierda la linealidad del filtro.
- Desarrollar aplicaciones en diferentes ámbitos (automoción, navegación aérea o marítima, espacio, etc) basadas en la estimación de la orientación del filtro propuesto.
- Poner a punto una plataforma experimental de pruebas que permita validar los resultados.

Apéndice A

Álgebra de las cuaternas

A.1. Ecuaciones en cuaternas

Se puede estudiar una cuaterna α como una combinación lineal de un escalar a_0 y un vector espacial \mathbf{a} :

$$\alpha = a_0 \oplus \mathbf{a} \tag{A.1}$$

Si a_0 es nulo, α es un número imaginario puro y recibe el nombre de cuaterna vectorial. Cuando $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, α es un número real y recibe el nombre de cuaterna escalar. Como se puede observar, tanto los escalares como los vectores espaciales son cuaternas, y constituyen subespacios de las cuaternas. Se define la cuaterna conjugada de α , y se notará por α^* , negando la parte vectorial:

$$\alpha^* = a_0 - \mathbf{a}$$

Para simplificar la utilización de las ecuaciones, es conveniente representar las cuaternas en forma matricial. La representación matricial (vector columna) de una cuaterna arbitraria α respecto a su base $(1, i, j, k)$ es simplemente la colección de sus parámetros:

$$\alpha = [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3]^T = [a_0 \quad \mathbf{a}^T]^T$$

Donde el superíndice T indica la traspuesta de la matriz. (dentro de una matriz la notación en minúscula negrita significa la parte vectorial de una cuaterna)

A.2. Álgebra de cuaternas

Suma y resta: se definen para dos cuaternas α, β , en forma matricial, como

$$\alpha \pm \beta = [a_0 \pm b_0, a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3]^T$$

La suma y resta de cuaternas cumplen las propiedades asociativa y conmutativa.

Multiplicación \otimes : se define como

$$\alpha \otimes \beta = (a_0 \oplus \mathbf{a}) \otimes (b_0 \oplus \mathbf{b}) = a_0 \otimes b_0 + a_0 \otimes \mathbf{b} + b_0 \otimes \mathbf{a} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$$

Donde los productos de cuaternas escalar-escalar y escalar-vector, se definen respectivamente de la misma forma que los productos entre escalares y escalar vector en un espacio vectorial, es decir $a_0 \otimes b_0 = a_0 b_0$, $a_0 \otimes \mathbf{b} = a_0 \mathbf{b}$, $b_0 \otimes \mathbf{a} = b_0 \mathbf{a}$

Se define el producto de cuaternas vector-vector como,

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

donde las operaciones \cdot y \wedge definen el producto escalar y el producto vectorial en la estructura de los espacios vectoriales. En expresión matricial, se puede separar parte escalar y parte vectorial, reescribiendo de la forma siguiente:

$$\alpha \otimes \beta = \begin{bmatrix} a_0 b_0 - \mathbf{a}^T \mathbf{b} \\ \mathbf{a} b_0 + (a_0 \mathbf{U} + \tilde{\mathbf{a}}) \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 a_0 - \mathbf{b}^T \mathbf{a} \\ \mathbf{b} a_0 + (b_0 \mathbf{U} - \tilde{\mathbf{b}}) \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

donde \mathbf{U} es la matriz identidad de orden tres, y

$$\tilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si una matriz es el resultado del producto de otras dos, se puede factorizar la representación matricial de ese resultado. Sea $\gamma = \alpha \otimes \beta$, con $\gamma = c_0 \oplus \mathbf{c}$; al factorizar en dos matrices, una con términos en α y otra con elementos en términos de β , se obtiene

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & -\mathbf{a}^T \\ \mathbf{a} & a_0 \mathbf{U} + \tilde{\mathbf{a}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 & -\mathbf{b}^T \\ \mathbf{b} & b_0 \mathbf{U} - \tilde{\mathbf{b}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \mathbf{a} \end{bmatrix}$$

La multiplicación de cuaternas es asociativa y distributiva con respecto a la suma y resta, pero no conmutativa. En la expresión anterior, las matrices se podrían conmutar simplemente con un cambio de signo en la submatriz inferior derecha. Esta propiedad se utiliza para la siguiente notación compacta. Sea

$$\overset{+}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_0 & -\mathbf{a}^T \\ \mathbf{a} & a_0 \mathbf{U} + \tilde{\mathbf{a}} \end{bmatrix}, \text{ y } \overset{-}{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} b_0 & -\mathbf{b}^T \\ \mathbf{b} & b_0 \mathbf{U} - \tilde{\mathbf{b}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

donde los símbolos '+' y '-' utilizados en $\overset{+}{\mathbf{A}}$, y corresponden a los '+' y '-' adjuntos a las matrices $\tilde{\mathbf{a}}$ y $\tilde{\mathbf{b}}$ respectivamente. También se pueden considerar '+' y '-' como operadores matemáticos que transforman un vector de cuatro componentes α en matrices de tamaño cuatro por cuatro, de la forma $\overset{+}{\mathbf{A}}$ y $\overset{-}{\mathbf{A}}$, respectivamente. Con esta notación, la propiedad conmutativa se puede expresar de forma compacta como:

$$\gamma = \overset{+}{\mathbf{A}}\beta = \overset{-}{\mathbf{B}}\alpha$$

Una aplicación directa de la propiedad anterior es la multiplicación de tres cuaternas en forma matricial. La triple multiplicación, $\alpha \otimes \gamma \otimes \beta$ se puede escribir como:

$$\overset{+}{\mathbf{A}}\overset{+}{\mathbf{C}}\beta = \overset{+}{\mathbf{A}}\overset{-}{\mathbf{B}}\gamma, \text{ o } \overset{+}{\mathbf{A}}\overset{+}{\mathbf{C}}\beta = \overset{-}{\mathbf{B}}(\overset{+}{\mathbf{C}}\gamma)$$

de donde se deduce que

$$\overset{+}{\mathbf{A}}\overset{-}{\mathbf{B}} = \overset{-}{\mathbf{B}}\overset{+}{\mathbf{A}}$$

Estos resultados se puede generalizar de forma que

$$\begin{aligned} \overset{+}{\mathbf{A}}_1 \overset{+}{\mathbf{A}}_2 \dots \overset{+}{\mathbf{A}}_{n-1} \alpha_n &= \overset{-}{\mathbf{A}}_n \overset{-}{\mathbf{A}}_{n-1} \dots \overset{-}{\mathbf{A}}_2 \alpha_1 = \\ &= \left(\overset{+}{\mathbf{A}}_1 \overset{+}{\mathbf{A}}_2 \dots \overset{+}{\mathbf{A}}_{i-1} \right) \left(\overset{-}{\mathbf{A}}_n \overset{-}{\mathbf{A}}_{n-1} \dots \overset{-}{\mathbf{A}}_{i+1} \right) \alpha_i \quad (\text{A.4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\overset{+}{\mathbf{A}}_1 \overset{+}{\mathbf{A}}_2 \dots \overset{+}{\mathbf{A}}_n \right) \left(\overset{-}{\mathbf{B}}_1 \overset{-}{\mathbf{B}}_2 \dots \overset{-}{\mathbf{B}}_m \right) &= \\ &= \left(\overset{-}{\mathbf{B}}_1 \overset{-}{\mathbf{B}}_2 \dots \overset{-}{\mathbf{B}}_m \right) \left(\overset{+}{\mathbf{A}}_1 \overset{+}{\mathbf{A}}_2 \dots \overset{+}{\mathbf{A}}_n \right) \quad (\text{A.5}) \end{aligned}$$

Multiplicación de cuaternas conjugadas. Se mantiene la conmutatividad multiplicativa para los productos de cuaternas conjugadas. El producto de dos cuaternas conjugadas $\gamma = \alpha^* \otimes \beta^*$, se puede escribir en forma matricial como $\gamma = \overset{+}{\mathbf{A}}^* \beta^* = \overset{-}{\mathbf{B}}^* \alpha^* = (\overset{+}{\mathbf{A}})^T \beta^* = (\overset{-}{\mathbf{B}})^T \alpha^*$. De aquí se deduce que

$$\overset{+}{\mathbf{A}}^* = (\overset{+}{\mathbf{A}})^T \text{ y } \overset{-}{\mathbf{B}}^* = (\overset{-}{\mathbf{B}})^T \quad (\text{A.6})$$

Si en la multiplicación aparece la conjugación de una secuencia de cuaternas, la siguiente identidad demuestra la conmutatividad multiplicativa:

$$(\alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \dots \otimes \alpha_n)^* = \alpha_n^* \otimes \dots \otimes \alpha_2^* \otimes \alpha_1^* \quad (\text{A.7})$$

o en expresión matricial

$$(\overset{+}{\mathbf{A}}_1 \overset{+}{\mathbf{A}}_2 \dots \overset{+}{\mathbf{A}}_{n-1} \alpha_n)^* = (\overset{+}{\mathbf{A}}_n \dots \overset{+}{\mathbf{A}}_2 \alpha_1^*)^T \quad (\text{A.8})$$

Norma, división e inversa La norma de una cuaterna α , denotada por $N(\alpha)$, es una cuaterna escalar definida por

$$N(\alpha) = \alpha^* \otimes \alpha = \alpha \otimes \alpha^* = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

Aparentemente es igual al cuadrado de la norma euclídea de un vector genérico. Se puede escribir entonces

$$N(\alpha) = \alpha^* \otimes \alpha = \alpha \otimes \alpha^* = \alpha \cdot \alpha = \|\alpha\|_2^2 \quad (\text{A.9})$$

A diferencia de los espacios vectoriales, las cuaternas constituyen un álgebra de división, ya que para cualquier cuaterna no nula α existe su inversa α^{-1} respecto del producto de cuaternas, tal que $\alpha \otimes \alpha^{-1} = 1$. Cualquier cuaterna posee inversa respecto de la operación producto de cuaternas. Sean dos cuaternas no nulas α y $\beta = \frac{\alpha^*}{N(\alpha)}$. Al resolver $\alpha \otimes \beta = \frac{\alpha \otimes \alpha^*}{N(\alpha)} = 1$, se deduce que la inversa de α es $\alpha^{-1} = \frac{\alpha^*}{N(\alpha)}$. Si la norma de α es la unidad, se dice que la cuaterna es normalizada y se llama cuaterna unitaria. En este caso la inversa de α es α^* . Como la inversa de una cuaterna es igual a su conjugada escalada por su norma, se mantiene la propiedad conmutativa de productos de conjugados:

$$(\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{A}_n)^{-1} = \mathbf{A}_n^{-1} \otimes \dots \otimes \mathbf{A}_2^{-1} \otimes \mathbf{A}_1^{-1} \quad (\text{A.10})$$

Algunas matrices interesantes Si se definen las siguientes matrices de tamaño 3×4 :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}^\alpha &= \begin{bmatrix} -a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ -a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{bmatrix} = \left[-\mathbf{a} \quad (a_0 \mathbf{U} - \tilde{\mathbf{a}}) \right] \\ \mathbf{E}^\beta &= \begin{bmatrix} -b_1 & b_0 & -b_3 & b_2 \\ -b_2 & b_3 & b_0 & -b_1 \\ -b_3 & -b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix} = \left[-\mathbf{b} \quad (b_0 \mathbf{U} + \tilde{\mathbf{b}}) \right] \end{aligned}$$

Se pueden reescribir \mathbf{A}^+ , y \mathbf{B}^- como

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^+ &= \left[\alpha \quad \left(\bar{\mathbf{E}}^\alpha \right)^T \right] = \left[\begin{array}{c} (\alpha^*)^T \\ \bar{\mathbf{E}}^{\alpha^*} \end{array} \right] \\ \mathbf{B}^- &= \left[\beta \quad \left(\mathbf{E}^\beta \right)^T \right] = \left[\begin{array}{c} (\beta^*)^T \\ \mathbf{E}^{\beta^*} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Los superíndices α, β indican que las entradas de esas matrices vienen dadas por las cuaternas α, β respectivamente. Luego se pueden definir $\mathbf{E}^+, \bar{\mathbf{E}}^-$ asociadas a cualquier cuaterna dada.

Parámetros de Euler y rotaciones finitas Los parámetros de Euler, notados como

$$p = [e_0 \ e_1 \ e_2 \ e_3]^T = [e_0 \ \mathbf{e}^T]$$

son cuaternas unitarias. Se pueden expresar de la forma

$$p = \cos \frac{\theta}{2} + (\sin \frac{\theta}{2})\mathbf{u}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (\text{A.12})$$

donde $\cos \frac{\theta}{2} = e_0$, $\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\mathbf{e}^T \mathbf{e}}$, y $\mathbf{u} = \pm \frac{\mathbf{e}}{\sqrt{\mathbf{e}^T \mathbf{e}}}$. El vector \mathbf{u} es un vector unitario cuando $\sqrt{\mathbf{e}^T \mathbf{e}}$ es distinto de cero. Se requiere que los parámetros satisfagan la restricción de norma unidad $\mathbf{p}^T \mathbf{p} = 1$.

Sea p una cuaterna unitaria y α una cuaterna unitaria. La operación $p \otimes \alpha \otimes p^*$ transforma α en otra cuaterna α' sin cambiar su norma. Al expresar

$$\alpha' = p \otimes \alpha \otimes p^* \quad (\text{A.13})$$

en forma matricial se tiene

$$\alpha' = \begin{pmatrix} + & -^T \\ \mathbf{P} & \mathbf{P} \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} -^T & + \\ \mathbf{P} & \mathbf{P} \end{pmatrix} \alpha$$

o también

$$\alpha' = \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & \begin{matrix} + & -^T \\ \mathbf{E}^p & \mathbf{E}^p \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \alpha \quad (\text{A.14})$$

donde se han sustituido los resultados $p^T p = 1$, y $\mathbf{E}^p p = \mathbf{E}^p p = 0$. La matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} + & -^T \\ \mathbf{P} & \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -^T & + \\ \mathbf{P} & \mathbf{P} \end{pmatrix}$$

es una transformación de cuaternas en el espacio de cuatro dimensiones. Como las transformaciones $\begin{pmatrix} + & -^T \\ \mathbf{P} & \mathbf{P} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -^T & + \\ \mathbf{P} & \mathbf{P} \end{pmatrix}$ son ortonormales, las normas de α y α' son iguales. Según la expresión matricial, se observa que la parte escalar de α después de la transformación no cambia, y la parte vectorial de α' está rotada por la transformación un ángulo θ alrededor del eje \mathbf{u} . Esto quiere decir que la cuaterna transformada no ha sido escalada, y la transformación de la parte escalar y de la parte vectorial son independientes entre sí. Con la ayuda del álgebra de cuaternas, se puede expresar de una forma elegante una rotación finita en el espacio. Si α es una cuaterna vectorial, la ecuación $\alpha' = p \otimes \alpha \otimes p^*$ es de hecho una alternativa al teorema de Euler que nos indica que una rotación genérica en el espacio se puede reducir a una única rotación θ alrededor de un eje \mathbf{u} . La matriz de la transformación de rotación \mathbf{A} para un espacio vectorial se puede obtener directamente de la submatriz inferior en la ecuación (A.14):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} + & -^T \\ \mathbf{E}^p & \mathbf{E}^p \end{pmatrix} = (e_0^2 - \mathbf{e}^T \mathbf{e})\mathbf{U} + 2(\mathbf{e}\mathbf{e}^T + e_0 \tilde{\mathbf{e}}) \quad (\text{A.15})$$

Se puede llegar a la expresión de la matriz \mathbf{A} directamente a partir del teorema de Euler, que establece que la rotación general de un sólido rígido es equivalente a una rotación alrededor de un eje fijo [1] tal como

$$\mathbf{A} = (\cos \theta)\mathbf{U} + (1 - \cos \theta)\mathbf{u}\mathbf{u}^T + (\sin \theta)\tilde{\mathbf{u}} \quad (\text{A.16})$$

Aplicando algunas identidades trigonométricas y sustituyendo $e_0 = \cos \frac{\theta}{2}$ y $e = (\sin \frac{\theta}{2})\mathbf{u}$, se puede probar que las matrices \mathbf{A} en (A.15) y en (A.16) son iguales. Obtener los parámetros de Euler que especifican la rotación inversa \mathbf{A}^{-1} es trivial. Si \mathbf{A} viene definida a través de la cuaterna unitaria p , entonces \mathbf{A}^{-1} viene especificada por la conjugada de p, p^* . Se puede verificar al escribir (A.13) como $\alpha = (p^*) \otimes \alpha' \otimes (p^*)^*$ [86].

Apéndice B

Instrumentación del prototipo

B.1. Obtención de datos

Para obtener la posición, velocidad y aceleración del vehículo, y las posiciones relativas de sus partes móviles (suspensiones y dirección), se ha utilizado una serie de sensores, que se describirán a continuación. Asimismo, para poder ejercer el adecuado control del vehículo, se han añadido servomecanismos para controlar cada uno de sus parámetros (frenos de las ruedas y posiciones de la dirección y el acelerador). Teniendo en cuenta que tanto la adquisición de datos como el control se efectuarán desde un computador externo, será necesario además añadir a la instrumentación del vehículo un enlace bidireccional de radiofrecuencia. Por último, para poder codificar y empaquetar los datos que serán transmitidos e interpretar los recibidos por el enlace de radiofrecuencia, y para gobernar los servomecanismos y atender a los sensores, será necesario una etapa específica, constituida básicamente por microcontroladores. En lo que sigue se describirá detalladamente cada uno de estos aspectos.

B.2. Sensores

La finalidad de los sensores es, como ya se ha mencionado, obtener la posición, velocidad y aceleración del centro de gravedad del vehículo, la orientación espacial en la que se encuentra el chasis respecto de un sistema de coordenadas fijo en tierra, y las posiciones relativas de sus partes móviles, esto es, las cuatro suspensiones, las cuatro ruedas y la posición de la dirección. Para obtener estos datos se ha instrumentado el vehículo, dotándolo de los sensores que a continuación se expondrán, que medirán, de alguna manera, la posición –y sus derivadas– de cada una de las ruedas (velocidad de rotación), los seis grados de libertad del chasis del vehículo y las posiciones relativas de las partes móviles.

Es posible obtener estos datos de muchas formas distintas. Dejando aparte el hecho de que para obtener un dato concreto es posible, por lo general, elegir entre diferentes tipos de sensor, existen otras posibilidades a la hora de diseñar la instrumentación del vehículo que, como se verá, pasan por la obtención de datos que, indirectamente, permiten conocer los que se desean. En este sentido, se pueden calificar los sistemas de seguimiento para obtener la posición y orientación de un cuerpo en un sistema de referencia según los siguientes tipos utilizados habitualmente en diferentes entornos, y disponibles comercialmente [53] (esta calificación no tiene por qué ser exhaustiva):

- Mecánicos: miden cambios en la posición y la orientación de objetos, conectándolos al sistema de referencia fijo mediante un dispositivo mecánico con los suficientes grados de libertad, que interfiere lo menos posible en los movimientos del objeto y que permite, conociendo el estado de cada una de sus restricciones, deducir la posición del objeto. Se comprende fácilmente que este tipo de sistemas es, para el caso que nos ocupa, engorroso y poco eficaz. Teniendo en cuenta que el objeto a seguir –un vehículo que se mueve a una velocidad no despreciable– ha de ser interferido lo menos posible en su movimiento, un enlace físico con el suelo limitaría en gran medida sus movimientos, e interactuaría con su comportamiento dinámico, interfiriendo en la obtención de datos [33] y [71].
- Electromagnéticos: Utilizan el espectro electromagnético (habitualmente en las frecuencias de microondas y radio). Unos emisores fijos en tierra generan tres campos magnéticos ortogonales, y tres bobinas ortogonales montadas a bordo del objeto a medir recogen estos campos y permiten recomponer la orientación del objeto dentro del campo magnético [71]. Este sistema se utiliza habitualmente en sistemas de inmersión en realidad virtual, está bien probado y es relativamente económico. Sus principales defectos son la baja inmunidad a ruidos externos, el reducido alcance y la interferencia producida por la presencia de material ferromagnético. Estos sistemas obtienen únicamente la orientación del objeto, y no su posición.
- De Radiofrecuencia o *spread-spectrum*: utilizan varios (un mínimo de 4) emisores de radiofrecuencia que emiten pulsos síncronos, y son recogidos a bordo del objeto mediante el receptor correspondiente. La diferencia entre los tiempos en los que se recibe cada pulso es proporcional a la distancia a su emisor correspondiente. De esta forma, y conociendo de antemano la localización exacta de los emisores, se puede obtener la posición del objeto por medio de relaciones trigonométricas sencillas. Estos sistemas funcionan de una forma similar a los actuales GPS. Sus ventajas son, entre otras, su alta precisión, su resolución, y su medio alcance. Sin embargo no son inmunes a la presencia de objetos ferromagnéticos. Estos sistemas

obtienen, únicamente, la posición del objeto, y no su orientación. Para obtener la orientación es necesario utilizar dos receptores situados en puntos diferentes (y alejados entre sí) del objeto, y de la diferencia de posición obtenida entre ambos, obtener la orientación.

- **Acústicos:** Como en el método anterior, se utilizan varios emisores, de ultrasonidos en este caso, fijos en tierra y un receptor a bordo del objeto (o viceversa) para calcular la distancia entre los emisores y el receptor, y de esta forma triangularizar la posición del objeto. Para medir la distancia entre un emisor y el receptor se utiliza la velocidad conocida y constante de propagación del sonido en el aire o la diferencia de fases entre las señales recibidas, proporcional, también, a las distancias que se desean obtener [36]. Estos sistemas adolecen de una intolerancia excesiva a objetos externos al sistema que se puedan interponer en la trayectoria seguida por las ondas acústicas, y tienen un rango reducido si se pretende obtener una precisión suficiente.
- **Ópticos:** Son los más habituales. Se pueden clasificar en dos grandes grupos: los que utilizan luz no coherente y los que utilizan luz coherente (laser). Los primeros utilizan emisores de luz fijos en tierra, y un sensor a bordo del objeto, o viceversa, o incluso se apoyan en el uso de cámaras y reconocimiento de imagen, o marcadores fácilmente reconocibles por el software de tratamiento de imagen de las cámaras, que permite posteriormente triangularizar la posición y orientación del objeto [71]. Los sistemas basados en luz coherente generan, utilizando la óptica adecuada, planos de luz cuya intersección con el objeto permite a cámaras externas reconstruir su posición, utilizando nuevamente software de reconocimiento de imagen. También se puede utilizar la luz coherente del laser para efectuar scannings de la escena en la que está inmerso el objeto, y obtener de nuevo su posición y orientación mediante software de reconocimiento de imagen. Las técnicas más habituales entre las que utilizan el laser se basan en el uso de radar laser (ladar) o técnicas de interferometría laser. Las primeras utilizan el mismo esquema de reconstrucción de la posición y orientación que las expuestas en el epígrafe de ultrasonidos. Las segundas utilizan un haz guiado de laser para seguir a un reflector especial instalado en el objeto, junto con técnicas de interferometría láser. En general se puede decir que las técnicas basadas en luz consiguen respuestas muy rápidas, y por tanto son apropiadas para seguimientos en tiempo real, pero han de mantener un adecuado compromiso entre alcance y precisión. Además adolecen de problemas causados por la existencia en el entorno de objetos opacos que impidan el paso de la luz.
- **Inerciales:** Por último, los seguidores inerciales utilizan pequeños sensores MEMS -Micro Electro Mechanical Sensor- para detectar aceleraciones

lineales y velocidades de rotación del objeto a seguir [118]. Los errores debidos a desviaciones en las medidas de velocidad de rotación son corregidos mediante técnicas apropiadas que emplean los datos de aceleración y de composición del vector del campo magnético terrestre, obtenidos ambos de los sensores de aceleración. Dado que los sensores de velocidad angular tienen más precisión a altas frecuencias, y los acelerómetros a bajas frecuencias, ha de utilizarse un filtro adecuado que combine las entradas de ambos. Puede ser utilizado, además, un sensor para medir la posición del campo magnético terrestre, y con él compensar errores de deriva en la estimación del azimut. Para construir un sistema completo se necesitan tres de cada uno de los tres tipos de sensor, orientados ortogonalmente [36] [63].

Determinadas topologías como las descritas en el último epígrafe de sensores inerciales son sólo posibles desde tiempos relativamente recientes. El desarrollo y difusión de la tecnología MEMS ha hecho posible que, en los últimos años, hayan aparecido una multitud de nuevos sensores apropiados para las tareas que aquí se pretenden. Los acelerómetros MEMS están reemplazando rápidamente a los acelerómetros basados en mecanismos complejos, porque son extremadamente robustos, pequeños y su precio decrece continuamente. Asimismo, acelerómetros MEMS diseñados especialmente para detectar aceleraciones altas y puntuales equipan todos los airbag de los automóviles. De la misma forma, la introducción de rate gyros en equipos portátiles (PDA's, teléfonos móviles, ordenadores portátiles) se aproxima, pero se utilizan ya masivamente en otros sistemas. El precio de los sensores inerciales basados en tecnología MEMS dejará de ser un problema a corto plazo. Teniendo esto en cuenta, los sistemas inerciales son los que reúnen la mayoría de las ventajas, y tienen el menor número de defectos. Es por esto que se ha optado en este trabajo por este tipo de sistema para realizar el seguimiento del vehículo.

Se exponen, a continuación, las características fundamentales de los dispositivos que se han utilizado para instrumentar el vehículo, y sus principales características, ventajas e inconvenientes, así como los métodos utilizados para disminuir, si no eliminar, estos últimos.

B.2.1. Velocidad de Rotación de las Ruedas

Para medir la velocidad de rotación de cada una de las ruedas es necesario utilizar un sensor de alguno de los tipos que se relacionan a continuación:

- Sensor inductivo.
- Sensor magnético.

- Sensor óptico.
- Sensor mecánico.

Las prestaciones que se espera obtener del sensor son las siguientes:

- Detección de velocidades de rotación de las ruedas hasta 100 Km/h de velocidad del vehículo.
- Bajo consumo.
- Poco peso.
- Pequeño tamaño.
- Inmunidad a vibraciones.
- Resistencia a la suciedad.
- Alto umbral de soporte de ruido.

Se puede comprobar que los sensores más adecuados para la instrumentación del vehículo son los inductivos y los magnéticos. Sin embargo, teniendo en cuenta que los sensores magnéticos necesitan un imán permanente situado tras el objeto que se quiere detectar, resultarán mucho más sencillos, en este caso, los sensores inductivos. Se utilizarán, por tanto, este tipo de sensores para detectar la velocidad de rotación de cada rueda. Los sensores inductivos detectan la presencia o ausencia de un material ferromagnético que está situado a una distancia determinada -o menor- de su parte sensible. Su salida consiste en una señal digital de valor nulo si no hay material ferromagnético ante el sensor, y 1 si hay material. Este mismo principio, utilizado en los sensores de efecto Hall, es el que se emplea para detectar el paso de los dientes de un engranaje, que gira solidario con la rueda, en los vehículos equipados con ABS. En este caso, y teniendo en cuenta que se trata de un vehículo de reducidas dimensiones, se ha optado por utilizar el propio disco de freno de cada rueda, diseñado con unas ranuras de ventilación adecuadas, de forma que el sensor inductivo pueda detectar el paso de las mismas y, junto con una adecuada medida del tiempo, se pueda componer la velocidad de rotación de cada rueda. Se ha diseñado con 32 ranuras en total. Teniendo en cuenta que el diámetro de la rueda es de 12,4 cm, el sensor inductivo será capaz de actualizar la información de la posición -y la velocidad- de la rueda cada:

$$p = 12,4\pi \approx 38,95 \text{ cm} \longrightarrow \frac{38,95}{32} \approx 1,22 \text{ cm}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que cada ranura del disco de freno provoca un pulso en el sensor, que el disco tiene 32 ranuras y que la máxima velocidad

que se pretende alcanzar con el vehículo está por debajo de los 100 Km/h, la máxima frecuencia de pulsos que tendrá que detectar el sensor inductivo será de:

$$100 \text{ Km/h} \approx 27,8 \text{ cm/s} \longrightarrow f = 32 \frac{2780}{38,95} \approx 2282 \text{ Hz}$$

Esta frecuencia se encuentra dentro de los límites de ancho de banda del sensor. Se pueden utilizar dos estrategias para determinar la velocidad de cada rueda basadas en los pulsos leídos por el sensor inductivo y en una medida fiable del tiempo: por una parte, contar los pulsos que se producen en un tiempo prefijado y constante, o bien medir el tiempo que transcurre entre dos pulsos consecutivos. En ambos casos, la medida de la velocidad será directamente proporcional al cociente entre el número de pulsos y el tiempo medidos. Ambas estrategias tiene dificultad para medir con una precisión uniforme la velocidad de la rueda en el rango de 0 a 100 Km/h. En el primer caso la medida de la velocidad será mejor cuanto mayor sea ésta, pero la medida tendrá un error excesivamente grande a velocidades bajas: es fácil comprender que el número de pulsos medido es una cantidad discreta, y el salto que se produce, por ejemplo, entre 0 pulsos por unidad de tiempo (velocidad nula o muy baja) y 1 pulso por unidad de tiempo (velocidad ligeramente superior) es excesivamente grande. Lo mismo se puede decir de la segunda estrategia, pero en este caso al revés: a medida que crece la velocidad decrece la precisión, de forma que a velocidades muy altas un decremento unitario en el tiempo medido supone un error muy grande en la medida. Una estrategia que reúne las ventajas de las dos mencionadas anteriormente es fijar un período de muestreo, que en este caso coincide con el período con el que se muestrearán las demás variables 10 ms, y actualizar los datos de número de pulsos y tiempo transcurridos desde la anterior actualización. De esta forma, se mantienen al unísono las variables que contienen el número de pulsos que han sucedido desde la anterior actualización y el tiempo que han tardado en transcurrir esos pulsos. Con estas dos variables se puede componer la velocidad de la rueda con un error sensiblemente inferior al de los casos anteriores. El máximo número de pulsos que se pueden producir a la velocidad máxima (100 Km/h, ó 27,8 m/s) es de 23, y el tiempo máximo transcurrido entre dos pulsos es, a la velocidad mínima medible (1,22 m/s), de 1238 (este tiempo se cuenta en unidades de tiempo que son, en este caso, de 32ν de duración cada una). El número de bits necesarios para representar el número de pulsos es, por tanto, de 5. En cuanto al tiempo, es necesario estimar cuál será la máxima excursión del tiempo medido.

B.2.2. Aceleraciones Lineales del Chasis

Para medir las aceleraciones lineales del chasis se ha optado por montar en el modelo, como se ha argumentado ya anteriormente, sensores basados en

tecnología MEMS. En concreto, se ha elegido un acelerómetro que incorpora en su interior sensores MEMS fabricados por Analog Devices, y la electrónica necesaria para el acondicionamiento, filtrado y correcto tratamiento de la señal obtenida por estos sensores. Se trata de un sensor triaxial híbrido. El elemento sensible de estos acelerómetros es una estructura micromecanizada en tres capas de silicio, en el mismo silicio que soporta la electrónica de acondicionamiento de señal (tecnología MEMS). Esta estructura forma una viga en voladizo que, al deformarse por efecto de la aceleración, hace variar la capacidad de un condensador construido con las tres capas de silicio. Esta configuración es robusta, sin desgastes apreciables, carente prácticamente de histéresis térmicas y altamente inmune a los ruidos. Permite, además, y a diferencia de otros tipos de acelerómetros, detectar y medir aceleraciones “estáticas” como las ocasionadas por la fuerza de la gravedad. Hay que tener en cuenta que la versatilidad, robustez, pequeño tamaño y precio ajustado de los sensores fabricados con tecnología MEMS se traduce en una calidad y precisión menores, aunque es de esperar que ambas cualidades mejoren a corto plazo. La precisión con la que se han de medir las tensiones obtenidas en este sensor triaxial, proporcionales a las aceleraciones en sus tres ejes ortogonales, tienen un error de no linealidad de ± 2 por ciento, con lo que será suficiente una conversión A/D de 8 bits.

B.2.3. Velocidades Angulares del Chasis

Para medir las velocidades angulares del chasis del vehículo se han seleccionado, también, sensores basados en tecnología MEMS. En concreto, se han evaluado tres modelos. Los dos primeros modelos se basan en detectar variaciones en el plano de vibración de un cilindro formado por material piezoeléctrico. Este cilindro vibra a su frecuencia de resonancia –se le llama, de hecho, diapasón–, excitado eléctricamente por medio de sus propiedades piezoeléctricas. Estos cambios en el plano de vibración son debidos, a la velocidad angular en el mismo eje que el del cilindro. El tercer sensor se basa en un mecanismo similar aplicado, en este caso, a un anillo vibrante, formado también por material piezoeléctrico. La constitución de este tipo de sensores lleva implícita una importante variabilidad de los parámetros fundamentales del sensor en el proceso de fabricación, lo que obligará a un posterior calibrado de la unidad completa. Asimismo, y debido al envejecimiento del material piezoeléctrico, y a su diferente comportamiento frente a cambios de temperatura, son de esperar alteraciones de la medida con el tiempo y la temperatura. Comparadas las características de los tres sensores, y no encontrando diferencias fundamentales, se opta por la que presenta mejores características mecánicas y de dimensiones externas.

En la tabla B.1 se detallan las características del sensor elegido.

Característica	Valor	Unidad
Rango de entrada	± 2	G
Sensibilidad	1	V/g
No linealidad	± 2	% Full escale
Ancho de banda	0-100	Hz
Salida(a 0ž/s)	2,4	V

Tabla B.1: Características de los RateGyros

B.2.4. Intensidad del Campo Magnético

Se ha optado, en este caso, por un sensor basado en un circuito híbrido, que contiene en su interior tres transductores magnetoresistivos de permalloy, orientados según tres ejes ortogonales, y la electrónica adecuada para transformar las señales de estos transductores en tensiones fácilmente trasladables a un conversor A/D convencional. Estos transductores son sensibles a campos magnéticos a lo largo de su sentido longitudinal, y pueden detectar y medir campos desde 40 microgauss hasta ± 2 gauss. Son, por tanto, adecuados para medir el campo magnético terrestre con suficiente precisión. Un problema que nace de las propiedades de la aleación permalloy con la que están construidos los transductores es que un campo magnético fuerte puede desplazar las curvas de respuesta de éstos, debido a efectos de histéresis. Para paliar este problema, el propio circuito híbrido incorpora en su interior tres bobinas de una espira cada una situadas bajo cada uno de los transductores. Estas bobinas pueden generar un campo magnético fuerte, mediante el paso de una corriente determinada, y este campo magnético es capaz de devolver las curvas de respuesta de los transductores a su situación original. Para resetear por completo los efectos de histéresis de los transductores es necesario forzar una corriente de al menos 4 amperios por estas bobinas, y es necesario hacer esto de una forma regular. En este caso se ha optado por hacer circular 4 amperios por las bobinas, durante $2\mu s$, justo después de haber realizado una adquisición (teniendo en cuenta que, como ya se ha dicho, se efectúan 100 adquisiciones por segundo).

B.2.5. Posición de las Suspensiones y la Dirección

La lectura de la posición de las suspensiones y de la dirección no entraña más dificultad que la de articular una cadena cinemática que haga llegar el movimiento de cada una de ellas hasta el transductor, consistente en este caso de un potenciómetro lineal, especialmente concebido para este tipo de trabajos, y cuya película resistiva ha sido fabricada con polímeros especiales que garantizan una vida útil de hasta 5×10^6 ciclos.

B.2.6. Otros Sensores

Para medir la temperatura en la que se efectúan las pruebas, y poder determinar correlaciones entre ésta y los datos adquiridos, se ha montado en el vehículo un sensor de temperatura típico, de estado sólido, e integrado en un circuito híbrido.

B.3. Actuadores

Para poder ejecutar comandos de control que permitan situar al vehículo en las situaciones que interesen en cada momento, es necesario dotarlo de actuadores que modifiquen los diferentes parámetros que definen el comportamiento del vehículo. En concreto, en este modelo son controlables los cuatro frenos de disco, de forma independiente, la dirección y el acelerador del motor. Se ha optado en este trabajo por el uso de servomecanismos electromecánicos, de tamaño reducido y acorde a las dimensiones del vehículo, para gobernar cada uno de sus seis parámetros. Para gobernar cada uno de los frenos, y teniendo en cuenta que el recorrido de las pinzas de freno es de apenas dos milímetros, que la fuerza necesaria será moderadamente baja (teniendo en cuenta que se multiplica mecánicamente en la propia pinza) y que interesa disponer de una velocidad de respuesta elevada que permita afrontar estrategias de control similares a las de los actuales ABS, se ha optado finalmente por servomecanismos estándar de pequeño tamaño, velocidad de respuesta elevada y par moderado.

Característica	Valor	Unidad
Velocidad	260	$^{\circ}/s$
Par	3	Kg/cm
Dimensiones	20x30x40	mm
Recorrido	0 – 100	ž
Tipo control	PWM	
Mínimo pulso de control	1	ms
Máximo pulso de control	2	ms
Frecuencia de control	50	Hz

Tabla B.2: Características de los servomecanismos

En la tabla B.2 se muestran las características principales de estos servos. Se ha incrementado la frecuencia de actualización del PWM de control de estos actuadores hasta $100Hz$, con lo que se consigue mejorar su tiempo de respuesta e incrementar ligeramente el par en situaciones de transición entre sucesivos comandos. Este mismo tipo de servomecanismo se ha utilizado para actuar sobre el acelerador del motor. Para mover la dirección interesa un actuador

con un par mucho mayor que el que pueden suministrar estos servos, pero no es necesario que sea tan rápido. Así, se ha optado por un servomecanismo de similar constitución, pero de $25Kg/cm$ de par, y una menor velocidad de $200/s$.

B.4. Enlace de Radiofrecuencia

Es necesario, utilizar un enlace de radiofrecuencia que permita enviar los datos adquiridos en tiempo real a un computador fijo en tierra, y que realizará las tareas de posterior tratamiento de estos datos. Asimismo, será necesario también enviar al vehículo, mediante un enlace de radio frecuencia, los comandos necesarios para gobernar sus seis servomecanismos. El flujo de datos que sube desde el vehículo hasta el computador es considerable, mientras que el flujo de datos de control que baja al vehículo es sensiblemente inferior. Teniendo esto en cuenta, se ha diseñado un sistema de enlace de Radiofrecuencia bidireccional y asimétrico basado en circuitos de radiofrecuencia diseñados específicamente para este fin. En concreto para subir los datos el enlace es de $64Kbps$ y para comandar el vehículo solo se necesitan $48Kbps$ de ancho de banda. El sistema de transmisión de datos digitales mediante señales de radiofrecuencia presenta, sin embargo, problemas que pueden hacer que el enlace funcione de forma deficiente, o no funcione en absoluto. Entre ellos pueden destacarse los fenómenos de interferencias externas, diferente ganancia del enlace al variar la distancia, etc. Para paliar estos problemas, es necesario diseñar los receptores de forma que garantice, entre otros, un nivel de salida constante de la señal, e independiente de la distancia (control de ganancia o CAG) y una elevada inmunidad a emisiones de radiofrecuencia en bandas cercanas. Las topologías de receptores que tienen en cuenta estos factores provocan que no sea posible recuperar la señal digital transmitida si ésta no verifica ciertos requisitos. Uno de ellos es que el nivel de continua de la señal digital, esto es, la media de unos y ceros, ha de ser nula, y otra que el número de unos consecutivos, o de ceros consecutivos no sobrepase determinado umbral. Determinadas codificaciones son capaces de resolver estos problemas, codificando la información digital a transmitir de forma que se varían adecuadamente el número de unos y ceros, y sus posiciones relativas. El problema que poseen estas codificaciones es que incrementan la longitud de los datos que se transmiten, de forma que se necesita mayor ancho de banda. Para paliar este problema, y dado que el flujo de datos de los sensores es excesivo para los $64Kbps$ que soporta el enlace, se ha diseñado una codificación específica. El enlace en sentido inverso soporta un flujo de datos digitales mucho menor.

B.5. Sistema mixed signal

Por último, para aglutinar todas las funciones derivadas de la adquisición de datos, ocuparse de suministrar puntualmente los comandos adecuados a los actuadores, atender a las codificaciones y decodificaciones de los datos que viajan por el enlace de radiofrecuencia, y atender a otras funciones extra, es necesario incorporar un sistema relativamente complejo mixed signal, que ha de tratar al mismo tiempo con señales digitales y analógicas, necesitará realizar rápidas operaciones binarias y tendrá hardware específico para realizar conversiones entre las señales analógicas y las digitales. Aunque es extremadamente amplio el abanico de opciones aceptable para resolver este problema, y la elección última de los dispositivos que conformarán finalmente este tipo de sistemas tiene siempre ciertas dosis de subjetividad, han de observarse determinadas características deseables del sistema:

- Bajo tamaño,
- Bajo consumo,
- Velocidad suficiente de procesado de datos,
- Hardware específico para las señales analógicas,
- Hardware específico para tareas extremadamente rápidas y precisas,
- Facilidad de manejo y modificación de sus características y
- Versatilidad.

Se puede optar para esta finalidad por una topología distribuida, basada en el empleo de varios microcontroladores enlazados entre sí por un bus interno. Esto hace posible distribuir las tareas, facilitando su separación y programación independiente. Además acelera la velocidad de conversión A/D, frente a la opción de un sólo microcontrolador. Por otra parte, si los microcontroladores se eligen apropiadamente, dispondrán de hardware específico para, por ejemplo, generar los comandos a los servomecanismos, leer los pulsos de los sensores inductivos o atender a las comunicaciones serie que fluyen por el enlace de radiofrecuencia. Los tres microcontroladores que se proponen son *PIC16F877*, de la familia PIC de Arizona Microchip. El bus que los une es un bus estándar *I2C*, las comunicaciones serie con el enlace de radiofrecuencia se efectúan a través de la USART que incorpora el microcontrolador central, la lectura de los sensores inductivos se realiza directamente por los módulos CCP (Capture, Compare PWM) de los microcontroladores de los extremos, específicamente diseñado para, entre otras tareas, contar el número de pulsos y el tiempo transcurrido. El gobierno de los servomecanismos corre a cargo, también, de uno de los módulos

CCP del microcontrolador central, configurado de forma especial para generar automáticamente las seis señales de control. La adquisición de los datos analógicos se efectúa en los tres conversores A/D de los tres microcontroladores, al unísono. Todas estas tareas son atendidas mediante rutinas de interrupciones diseñadas específicamente para permitir un flujo continuo de información y un alto rendimiento del sistema total.

Apéndice C

Caracterización de los sensores

C.1. Rate-Gyros

ω_{medial}
(rad·s⁻¹)

Figura C.1: Datos de caracterización del giróscopo del eje x.

ω_{medial}
 $(\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})$

Figura C.2: Datos de caracterización del giróscopo del eje y.

$$\frac{\omega_{medida}}{\omega_{real}} \\ (\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})^1$$

Figura C.3: Datos de caracterización del giróscopo del eje z.

$$\frac{a_{medida}}{a_{real}} \left(\frac{m}{s^2} \right)$$

Figura C.4: Datos de caracterización del acelerómetro del eje x.

C.2. Acelerómetros

$$\frac{a_{medida}}{a_{real}} \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right)^{-1}$$

Figura C.5: Datos de caracterización del acelerómetro del eje y.

$$\frac{a_{medida}}{a_{real}} \text{ (rad}\cdot\text{s}^{-1})^1$$

Figura C.6: Datos de caracterización del acelerómetro del eje z.

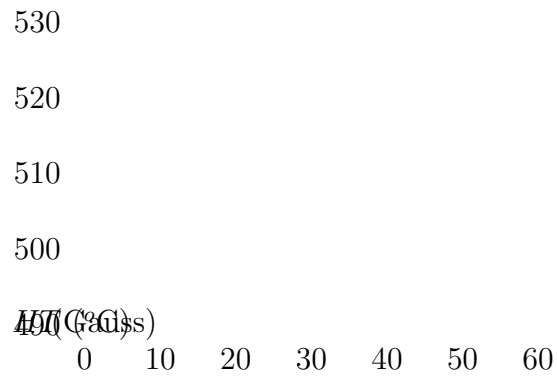


Figura C.7: Datos de caracterización del magnetómetro x.

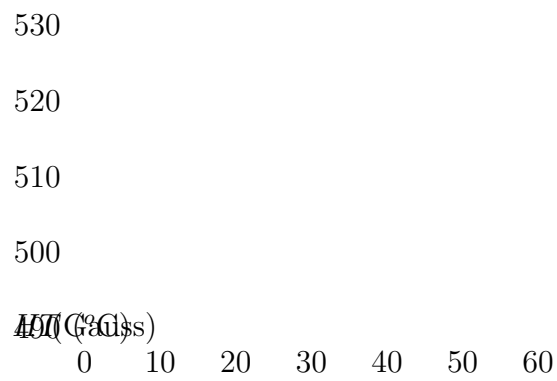


Figura C.8: Datos de caracterización del magnetómetro y.

C.3. Magnetómetros

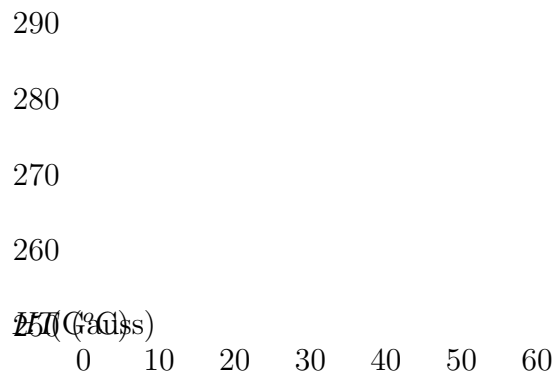


Figura C.9: Datos de caracterización del magnetómetro z.

Bibliografía

- [1] M. C. Algrain and J. Saniie. Interlaced kalman filtering of 3d angular motion based on euler's nonlinear equations. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*,, 30(1):175, 1994. 0018-9251.
- [2] P. Antos and J. A. C. Ambrosio. A control strategy for vehicle trajectory tracking using multibody models. *Multibody System Dynamics*, 11(4):365–394, 2004. ISI Document Delivery No.: 852HY Times Cited: 3 Cited Reference Count: 21 English Article 1384-5640.
- [3] M. S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, and T. Clapp. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-gaussian bayesian tracking. *Ieee Transactions On Signal Processing*, 50(2):174–188, 2002. 1053-587X.
- [4] E. R. Bachmann, Yun Xiaoping, D. McKinney, R. B. McGhee, and M. J. Zyda. Design and implementation of marg sensors for 3-dof orientation measurement of rigid bodies. In *Robotics and Automation, 2003. Proceedings. ICRA '03. IEEE International Conference on*, volume 1, page 1171, 2003.
- [5] I. Bar-Itzhack. 'request' - a recursive 'quest' algorithm for sequential attitude determination. *Journal of Guidance Control And Dynamics*, 19(5):1034–1038, 1996.
- [6] I. Bar-Itzhack, J. Deutschmann, and F. Markley. Quaternion normalization in additive ekf for spacecraft attitude determination. volume 1 of *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, page 908, New Orleans, LA, USA, 1991. Publ by AIAA, Washington, DC, USA. Compilation and indexing terms, Copyright 2006 Elsevier Inc. All rights reserved 94011174604.
- [7] M. Best, A. Newton, and S. Tuplin. The identifying extended kalman filter: parametric system identification of a vehicle handling model. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics*, 221(1):87, 2007. 10.1243/14644193JMBD68.

- [8] M. C. Best, T. J. Gordon, and P. J. Dixon. An extended adaptive kalman filter for real-time state estimation of vehicle handling dynamics. *Vehicle System Dynamics*, 34(1):57–75, 2000. 0042-3114 An extended adaptive Kalman filter for real-time state estimation of vehicle handling dynamics CCC:000088219300004.
- [9] Richard S. Bucy and Peter D. Joseph. Filtering for stochastic processes with applications to guidance, 2005. Defense Technical Information Center OAI-PMH Repository [<http://stinet.dtic.mil/oai/oai>] (United States) ER.
- [10] Juan de Burgos. Algebra lineal y geometría cartesiana. page 627. McGraw-Hill, Madrid, 2000.
- [11] Gómez Campomanes. *Análisis y Diseño de los Sistemas Automáticos de Control*, volume 1. Ediciones Júcar, Madrid, 1986.
- [12] G. Cena, A. Valenzano, and S. Vitturi. Advances in automotive digital communications. *Computer Standards and Interfaces*, 27(6):665, 2005. 0920-5489 doi: DOI: 10.1016/j.csi.2004.12.005.
- [13] F. Cheli, S. Melzi, and E. Sabbioni. An adaptative observer for sideslip angle estimation: Comparison with experimental results. In *ASME IDETC/CIE 2007*, Las Vegas, Nevada USA, 2007.
- [14] F. Cheli, F. Resta, F. Braghin, and E. Sabbioni. Identification of pacejka’s coefficients through full vehicle experimental test. In *ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences and Computers, IDETC/CIE*, Las Vegas, Nevada, USA, 2007.
- [15] F. Cheli, E. Sabbioni, M. Pesce, and S. Melzi. A methodology for vehicle sideslip angle identification: Comparison with experimental data. *Vehicle System Dynamics*, 45(6):549–563, 2007. 0042-3114.
- [16] J. C. K. Chou. Quaternion kinematic and dynamic differential equations. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 8(1):53, 1992. 1042-296X.
- [17] D. Choukroun, I. Y. Bar-Itzhack, and Y. Oshman. Optimal-request algorithm for attitude determination. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 27(3):418, 2004. Copyright 2004, IEE 8182495 0731-5090 optimal REQUEST algorithm attitude determination recursive algorithm least squares estimation vector measurement filters measurement zero mean white noises state space modeling K-matrix system Kalman filtering techniques attitude quaternion.

- [18] D. Choukroun, I. Y. Bar-Itzhack, and Y. Oshman. Novel quaternion kalman filter. *Ieee Transactions On Aerospace And Electronic Systems*, 42(1):174–190, 2006. 0018-9251.
- [19] D. Choukroun, H. Weiss, I. Y. Bar-Itzhack, and Y. Oshman. Kalman filtering for matrix estimation. *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, 42(1):147, 2006. 0018-9251.
- [20] H. Cox. On the estimation of state variables and parameters for noisy dynamic systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 9(1):5, 1964. 0018-9286.
- [21] J. L. Crassidis and F. L. Markley. Unscented filtering for spacecraft attitude estimation. *Journal Of Guidance Control And Dynamics*, 26(4):536–542, 2003. 0731-5090.
- [22] John L. Crassidis and F. Landis Markley. Predictive filtering for nonlinear systems. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 20:566–572, 1997.
- [23] F. Daum. Nonlinear optimal semi-recursive filtering. volume 2759 of *Proc. SPIE - Int. Soc. Opt. Eng. (USA)*, page 256, Orlando, FL, USA, 1996. SPIE-Int. Soc. Opt. Eng. 5394244 nonlinear optimal semi-recursive filtering computational complexity optimal filters Kalman filters.
- [24] F. E. Daum. New exact nonlinear filters: Theory and applications. volume 2235 of *Proc. SPIE - Int. Soc. Opt. Eng. (USA)*, page 636, Orlando, FL, USA, 1994. 4860274 nonlinear filter exact recursive filter nonlinear estimation problems nonlinear theory Kalman filter real-time applications computational complexity discrete time random process measurements.
- [25] Fred Daum. Non-particle filters. In *Signal and Data Processing of Small Targets 2006*, volume 6236, page 623614, Orlando (Kissimmee), FL, USA, 2006. SPIE.
- [26] P. B. Davenport. A vector approach to the algebra of rotations with applications, 1968.
- [27] A. Deibe Díaz, M.A. Naya Villaverde, Javier Cuadrado Aranda, and J Cardenal Carro. Caracterización de la pérdida de estabilidad en vehículos automóviles. In *XIII Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*, Tarraça, 1998.
- [28] Álvaro Deibe Díaz. *Desarrollo de una Metodología Experimental para el Estudio de Estrategias de Control en Vehículos Automóviles. Tesis Doctoral*. PhD thesis, Universidade da Coruña.

- [29] E. D. Dickmanns. The development of machine vision for road vehicles in the last decade. In *Iv'2002: Ieee Intelligent Vehicle Symposium, Pts 1 And 2, Proceedings*, pages 268–281. I E E E, New York, 2003. ISI Document Delivery No.: BW26X Cited Reference Count: 109 English Article.
- [30] Ernst Dieter Dickmanns. Vision for ground vehicles: History and prospects. *International Journal of Vehicle Autonomous Systems*, 1(1):1, 2002. Compilation and indexing terms, Copyright 2008 Elsevier Inc. 04318286007 1471-0226 Autonomous vehicles Assistance systems System architecture Digital microprocessors.
- [31] P. Djuric, S. Goodwill, M. S. Arulampalam, and A. Kokaram. Special issue on monte carlo methods for statistical signal processing. *Ieee Transactions On Signal Processing*, 50(2), 2002.
- [32] A. Doucet, N. de Freitas, and N. Gordon. *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, volume cap 1. Springer, NY, 2001.
- [33] N. Durlach and Anne Mayor. *Virtual Reality: Scientific and Technological Challenges*. National Academies Press, 1995.
- [34] Yu Fan, Li Dao-Fei, and D. A. Crolla. Integrated vehicle dynamics control; state-of-the art review. In *Vehicle Power and Propulsion Conference, 2008. VPPC '08. IEEE*, page 1, 2008.
- [35] R. L. French, Y. Noguchi, and K. Sakamoto. International competitiveness in ivhs - europe, japan, and the united-states. In *1994 Vehicle Navigation and Information Systems Conference Proceedings*, pages A525–A530. I E E E, New York, 1994. ISI Document Delivery No.: BB99D English Proceedings Paper.
- [36] William Frey. *Application of Inertial Sensors and Flux-Gate Magnetometer to Real-Time Human Body Motion Capture*. Master thesis, Naval Postgraduate School,.
- [37] Zhenhai Gao. Soft sensor application in vehicle yaw rate measurement based on kalman filter and vehicle dynamics. In *Intelligent Transportation Systems, 2003. Proceedings. 2003 IEEE*, volume 2, page 1352, 2003.
- [38] Lu Guang and Tomizuka Masayoshi. Lidar sensing for vehicle lateral guidance: Algorithm and experimental study. *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, 11(6):653, 2006. 1083-4435.
- [39] Hamilton. On quaternions. 1847.

- [40] G. T. Haupt, N. J. Kasdin, G. M. Keiser, and B. W. Parkinson. Optimal recursive iterative algorithm for discrete nonlinear least-squares estimation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 19(3):643, 1996. Copyright 1996, IEE 5298943 0731-5090 optimal recursive iterative algorithm discrete nonlinear least-squares estimation standard recursive nonlinear estimators iterated extended Kalman filter quadratic cost function basis cost function minimization Gauss-Newton algorithm.
- [41] G. Hodgson and M. C. Best. A parameter identifying a kalman filter observer for vehicle handling dynamics. *Proceedings Of The Institution Of Mechanical Engineers Part D-Journal Of Automobile Engineering*, 220(D8):1063–1072, 2006. ISI Document Delivery No.: 078AV English Article 0954-4070.
- [42] H Hopf. Systeme symmetrischer bilinearformen und euklidische modelle der projektiven raume. *Vierteljschr Naturforsch Gesellschaft*, 85:165–177, 1940.
- [43] M. Idan. Estimation of rodrigues parameters from vector observations. *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, 32(2):578, 1996. 0018-9251.
- [44] Lacombe James. Tire model for simulations of vehicle motion on high and low friction road surfaces, 2000. 510524 1025-1034.
- [45] A Jazwinski. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Academic Press, 1970.
- [46] F. Jimenez, F. Aparicio, and J. Paez. Evaluation of in-vehicle dynamic speed assistance in spain: Algorithm and driver behaviour. *Iet Intelligent Transport Systems*, 2(2):132–142, 2008. 1751-956X.
- [47] F. Landis Markley John L. Crassidis. Predictive filtering for attitude estimation without rate sensors, 1998. CiteSeerX - Scientific Literature Digital Library and Search Engine [<http://citeseerx.ist.psu.edu/oai2>] (United States) ER.
- [48] S. Julier, J. Uhlmann, and H. F. Durrant-Whyte. A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators. *Ieee Transactions on Automatic Control*, 45(3):477–482, 2000. Mar 0018-9286 A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators CCC:000087712300008.
- [49] S. J. Julier and J. K. Uhlmann. Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE*, 92(3):401, 2004. 0018-9219.

- [50] Simon J. Julier, Jeffrey K. Uhlmann, and Hugh F. Durrant-Whyte. New approach for filtering nonlinear systems. volume 3 of *Proceedings of the American Control Conference*, page 1628, Seattle, WA, USA, 1995. Compilation and indexing terms, Copyright 2006 Elsevier Inc. All rights reserved 95092859499 Recursive linear estimator Nonlinear process System equations Minimum mean squared error State transition equation Cross covariance.
- [51] R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering*, (82 (Series D)):45, 1960.
- [52] S. Kato, S. Tsugawa, K. Tokuda, T. Matsui, and H. Fujii. Vehicle control algorithms for cooperative driving with automated vehicles and intervehicle communications. *Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on*, 3(3):155, 2002. 1524-9050.
- [53] J. Keat. Analysis of least squares attitude determination routine doaop. *Computer Sciences Corp., CSC/TM-77/6034*, 1977.
- [54] E. Kraft. A quaternion-based unscented kalman filter for orientation tracking. volume 1, page 47, 2003.
- [55] Jack Kuipers. *Quaternions and Rotation Sequences*, volume 1. Princenton University Press, Princenton, 1 edition, 1999.
- [56] Jr. LaViola, J. J. A comparison of unscented and extended kalman filtering for estimating quaternion motion. volume 3, page 2435, 2003.
- [57] G. M. Lerner. Q method. *Spacecraft Attitude Determination and Control*, 1978.
- [58] Xiao-Yun Lu and J. Karl Hedrick. Impact of combined longitudinal, lateral and vertical control on autonomous road vehicle design. *International Journal of Vehicle Autonomous Systems*, 2(1-2):40, 2004. Compilation and indexing terms, Copyright 2008 Elsevier Inc. 04268230153 1471-0226 Active suspension control Autonomous road vehicles Driving stability String stability Vehicle dynamics modelling and control.
- [59] P. Luque, D. Álvarez, and C. Vera. *Ingeniería del Automóvil*, volume 1. ITES Paraninfo, Madrid, 2004.
- [60] J. L. Marins, Yun Xiaoping, E. R. Bachmann, R. B. McGhee, and M. J. Zyda. An extended kalman filter for quaternion-based orientation estimation using mag sensors. In *Intelligent Robots and Systems, 2001. Proceedings. 2001 IEEE/RSJ International Conference on*, volume 4, page 2003, 2001.

- [61] F. L. Markley. Attitude error representations for kalman filtering. *Journal Of Guidance Control And Dynamics*, 26(2):311–317, 2003. 0731-5090.
- [62] F. L. Markley and I. Y. Bar-Itzhack. Unconstrained optimal transformation matrix. *Ieee Transactions On Aerospace And Electronic Systems*, 34(1):338–340, 1998. 00640293.pdf.
- [63] F. L. Markley, N. Berman, and U. Shaked. Deterministic ekf-like estimator for spacecraft attitude estimation. volume 1, page 247, 1994.
- [64] F.L. Markley, J.L. Crassidis, and Y. Cheng. Nonlinear attitude filtering methods, 2005.
- [65] Javier Martin and Luis Ruiz-Maya. *Estadística I: Probabilidad*, volume 1. Editorial AC, Madrid, 1 edition, 1995.
- [66] Juan Martín. Apuntes de automática, 1997.
- [67] Paul Mason and Kevin Walchko. Inetial navigation. In *Florida Conference on Recent Advances in Robotics*, Florida, 2002.
- [68] Peter S. Maybeck. *Stochastic Models, Estimation and Control*, volume 1, chapter Chapter 1: Introduction. Academic Press, 1979.
- [69] R. McGhee and R. Walford. A monte carlo approach to the evaluation of conditional expectation parameter estimates for nonlinear dynamic systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 13(1):29, 1968. 0018-9286 01098789.pdf.
- [70] R. Mehra. A comparison of several nonlinear filters for reentry vehicle tracking. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 16(4):307, 1971. 0018-9286.
- [71] Frank A. Biocca Meyer, Hugh L. Applewhite. A survey of position trackers. *Presence*, 1(2):173–200, 1992.
- [72] J. E. Naranjo. *Sistema de Conducción Automática de Vehículos basado en Lógica Borrosa y Sistemas Globales de Posicionamiento por Satélite: Programa Autopía*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Madrid, 2005.
- [73] J. E. Naranjo, C. Gonzalez, R. Garcia, and T. de Pedro. Acc plus stop and go maneuvers with throttle and brake fuzzy control. *Ieee Transactions On Intelligent Transportation Systems*, 7(2):213–225, 2006. ISI Document Delivery No.: 049AB Times Cited: 2 Cited Reference Count: 48 English Article 1524-9050.
- [74] A. Ollero. *Control por Computador. Descripción Interna y Diseño Óptimo*, volume 1. Marcombo Boixareu Editores, Barcelona, 1991.

- [75] M. Plöchl P. Lugner. Modelling in vehicle dynamics of automobiles. *ZAMM*, 84(4):219–236, 2004. 10.1002/zamm.200310108.
- [76] Hans Pacejka. *Tyre and Vehicle Dynamics*, volume 1. Elsevier Butterworth Heinemann, Oxford, 2002. Maq 412.
- [77] H. Pham and M. Tomizuka. Integrated maneuvering control for automated highway systems based on a magnetic reference/sensing system. Technical report, California PATH Research Report, 1997.
- [78] W.F. Phillips, C. E. Hailey, and G. A. Gebert. Review of attitude representations used for aircraft kinematics. *Journal of aircraft*, 38(4):718–737 (168 ref.), 2001.
- [79] M. E. Pittelkau. Rotation vector in attitude estimation. *Journal Of Guidance Control And Dynamics*, 26(6):855–860, 2003. 0731-5090.
- [80] A. B. Poore, B. J. Slocumb, F. H. Obermeyer, S. M. Herman, and S. M. Gadaleta. Batch maximum likelihood (ml) and maximum a posteriori (map) estimation with process noise for tracking applications. volume 5204 of *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, page 188, San Diego, CA, United States, 2004. International Society for Optical Engineering, Bellingham, WA 98227-0010, United States. Compilation and indexing terms, Copyright 2006 Elsevier Inc. All rights reserved 04178135122 Batch ML estimation Batch MAP estimation Nonlinear least squares Track initiation and spawning.
- [81] A. B. Poore, B. J. Slocumb, B. J. Suchomel, F. H. Obermeyer, S. M. Herman, and S. M. Gadaleta. Batch maximum likelihood (ml) and maximum a posteriori (map) estimation with process noise for tracking applications. volume 5204 of *Proc. SPIE - Int. Soc. Opt. Eng. (USA)*, page 188, San Diego, CA, USA, 2003. SPIE-Int. Soc. Opt. Eng. 8859444 batch maximum likelihood estimation maximum a posteriori estimation MAP estimation tracking applications multiple target tracking real-time applications state estimation extended Kalman smoother-filter Gauss-Newton step nonlinear least-squares problem compact least squares solution process noise.
- [82] M. Psiaki. The super-iterated extended kalman filter. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, Providence, Rhode Island, 2004. AIAA-2004-5418.
- [83] M. Psiaki. Backward-smoothing extended kalman filter. *Journal of Guidance Control And Dynamics*, 28(5):885–894, 2005.
- [84] Mark L. Psiaki. Attitude-determination filtering via extended quaternion estimation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 23(2):206,

2000. Compilation and indexing terms, Copyright 2006 Elsevier Inc. All rights reserved 00045141617 0731-5090 Quaternion estimation (QUEST) algorithms.
- [85] Jose Ignacio Rodriguez, Jose Manuel Jimenez, Francisco Javier Funes, and Javier Garcia de Jalon. Dynamic simulation of multi-body systems on internet using corba, java and xml. *Multibody System Dynamics*, 10(2):177, 2003. Compilation and indexing terms, Copyright 2006 Elsevier Inc. All rights reserved 03437687858 1384-5640 Multi-body systems.
- [86] Jesús Rojo. *Álgebra Lineal*. McGraw-Hill, Madrid, 2001.
- [87] Luis Ruiz-Maya and Javier Martin. *Estadística II: Inferencia*. Colección Plan Nuevo. Editorial AC, 1995.
- [88] B. Samadi, R. Kazemi, K. Y. Nikravesh, and M. Kabganian. Real-time estimation of vehicle state and tire-road friction forces. In *American Control Conference, 2001. Proceedings of the 2001*, volume 5, page 3318, 2001.
- [89] A. H. Sayed and T. Kailath. A survey of spectral factorization methods. *Numerical Linear Algebra With Applications*, 8(6-7):467–496, 2001. 1070-5325 SI.
- [90] S. E. Shladover. Review of the state of development of advanced vehicle control-systems (avcs). *Vehicle System Dynamics*, 24(6-7):551–595, 1995. ISI Document Delivery No.: RJ810 Times Cited: 51 Cited Reference Count: 0 English Article 0042-3114.
- [91] M. D. Shuster and S. D. Oh. Three-axis attitude determination from vector observations. *Journal of Guidance and Control*, 4(1):70, 1981. Copyright 1981, IEE 1711335 0162-3192 vector observations three-axis attitude TRIAD algorithm QUEST algorithm optimal algorithm covariance matrices measurement errors body frame single-frame attitude launch-window constraints attitude accuracies attitude sensor configurations.
- [92] Malcolm D. Shuster. Maximum likelihood estimation of spacecraft attitude. *Journal of the Astronautical Sciences*, 37(1):79, 1989. Compilation and indexing terms, Copyright 2006 Elsevier Inc. All rights reserved 89100360362 0021-9142 Spacecraft Attitude Maximum Likelihood Estimation Wahba Problem QUEST Covariance Matrix.
- [93] Malcolm D. Shuster. Simple kalman filter and smoother for spacecraft attitude. *Journal of the Astronautical Sciences*, 37(1):89, 1989. Compilation and indexing terms, Copyright 2006 Elsevier Inc. All rights reserved 89100360363 0021-9142 Spacecraft Attitude Wahba's Cost Function Kalman Filter Mechanization Wabha Problem Filter Solution.

- [94] H. C. Sohn, K. S. Hong, and J. K. Hedrick. Semi-active control of the macpherson suspension system: Hardware-in-the-loop simulations. In *Proceedings Of The 2000 Ieee International Conference On Control Applications*, pages 982–987. I E E E, New York, 2000. ISI Document Delivery No.: BR49F Cited Reference Count: 12 English Article.
- [95] H. W. Sorenson. Least-squares estimation: From gauss to kalman. *IEEE Spectrum*, 7:68, 1970.
- [96] J Stuelpnagel. On the parametrization of the three-dimensional rotation group. *SIAM Review*, 6(4):422–430, 1964.
- [97] M. Tomizuka, J. Hedrick, and H. Pham. Integrated maneuvering control for automated highway systems based on a magnetic reference sensing system. Technical Report UCB-ITS-PRR-95-12, California PATH, 1995-04-01 1995.
- [98] S. Tsugawa, T. Yatabe, T. Hirose, and S. Matsusmoto. An automobile with artificial intelligence. In *IJCAI79*, pages 893–895, 1979.
- [99] Ales Ude. Filtering in a unit quaternion space for model-based object tracking. *Robotics and Autonomous Systems*, 28(2-3):163, 1999. 0921-8890 doi: DOI: 10.1016/S0921-8890(99)00014-7.
- [100] A. Vahidi and A. Eskandarian. Research advances in intelligent collision avoidance and adaptive cruise control. *Ieee Transactions On Intelligent Transportation Systems*, 4(3):143–153, 2003. ISI Document Delivery No.: 762EU Times Cited: 15 Cited Reference Count: 95 English Article 1524-9050.
- [101] Rudolph Van Der Merwe. *Sigma-Point Kalman Filters For Probabilistic Inference In Dynamic State-Space Models*. PhD thesis, Oregon Health Camp; Science University, 2004.
- [102] Rudolph Van Der Merwe and Eric Wan. Sigma-point kalman filters for integrated navigation, 2004.
- [103] Vathsal. Spacecraft attitude determination using a second-order nonlinear filter. *Journal Of Guidance Control And Dynamics*, 10(6):559–566, 1987.
- [104] Paul J. T. H. Venhovens and Karl Naab. Vehicle dynamics estimation using kalman filters. *Vehicle System Dynamics*, 32(2):171 – 184, 1999.
- [105] G. Venture, P. J. Ripert, W. Khalil, M. Gautier, and P. Bodson. Modeling and identification of passenger car dynamics using robotics formalism. *Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on*, 7(3):349, 2006. 1524-9050.

- [106] Jesús Vidal. *Un Método General, Sencillo y Eficiente, para la Definición y Simulación Numérica de Sistemas Multicuerpo. Tesis Doctoral.* PhD thesis, Universidad Politécnica de Madrid, 2006.
- [107] J. F. Wagner. Adapting the principle of integrated navigation systems to measuring the motion of rigid multibody systems. *Multibody System Dynamics*, 11:87, 2004. [1] doi:10.1023/B:MUBO.0000014902.22416.90.
- [108] Grace Wahba. Problem 65-1: A least squares estimate of satellite attitude. *SIAM Review*, 7(3):409, 1965. 0036-1445 Article type: Full Length Article / In Group(s): Problems / Full publication date: Jul., 1965 (196507). / Copyright 1965 Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [109] A Washburn. A short introduction to kalman filters, 2004.
- [110] Eric W. Weisstein. Concise encyclopedia of mathematics cd-rom cd-rom edition 1.0., May 20,1999.
- [111] G. Welch and G. Bishop. Scaat: Incremental tracking with incomplete information. pages 333–344, 1997.
- [112] G. Welch and G. Bishop. *An Introduction to the Kalman Filter.* Department of Computer Science - University of North Carolina at Chapel Hill, Chapel Hill, NC 27599-3175, siggraph 2001 edition, 2001. ©2001 by ACM, Inc. <http://info.acm.org/pubs/toc/CRnotice.html>.
- [113] G. Welch and G. Bishop. An introduction to the kalman filter, Monday, July 24, 2006 2006.
- [114] N. Wiener. *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications.* Wiley and Sons, New York, 1949.
- [115] Lu Xiao-Yun, J. K. Hedrick, and M. Drew. Acc/cacc-control design, stability and robust performance. In *American Control Conference, 2002. Proceedings of the 2002*, volume 6, page 4327, 2002.
- [116] Yun Xiaoping, C. Aparicio, E. R. Bachmann, and R. B. McGhee. Implementation and experimental results of a quaternion-based kalman filter for human body motion tracking. In *Robotics and Automation, 2005. ICRA 2005. Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on*, page 317, 2005.
- [117] Yun Xiaoping, M. Lizarraga, E. R. Bachmann, and R. B. McGhee. An improved quaternion-based kalman filter for real-time tracking of rigid body orientation. In *Intelligent Robots and Systems, 2003. (IROS 2003).*

Proceedings. 2003 IEEE/RSJ International Conference on, volume 2, page 1074, 2003.

- [118] X. Yun, E. R. Bachmann, R. B. McGhee, R. H. Whalen, R. L. Roberts, R. G. Knapp, A. J. Healey, and M. J. Zyda. Testing and evaluation of an integrated gps/ins system for small auv navigation. *Ieee Journal Of Oceanic Engineering*, 24(3):396–404, 1999. 0364-9059.
- [119] X. P. Yun, E. R. Bachmann, S. Arslan, K. Akyol, and R. B. McGhee. An inertial navigation system for small autonomous underwater vehicles. *Advanced Robotics*, 15(5):521–532, 2001. 0169-1864.
- [120] X. P. Yuri, E. R. Bachmann, and R. B. McGhee. A simplified quaternion-based algorithm for orientation estimation from earth gravity and magnetic field measurements. *Ieee Transactions On Instrumentation And Measurement*, 57(3):638–650, 2008. 0018-9456.
- [121] Shuibo Zheng, Houjun Tang, Zhengzhi Han, and Yong Zhang. Controller design for vehicle stability enhancement. *Control Engineering Practice*, 14(12):1413, 2006.
- [122] J. Zuurbier and P. Bremmer. State estimation for integrated vehicle dynamics control. In *AVEC 2002*, 2002.