



Universidade da Coruña
Escola Superior da Mariña Civil
Departamento de Enerxía e Propulsión Mariña
Área de Ciencia e Técnicas da Navegación

TESIS DOCTORAL

**LA HIPÉRBOLA ESFÉRICA EN LA NAVEGACIÓN ASTRONÓMICA
RECTA DIFERENCIOMÉTRICA
VERDADERA NATURALEZA DE LA BISECTRIZ DE ALTURA**

**ANTONIO FRANCISCO PITA PORTA
A CORUÑA, MAYO 2003**

UNIVERSIDAD DE LA CORUÑA
DEPARTAMENTO DE ENERGÍA Y PROPULSIÓN MARINA



ÁREA DE CIENCIAS Y TÉCNICAS DE LA NAVEGACIÓN

TESIS DOCTORAL

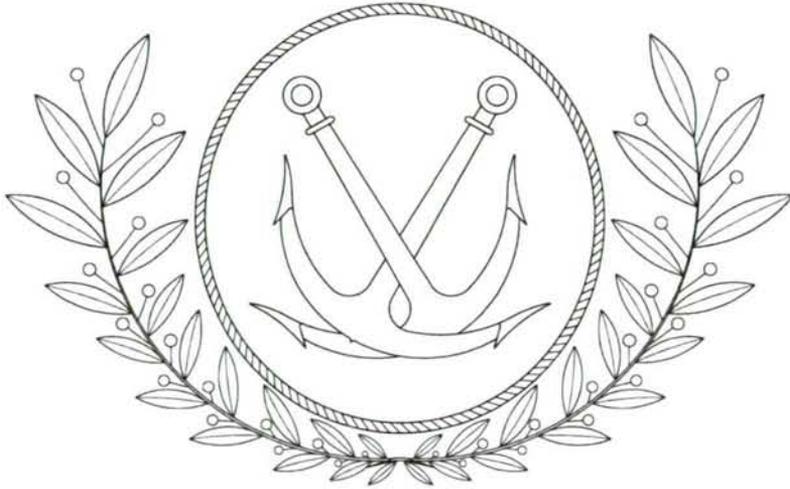
LA HIPÉRBOLA ESFÉRICA EN LA NAVEGACIÓN ASTRONÓMICA
RECTA DIFERENCIOMÉTRICA
VERDADERA NATURALEZA DE LA BISECTRIZ DE ALTURA

ANTONIO F. PITA PORTA

Mayo, 2003

TESIS DOCTORAL

LA HIPÉRBOLA ESFÉRICA EN LA NAVEGACIÓN ASTRONÓMICA RECTA DIFERENCIOMÉTRICA VERDADERA NATURALEZA DE LA BISECTRIZ DE ALTURA



AUTOR:

ANTONIO FRANCISCO PITA PORTA

DIRECTOR:

JUAN JOSÉ ACHÚTEGUI RODRÍGUEZ

“En el campo de la ciencia, el azar sólo favorece a los espíritus preparados.”

Pasteur.

Todo o que se lembra, vive... Ós buques

“LUCHANA”

“CAMPONALÓN”

“CAMPOGRÍS”

“CONOCO BRITANNIA”

“CONOCO ESPAÑA”

“JARM”

“DANOK”

“PACIFIC CURRENT”

“ESTEBLIKC”

“KIRSTEN WESCH”

“CAPE PACIFIC”

“ESTE”

“ARKAS”

Ós seus capitáns, pilotos e tripulacións.

INTRODUCCIÓN

Entre los tratados de Navegación, uno de los textos más populares entre los estudiantes de Náutica es la obra "NAVIGAZIONE", de los autores Ideale Capasso y Sergio Fede, publicado en italiano por la editorial ULRICO HOEPLI de Milán. En su edición de 1986 y en su capítulo XXVI de título "SISTEMI DI NAVIGAZIONE RADIOELETRONICA", en su página 570, epígrafe **2. Generalità sui luoghi iperbolici**, trata de la hipérbola esférica, y, en su página 573, dice literalmente:

"La curva di *uguale differenza di altezza* non ha trovato un impiego diretto nella navigazione astronomica, poichè non esiste un apparecchio capace de fornire la misura immediata della differenza tra due astri nello stesso instante de tempo ed é di difficile tracciamento sulla esfera terrestre; mentre ha trovato un impiego diretto nella navigazione iperbolica, poichè sono stati realizzati strumenti capaci di effettuare misure differenziali con la precisione richiesta ed è stato possibili tracciare su apposite carte i rilevati lioghi di posizione iperbolici".

Aunque debido a la semejanza entre castellano e italiano no es precisa la traducción, esta es la que sigue:

"La curva de igual diferencia de alturas no ha encontrado un empleo directo en la navegación astronómica, porque no existe un dispositivo (!) capaz de la medida inmediata de la diferencia entre las alturas de dos astros en el mismo instante de tiempo y es de difícil trazado sobre la esfera terrestre..."

Esta editorial, en la misma colección, publica "ASTRONOMIA NAUTICA" (NAVIGAZIONE ASTRONOMICA) que, asimismo, es uno de los textos más consultados por los estudiosos de esta disciplina, debido al autor Ferdinando Flora. En su capítulo XXI, página 456 y

siguientes, trata con gran claridad expositiva el tema de la bisectriz de altura. Del estudio de ambas obras se infiere que la bisectriz de altura y la hipérbola esférica no tienen ningún nexo en común. La referencia a los citados textos no es, y a pesar de gozar de nuestras preferencias, caprichosa, pues ninguno de los otros muchos textos manejados hace mención alguna de la posibilidad o imposibilidad del empleo del lugar geométrico de igual diferencia entre las alturas de dos astros en la navegación astronómica. Ya en el título de la presente tesis:

“LA HIPÉRBOLA ESFÉRICA EN LA NAVEGACIÓN ASTRONÓMICA
RECTA DIFERENCIOMÉTRICA
VERDADERA NATURALEZA DE LA BISECTRIZ DE ALTURA”

se establece cierta conexión entre bisectriz e hipérbola esférica, y la hipótesis fundamental es que la bisectriz de altura es una hipérbola esférica, o, más precisamente, que la bisectriz de altura es a la hipérbola esférica lo que la recta de altura a la circunferencia de alturas iguales. Demostrada en esta tesis la certeza de tal hipótesis, se desarrolla la formulación precisa para la obtención de los distintos determinantes mostrándose, además, la posibilidad de cálculo y trazado de la “recta diferenciométrica” (denominación que se propone en lugar de bisectriz de altura) de manera completamente independiente de la recta de altura, acompañando cada caso concreto con ejemplos y figuras que ilustran los conceptos expuestos. En la misma vía se demuestra la posibilidad de trazado de cartas para la navegación astronómica que, tal como se refleja en los ejemplos resueltos en los dos prototipos expuestos, podrían convertir el proceso de cálculo de la situación observada en una rutina ciertamente simple, al margen de procedimientos más o menos tediosos en los que siempre está presente la posibilidad de equivocación, y en las que las operaciones a realizar por el navegante se reducen a sencillas cuentas aritméticas, la más compleja de las cuales sería una simple interpolación lineal. En las numerosas figuras que acompañan a las explicaciones teóricas se ha procurado mantener un tamaño que aunque en algunos casos pudiera parecer algo exagerado, creemos que contribuye a una más clara interpretación de lo tratado, procurando que su leyenda esté en clara consonancia con la idea que trata de ilustrar y que su localización, al igual que la de los grupos de fórmulas desarrolladas, sea sencilla y rápida.

ESTRUCTURA DE LA TESIS

La presente tesis se estructura en quince capítulos; del I al XIV se destinan a la exposición del estado actual de la ciencia, el XV desarrolla la hipótesis fundamental desvelándose la auténtica naturaleza matemática de la bisectriz de altura, se desarrollan los procedimientos propuestos para la obtención de los diferentes determinantes y se muestran dos prototipos de carta para la navegación astronómica por corte de hipérbolas esféricas de origen astronómico. Un índice general, índice de figuras y lista de la bibliografía manejada completan este trabajo.

ÍNDICE

CAPÍTULO I

LA ESFERA CELESTE - COORDENADAS DE LOS ASTROS		Página
1	LA ESFERA CELESTE	1
2	ELEMENTOS PRINCIPALES DE LA ESFERA CELESTE	2
3	COORDENADAS DE LOS ASTROS	4
4	COORDENADAS HORIZONTALES	5
5	COORDENADAS HORARIAS	7
6	COORDENADAS ABSOLUTAS	8
7	COORDENADAS URANOGRÁFICAS ECUATORIALES	10
8	COORDENADAS URANOGRÁFICAS ECLÍPTICAS	11
9	RELACIÓN ENTRE LAS DISTINTAS CLASES DE COORDENADAS	

CAPÍTULO II

EL TRIÁNGULO DE POSICIÓN

1	TRIÁNGULO DE POSICIÓN	15
2	RELACIONES ENTRE SUS ELEMENTOS	15
3	TEOREMA DE LOS SENOS	15
4	TEOREMA DEL COSENO	16
5	RELACIÓN DE LA COTANGENTE POR EL SENO	17
6	RELACIÓN DEL SENO POR EL COSENO	17
7	RELACIONES DE BORDA	19
8	ANALOGÍAS DE NEPER	22

9	ANALOGÍAS DE DELAMBRE	24
10	TRIÁNGULO DE POSICIÓN RECTÁNGULO: REGLAS DE NEPER	25

CAPÍTULO III

MOVIMIENTO DIURNO

1	EL MOVIMIENTO DE LOS ASTROS	27
2	ARCOS DIURNO Y NOCTURNO	30
3	AMPLITUD AL ORTO	30
4	AMPLITUD AL OCASO	30
5	CASOS PARTICULARES DEL MOVIMIENTO DIURNO	30
6	POSICIONES CORRESPONDIENTES	33
7	MÁXIMAS DISGRESIONES	34
8	ASTROS CIRCUMPOLARES	36
9	VARIACIÓN DEL HORARIO DE LOS ASTROS	38
10	VARIACIÓN EN ALTURA DE LOS ASTROS	42
11	VARIACIÓN EN AZIMUT DE LOS ASTROS	47
12	RELACIÓN ENTRE LAS VARIACIONES EN ALTURA Y AZIMUT	51

CAPÍTULO IV

LA MEDICIÓN DE LA ALTURA DE LOS ASTROS

1	EL SEXTANTE	53
2	DESCRIPCIÓN DEL SEXTANTE	54
3	LECTURA DEL SEXTANTE	56
4	PUNTO INICIAL O DE PARALELISMO	60

5	PUNTO DE COLIMACIÓN O COINCIDENCIA	62
6	TÉCNICAS DE OBSERVACIÓN	64
7	MÉTODOS PARA DETERMINAR EL ERROR DE ÍNDICE	66
8	EXAMEN Y RECTIFICACIÓN DEL SEXTANTE	70
9	ERRORES DE PRISMATISMO	72
10	PRISMATISMO DE LOS ESPEJOS	75
11	VIDRIOS DE COLOR	80
12	ERROR DEBIDO A LA EXCENTRICIDAD DE LA ALIDADA	83

CAPÍTULO V

CORRECCIONES A LAS ALTURAS DE LOS ASTROS

1	POSICIONES VERDADERAS Y APARENTES	101
2	LAS CORRECCIONES A LAS ALTURAS OBSERVADAS	101
3	ESTUDIO DE LA DEPRESIÓN APARENTE, D_a	103
4	LA DISTANCIA AL ÚLTIMO PUNTO VISIBLE, d_{hv}	106
5	LA DEPRESIÓN DE LA LÍNEA DE COSTA, D'_c	108
6	EL ÁNGULO DE PARALAJE, π	110
7	LA CORRECCIÓN POR SEMIDIÁMETRO, σ	113
8	LA REFRACCIÓN ASTRONÓMICA, r_a	116
9	ORDEN DE APLICACIÓN DE LAS CORRECCIONES	123
10	CORRECCIONES A LA ALTURA DE LUNA	124
11	CORRECCIONES A LA ALTURA DE SOL	125
12	CORRECCIONES A LA ALTURA DE UN PLANETA	125
13	CORRECCIONES A LA ALTURA DE UNA ESTRELLA	126

CAPÍTULO VI

OBSERVACIÓN CON HORIZONTE ARTIFICIAL

1	NECESIDAD DEL HORIZONTE ARTIFICIAL	127
2	DISTINTOS TIPOS DE HORIZONTE ARTIFICIAL	127
3	HORIZONTE ARTIFICIAL DE MERCURIO	128
4	HORIZONTE DE BURBUJA	132

CAPÍTULO VII

LA MEDIDA DEL AZIMUT

1	OBJETO DE LA MEDIDA DEL AZIMUT	136
2	INSTRUMENTOS DE MEDIDA	136
3	LA ALIDADA AZIMUTAL	137
4	LA ALIDADA AZIMUTAL DEL I.H. DE ITALIA	138
5	ALIDADA AZIMUTAL THOMSON	139
6	CÍRCULO DE MARCAR	142
7	ERRORES EN EL AZIMUT	143
8	ERROR EN EL AZIMUT COMO CONSECUENCIA DE LA INCLINACIÓN DEL PLANO DE COLIMACIÓN	144
9	ERROR EN EL AZIMUT COMO CONSECUENCIA DE LA INCLINACIÓN DEL PLANO DE LA ROSA	146

CAPÍTULO VIII

LA MEDIDA DEL TIEMPO

1	EL CRONÓMETRO	151
2	EL CRONÓMETRO EN LA NAVEGACIÓN	151

3	COMPONENTES DE UN CRONÓMETRO MARINO CLÁSICO	154
4	REGULADOR	154
5	EL MOTOR	155
6	RODAJE	156
7	ESCAPE	157
8	VOLANTE COMPENSADO	159
9	CONDICIÓN ESENCIAL DEL CRONÓMETRO	161
10	EL CRONÓMETRO MODERNO	166
11	ESTADO ABSOLUTO Y MOVIMIENTO DEL CRONÓMETRO	174
12	HORAS DEL CRONÓMETRO Y DEL PRIMER MERIDIANO	175

CAPÍTULO IX

EL RECONOCIMIENTO DE LOS ASTROS

1	INTRODUCCIÓN	176
2	RECONOCIMIENTO ANALÍTICO	177
3	RECONOCIMIENTO POR MEDIO DE LAS TABLAS NÁUTICAS	178
4	RECONOCIMIENTO ORTOGRÁFICO	179
5	PLANISFERIOS E IDENTIFICADORES	180
6	PROYECCIÓN AZIMUTAL EQUIDISTANTE	181
7	RECONOCIMIENTO EN EL ALMANAQUE NÁUTICO	184
8	DESCRIPCIÓN DEL STAR FINDER 2102-D	189
9	MANEJO DEL STAR FINDER 2102-D	192
10	FIJAR UN PLANETA EN EL STAR FINDER 2102-D	197
11	CONSTRUCCIÓN DE UN IDENTIFICADOR DE ASTROS	198

12	ENFILACIONES MÁS COMUNES PARA EL RECONOCIMIENTO	199
----	---	-----

CAPÍTULO X

CÁLCULO DE LA LATITUD

1	LA TIERRA FORMA Y DIMENSIONES	214
2	COORDENADAS GEOGRÁFICAS EN ELIPSOIDE Y GEOIDE	220
3	RADIOS DE CURVATURA PRINCIPALES	220
4	LONGITUD DEL ARCO DE PARALELO	223
5	LONGITUD DEL ARCO DE MERIDIANO	224
6	LÍNEA GEODÉSICA	224
7	TIERRA ESFÉRICA	227
8	LATITUD ASTRONÓMICA Y ALTURA DEL POLO	230
9	CIRCUNFERENCIA DE ALTURAS IGUALES	231
10	EL CÁLCULO DE LA LATITUD	235
11	LATITUD POR ALTURA FUERA DEL MERIDIANO	236
12	LATITUD POR ALTURA MERIDIANA	237
13	LATITUD POR ALTURA CIRCUNMERIDIANA	239
14	TIEMPO LÍMITE DE LA CIRCUNMERIDIANA	241
15	LATITUD POR DOS CIRCUNMERIDIANAS Y EL INTERVALO	241
16	LATITUD POR DOS CIRCUNMERIDIANAS EQUIDISTANTES	244
17	ALTURAS MERIDIANA Y DE CULMINACIÓN	245
18	SERIE DE ALTURAS CIRCUNMERIDIANAS	248
19	LATITUD POR DOS ALTURAS EN EL VERTICAL	249
20	LATITUD POR ALTURA DE LA POLAR	251

CAPÍTULO XI

EL CÁLCULO DE LA LONGITUD

1	LA LONGITUD	259
2	LONGITUD POR LA OBSERVACIÓN DE LA ALTURA DE UN ASTRO	260
3	MÉTODO DE LITTROW	261
4	MÉTODO DE MAGNAC	263
5	MÉTODO DE CARDONA	264
6	LONGITUD POR EL ORTO U OCASO DEL SOL	265
7	LONGITUD POR ALTURAS CORRESPONDIENTES	267
8	MÉTODO GOODWIN	272
9	LONGITUD POR DISTANCIAS LUNARES	274
10	LONGITUD POR ASCENSIONES RECTAS DE LA LUNA	282

CAPÍTULO XII

LA RECTA DE ALTURA

1	LA SITUACIÓN ASTRONÓMICA	284
2	CURVAS DE ALTURAS IGUALES	290
3	LA RECTA DE ALTURA	310
4	SUSTITUCIÓN DEL ARCO DE CURVA POR UNA RECTA	313
5	SEPARACIÓN ENTRE LA RECTA Y LA CURVA	313
6	TRAZADO DE LAS RECTAS DE ALTURA	315
7	SECANTE DE ALTURA	315
8	LA TANGENTE DE ALTURA Y SUS DETERMINANTES	317
9	ECUACIÓN DE LA RECTA DE ALTURA	324

10	SITUACIÓN POR CORTE DE DOS O MÁS RECTAS DE ALTURA	325
11	CASOS PARTICULARES DE LA RECTA DE ALTURA	330
12	ERRORES EN LA RECTA DE ALTURA	331
13	ERROR EN LA RECTA DE ALTURA PARA UN ERROR EN LA HORA	332
14	ERROR EN LA RECTA DE ALTURA LOXODRÓMICA	335
15	REDUCCIÓN DE UNA ALTURA AL ÚLTIMO HORIZONTE	338
16	UTILIDAD DE UNA SOLA RECTA DE ALTURA	341
17	EL MÉTODO DE DOWES	346
18	SITUACIÓN POR ALTURAS PRÓXIMAS AL ZENIT	348

CAPÍTULO XIII

CIRCUNSTANCIAS FAVORABLES PARA LA OBSERVACIÓN

1	GENERALIDADES	351
2	ATENUACIÓN DE LOS ERRORES EN LA OBSERVACIÓN	352
3	IDENTIFICACIÓN DE ALTURAS ERRÓNEAS EN UNA SERIE	353
4	ERRORES EN LA ALTURA CALCULADA	355
5	ERRORES EN EL HORARIO CALCULADO	362
6	ERRORES EN LA LATITUD CALCULADA	370
7	ERRORES EN EL AZIMUT CALCULADO	377

CAPÍTULO XIV

SITUACIÓN OBSERVADA POR CORTE DE DOS O MÁS RECTAS DE ALTURA BISECTRIZ DE ALTURA

1	SITUACIÓN POR CORTE DE DOS RECTAS DE ALTURA	382
---	---	-----

2	ERRORES EN LA SITUACIÓN CON DOS RECTAS DE ALTURA	382
3	ERRORES EN LAS ALTURAS OBSERVADAS	383
4	LA BISECTRIZ DE ALTURA	390
5	ERROR ACCIDENTAL EN LA BISECTRIZ DE ALTURA	391
6	SITUACIÓN POR CORTE DE BISECTRICES DE ALTURA	394

CAPÍTULO XV

LA HIPÉRBOLA ESFÉRICA EN LA NAVEGACIÓN ASTRONÓMICA RECTA DIFERENCIOMÉTRICA VERDADERA NATURALEZA DE LA BISECTRIZ DE ALTURA

1	HIPÉRBOLA ESFÉRICA Y NAVEGACIÓN ASTRONÓMICA	401
2	ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA ESFÉRICA	404
3	HIPÉRBOLA Y ELIPSE ESFÉRICAS	409
4	RECTA DIFERENCIOMÉTRICA	411
5	RECTA DIFERENCIOMÉTRICA SECANTE	413
6	RECTA DIFERENCIOMÉTRICA TANGENTE	419
7	CARTA PARA LA NAVEGACIÓN ASTRONÓMICA	447

CAPÍTULO I

LA ESFERA CELESTE — COORDENADAS DE LOS ASTROS

1. LA ESFERA CELESTE. — El fondo sobre el que son observados los cuerpos del firmamento, aparece al observador como la superficie interna de una esfera de la que él mismo ocupa el centro. Esta ilusión óptica, que encuentra su justificación en la incapacidad de la vista para apreciar las distancias relativas a los astros apreciando únicamente distancias angulares, es decir, los ángulos que forman entre sí las semirrectas con origen en el ojo del propio observador, recibe el nombre de esfera celeste. La observación sobre la superficie terrestre limita la visión a algo más de la mitad de tal esfera, llamada bóveda celeste; para un observador en el espacio exterior la sensación, sin embargo, es la de ocupar el centro de una esfera completa sobre la cual se proyectan todos los cuerpos celestes. La consideración de esta esfera celeste, de radio arbitrario, [VIVE-1971] como representativa de las direcciones de los astros, simplifica el estudio de sus movimientos y es usada para la resolución de numerosos

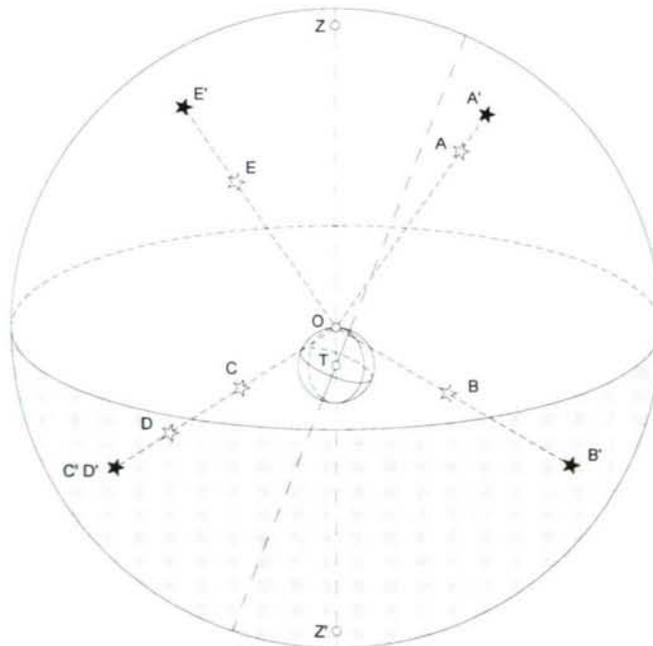


Fig-1.1.I- La esfera celeste

problemas de astronomía esférica. Según la posición del observador, así tiene una denominación específica la esfera celeste: si el observador ocupa la situación genérica de la figura 1.1.I, se tiene la esfera celeste local o topocéntrica, si su ubicación fuera el centro de la Tierra, la esfera sería geocéntrica, heliocéntrica si su centro fuera el del Sol etc. Debido a las inmensas distancias a las estrellas, estas esferas son, en la práctica, una sola, pero cuando los astros son Luna, Sol o planetas, no puede asumirse esa coincidencia [RIBE-1956].

2. ELEMENTOS PRINCIPALES DE LA ESFERA CELESTE. — El eje instantáneo de rotación de la Tierra, corta a la esfera celeste en dos puntos conocidos como polos del mundo. La vertical astronómica del observador, materializada por el hilo de la plomada¹, la corta en los puntos zenit, el inmediatamente situado sobre el observador, y nadir, diametralmente opuesto al zenit; el plano perpendicular a esta línea en el lugar de observación, es el plano del horizonte. Determina en su intersección con la esfera celeste el círculo máximo [MIDE-1973] de la misma conocido como horizonte celeste: los puntos zenit y nadir son, entonces, los polos del horizonte celeste. El horizonte celeste así definido, es el local, aparente o sensible; cuando el plano en cuestión pasa por el centro de la Tierra, se tiene el horizonte celeste verdadero, racional o geocéntrico. El horizonte divide a la esfera en dos hemisferios: el visible, que contiene al zenit, y el invisible, que contiene al nadir. Cuando se considera la elevación del ojo del observador, aparece un nuevo tipo de horizonte, el horizonte visible: permite la observación de cierta parte del hemisferio invisible y resulta de la intersección con la esfera celeste, de una superficie cónica con vértice en el ojo del observador, y cuya generatriz es tangente en el vértice, a la trayectoria del rayo de luz que procede del último punto visible. Es de señalar que tal trayectoria es curva, como consecuencia del fenómeno de la refracción terrestre. Polo elevado es aquel que pertenece al hemisferio visible, el otro, es el polo depreso. Meridiano del observador es el círculo máximo de la esfera celeste que contiene al eje del mundo y a la vertical astronómica del lugar, su plano, que divide a la esfera celeste en los hemisferios oriental y occidental, es

1 Si la Tierra fuera una esfera perfecta, con una homogénea distribución de su masa, la vertical astronómica coincidiría con el radio geocéntrico, cortando al eje de rotación en el centro. No dándose, en la práctica, estas condiciones ideales, el radio geocéntrico y la vertical que, en general, no corta al eje de rotación (que tampoco es único), forman un ángulo muy pequeño llamado ángulo de la vertical, su valor en segundos de arco viene dado por la expresión:

$$\theta'' = 690'',6 \operatorname{sen} 2\varphi$$

en la que φ es la latitud geográfica. Alcanza su máximo valor para $\varphi = 45^\circ$.

perpendicular al del horizonte, la intersección de ambos planos es la línea meridiana o línea Norte - Sur verdaderos, la perpendicular a esta, es la línea Este - Oeste. Meridiano superior del lugar es el arco de meridiano que, conteniendo al zenit, tiene sus extremos en los polos del mundo, el meridiano inferior del lugar contiene al nadir. Las figuras 1.1

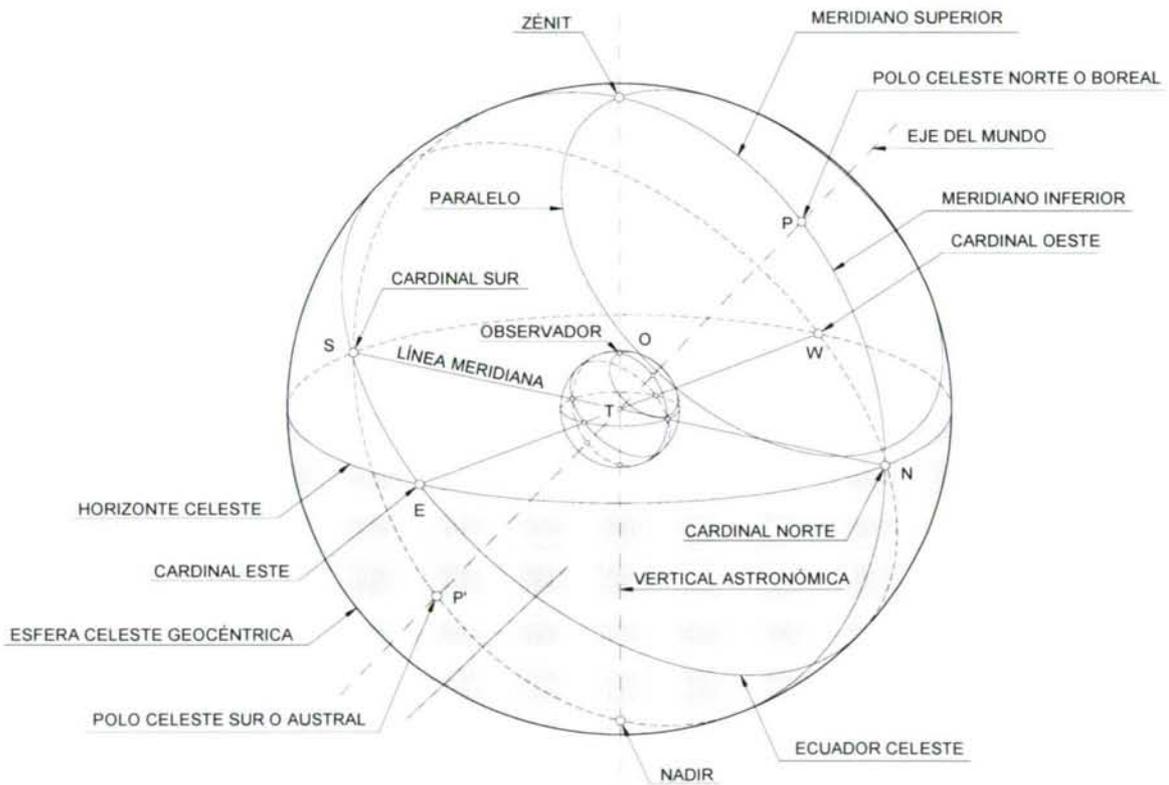


Fig-1.3.I- Esfera celeste geocéntrica.

y 2.1 muestran de forma esquemáticamente todo lo descrito: la primera de ellas nos muestra la esfera celeste local o topocéntrica, y las posiciones aparentes de los astros que resultan de la intersección con su superficie, de las visuales que parten del ojo del observador; para las estrellas C y D, situadas en el mismo proyectante, se obtiene una sola imagen. La figura siguiente muestra los elementos principales de la esfera celeste pudiendo contemplar la clara correspondencia existente entre los puntos de esta y los de la propia Tierra. La consideración del, ya citado, horizonte visible como consecuencia de la elevación del observador, permite la observación de parte del hemisferio invisible,

el sombreado en las figuras, derivándose de ello diversas curiosidades ligadas al movimiento diurno aparente de los astros, la principal de las cuales es la de las distintas clases de ortos y ocasos, muy particularmente por su importancia en navegación, los de Sol y Luna. Las distintas clases de horizontes se reflejan en la figura 3, en la que

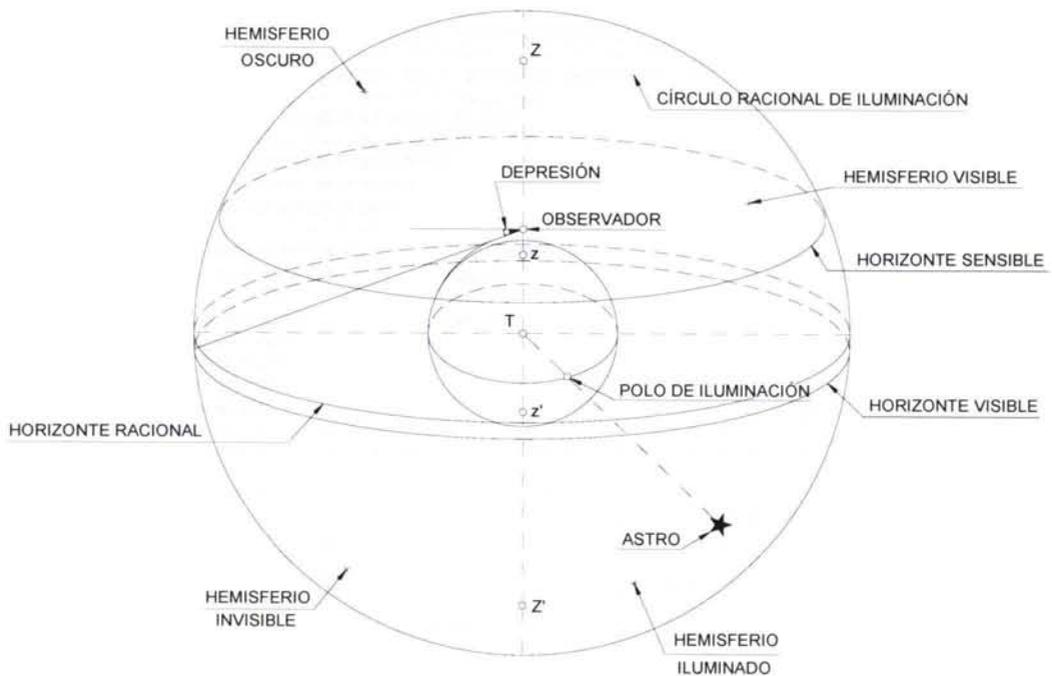


Fig-1.4.1- Horizontes sensible, visible y racional.
Polo de iluminación y círculo racional.

además se muestran: el polo de iluminación de un astro, punto de la superficie de la Tierra que tiene al astro en su zenit, y el círculo racional de iluminación, que es el círculo máximo uno de cuyos polos es, precisamente, el de iluminación. Este círculo divide a la esfera en dos hemisferios, el iluminado y el oscuro. El observador cuyo zenit sea un punto del círculo racional de iluminación, contemplará al astro en su horizonte verdadero. Un claro ejemplo de este círculo racional puede observarse en las fases lunares, recibiendo también, en este caso, el nombre de terminatriz.

3. COORDENADAS DE LOS ASTROS. — La extensión del método de las

coordenadas geográficas a los astros es atribuida al gran Hiparco². Los sistemas de coordenadas curvilíneas de interés en Navegación Astronómica son: coordenadas horizontales, coordenadas horarias relativas y sistema de coordenadas horarias absolutas, llamadas también estas últimas uranográficas ecuatoriales. Su estudio detallado se realiza a continuación.

4. COORDENADAS HORIZONTALES. — Su plano fundamental es del horizonte celeste, tienen por línea fundamental la vertical astronómica, y, para los fines náuticos, origen en el cardinal Norte; astronómicamente, su origen es el cardinal Sur. Planos secundarios son los verticales y los paralelos al horizonte, que determinan las líneas siguientes:

Vertical.- círculo máximo de la esfera celeste que contiene a la vertical del lugar. Esto implica que todo vertical contiene al zenit y al nadir y que su plano es perpendicular al del horizonte; son notables el vertical primario o primer vertical, que es el que pasa por los cardinales Este y Oeste, y el meridiano, que divide a la esfera celeste en los hemisferios oriental y occidental.

Almicantarat³.- círculo menor de la esfera celeste con su plano paralelo al del horizonte, en algunos textos, sobre todo en los de carácter militar, aparece con el nombre de almicantarada.

Las coordenadas en este sistema son:

Altura.- La altura de un astro es el arco de vertical contado desde el horizonte celeste hasta el almicantarat que pasa por el centro del astro. Se cuenta de 00° (astro en el horizonte), a 90° (astro en el zenit). Es siempre positiva; cuando el astro está bajo el horizonte, esta coordenada recibe el nombre de depresión. El complemento de la altura, es la distancia zenital, y los astros que están en el mismo almicantarat tienen idéntica altura.

2 Hiparco vivió en el siglo II a. J. C. Ignorándose el año concreto de su nacimiento, se supone que su existencia transcurrió hacia el año 130. La ciencia debe a su portentoso genio, entre otros, los siguientes logros: midió, (sus medidas angulares dan precisiones próximas a los 12', lo que es asombroso si se consideran los instrumentos de que disponía), la inclinación de la eclíptica con mucha más precisión que Eratóstenes. Descubrió la precesión de los equinoccios, ideó el astrolabio y la proyección estereográfica, formó tablas astronómicas y se le debe también la invención de la Trigonometría.

3 Palabra que, como muchísimas más en Astronomía, es de origen árabe; significa "en forma de cántaro". Otra traducción posible es "de forma abovedada", en clara referencia a la bóveda celeste.

Azimut.- Por azimut de un astro entendemos el arco de horizonte celeste

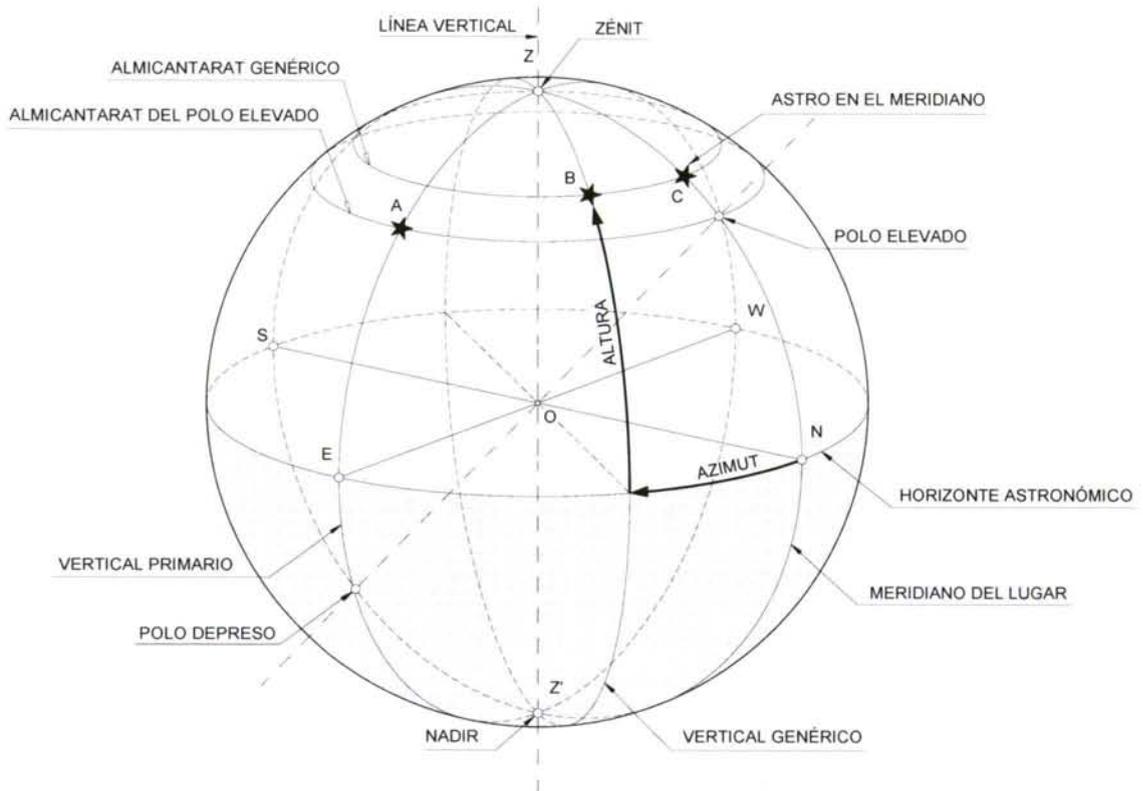


Fig-1.6.I- Coordenadas horizontales

contado desde el cardinal Norte, hasta el pié del vertical que pasa por el centro del astro, de 000° a 360° en sentido horario y la cuenta, en este caso, se dice circular. Cuando el origen es el cardinal Sur y el sentido el mismo que en el caso anterior, la cuenta es astronómica. Desde el punto de vista del interés náutico puede contarse, y así se hace a veces, en forma cuadrantal; desde el Norte o desde el Sur hacia el Este o el Oeste, siempre menor de 90° , su complemento (cuando la cuenta es cuadrantal), es la amplitud, ortiva u oriental si el astro está al orto y occídua u occidental si es al ocaso. Todos los astros que están en el mismo vertical tienen igual azimut. Un astro con azimut 090° está en el vertical primario a oriente; si el azimut son 270° , está en este mismo vertical a occidente. Los astros en el meridiano presentan azimut Norte (000°), o Sur (180°). El ángulo en el zenit, o ángulo zenital, tiene el valor del azimut.

La figura 4.6.I muestra este sistema de coordenadas, que por depender de la

posición del observador, es relativo.

5. COORDENADAS HORARIAS.— Tienen como plano fundamental el del ecuador celeste, como línea fundamental la línea de los polos, y su origen es el punto de intersección del ecuador celeste con el meridiano superior del lugar. Se había definido ya el ecuador celeste como el círculo máximo de la esfera celeste cuyo plano es perpendicular a la línea de los polos; este plano es el del ecuador terrestre y divide a la esfera celeste en los hemisferios Norte o Boreal y Sur o Austral. Planos secundarios son los perpendiculares al ecuador que contienen a la línea de los polos, y los paralelos al mismo, que definen las siguientes líneas:

Círculo horario.— Círculo máximo de la esfera celeste cuyo plano contiene a la línea de los polos; es un meridiano celeste. Son notables el meridiano del lugar, ya definido, y único caso en el que el vertical coincide con el círculo horario, y el primer círculo horario que es aquel que pasa por los cardinales Este

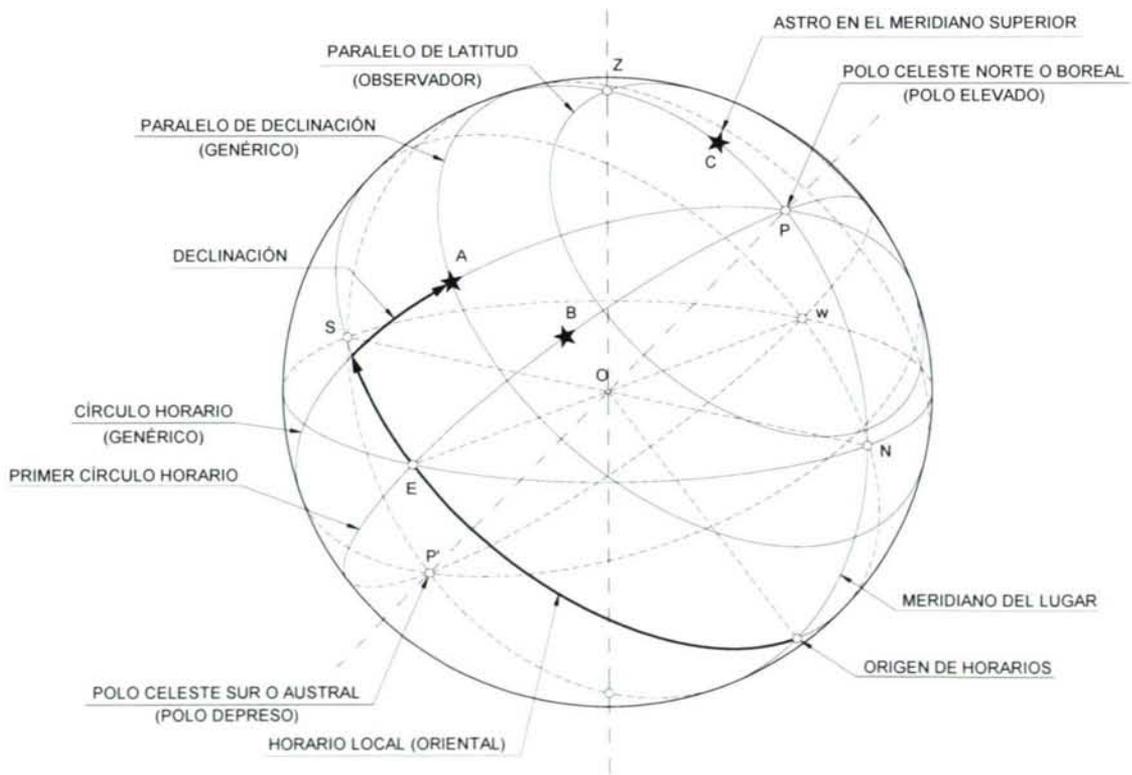


Fig-1.7.I- Coordenadas horarias

y Oeste.

Paralelo de declinación.- Círculo menor de la esfera celeste, con plano paralelo al del ecuador.

Las coordenadas en este sistema son:

Declinación.- Arco de círculo horario contado desde el ecuador celeste hasta el paralelo de declinación que se considere. Se cuenta, igual que la latitud, de 00° a 90° norte o sur. La distancia polar de un astro es el arco de círculo horario contado desde el polo elevado, es decir desde aquel que está sobre el horizonte, hasta el paralelo de declinación del astro; los astros con declinación de nombre distinto a la latitud del observador, tienen distancia polar mayor de 90° .

Horario.- También llamado horario del astro en el lugar y horario local, es el arco de ecuador celeste comprendido entre la intersección de este con el meridiano superior, y el pie del círculo horario que pasa por el centro del astro. Se cuenta de 000° a 360° , siempre occidental. Náuticamente el horario local se cuenta de 000° a 180° occidental u oriental y, en este caso, su valor es el del ángulo en el polo. Los astros en el meridiano superior tienen de horario local 000° , los que están en el meridiano inferior lo tienen de 180° , y los que están en el primer círculo horario, tienen 090° o 270° . El horario puede ser expresado en tiempo, aunque no es lo usual; la diferencia ascensional, que sí suele expresarse en tiempo, es el arco de ecuador celeste contado desde el primer círculo horario hasta el pie del que pasa por el centro del astro; su uso se limita a los instantes de los ortos y los ocasos.

En la figura 5.7.1 se refleja todo lo referente a este sistema de coordenadas, que por ser dependiente de la posición del observador (el horario se cuenta desde el meridiano superior), es también relativo.

6. COORDENADAS ABSOLUTAS.— La necesidad de un sistema de coordenadas independientes del observador y la existencia de un plano que como el del ecuador celeste cumple esa condición de independencia, hizo pensar en un punto fijo situado sobre él, de forma tal que el sistema de coordenadas así resultante es absoluto. Por razones prácticas se eligió como punto origen el de Aries siendo el eje del mundo la línea fundamental del sistema. Se hace necesario el conocimiento de

algunos elementos de la esfera celeste, no definidos hasta este momento, e íntimamente relacionados con los sistemas de coordenadas que tratamos:

Eclíptica.- La Tierra realiza su movimiento de traslación alrededor del Sol en un año describiendo su órbita en el plano de la eclíptica⁴; este plano determina en su intersección con la esfera celeste, el círculo máximo de la misma que se conoce con el nombre de eclíptica. Polos de la eclíptica son los puntos π y π' de la figura 6.9.I, resultan de la intersección con la esfera celeste de la recta que, pasando por su centro, es perpendicular al plano de la eclíptica. La intersección de los planos del ecuador celeste y de la eclíptica, es la línea de

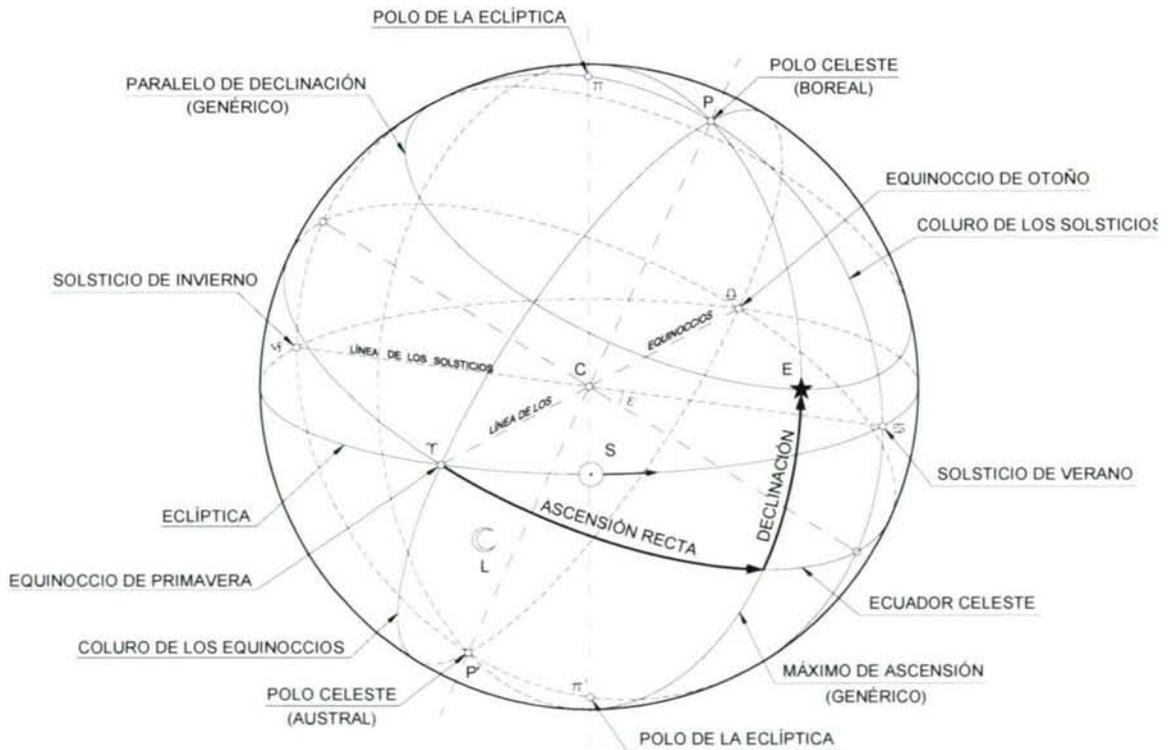


Fig-1.9.I- Coordenadas absolutas

⁴ Tal órbita sería elíptica y plana si no hubiese otros astros implicados, en cuyo caso el movimiento sería newtoniano. La existencia de otros campos gravitatorios convierte el movimiento en complejo y no puede hablarse, en rigor, de una órbita plana. A estos efectos se considera una eclíptica teórica, llamada eclíptica media.

los equinoccios⁵, o línea Aries-Libra, ($\Upsilon \Omega$), puntos de intersección de esta con la esfera celeste. La perpendicular común a la línea de los equinoccios y a la de los polos de la eclíptica, es la línea de los solsticios⁶.

Coluros.- El plano determinado por la línea de los equinoccios y el eje del mundo, recibe el nombre de plano del coluro de los equinoccios; el plano que determinan la línea de los solsticios y el mismo eje del mundo, es el plano del coluro de los solsticios; ambos planos son mutuamente perpendiculares. Coluros son, pues, los círculos máximos que resultan de la intersección de los planos definidos, con la esfera celeste⁷.

7. COORDENADAS URANOGRÁFICAS ECUATORIALES.— Conocidas también con el nombre de horarias absolutas, tienen como plano fundamental el del ecuador celeste, eje principal el del mundo, y origen el primer punto de Aries, equinoccio de primavera o punto vernal, ver figura 6.9.I. Elementos secundarios son:

Máximos de ascensión.- Círculos máximos cuyo plano, contiene al eje del mundo. Son meridianos celestes; en la mayoría de la bibliografía sobre el tema, se definen como círculos horarios; ambos coluros son, a su vez, máximos de ascensión.

Paralelos de declinación.- Son los ya descritos para el sistema de coordenadas horarias relativas.

Las coordenadas en este sistema son:

Ascensión recta.- Contada en tiempo, de 00 a 24 horas en el sentido de la marcha del Sol en la eclíptica, la ascensión recta de un astro es el arco de ecuador celeste comprendido entre el primer punto de Aries y el pie del máximo

5 Equinoccio, igualador, de igual duración del día y de la noche. Sucede, aproximadamente, el 21 de marzo pasando el Sol del hemisferio sur al norte, y el 21 de setiembre el sol corta la equinoccial, pasando del hemisferio norte al sur.

6 Solsticio, Sol en estación, Sol parado. Se refiere a los instantes en los que el Sol alcanza su declinación máxima, = $23^{\circ} 27' \pm$. Suceden, aproximadamente, los días 21 de junio, solsticio de verano, declinación máxima positiva o norte, y 21 de diciembre, declinación máxima negativa o sur.

7 El significado de coluro es "en forma de cola de uro", en referencia al, ya extinto, bóvido europeo. En algunos tratados, los coluros se sitúan conteniendo ambos los polos de la eclíptica, esto sucede solo con el de los solsticios. La definición que aquí se da, concuerda con la que aparece en la obra de Galileo.

de ascensión que pasa por el centro del astro. El arco de ecuador celeste comprendido entre el primer punto de Aries y el pie del máximo de ascensión, contado en arco y en sentido opuesto a la ascensión recta, es el ángulo sidéreo; esta, por razones de índole práctica, es la coordenada manejada por los navegantes en lugar de la primera. Los astros en el primer máximo, poseen una ascensión recta de 00 horas, al cortar el coluro de los solsticios en Cáncer, su ascensión recta es 0600 horas, en el coluro de los equinoccios en Libra, esta es de 1200 horas, en Capricornio 1800 horas etc.

Declinación.- Es el arco de máximo de ascensión contado desde el ecuador hasta el paralelo de declinación. Es la misma, como ya se ha dicho, que la de las coordenadas horarias, y se cuenta de igual manera. Cabe reseñar, en ambos sistemas, paralelos de declinación notables cuales son los que en la esfera terrestre corresponden a los trópicos; Indican el valor máximo de la declinación del Sol, equivalente a la oblicuidad de la eclíptica⁸. El del hemisferio norte es el trópico de Cáncer (ϖ), el de Capricornio (ν), es el del sur; los círculos polares tienen de latitud la declinación de los polos de la eclíptica.

8. COORDENADAS URANOGRÁFICAS ECLÍPTICAS.— Su plano fundamental es el de la eclíptica, línea principal es la de sus polos, y origen en el primer punto de Aries, figura 7.12.I. Líneas secundarias del sistema son:

Máximos de longitud.- Círculos máximos de la esfera celeste, cuyo plano contiene los polos de la eclíptica; máximo principal es el $\pi\Upsilon\pi'$, máximo opuesto es el $\pi\Omega\pi'$, máximos perpendiculares son los $\pi\varpi\pi'$ y $\pi\nu\pi'$, figura 7.12.I.

Paralelos de la eclíptica.- O paralelos de latitud celeste, son los círculos menores de la esfera celeste, con plano paralelo al de la eclíptica.

Las coordenadas en este cuarto sistema son:

Longitud celeste.- Arco de eclíptica contado desde el primer punto de Aries, hasta el pie del máximo de longitud correspondiente. Al igual que la ascensión recta, se cuenta en el sentido de la marcha del Sol en la eclíptica, de

8 Su valor es para la época J2000.0, $\varepsilon = 23^\circ 26' 21''.44$, según el Sistema de Constantes Astronómicas, UAI (1976).

000° a 360°; la longitud celeste de un astro en el máximo principal es, obviamente, 000°, en el primer máximo perpendicular la longitud celeste es 090°, en el máximo opuesto es 180° etc.

Latitud celeste.- Arco de máximo de longitud comprendido entre la eclíptica y el paralelo de latitud celeste considerado. Se cuenta de 00° a 90°, de especie norte o positiva, y negativa o sur.

9. RELACIÓN ENTRE LAS DISTINTAS CLASES DE COORDENADAS QUE SE MIDEN EN EL ECUADOR.— Las coordenadas que tienen como plano fundamental el del ecuador son:

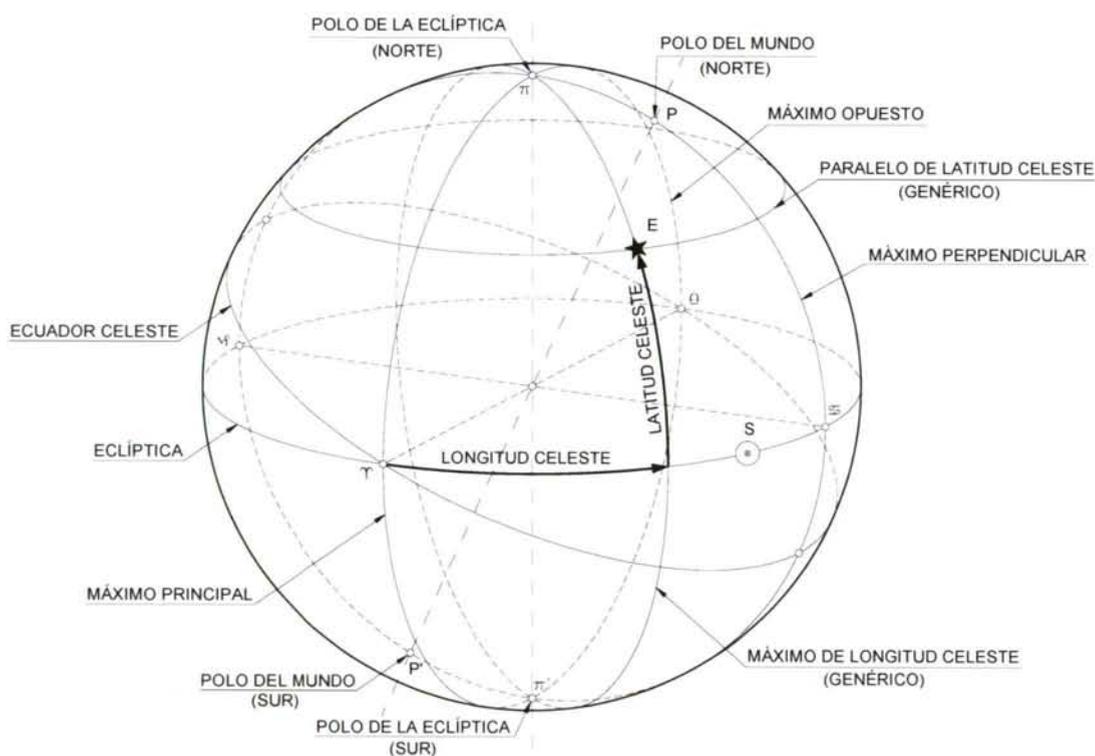


Fig -1.12.I - Coordenadas uranográficas eclípticas

- Las geográficas, latitud φ y longitud λ .
- Las horarias, horario local h_l o ángulo en el polo P, y declinación d .
- Las uranográficas ecuatoriales (horarias absolutas), ascensión recta AR o en su lugar el ángulo sidéreo AS, y declinación d .

La relación que liga estas tres clases de coordenadas, como puede observarse en la figura 8.13.I, es la siguiente:

$$hl_{\star} = hGY + AS_{\star} - \lambda \quad (1.13.I)$$

Expresión que se deriva de las que a continuación se indican:

$$hIY = hGY - \lambda \quad (a.13.I)$$

$$hG_{\star} = hGY + AS_{\star} \quad (b.13.I)$$

En estas fórmulas, la longitud λ tiene signo positivo (+), si es Este, signo negativo (-) si Oeste. Los horarios en Greenwich de Aries (hGY), horarios en Greenwich y declinaciones de Sol (hG_{\odot}, d_{\odot}), Luna ($hG_{\text{☾}}, d_{\text{☾}}$), Venus ($hG_{\text{♀}}, d_{\text{♀}}$), Marte ($hG_{\text{♂}}, d_{\text{♂}}$), Júpiter ($hG_{\text{♃}}, d_{\text{♃}}$) y Saturno ($hG_{\text{♄}}, d_{\text{♄}}$), los facilita el Almanaque Náutico, el argumento de entrada es la hora de Tiempo Universal (TU), de hora en hora, con las correspondientes tablas de correcciones por los minutos y segundos (la precisión requerida en la hora no va mas allá del segundo). El ángulo sidéreo y la declinación de las principales estrellas de interés para la práctica de la Navegación Astronómica (un

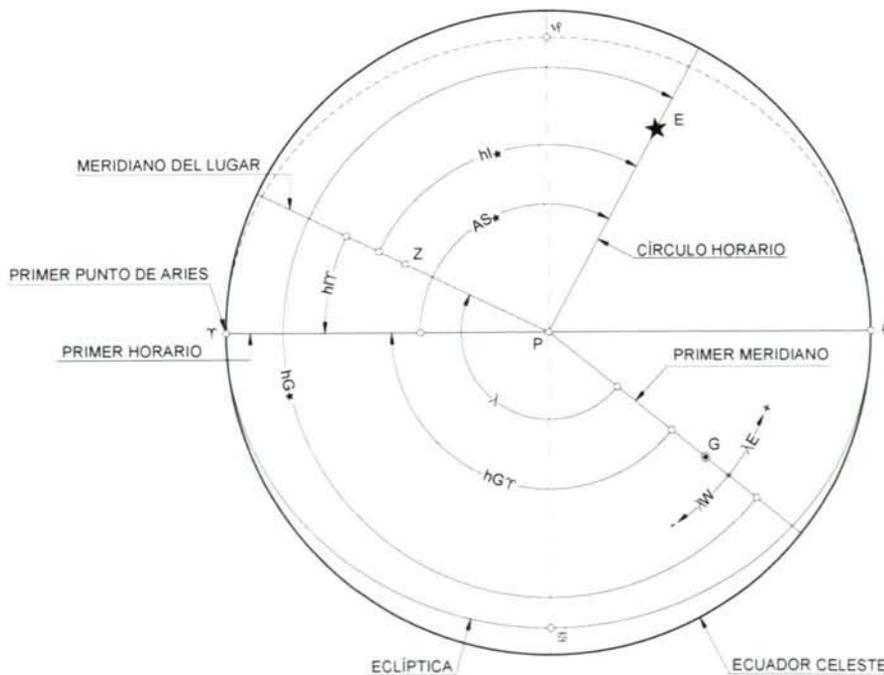


Fig-1.13.I - Relación entre coordenadas ecuatoriales

total de 99), viene en esta misma publicación anual.

De la expresión 1.13.I, deducimos la relación fundamental de la Astronomía de

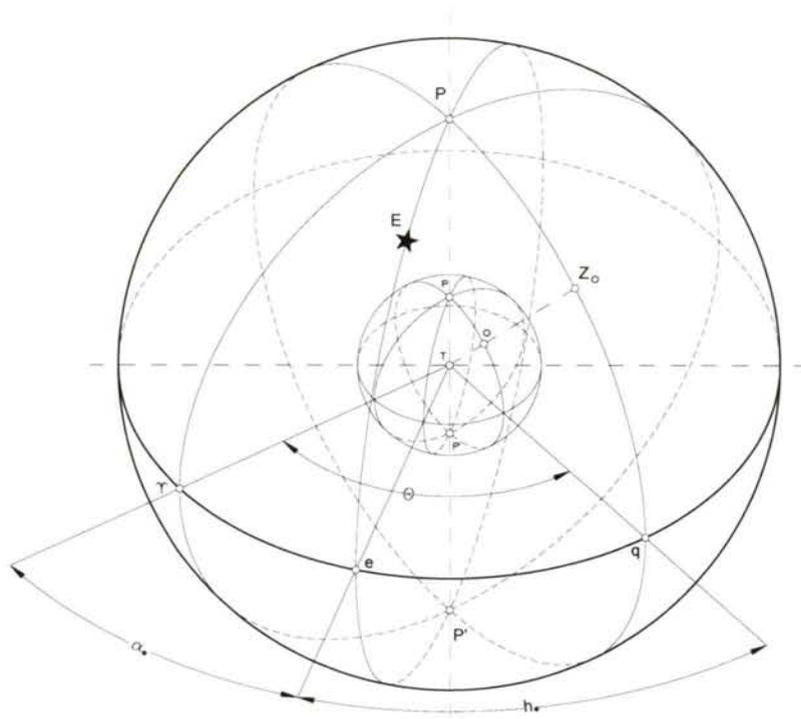


Fig -1.14.I - Relación fundamental de la Astronomía de Posición

posición, figura 9.14.I; sea Z_0 el zenit del observador O, PZ_0qP' el meridiano superior de este observador, $PEeP'$ el círculo horario del astro E y $P\gamma P'$ el círculo horario del primer punto de Aries (γ), se tiene:

$$\theta = h_{\star} + \alpha \quad (1.14.I)$$

Ecuación en la que θ es la hora sidérea, α la ascensión recta del astro E, y h_{\star} es el horario del astro en el lugar u horario local. “La hora sidérea es igual a la suma del horario de un astro más su ascensión recta”. Mientras, como consecuencia del movimiento de rotación de la Tierra, el horario h_{\star} de un astro aumenta continuamente de 000° a 360° , que corresponden a dos pasos consecutivos del astro por el meridiano, la ascensión recta α , permanece invariable. Esta expresión, permite el paso de coordenadas horarias a absolutas y viceversa.

CAPÍTULO II

EL TRIÁNGULO DE POSICIÓN

1. TRIÁNGULO DE POSICIÓN.— El triángulo que en la esfera celeste tiene por vértices:

El polo elevado P
El zenit del observador Z
El astro observado A

lados, los arcos de círculos máximos:

Colatitud, $90^\circ - \varphi$
Distancia zenital, $90^\circ - a$
Distancia polar, $90^\circ - d$

en las que φ es la latitud del observador, d la declinación del astro, a su altura verdadera, y ángulos:

Ángulo en el polo P
Ángulo en el zénit Z, o acimut
Ángulo de posición A, o ángulo paraláctico

recibe el nombre de triángulo de posición o náutico [BOWDITCH-1966]; figura 1.16.II.

2. RELACIONES ENTRE SUS ELEMENTOS.— Las relaciones entre los elementos del triángulo de posición, son aplicación directa de las leyes que ligan los distintos elementos de un triángulo esférico y, por lo tanto, de la parte de la matemática conocida con el nombre de TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA.

3. TEOREMA DE LOS SENOS.— *Los senos de los lados de un triángulo esférico, son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.* En el triángulo de posición:

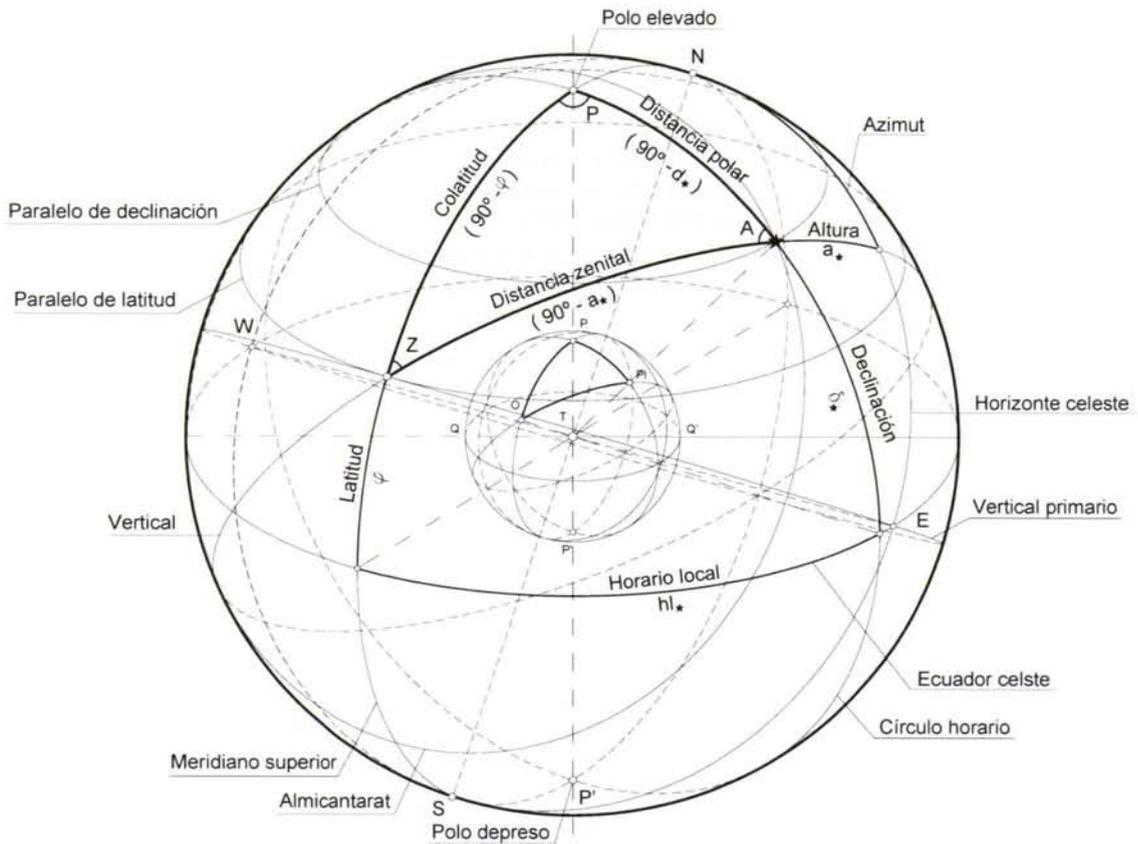


Fig-1.16.II- El triángulo de posición

$$\frac{\text{sen}(90^\circ - a)}{\text{sen}P} = \frac{\text{sen}(90^\circ - d)}{\text{sen}Z} = \frac{\text{sen}(90^\circ - \varphi)}{\text{sen}A}, \text{ que en función de los complementos}$$

escribiremos:

$$\frac{\text{cos}a}{\text{sen}P} = \frac{\text{cos}d}{\text{sen}Z} = \frac{\text{cos}\varphi}{\text{sen}A} \quad (1.16.II)$$

4. TEOREMA DEL COSENO.— De enunciado: *En todo triángulo esférico el coseno de uno de sus lados es igual al producto de los cosenos de los otros dos, más el producto de los senos de estos por el coseno del ángulo comprendido.*

$$\text{cos}(90^\circ - a) = \text{cos}(90^\circ - \varphi) \cdot \text{cos}(90^\circ - d) + \text{sen}(90^\circ - \varphi) \cdot \text{cos}(90^\circ - d) \cdot \text{cos}P, \text{ que en}$$

función de los complementos, como en la anterior (1.16.II):

$$\text{sen } a = \text{sen } \varphi \cdot \text{sen } d + \cos \varphi \cdot \cos d \cdot \cos P \quad (1.17.II)$$

De igual manera:

$$\text{sen } \varphi = \text{sen } a \cdot \text{sen } d + \cos a \cdot \cos d \cdot \cos A \quad (2.17.II)$$

$$\text{sen } d = \text{sen } a \cdot \text{sen } \varphi + \cos a \cdot \cos \varphi \cdot \cos Z \quad (3.17.II)$$

5. RELACIÓN DE LA COTANGENTE POR EL SENO.— *la cotangente de un lado por el seno de otro, es igual al coseno de este último por el coseno del ángulo comprendido más el seno de este mismo ángulo por la cotangente del ángulo opuesto al primero:*

$\cot(90^\circ - a) \cdot \text{sen}(90^\circ - \varphi) = \cos(90^\circ - \varphi) \cdot \cos Z + \text{sen } Z \cdot \text{ctg } P$, que en función de los complementarios:

$$\tan a \cdot \cos \varphi = \text{sen } \varphi \cdot \cos Z + \text{sen } Z \cdot \text{ctg } P \quad (4.17.II)$$

Y por permuta circular de elementos:

$$\tan a \cdot \cos d = \text{sen } d \cdot \cos A + \text{sen } A \cdot \text{ctg } P \quad (5.17.II)$$

$$\tan \varphi \cdot \cos d = \text{sen } d \cdot \cos P + \text{sen } P \cdot \text{ctg } A \quad (6.17.II)$$

$$\tan \varphi \cdot \cos a = \text{sen } a \cdot \cos Z + \text{sen } Z \cdot \text{ctg } A \quad (7.17.II)$$

$$\tan d \cdot \cos \varphi = \text{sen } \varphi \cdot \cos P + \text{sen } P \cdot \text{ctg } Z \quad (8.17.II)$$

$$\tan d \cdot \cos a = \text{sen } a \cdot \cos A + \text{sen } A \cdot \text{ctg } Z \quad (9.17.II)$$

6. RELACIÓN DEL SENO POR EL COSENO.— Si en la relación del coseno (1.17.II) sustituimos $\text{sen } \varphi$ por su valor de la (2.17.II):

$\text{sen } a = (\text{sen } a \cdot \text{sen } d + \cos a \cdot \cos d \cdot \cos A) \cdot \text{sen } d + \cos \varphi \cdot \cos d \cdot \cos P$, y efectuamos las operaciones indicadas:

$$\text{sen } a = \text{sen } a \cdot \text{sen}^2 d + \text{cos } a \cdot \text{sen } d \cdot \text{cos } d \cdot \text{cos } A + \text{cos } \varphi \cdot \text{cos } d \cdot \text{cos } P$$

$$\text{sen } a (1 - \text{sen}^2 d) = \text{cos } a \cdot \text{sen } d \cdot \text{cos } d \cdot \text{cos } A + \text{cos } \varphi \cdot \text{cos } d \cdot \text{cos } P$$

$\text{sen } a \cdot \text{cos}^2 d = \text{cos } a \cdot \text{sen } d \cdot \text{cos } d \cdot \text{cos } A + \text{cos } \varphi \cdot \text{cos } d \cdot \text{cos } P$, quedando finalmente:

$$\text{cos } P = \frac{\text{sen } a \cdot \text{cos } d - \text{cos } a \cdot \text{sen } d \cdot \text{cos } A}{\text{cos } \varphi} \quad (1.18.II)$$

Permutando convenientemente los distintos elementos:

$$\text{cos } P = \frac{\text{sen } a \cdot \text{cos } \varphi - \text{cos } a \cdot \text{sen } \varphi \cdot \text{cos } Z}{\text{cos } d} \quad (2.18.II)$$

$$\text{cos } A = \frac{\text{sen } \varphi \cdot \text{cos } d - \text{cos } \varphi \cdot \text{sen } d \cdot \text{cos } P}{\text{cos } a} \quad (3.18.II)$$

$$\text{cos } A = \frac{\text{sen } \varphi \cdot \text{cos } a - \text{cos } \varphi \cdot \text{sen } a \cdot \text{cos } Z}{\text{cos } d} \quad (4.18.II)$$

$$\text{cos } Z = \frac{\text{sen } d \cdot \text{cos } a - \text{cos } d \cdot \text{sen } a \cdot \text{cos } A}{\text{cos } \varphi} \quad (5.18.II)$$

$$\text{cos } Z = \frac{\text{sen } d \cdot \text{cos } \varphi - \text{cos } d \cdot \text{sen } \varphi \cdot \text{cos } P}{\text{cos } a} \quad (6.18.II)$$

7. RELACIONES DE BORDA².— De la (1.18.II), despejando el coseno del ángulo en el polo u horario local:

1 La relación es conocida con el nombre del seno por el coseno, porque poniendo en vez de $\text{cos } \varphi$ su complementario, $\text{sen}(90^\circ - \varphi)$, la expresión queda:

$$\text{cos } P \cdot \text{sen}(90^\circ - \varphi) = \text{sen } a \cdot \text{cos } d - \text{cos } a \cdot \text{sen } d \cdot \text{cos } A$$

2 Borda (Juan Carlos). Eminent geodesta y marino francés, nacido en Dax en 1733 y muerto en París en 1799, que entre 1771 y 1772 emprendió una serie de viajes para comprobar la utilidad de varios métodos e instrumentos para hallar la latitud y longitud. Formó parte de la comisión encargada de medir el grado de meridiano entre Dunkerke y Barcelona.

$$\cos P = \frac{\text{sen } a - \text{sen } \varphi \cdot \text{sen } d}{\cos \varphi \cdot \cos d}, \text{ sustituyendo la declinación } d \text{ por la distancia polar } \Delta;$$

resulta:

$$\cos P = \frac{\text{sen } a - \text{sen } \varphi \cdot \cos \Delta}{\cos \varphi \cdot \text{sen } \Delta} \quad (1.19.II)$$

De la trigonometría sabemos que $\cos P = 1 - 2 \text{sen}^2 \frac{P}{2}$, y por la misma vía de razonamiento³, $\cos P = 2 \cos^2 \frac{P}{2} - 1$. Sustituyendo y operando como seguidamente se

indica:

$$1 - 2 \text{sen}^2 \frac{P}{2} = \frac{\text{sen } a - \text{sen } \varphi \cdot \cos \Delta}{\cos \varphi \cdot \text{sen } \Delta}$$

pasando el 1 al segundo miembro y cambiando de signo:

$$2 \text{sen}^2 \frac{P}{2} = 1 - \frac{\text{sen } a - \text{sen } \varphi \cdot \cos \Delta}{\cos \varphi \cdot \text{sen } \Delta}$$

efectuando la diferencia señalada en el segundo miembro :

$$2 \text{sen}^2 \frac{P}{2} = \frac{\cos \varphi \cdot \text{sen } \Delta - \text{sen } a + \text{sen } \varphi \cdot \cos \Delta}{\cos \varphi \cdot \text{sen } \Delta}$$

y siendo, además:

$$\cos \varphi \cdot \text{sen } \Delta + \text{sen } \varphi \cdot \cos \Delta = \text{sen}(\varphi + \Delta)$$

tendremos:

$$2 \text{sen}^2 \frac{P}{2} = \frac{\text{sen}(\varphi + \Delta) - \text{sen } a}{\cos \varphi \cdot \text{sen } \Delta}$$

Pero siendo:

$$\text{sen}(\varphi + \Delta) - \text{sen } a = 2 \cos \frac{1}{2}(\varphi + a + \Delta) \text{sen} \frac{1}{2}(\varphi - a + \Delta)$$

³ $\cos P = \cos\left(\frac{P}{2} + \frac{P}{2}\right)$, lo que es lo mismo: $\cos P = \cos^2 \frac{P}{2} - \text{sen}^2 \frac{P}{2}$; haciendo la adecuada sustitución quedará $\cos P = 1 - \text{sen}^2 \frac{P}{2} - \text{sen}^2 \frac{P}{2}$, y finalmente: $\cos P = 1 - 2 \text{sen}^2 \frac{P}{2}$. De idéntica forma: $\cos P = \cos^2 \frac{P}{2} - \left(1 - \cos^2 \frac{P}{2}\right)$, lo

que da: $\cos P = 2 \cos^2 \frac{P}{2} - 1$.

sustituyendo y dividiendo por 2, resulta:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{P}{2} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\varphi + a + \Delta) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\varphi - a + \Delta)}{\cos \varphi \cdot \operatorname{sen} \Delta}$$

Hagamos, ahora:

$$\varphi + a + \Delta = 2 \cdot S$$

restando de los dos miembros de esta expresión 2·a, tendremos:

$$\varphi - a + \Delta = 2 \cdot S - 2 \cdot a = 2 \cdot (S - a)$$

por lo que:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{P}{2} = \frac{\cos S \cdot \operatorname{sen}(S - a)}{\cos \varphi \cdot \operatorname{sen} \Delta}$$

a la que, extrayendo la raíz cuadrada:

$$\operatorname{sen} \frac{P}{2} = \sqrt{\frac{\cos S \cdot \operatorname{sen}(S - a)}{\cos \varphi \cdot \operatorname{sen} \Delta}} \quad (1.20.II)$$

Por el mismo razonamiento, y partiendo de la sustitución:

$$2 \cos^2 \frac{P}{2} - 1 = \frac{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos \Delta}{\cos \varphi \cdot \operatorname{sen} \Delta}$$

y teniendo presente que, análogamente:

$$a + \Delta - \varphi = 2 \cdot (S - \varphi)$$

$$a - \Delta + \varphi = 2 \cdot (S - \Delta)$$

llegamos a la expresión:

$$\cos \frac{P}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen}(S - \varphi) \cdot \cos(S - \Delta)}{\cos \varphi \cdot \text{sen} \Delta}} \quad (1.21.II)$$

Dividiendo miembro a miembro la (1.20.II) por la (1.21.II):

$$\text{tg} \frac{P}{2} = \sqrt{\frac{\cos S \cdot \text{sen}(S - a)}{\text{sen}(S - \varphi) \cdot \cos(S - \Delta)}} \quad (2.21.II)$$

Las tres fórmulas: (1.20.II), (1.21.II) y (2.21.II) son conocidas con el nombre de relaciones de Borda; estas expresiones permiten el cálculo logarítmico del horario. Igualmente, para el cálculo del ángulo en el zénit o acimut, a partir de la (3.18.II) y despejando el coseno de Z:

$$\cos Z = \frac{\text{sen} d - \text{sen} a \cdot \text{sen} \varphi}{\cos a \cdot \cos \varphi}$$

fórmula no logarítmica, que resuelve el problema. Para transformarla en logarítmica, sustituyendo, alternativamente, $\cos Z = 1 - 2 \text{sen}^2 \frac{Z}{2}$ y $\cos Z = 2 \cos^2 \frac{Z}{2} - 1$, se concluyen las tres relaciones siguientes:

$$\text{sen} \frac{Z}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen}(S - a) \cdot \text{sen}(S - \varphi)}{\cos \varphi \cdot \cos a}} \quad (3.21.II)$$

$$\cos \frac{Z}{2} = \sqrt{\frac{\cos S \cdot \cos(S - \Delta)}{\cos \varphi \cdot \cos a}} \quad (4.21.II)$$

$$\operatorname{tg} \frac{Z}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(S - a) \cdot \operatorname{sen}(S - \varphi)}{\cos S \cdot \cos(S - \Delta)}} \quad (1.22.II)$$

En las que, como en la demostración precedente es:

$$\varphi + a + \Delta = 2 \cdot a$$

de la que, al restar sucesivamente $2a$, 2φ y 2Δ , resulta:

$$\varphi + \Delta - a = 2 \cdot (S - a)$$

$$\Delta + a - \varphi = 2 \cdot (S - \varphi)$$

$$\varphi + a - \Delta = 2 \cdot (S - \Delta)$$

8. ANALOGÍAS DE NEPER⁴.— Las cuatro fórmulas siguientes, (aunque solamente la primera de ellas es de Neper, ya que las otras fueron, probablemente, añadidas por Briggs), constituyen dichas analogías:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + Z) = \frac{\cos \frac{1}{2}(d - \varphi)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(d + \varphi)} \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}P \quad (2.22.II)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - Z) = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(d - \varphi)}{\cos \frac{1}{2}(d + \varphi)} \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}P \quad (3.22.II)$$

$$\operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\varphi + d) = \frac{\cos \frac{1}{2}(A - Z)}{\cos \frac{1}{2}(A + Z)} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}(90^\circ - a) \quad (4.22.II)$$

⁴ Neper, Napier, Nepper ó Nepair, (John), "SEÑOR DE MERCHISTON", (1550 - 1617). Matemático inglés, principal inventor de los logaritmos: *Mirifici logarithmorum canonicis descriptio* (Edimburgo, 1594). Descubrió, además, varias reglas y fórmulas de la trigonometría esférica y un sistema completo de fórmulas para la resolución de los triángulos esféricos rectángulos.

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(d - \varphi) = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A - Z)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A + Z)} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}(90^\circ - a) \quad (1.23.II)$$

De estas, y por permutación de los elementos del triángulo:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(Z + P) = \frac{\operatorname{cos} \frac{1}{2}(a - d)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a + d)} \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}A \quad (2.23.II)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(Z - P) = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a - d)}{\operatorname{cos} \frac{1}{2}(a + d)} \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}A \quad (3.23.II)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(P + A) = \frac{\operatorname{cos} \frac{1}{2}(\varphi - a)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\varphi + a)} \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}Z \quad (4.23.II)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(P - A) = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\varphi - a)}{\operatorname{cos} \frac{1}{2}(\varphi + a)} \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}Z \quad (5.23.II)$$

$$\operatorname{ctg} \frac{1}{2}(a + d) = \frac{\operatorname{cos} \frac{1}{2}(P - Z)}{\operatorname{cos} \frac{1}{2}(P + Z)} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}(90^\circ - \varphi) \quad (6.23.II)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a - d) = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(Z - P)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(Z + P)} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}(90^\circ - \varphi) \quad (7.23.II)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(d - a) = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(P - Z)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(P + Z)} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}(90^\circ - \varphi) \quad (1.24.II)$$

$$\operatorname{ctg} \frac{1}{2}(a + \varphi) = \frac{\operatorname{cos} \frac{1}{2}(P - A)}{\operatorname{cos} \frac{1}{2}(P + A)} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}(90^\circ - d) \quad (2.24.II)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a - \varphi) = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A - P)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A + P)} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}(90^\circ - d) \quad (3.24.II)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi - a) = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(P - A)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(P + A)} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}(90^\circ - d) \quad (4.24.II)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi - d) = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(Z - A)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(Z + A)} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}(90^\circ - a) \quad (5.24.II)$$

9. ANALOGÍAS DE DELAMBRE⁵.— Constituyen el siguiente grupo de fórmulas, publicadas en 1808:

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2}(Z - P) \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{2}(90^\circ - \varphi) = \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a - d) \cdot \operatorname{cos} \frac{1}{2}A \quad (6.24.II)$$

$$\operatorname{cos} \frac{1}{2}(Z - P) \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{2}(90^\circ - \varphi) = \operatorname{cos} \frac{1}{2}(a + d) \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{2}A \quad (7.24.II)$$

⁵ Delambre, Juan Bautista José. Astrónomo, matemático y físico n. en Amiens en 1749 y m. en París en 1822. Publicó tablas para el Sol y distintos planetas. Se considera su obra más importante la medición del arco de Dunquerque a Barcelona, que sería posteriormente la base para la definición del metro. El informe sobre este importantísimo trabajo está contenido en su obra: *Base du système métrique décimale* (París 1806-10).

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2}(Z+P) \cdot \cos \frac{1}{2}(90^{\circ}-\varphi) = \cos \frac{1}{2}(a-d) \cdot \cos \frac{1}{2}A \quad (1.25.II)$$

$$\cos \frac{1}{2}(Z+P) \cdot \cos \frac{1}{2}(90^{\circ}-\varphi) = \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+d) \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{2}A \quad (2.25.II)$$

Dividiendo entre sí estas, obtendríamos las, ya consignadas, de Neper.

10. TRIÁNGULO DE POSICIÓN RECTÁNGULO: REGLAS DE NEPER.— Al disponer cinco de los elementos del triángulo esférico rectángulo (omítase el ángulo recto), en un pentágono en el mismo orden que presentan en el triángulo y al reemplazar los catetos por sus complementos, figura 2.25.II, entonces

- 1) el coseno de cada elemento es igual al producto de las cotangentes de los elementos adyacentes a él.

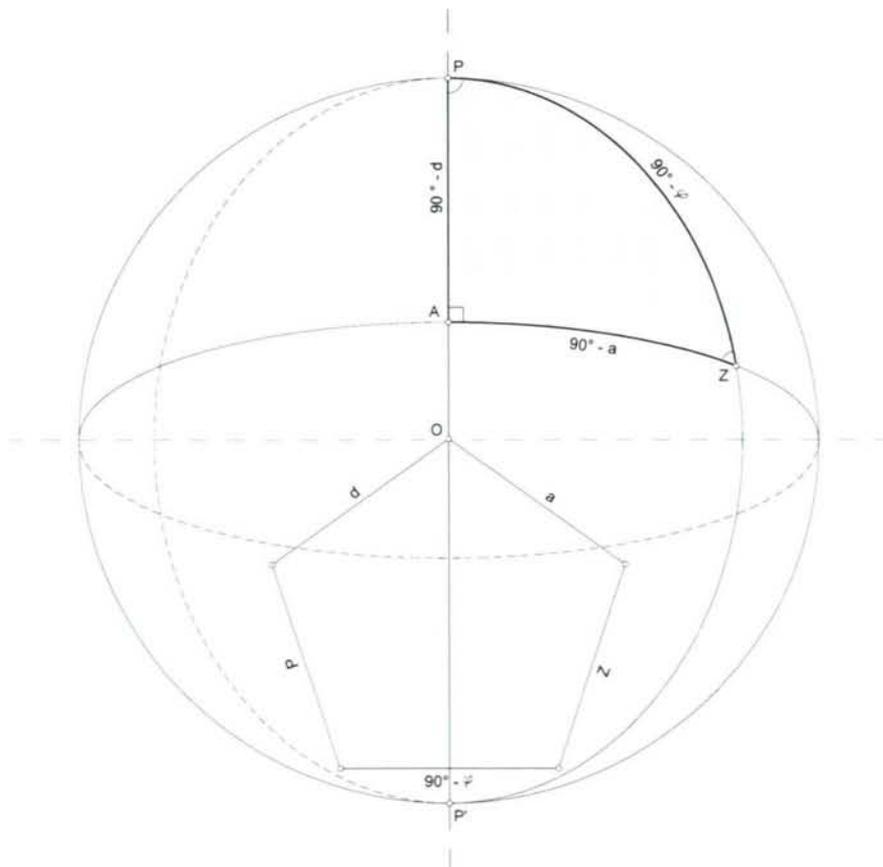


Fig- 1.25.II- Triángulo de posición rectángulo.
 Pentágono de Neper.

- 2) el coseno de cada elemento es igual al producto de los senos de los dos elementos no adyacentes.

En la figura precedente se ha supuesto el triángulo de posición rectángulo en el vértice correspondiente al ángulo de posición o paraláctico. Los otros casos corresponderán al ángulo en el zenit recto, (astro en el primer vertical a oriente o a occidente, azimutes 090° o 270°), y al ángulo horario recto, (astro en el primer círculo horario a occidente o a oriente, horario 6 h o 18 h). El resumen de fórmulas, para este caso, es el que sigue:

$$\cos a = \operatorname{ctg} d \cdot \operatorname{ctg} Z \quad (1.26.II)$$

$$\cos d = \operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{ctg} P \quad (2.26.II)$$

$$\cos P = \operatorname{ctg} d \cdot \operatorname{tg} \varphi \quad (3.26.II)$$

$$\operatorname{sen} \varphi = \operatorname{ctg} P \cdot \operatorname{ctg} Z \quad (4.26.II)$$

$$\cos Z = \operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{tg} \varphi \quad (5.26.II)$$

$$\cos a = \operatorname{sen} P \cdot \cos \varphi \quad (6.26.II)$$

$$\cos d = \operatorname{sen} Z \cdot \cos \varphi \quad (7.26.II)$$

$$\cos P = \operatorname{sen} Z \cdot \operatorname{sen} a \quad (8.26.II)$$

$$\operatorname{sen} \varphi = \operatorname{sen} d \cdot \operatorname{sen} a \quad (9.26.II)$$

$$\cos Z = \operatorname{sen} P \cdot \operatorname{sen} d \quad (10.26.II)$$

La utilidad del pentágono descrito, radica en la relativa facilidad para su memorización, no obstante, será buena práctica la particularización de las fórmulas generales llegado el caso.

CAPÍTULO III

MOVIMIENTO DIURNO

1. EL MOVIMIENTO DE LOS ASTROS. — El cambio de posición de los astros en la esfera celeste obedece a tres causas principales:

- 1 movimiento propio¹
- 2 movimiento orbital alrededor del Sol (planetas, satélites, cometas, asteroides...)
- 3 movimiento aparente debido a la rotación terrestre
- 4 movimiento aparente debido a la traslación terrestre.

El objeto de este estudio es el del movimiento aparente debido a la rotación terrestre [VIVES-1971], y que es conocido con el nombre de movimiento diurno. La rotación de la Tierra, —que al objeto de este estudio consideraremos uniforme y de eje único—, se produce de forma tal, que para un observador situado en el polo sur, es de sentido retrógrado. Si se observa durante un tiempo el firmamento, se tendrá la sensación de que los astros se desplazan hacia poniente describiendo una trayectoria curvilínea que, en general, es simétrica respecto al meridiano del observador. Los astros surgen por levante aumentando constantemente su altura a medida que se acercan al meridiano; alcanzan en este su máxima altura² y descienden para ocultarse a poniente. Puesto que la velocidad angular de la Tierra es una magnitud vectorial, puede ser representada por un vector ubicado en el lugar del observador y descompuesto según componentes a lo largo de la línea meridiana,—componente horizontal—, y a lo largo de la vertical,—componente vertical—, véase la figura 1.28.III. Si el vector Ω representa la

1 Realmente, todos los astros del universo se encuentran en continuo movimiento; a pesar de las inmensas velocidades con las que se alejan de nosotros, medibles por el análisis espectrográfico de su luz, su cambio de posición en el firmamento se constata, solamente, por medio de observaciones de gran período.

2 Se suponen, aquí, astros con declinación constante y observador inmóvil. Si estas circunstancias no concurren, los astros no alcanzan su máxima altura al pasar por el meridiano superior, ni la mínima al cortar el inferior. La altura meridiana y la de culminación o máxima difieren en cantidades que pueden alcanzar valores considerables.

rotación terrestre y φ es la latitud del observador, las componentes antedichas serán: componente horizontal ω_h y componente vertical ω_v . Las relaciones que ligan estas componentes con el vector rotación terrestre [CAPASSO-1976] Ω , son:

$$\omega_h = \Omega \cdot \cos \varphi \quad (1.28.II)$$

$$\omega_v = \Omega \cdot \sen \varphi \quad (2.28.II)$$

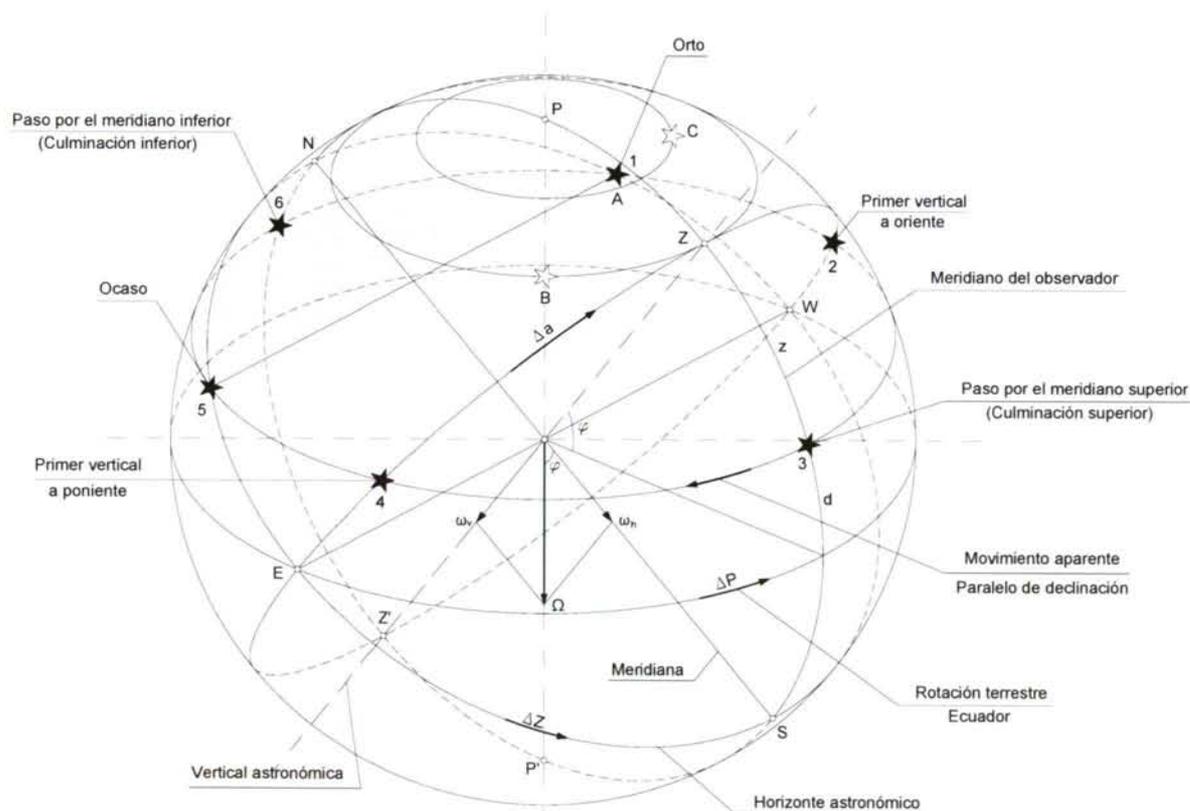


Fig-1.28.III-Movimiento diario

La componente horizontal ω_h a lo largo de la línea meridiana, indica una rotación del plano del horizonte alrededor de esta línea; el sentido de la rotación es tal, que desde el extremo del vector que la representa, esta se cumple en sentido retrógrado: el plano del horizonte se eleva a poniente deprimiéndose a levante, y el fenómeno que el observador contempla es la variación de la altura de los astros. La componente vertical

ω_v a lo largo de la vertical astronómica, corresponde a una rotación del plano del horizonte alrededor de esta línea; el sentido, al igual que en el caso anterior, es retrógrado³ y el efecto observado es la variación en acimut de los astros. La figura 1.28.III es la proyección ortográfica de la esfera celeste, en ella aparecen los paralelos de declinación correspondientes a tres astros para los que se observan distintos fenómenos en su movimiento diurno. Comenzaremos el estudio por el astro A que recorre un paralelo de declinación genérico, analizándose los siguientes instantes:

- 1 Orto
- 2 Corte con el vertical primario a oriente
- 3 Paso por el meridiano superior o culminación superior
- 4 Corte con el vertical primario a occidente
- 5 Ocaso
- 6 Paso por el meridiano inferior o culminación inferior

1.1 ORTO.— En este instante la altura del astro es cero y pasa del hemisferio invisible al visible, el triángulo de posición tiene un lado de 90° — es rectilátero—, toda vez que siendo su altura nula, su distancia zenital son 90° .

1.2 CORTE CON EL PRIMER VERTICAL A ORIENTE.— Momento en el que el azimut es 090° y el triángulo de posición es rectángulo. Demostraremos, posteriormente que la máxima variación positiva de la altura es simultánea a este acaecimiento. Nótese en la figura que el astro B corta al vertical primario en el meridiano, un caso particular, mientras que el C no lo corta [FONT-1875].

1.3 PASO POR EL MERIDIANO SUPERIOR DEL LUGAR.— La altura, que ha venido aumentando desde el instante del orto a medida que el astro se acercaba al meridiano, es máxima, nula, por lo tanto, su variación, comienza a declinar a partir de este momento. Es el instante ideal para la determinación de la latitud.

1.4 CORTE CON EL PRIMER VERTICAL A OCCIDENTE.— Con similares consideraciones que para el corte a oriente, el azimut es en este caso 270° y la

³ Podía haberse establecido como criterio, que el vector Ω que simboliza la rotación terrestre es de dirección tal, que desde el extremo de dicho vector, la citada rotación se realiza en sentido directo; en nada afectaría al resultado final.

variación de la altura máxima negativa, —el astro desciende con la máxima variación en altura— encaminándose hacia su ocaso. Los cortes con el vertical primario son los instantes óptimos para calcular el horario y deducir de él la longitud del observador, como se demostrará en páginas posteriores.

1.5 OCASO.— La altura vuelve a ser nula en este momento y el astro pasa del hemisferio visible al invisible; obsérvese de nuevo la figura 1.28.II, los astros B y C no presentan orto ni ocaso. Serán estudiados en los casos particulares del movimiento diurno.

1.6 PASO POR EL MERIDIANO INFERIOR O CULMINACIÓN INFERIOR.— La altura que cuando, como en el caso concreto de este astro cuya culminación inferior se produce bajo el horizonte, es negativa recibe el nombre de depresión, es aquí máxima negativa y, como en el instante de la culminación superior, su variación es nula.

2. ARCOS DIURNO Y NOCTURNO.— Recibe el nombre de arco diurno de un astro el arco de paralelo de declinación del mismo durante el cual este se encuentra sobre el horizonte del observador; es el arco que determinan los instantes correspondientes al orto y al ocaso, día del astro en cuestión. El meridiano superior divide al arco diurno en dos partes iguales. El arco nocturno, al que, asimismo, divide el meridiano inferior en dos partes iguales, es el arco del mismo paralelo, limitado por el ocaso y el orto. Durante este tiempo el astro está bajo el horizonte del observador, es la noche del astro.

3. AMPLITUD AL ORTO.— Dase este nombre al arco de horizonte ($\leq 90^\circ$) contado desde el cardinal este (E) hasta el punto donde se produce el orto de un astro, también se dice amplitud ortiva u oriental.

4. AMPLITUD AL OCASO.— De igual manera, al arco de horizonte ($\leq 90^\circ$) contado desde el cardinal oeste (O) hasta el punto donde tiene lugar el ocaso, recibe el nombre de amplitud al ocaso, occídúa u occidental.

5. CASOS PARTICULARES DEL MOVIMIENTO DIURNO.— Particularizando las expresiones (1.28.II) y (2.28.II), relativas a las componentes de la rotación terrestre sobre las líneas meridiana y vertical para las latitudes $\varphi=0$ y $\varphi=90^\circ$, se aprecian las

siguientes conclusiones:

$$\omega_h = \Omega \cdot \cos \varphi; \text{ si } \varphi = 0 \rightarrow \omega_h = \Omega$$

$$\omega_v = \Omega \cdot \sen \varphi; \text{ si } \varphi = 0 \rightarrow \omega_v = 0$$

no existiendo, en este caso, componente vertical, la rotación del plano del horizonte sobre la vertical astronómica se anula, y no existe variación en azimut. La variación en altura es máxima, pues al yacer la vertical en el plano del ecuador, el plano del horizonte astronómico es meridiano y todos los astros al recorrer sus paralelos de declinación surgen y se ocultan perpendicularmente al mismo. La máxima variación en altura ocurriría para los astros con declinación nula; los arcos nocturno y diurno son

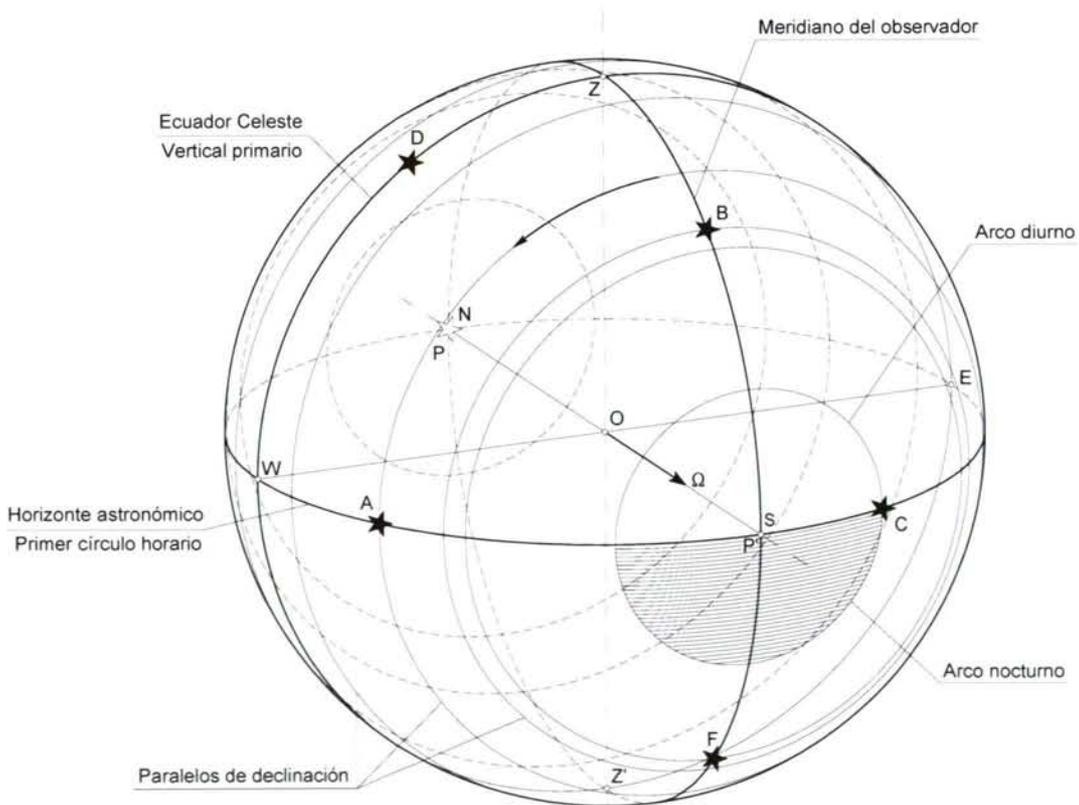


Fig - 1.31.III- Esfera recta

iguales⁴, y en su culminación, la mitad de los astros pasan encarados al norte y la otra mitad encaran al sur; se exceptúan aquellos con declinación nula que culminarían en el zénit del observador. El fenómeno es conocido con el nombre de esfera recta; figura 1.31.III. Repitiendo idéntico análisis para $\varphi=90^\circ$:

$$\omega_h = \Omega \cdot \cos \varphi; \text{ si } \varphi = 90^\circ \rightarrow \omega_h = 0$$

$$\omega_v = \Omega \cdot \text{sen} \varphi; \text{ si } \varphi = 90^\circ \rightarrow \omega_v = \Omega$$

No existe, en este caso, componente horizontal de la rotación terrestre; el plano del horizonte del observador en el polo, carece del movimiento de elevación/depresión y este, solamente, gira en torno a la línea vertical que coincide con el eje del mundo. Los astros tienen, constantemente, una altura igual a su declinación; no presentan arco

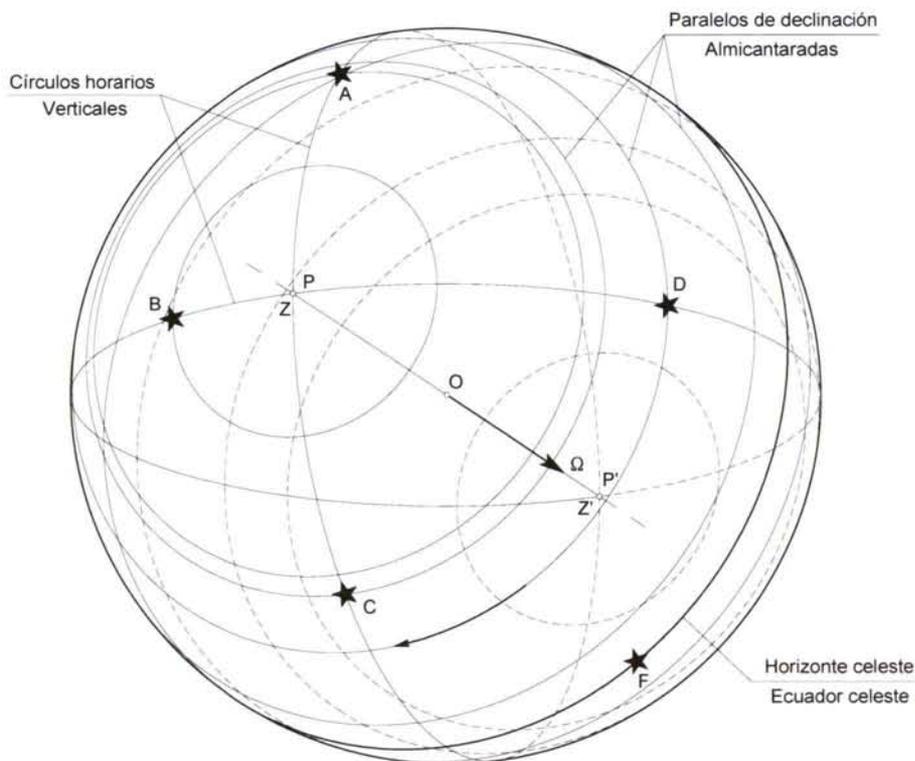


Fig - 1.32.III - Esfera paralela

4 De aquí el nombre de equinoccial para el ecuador, pues en cualquier día del año, es el tiempo en el que el Sol permanece bajo el horizonte igual al que permanece sobre el mismo, sucediendo otro tanto para todos los demás astros.

nocturno aquellos astros de declinación del mismo nombre que el polo del observador y no presentan arco diurno los de declinación de especie contraria. Los astros con declinación nula recorrerían el horizonte y, por carecer de sentido los puntos cardinales, carecen de sentido los pasos por el meridiano (todas las alturas son meridianas), ortos, ocasos etc. La esfera se conoce con el nombre de esfera paralela; figura 1.32.III.

6. POSICIONES CORRESPONDIENTES.— Las coordenadas horizontales de un astro a levante del meridiano son, acimut y altura $\{Z_1, a_1\}$, y $\{Z_2, a_2\}$ a poniente del mismo meridiano; si $a_1 = a_2$ y $Z_1 + Z_2 = 360^\circ$ (acimutes contados circularmente), las posiciones se dicen correspondientes. De una forma simple, las posiciones correspondientes son simétricas respecto al meridiano del observador, figura 1.33.III, si el astro es de declinación constante y el meridiano del observador inmóvil, el triángulo

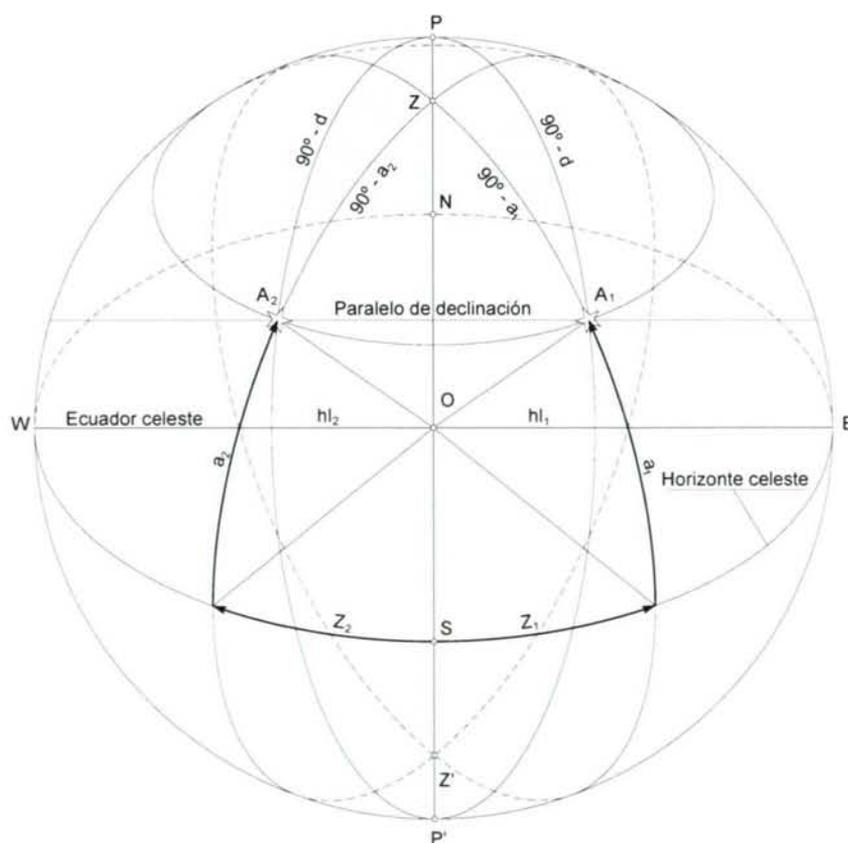


Fig - 1.33.III - Posiciones correspondientes

de posición repite los valores de sus lados y ángulos, caso contrario, las posiciones correspondientes —observaciones de Sol y Luna cuyas declinaciones varían notablemente, y con el observador en movimiento como es el caso del navegante, no

son simétricas respecto al meridiano; los horizontes de observación son diferentes.

7. MÁXIMAS DISGRESIONES.— Si en su movimiento diurno un astro no corta al primer vertical por culminar entre el zenit y el polo elevado, —como el caso del astro C en la figura 1.28.III, y siempre en el supuesto de declinación constante y meridiano inmóvil—, su ángulo de posición es recto en posiciones correspondientes. Esto sucede porque hay dos verticales tangentes al paralelo de declinación, como puede comprobarse en la figura 1.34.III, proyección gnomónica de la esfera celeste sobre el plano tangente en el polo elevado. Estos instantes, en Astronomía Náutica, son conocidos como de ángulo de posición o paraláctico recto; son los momentos óptimos para la observación y junto con los del corte con el primer vertical —ambos acaecimientos son excluyentes, como se verá en análisis posteriores—, constituyen las circunstancias favorables para la observación. Si el astro es de declinación variable, y/o el meridiano del observador es móvil puede darse el caso de que corte al vertical

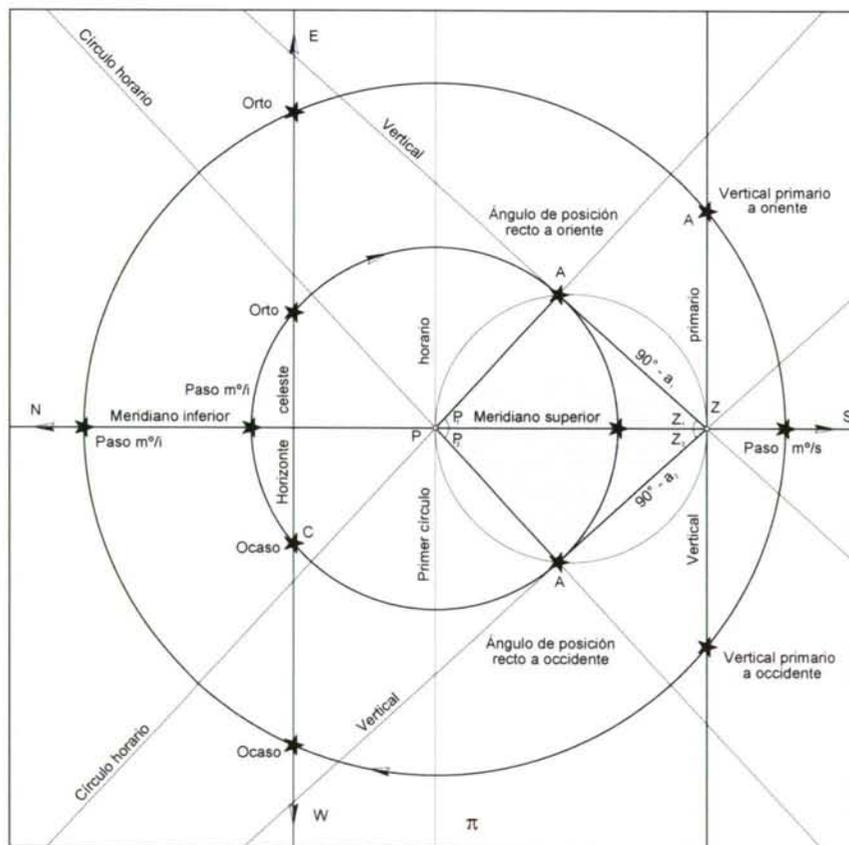


Fig - 1.34.III - Máximas disgresiones

primario y presente el ángulo paraláctico recto durante su movimiento diurno; la

trayectoria que sigue el polo de iluminación del astro puede suponerse loxodrómica, figura 1.35.III, y la culminación debe acaecer próxima al cenit, —valores próximos para latitud y declinación—; si se desarrollen altas velocidades, pueden darse las circunstancias de corte con el vertical primario y ángulo paraláctico recto en el mismo hemisferio (oriental u occidental), en posiciones alejadas del meridiano y con valores muy diferentes para latitud y declinación. La figura de la presente página⁵ muestra la

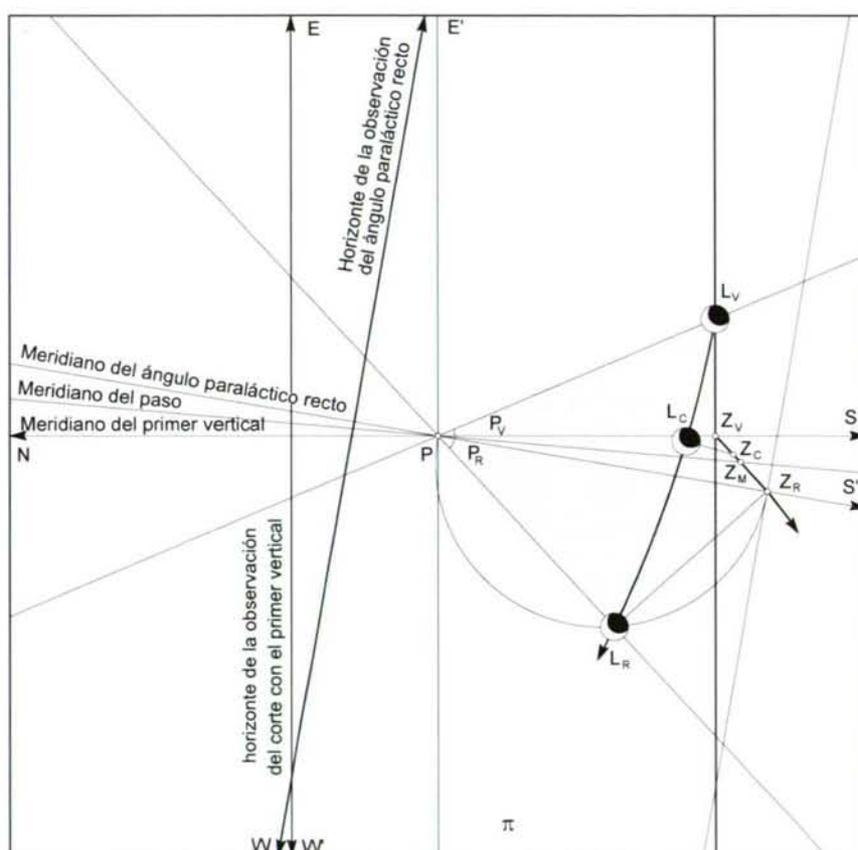


Fig - 1.35.III - Variación de φ y d

interpretación geométrica de los fenómenos estudiados; se imagina un astro (Luna) con variación notable en declinación, según la trayectoria L_V , L_C y L_R , mientras el observador se desplaza según Z_V , Z_C y Z_R cuyo significado es el que sigue:

L_V : Luna en el instante del corte con el primer vertical.

⁵ La proyección gnomónica es una potente herramienta para la representación gráfica de los problemas ligados al fenómeno del movimiento diario; su condición de azimutal unida al hecho de que la transformada de todo círculo máximo es una línea recta, le confieren importantes ventajas sobre cualquiera otra, si bien no es una proyección conforme.

- L_C: Luna en la culminación, que no coincide con el paso por el meridiano, como ya fue señalado.
- L_R: Luna en el momento de presentar ángulo de posición recto.
- Z_V: Cenit del observador al corte con el primer vertical.
- Z_C: Cenit en el instante de la culminación
- Z_R: Observador en ángulo de posición recto

8. ASTROS CIRCUMPOLARES.— El concepto de astros circumpolares está, sobre todo por los alumnos que se inician en el estudio de esta materia, erróneamente ligado al fenómeno estudiado en el epígrafe anterior; ambos son bien distintos aunque los astros circumpolares presentan su ángulo de posición recto y, por lo tanto, no cortan al primer vertical,—se recuerda que en nuestro estudio el caso general es suponer astros con declinación constante y observador inmóvil—. Son astros circumpolares aquellos que no presentan arco nocturno, es decir : astros que no tienen orto ni ocaso, todo su movimiento diurno se ejecuta sobre el horizonte y se dice en este caso circumpolares visibles. Son circumpolares invisibles o anticircumpolares, aquellos sin arco diurno. En sus casos límite el orto, ocaso y paso por el meridiano inferior se confunden un solo punto, —circumpolares visibles—, u orto paso por el meridiano superior y ocaso en un solo punto para los invisibles; en ambos casos el paralelo de declinación del astro es tangente al horizonte del observador, figura 1.37.III. En los casos particulares del movimiento diurno y en particular en la esfera recta, no existen astros circumpolares visibles excepto que se supongan con declinaciones de $\pm 90^\circ$, supuesto que supondría la observación continua en los cardinales norte y sur, respectivamente. En la esfera paralela son circumpolares visibles todos los astros con declinación del mismo nombre que el polo del observador e invisibles los de nombre contrario; los astros con declinación nula, que constituirían el límite de ambos casos, podrían considerarse visibles o invisibles. En el estudio de la esfera celeste ya se vio que, en la práctica, la elevación no nula del observador y la existencia del fenómeno de la refracción horizontal, cuyo valor en condiciones medias es de unos 34 minutos de arco, permitirían la aparición como astros circumpolares visibles de algunos que el análisis teórico del fenómeno no contemplaría como tales. Una importante manifestación del fenómeno es el llamado Sol de media noche que en las latitudes boreales puede observarse desde el 21 de marzo hasta el 21 de setiembre, en estas fechas las latitudes de observación corresponden a las comprendidas entre el paralelo

68° 37' N —latitud del Círculo Polar Ártico, latitud más baja posible, que correspondería, aproximadamente, al 21 de junio—, y el polo boreal; para el hemisferio austral las fechas para esta observación serían desde el 21 de setiembre al 21 de marzo con latitudes entre los 68° 37' S,—latitud del Círculo Polar Antártico, en fecha 21 de

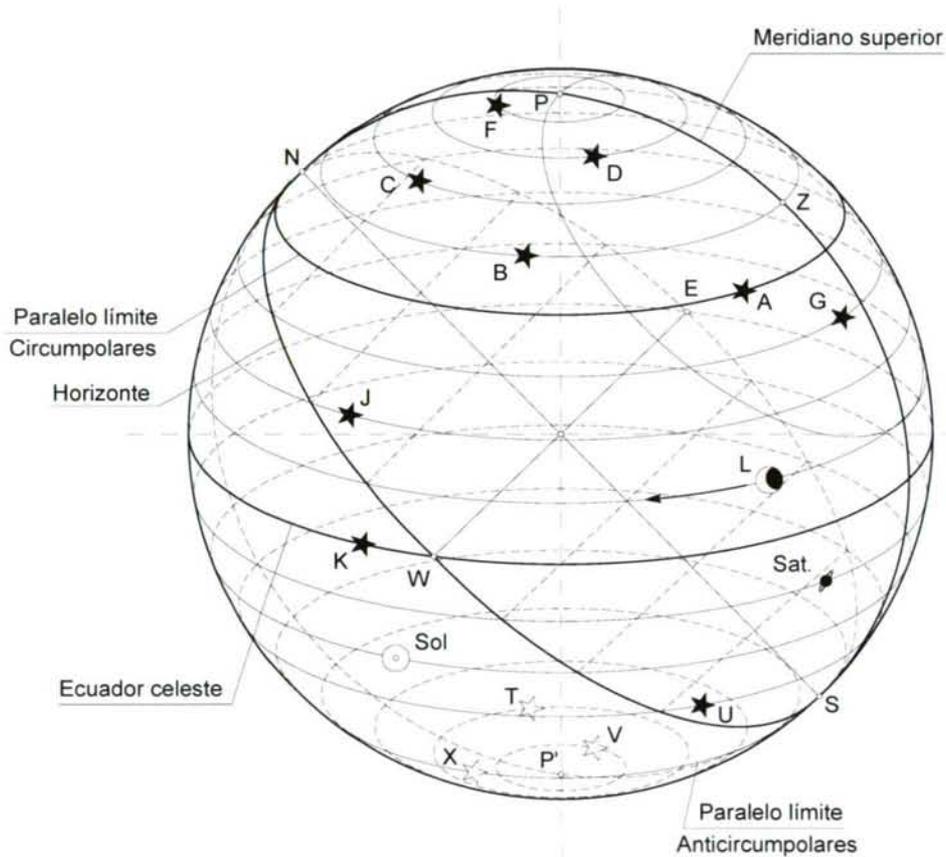


Fig - 1.37.III - Astros circumpolares

diciembre—, y el polo austral.

Son, para la latitud del observador de la figura 1.37.III, astros circumpolares los B, C, D y F, todos con declinación superior al astro A cuyo paralelo de declinación es tangente al horizonte en el cardinal norte, constituyendo el caso límite a partir del cual los astros no presentan arco nocturno. Los astros T y V son anticircumpolares, y el X corresponde al caso límite de los de esta clase: su paralelo de declinación es tangente al horizonte en el cardinal sur, y su arco diurno se reduce al punto en el que simultáneamente este astro tiene su orto, ocaso y paso por el meridiano superior.

9. VARIACIÓN DEL HORARIO DE LOS ASTROS.— El horario de los astros es función del tiempo y varía de 000° a 360°,—dos pasos consecutivos por el meridiano superior—, repitiendo sus valores transcurridas 24 horas de tiempo del astro; si el tiempo que se computa es medio, los horarios no se repiten, apareciendo los fenómenos del retardo y adelanto. Al considerar el movimiento del meridiano del observador, el horario de los astros varía, además, en función de este movimiento. De la expresión (1.13.I):

$$hl_{\star} = hG_{\star} - \lambda$$

diferenciando respecto al tiempo t :

$$\frac{dhl_{\star}}{dt} = \frac{dhG_{\star}}{dt} - \frac{d\lambda}{dt}$$

y pasando de los elementos diferenciales a los incrementos finitos:

$$\Delta hl_{\star} = \Delta hG_{\star} - \Delta \lambda$$

lo que demuestra la arriba indicado. La variación en longitud $\Delta \lambda$ depende del rumbo R° , de la velocidad V y de la latitud φ ; las dos primeras pueden considerarse constantes mientras que la tercera, la latitud φ , excepto en la navegación por paralelo, no puede tener tal consideración. Suponiendo la derrota loxodrómica, la expresión que nos da la variación instantánea en longitud es:

$$\Delta \lambda = V \cdot \Delta t \cdot \text{sen} R^{\circ} \cdot \text{sec} \varphi \tag{1.38.III}$$

que consideraremos positiva si el R° es de componente E y negativa en caso contrario. A efectos prácticos interesa la variación horaria de la longitud, dada por la anterior expresión, sin más que considerar $\Delta t = 1$ hora; si el horario local de un astro es en un determinado instante $hl_{1\star}$ y un cierto intervalo de tiempo medio después es $hl_{2\star}$, el intervalo de tiempo medio transcurrido viene dado, aproximadamente, por:

$$I_N = \frac{hl_{2\star} - hl_{1\star}}{\frac{360^{\circ}}{24^h} \pm \frac{h}{b} V \cdot \text{sen} R^{\circ} \cdot \text{sec} \varphi} \tag{2.38.III}$$

$-A_{\star}$ $+R_{\star}$

en la que I_N es el intervalo a navegar, $h_{l_2} \star - h_{l_1} \star$ la variación del horario local, que podemos indicar por $\Delta h_{l \star}$, A_{\star} y R_{\star} adelanto y retardo, respectivamente⁶ y el cociente

$\frac{360^\circ}{24^h \begin{matrix} -A_{\star} \\ +R_{\star} \end{matrix}}$ la variación del horario local en un ahora, es decir $\Delta h_{l \star}$, la fórmula, de una

forma más simple es:

$$I_N = \frac{\Delta h_{l \star}}{\Delta^1 h_{l \star} \pm \Delta \lambda_b} \tag{1.39.III}$$

Esta es, en cuanto a φ , exacta para los rumbos 000° y 180° ,—la longitud λ , permanece constante— y para los 090° y 270° , φ no varía, y es aproximada a los demás rumbos, el grado de aproximación dependiente de la latitud puede ser bajo en las altas; en latitudes medias y bajas da resultados de precisión mas que suficiente, incluso para intervalos de varias horas. El elemento $\Delta^1 h_{l \star}$ obtenido por cociente, puede obtenerse de forma más sencilla restando dos horarios consecutivos en Greenwich, con bastante aproximación puede cifrarse en:

15° para el Sol y planetas si no se supone adelanto ni retardo, aunque en rigor, tienen uno u otro dependiendo de la época del año.

14,5° para la Luna si se le supone un retardo medio de 45^m; puede ser bastante diferente.

15,04° para Aries suponiendo la aceleración de las fijas 4^m.

En los casos de cambio notable de la latitud, para rumbos fuera del meridiano, procede un cálculo previo suponiéndola constante, posteriormente se repite el cálculo en función

de la latitud media; así la variación de la longitud sería: $\Delta \lambda_b^h = V_b^h \cdot \text{sen} R^\circ \cdot \text{sec} \varphi_m$.

Reseñar que el R° y V serán los que proceda en cada caso, es decir, se considerará la existencia de corriente y/o viento. La deducción de las expresiones aquí desarrolladas encuentra su justificación en las figuras 1.40.III y 1.41.III, en las que se plantea como

⁶ Podríamos asignar al retardo R_{\star} la característica de un adelanto negativo $-A_{\star}$ con lo que en la fórmula aparecería solo este último.

un problema de móviles. Sea el astro A que recorriendo su paralelo de declinación,

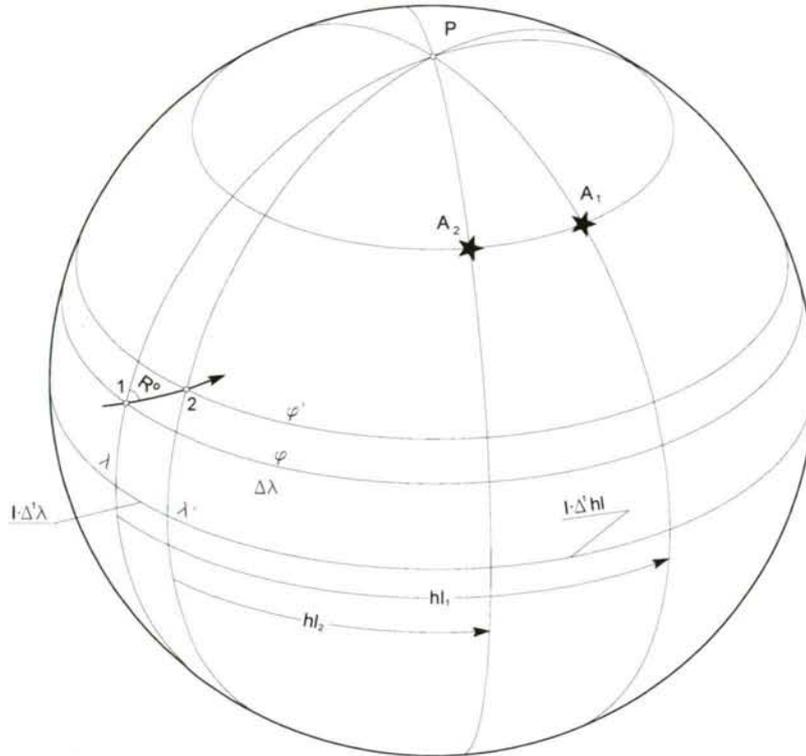


Fig - 1.40.III - Variación del horario. 1

pasa de la posición A₁ a la A₂; si la variación de su horario en una hora es Δ¹hl, en el intervalo I será I·Δ¹hl. El navegante al rumbo R⁰ y con la velocidad V pasa de la posición 1{φ,λ} a la 2 {φ',λ'}, y si la variación de su longitud en una hora es Δ¹λ, pasado el intervalo I la variación total de su longitud será I·Δ¹λ; como el círculo horario del astro se mueve barriendo el ecuador hacia poniente mientras el meridiano del observador lo hace, en este caso, hacia levante, podremos considerar el giro relativo del círculo horario con una velocidad dada por:

$$\Delta^1 hl + \Delta^1 \lambda$$

la variación del horario después del intervalo I es: Δhl = I·(Δ¹hl + Δ¹λ), que generalizada para rumbos de componente W implicaría el signo ± en el paréntesis, + para componente E y - para componente W, y sabiendo que la variación del horario local

es, según la misma figura, $\Delta hI = hI_1 - hI_2$, el intervalo viene dado por:

$$I = \frac{hI_1 - hI_2}{\Delta^1 hI \pm \Delta^1 \lambda}$$

La variación del horario local en una hora es igual a la variación que, en igual tiempo, experimenta el horario en Greenwich; finalmente se obtiene la ya conocida expresión:

$$I = \frac{\Delta hI}{\Delta^1 hG \pm \Delta^1 \lambda}$$

a la que de igual manera habríamos arribado del análisis de la figura 1.41.III, en la que se presenta el mismo problema para su estudio sobre la carta; útil sobre todo para aquellos estudiantes con mayores dificultades de visión espacial. El hecho de que en

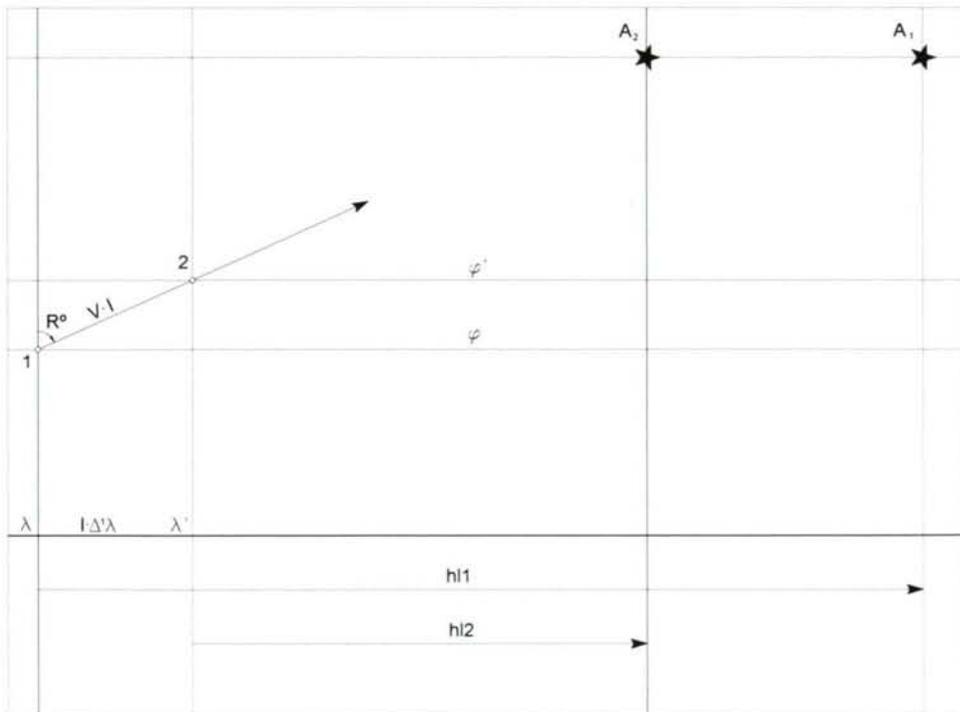


Fig - 1.41.III - Variación del horario. 2

la figura ambos horarios sean orientales, es el que, de forma ilusoria, hace aparecer en estas fórmulas la diferencia de los horarios locales $hI_1 - hI_2$, cuando, evidentemente, debe ser: $hI_2 - hI_1 = \Delta hI$, dando el signo + a los horarios orientales y - a los occidentales, con lo que el incremento de los horarios, y siguiendo la marcha del movimiento diurno, será siempre W, salvo que debido a velocidades excepcionales o en latitudes próximas a los polos, fuera E al predominar la variación en longitud.

10. VARIACIÓN EN ALTURA DE LOS ASTROS.— La altura de los astros varía en función del horario, de la declinación y de la latitud del observador; como quiera que estos tres elementos son, a su vez, función del tiempo, queda establecido que la variación en altura de los astros es función del tiempo. Si en la fórmula de la altura,—también conocida como la primera de las de Bessel⁷— (1.17.II):

$$\text{sen } a = \text{sen } \varphi \cdot \text{sen } d + \cos \varphi \cdot \cos d \cdot \cos P$$

diferenciamos respecto de los elementos variables φ , d y P :

$$\begin{aligned} da = d\varphi \frac{(\cos \varphi \cdot \text{sen } d - \text{sen } \varphi \cdot \cos d \cdot \cos P)}{\cos a} + dd \frac{(\text{sen } \varphi \cdot \cos d - \cos \varphi \cdot \text{sen } d \cdot \cos P)}{\cos a} - \dots \\ \dots dP \frac{\cos \varphi \cdot \cos d \cdot \text{sen } P}{\cos a} \end{aligned} \quad (1.42.III)$$

pero según (6.18.II), (3.18.II) y (1.16.II):

$$da = d\varphi \cdot \cos Z + dd \cdot \cos A - dP \cdot \cos \varphi \cdot \text{sen } Z \quad (2.42.III)$$

o, y según la alternativa dada por (1.16.II)

$$da = d\varphi \cdot \cos Z + dd \cdot \cos A - dP \cdot \cos d \cdot \text{sen } A \quad (3.42.III)$$

Considerando, en un primer análisis, constantes los elementos φ y d tenemos:

$$da = -dP \cdot \cos \varphi \cdot \text{sen } Z \quad (4.42.III)$$

y atendiendo a la ya indicada alternativa de la (1.16.II):

$$da = -dP \cdot \cos d \cdot \text{sen } A \quad (5.42.III)$$

7 Federico Guillermo Bessel. — Eminente astrónomo alemán n. en Minden en 1784, y m. En Königsberg en 1846. Descubrió la astronomía, a la que aportó importantes descubrimientos y por la cual sintió profunda afición, en su estudio de la navegación. Se dedicó al estudio de la determinación de las leyes precisas de los fenómenos de precesión, nutación, aberración, refracción e inclinación de la eclíptica. Fijó las coordenadas de las estrellas con una precisión hasta entonces desconocida. Su obra *Fundamenta Astronomiae* (1818), es considerada por muchos como el fundamento de la Astronomía esférica y estelar.

y el máximo de la variación se producirá, según (4.42.III), cuando $\text{sen}Z$ sea máximo es decir, en los instantes para los que $Z=090^\circ$ o $Z=270^\circ$ que corresponden a los valores del azimut al corte con el vertical primario. El signo negativo en la fórmula indica que “a todo incremento positivo del horario corresponde un incremento negativo de la altura, y viceversa”; tendremos que para esos instantes es:

$$da = -dP \cdot \cos \varphi \quad (1.43.III)$$

El mínimo de esta variación en altura ocurre en los instantes para los que $\text{sen}Z$ es mínimo, es decir, en los momentos para los que $Z=000^\circ$ o $Z=180^\circ$ correspondientes a los valores que toma el azimut al paso por el meridiano superior,—culminación superior—, y al paso por el meridiano inferior,—culminación inferior—, horas en las que siendo el elemento diferencial nulo: $da=0$, la altura debe ser máxima, en el meridiano superior, y mínima, en el inferior. Procediendo en similar análisis con la (5.42.III), se derivan parecidas conclusiones, y el valor máximo de la variación de la altura corresponderá al caso del ángulo paraláctico o de posición recto, instante en el que siendo el vertical tangente al paralelo de declinación, el astro avanza directamente hacia el zenit del observador,—astro a levante del meridiano—, o se aleja directamente del mismo,—astro a poniente del meridiano—; tenemos para este momento:

$$da = -dP \cdot \cos d \quad (2.43.III)$$

Y como en el caso precedente, el mínimo sucede para $A=000^\circ$ o $A=180^\circ$, que son los pasos por los meridianos superior e inferior y en los que, de igual manera, al ser nula la variación la altura es máxima y mínima, respectivamente. La interpretación geométrica de lo expuesto se muestra en la figura 1.44.III, en la que, recurriendo de nuevo a la potente herramienta que la proyección gnomónica representa para el estudio de la problemática que implica el movimiento diurno, se representa los paralelos los astros A y A' ; el primero de ellos corta al vertical primario mientras que el segundo, por culminar entre el zenit y el polo elevado, presenta su ángulo de posición recto. Supuesto el elemento diferencial del horario, dP , común a ambos, los elementos diferenciales en sus respectivos paralelos de declinación serán: $dP \cdot \cos d$ par el primero y $dP \cdot \cos d'$ para el segundo; pueden contemplarse en la figura sus arcos nocturnos. Las componentes de los elementos diferenciales sobre el vertical correspondiente, que representan las variaciones en altura, son, como queda patente, máximas y mínimas en los instantes que ya el análisis nos había dado, resultando ser:

Máxima variación creciente en altura para el astro A:

Al corte con el vertical primario a oriente del meridiano.

Máxima variación decreciente en altura para el mismo astro:

Al corte con el vertical primario a occidente del meridiano

Máxima variación creciente en altura para el astro A':

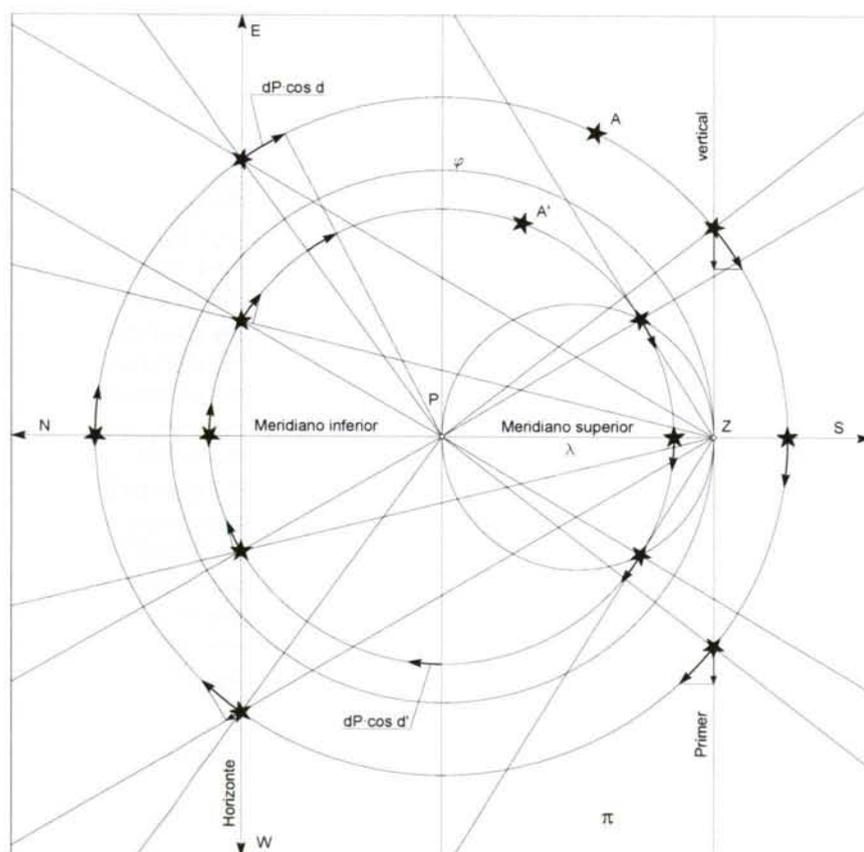


Fig - 1.44.III - Variación en altura 1

En el instante del ángulo de posición recto a levante del meridiano

Máxima variación decreciente en altura para el mismo astro:

En el instante del ángulo de posición recto a poniente del meridiano.

Nótese que, como ya se había comentado para el astro A', la máxima variación ocurre de forma tal, que el elemento diferencial apunta al zenit del observador como consecuencia de la tangencia del vertical con el paralelo de declinación.

Variación mínima,—variación nula, siendo más precisos— para ambos astros:

En las culminaciones superior e inferior

Este fenómeno de variación nula de la altura puede percibirse claramente en la figura,

pues siendo en este momento el vertical,—que coincide con el meridiano—, perpendicular al paralelo de declinación, la componente del elemento diferencial sobre el vertical es, a fortiori, nula. Obsérvese, además, la escasez de la variación de la altura de los dos astros en los ortos y ocasos, aunque debe tenerse bien presente que esta pequeña variación no cabe contemplarla como general, téngase en cuenta la posibilidad de que estos acaecimientos sean simultáneos con el corte con el primer vertical, siendo así máxima esta variación. Por lo que se refiere a latitud y declinación, baste decir que la altura varía tanto más, cuanto más bajos sean sus valores y el valor máximo, en función de estas variables, corresponde a los casos de máximo valor de los cosenos, es decir para $d=0$ (astro equinoccial), y $\varphi=0$ (la ya analizada esfera recta); el mínimo sucede para los mínimos de los mismos cosenos: $d=90^\circ$, — astro en el polo, y en este sentido es la Polar el astro de mínima variación—, y $\varphi=90^\circ$ (esfera paralela, ya estudiada).

Si en el presente análisis se contempla la movilidad del zenit,— del observador—, así como la variabilidad de la declinación del astro, los máximos y mínimos de la variación de la altura no ocurren en los instantes señalados; la lejanía en el tiempo respecto de estos, puede alcanzar valores significativos que dependen del incremento de la declinación, la velocidad y del rumbo. El máximo de variación de la altura debe producirse,— para astros que culminan entre el zenit y el polo elevado—, en el momento en el que el vertical instantáneo es tangente a la curva representativa de la trayectoria del astro en la esfera celeste que, como se ha dicho, no coincide ya con el instante del ángulo de posición recto; para astros que culminan entre el zenit y el polo depreso, el máximo de la variación en altura ocurrirá en aquellos puntos en los que el ángulo que forma el vertical instantáneo con la tangente a la curva que representa la mentada trayectoria, es mínimo. Los valores mínimos (nulos) de esta variación corresponden a los instantes de las culminaciones, que ahora suceden fuera del meridiano. La figura 1.46.III muestra un análisis gráfico de la variación en altura para un astro de declinación variable y zenit en movimiento; se analizan los siguientes eventos:

Para el astro A en la posición A_1 correspondiente al orto, la variación en altura estaría dada por la expresión general

$$da = \Delta d \cdot \sec \alpha \cdot \cos \beta$$

en la que el ángulo α es el formado por la tangente a la trayectoria con el círculo horario (meridiano); si se considera constante, entonces la trayectoria es loxodrómica; en la práctica es cuasi constante para intervalos de tiempo no muy grandes, por lo que la trayectoria es, en los mismos intervalos, cuasi loxodrómica. El ángulo β es el formado

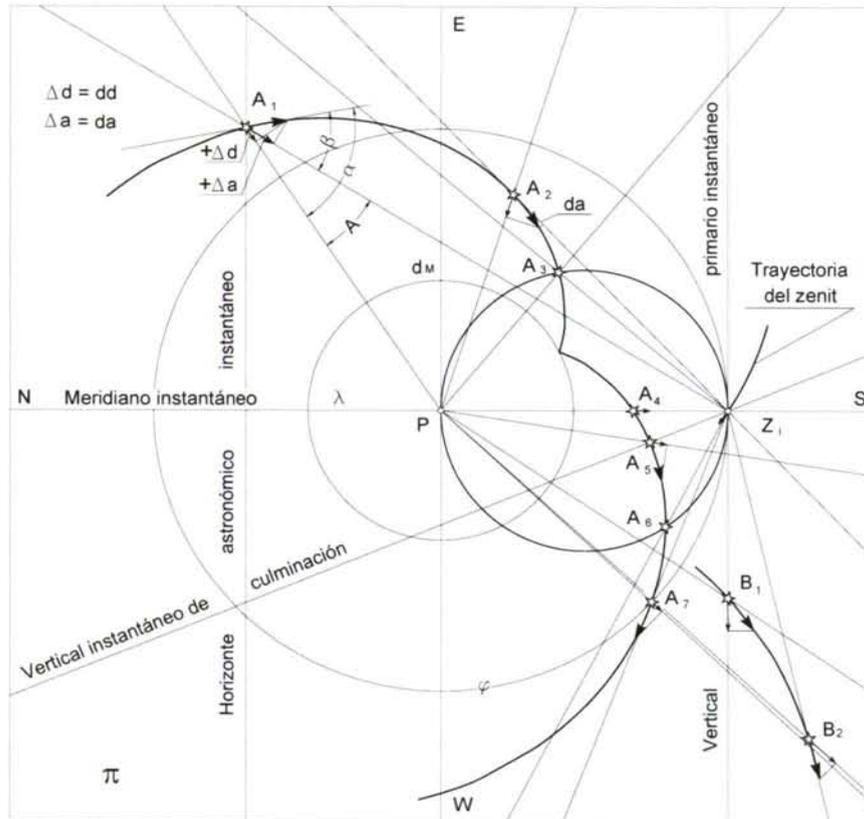


Fig - 1.46.III. Variación en altura 2

por la tangente a la trayectoria, con el vertical instantáneo; si A es el ángulo de posición, $\beta = \alpha - A$.

En la posición A_2 la tangente a la trayectoria coincide con el vertical instantáneo, el ángulo β es nulo (mínimo) y la variación en altura es, en este instante, máxima.

En la situación A_3 el astro presenta el ángulo paraláctico recto, la variación en altura, no obstante, es menor que en el caso precedente, ya que β no es nulo.

Entre las posiciones A_3 y A_4 el astro ha alcanzado el valor máximo de la declinación y cambia de signo Δd .

En A_4 el astro pasa por el meridiano, la variación en altura no es nula, el astro no ha alcanzado la culminación.

En el instante que corresponde a la posición A_5 , el vertical es perpendicular a la tangente a la trayectoria, —normal a la curva—, el ángulo β es $\pi/2$, su coseno nulo y, por lo tanto, es nula la variación en altura; el astro culmina y su altura es máxima: obsérvese en la figura que la distancia zenital es la menor posible.

En A_6 el ángulo paraláctico es, de nuevo, recto y en A_7 la variación en altura, por ser tangente el vertical a la trayectoria, vuelve a ser máxima.

Circunstancias similares concurrirían en el estudio de la variación de la altura para el astro B, que corta al primer vertical instantáneo en B_1 , instante en el que la variación en altura es menor que en el B_2 que, por todo lo anteriormente expuesto, corresponde al valor máximo de esta variación en altura cuyo estudio, damos aquí por concluido.

11 VARIACIÓN EN AZIMUT DE LOS ASTROS.— Admitiendo la constancia de latitud y declinación, el azimut de los astros varía en función del tiempo; si en la (8.17.II)

$$\operatorname{tg} d \cdot \cos \varphi = \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos P + \operatorname{sen} P \cdot \operatorname{ctg} Z$$

despejamos $\operatorname{ctg} Z$:

$$\operatorname{ctg} Z = \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} d \cdot \operatorname{cosec} P - \operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{ctg} P \quad (1.47.III)$$

y diferenciamos respecto a Z y P:

$$dZ = dP \cdot \left(\frac{\cos \varphi \cdot \operatorname{tg} d}{\operatorname{tg} P \cdot \operatorname{sen} P} - \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen}^2 P} \right) \cdot \operatorname{sen}^2 Z$$

que podemos escribir:

$$dZ = dP \cdot \frac{\cos \varphi}{\operatorname{sen} P} \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} d}{\operatorname{tg} P} - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{sen} P} \right) \cdot \operatorname{sen}^2 Z \quad (2.47.III)$$

Si en la (6.17.II) despejamos ctg A:

$$\text{ctg} A = \cos d \cdot \left(\frac{\text{tg } \varphi}{\text{sen} P} - \frac{\text{tg} d}{\text{tg} P} \right)$$

de la que se obtiene:

$$-\frac{\text{ctg} A}{\text{sen} d} = \left(\frac{\text{tg} d}{\text{tg} P} - \frac{\text{tg } \varphi}{\text{sen} P} \right)$$

que sustituida en la (2.47.III), da:

$$dZ = -dP \cdot \frac{\cos \varphi}{\text{sen} P \cdot \cos d} \cdot \text{ctg} A \cdot \text{sen}^2 Z \quad (1.48.III)$$

fórmula, todavía, poco clara para nuestro estudio de la variación del azimut. Recurriendo ahora a la (1.16.II) obtendremos, alternativamente;

$$\text{sen} Z = \frac{\text{sen} A \cdot \cos d}{\cos \varphi}, \textcircled{1} \quad \text{y} \quad \text{sen} Z = \frac{\text{sen} P \cdot \cos d}{\cos a}, \textcircled{2}$$

que sustituidas, consecutivamente, en la (1.48.III), proporciona la expresión:

$$dZ = -dP \cdot \cos d \cdot \frac{\cos A}{\cos a} \quad (2.48.III)$$

suficientemente clara para el análisis que nos ocupa. La variación del azimut es, en función de los elementos ángulo paraláctico, altura y declinación, y exceptuando aquellos valores que llevarían a indeterminación:

Mínima (nula) para $A=90^\circ$, esto es, cuando el ángulo paraláctica es recto

Mínima para la menor altura (no negativa), es decir, al orto y al ocaso

Nula para los astros polares, recuérdese el caso de la Polar

Máxima para $A=0^\circ$ o 180° ; astro en el meridiano

Máxima para el mayor valor de la altura, astro en el meridiano

Máxima para los astros equinocciales.

Los instantes de ángulo paraláctico recto tienen gran importancia en Astronomía de Posición, por permitir la medida precisa del azimut en aquellos astros que, previamente seleccionados, presentan esta circunstancia con alturas adecuadas.

Si, de forma similar, en la (3.17.II), diferenciamos respecto de la altura y del azimut:

$$dZ = da \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{sen} Z} - \frac{\operatorname{tga}}{\operatorname{tg} Z} \right) \quad (1.49.III)$$

De la (7.17.II) se obtiene;

$$\operatorname{ctg} A = \operatorname{cosa} \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{sen} Z} - \frac{\operatorname{tga}}{\operatorname{tg} Z} \right)$$

de la que despejando y sustituyendo, convenientemente, en la (1.49.III), resulta:

$$dZ = da \cdot \frac{\operatorname{ctg} A}{\operatorname{cosa}} \quad (2.49.III)$$

como además, de la, ya varias veces manejada (1.16.II), se concluye que:

$$\frac{\operatorname{cos} \varphi}{\operatorname{cosa}} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} P}$$

sustituida en la (2.49.III) nos da;

$$dZ = da \cdot \frac{\operatorname{cos} A}{\operatorname{sen} P \cdot \operatorname{cos} \varphi} \quad (3.49.III)$$

Expresión que permite analizar, tal vez de forma algo más simple que la anterior, la variación del azimut; se alcanzan idénticas conclusiones:

Variación mínima Para el instante del ángulo de posición recto
 Para el instante del paso por el primer círculo horario (horario 6 o 18 horas)
 Para $\varphi=0^\circ$ (observador en el ecuador)

Variación máxima Al paso por el meridiano superior o inferior, momento en el que $\cos A = \pm 1$ y $\sin P = \pm 0$
 Observador en $\varphi=90^\circ$ (esfera paralela)

Si, al igual que en el precedente estudio, diferenciamos la misma expresión (3.17.II), respecto de φ y Z:

$$dZ = d\varphi \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{sen} Z} - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} Z} \right) \tag{1.50.III}$$

obteniendo de la (4.17.II);

$$\operatorname{ctg} P = \cos \varphi \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{sen} Z} - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} Z} \right)$$

de la que, despejando y sustituyendo en (1.50.III), resulta;

$$dZ = d\varphi \cdot \frac{\operatorname{ctg} P}{\cos \varphi}$$

Fórmula de la que se obtienen conclusiones de similar contenido a las ya halladas en análisis precedentes; en función del ángulo horario, la variación del azimut es máxima para los valores nulos de este, —astro en el meridiano—, y mínima al cortar el primer círculo horario. En función de la latitud del observador, esta variación crece con la latitud y es máxima en el, ya estudiado, caso de la esfera paralela; su valor mínimo sucede para observadores equinocciales, es decir, para $\varphi=0$, lo que conocemos como caso de la

esfera recta.

El estudio de la influencia de la declinación, ya vislumbrado en algunas de las anteriores conclusiones, nos lleva, de nuevo, a la (3.17.II) en la que diferenciando respecto al azimut y a la declinación:

$$dZ = -dd \cdot \frac{\cos d}{\cos a \cdot \cos \varphi \cdot \sin Z} \quad (1.51.III)$$

Expresión de la que, sin necesidad de recurrir a más simplificaciones, deducimos que la variación del azimut es, en función de la declinación, máxima en los astros con declinación 0° , — astros equinocciales—, y nula en astros de declinación máxima, — astros polares—. En función de la altura la variación es máxima para el máximo valor de la misma, — astro en el meridiano superior o inferior; cuando el astro culmina en el zenit se tiene un caso particular de variación máxima—, y mínima al orto y al ocaso, instantes en los que la altura es nula. En función de la latitud, el máximo de la variación en estudio ocurre para el valor máximo de esta, — esfera paralela—, y el mínimo para observadores con latitud 0° , — esfera recta—, (consideraciones ya obtenidas en análisis precedentes). En función del propio azimut, el valor máximo de tal variación sucede al paso por el meridiano (superior e inferior), y el mínimo, al corte con el vertical primario.

12 RELACIÓN ENTRE LAS VARIACIONES EN ALTURA Y AZIMUT.—Sea S el astro que, como consecuencia del movimiento diurno recorre, aparentemente, su paralelo de declinación, que consideraremos constante, pasando en el intervalo de tiempo diferencial dt de la posición S_1 a la S_2 , —lo que implica el cambio de almicantrat con una variación en altura da , y cambio de vertical con una variación en azimut dZ —, mientras el observador de zenit Z_0 , supuesto inmóvil, ocupa el paralelo φ y meridiano λ , figura 1.52.III; del triángulo diferencial, que dada su efectiva pequeñez podemos considerar plano, de vértices S_1 , S_2 y V, rectángulo en V, —toda vez que el vertical es perpendicular al almicantrat—, catetos da y $dZ \cdot \cos a$, e hipotenusa $dP \cdot \cos d$, inferimos:

$$\operatorname{tg} A = \frac{da}{dZ \cdot \cos a}$$

que, inmediatamente y de forma analítica, se obtendría de la (2.49.III). Despejando da :

$$da = dZ \cdot \operatorname{tg} A \cdot \cos a$$

La altura: varía rápidamente en el instante del ángulo paraláctico recto y, como se demuestra en la (4.42.II), al corte con el vertical primario. Su variación es nula al paso de los astros por el meridiano superior e inferior.

El azimut: alcanza su máxima variación al paso de los astros por el meridiano superior e inferior. Su variación es nula en el instante del ángulo paraláctico recto, y mínima, en función del propio azimut, al corte con el primer vertical.

Vemos así que el comportamiento de ambas variables es opuesto: a los valores máximos de la variación en altura, corresponden los mínimos de la variación en azimut y viceversa.

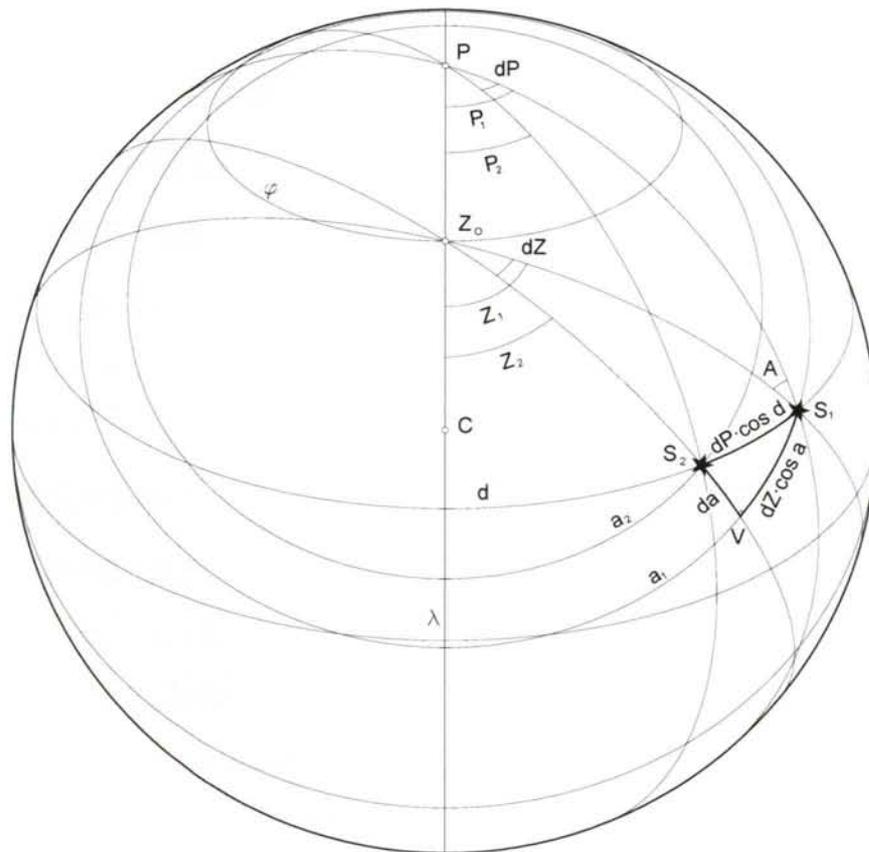


Fig - 1.52.III - Variación en altura y azimut

CAPÍTULO IV

LA MEDICIÓN DE LA ALTURA DE LOS ASTROS

1. EL SEXTANTE. — Nacido de la evolución de instrumentos de reflexión más antiguos, como el octante y el quintante, el sextante es el instrumento con el que en la mar se mide la altura de los astros. Su principio, como el de aquellos, se basa en la ley de la doble reflexión:

“Si un rayo de luz sufre una doble reflexión en el mismo plano, el ángulo que forman el primer rayo incidente y el último reflejado, es el doble del ángulo formado por las superficies de reflexión”

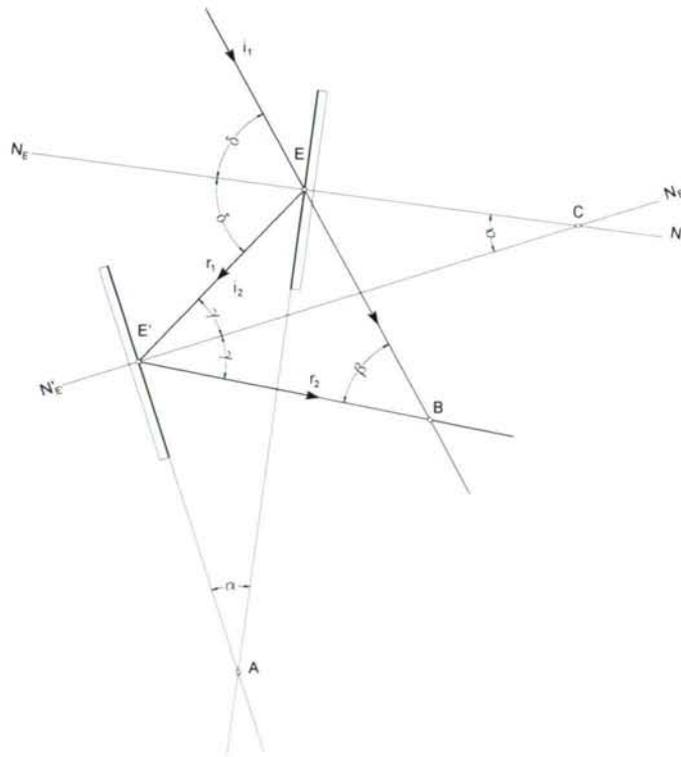


Fig - 1.53.IV - La doble reflexión

En efecto, sean, figura 1.53.IV, E y E' las superficies de reflexión que forman el ángulo α en el punto A, formando las respectivas normales idéntico ángulo en el punto C, i_1 el primer rayo incidente, r_1 el primer reflejado que es, a su vez, el segundo incidente i_2 , y r_2 el segundo reflejado, que forma con el primer incidente el ángulo β en B; por el principio de que "en todo triángulo el ángulo exterior es igual a la suma de los dos internos no adyacentes", en el CEE':

$$\delta = \gamma + \alpha$$

de la que;

$$\alpha = \delta - \gamma$$

En el triángulo BEE':

$$2 \cdot \delta = 2 \cdot \gamma + \beta$$

y de esta;

$$\beta = 2 \cdot (\delta - \gamma)$$

por lo que, y según queríamos demostrar:

$$\beta = 2 \cdot \alpha$$

2. DESCRIPCIÓN DEL SEXTANTE. — Consta de una armadura 1, ver figura 1.55.IV, generalmente de latón, —aunque al principio ciertas maderas combinadas con marfil como soporte de la graduación, y posteriormente el bronce y el aluminio fueron materiales empleados en su construcción, modernamente comienzan a emplearse plásticos que, gozando de especiales características, apuntan como futuros sustitutos de cualquier otro material, sin menoscabo de la precisión y con mayor ligereza—, en forma de sector circular, en cuyo centro gira la alidada 17, solidaria al espejo grande 18, y en el otro extremo de la cual existe un mecanismo a tornillo sin fin, 7, que permite el engrane sobre la corona dentada 11 de la base del sector de la armadura. La presión sobre las pinzas 6, controla el antedicho engrane facilitando el giro rápido de la alidada hacia una lectura al grado en el limbo graduado 13 del sector 5; aflojando la presión sobre las pinzas, un resorte engrana el sin fin en la corona que, ahora, es controlada por el movimiento del tambor 10 de forma tal, que a cada vuelta de este, la alidada avanza una división del limbo, es decir: según el principio en que se fundamenta el sextante, la alidada avanza medio grado por cada vuelta del tambor; todo el tambor se haya dividido en sesenta partes iguales, 9, cada una de las cuales corresponde a un minuto de arco; en contacto con esta graduación una pieza fija 8, — el nonio propiamente dicho—, cuya misión es la lectura de precisión, muestra una particular

división, de manera que n divisiones del tambor son abarcadas por $n+1$ divisiones del nonio¹ obteniéndose precisiones, en las lecturas, de 6 segundos de arco, cuando 9 divisiones del tambor son abarcadas por 10 divisiones del nonius. El collar **3**, consiste en una pieza a la que se enrosca el dispositivo óptico adecuado: anteojo astronómico

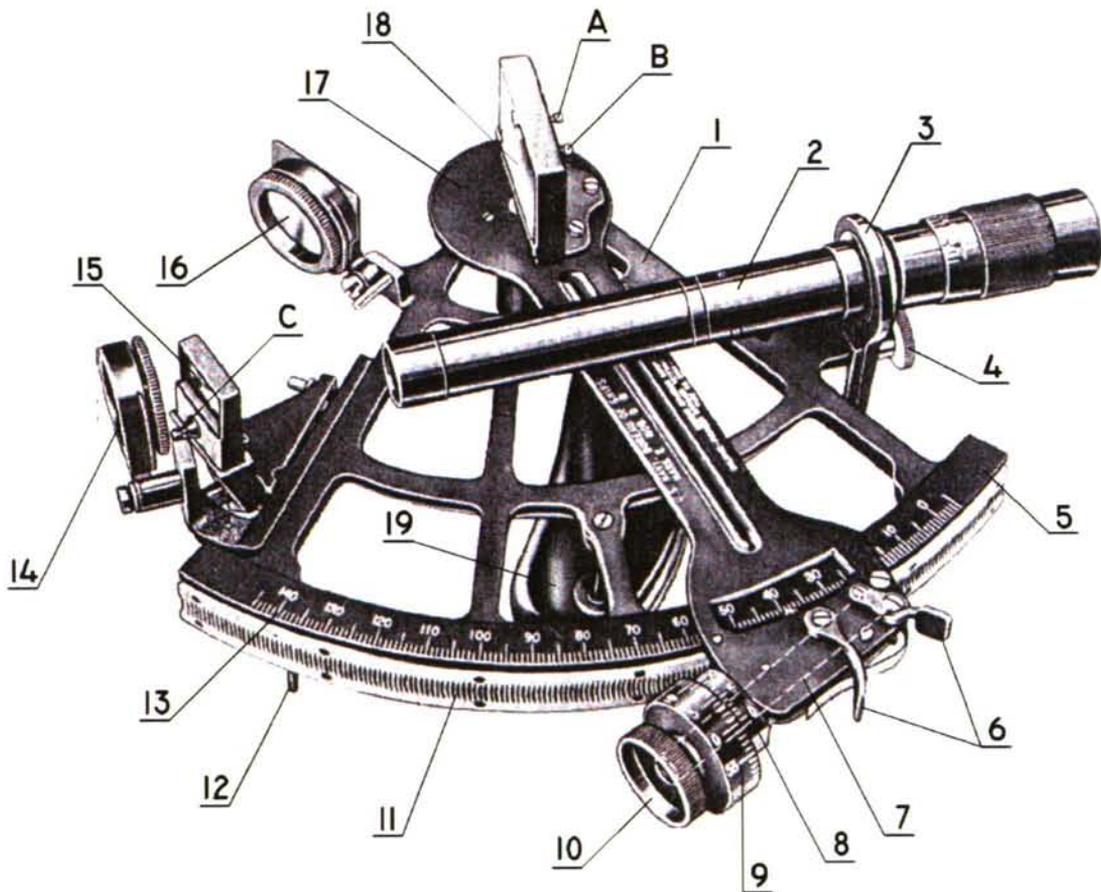


Fig - 1.55.IV - Descripción del sextante

2 para observaciones del Sol cuando se requiera alta precisión, o un anteojo convencional para la observación en los crepúsculos; el collar puede acercarse o alejarse del plano del limbo al objeto de que en el anteojo se reciba más o menos luz del espejo chico **14**, actuando sobre el tornillo **4**. Tres pies de apoyo, **12**, para ser posado, permiten, además, la inmovilización del sextante en su caja; los vidrios de color, rectificadores o modificadores, —que con distintos nombres los hayamos en las varias obras consultadas—, **14** y **16** sirven como filtros de la luz solar para evitar

¹ Muchos sextantes modernos carecen de este dispositivo; basta una estimación a ojo para precisar, comodamente, el cuarto de minuto, precisión más que suficiente en la práctica náutica.

posibles quemaduras, los del sextante de la figura son roscados pudiendo ser removidos y sustituidos cuando convenga. Los modernos sextantes disponen de varios de ellos ubicados sobre un eje, de forma tal que pueden ser rápidamente seleccionados y convenientemente interpuestos en la trayectoria de la luz. La empuñadura o mango **19** ha de permitir el cómodo manejo del aparato, siendo en los modernos, además, el alojamiento de las baterías que proporcionan la energía eléctrica precisa para que una pequeña lámpara de linterna ilumine las zonas de las líneas de fe del tambor y alidada. Mediante los dispositivos **A**, **B** y **C**, se actuará cuando proceda el reajuste y rectificación, operaciones de las que se dará cumplida explicación posteriormente.

3. LECTURA DEL SEXTANTE. — Según vimos, ya, en la descripción, la lectura de los modernos aparatos de tambor, conocidos igualmente como sextantes de lectura rápida, no ofrece mayor dificultad; no obstante, y a título de ejercicio, se disponen los ejemplos que siguen. Si el sextante no dispusiera de nonius se interpola a ojo la décima próxima; distintos observadores, probablemente, obtendrían diferentes estimaciones sin

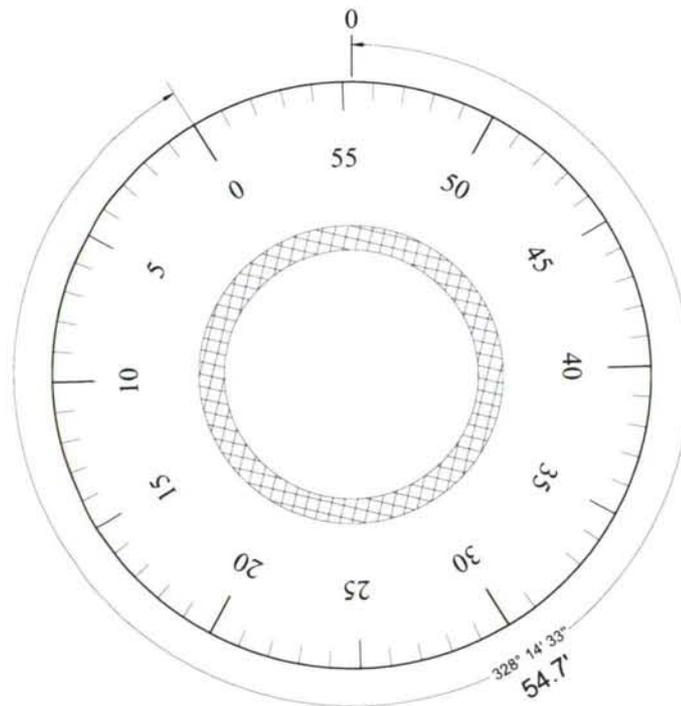


Fig - 1.56.IV - Lectura rápida: 54.7'

que la diferencia fuera, en ningún caso, más allá de la décima de minuto. En la de la figura 1.56.IV, la lectura sería de 54,7', lectura del tambor; en rigor, y dado que el ángulo

girado por este es de $328^{\circ} 14' 33''$, siendo la correspondencia $1' \rightarrow 6^{\circ}$, —no se olvide que 60 divisiones del tambor son 360° —, tal ángulo correspondería a una lectura de $54' 42,4''$, exactamente. Si el aparato dispone de nonius y este es, típico, de la estructura ya explicada, a saber: a 9 divisiones del tambor, corresponden 10 divisiones del nonius, la precisión lograda en este caso es de $0,1'$, o sea $6''$ y la lectura correspondiente a la figura 1.IV.57 será de $21' 48''$, pues es la división octava del nonius la que coincide con

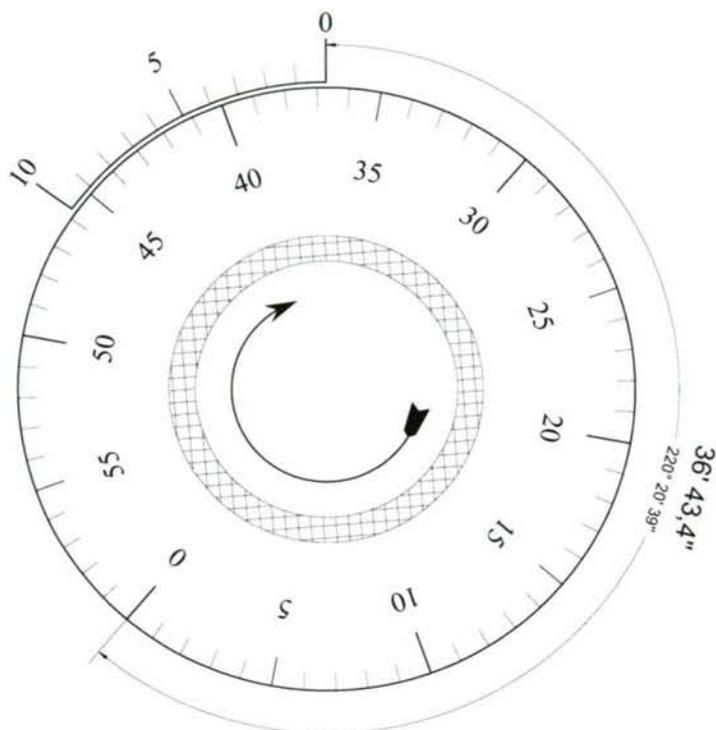


Fig - 1.57.IV - Lectura rápida: $36,7'$

una de las líneas del tambor. Según el ángulo barrido por el giro, la lectura exacta debería ser $21' 45,9''$, con un error en el nonius inferior a $3''$. En el ejemplo de la figura siguiente, 1.57.IV, la lectura es $36,7'$, al ser la división 7 del nonius la que muestra la indicada coincidencia; el valor riguroso que correspondería según el ángulo barrido por el tambor en su giro es de $36' 43'',7$, de acuerdo a la correspondencia entre el minuto de tambor y su valor angular 6° . Cuando la necesidad obligara a lecturas a la derecha del cero del limbo, tal como la que se muestra en la figura 1.58.IV, se restarán 60 al resultado de la misma. En la citada figura la lectura directa sería de $55,7'$; restados 60, daría $-4,3'$ la lectura final a la derecha. Una maniobra equivalente consiste en la lectura de los minutos desde el cero del limbo, en el presente caso $4'$, buscando las décimas tomando como origen el 10 del nonius, $4,3'$ sería el resultado final del caso que nos ocupa. En todos los ejercicios se ha supuesto, solamente, la lectura de los minutos en

el tambor; los grados son leídos en el limbo graduado, en el punto que la línea de fe de

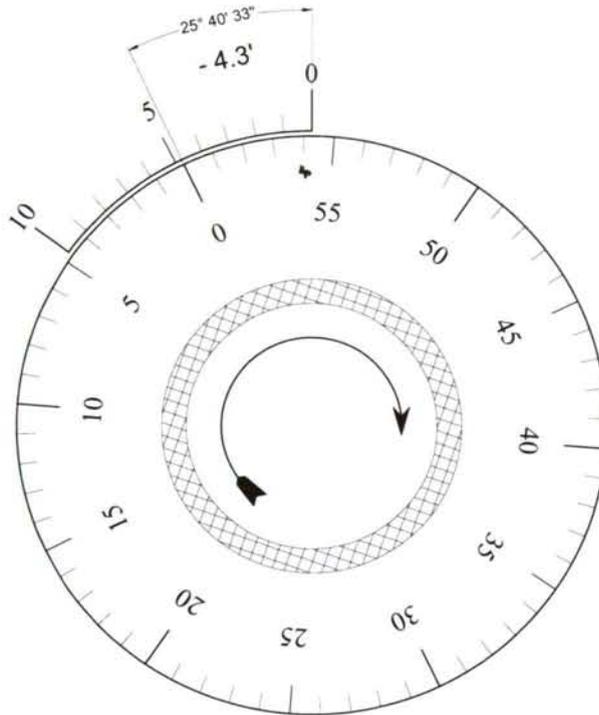


Fig - 1.58.IV - Lectura a la derecha: - 4.3'

la alidada indica. Los sextantes que no son de lectura rápida, —actualmente piezas de coleccionista—, van provistos de una lupa cuyo objetivo es lograr la precisión en la lectura, mediante un detenido ejercicio de la misma; el limbo, usualmente, va dividido en grados y cuartos de grado o en grados y sextos de grado; sobre la alidada y al lado de la línea de fe se encuentra el nonius. Este es tal que n divisiones del limbo son abarcadas por $n+1$ divisiones del nonius, al igual que en el caso del tambor pero mucho más engorroso en su manejo, así, si 59 divisiones del limbo se dividen en 60 partes y cada una de las divisiones del limbo son $15'$, entonces la precisión del dispositivo son:

$$15' - \frac{59 \times 15'}{60} = 0,25' = 15''$$

y, en general, si m es la menor división del limbo y n el número de divisiones del mismo que son abarcadas por las $n+1$ divisiones del nonius, la precisión de lectura en el sextante será:

$$m - \frac{m \cdot n}{n + 1} = m \left(1 - \frac{n}{n + 1} \right) = \frac{m}{n + 1}$$

así, y en atención a los valores más usuales de m , $10'$, $12'$ y $15'$ se obtendrían las precisiones: $10''$, $12''$ y $15''$, correspondientes a las diferencias entre una división del limbo y una del nonius. Se disponen, a modo de ejercicios, las siguientes lecturas en

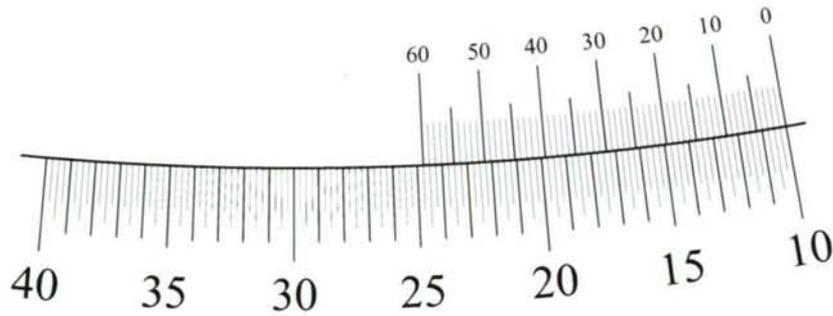


Fig - 1.59.IV - Aspecto de limbo y nonius

un sextante en el que m son $15'$ y n son $60''$. La figura 1.59.IV muestra una imagen debidamente aumentada de parte del limbo y nonius en un sextante de las características descritas; en la figura 2.59.IV la lectura exacta correspondiente debería ser $21^\circ 46' 6''$, como los $6''$ no pueden ser apreciados, la lectura es de $21^\circ 46' 15''$; el

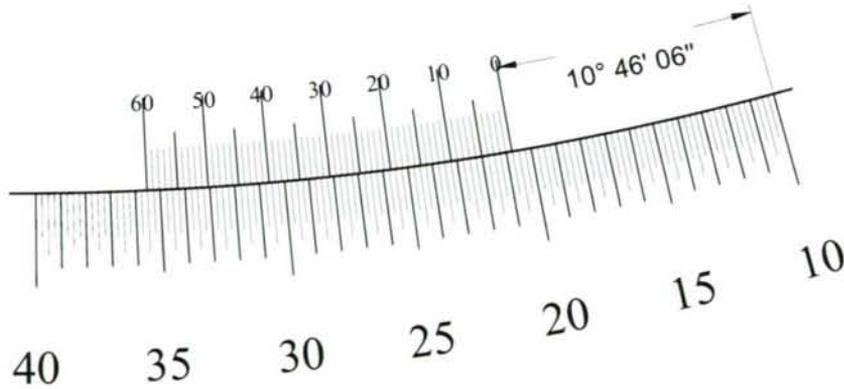


Fig - 2.59.IV - Lectura $21^\circ 46' 15''$

grado y las quincenas de minutos son leídas en la graduación del limbo: $21^\circ 45'$ el

2 En algunos tipos de sextantes se toman 119 divisiones del limbo y se dividen en 60 partes. La apreciación es:

$$2 \times 10' - \frac{119 \times 10'}{60} = 10''$$

con mayor comodidad en la lectura.

minuto del 1 al 15, en este caso 1', y los segundos, 15", en el nonius, dando de lectura total la reseñada. En el ejercicio de la figura 1.60.IV, cuya lectura exacta es, en función del giro de la alidada, $29^{\circ} 19' 44''$. Por las razones argüidas en el caso anterior, no

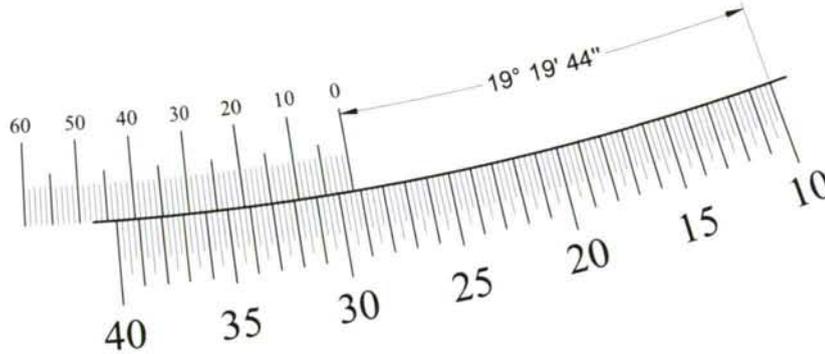


Fig - 1.60.IV - Lectura $29^{\circ} 19' 45''$

pueden apreciarse los 44'', redondeándose la lectura a los $29^{\circ} 19' 45''$ y siguiendo la misma técnica de lectura; es decir $29^{\circ} 15'$ leídos en el limbo y $4' 45''$ en el nonius³, el resultado total final es el indicado $29^{\circ} 19' 45''$. Para lecturas a la derecha del cero de la graduación del limbo, se procede de forma pareja al caso de la lectura en los instrumentos de tambor.

4. PUNTO INICIAL O DE PARALELISMO. — En un sextante teórico deben cumplirse todos y cada uno de los siguientes requisitos:

- 1 el plano del espejo grande debe ser perpendicular al plano del limbo
- 2 el plano del espejo chico debe ser perpendicular al plano del limbo
- 3 los planos de los rectificadores deben ser perpendiculares al plano del limbo
- 4 el eje óptico será paralelo al plano del limbo
- 5 la alidada girará en el centro del limbo
- 6 las divisiones del limbo serán iguales
- 7 Los espejos y vidrios de color deben tener sus caras paralelas

³ En muchos tratados de Navegación se emplea el término vernier por el de nonius. El invento del artefacto es atribuido al ilustre luso Nunes, de aquí el nombre de nonius; Vernier lo modificó mejorándolo notablemente, pero con posterioridad.

La precisión alcanzada por los fabricantes de sextantes es, desde hace mucho tiempo, garantía del cumplimiento de los requisitos citados, siendo la diferencia actual entre las distintas marcas más una cuestión de calidad en los materiales que de precisión en los procesos de fabricación. Son uso indebido, inevitable desgaste y accidentes propios del ambiente marino los que pueden convertir un sextante en un trasto inútil, debiendo, periódicamente, comprobarse su estado. Por punto inicial o de paralelismo se entiende el punto que en el limbo señala la línea de fe de la alidada cuando los planos de ambos espejos son paralelos; en un sextante teórico este punto debe ser el cero de la

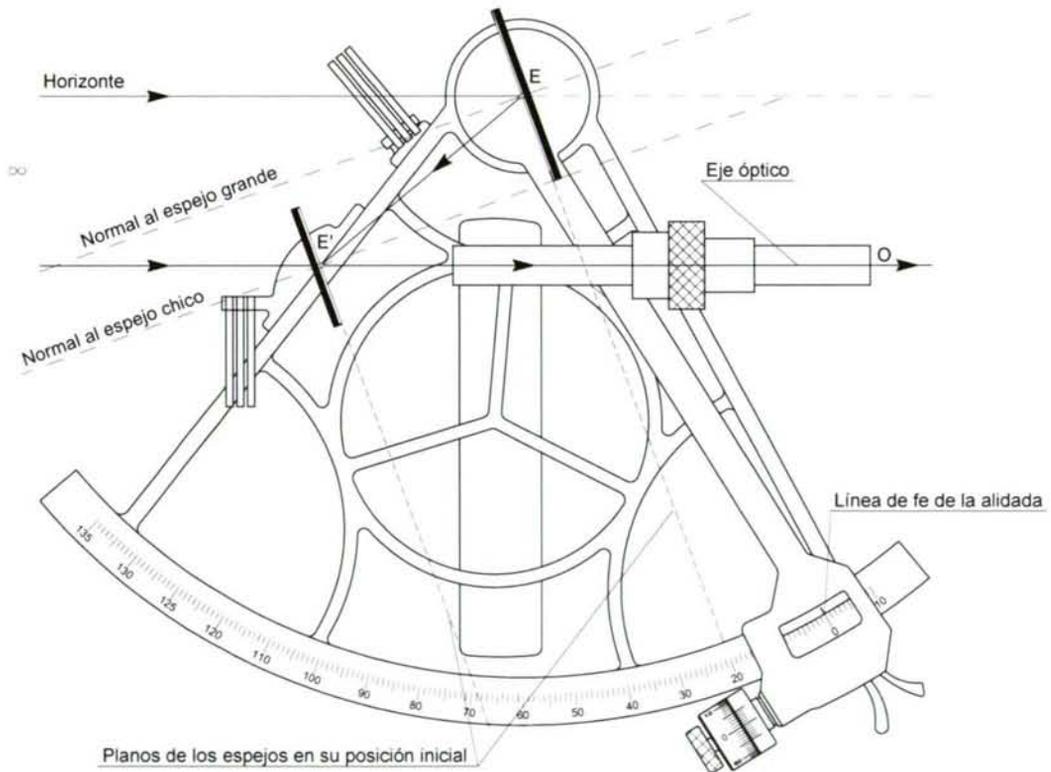


Fig - 1.61.IV - Punto inicial o de paralelismo

graduación, figura 1.61.IV. Cuando en la condiciones antedichas esto no sucede, entonces el cero del sextante no coincide con el cero de la graduación pudiendo quedar a la derecha o a la izquierda de la misma; el ángulo medido y leído difieren en una magnitud, cuya entidad no debe tolerarse superior a $\pm 3'$, conocida con el nombre de error de índice del sextante, del mismo valor y signo contrario que la corrección de índice. El control sobre esta variable es síntoma de pericia y buen hacer y debe

comprobarse su valor antes de toda observación; los distintos métodos empleados, así como el orden de preferencia en cuanto a la precisión del valor obtenido, se explicarán oportunamente.

5. PUNTO DE COLIMACIÓN O COINCIDENCIA. — En el punto inicial o de paralelismo, precedentemente estudiado, ya hemos visto que estando ambos espejos paralelos, la línea de fe de la alidada señalará el cero de la graduación y, en su caso, el cero del tambor coincidirá con el cero del nonius. El rayo de luz incidente en el espejo grande procede del infinito y es paralelo al rayo directo que atraviesa la parte no azogada del espejo chico siguiendo la trayectoria del eje óptico; en estas circunstancias el observador observa el punto del infinito. Cuando el objeto observado está a distancia finita, el rayo de luz que emana de él e incide en el espejo grande reflejándose y siguiendo su natural camino hacia el espejo pequeño, y de este al ojo del observador, forma un cierto ángulo con el rayo de luz que procedente del mismo objeto, atraviesa la parte no azogada del espejo pequeño dirigiéndose, asimismo, al ojo del observador; el punto que la línea de fe de la alidada señala en la graduación del limbo cuando ambas imágenes coinciden recibe el nombre de punto de colimación o coincidencia y, en un sextante teórico, está siempre a la derecha del cero de la graduación. Del triángulo PEE', figura 1.63.IV, en el que son conocidos β , d y D obtenemos el valor del ángulo π , también conocido como ángulo de paralaje de los espejos:

$$\frac{\text{sen } \pi}{d} = \frac{\text{sen} (180^\circ - 2 \cdot \beta)}{D}$$

y de esta;

$$\text{sen } \pi = \frac{d}{D} \text{sen } 2 \cdot \beta$$

para ángulos muy pequeños puede, sin error apreciable, suponerse $\text{sen } \pi = \pi' \text{sen } 1'$; si se supone, además, que $d \approx 0,12$ m y $\beta \approx 18^\circ$, la fórmula que proporciona el ángulo de paralaje de los espejos resulta;

$$\pi' = \frac{242,5}{D}$$

en la que D viene expresada en metros. Si D viene dada en millas náuticas, entonces el ángulo de paralaje π en minutos de arco, es aproximadamente el 13% de la distancia D en millas. El cálculo de la distancia mínima para la que el ángulo de paralaje de los

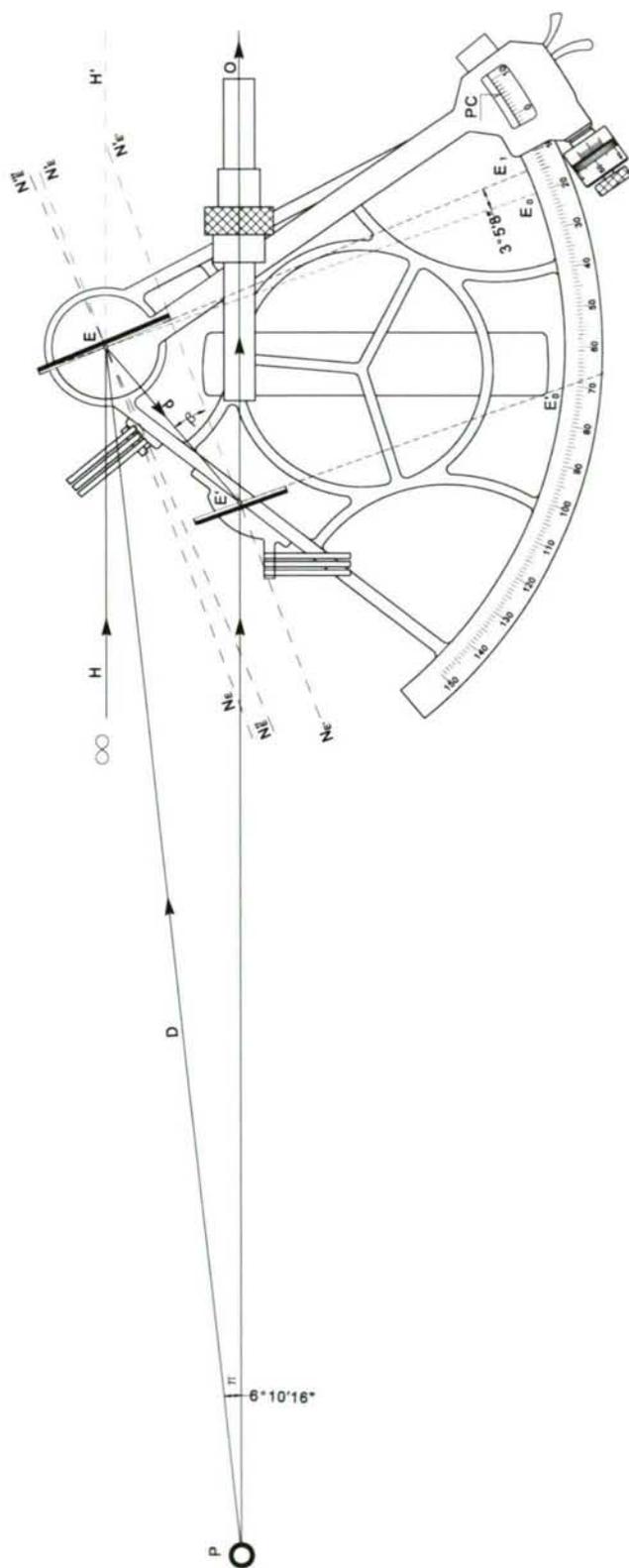


Fig - 1.63.IV - Punto de colimación o coincidencia: ángulo de paralaje de los espejos

espejos asume un valor fijado de antemano, se efectúa despejando en la fórmula anterior el valor de esta distancia; si, como es usual, se asume como valor límite de este ángulo de paralaje $\pi = 0,5'$, para el que el punto de colimación quedaría $15''$ a la derecha del cero de la graduación, en las condiciones de valores para β y d antes consignados, tal distancia D vendría a ser de unos 485 m. El artificio constructivo en los modernos sextantes, y que consiste en atrasar la alidada respecto al punto teórico de paralelismo, tal como puede observarse en las figuras 1.61.IV y 1.63.IV, en cuyo sextante este punto teórico cae en los 20° del limbo, tiene como objetivo un manejo y lectura más cómodos, con mejor aprovechamiento del limbo.

6. TÉCNICAS DE OBSERVACIÓN. — Solo la continuada y paciente práctica convierte al lego en maestro; las indicaciones que seguidamente se dan, pretenden ayudar a superar los pequeños inconvenientes propios del autodidacta. Para las observaciones del Sol, determinar, previamente y mediante cálculo, la altura estimada, disponer la alidada en la lectura correspondiente e interponer, en función de las condiciones meteorológicas del instante de la observación, los adecuados rectificadores; —lo más ortodoxo y seguro es comenzar colocando los de mayor capacidad de filtrado—, situar el plano del sextante en el plano del vertical del Sol e ir sustituyéndolos hasta conseguir una visión cómoda, efectuar la tangencia del limbo elegido actuando sobre el tambor y haciendo oscilar, ligeramente, el sextante alrededor del eje óptico. Anotar altura y hora correspondiente y repetir la operación en función de la evaluación en la calidad de la observación. Puede, en vez de calcular la altura, estimarse a ojo,—con el brazo totalmente extendido, el puño en martinete cubre alrededor de 12° de vertical—, o bajar el Sol hasta el horizonte; esta operación requiere cierta habilidad, sobre todo navegando entre olas. Con el sextante invertido puede acometerse la operación de llevar el horizonte de la mar hacia el Sol, esta maniobra es preferible en la observación de estrellas y planetas, véase figura 1.65.IV; cuando el cielo está cubierto de una capa de estratos que no impiden la observación, los rectificadores no son precisos. Para la observación de alturas meridianas, la serie debe iniciarse con antelación suficiente, ya que si las nubes impidieran la observación en el instante de la culminación, dispondríamos de una serie de alturas circunmeridianas; si se navega por latitudes intertropicales debe considerarse la posibilidad de tener que observar alturas próximas al zénit en el instante de la meridiana, requieren gran atención pues la tangencia se realiza en un amplio arco de horizonte siendo muy difícil precisar el instante de la colimación. Para observaciones lunares extremar la precaución al seleccionar el adecuado limbo, pues en determinados instantes de cada lunación no

es demasiado fácil precisar la discontinuidad del disco lunar. En las observaciones crepusculares es buena práctica el preparar, con antelación, un esquema como el

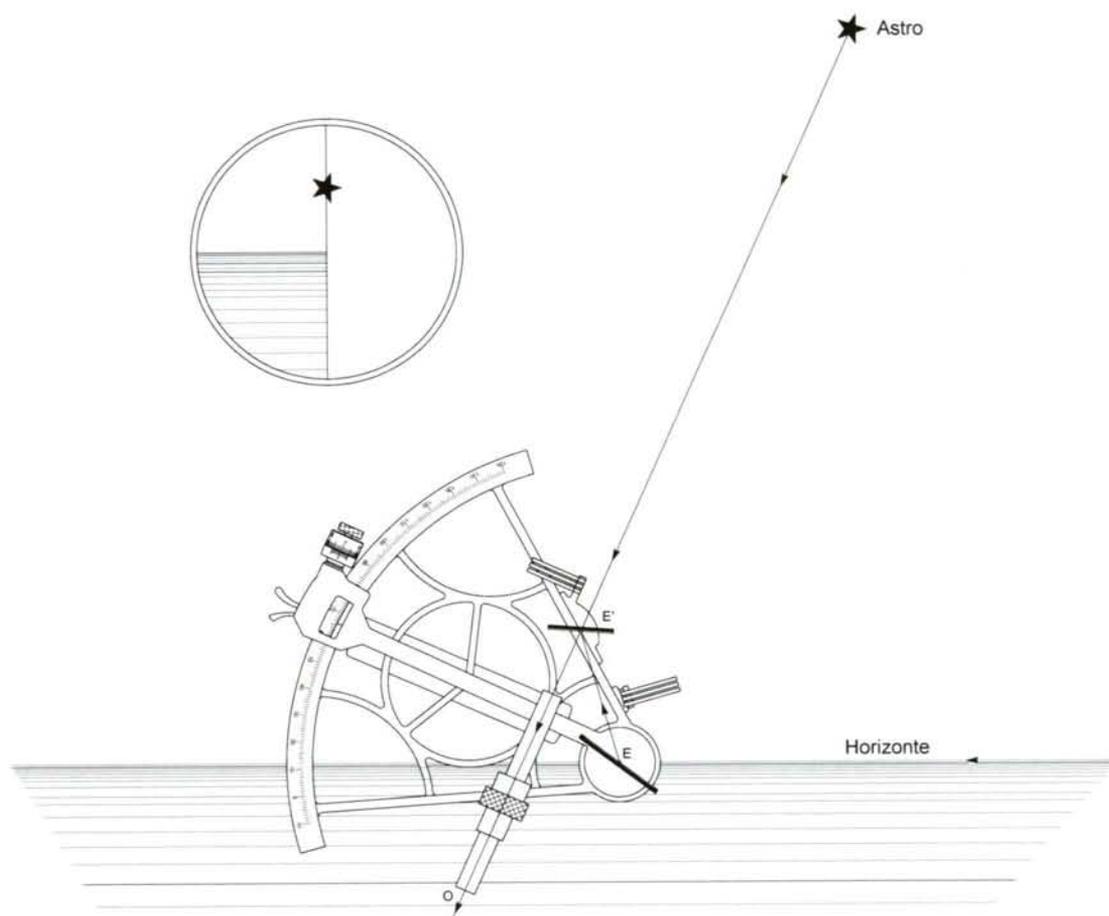


Fig - 1.65.IV - Aproximación del horizonte

mostrado en la figura 1.66.IV, en el que aparezcan reflejados los datos de mayor interés tales como alturas aproximadas, azimutes o marcaciones de los astros seleccionados y hora TMG y del reloj de bitácora para la que se espera la observación. Con tiempos de nubes y claros esta operación puede resultar completamente inútil; en este caso es mejor observar a son de las circunstancias, seleccionando en cada caso el astro más conveniente dentro de los visibles. El esperar a que una nube deje expedito el cielo suele desembocar en la pérdida del crepúsculo. En tiempo de calimas con línea del horizonte no bien definida es aconsejable disminuir la elevación del observador bajando, si fuese preciso, hasta la cubierta principal al objeto de acercar lo máximo posible la línea del horizonte al observador; en otras circunstancias, como la navegación entre grandes olas, se recomienda la operación inversa.

7. MÉTODOS PARA DETERMINAR EL ERROR DE ÍNDICE. — En el apartado dedicado al estudio del punto inicial o de paralelismo, habíamos visto que en las condicione teóricas establecidas, la línea de fe de la alidada debería indicar el cero de

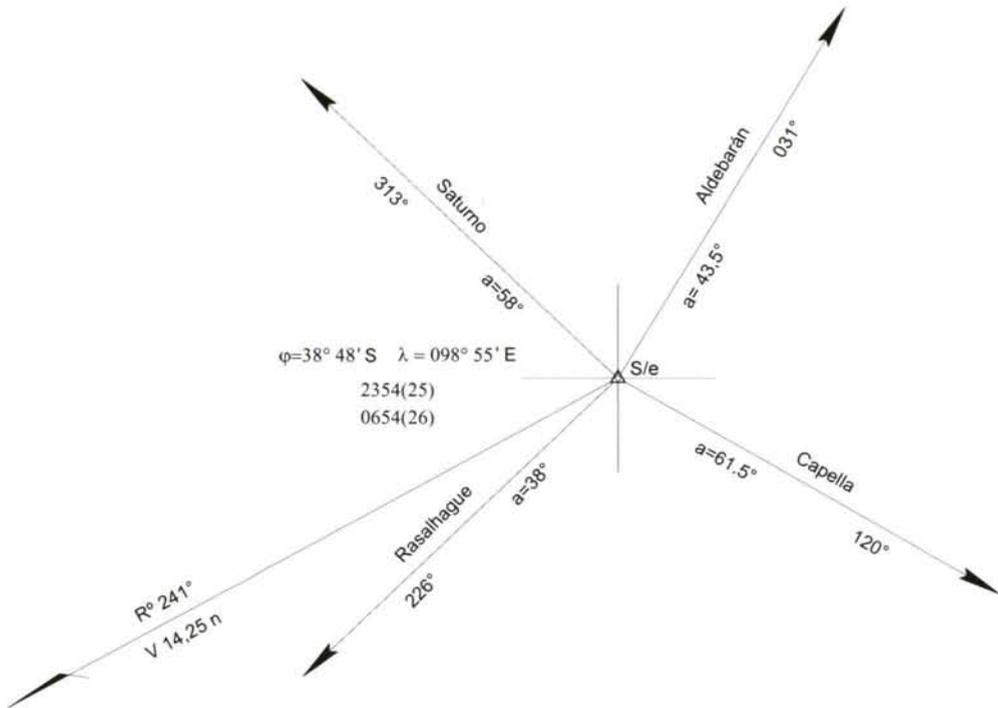


Fig - 1.66.IV - Esquema de la observación al crepúsculo

la graduación en el limbo. Durante la etapa útil de un sextante poco tiempo se mantiene inamovible este punto inicial; al producirse el desplazamiento del cero teórico a la izquierda o derecha del de la graduación, se origina una diferencia entre el ángulo medido y la lectura correspondiente, conocida con el nombre de error de índice del sextante, que será aplicada a las lecturas con signo contrario. El primero y más exacto de los procedimientos destinados al cálculo de esta diferencia es el que seguidamente se describe: Colocar los adecuados modificadores y, con la alidada a cero, dirijase el sextante hacia el Sol de forma que las imágenes directa y reflejada aparezcan en el campo del anteojo, igualar la luminosidad de ambas imágenes acercando o alejando el anteojo al plano del limbo y proceder a la tangencia del limbo superior de la imagen reflejada con el limbo inferior de la imagen directa, sea φ la lectura; repetir la operación con el limbo inferior de la imagen reflejada y el superior de la directa y sea, ahora, φ' la lectura debidamente restada de $60'$; el error de índice, tal como puede comprobarse

en la figura 1.67.IV, vendrá dado por la fórmula siguiente;

$$e_i = \frac{\mathcal{L} + \mathcal{L}'}{2}$$

es decir, el error de índice viene dado por la semisuma algebraica de ambas lecturas, siendo positivas las lecturas a la izquierda del cero y negativas las efectuadas a la derecha del mismo. Sirve como comprobación de la alta fiabilidad de este procedimiento el hecho de que la cuarta parte de la diferencia algebraica de ambas lecturas, ha de ser el valor del semidiámetro solar para el instante del cálculo;

$$\sigma_{\odot} = \frac{\mathcal{L} - \mathcal{L}'}{4}$$

idéntico procedimiento se seguirá para esta determinación observando la Luna, si bien, en este caso, debe comprobarse que dicho astro se encuentra e plenilunio, no siendo

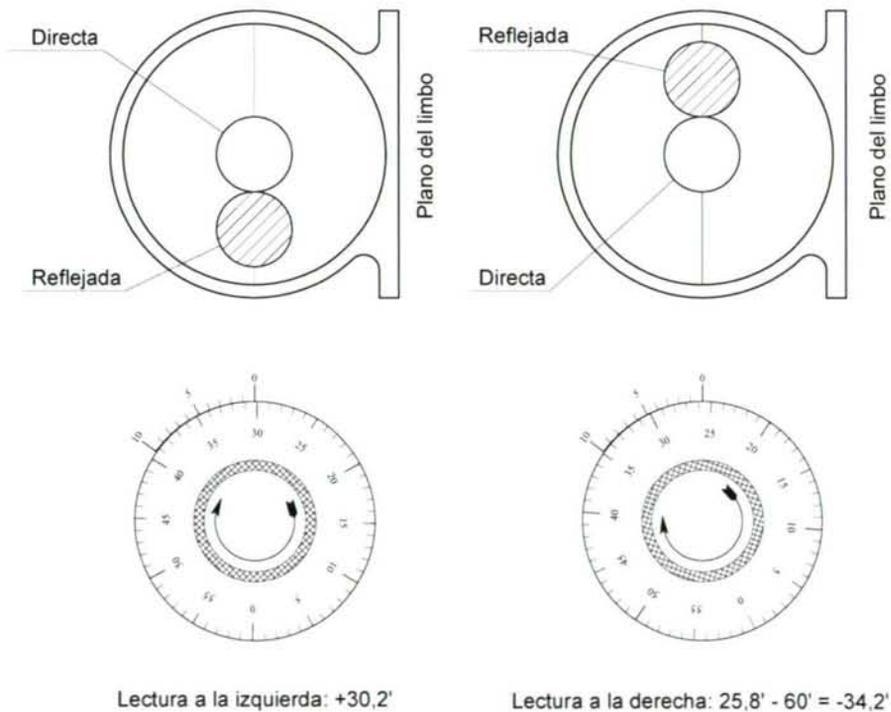


Fig - 1.67.IV - Error de índice por el Sol

preciso el uso de modificadores. Vemos que de la figura de la presente página que siendo las lecturas $\mathcal{L}=+30,2'$ y $\mathcal{L}'=-34,2'$, al aplicar la primera de las fórmulas, para el error de índice tendríamos

$$e_i = \frac{30,2' + (-34,2')}{2} = -2,0'$$

y para el semidiámetro, aplicando la segunda fórmula;

$$\sigma_{\odot} = \frac{30,2' - (-34,2')}{4} = \frac{30,2' + 34,2'}{4} = 16,1'$$

El segundo de los procedimientos consiste en la observación de una estrella de 3ª magnitud; haciendo la coincidencia de las imágenes directa y reflejada, la lectura es, con su signo correspondiente, el error de índice; véase la figura 1.68.IV. Si con el sextante en el cero teórico la imagen reflejada quedara bajo la directa, el movimiento

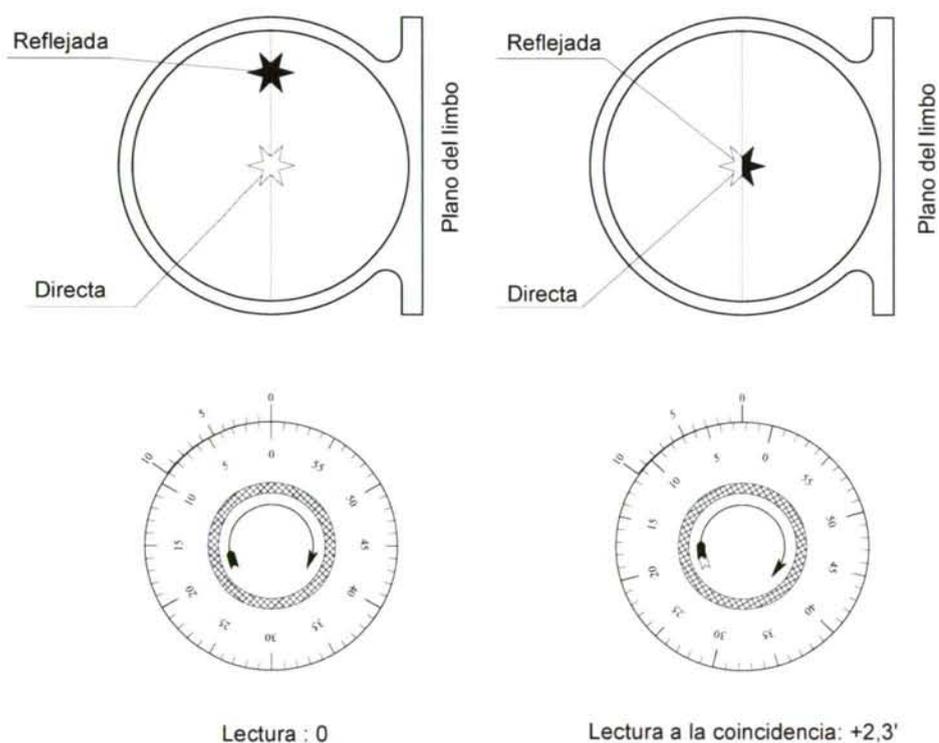


Fig - 1.68.IV - Error de índice por ★ 3ª magnitud

de la alidada sería a la derecha del cero, y, por lo tanto, el error de índice resultaría negativo; en el primer caso habríamos de "bajar" la imagen reflejada a la directa, en el segundo, tendríamos que "subirla". Este procedimiento es menos riguroso que el primero, aunque da buenos resultados. El tercero de los métodos para la determinación

del error de índice consiste en la observación de la línea del horizonte cuando su nitidez ofrezca garantía; el menos aconsejable de todos, es, no obstante, útil; véase la figura 1.69.IV. Al igual que en el precedente caso, en este hemos de elevar la línea del horizonte reflejado hasta lograr la continuidad con la del horizonte directo, instante en

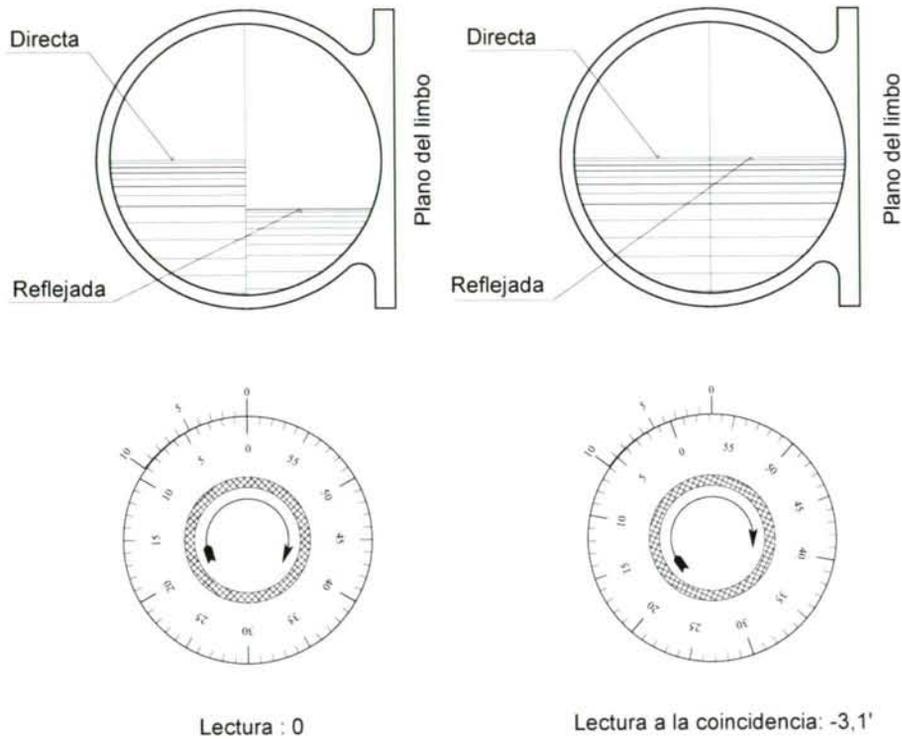


Fig - 1.69.IV - Error de índice con la línea del horizonte

el que efectuaremos la lectura que, en este caso, resulta negativa. Recordemos que la distancia al horizonte⁴ es siempre de entidad suficiente como para que el ángulo de paralaje de los espejos resulte absolutamente despreciable. La determinación del error de índice observando un objeto lejano, es poco recomendable.

4 La distancia al último punto visible, con un coeficiente de refracción terrestre de 0,08, — valor medio—, viene dada por la fórmula

$$D_H = 2,08 \cdot \sqrt{E_O}$$

la distancia D_H resulta en millas náuticas, estando E_O , —elevación del ojo del observador—, en metros.

8. EXAMEN Y RECTIFICACIÓN DEL SEXTANTE. — La primera de las comprobaciones a realizar en el examen de un sextante, es la de la perpendicularidad entre el espejo grande y el plano del limbo. Para ello dispondremos el sextante, del cual, previamente, se desmontará el anteojo, con sus pies apoyados sobre una superficie horizontal y con la alidada desplazada hacia , aproximadamente, un tercio del arco del sector, véanse las y figuras 1.70.IV y 1.71.IV, observando en el espejo grande la parte

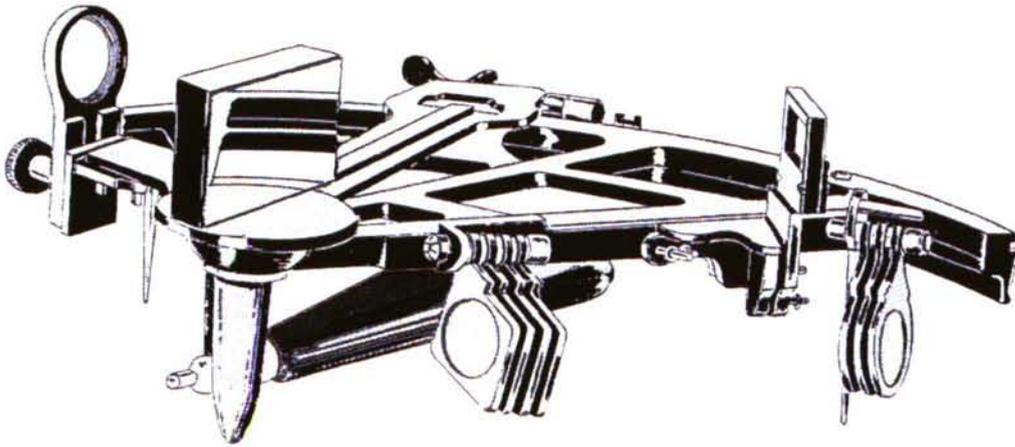


Fig - 1.70.IV - Examen de la perpendicularidad espejo grande - plano del limbo

reflejada del limbo, la perpendicularidad entre ambos planos quedará constatada por la continuidad que debe existir entre las líneas de las imágenes directa y reflejada del limbo; si tal perpendicularidad falta, se verá la discontinuidad que muestra la figura, en este caso el espejo se haya inclinado hacia delante; si la imagen reflejada quedara bajo la directa, el espejo estaría inclinado hacia atrás. Actuando sobre los tornillos **A** o **B** de la figura 1.55.IV, la perpendicularidad podrá ser restituida, aunque esta operación, a veces, no basta y el espejo grande ha de ser removido de su alojamiento y suplementado convenientemente. Asimismo esta perpendicularidad puede ser comprobada, con el sextante en la misma disposición que en el caso anterior, disponiendo de dos piezas prismáticas, escuadradas y exactamente iguales,—pínulas—, una de las cuales colocaremos en el extremo del limbo y la otra cerca del espejo grande; este es perpendicular al plano del limbo si, observando de igual forma que en el caso precedente, la parte superior de los prismas y sus imágenes presentan la misma altura. La segunda etapa del examen del sextante consistirá en la comprobación de la perpendicularidad del plano del espejo chico con el plano del limbo, para ello observaremos, preferentemente, una estrella de 3ª magnitud; si moviendo suavemente la alidada la imagen reflejada pasa exactamente sobre la directa, es decir, si la coincidencia de ambas imágenes puede establecerse con rigor, esta

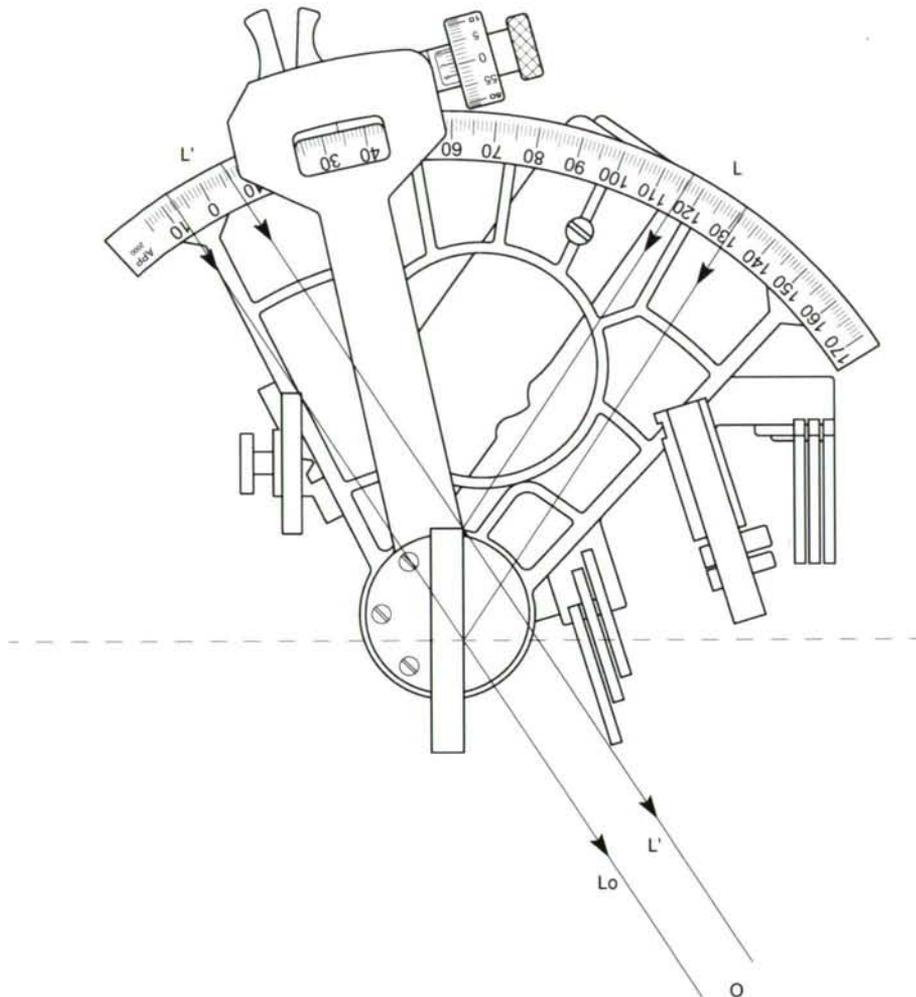


Fig - 1.71.IV - Comprobación de la perpendicularidad

perpendicularidad queda contrastada, en caso contrario, la imagen reflejada pasará a la derecha de la directa,— espejo chico inclinado hacia dentro—, o a la izquierda de esta,—inclinación hacia fuera—, ver figuras 1.73.IV y 1.74.IV. Para restaurar la perpendicularidad, en caso de que esta faltase, se maniobrará con el tornillo C de la figura 1.55.IV. Una vez comprobada la perpendicularidad de los planos de ambos espejos con el plano del limbo, se anulará el error de índice, si tal operación es procedente; para ello, con el índice de la alidada señalando el cero de la graduación, se observará una estrella de 3ª magnitud y, actuando sobre el tornillo que para tal efecto dispone, se hará rotar el espejo pequeño sobre su eje perpendicular al plano del limbo, hasta lograr la coincidencia de ambas imágenes, logrado esto, el punto inicial o de paralelismo coincide con el cero de la graduación. La experiencia demuestra que es

mejor tolerar un error de índice dentro de los límites que la práctica náutica aconseja, que tratar de anularlo sistemáticamente; el ideal de que el punto inicial coincida con el cero de la graduación se mantiene durante poco tiempo. La comprobación del paralelismo entre el eje óptico del sextante y el plano del limbo se lleva a cabo por medio de las pínulas, alineándolas con la visual a un objeto lejano y bien definido, con el sextante descansando sobre sus pies en posición horizontal, y de forma tal que el objeto sea enfocado en el centro del retículo; si tal alineación es posible, el eje óptico es paralelo al plano del limbo. De no poderse concretar la lineación antedicha, es menester retocar, cuidadosamente, los tornillos que lleva el doble aro que constituye el collar con el que se sujeta el anteojo al sextante; este procedimiento de llevar el eje óptico a su posición teórica no siendo el más preciso, es suficiente para la práctica de la navegación ordinaria. Más exacto es el procedimiento siguiente: colocar los dos hilos del retículo paralelos al plano del limbo y medir la distancia esférica entre dos estrellas que disten más de 90° de forma que el contacto se verifique en uno de los hilos; si afirmada la alidada y moviendo el sextante se logra el contacto en el otro hilo del retículo sin que las imágenes se alejen o se muerdan [BRUCE-1986], el paralelismo en cuestión existe.

9. ERRORES DE PRISMATISMO. — Cuando las caras de los espejos, así como las de los vidrios de color, no son paralelas, la trayectoria de los rayos de luz sufren una alteración en su dirección como consecuencia del fenómeno de la refracción. Esta alteración afecta a la lectura introduciendo un error que, en condiciones normales y debido a su pequeñez, no tiene incidencia notable en los resultados de la navegación práctica actual; no obstante, tuvo gran importancia cuando el sextante era utilizado como instrumento de precisión en el cálculo del estado absoluto y marcha de los cronómetros, y anteriormente, cuando se calculaba la longitud observada por medio del laborioso método de las distancias lunares, método en el que un pequeño error en la observación, acarrea notable error en la longitud calculada. La navegación astronómica moderna dispone de la hora de tiempo universal, — TU—, de forma continuada, por lo que el cálculo del estado del cronómetro, —que por otro lado y debido a la gran estabilidad de los modernos cronómetros, se ha convertido en un ejercicio encaminado a la práctica y formación académica—, hace muchos años que ha dejado de ser un problema para el navegante. Sin embargo, el estudio de estos errores de prismaticismo es de gran belleza, además de complemento de importancia en la formación teórica del navegante que, adocenado en la dependencia de los modernos sistemas de ayuda a la navegación, acaba por convertirse en un esclavo de

los mismos, perdiendo el protagonismo del que todo piloto o capitán debe hacer gala.

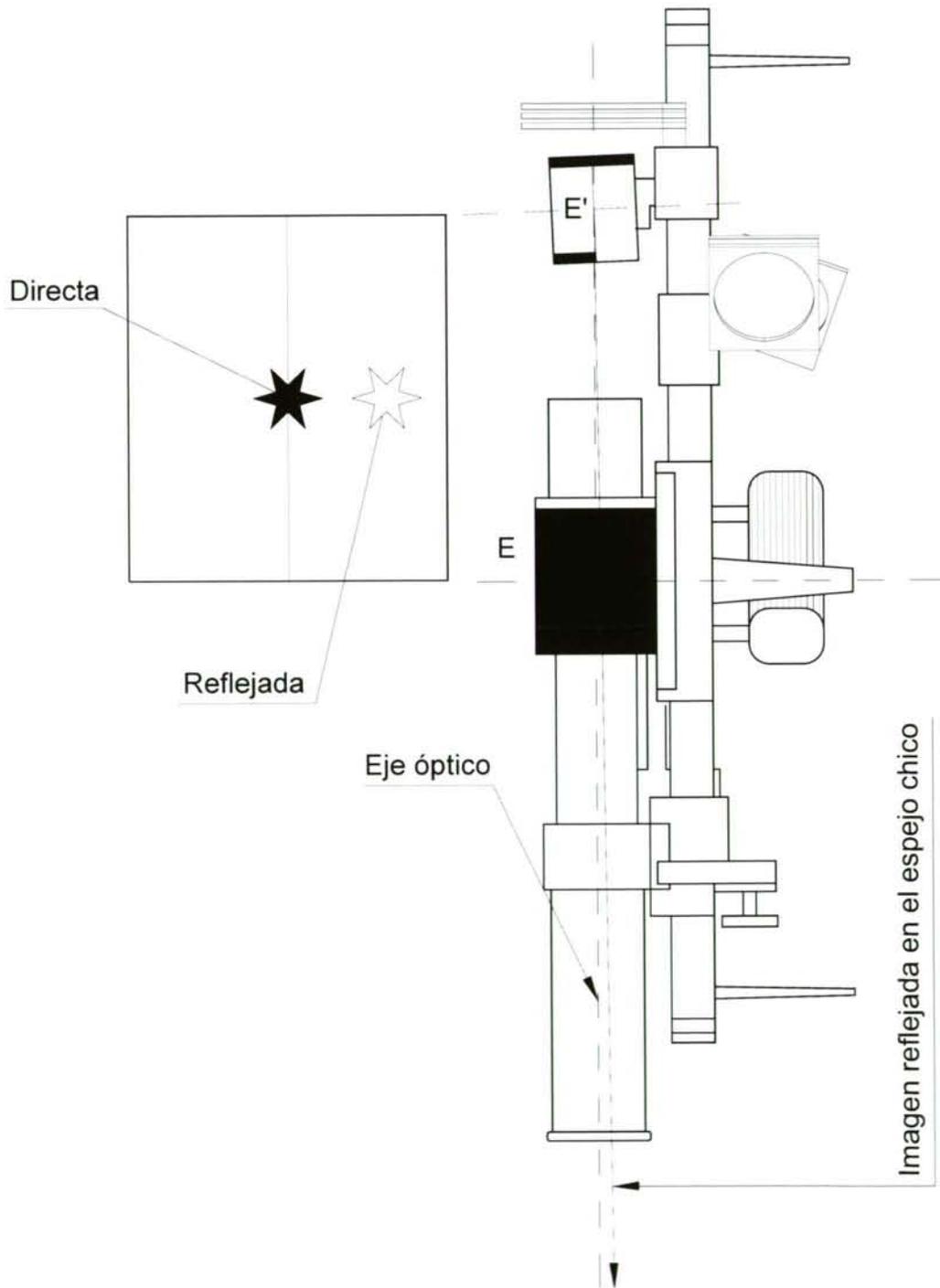


Fig - 1.73.IV - Espejo chico inclinado hacia dentro

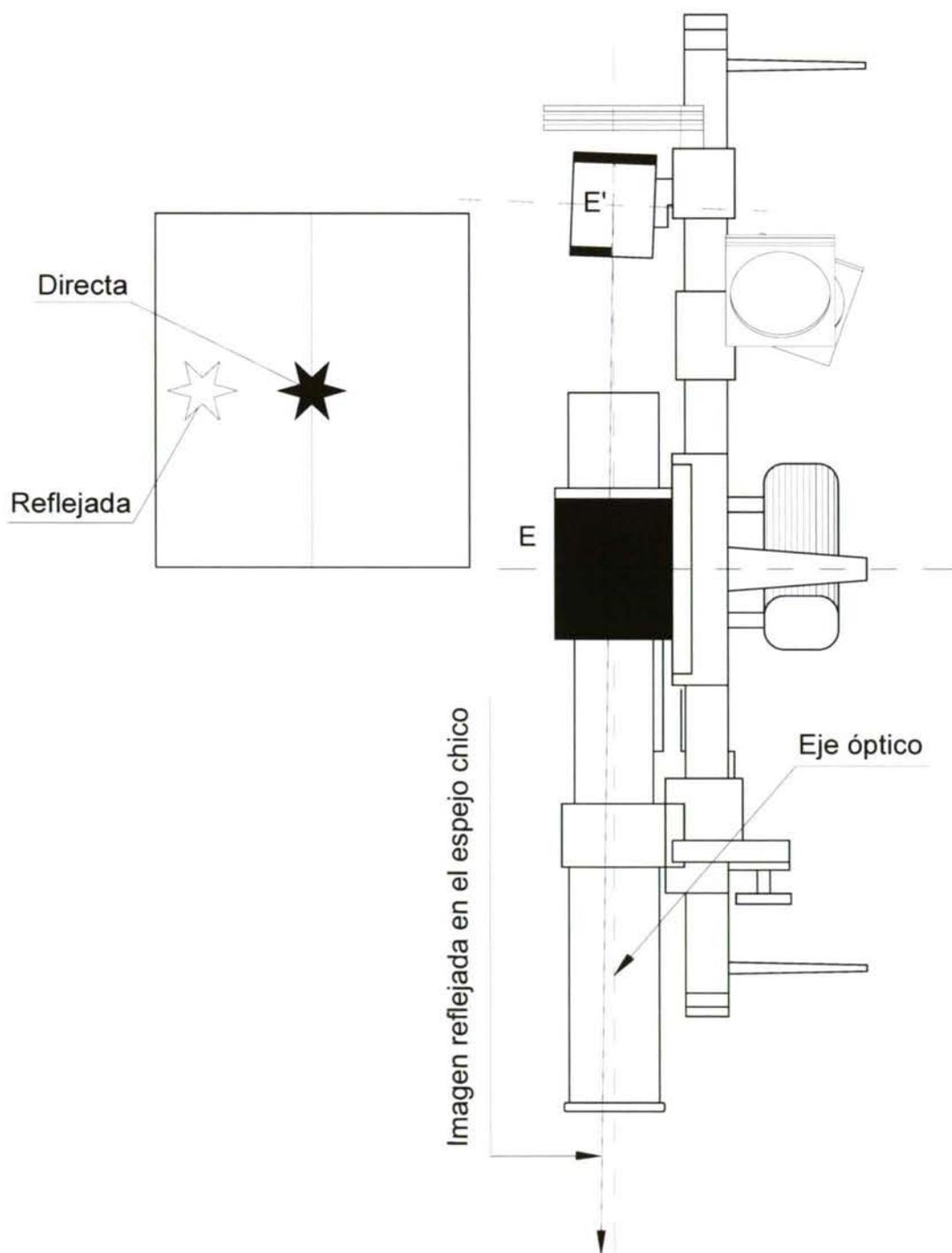


Fig - 1.74.IV - Espejo chico inclinado hacia fuera

10. PRISMATISMO DE LOS ESPEJOS. — Si los espejos tuvieran sus caras paralelas, la trayectoria del rayo de luz sería la indicada en la figura 1.75.IV, y después de producirse la refracción inicial, la reflexión subsiguiente, y la refracción posterior, el rayo de luz reflejado emerge del espejo formando con la normal un ángulo igual al de incidencia, — $i=r$ —, sucediendo todo como si el fenómeno de la reflexión se hubiera producido en un espejo teórico S_T de espesor nulo, ubicado entre ambas caras. En realidad, una primera reflexión tiene lugar en la cara no azogada S_1 , formándose una imagen tenue que se superpone, —en el supuesto del paralelismo de las caras—, con la que se forma en la cara azogada S_0 , afectándola, todo lo más, con la resta de algo

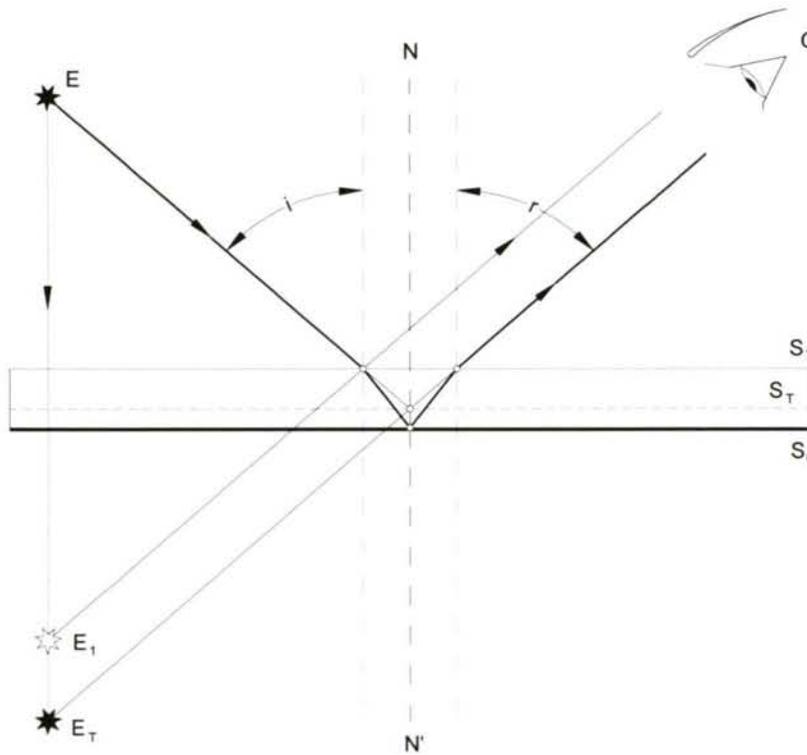


Fig - 1.75.IV - Imagen en un espejo plano

de nitidez a sus contornos. El rayo de luz no sufre alteración alguna de su trayectoria al existir paralelismo entre las caras del espejo. Fenómeno diferente sucede si el espejo presenta falta de paralelismo entre sus caras, en este caso el rayo de luz sufre una alteración en su dirección provocando un error en la lectura, y el ángulo leído no corresponde al medido u observado. La reflexión se produce tal como muestra la figura 1.76.IV; el rayo de luz que procede de la fuente E, alcanza la superficie de reflexión S_2

en a, produciéndose la reflexión parcial antes mencionada; se refracta y, atravesando la sección de vidrio, alcanza la superficie azogada S_0 en c, se refleja y torna a la S_2 en a' , de la que, tras una nueva refracción, vuelve al medio inicial. Como consecuencia del prismaticismo en estudio, se ha producido un cambio en la dirección teórica del rayo luminoso que ocasiona la diferencia entre los ángulos leído y observado de la que ya

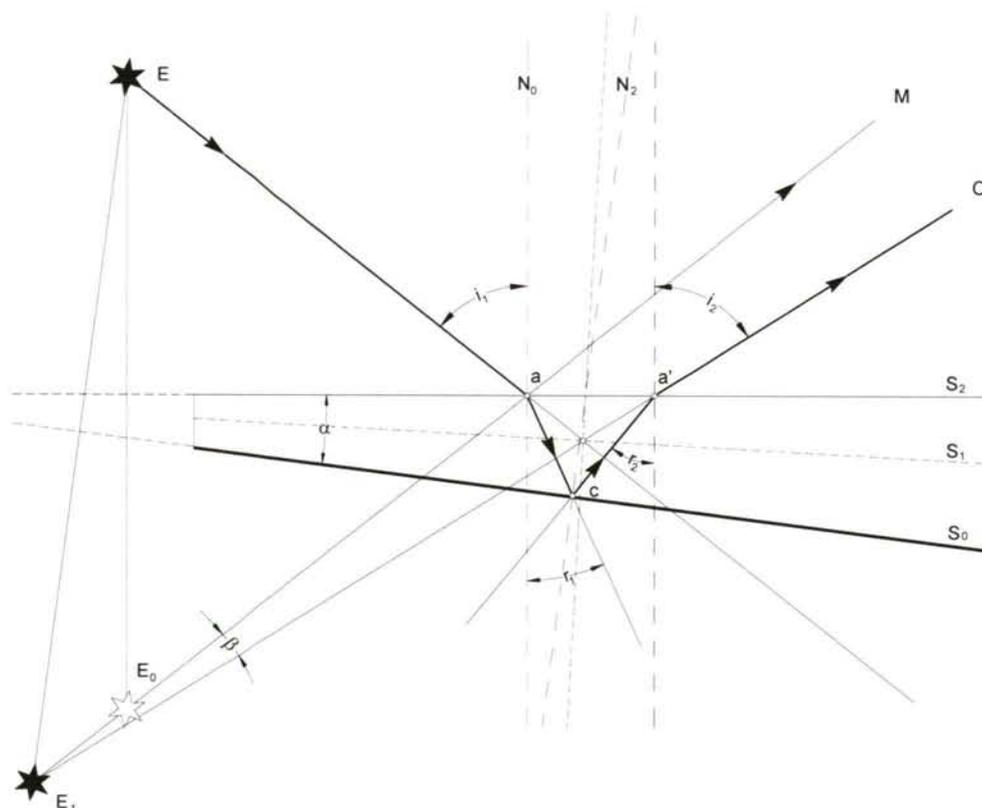


Fig - 1.76.IV - Espejo plano con prismaticismo

se hizo mención. Este defecto de paralelismo de las caras del espejo, además de introducir un error en la lectura, impide que se puedan concretar bien los contactos; si la diferencia entre el ángulo medido y la lectura permaneciera constante para cualquier posición de la alidada, supuesto el problema en el espejo grande, nada supondría este defecto una vez conocido, pero esto no sucede así: la ley de la refracción de la luz, conocida también como ley de Snell⁵ establece

$$\text{sen } i_1 = n \cdot \text{sen } r_1 \quad (1.76.IV)$$

$$\text{sen } i_2 = n \cdot \text{sen } r_2 \quad (2.76.IV)$$

restando ambas expresiones, en las que n es el índice de refracción del medio, i_1 e i_2

⁵ Snell van Royen, Willebrord, llamado también Willebrordus Snellius, astrónomo y matemático neerlandés nacido en Leiden en 1580 y muerto en el mismo lugar en 1626. Introdujo el método de la triangulación y descubrió en 1620 la ley de la refracción de la luz.

.los ángulos de incidencia y r_1 y r_2 los ángulos de refracción

$$\text{sen } i_2 - \text{sen } i_1 = n(\text{sen } r_2 - \text{sen } r_1) \quad (1.77.IV)$$

de esta ecuación deducimos

$$\text{sen } \frac{1}{2}(i_2 - i_1) \cdot \cos \frac{1}{2}(i_2 + i_1) = n \cdot \left[\text{sen } \frac{1}{2}(r_2 - r_1) \cdot \cos \frac{1}{2}(r_2 + r_1) \right] \quad (2.77.IV)$$

de la que, despejando

$$\text{sen } \frac{1}{2}(i_2 - i_1) = n \cdot \left[\text{sen } \frac{1}{2}(r_2 - r_1) \frac{\cos \frac{1}{2}(r_2 + r_1)}{\cos \frac{1}{2}(i_2 + i_1)} \right] \quad (3.77.IV)$$

pero en la figura 1.76.IV se comprueba que

$$\left. \begin{aligned} i_2 - i_1 &= \beta \\ (r_2 - r_1) &= 2 \cdot \alpha \end{aligned} \right\} \quad (4.77.IV)$$

en la que β es el ángulo de desvío del rayo de luz, y α el ángulo que forman las superficies del espejo; e igualmente, y dada la efectiva pequeñez de estos ángulos α y β ;

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(i_2 + i_1) &\approx i \\ \frac{1}{2}(r_2 + r_1) &\approx r \end{aligned} \right\} \quad (5.77.IV)$$

por idénticas consideraciones

$$\left. \begin{aligned} \text{sen } \beta &\approx \beta \\ \text{sen } \alpha &\approx \alpha \end{aligned} \right\} \quad (6.77.IV)$$

Sustituyendo los valores deducidos de (4.77.IV), (5.77.IV) y (6.77.IV) en la (3.77.IV), se obtiene

$$\beta = 2 \cdot n \cdot \alpha \cdot \frac{\cos r}{\cos i} \quad (1.78.IV)$$

y si en la (7.77.IV), en vez de $\cos r$ ponemos $\sqrt{1 - \text{sen}^2 r}$, sabiendo además que de la (1.76.IV) se desprende que

$$\text{sen}^2 i = n^2 \cdot \text{sen}^2 r$$

hallamos,

$$\beta = 2 \cdot \alpha \cdot \frac{\sqrt{n^2 - \text{sen}^2 i}}{\cos i} \quad (2.78.IV)$$

expresión de la que obtendremos el valor angular del cambio de dirección que experimenta el rayo de luz al producirse la reflexión en un espejo plano de caras no paralelas; en ella se observa que dicho ángulo es, al ser α y n constantes, una función creciente del de incidencia. Efectivamente, derivando se tiene

$$\frac{d\beta}{di} = 2 \alpha \left(\sec i \text{tg} i \sqrt{n^2 - \text{sen}^2 i} - \sec i \frac{\text{sen} i \cos i}{\sqrt{n^2 - \text{sen}^2 i}} \right) \quad (3.78.IV)$$

que será positiva si se verifica

$$\text{tg} i \sqrt{n^2 - \text{sen}^2 i} > \frac{\text{sen} i \cos i}{\sqrt{n^2 - \text{sen}^2 i}} \quad (4.78.IV)$$

o, lo que es lo mismo

$$\frac{\text{sen} i}{\cos i} \sqrt{n^2 - \text{sen}^2 i} > \frac{\text{sen} i \cos i}{\sqrt{n^2 - \text{sen}^2 i}} \quad (5.78.IV)$$

y, por lo tanto

$$n^2 - \text{sen}^2 i > \cos^2 i \quad (6.78.IV)$$

o bien

$$n^2 > \text{sen}^2 + \cos^2 \rightarrow n^2 > 1 \quad (7.78.IV)$$

desigualdad que siempre se cumple, ya que el índice de refracción del vidrio es mayor que 1.

Partiendo de la posición del espejo grande para la cual hay coincidencia entre las imágenes reflejada y directa, y llamando ω al ángulo con que incide en el espejo chico el rayo reflejado en el grande, tendremos, figura 1.79.IV,[HUGHES-1957],

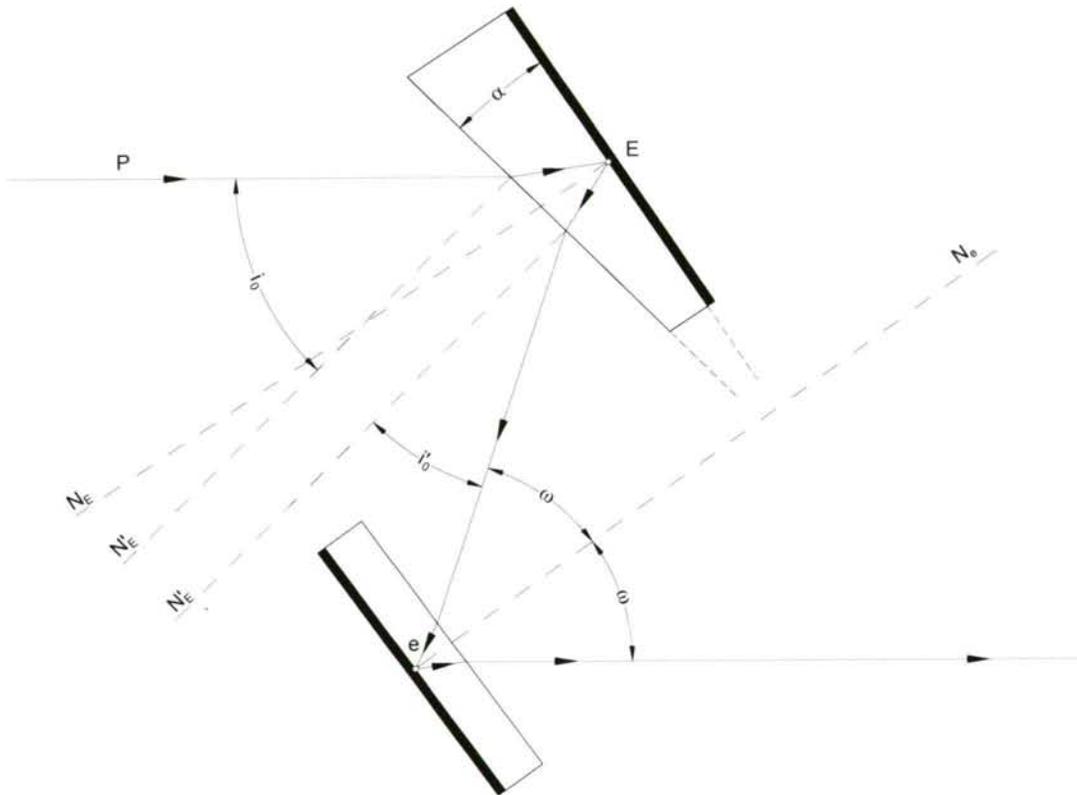


Fig - 1.79.IV - Corrección por prismaticismo

$$i_0 + i'_0 = 2 \cdot \omega \tag{1.79.IV}$$

en la cual i_0 e i'_0 son los valores particulares de i_1 e i_2 en dicha posición inicial. El error debido a la variación de $i_2 - i_1$ es ahora

$$\beta = i - i' - (i_0 - i'_0) = 2 \cdot \alpha \left(\sec i_0 \sqrt{n^2 - \text{sen}^2 i_0} - \sec i \sqrt{n^2 - \text{sen}^2 i} \right) \tag{2.79.IV}$$

podemos tomar $i_0 = \omega$ y si λ es la lectura que corresponde al ángulo de incidencia i , tendremos

$$i - i_0 = \frac{1}{2} \lambda \tag{1.80.IV}$$

transformándose la (2.79.IV) en

$$\beta = 2\alpha \left(\sec \omega \sqrt{n^2 - \text{sen}^2 \omega} - \sec \left(\omega + \frac{1}{2} \lambda \right) \sqrt{n^2 - \text{sen}^2 \left(\omega + \frac{1}{2} \lambda \right)} \right) \tag{280.M}$$

que permite el cálculo de β para cualquier valor de la lectura λ .

11. VIDRIOS DE COLOR. — Al igual que en el caso de los espejos, las caras

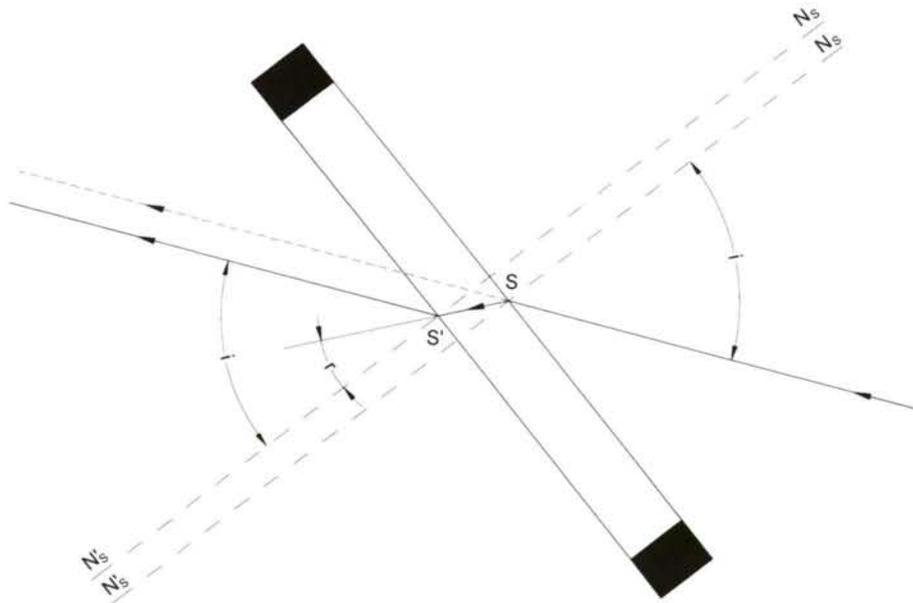


Fig - 1.80.IV - Vidrio de color con caras paralelas

de los vidrios de color deben ser paralelas; el rayo de luz al atravesarlos sufrirá una refracción que no implica cambio alguno en la dirección de su trayectoria, como queda patente en la figura 1.80.IV, y es bien conocido en óptica. Por el contrario, si el defecto de falta de paralelismo en las caras del vidrio de color existe, al ser atravesado por el rayo de luz aparece un cambio en la dirección que, —en caso de uso de tal vidrio—, afecta a las lecturas, apareciendo un error que podría alcanzar proporciones

inaceptables, sobre todo si el sextante fuera utilizado como instrumento de precisión en los cálculos citados en páginas precedentes. Como los vidrios de color están dispuestos de forma tal que el ángulo de incidencia, en condiciones normales, es nulo, la refracción que experimenta el rayo de luz al atravesar este elemento es nula⁶; en el caso de existir convergencia entre los planos de sus caras esta es de tan pequeña entidad, que la práctica de la Navegación Astronómica habitual no se ve, notablemente, afectada por

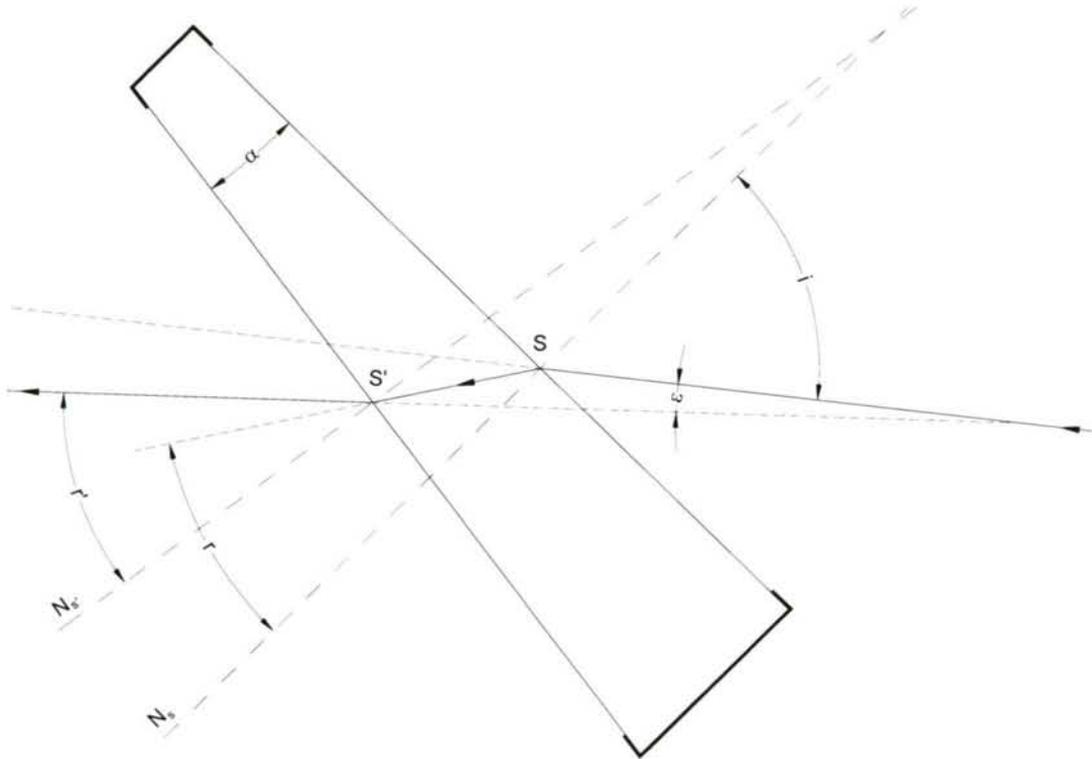


Fig - 1.81.IV - Vidrio de color con caras no paralelas

ella. Con un razonamiento análogo al caso del prisma, en los espejos, y atendiendo a la figura 1.81.IV, que muestra el error como consecuencia de este defecto

⁶ Nos limitamos aquí, claro está, a la exposición del fenómeno de la refracción como manifestación del cambio en la dirección de la trayectoria del rayo de luz al pasar de un medio a otro de densidad distinta. De la, ya, citada Ley de Snell

$$\text{sen } i = n \cdot \text{sen } r$$

inferimos que si el ángulo de incidencia es nulo, es nulo el ángulo de refracción. Hemos de dejar constancia, no obstante, que el fenómeno de la refracción implica, además, un cambio en la velocidad de propagación y es, precisamente, esta alteración de la velocidad la que, para ángulos de incidencia no nulos, se manifiesta como cambio de dirección de la luz; si c_A es la velocidad en el medio A y c_B lo es en el medio B, n resulta ser la relación entre ambas velocidades. Por lo tanto, del fenómeno de la refracción, cuando el ángulo de incidencia es nulo, se observaría el cambio en la velocidad. Para el vidrio $n \approx 1,55$. Este fenómeno se manifiesta no solo con la luz, sino con toda propagación ondulatoria.

en los vidrios de color tenemos

$$r' = i - (\alpha + \varepsilon) \quad (1.82.IV)$$

también

$$\text{sen } i = n \cdot \text{sen } r \quad (2.82.IV)$$

$$\text{sen } r' = n \cdot \text{sen}(r - \alpha) \quad (3.82.IV)$$

sustituyendo (1.81.IV) en (2.82.IV)

$$\text{sen}[i - (\alpha + \omega)] = n \cdot \text{sen}(r - \alpha)$$

que restada de la (1.82.IV) nos da

$$\text{sen } i - \text{sen}[i - (\alpha + \varepsilon)] = n \cdot [\text{sen } r - \text{sen}(r - \alpha)] \quad (4.82.IV)$$

que, sucesivamente, transformamos en

$$2 \text{sen} \frac{i - [i - (\alpha + \varepsilon)]}{2} \cos \frac{i + [i - (\alpha + \varepsilon)]}{2} = n \cdot \left[2 \text{sen} \frac{r - (r - \alpha)}{2} \cos \frac{r + r - \alpha}{2} \right]$$

$$\text{sen} \frac{\alpha + \varepsilon}{2} \cos \left(i - \frac{\alpha + \varepsilon}{2} \right) = n \cdot \left[\text{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \left(r - \frac{\alpha}{2} \right) \right]. \quad (5.82.IV)$$

Por consideraciones similares al estudio del prisma en los espejos, en lo que se refiere al valor de los ángulos α y ε

$$\frac{\alpha + \varepsilon}{2} \cos \left(i - \frac{\alpha + \varepsilon}{2} \right) = n \cdot \frac{\alpha}{2} \cos \left(r - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (6.82.IV)$$

y por lo mismo, podemos considerar que $i - \frac{\alpha + \varepsilon}{2} \approx i$ y $r - \frac{\alpha}{2} \approx r$, pudiendo escribir

$$(\alpha + \varepsilon) \cos i = n \cdot \alpha \cos r \quad (7.82.IV)$$

y de aquí

$$\varepsilon = \alpha \left[n \cdot \frac{\cos r}{\cos i} - 1 \right] \quad (8.82.IV)$$

que podemos expresar de la forma que sigue

$$\varepsilon = \alpha \left[n \cdot \frac{\sqrt{1 - \text{sen}^2 r}}{\cos i} - 1 \right] \quad (1.83.IV)$$

o, lo que es lo mismo

$$\varepsilon = \alpha \left[\frac{\sqrt{n^2 - n^2 \text{sen}^2 r}}{\cos i} - 1 \right] \quad (2.83.IV)$$

pero de la (1.82.IV), que constituye la ley de Snell, ya varias veces manejada, obtenemos

$$\text{sen}^2 i = n^2 \cdot \text{sen}^2 r$$

que sustituida en la precedente nos da

$$\varepsilon = \alpha \left[\frac{\sqrt{n^2 - \text{sen}^2 i}}{\cos i} - 1 \right] \quad (3.83.IV)$$

expresión del error en estudio, en función del ángulo de convergencia de los planos de las caras del vidrio de color y del ángulo de incidencia. Habida cuenta que este último es casi nulo, con mucha aproximación

$$\varepsilon = \alpha (n - 1) \quad (4.83.IV)$$

y como el valor de n es el ya conocido, 1,55, la anterior fórmula puede aparecer bajo la forma

$$\varepsilon = 0,55 \alpha$$

12. ERROR DEBIDO A LA EXCENRICIDAD DE LA ALIDADA. — Cuando el centro de giro de la alidada C', figura 1.85.IV, cae fuera del centro del limbo C, se origina este error, ya que en este caso el ángulo que se mide es el doble del MC'N y el que nos da el sextante en su lectura, es el doble del MCN. En la citada figura tenemos

$$\alpha' - \alpha = \omega' + \omega \quad (1.84.IV)$$

y por la ley de los senos

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho}{\text{sen}(180^\circ - \gamma)} &= \frac{e}{\text{sen } \omega} \\ \frac{\rho}{[180^\circ - (\alpha - \gamma)]} &= \frac{e}{\text{sen } \omega'} \end{aligned} \right\} \quad (2.84.IV)$$

y dado que los ángulos ω y ω' son diferenciales, como en anteriores demostraciones podemos escribir

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho}{\text{sen } \gamma} &= \frac{e}{\omega} \\ \frac{\rho}{\text{sen}(\alpha - \gamma)} &= \frac{e}{\omega'} \end{aligned} \right\} \quad (3.84.IV)$$

de la que despejando los ángulos ω y ω'

$$\omega = \frac{e}{\rho} \text{sen } \gamma \quad (4.84.IV)$$

y

$$\omega' = \frac{e}{\rho} \text{sen}(\alpha - \gamma) \quad (5.84.IV)$$

Expresiones en las que ρ es el radio MC' que, debido a la pequeñez de la excentricidad, podemos suponer igual al MC. Ahora, sustituyendo los valores de ω y ω' en la (5.83.IV) se obtiene:

$$\alpha' - \alpha = \frac{e}{\rho} [\text{sen } \gamma + \text{sen}(\alpha - \gamma)] \quad (6.84.IV)$$

El método para determinar el valor de la diferencia $\alpha' - \alpha$ es el que sigue:

Con el sextante medimos los ángulos α'_1 y α'_2 , previamente determinados por otro método, y sean $2\alpha_1$ y $2\alpha_2$ los obtenidos en esta medición. Podemos, en aplicación

de la (5.84.IV), escribir

$$\left. \begin{aligned} 2\alpha'_1 - 2\alpha_1 &= 2 \frac{e}{\rho} [\text{sen } \gamma + \text{sen}(\alpha_1 - \gamma)] \\ 2\alpha'_2 - 2\alpha_2 &= 2 \frac{e}{\rho} [\text{sen } \gamma + \text{sen}(\alpha_2 - \gamma)] \end{aligned} \right\} \quad (1.85.IV)$$

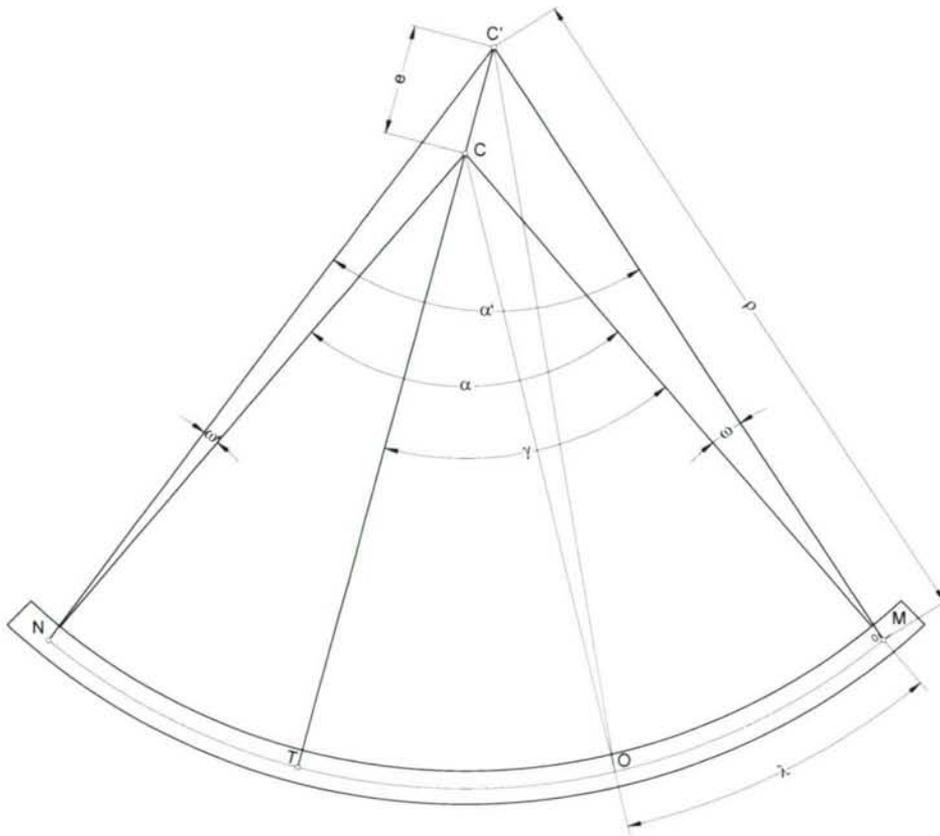


Fig - 1.85.IV - Error de excentricidad

ecuaciones que pueden ser expresadas de la siguiente forma

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_1 - \alpha_1 &= \frac{e}{\rho} 2 \text{sen} \frac{1}{2} \alpha_1 \cos \frac{1}{2} (2\gamma - \alpha_1) \\ \alpha'_2 - \alpha_2 &= \frac{e}{\rho} 2 \text{sen} \frac{1}{2} \alpha_2 \cos \frac{1}{2} (2\gamma - \alpha_2) \end{aligned} \right\} \quad (2.85.IV)$$

de la que se obtiene

$$\frac{\alpha'_1 - \alpha_1}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha_1}{2}} = \frac{e}{\rho} \cos \frac{1}{2} (2 \gamma - \alpha_1) \quad (1.86.IV)$$

$$\frac{\alpha'_2 - \alpha_2}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha_2}{2}} = \frac{e}{\rho} \cos \frac{1}{2} (2 \gamma - \alpha_2) \quad (2.86.IV)$$

En orden a un más cómodo razonamiento, hagamos,

$$\left. \begin{aligned} \frac{e}{\rho} \cos \frac{1}{2} (2 \gamma - \alpha_1) &= \Delta_1 \\ \frac{e}{\rho} \cos \frac{1}{2} (2 \gamma - \alpha_2) &= \Delta_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.86.IV)$$

y tendremos

$$\frac{\alpha'_1 - \alpha_1}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha_1}{2}} = \Delta_1 \quad (4.86.IV)$$

$$\frac{\alpha'_2 - \alpha_2}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha_2}{2}} = \Delta_2 \quad (5.86.IV)$$

Si se supone $\frac{\alpha_2}{2} = \gamma$, de la identidad: $\gamma = \frac{\alpha_1}{2} - \gamma + \frac{\alpha_2}{2} - \frac{\alpha_1}{2}$ deducimos que el valor de

Δ_2 puede escribirse

$$\Delta_2 = \frac{e}{\rho} \cos \left(\frac{\alpha_1}{2} - \gamma \right) \cos \left(\frac{\alpha_2}{2} - \frac{\alpha_1}{2} \right) - \frac{e}{\rho} \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha_1}{2} - \gamma \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha_2}{2} - \frac{\alpha_1}{2} \right)$$

en la que, operando convenientemente, tenemos

$$\Delta_2 = \Delta_1 \cos\left(\frac{\alpha_2}{2} - \frac{\alpha_1}{2}\right) - \frac{e}{\rho} \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_1}{2} - \gamma\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_2}{2} - \frac{\alpha_1}{2}\right) \quad (1.87.IV)$$

y despejando en esta $\frac{e}{\rho} \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_1}{2} - \gamma\right)$, se obtiene

$$\frac{e}{\rho} \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_1}{2} - \gamma\right) = \frac{\Delta_1 \cos\left(\frac{\alpha_2}{2} - \frac{\alpha_1}{2}\right) - \Delta_2}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_2}{2} - \frac{\alpha_1}{2}\right)} \quad (2.87.IV)$$

Dividiendo esta última por la (4.86.IV) encontramos

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_1}{2} - \gamma\right) = \frac{\Delta_1 \cos\left(\frac{\alpha_2}{2} - \frac{\alpha_1}{2}\right) - \Delta_2}{\Delta_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_2}{2} - \frac{\alpha_1}{2}\right)} \quad (3.87.IV)$$

que nos proporciona el valor de γ . Conocido este valor, de la (2.87.IV) obtenemos el de

$$\frac{e}{\rho} = \frac{\Delta_1 \cos\left(\frac{\alpha_2}{2} - \frac{\alpha_1}{2}\right) - \Delta_1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_2}{2} - \frac{\alpha_1}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_1}{2} - \gamma\right)} \quad (4.87.IV)$$

y de la (1.85.IV) la diferencia

$$\alpha' - \alpha = \frac{e}{\rho} [\operatorname{sen} \gamma + \operatorname{sen}(\alpha - \gamma)]$$

equivalente de toda la excentricidad, dando a α los valores 5° , 10° , 15° , etc. Una tabla de valores muy fiables para la excentricidad, se obtiene si se pueden medir varios ángulos, en cuyo caso, por aplicación del método de los mínimos cuadrados en esta última ecuación expresada en la forma

$$A = B \cdot x + C \cdot y$$

con

$$\alpha' - \alpha = A \quad \frac{e}{\rho} \operatorname{sen} \gamma = x \quad \frac{e}{\rho} \operatorname{cos} \gamma = y$$

$$\operatorname{cos} \alpha = B \quad \operatorname{sen} \alpha = C$$

Conocidos los valores de x e y pasamos a los de $\frac{e}{\rho}$ y γ y, posteriormente, a los del error de excentricidad.

El examen y, si procediese, rectificación del sextante, debe ser operación previa a su uso cuando el instrumento, que supondremos nuevo, va a emplearse por primera vez. La presunción de que en los modernos sextantes los errores inherentes a prismaticismo, excentricidad, falta de paralelismo entre el eje óptico y el plano del limbo, y falta de perpendicularidad entre los planos de los espejos y este mismo plano del limbo, son prácticamente inexistentes, no debe exagerar nuestra confianza; todo buen navegante debe someter el instrumento a riguroso examen. Tendremos presente que si alguno de los vidrios de color mostrara defecto de paralelismo entre sus caras, el error de índice determinado utilizando este vidrio, estará afectado por tal error; la evidencia de que este tipo de errores están presentes la tendremos calculando el error de índice por el Sol, —en general, interpondremos vidrios de color—; en cuanto las circunstancias nos lo permitan repetiremos la operación por medio de la Luna llena o en cualquier otro instante en el que el uso de los modificadores no sea preciso⁷. Por otro lado los términos corrección de índice y error de índice, no debieran usarse indistintamente; el error de índice es de signo contrario a la corrección de índice y es esta última a la que nos referimos cuando hablamos del primero. Si un sextante tuviese su punto inicial o de paralelismo 1,5 minutos a la derecha del cero de la graduación, su error de índice sería de 1,5' - (negativo), porque en todas las lecturas faltaría esta cantidad y, por consiguiente, la corrección de índice sería 1,5' + (positiva), ya que es esta magnitud la que se habría de sumar a las lecturas para obtener el correcto valor del ángulo medido; es práctica común entre los marinos el uso del término error de índice y no el de corrección de índice, como expresión de este último.

De la extensa variedad de marcas de la que se dispone en el mercado hacemos

⁷ Es conocido el hecho de que a través de ciertos estratos (St), en algunos casos, el Sol es visible con un contorno limpio y bien definido siendo posible una cómoda observación que no precisa de los vidrios de color; es un buen momento para esta comprobación.

la selección que sigue, sin otro criterio que el de la disponibilidad, pues sería vana la tentativa de una, siempre subjetiva, clasificación en orden a su posible calidad. La figura 1.88.IV nos muestra un ejemplar que pasa, en opinión de autorizados expertos y a pesar de la arriba expuesto sobre la calidad, por ser actualmente una de las mejores ofertas del mercado, forma parte del equipamiento de la Escuela Superior de la Marina Civil de La Coruña, y está destinado a las prácticas de los alumnos que se forman en este centro. Relativamente ligero y de cómodo manejo, va equipado con un cronógrafo

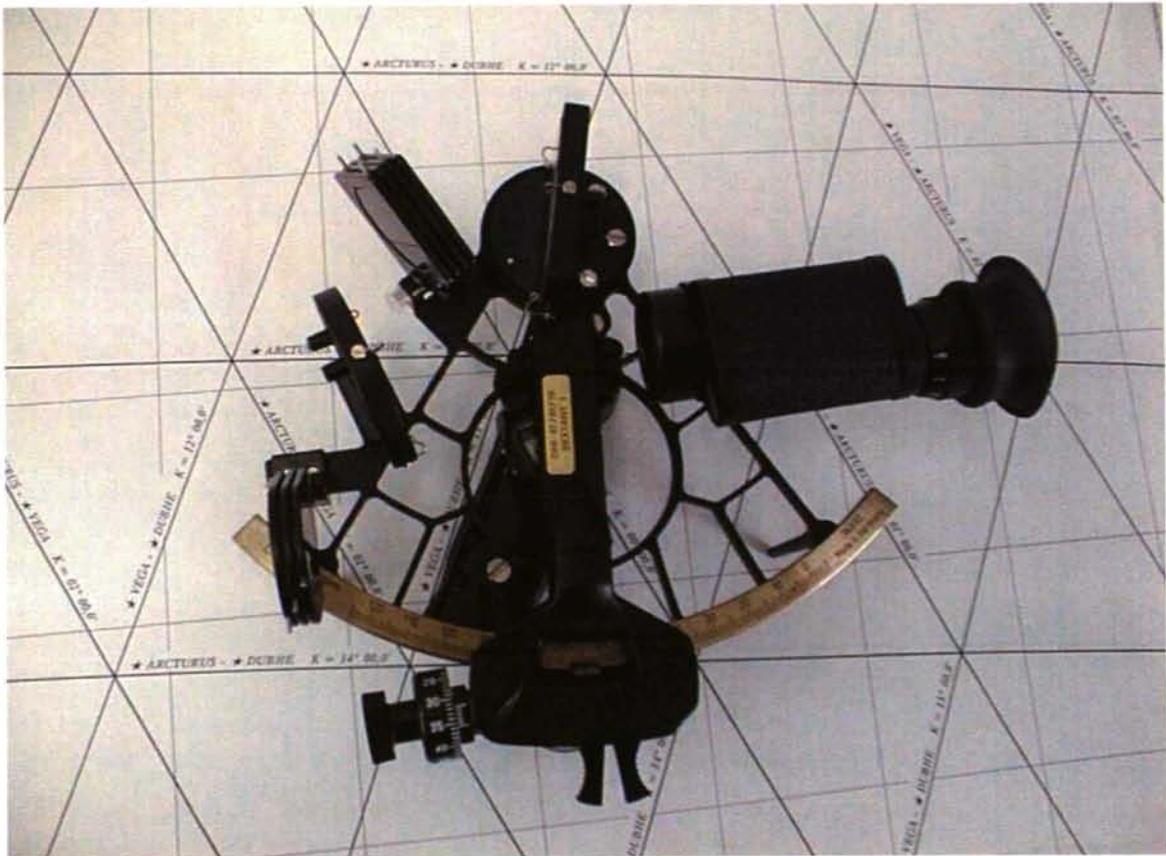


Fig - 1.88.IV.- Sextante Cassens & Plath

que permite la observación sin tener que recurrir al clásico batido del segundo; una lámpara permite la iluminación de la zona de lectura, y esta se realiza de manera rápida ya que, como puede contemplarse en la figura, posee un nonius que hace innecesaria la interpolación mental de los segundos. El anteojo mostrado es para las observaciones con poca luz, para observaciones diurnas dispone del anteojo tipo Galileo y para las nocturnas, cuando la línea del horizonte es imperceptible, puede armarse con un eficaz horizonte artificial a burbuja con muy cómoda iluminación, si bien, en este caso, se hace algo pesado. Al mismo ejemplar corresponde la figura de la página siguiente, en ella puede comprobarse la estructura lenticular de su espejo chico que, en nuestra opinión,

constituye su más problemático componente pues cuando se utiliza en la medida de ángulos horizontales y verticales en la Navegación Costera, su bajo poder reflectante devuelve una imagen tenue en demasía. El horizonte artificial se suministra

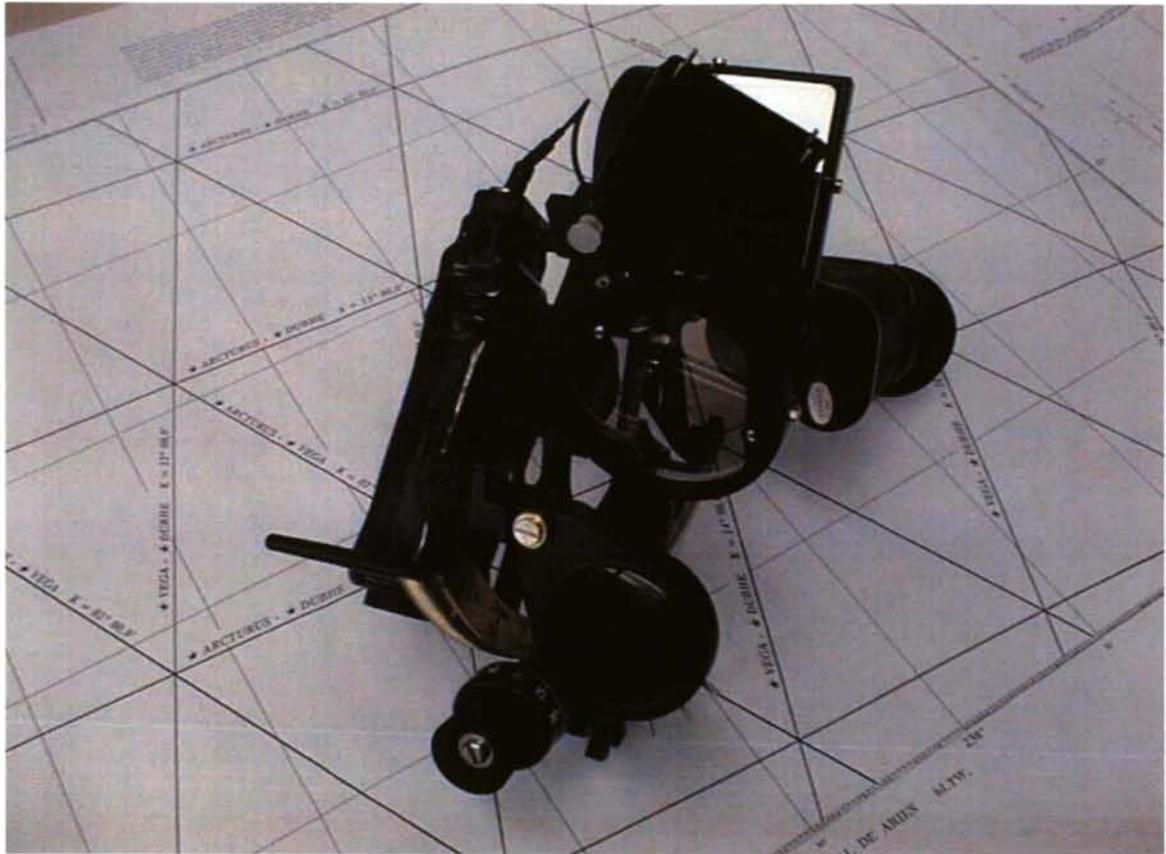


Fig - 1.90.IV.- Sextante Cassens & Plath mostrando su notable espejo chico

opcionalmente y su eficacia fue contrastada en el viaje de prácticas a bordo de la goleta “Juan de Lángara” realizado por los alumnos del curso académico 1999- 2000 de esta escuela, y que se llevó a cabo durante el mes de junio del año 2000. Su más significativo inconveniente radica en la caja, que es de plástico de muy baja calidad con una acomodación interior francamente mejorable. Los siguientes instrumentos, que también forman parte del equipamiento docente de esta escuela y son, habitualmente, empleados en el adiestramiento de sus alumnos, son: el que se muestra en las figuras 1.91.IV y 1.92.IV, fabricado en la ex República Democrática Alemana, modelo Trommel-Sextant y que presenta una ingeniosa disposición de la alidada que la protege de posibles daños por golpes, desplazándose por detrás de la armadura, entre esta y la empuñadura; es de lectura rápida y carece de iluminación lo que le resta algo de comodidad en las observaciones crepusculares. Sigue, figuras 1.93.IV y 1.94.IV, el modelo Kongo-Hatta representativo de la industria japonesa, sextante sobrio y sólido,

de muy buena presencia y que se suministra con toda suerte de complementos; la fábrica oriental es, en estos momentos, firme alternativa a la europea y altamente competitiva al ofertar al mercado internacional instrumental de muy buena calidad. La

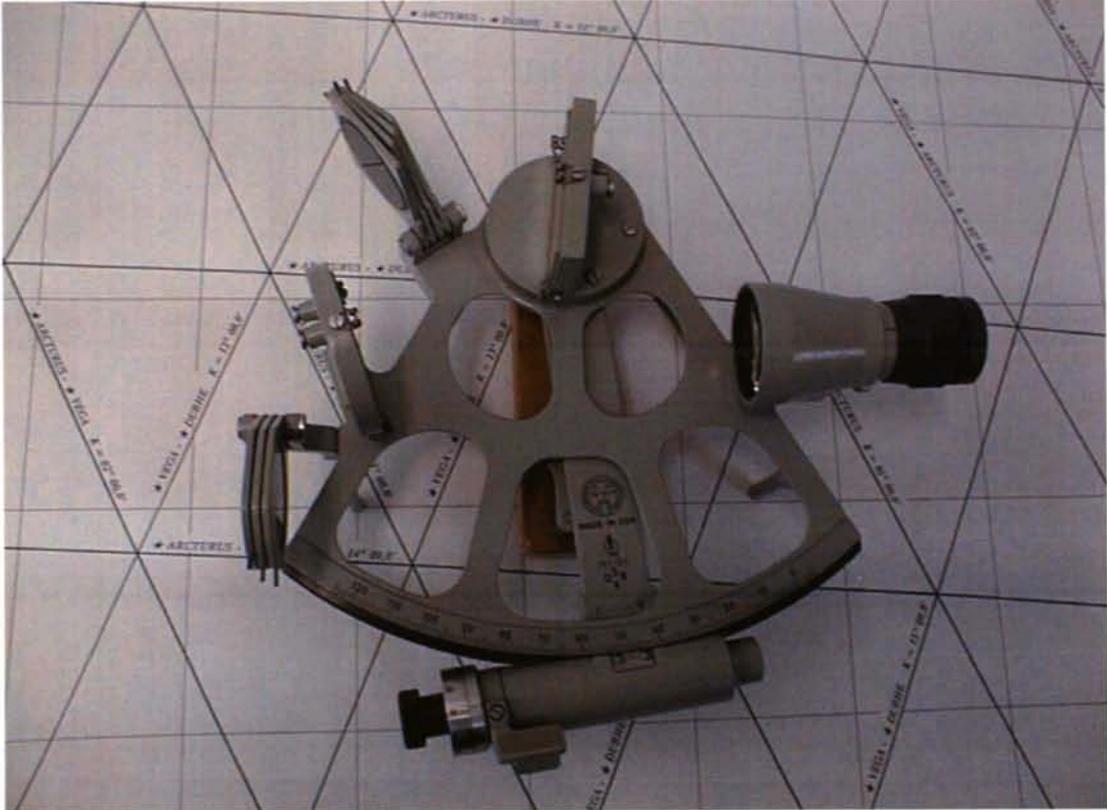


Fig - 1.91.IV - Trommel-Sextant. Obsérvese la posición de la alidada

figura 1.94.IV repite el mismo modelo desde otro ángulo para significar la particularidad consistente en la carencia de la parte no azogada del espejo chico, exhibiendo una característica visera que evita los incómodos deslumbramientos. Uno de los clásicos de la marina mercante española, el sextante Guardiamarina, dispone de todos los aditamentos precisos para convertirlo en uno de los mejores de su época; dentro de lo interesante de este instrumento destacamos el mecanismo que permite el acercamiento y alejamiento del eje óptico al plano del limbo de manera rápida, conservándose en todo momento el exigido paralelismo, ventaja esta que hemos de reseñar. El modelo que se contempla en la figura 1.95.IV, armado con el antejo tipo Galileo, no es de lectura rápida y en él se puede observar la clásica lupa que permite la lectura en el nonius, posee, además, iluminación óptima de la zona de lectura.

Los documentos que certifican la calidad y errores de excentricidad observados en estos instrumentos figuran en páginas posteriores pudiendo constatarse la carencia de total de errores sensibles en el Cassens & Plath.

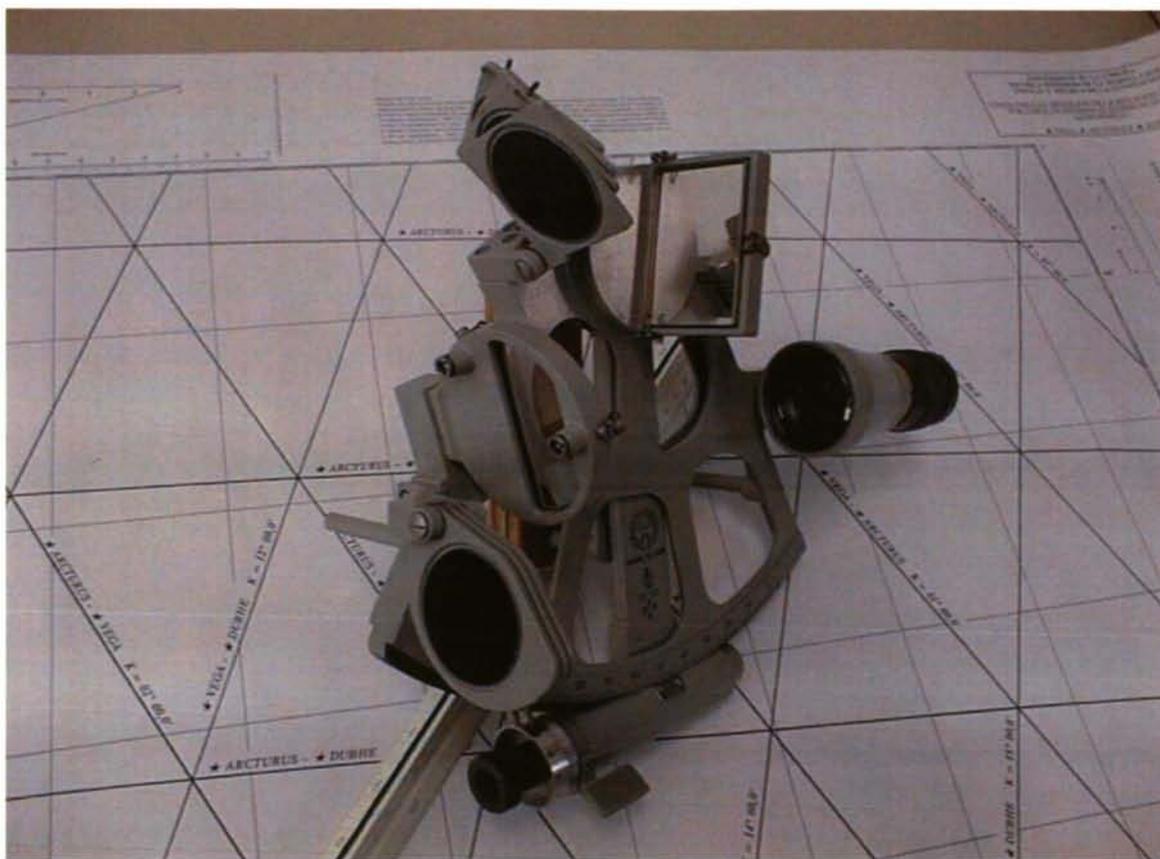


Fig - 1.92.IV - Trommel-Sextant

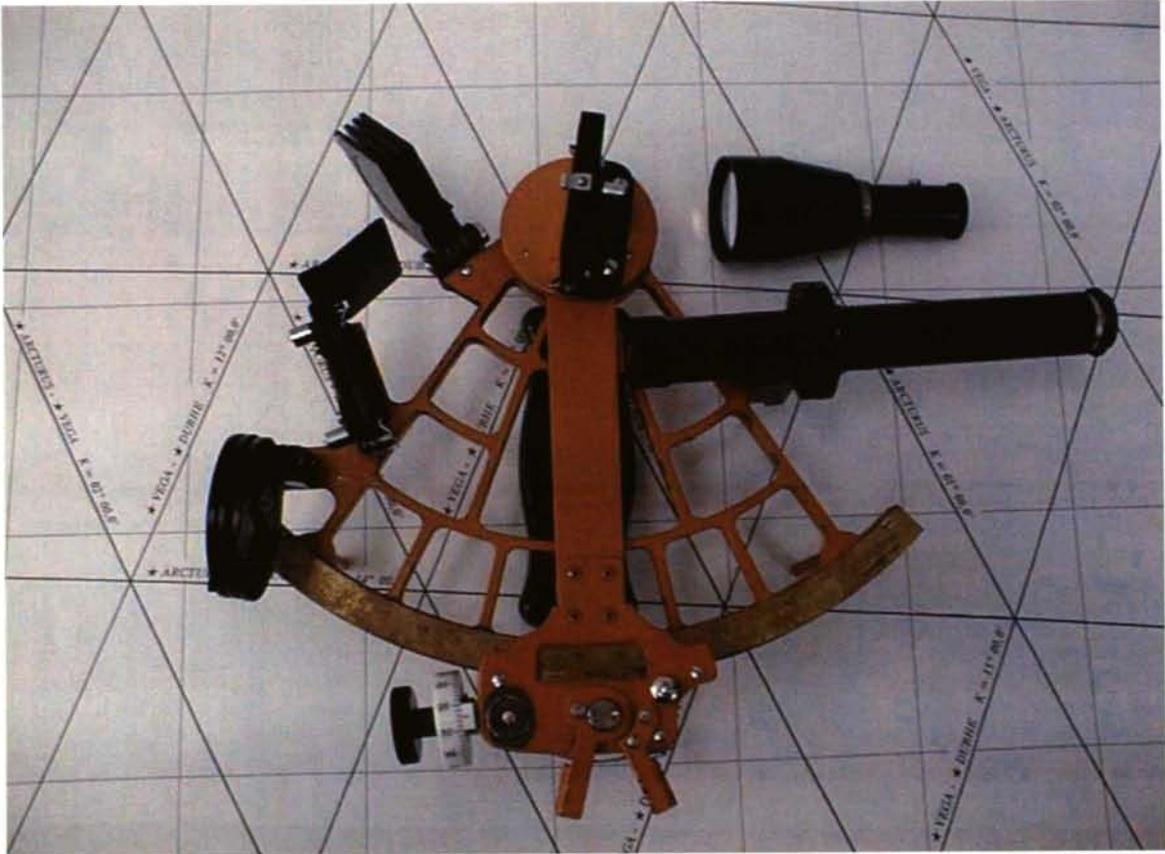


Fig - 1.93.IV - Sextante marca Kongo-Hatta

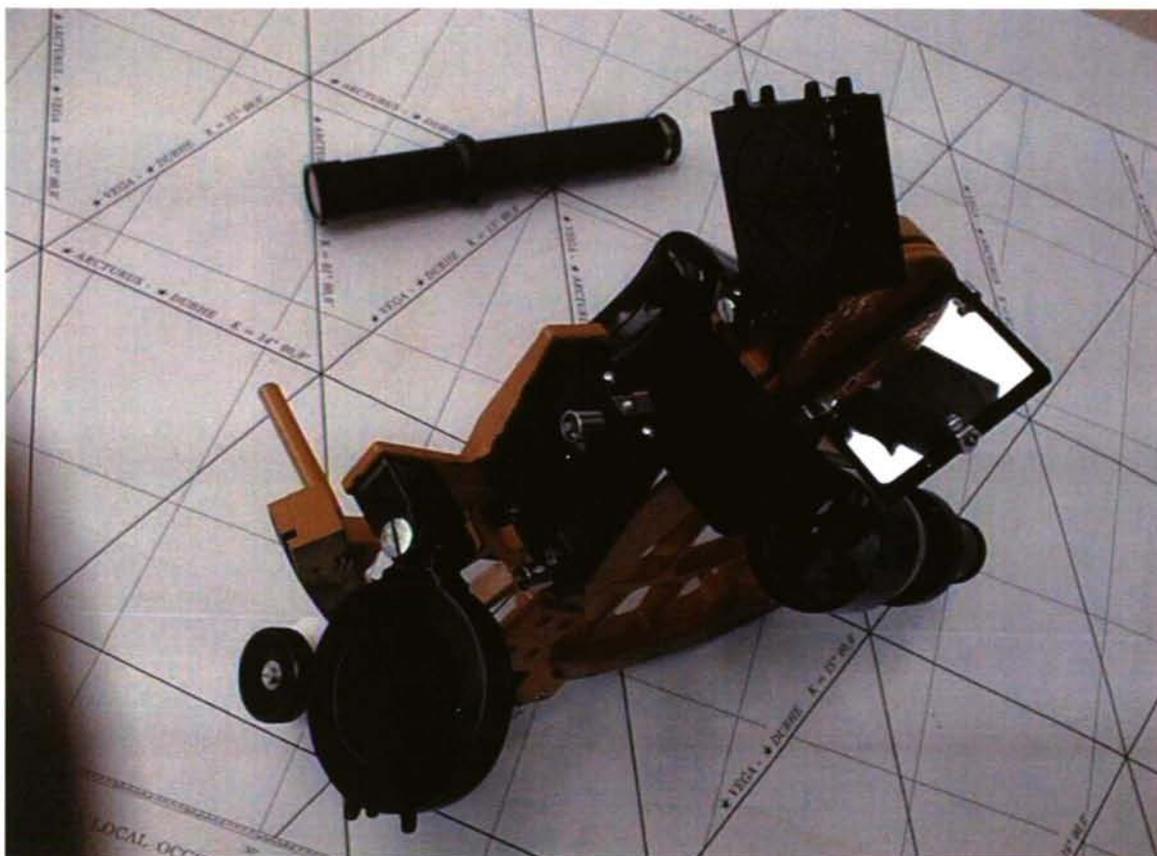


Fig - 1.94.IV - Sextante Kongo-Hatta. Véase su característico espejo chico

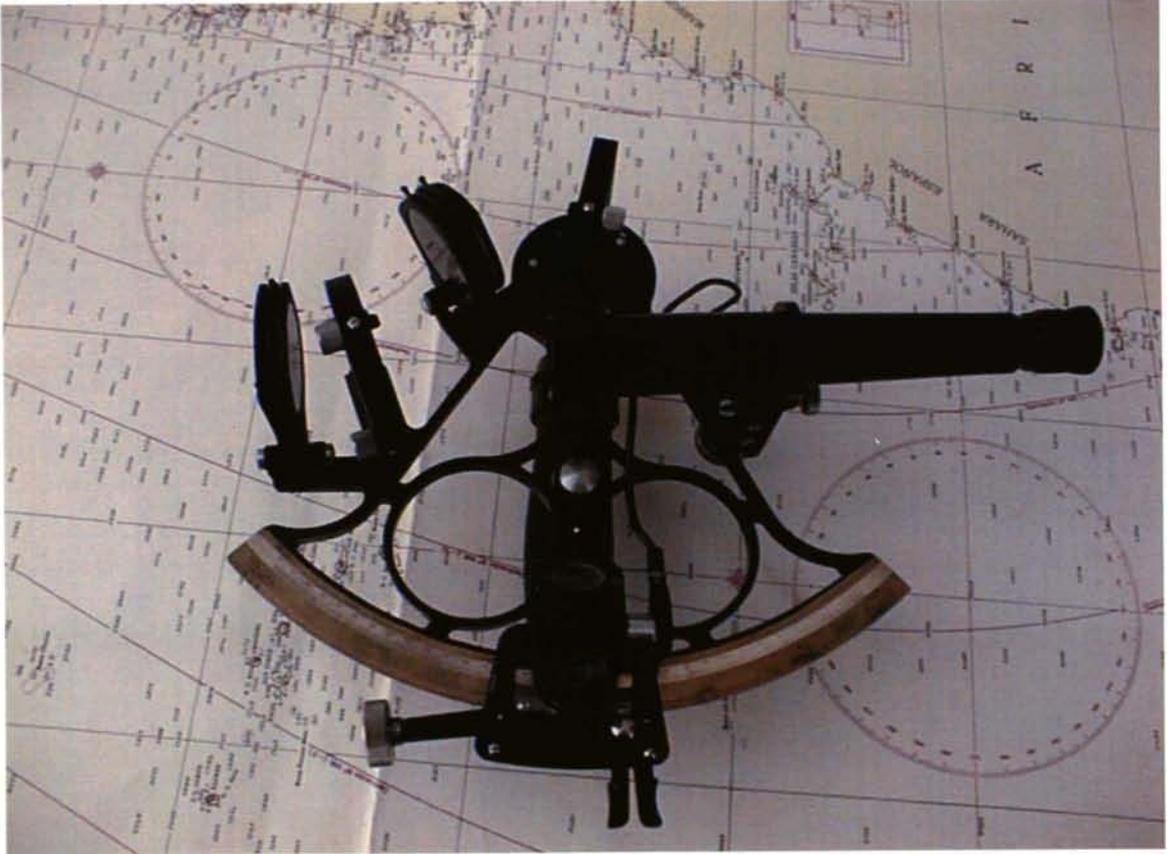


Fig - 1.95.IV - Sextante Guardiamarina



Fig - 1.96.IV - Sextante Guardiamarina desde otro ángulo

*La hipérbola esférica en la Navegación Astronómica.
Lecta diferenciométrica.
Verdadera naturaleza de la bisectriz de altura.*




CASSENS & PLATH GMBH
 Fabrik Nautischer Instrumente
 Am Lunedeich (Kompalshaus)
 D-27572 Bremerhaven, Germany
 Telefon: (0471) 7 10 11

Sextant

ATTEST NR. - 3 6 8 9 2 . .
CERTIFICATE No.

Trommelsextant Nr. **3 6 8 9 2 . .**

Micrometer Sextant No. _____

Hersteller **Cassens & Plath**

Manufactured by: _____

Ablesung Reading	Teilung Graduation	Beschaffenheit Condition	Optik Optics	Beschaffenheit Condition	Vergrößerung Magnification	Halbmesser des Gradbogens Radius of Arc
Gradbogen Arc	1°	gut/good	Fernrohr Telescope	gut/good	4 x 40	160 mm
Nomius Vernier	0,1'	gut/good	Spiegel Mirrors	gut/good	6 x 30	
Trommel Micrometer	1'	gut/good	Vokel-Gläser Shades	gut/good		

Anzubringende Verbesserungen wegen Exzentrizität des Gerätes Corrections because of eccentricity

bei/at	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°
--------	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------	------	------

Dieses Gerät ist für den Gebrauch als fehlerfrei zu bezeichnen.
This instrument is free of errors for practical use.

GARANTIE Das bezeichnete Sextant ist ein hochempfindliches Instrument. Wir bescheinigen, daß der Instrumentenfehler bei jeder Winkelmessung weniger als ± 9" bzw. 0,15' beträgt. Der Sextant ist damit für den praktischen Gebrauch als fehlerfrei zu bezeichnen. Wir übernehmen eine Garantie von 24 Monaten nach Ausstellungsdatum des Attestes. Diese Garantie umfaßt alle Schäden durch Material- bzw. Herstellungsfehler, nicht aber Schäden, die durch Transport, unsachgemäße Behandlung, Unachtsamkeit oder Selbstmontage entstanden sind. Sollten Sie wider Erwarten Garantiemängel feststellen, senden Sie bitte Instrument und Attest frei an uns.

GUARANTEE The sextant specified is a highly sensitive instrument. We certify that the instrument error is less than ± 9" (0,15') which is negligible for practical use. We guarantee for a period of 24 months from date of certificate. This guarantee covers defective materials as well as workmanship. It does not include damage caused in transit or as a result of improper use, negligence or disassembly or repair outside our works. In the event of a claim against this guarantee, please return the instrument to us shipping charges paid, together with this certificate.

Bremerhaven, den **09. Okt. 1997**


CASSENS & PLATH GMBH

Fig - 1.97.IV - Certificado del sextante Cassens & Plath

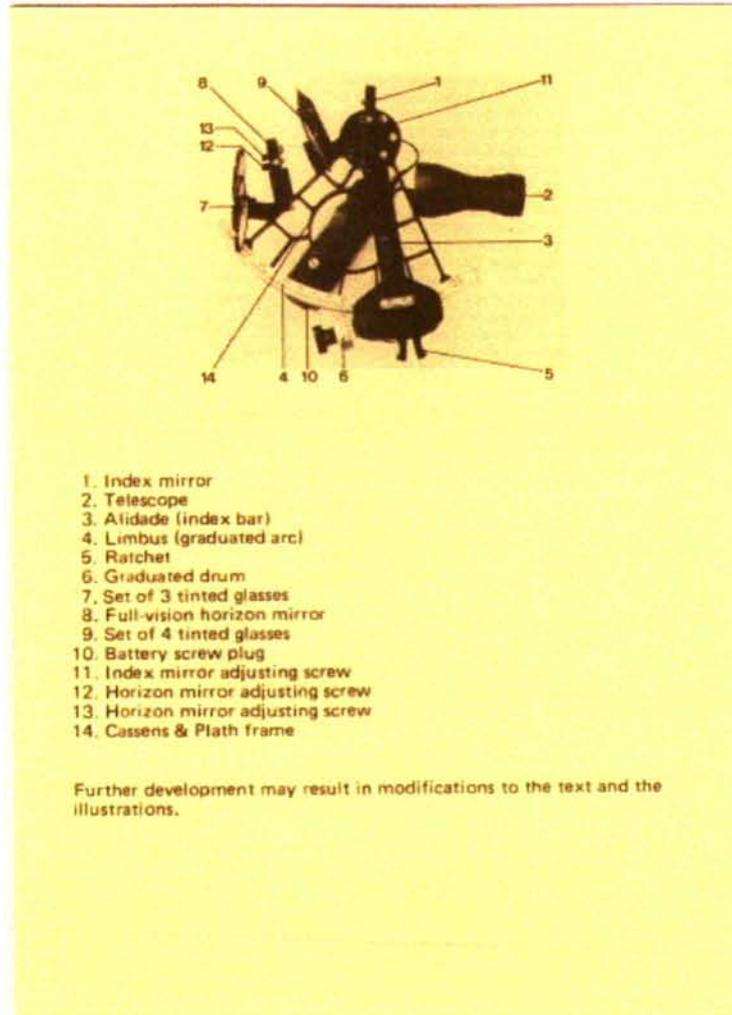


Fig - 1.98.IV - Cassens & Plath. Características y descripción

VEB Freiburger Präzisionsmechanik 92 Freiberg Sachs. Hainichener Straße 2a	
Trommel-Sextant Nr. 751 121	
Verbesserung d. Messung	Gal. Fernrohr
0° 0'	Vergrößerung: 4,0 x
10 0'	
20 1'	Astr. Fernrohr
30 3'	Vergrößerung:
40 3'	
50 9'	Großer Spiegel:
60 9'	Kleiner Spiegel:
70 7'	
80 7'	
90 8'	
100 9'	Bemerkungen:
110 13'	Zulassungs-Nr: 5.91/2033/1.1
120 10'	
VEB Freiburger Präzisionsmechanik 92 Freiberg/Sachs., Hainichener Straße 2a	
25.4.75	<i>[Signature]</i>
Datum	Unterschrift

8442 Ag 307/69 VLV Freiberg III.11/7 2.5.5 51-1

Fig - 1.99.IV - Trommel-Sextant

*La hipérbola esférica en la Navegación Astronómica.
 Recta diferenciométrica.
 Verdadera naturaleza de la bisectrix de altura.*



ENOSA
MADRID

EMPRESA NACIONAL DE OPTICA, S. A.

Fábrica: Pinar del Bosque Chamartín-Apto. Correos n.º 19042 Oficinas Comerciales: María de Molina, 2

Certificado de Contraste

Instrumento Sextante Tipo Guardiamarina N.º 275

Clase

División del limbo 10' Apreciación del } Nonius 20"
 Tambor

Radio " " 160'S

Correcciones

Grados	14	26	40	52	64	75	97	120		
ε	-	-	-	-	-	-	-	+30		

		Tipo	Aumentos
Características de los anteojos	N.º 1	Astronómico	10
	N.º 2	Solileo	4

Referencia 130101 Madrid, 4 de Mayo de 1964

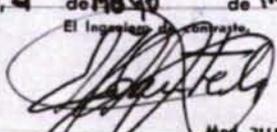
El Ingeniero de Contraste

 Mpd. 2111

Fig - 1.100.IV - Sextante Guardiamarina

CAPÍTULO V

CORRECCIONES A LAS ALTURAS DE LOS ASTROS

1. POSICIONES VERDADERAS Y APARENTES. — Las posiciones en las que, a los ojos del observador, aparecen los astros del firmamento se definen como aparentes. La trayectoria de los rayos de luz provenientes de los astros está perturbada por diferentes causas que se traducen en una alteración de la misma. Entre estas causas cabe destacar los enormes campos gravitatorios que deben atravesar y cuyos efectos no son contemplados en este estudio, ya que las coordenadas uranográficas ecuatoriales son fijadas al margen de los mismos; reseñar que la alteración que por este motivo pueden sufrir alcanza considerables proporciones, ya previstas por Einstein y comprobadas por modernos estudios, dándose el caso que galaxias lejanas muestran una doble imagen después de que la luz emanada de las mismas con direcciones divergentes a través de un potente campo gravitatorio, sea desviada en direcciones convergentes al actuar dicho campo como una auténtica lente gravitacional. Los fenómenos de aberración diurna y annua ligados a los movimientos de rotación y traslación de la Tierra, y que ocasionan cambios en esta trayectoria, tampoco son materia de este estudio cuyo ámbito se reduce al fenómeno de la refracción astronómica, definiéndose esta como manifestación del cambio que experimenta la trayectoria de un rayo de luz al atravesar las distintas capas de la atmósfera, como consecuencia del gradiente de densidad.

2. LAS CORRECCIONES A LAS ALTURAS OBSERVADAS. — Las alturas observadas en la mar han de ser debidamente corregidas y reducidas al centro de la Tierra, — esfera geocéntrica —. En la figura 1.102.V, en la que se ha tomado como astro tipo la Luna por presentar de una forma clara las distintas correcciones, el rayo de luz que emana del limbo inferior alcanza el ojo del observador después de describir una trayectoria curva como consecuencia del fenómeno de la refracción astronómica y el observador ve al astro según la dirección de la tangente a esta curva en su punto final; el resultado se traduce en un aumento de la altura cuya entidad estudiaremos

posteriormente. Por ser E_o la elevación del observador, la trayectoria del rayo de luz procedente del último punto visible, donde el vertical del astro corta a la línea del horizonte de la mar, y como consecuencia del fenómeno de la refracción terrestre, es una curva que, normalmente, presenta su concavidad hacia abajo y este último punto

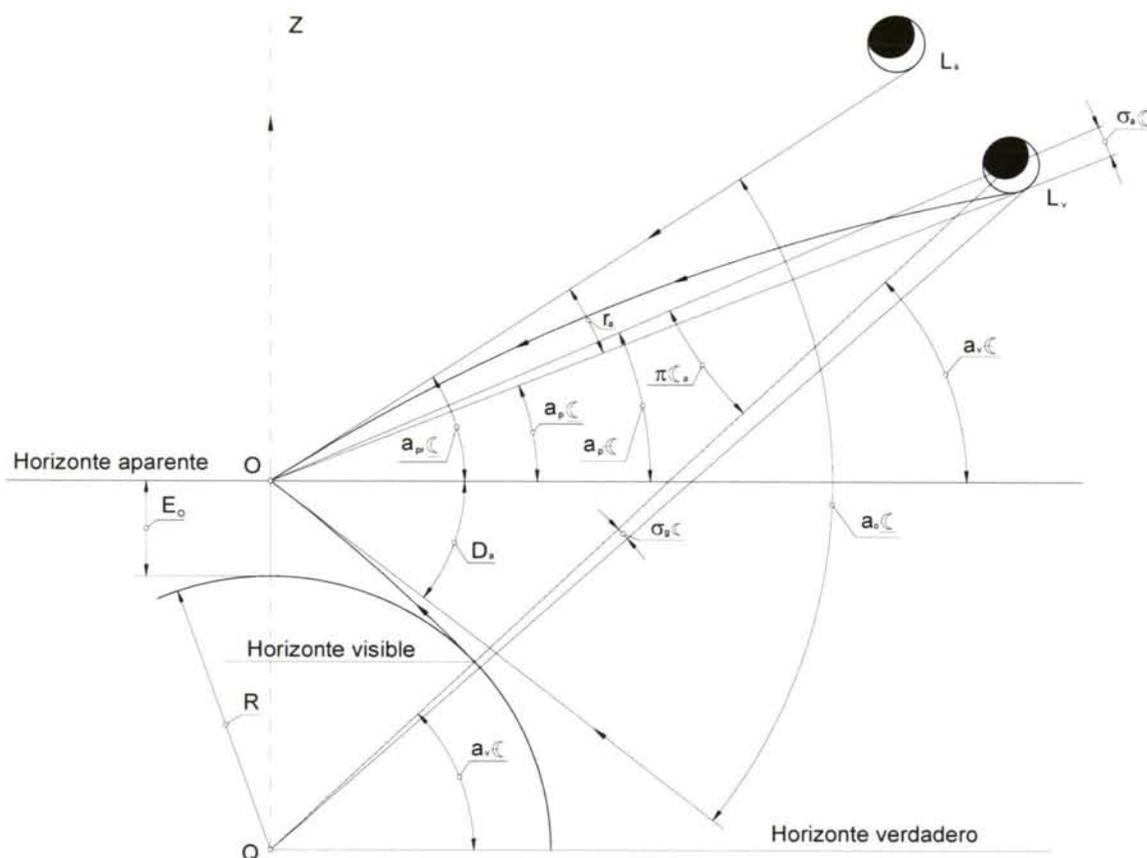


Fig - 1.102.V - Correcciones a las alturas observadas

visible se percibe según la tangente a esta en O , posición del observador; la altura observada del limbo inferior es, precisamente, el ángulo que forman ambas tangentes. La altura ha de ser reducida al horizonte aparente deduciendo de la observada el ángulo D_a , depresión del horizonte, obteniendo así la altura aparente refractada del limbo inferior o, en su caso, del superior, a_{pr} , y de esta se resta la refracción astronómica, antes descrita, para pasar a la altura aparente del limbo que corresponda, a_p . La observación de los limbos se efectúa al no ser un punto material el centro del astro, que es la altura que interesa; el ángulo que desde el centro de la Tierra subtende el radio del astro, — únicamente Sol y Luna, ya que planetas y estrellas no presentan esta corrección —, recibe el nombre de semidiámetro, σ lunar y σ_o solar; esta magnitud se sumará, si es del limbo inferior, o restará, si es del superior, a la altura

aparente pasando así a la altura aparente del centro del astro o central, $a_p \in$. Para, por

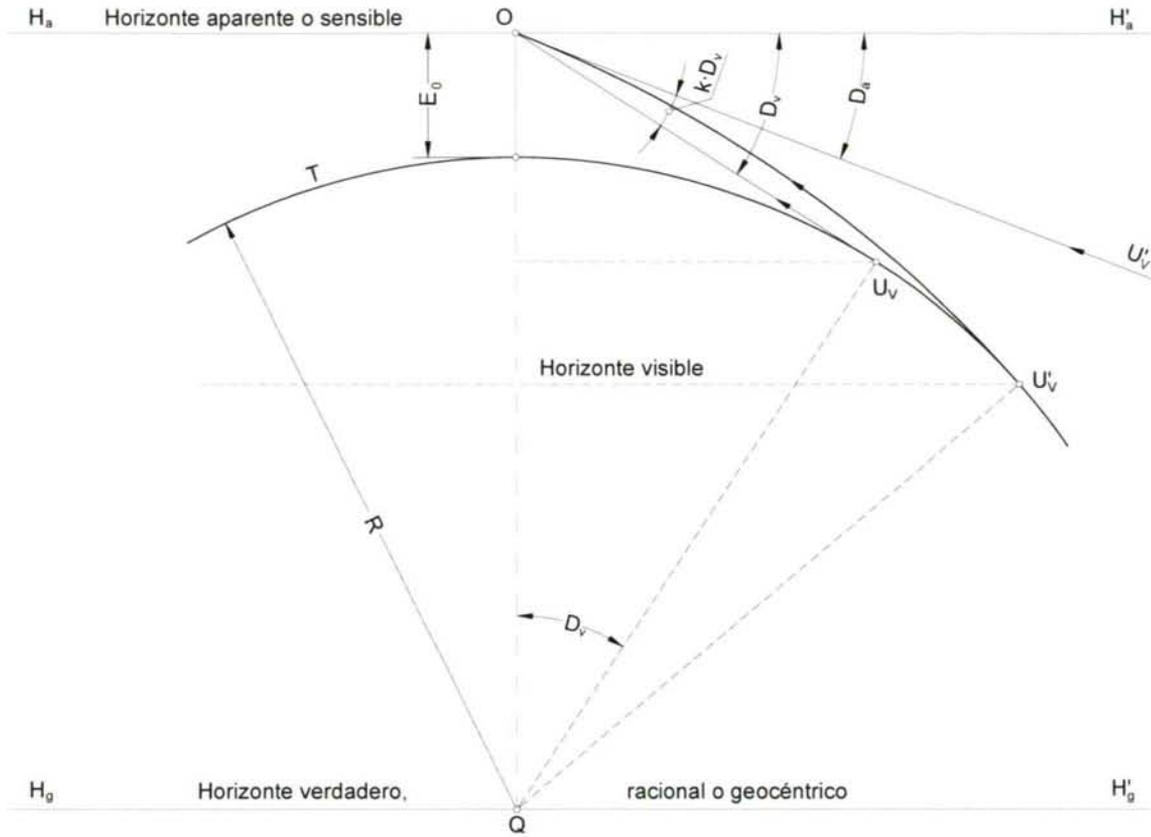


Fig -1.103.V - Depresión aparente

último, reducir esta altura al horizonte racional o geocéntrico, al que están referidos los sistemas de coordenadas, es menester la consideración de la corrección por paralaje, π , entendiéndose por tal, el ángulo que desde el centro del astro observado subtiende el radio terrestre, corrección esta que, como se deduce de la figura, es positiva; el resultado final buscado es la altura verdadera del centro del astro, $a_v \in$.

3. ESTUDIO DE LA DEPRESIÓN APARENTE, D_a . — De todo lo antedicho en referencia a esta corrección, en la figura 1.103.V:

En el triángulo OQU_v , rectángulo en U_v ,

$$\operatorname{tg} D_v = \frac{\sqrt{(R + E_0)^2 - R^2}}{R} \quad (1.103.V)$$

en la que operando tal como se indica,

$$\operatorname{tg} D_v = \sqrt{\frac{R^2 + E_0^2 + 2RE_0 - R^2}{R^2}} \quad (1.104.V)$$

que podremos escribir,

$$\operatorname{tg} D_v = \sqrt{\frac{2E_0}{R} + \frac{E_0}{R^2}} \quad (2.104.V)$$

Más, siendo el cociente $\frac{E_0}{R^2}$, para los valores usuales de E_0 , una magnitud infinitesimal

de incidencia nula en el resultado final y de la cual, por lo tanto, podemos prescindir,

$$\operatorname{tg} D_v \approx \sqrt{2 \frac{E_0}{R}} \quad (3.104.V)$$

expresión equivalente a,

$$\operatorname{tg} D_v = \sqrt{\frac{2}{R}} \sqrt{E_0} \quad (4.104.V)$$

Considerada la forma esférica de la Tierra, lo que a efectos de nuestro estudio supone aproximación suficiente, y que al ser el ángulo D_v de la depresión verdadera tan pequeño que, sin error apreciable, nos permite sustituir, — como viene siendo habitual en todo este trabajo —, $\operatorname{tg} D_v \approx D_v' \cdot \operatorname{tg} 1'$, la anterior fórmula puede sustituirse por,

$$D_v' = \frac{1}{\operatorname{tg} 1'} \sqrt{\frac{2}{R}} \sqrt{E_0} \quad (5.104.V)$$

siendo constante, por las consideraciones en cuanto a la forma de la Tierra, el producto

$$\frac{1}{\operatorname{tg} 1'} \sqrt{\frac{2}{R}}$$

la anterior expresión se convierte en:

$$D_v' = k_0 \cdot \sqrt{E_0} \quad (1.105.V)$$

y si tomamos como valor del radio terrestre 6.366.707 m, al ser la tangente de un minuto 0,00029088821... y la raíz de dos, 1,41421356..., la constante k_0 resulta ser 1,92677692... y, por consiguiente, la depresión del horizonte, en ausencia de atmósfera, tiene por expresión,

$$D_v' = 1,92677 \sqrt{E_0} \quad (2.105.V)$$

La relación entre las depresiones aparente y verdadera es:

$$D_a' = D_v' - k \cdot D_v' \quad (3.105.V)$$

expresión en la que k es una constante de proporcionalidad cuya entidad oscila con las variables meteorológicas humedad, presión, temperatura del aire y temperatura del agua, siendo este último contraste el que ocasiona más anomalías en los valores que, aún siendo algo diferentes según los autores consultados, están alrededor de los que siguen: para tiempo seco y cálido $k = 0,02$, para tiempo lluvioso y húmedo $k = 0,15$, tomándose como valor medio del coeficiente de refracción terrestre el de $k = 0,08$. La depresión aparente, pues, obedece a la ley,

$$D_a' = k_0 \cdot \sqrt{E_0} - k \cdot k_0 \cdot \sqrt{E_0} \quad (4.106.V)$$

en la que sacando factor común y sustituyendo k_0 por su valor, ya deducido, y k por su valor medio, tenemos la depresión aparente en condiciones medias

$$D_a' = 1.92677 \cdot \sqrt{E_0} (1 - 0,08) \quad (5.106.V)$$

es decir: la depresión aparente en condiciones medias es, aproximadamente, el 92% de la verdadera. Quedándonos, finalmente,

$$D_a' = 1,77263 \cdot \sqrt{E_0} \quad (1.106.V)$$

que, a efectos prácticos, escribiremos

$$D_a' = 1,8 \sqrt{E_0} \quad (2.106.V)$$

con muy pequeñas diferencias respecto de la anterior. Si el coeficiente de la refracción terrestre difiere del medio, la refracción calculada resulta diferente de la real, aunque esta diferencia en raras ocasiones supera 1' o 2' ; la experiencia demuestra que las anomalías respecto del valor medio, a base del cual están construidas la mayoría de las tablas que facilitan la depresión, son escasas, observándose valores inferiores al medio con mayor frecuencia que los valores superiores; es decir, la depresión es, en general, menor que la dada por las tablas o por la fórmula estudiada. Los valores anormales de la depresión son muy raros y suelen darse en condiciones de calma chicha, cuando la línea del horizonte es oscilante o cuando los discos de Sol y Luna aparecen con gran deformación al orto o al ocaso. Los lugares donde estos valores anormales han sido observados en alguna ocasión son el Mar Rojo, Golfo Pérsico, Mar del Norte, costa occidental de África, cabo Guardafui, en las proximidades de las corrientes cálidas Gulf Stream y Kuro-Shivo, así como en las desembocaduras de los grandes ríos. En rarísimas ocasiones, valores que difieren del medio en más de 40' han sido constatados por observadores dignos de todo crédito. Debemos tener siempre presente que al medir la altura a bordo respecto del horizonte de la mar, todo error en la depresión,— el más temible—, lo es en la altura. Ingenios contruidos para la medición de esta importantísima variable e inspirados en la hipótesis de la homogeneidad en las condiciones de humedad presión y temperatura en todo el horizonte, fueron utilizados, sobre todo, en la navegación de precisión; el más conocido de todos ellos es el denominado Depresiómetro de Pülfrich.

4. LA DISTANCIA AL ÚLTIMO PUNTO VISIBLE, d_{hv} . — La consideración de la distancia al último punto visible o distancia al horizonte visible, de importancia en la navegación costera, adquiere trascendencia en la observación cuando el vertical del astro cae sobre la línea de costa, pues es preciso saber con claridad si esta se encuentra entre el horizonte visible y el observador aplicándose, en este caso, una corrección que difiere de la anteriormente estudiada. En muchos casos se percibe con claridad la mayor o menor proximidad de la línea de costa con relación a la del horizonte pero en otras ocasiones no es tan clara esta diferenciación.

En la figura 1.103.V, sustituyamos el ángulo de la depresión verdadera, D_v , por el de la

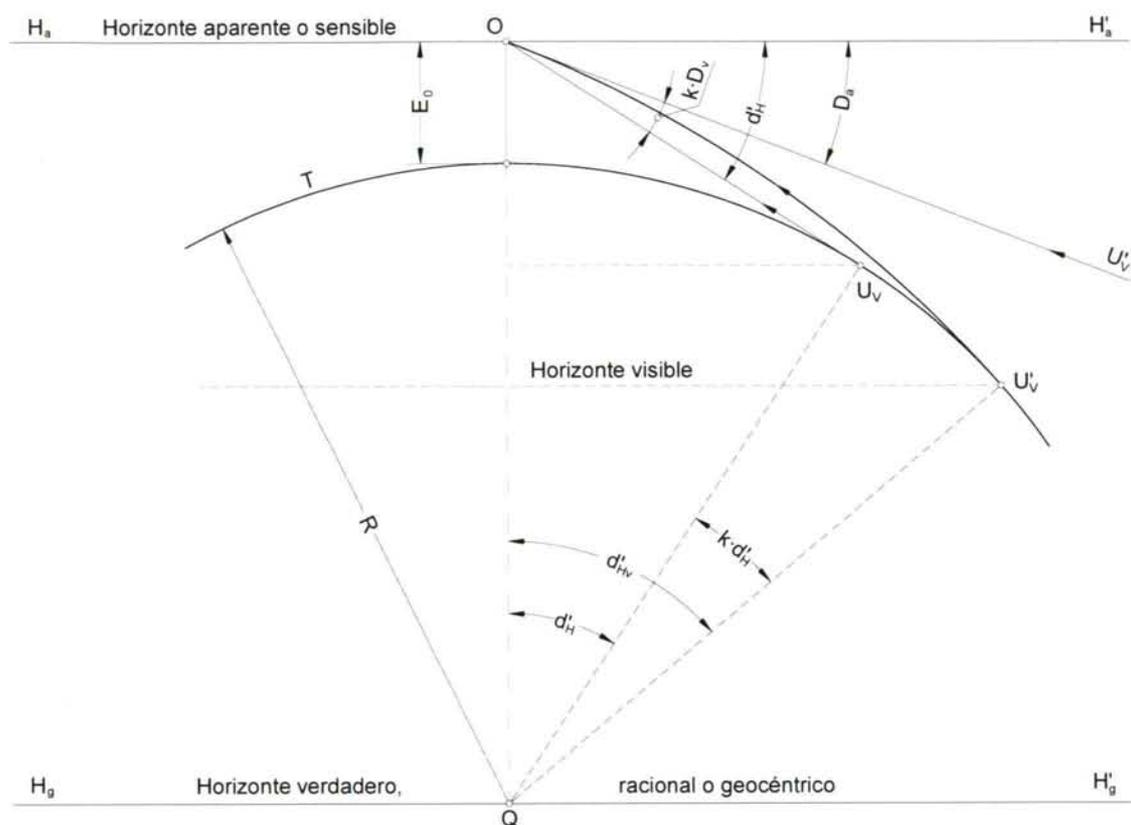


Fig -1.107.V - Distancia al horizonte

distancia, expresada en millas náuticas, que, en ausencia de atmósfera, habría al horizonte, d'_H ; sea d'_{Hv} la distancia que, en presencia de atmósfera, habrá al último punto visible [FLORA-1982], figura 1.107.V, tendremos:

$$d'_{Hv} = d'_H + k \cdot d'_H \quad (1.107.V)$$

fórmula en la que la constante $k=0,08$ es, en su valor medio, la contemplada en el estudio de la depresión. Por la equivalencia de los ángulos depresión verdadera, D_v , y distancia al horizonte visible en ausencia de atmósfera, d'_H , y según lo demostrado, sería

$$d'_H = 1,92677 \sqrt{E_0} \quad (2.107.V)$$

que, con las oportunas sustituciones en la (1.107.V), nos da la expresión de la distancia

en millas náuticas al último punto visible en condiciones medias,

$$d'_{Hv} = 2,08 \sqrt{E_0} \quad (1.108.V)$$

5. LA DEPRESIÓN DE LA LÍNEA DE COSTA, D'_c . — Cuando el vertical del astro observado cae sobre la línea de costa próxima es preciso la corrección de la altura

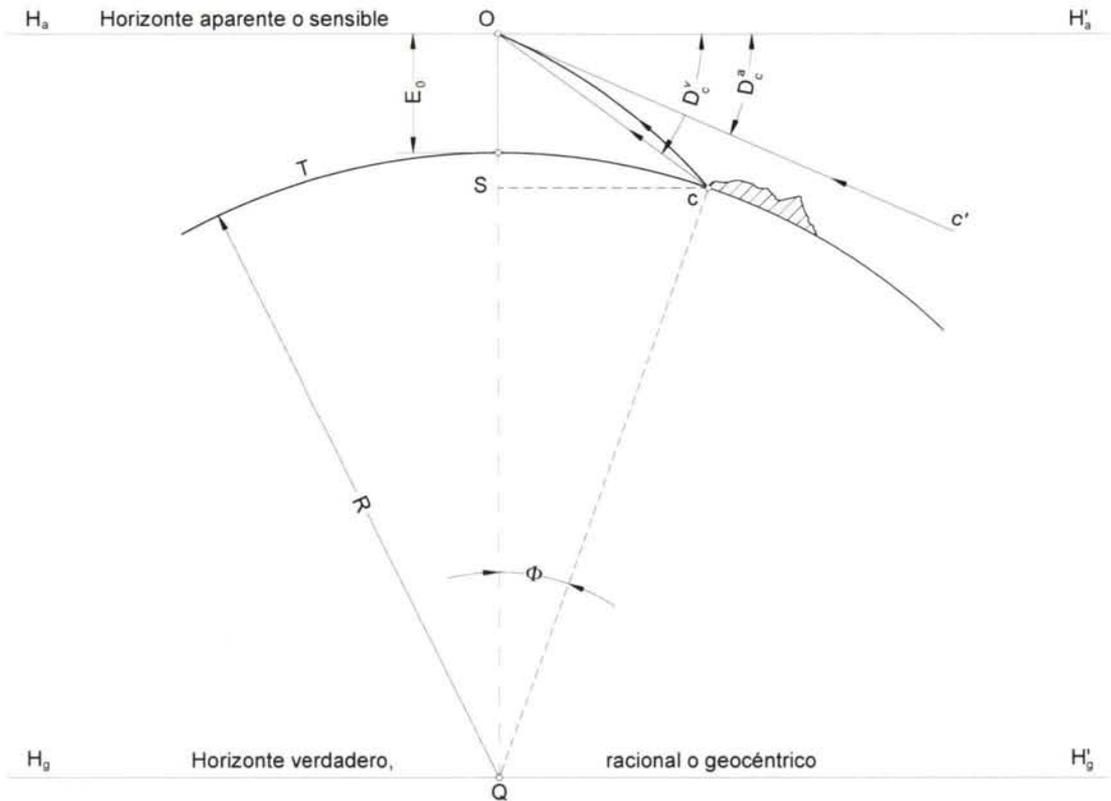


Fig - 1.108.V - Depresión de la línea de costa

observada por la depresión de esta línea. En la figura 1.108.V, en la que D^v_c y D^a_c son, respectivamente, las depresiones verdadera y aparente de la línea de costa, E_0 la elevación del observador y Φ la distancia al punto donde cae el vertical; tenemos

$$\operatorname{tg} D^v_c = \frac{R + E_0 - R \cdot \operatorname{sen} \Phi}{R \cdot \operatorname{cos} \Phi} \quad (2.108.V)$$

en la que operando en función de la pequeñez de los ángulos implicados y sabiendo que la relación entre depresión verdadera y aparente es

$$D^a_c = D^v_c - k \cdot \Phi \quad (3.108.V)$$

siendo k el coeficiente de la refracción media,

$$\operatorname{tg} D^{\vee}_c = \frac{R + E_0 - R \left(1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\Phi}{2} \right)}{R \cdot \operatorname{sen} \Phi} \quad (1.109.V)$$

y admitiendo que la tangente y el seno, para ángulos muy pequeños, son iguales,

$$D^{\vee}_c \cdot \operatorname{sen} 1' = \frac{R + E_0 - R \left(1 - \frac{\Phi^2}{2} \cdot \operatorname{sen}^2 1' \right)}{R \cdot \Phi \cdot \operatorname{sen} 1'} \quad (2.109.V)$$

estando expresadas en minutos la depresión y la distancia. Al efectuar las operaciones indicadas,

$$D^{\vee}_c = 1,856 \frac{E_0}{\Phi} + \frac{\Phi}{2} \quad (3.109.V)$$

y, en atención a la (2.108.V),

$$D^a_c = 1,856 \frac{E_0}{\Phi} + 0,42 \Phi \quad (4.109.V)$$

que nos proporciona la requerida depresión conocida la distancia al punto de la costa donde cae el vertical. Cuando esta distancia no se conoce con precisión, bastará con estimarla pero si se busca mayor rigor puede procederse del modo siguiente; si en la (4.109.V) recabamos la variación de la depresión en función de la variación de la elevación del observador,

$$\Delta D^{\vee}_c = 1,856 \frac{\Delta E_0}{\Phi} \quad (5.109.V)$$

fórmula absolutamente independiente del valor de la refracción y de la que se podrá obtener la distancia. Dispónganse dos observadores provistos de sus sextantes, en el mismo plano vertical, con elevaciones E_0 y $E_0 + \Delta E_0$, figura 1.110.V, obsérvese la altura del astro que interese y cuyo vertical cae en el punto C de la costa próxima, es evidente que el ángulo que forman las visuales en C' es la diferencia de la depresión del punto C para ambos observadores y que se obtendrá restando las alturas observadas simultáneas, es decir, las alturas corregidas del error de índice de cada uno de los sextantes y así, medida ΔD^a_c y conocida la diferencia de elevaciones, —adviértase que para esta medición no es preciso conocer E_0 —, se calculará la distancia con precisión

suficiente para corregir la altura observada; el procedimiento se justifica en la

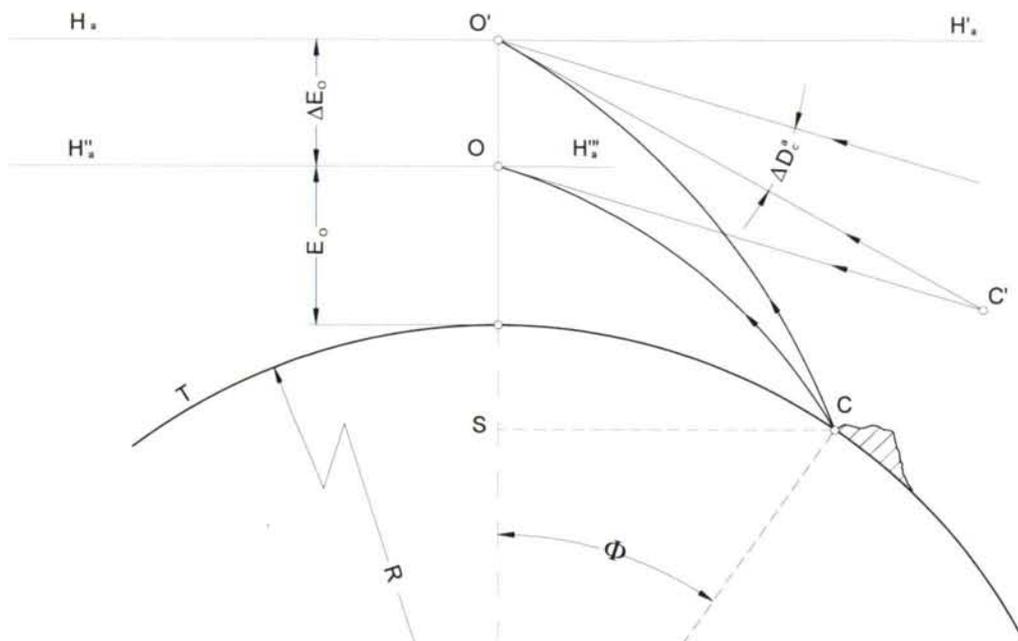


Fig - 1.110.V - Variación de la depresión

constancia teórica de la distancia al considerar la misma para ambos observadores.

6. EL ÁNGULO DE PARALAJE, π . — Se había establecido que el ángulo bajo el que, desde el centro del astro, se observa el radio de la Tierra recibe el nombre de ángulo de paralaje o, simplemente, paralaje. Por paralaje horizontal se entiende el valor del mismo ángulo cuando el astro se observa en el horizonte, aplicándose el término paralaje en altura en los demás casos. La paralaje solar alcanza valores máximos de alrededor de 8·8" y se da englobada con las otras correcciones en las tablas correspondientes. Para la Luna el Almanaque Náutico facilita la paralaje horizontal ecuatorial, PHE, es decir el valor de la paralaje para un observador situado en el ecuador y con la Luna en el horizonte, supuesta la Tierra esférica, a 04, 12 y 20 horas; para los planetas Marte y Venus se da la paralaje en distintas épocas del año; debido a su gran lejanía, los demás astros no presentan paralaje sensible. En la figura 1.111.V son π_H y π_a la paralaje horizontal y en altura, respectivamente, a_p altura aparente, a_v altura verdadera y d y d' las distancias al astro desde el centro de la tierra y desde el observador,

$$\text{sen } \pi_H = \frac{R}{d} \quad (1.111.V)$$

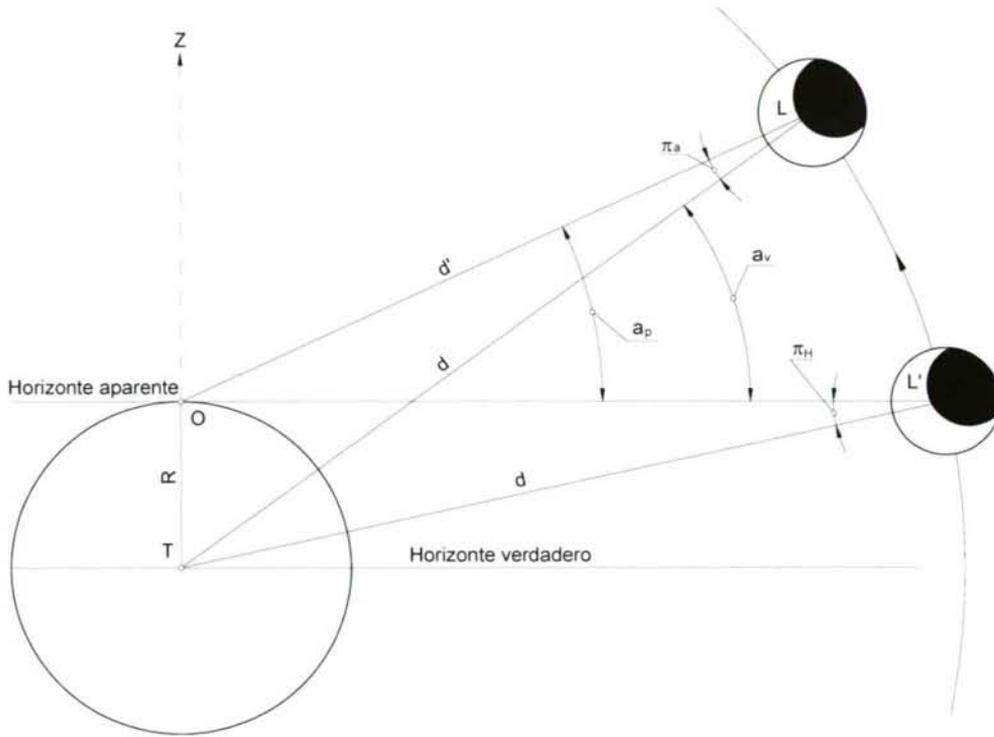


Fig - 1.111.V - Paralaje

mas, siendo la paralaje un ángulo muy pequeño,

$$\pi'_H = \frac{1}{\text{sen } 1'} \cdot \frac{R}{d} \quad (2.111.V)$$

que nos da la paralaje en minutos. La paralaje es directamente proporcional al radio de la Tierra e inversamente proporcional a la distancia al astro; del triángulo TLO, por el teorema de los senos,

$$\frac{R}{\text{sen } \pi_a} = \frac{d}{\text{cos } a_p} \quad (3.111.V)$$

de la que deducimos el valor de la paralaje en altura,

$$\pi'_a = \frac{1}{\text{sen } 1'} \cdot \frac{R}{d} \cdot \cos a_p \quad (1.112.V)$$

en la que, al sustituir conforme a la (2.111.V),

$$\pi'_a = \pi'_H \cdot \cos a_p \quad (2.112.V)$$

que nos da la paralaje en altura en función de la paralaje horizontal y de la altura aparente del astro. La paralaje disminuye con la altura, su máximo valor es el horizontal y es nulo cuando el astro se observa con altura de 90°, astro en el cénit. En las observaciones de precisión la Tierra no se considera esférica y la paralaje es la del lugar del observador; si es ρ el radio que corresponde a tal lugar y π^ϕ_H la paralaje horizontal del mismo expresada en minutos,

$$\pi^\phi_H = \frac{1}{\text{sen } 1'} \cdot \frac{\rho}{d} \quad (3.112.V)$$

y siendo la paralaje horizontal ecuatorial:

$$\pi^E_H = \frac{1}{\text{sen } 1'} \cdot \frac{a}{d} \quad (4.112.V)$$

en la que a es el radio ecuatorial del elipsoide considerado, dividiendo ambas expresiones y despejando la paralaje horizontal del lugar:

$$\pi^\phi_H = \pi^E_H \cdot \frac{\rho}{a} \quad (5.112.V)$$

El cociente entre el radio local y el radio ecuatorial, siempre menor que la unidad, es, en función de la latitud del propio lugar y del aplanamiento α de la elipse meridiana, según demuestra la Geodesia,

$$\frac{\rho}{a} = 1 - \alpha \text{sen}^2 \varphi$$

y, por lo tanto:

$$\pi^\phi_H = \pi^E_H (1 - \alpha \text{sen}^2 \varphi) \quad (6.112.V)$$

los valores de α difieren poco de un elipsoide a otro y en la tabla siguiente podemos

comprobar tales diferencias;

Elipsoide	Radio ecuatorial	Radio polar	Aplanamiento
Airy	6.377.563	6.356.257	1/299,325
Internacional 1924	6.378.388	6.356.912	1/297,000
Clarke 1866	6.378.206	6.356.584	1/294,980
Clarke 1880	6.378.249	6.356.515	1/293,465
WGS 72	6.378.135	6.356.751	1/298.260

Para determinar, finalmente, la paralaje en altura del lugar,

$$\pi_a^\varphi = \pi_H^E (1 - \alpha \text{sen}^2 \varphi) \cos a_p \quad (1.113.V)$$

al producto $\pi_H^E \alpha \text{sen}^2 \varphi$ se le da el nombre de reducción de la paralaje ecuatorial de la Luna.

La paralaje lunar, interpolada del Almanaque Náutico para la hora de a observación, se reduce a paralaje horizontal del lugar, y de esta se pasa a la paralaje en altura del lugar al multiplicarla por el coseno de la altura aparente.

7. LA CORRECCIÓN POR SEMIDIÁMETRO, σ . — Se había definido el semidiámetro como el ángulo que desde el centro de la Tierra subtiende el radio del astro observado; solamente se presenta con Sol y Luna, pues los planetas en el sextante no muestran semidiámetro sensible. Por semidiámetro local o aparente se entiende el ángulo definido desde la posición del observador, mientras que el semidiámetro correspondiente al centro de la tierra recibe el nombre de geocéntrico o verdadero; para el Sol esta diferenciación carece de significado práctico pero no para la Luna; si se supone invariable la distancia Tierra-Luna en un corto intervalo de tiempo, es fácil comprobar, figura 1.111.V, que el semidiámetro lunar varía con la altura, ya que siendo la distancia Tierra-Luna, en su valor medio, de unos sesenta radios terrestres, durante el periodo de tiempo transcurrido desde el paso por el meridiano inferior hasta el superior, esta distancia puede variar algo menos de dos radios terrestres, es decir: el semidiámetro lunar aumenta constantemente desde la culminación inferior a la superior y disminuye desde esta a aquella; a esta variación se le conoce como aumento del semidiámetro lunar con la altura y figura en alguna de las colecciones de tablas

náuticas¹. En la figura 1.114.V, en la que σ_{cG} es el semidiámetro lunar geocéntrico, σ_{cA} el aparente, d' es la distancia entre el observador y el centro de la Luna, d la distancia centro de la Tierra centro de la Luna, r el radio lunar y R el radio terrestre, tenemos,

$$\text{sen } \sigma_{cG} = \frac{r}{d} \tag{1.114.V}$$

pero siendo el semidiámetro un ángulo muy pequeño, la fórmula anterior podemos

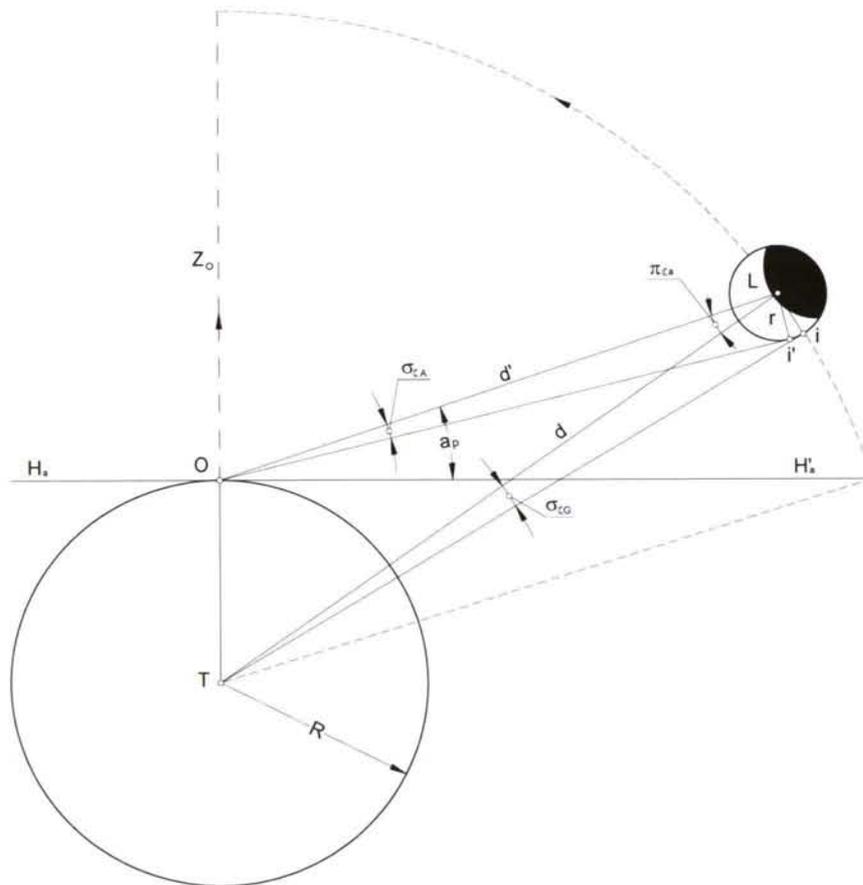


Fig - 1.114.V - Semidiámetro

expresarla,

$$\sigma'_{cG} \cdot \text{sen } 1' = \frac{r}{d} \tag{2.114.V}$$

¹ La importancia de esta variación fue notable en los tiempos en los que el estado del cronómetro se determinaba a bordo por medio de observaciones con el sextante y en las que era requerida la máxima precisión. La Navegación Astronómica moderna, en general, no contempla esta variable.

en la que despejando el semidiámetro,

$$\sigma'_{cG} = \frac{1}{\text{sen } 1'} \cdot \frac{r}{d} \quad (1.115.V)$$

que nos dice que el semidiámetro es directamente proporcional al radio del astro observado e inversamente proporcional a la distancia al mismo; es decir, que al igual que en la paralaje, el semidiámetro es tanto mayor cuanto más cercano a la Tierra esté el astro. De forma similar, para el semidiámetro local o aparente,

$$\sigma'_{cA} = \frac{1}{\text{sen } 1'} \cdot \frac{r}{d'} \quad (2.115.V)$$

Recabemos la expresión que define la diferencia entre ambos semidiámetros:

Dividiendo miembro a miembro las expresiones (1.115.V) y (2.115.V),

$$\frac{\sigma_{cG}}{\sigma_{cA}} = \frac{d'}{d} \quad (3.115.V)$$

en el triángulo TOL de la figura 1.114.V:

$$\frac{d'}{d} = \frac{\cos(a_p + \pi_{ca})}{\cos a_p} \quad (4.115.V)$$

desarrollando el coseno de la suma,

$$\frac{d'}{d} = \frac{\cos a_p \cos \pi_{ca} - \text{sen } a_p \text{ sen } \pi_{ca}}{\cos a_p} \quad (5.115.V)$$

La efectiva pequeñez del ángulo de paralaje nos permite suponer, sin error apreciable,

$$\cos \pi_{ca} = 1 \quad \text{y} \quad \text{sen } \pi_{ca} = \pi'_{ca} \text{ sen } 1'$$

resultando, al sustituir estos valores:

$$\frac{\sigma_{cG}}{\sigma_{cA}} = 1 - \text{tg } a_p \cdot \pi'_{ca} \cdot \text{sen } 1' \quad (6.115.V)$$

Pero la relación entre las paralajes en altura del lugar y horizontal ecuatorial era, (1.113.V),

$$\pi_a^\varphi = \pi_H^E (1 - \alpha \operatorname{sen}^2 \varphi) \cos a_p$$

por lo tanto:

$$\frac{\sigma_{cG}}{\sigma_{cA}} = 1 - \operatorname{sen} a_p (1 - \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi) \cdot \pi_H^E \cdot \operatorname{sen} 1' \quad (1.116.V)$$

en la que, al despejar el semidiámetro aparente,

$$\sigma_{cA} = \frac{\sigma_{cG}}{1 - \operatorname{sen} a_p (1 - \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi) \cdot \pi_H^E \cdot \operatorname{sen} 1'} \quad (2.116.V)$$

Llamando a la diferencia $\sigma_{cA} - \sigma_{cG} = \Delta\sigma$, aumento del semidiámetro lunar con la altura, tenemos,

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_{cG} \cdot \operatorname{sen} a_p (1 - \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi) \cdot \pi_H^E \cdot \operatorname{sen} 1'}{1 - \operatorname{sen} a_p (1 - \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi) \cdot \pi_H^E \cdot \operatorname{sen} 1'} \quad (3.116.V)$$

fórmula que resulta la más exacta, pues en ella se ha tenido en cuenta el fenómeno de la paralaje local; una expresión más simple pero cuyos resultados son igualmente aceptables y en la que no se incluiría este fenómeno es:

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_{cG} \cdot \operatorname{sen} a_p \cdot \pi_H^E \cdot \operatorname{sen} 1'}{1 - \operatorname{sen} a_p \cdot \pi_H^E \cdot \operatorname{sen} 1'} \quad (4.116.V)$$

El semidiámetro lunar, como ya se había dicho, aumenta con la altura. El fenómeno que el observador contempla al orto de Luna y en el que aparece el disco lunar con dimensiones que se nos antojan excepcionales, obedece a los efectos de la refracción horizontal; concluyamos recordando que esta dilatación del semidiámetro lunar es de tan pequeña entidad que solo es considerada en las observaciones de precisión.

7. LA REFRACCIÓN ASTRONÓMICA, r_a . — Uno de los fenómenos más profusamente estudiado por los hombres de ciencia es el de la refracción astronómica; su complejidad físico-matemática, debido al elevado número de variables implicadas algunas de las cuales tienen naturaleza estocástica, es de grado tal que las soluciones dadas, en orden a disponer de resultados finales fiables, obtenidos a partir de una

fórmula matemática de manejo sencillo y capaz de relacionar las mencionadas variables, están inspiradas en condiciones ideales alejadas, casi siempre, de las condiciones reales existentes en cada caso. Según el modelo físico-matemático adoptado, así dispondremos de la fórmula debida a uno u otro autor, aplicables según el rango de precisión requerido, mas ninguna de ellas absolutamente precisa². Para nuestro estudio recurriremos a un modelo sencillo, ya que la precisión que se necesita no exige modelos complejos, partiendo de las siguientes leyes físicas, algunas de las cuales pudieran ser totalmente teóricas³ ; atendiendo a la figura 1.117.V:

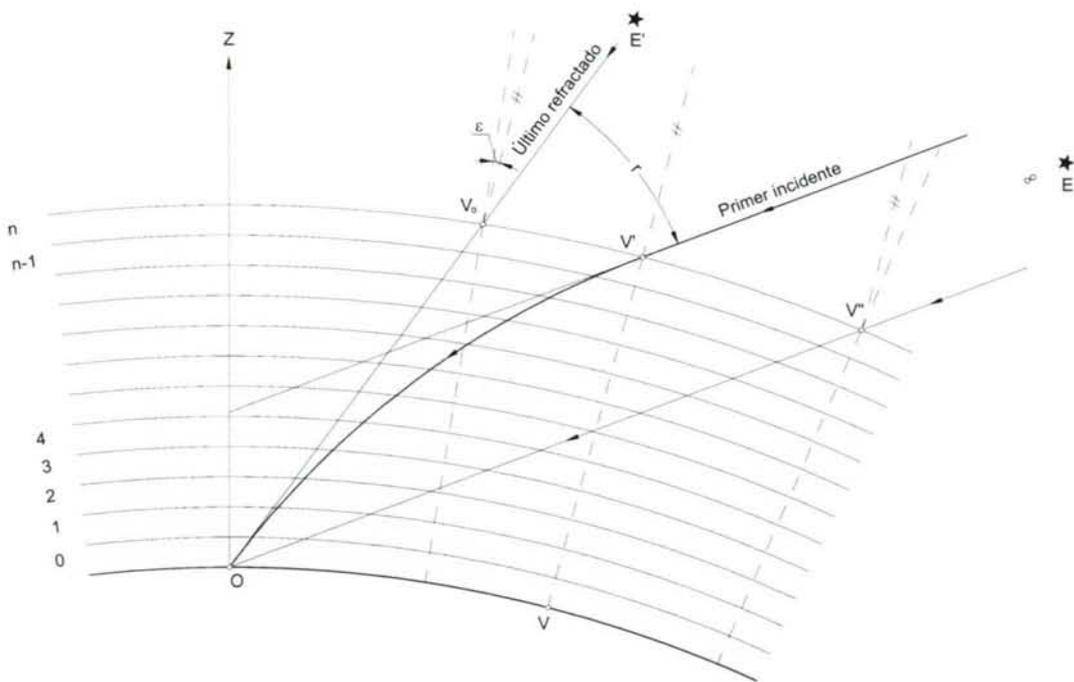


Fig - 1.117.V - Refracción astronómica

- 1) El rayo de luz atraviesa la atmósfera con trayectoria curva, resultado de infinitas refracciones, estando el rayo incidente y el refractado en el mismo plano vertical.
- 2) Al aumentar la densidad del medio, el rayo refractado se acerca a la normal.
- 3) La relación entre los senos de los ángulos de incidencia y refracción es

² Es buen lugar este para recordar de la "Tecnología de la Medición" de D. Arcadio L Casillas: "Trabaje siempre con la precisión necesaria, no con la máxima".

³ Sabido es de la ocasional, existencia del fenómeno de la refracción en acimut o refracción lateral que, aunque de muy pequeña entidad, inclina ligeramente el plano de refracción.

constante. Si consideramos la atmósfera formada de capas concéntricas, ideales, de espesor infinitesimal y con superficies de separación entre cada dos capas consecutivas, el cociente entre el seno del ángulo de incidencia del primer rayo en la capa de densidad nula, vacío, y el seno del ángulo de refracción en la capa n-sima, recibe el nombre de "índice de refracción" de la capa n-sima.

- 4) De una capa a otra, los senos de los ángulos de incidencia y de refracción, son inversamente proporcionales a los índices de refracción de dichas capas.

Consideremos creciente la densidad de la atmósfera hacia la superficie terrestre; analizando dos capas consecutivas α y β , de índices de refracción i_α e i_β , figura 1.119.V, de acuerdo con la ley 4 [MEDINA-1978] se tiene:

$$\frac{\text{sen } l}{\text{sen } \rho} = \frac{i_\beta}{i_\alpha} \quad (1.118.V)$$

de aquí,

$$\text{sen } l = \text{sen } \rho \cdot \frac{i_\beta}{i_\alpha} \quad (2.118.V)$$

Los ángulos l y ρ difieren en una cantidad infinitesimal al considerar las características de las capas contiguas tan similares como se quiera, por lo que:

$$\text{sen } l = \text{sen}(\rho + d_r) \quad (3.118.V)$$

quedándonos la (2.118.V),

$$\text{sen}(\rho + d_r) = \text{sen } \rho \cdot \frac{i_\beta}{i_\alpha} \quad (4.118.V)$$

que, debido a la naturaleza infinitesimal del ángulo d_r , podremos escribir,

$$\text{sen } \rho + \cos \rho \cdot d_r = \text{sen } \rho \cdot \frac{i_\beta}{i_\alpha} \quad (5.118.V)$$

por lo cual,

$$\cos \rho \cdot d_r = \text{sen } \rho \cdot \frac{i_\beta}{i_\alpha} - \text{sen } \rho \quad (6.118.V)$$

en la que, operando convenientemente,

$$\cos \rho \cdot d_r = \operatorname{sen} \rho \cdot \left(\frac{i_\beta}{i_\alpha} - 1 \right) \quad (1.119.V)$$

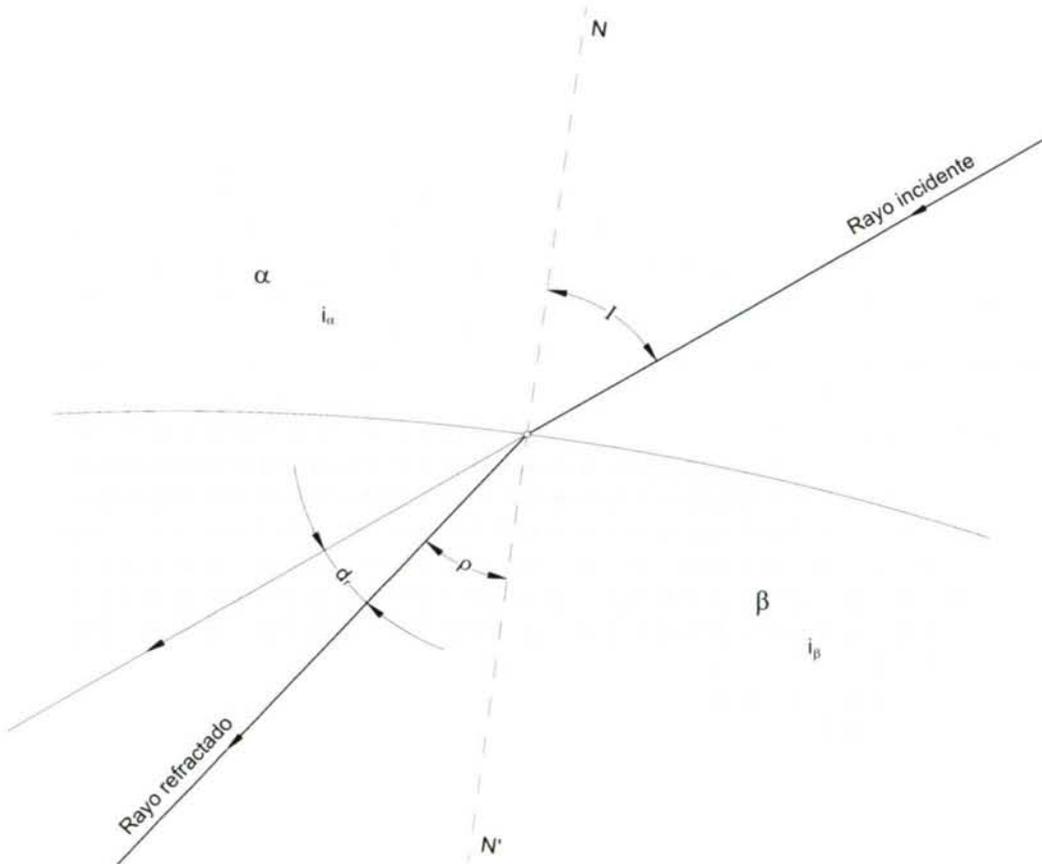


Fig - 1.119.V - Estudio de la refracción astronómica

y, despejando el elemento d_r tendremos,

$$d_r = \operatorname{tg} \rho \cdot \frac{i_\beta - i_\alpha}{i_\alpha} \quad (2.119.V)$$

que, generalizada a dos capas contiguas cualesquiera, sin error apreciable finalmente se tendría,

$$d_r = \operatorname{tg} l \cdot \frac{d_i}{i} \quad (3.119.V)$$

Si hacemos la suma de todas las refracciones parciales obtendremos la refracción total, es decir:

$$\sum d_r = r$$

por lo tanto,

$$r = \sum \frac{d_i}{i} \cdot \text{tg } l \tag{1.120.V}$$

Dos son las causas que hacen variar a l : la curvatura de la superficie de separación entre dos capas consecutivas, —curvatura de la Tierra—, que tiende a disminuirla, (constátese tal hecho por el análisis de la figura 1.117.V; en la vertical del punto V'' se verifica la disminución de l por la causa descrita), y la refracción astronómica, que tiende a aumentarla. Podremos considerar en una primera aproximación que, prescindiendo de la curvatura de la primera capa que encuentra el rayo de luz, y asumiendo la compensación de los errores cometidos por refracción y curvatura, la distancia cenital es igual al ángulo de incidencia. Tal suposición implica que, para ángulos de incidencia no muy elevados, los ángulos r y ε de la figura 1.117.V son iguales y de signo contrario, quedándonos entonces, y en función de la altura del astro,

$$r = \text{ctg } a \cdot \sum \frac{d_i}{i} \tag{2.120.V}$$

suma que debemos considerar entre los límites $i = 1$, valor del índice de refracción en el vacío e, $i = z_0$, valor de este índice de refracción en la capa correspondiente a la posición del observador:

$$\left[\sum \frac{d_i}{i} \right]_{i=z_0}^{i=1} = \int_1^{z_0} \frac{d_i}{i} \tag{3.120.V}$$

lo que nos da,

$$r = \text{ctg } a \cdot L z_0 \tag{4.120.V}$$

mas al ser z_0 una cantidad poco diferente de la unidad, su logaritmo neperiano puede expresarse,

$$L z_0 = L [1 + (z_0 - 1)] \quad (5.120.V)$$

por lo tanto,

$$L z_0 = (z_0 - 1) - \frac{1}{2}(z_0 - 1)^2 \quad (1.121.V)$$

que al sustituirla en la (4.120.V), y despreciando la potencia, nos quedará,

$$r = \text{ctg } a (z_0 - 1) \quad (2.121.V)$$

Admitiendo que el índice de refracción varía con la densidad del aire podemos poner:

$$\frac{Z_0 - 1}{i_0 - 1} = \frac{\delta_z}{\delta_0} \quad (3.121.V)$$

expresión en la que δ_z es la densidad de la atmósfera correspondiente a la posición del observador, δ_0 es la densidad de la misma a cero grados de temperatura y a la presión normal de 1.013 mb, o 762 mm, e i_0 el índice de refracción en tales condiciones. Si designamos por P_z y P_0 las presiones atmosféricas respectivas y por V_z y V_0 los volúmenes del prisma de aire sobre la unidad de superficie en las citadas capas, obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} P_z &= V_z \cdot \delta_z \\ P_0 &= V_0 \cdot \delta_0 \end{aligned} \right\} \quad (4.121.V)$$

de la que, dividiendo miembro a miembro:

$$\frac{P_z}{P_0} = \frac{V_z \cdot \delta_z}{V_0 \cdot \delta_0} \quad (5.121.V)$$

Los volúmenes varían con la temperatura del aire, luego:

$$V_z = V_0 (1 + \alpha \cdot t) \quad (6.121.V)$$

en la que α es el coeficiente de dilatación del aire, entonces,

$$\frac{V_z}{V_0} = 1 + \alpha \cdot t \quad (7.121.V)$$

por lo tanto,

$$\frac{\delta_z}{\delta_0} = \frac{P_z}{P_0} \cdot \frac{1}{1 + \alpha \cdot t} \quad (1.122.V)$$

valor que llevado a la igualdad (3.121.V):

$$\frac{Z_0 - 1}{i_0 - 1} = \frac{P_z}{P_0} \cdot \frac{1}{1 + \alpha \cdot t} \quad (2.122.V)$$

de donde,

$$Z_0 - 1 = (i_0 - 1) \cdot \frac{P_z}{P_0} \cdot \frac{1}{1 + \alpha \cdot t} \quad (3.122.V)$$

igualdad que sustituido en la (2.121.V),

$$r = \text{ctg } a \cdot (i_0 - 1) \cdot \frac{P_z}{P_0} \cdot \frac{1}{1 + \alpha \cdot t} \quad (4.122.V)$$

y para que la refracción venga expresada en segundos de arco,

$$r'' = \text{ctg } a \cdot \frac{i_0 - 1}{\text{sen } 1''} \cdot \frac{P_z}{P_0} \cdot \frac{1}{1 + \alpha \cdot t} \quad (5.122.V)$$

Aceptando los valores obtenidos por Briot y Arago⁴ [MEDINA78]:

$$i_0 = 1.000294$$

$$\alpha = 0.004$$

tendremos que:

$$r'' = \text{ctg } a \cdot \frac{0,000294}{4848 \times 10^{-9}} \cdot \frac{P_z}{1.0013} \cdot \frac{1}{1 + 0,004 \cdot t} \quad (6.122.V)$$

y, finalmente:

4 Carlos Augusto Alberto Briot.- Matemático francés (1817 - 1882), autor de diferentes obras de Álgebra, Trigonometría, Funciones doblemente periódicas y elípticas, Teoría de la luz y un largo etc.
Domingo Francisco Arago.- Físico y astrónomo francés (1785 - 1853), se ocupó de la Astronomía científica y popular, Mecánica celeste, Meteorología, Física cósmica, Óptica etc. Descubrimiento de la polarización rotatoria magnética. Miembro del Bureau des Longitudes.

$$r'' = 60,64'' \operatorname{ctg} a \cdot \frac{P_z}{1,0013} \cdot \frac{1}{1 + 0,004 \cdot t} \quad (7.122.V)$$

El cociente $\frac{P_z}{1,0013}$, o su equivalente, $\frac{P_z}{762}$, es el llamado *factor barométrico*,

también tabulado, lo designaremos por P.

Finalmente, y como los anteriores, aparece tabulado el cociente $\frac{1}{1 + 0,004 \cdot t}$,

conocido por *factor termométrico*; se designa por T.

En consideración a estas anotaciones la expresión final para la corrección por refracción astronómica será:

$$r_a = r_m \cdot P \cdot T$$

la notación r_a corresponde a la refracción astronómica, r_m que corresponde al producto $60,64'' \cdot \operatorname{ctg} a$ es la llamada refracción astronómica media. En la práctica de las observaciones en la mar se contempla, sin error sensible en la mayoría de los casos, la unidad como valor de los factores barométrico y termométrico, por lo que si expresamos la refracción media en minutos:

$$r_m = \frac{60,64'' \operatorname{ctg} a}{60''}$$

y, evidentemente y en base a lo hasta aquí razonado, puede considerarse el valor de la refracción media como el de la cotangente de la altura. Teniendo siempre presente que la refracción tiende a aumentar la altura de los astros, esta corrección es siempre sustractiva. La experiencia aconseja no observar astros con alturas menores de 20 grados y, cuando las circunstancias exijan observaciones de alturas por debajo de este limite, se procederá lo más rigurosamente posible en la determinación de la refracción.

9. ORDEN DE APLICACIÓN DE LAS CORRECCIONES . — Aunque el resultado final en la obtención de la altura verdadera de los astros para la precisión requerida en la Navegación Astronómica, en general, no dependen del orden en el que se apliquen las correcciones estudiadas, desde el punto de vista teórico, es aconsejable seguir cierto orden. Las notaciones usadas serán:

- $a_i \star$ Altura instrumental de una estrella
- $a_i \bullet$ Altura instrumental de un planeta

Notación esta última que debiera particularizarse para el planeta observado, así:

- $a_i \text{♀}$ Altura instrumental de Venus
- $a_i \text{♂}$ Altura instrumental de Marte
- $a_i \text{♃}$ Altura instrumental de Júpiter
- $a_i \text{♄}$ Altura instrumental de Saturno

Para Sol y Luna es necesario una notación específica para cada limbo:

- $a_i \text{☉}$ Altura instrumental del limbo inferior del Sol
- $a_i \text{☾}$ Altura instrumental del limbo inferior de la Luna
- $a_i \text{☉}$ Altura instrumental del limbo superior del Sol
- $a_i \text{☾}$ Altura instrumental del limbo superior de la Luna
- e_i Error de índice del sextante
- ε_i Error instrumental del sextante

Usualmente, y dada la pequeñez de los errores instrumentales en los sextantes modernos, estas dos últimas correcciones se engloban en una sola con la notación del error de índice.

- D_a Depresión del horizonte aparente
- D_c Depresión de la línea de costa
- $\sigma_{\text{☾}}$ Semidiámetro lunar en altura
- $\sigma_{\text{☉}}$ Semidiámetro solar
- $\pi_{\text{☾}}$ Paralaje en altura de la Luna
- r_a Refracción astronómica

10. CORRECCIONES A LA ALTURA DE LA LUNA . — Son las mismas para el limbo inferior que para el limbo superior con la única salvedad del semidiámetro, positivo en el primer caso (limbo inferior) y negativo en el segundo (limbo superior). Se procederá en el orden que sigue, sin que, insistimos, el resultado final fuera sensiblemente diferente de no seguir dicho orden:

CORRECCIONES A LAS ALTURAS DE ☾:

Denominación de altura y corrección	Símbolo	Signo de la corrección
Altura instrumental del limbo inferior/superior de la Luna	$a_{\underline{\circ}}/a_{\overline{\circ}}$	
Error de índice	e_i	Positivo o negativo (\pm)
Altura observada del limbo inferior/superior de la Luna	$a_{o\underline{\circ}}/a_{o\overline{\circ}}$	
Depresión del horizonte aparente/línea de costa	D_a/D_c	Ambas negativas (-)
Altura aparente refractada del limbo inferior/superior de la Luna	$a_{pr\underline{\circ}}/a_{pr\overline{\circ}}$	
Refracción astronómica	r_a	Negativa (-)
Altura aparente del limbo superior/inferior de la Luna	$a_{p\underline{\circ}}/a_{p\overline{\circ}}$	
Semidiámetro lunar, limbo inferior/superior	σ_{\circ}	Positivo/negativo (\pm)
Altura aparente central de la Luna	$a_{p\underline{\circ}}$	
Paralaje en altura de la Luna	π_{\circ}	Positiva (+)
Altura verdadera central de la Luna	$a_{v\underline{\circ}}$	

11. CORRECCIONES A LAS ALTURAS DEL SOL . — Con idénticas consideraciones que para el caso de la Luna en cuanto al semidiámetro, se procederá tal como se indica:

Denominación de altura y corrección	Símbolo	Signo de la corrección
Altura instrumental del limbo inferior/superior de l Sol	$a_{\underline{\odot}}/a_{\overline{\odot}}$	
Error de índice	e_i	Positivo o negativo (\pm)
Altura observada del limbo inferior/superior del Sol	$a_{o\underline{\odot}}/a_{o\overline{\odot}}$	
Depresión del horizonte aparente/línea de costa	D_a/D_c	Ambas negativas (-)
Altura refractada del limbo inferior/superior del Sol	$a_{r\underline{\odot}}/a_{r\overline{\odot}}$	
Refracción astronómica	r_a	Negativo (-)
Altura verdadera del limbo superior/inferior del Sol	$a_{v\underline{\odot}}/a_{v\overline{\odot}}$	
Semidiámetro solar, limbo inferior/superior	σ_{\odot}	Positivo/negativo (\pm)
Altura verdadera central del Sol	$a_{v\underline{\odot}}$	

12. CORRECCIONES A LA ALTURA DE UN PLANETA . — El orden de las mismas es el que sigue:

Denominación de altura y corrección	Símbolo	Signo de la corrección
Altura instrumental del planeta	$a_i \bullet$	
Error de índice	e_i	Positivo o negativo (\pm)
Altura observada del planeta	$a_o \bullet$	
Depresión del horizonte aparente/línea de costa	D_a/D_c	Ambas negativas (-)
Altura aparente refractada del planeta	$a_{pr} \bullet$	
Refracción astronómica	r_a	Negativo (-)
Altura aparente del planeta	$a_p \bullet$	
Paralaje (Venus ♀ y Marte ♂)	π	Positivo (+)
Altura verdadera del planeta	$a_v \bullet$	

13. CORRECCIONES A LA ALTURA DE UNA ESTRELLA . — La serie más simple de correcciones corresponde a la altura de las estrellas:

Denominación de altura y corrección	Símbolo	Signo de la corrección
Altura instrumental de la estrella	$a_i \star$	
Error de índice	e_i	Positivo o negativo (\pm)
Altura observada de la estrella	$a_o \star$	
Depresión del horizonte aparente/línea de costa	D_a/D_c	Ambas negativas (-)
Altura refractada de la estrella	$a_r \star$	
Refracción astronómica	r_a	Negativo (-)
Altura verdadera de la estrella	$a_v \star$	

Como comentario final señalar la conveniencia de recurrir a las colecciones de tablas náuticas y almanaques náuticos, para simplificar el procedimiento de corrección de las alturas, dotándolo de una más alta fiabilidad al reducir al mínimo el número de operaciones a realizar. Las tablas manejan un semidiámetro solar de 16', variando este de 15,7' a 16,3'; en la corrección por fecha se engloban el valor de la paralaje solar, (máximo = 8,8") y el exceso o defecto del semidiámetro.

CAPÍTULO VI

OBSERVACIÓN CON HORIZONTE ARTIFICIAL

1. NECESIDAD DEL HORIZONTE ARTIFICIAL. — El dátum que el marino utiliza para la medida de la altura de los astros es la línea del horizonte visible u horizonte de la mar. En muchas ocasiones en el instante de la observación si se observa el Sol, este luce espléndido en el cielo, o en el crepúsculo, cuando el firmamento presenta un aspecto ideal para la observación, la línea del horizonte, y debido a muy diferentes causas entre las que cabe citar: calima, niebla baja, discontinuidades provocadas por las sombras de nubes ubicadas a menor altura que el Sol y en el mismo vertical o línea de costa mal definida y a distancia incierta, no ofrece la adecuada fiabilidad; una observación en tales condiciones carece de la necesaria garantía, no siendo excepcionales los casos en los que el navegante, en las citadas circunstancias, puede pasar más tiempo del que cabría entender cómo razonable sin situación observada. Por otro lado, la dependencia de la línea del horizonte constriñe el periodo de observación al intervalo que va del crepúsculo matutino al vespertino y toda observación nocturna (con horizonte lunar) debe valorarse con la prudencia que se supone pareja a la condición de buen navegante. Poco después de la invención del sextante, la idea de una navegación astronómica independiente de la visión de la línea del horizonte hizo pensar en la construcción de sextantes con horizonte artificial y en 1733, precisamente Hadley¹ [BOWDITCH-1984], añadió un nivel de alcohol al cuadrante y con él fue capaz de medir alturas sin referencia al horizonte visible. Algunos años más tarde se desarrolló el primer sextante con horizonte de burbuja.

2. DISTINTOS TIPOS DE HORIZONTE ARTIFICIAL. — Muchos fueron los intentos por dotar al sextante marino de un eficaz horizonte artificial; en los distintos tratados de navegación se describen variados dispositivos encaminados a tal fin y en

¹ **Hadeley, John.** - Matemático y mecánico inglés, * en 1682, † en 1744. Inventó en 1730 el octante de reflexión, casi simultáneamente con el americano Thomas Godfrey, el cual se generalizó pronto, hasta ser bajo la forma de sextante el instrumento náutico por excelencia. La memoria de su invención, presentada a la Royal Society, de Londres, lleva la fecha de 31 de mayo de 1731.

las páginas siguientes se describen algunos de los más utilizados.

3. HORIZONTE ARTIFICIAL DE MERCURIO. — La superficie libre de cualquier líquido con la adecuada capacidad de reflexión sería susceptible de ser utilizada como

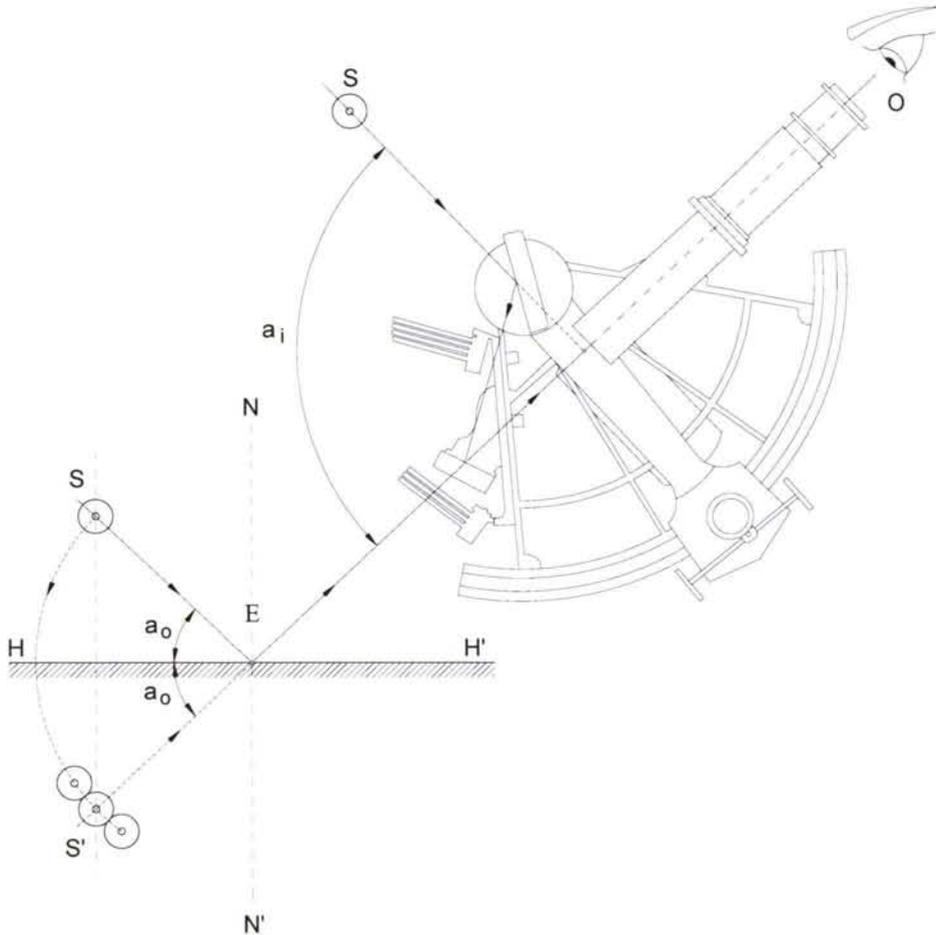


Fig - 1.128.VI - Observación de una altura de Sol con horizonte artificial

horizonte artificial, la figura 1.128.VI ilustra el fundamento de tal dispositivo pudiendo comprobarse el funcionamiento del mismo. En particular, el mercurio, elemento con gran capacidad de reflexión, constituye a tal fin el medio ideal y más clásico de este tipo de horizontes, figura 1.129.VI, está constituido por los siguientes componentes:

- a) Botella de madera de boj conteniendo el mercurio y cuya tapa roscada interior y exteriormente forma el embudo.

- b) Cubeta compuesta de dos piezas la exterior de las cuales es de hierro, la interior, destinada a recibir el mercurio, es de madera y posee un orificio para la entrada del mismo y al cual se rosca el embudo, otro en el fondo por el cual mana el mercurio extendiéndose para formar la superficie de

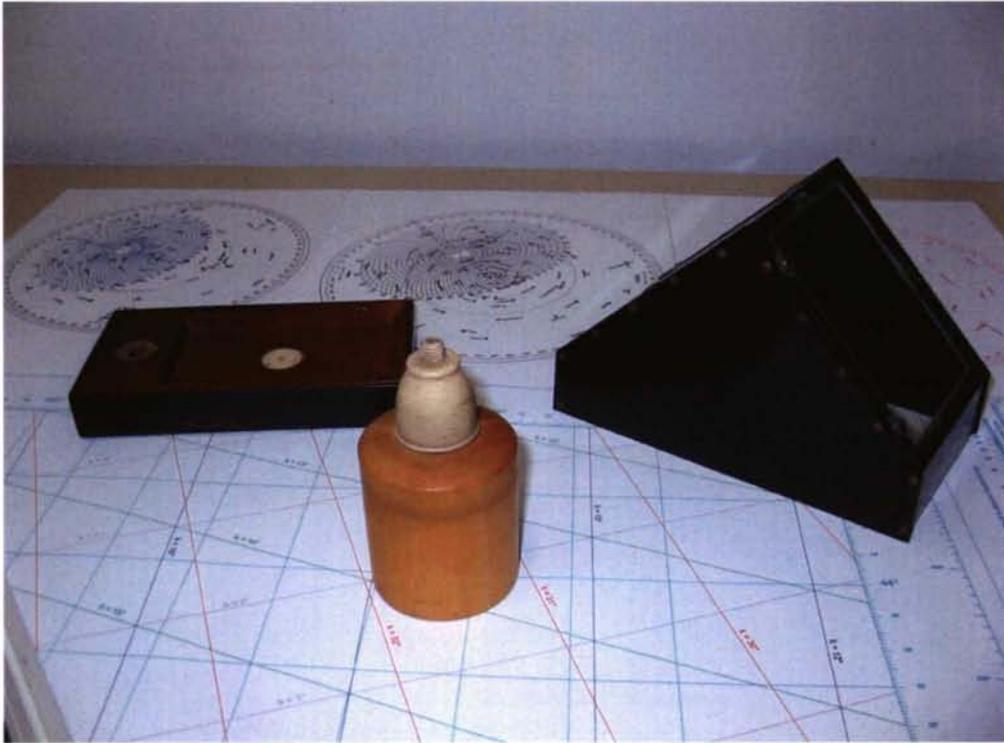


Fig - 1.129.VI - Horizonte de mercurio

- reflexión.
- c) Cubichete destinado a cubrir la cubeta con el mercurio y cuya forma es la que se contempla en la figura, destinada a preservar la superficie libre del polvo e impurezas del ambiente que, de otro modo, empañarían dicha superficie, así como de las corrientes de aire que la haría vibrar dificultando la observación. Las piezas de vidrio que la conforman son de gran calidad en orden a evitar reflexiones erróneas.

Para la observación se procede de la siguiente manera: Limpia de polvo la cubeta, dispóngase en el lugar seleccionado para esta operación enroscando la tapa de la botella en el adecuado orificio. Tapando con el dedo la salida del mercurio, voltéese la botella manteniéndola en esta posición para que las impurezas que pudiera

contener asciendan a la parte superior; viértase por el embudo la cantidad precisa de mercurio hasta conseguir la deseada superficie libre, figura 1.130.VI, y cubrir con el cubichete, figura 1.131.VI, quedando el horizonte listo para la observación.

Cuando la observación se realiza en tierra firme, operación que, efectuada en puerto, iba destinada al cálculo del estado del cronómetro, debía realizarse después de tomadas precauciones tales como la de disponer la cubeta sobre un material capaz de



Fig -1.130.VI - Mercurio en la cubeta

absorber las vibraciones que a la misma transmitía el suelo (podía consistir en una bala de algodón o similar) y, en el crepúsculo, la iluminación por medio de un fanal o linterna se haría indirectamente para no provocar deslumbramientos en el observador, que era el más experimentado de a bordo. Si son Sol o luna los astros observados, no se llevan a coincidir sus imágenes dada la dificultad de tal operación, procediéndose al tangenteo de sus limbos, y si el astro está a levante y se observa su limbo inferior, ambas imágenes tienden a separarse, acercándose si el astro se encuentra a poniente del meridiano; sucede lo contrario cuando se ponen en contacto los limbos superiores. [FLORA-1977].

Entre las ventajas de este tipo de horizontes destaca la de que siendo la altura instrumental el doble de la observada, figura 1.28.VI, y sabiendo que:

$$a_o \star = a_i \star + e_i + \varepsilon_i$$

recordando que $a_o \star$ es la altura observada, $a_i \star$ es la altura instrumental, e_i el error de índice y ε_i el error instrumental, será, según queda dicho en las páginas precedentes:



Fig - 1.131.VI - Horizonte listo para la observación

$$a_o \star = \frac{a_i \star + e_i + \varepsilon_i}{2}$$

por lo que un eventual error en la altura instrumental, error de índice o error instrumental, queda dividido por dos con este tipo de observación. Las correcciones debidas a limbos, paralaje y refracción astronómica son las mismas que en las observaciones sobre la línea del horizonte. Si se requiere mayor precisión se tomarán presión y temperatura para corregir la refracción astronómica media por los factores barométrico y termométrico (pág. 123, capítulo V). En plataforma fija las observaciones sobre horizonte de mercurio pueden alcanzar gran precisión pero su uso a bordo fue y es prácticamente nulo por estar sometido a las aceleraciones ocasionadas por el movimiento del buque entre las olas [NICHOLL'S-1987].

4. HORIZONTE DE BURBUJA. — En este tipo de horizonte cuya idea original, como ya hemos dicho se debe al inventor del sextante, Hadley, una superficie C, figura 1.132.VI, controla la posición de una burbuja estando el centro óptico de la lente L, lente de la burbuja, en un punto del radio de curvatura de dicha superficie C, (en la figura se

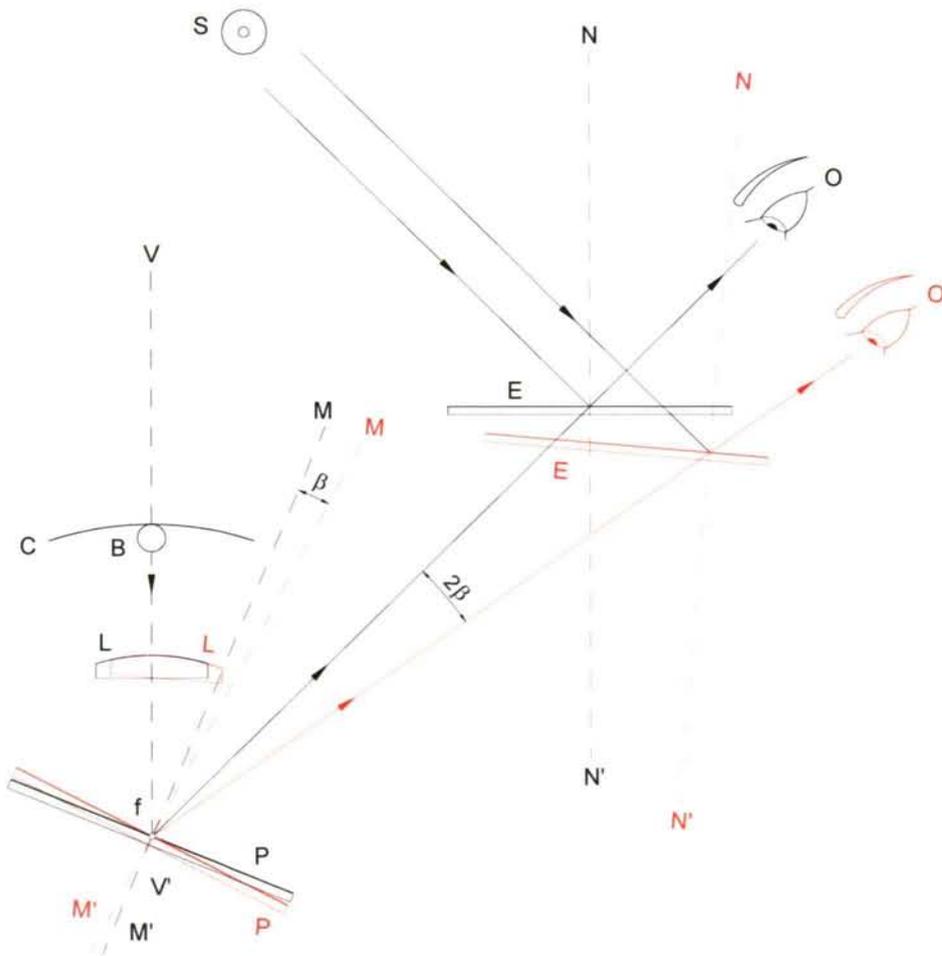


Fig - 1.132.VI - Horizonte de burbuja

ha supuesto tal centro en el punto f). El espejo o prisma P refleja la imagen de la burbuja con un ángulo de 45° respecto de la vertical VV' , alcanzado el espejo E que permite el paso del rayo de luz hasta el ojo del observador O; el rayo de luz que proviene del punto lejano (en nuestro caso el Sol S) se refleja en el espejo E y alcanza el ojo del observador produciéndose la coincidencia de ambas imágenes: el dátum es ahora la línea vertical VV' . Tal como se comprueba en la figura [COTTER-1983], una

ligera inclinación del dispositivo no impide la coincidencia buscada pero la magnitud medida se altera en el valor de la inclinación [HUGHES-1957]. Para atenuar este tipo de error fue ideado el horizonte tipo BOOTH HORIZON, cuyos componentes se muestran en la figura 1.133.VI: el observador dispone ahora de dos horizontes, el de burbuja y el de la mar que aún siendo poco claro permite el control de las pequeñas

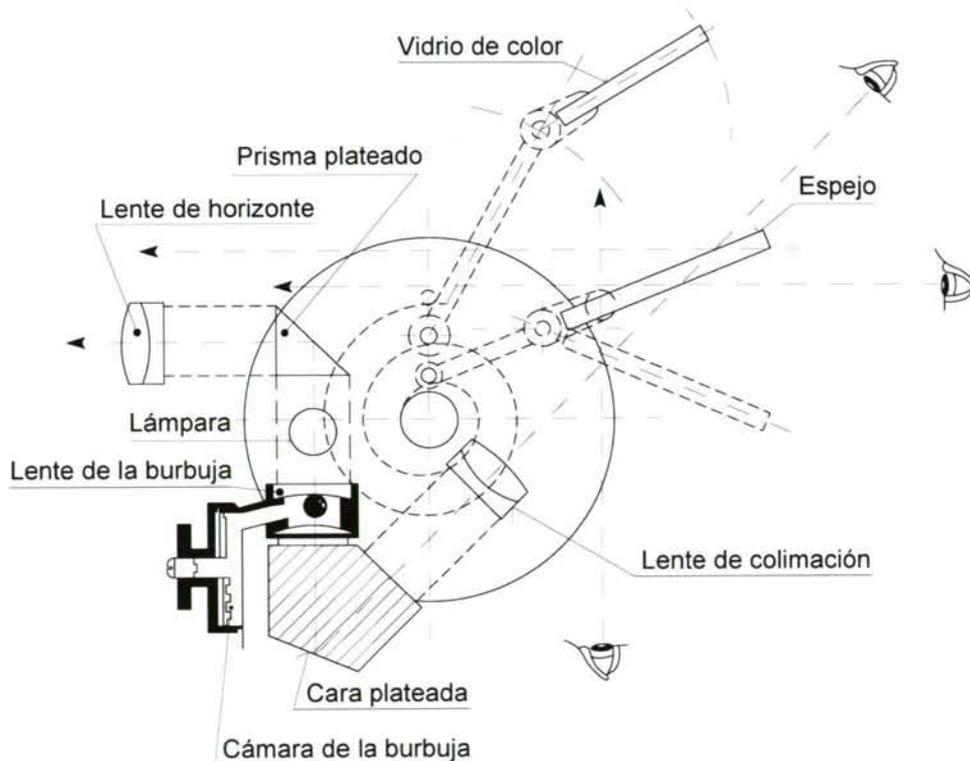


Fig - 1.133.VI - Horizonte tipo BOOTH HORIZON

inclinaciones causantes del error. Con tiempo claro puede prescindirse del horizonte de burbuja por ser de menor precisión que el marino; en los casos en que no esté bien definido se dispone del de burbuja o de ambos simultáneamente. De este tipo es el sextante de burbuja "Gothic", construido por la casa Hughes. El control sobre el tamaño de la burbuja se logra por medio de un tornillo que varía la presión en la cámara de la misma; en las observaciones de Sol y Luna es recomendable un tamaño de burbuja ligeramente superior al de los discos de ambos astros, para la observación de estrellas y planetas el tamaño de la burbuja debe ser menor; dispone de una lámpara de iluminación de intensidad variable para las observaciones nocturnas. El peso que adquiere el sextante armado con este mecanismo ocasiona cierta incomodidad en la

observación y su eficaz manejo requiere un constante adiestramiento; las figuras 1.134.VI y 1.135.VI, muestran un moderno sextante de CASENS & PLATH armado con horizonte artificial de burbuja y en la última de las cuales podemos apreciar la disposición del cronógrafo que permite tomar la hora correspondiente a cada altura a un solo observador. Las correcciones a las alturas observadas con burbuja, es la

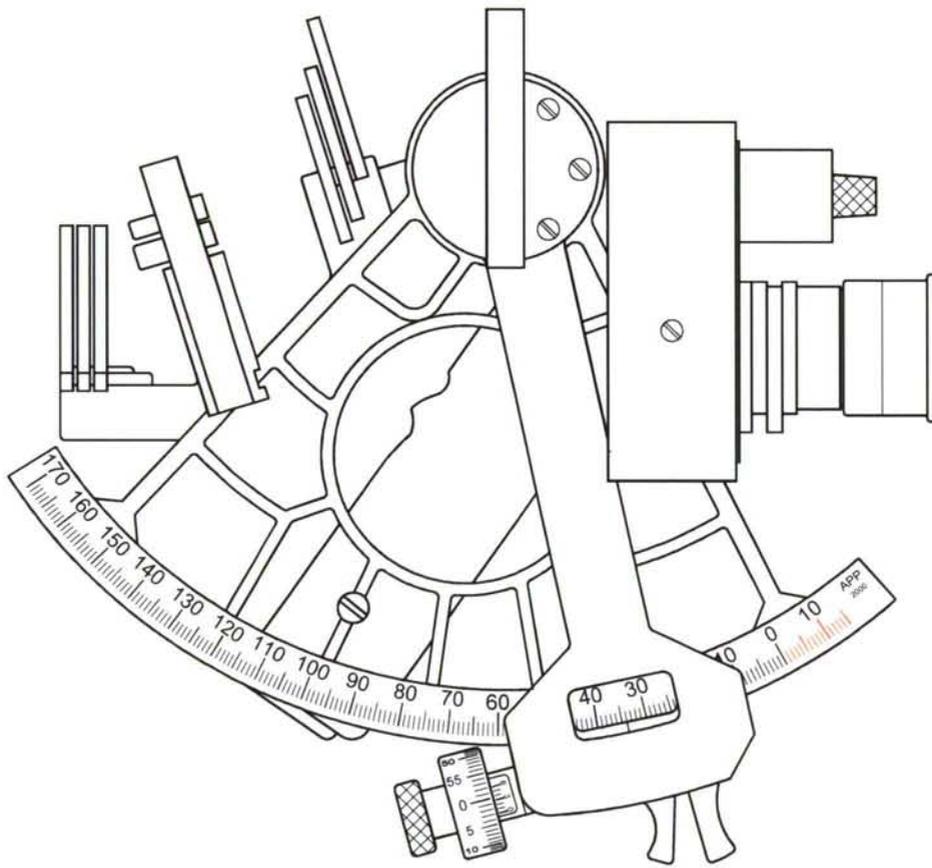


Fig - 1.134.VI - Horizonte DE BURBUJA

corrección de índice y refracción astronómica; a las observaciones de Luna se le aplica, además, la corrección por paralaje. Debido a la diversidad de modelos existentes, para la corrección de índice se seguirán las instrucciones que la casa constructora facilita. Puede, no obstante, en una estación de coordenadas conocidas calcular la altura preferentemente del Sol y compararla con la observada a la misma hora, una vez aplicadas todas las correcciones excepto la de índice: la diferencia obtenida, y para cualquier modelo, será esta última corrección [MARTÍNEZ-1978].

Otros tipos de horizonte artificial son:

Horizonte artificial por medio de giróscopo, inventado por el almirante francés Fleureais en el año 1892.

Basado en similar principio es el debido a Bonneau-Darrien del año 1918.

Los de sistema pendular, cuya característica es la de disponer delante del

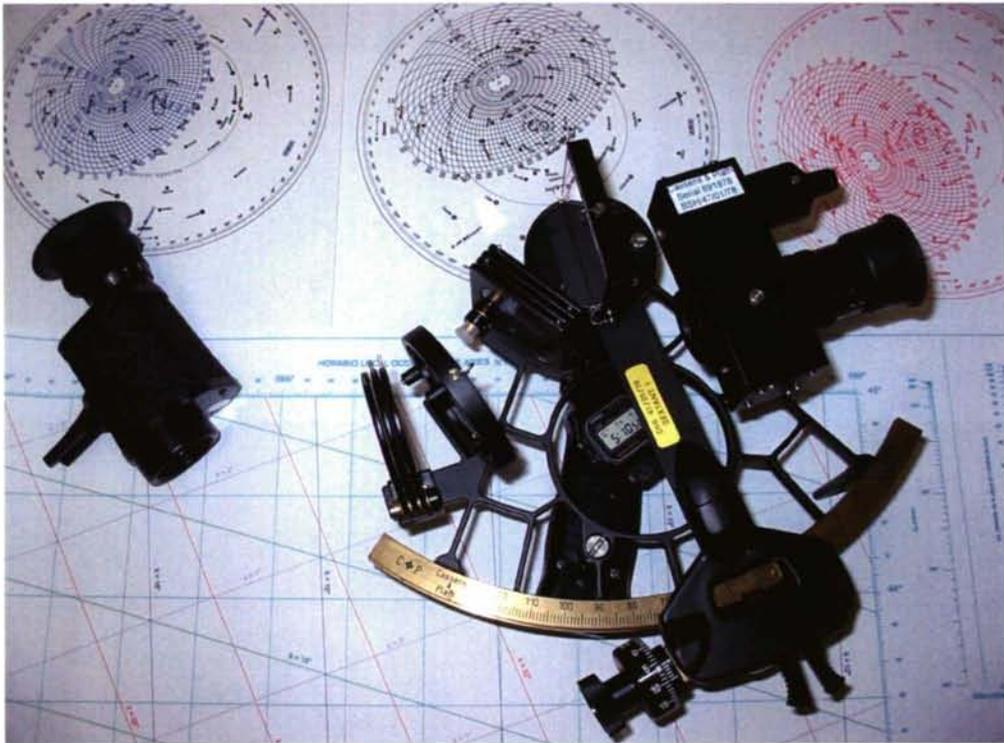


Fig - 1.135.VI - Moderno sextante de Casens & Plath

espejo chico de un sistema pendular que materializa una línea horizontal sobre la que se lleva la imagen del astro observado. Los Rinkel-Plath y Schmidt-Haensch pertenecen a este tipo.

Es de esperar que la moderna tecnología láser que en combinación con la fibra óptica está revolucionando el mundo de los compases giroscópicos por medio del efecto Sagnac, que permite la medición de rotaciones absolutas de pequeña magnitud, pueda facilitar en un futuro próximo un horizonte artificial de muy alta fiabilidad, completamente independiente de las aceleraciones propias del buque y que son las causantes del escaso éxito de los horizontes artificiales aquí estudiados.

CAPÍTULO VII

LA MEDIDA DEL AZIMUT

1. OBJETO DE LA MEDIDA DEL AZIMUT. — Esta medida se encamina en la mar a dos objetivos:

1º) Determinación de la corrección total de la aguja, ya sea esta la magnética, en cuyo caso recordemos que los campos magnéticos de a bordo, permanente, inducido y subpermanente, tienden a separar la aguja del plano del meridiano magnético ocasionando el desvío (Δ) de la aguja, variable esta de gran importancia —orientación de la línea proa-popa del buque, es decir el conocimiento del rumbo de la nave— para una navegación segura, o, en el caso de la aguja giroscópica sobre la cual, actuando fuerzas de naturaleza bien distinta, se originan desvíos que, en aras de idéntico objetivo, deben ser controlados con la adecuada frecuencia.

2º) Reconocimiento de los astros; cuando en los crepúsculos se observa algún astro que por diversos motivos no puede ser reconocido a simple vista, debe observarse su azimut¹ inmediatamente antes o después de tomar su altura; este azimut de la aguja debidamente corregido, es elemento indispensable en el posterior proceso de reconocimiento, ya sea por medios mecánicos o mediante cálculo.

2. INSTRUMENTOS DE MEDIDA. — El proceso de medida u observación, que en la mar recibe el nombre de marcación, se realiza con los dispositivos de marcar el más simple de los cuales, la pínula, está constituido por una varilla vertical debidamente asentada sobre el plano de la rosa, tapa del mortero, figura 1.137.VII. Su manejo es de gran sencillez y los resultados de las observaciones con tal dispositivo, sobre todo observado puntos próximos al horizonte, alcanzan precisión más que suficiente para el

1 La corrección total de la aguja (CT), es la suma de la declinación magnética (d_m) de la zona por la que navega el buque más el desvío de la aguja (Δ) correspondiente al rumbo de la aguja al que se navega:

$$CT = d_m + \Delta$$

Puesto que la declinación magnética es una variable conocida y sabiendo que:

$$CT = Z_v \star - Z_a \star$$

en la que $Z_v \star$ y $Z_a \star$ son, respectivamente, los acimutes verdadero y de la aguja (observado), se tiene,

$$Z_v \star = Z_a \star + CT$$

Por lo que es preciso para el reconocimiento seguro el disponer de un valor de CT cuyo error no supere $\pm 1^\circ$.

fin al que van encaminadas. Su fundamento es el siguiente: El ojo del observador idealizado en el punto O y la pínula P determinan el plano vertical V que pasa por el punto observado, el Sol en el caso de la figura; la traza t de este plano V con el plano horizontal que pasa por el centro de la rosa, define en esta la lectura L, acimut de la aguja medido. Otros instrumentos empleados a bordo son taxímetros, círculos de marcar, alidades acimutales etc, de alguno de los cuales se da una somera descripción.

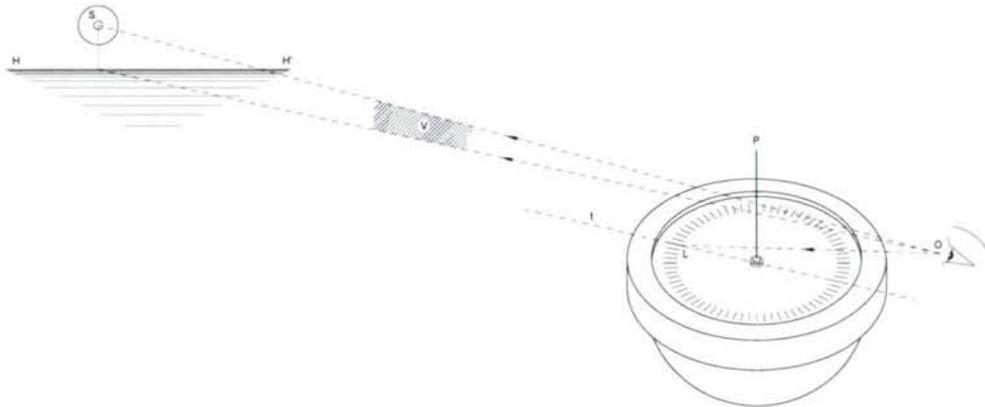


Fig - 1.137.VII - Observación con pínula

3. LA ALIDADA AZIMUTAL. — Existen muy variados modelos fabricados en diferentes países pero las características generales, comunes a todos ellos, son las que se describen en la figura 1.138.VII: Una armadura de base AB que, mediante las manillas M y M', gira deslizándose con suavidad sobre la tapa del mortero de forma tal que su eje vertical de rotación es perpendicular en todo momento al plano horizontal de la aguja pasando por el centro de esta; la horizontalidad del dispositivo se controla mediante dos niveles de burbuja ubicados según ejes perpendiculares. Dos piezas de forma rectangular denominadas pínulas, una de las cuales, la pínula ocular PV, va provista de una rendija R a través de la cual se dirige la visual al objeto marcado pasando esta visual por la pínula objetiva PO, en forma de bastidor, que dispone de un hilo vertical HV que con el ojo del observador O materializa el plano de colimación. El prisma E actúa de lupa permitiendo la cómoda lectura L de la demora o acimut en el instante en el que el plano de colimación pasa por el punto observado, — en el caso de la figura, el centro del Sol —. Tanto las pínulas como el prisma pueden girar sobre un eje horizontal perpendicular al citado plano de colimación permaneciendo, debido al rozamiento, inclinadas el ángulo seleccionado; la armadura de base, circular en la

figura, puede adoptar formas diferentes a la mostrada.

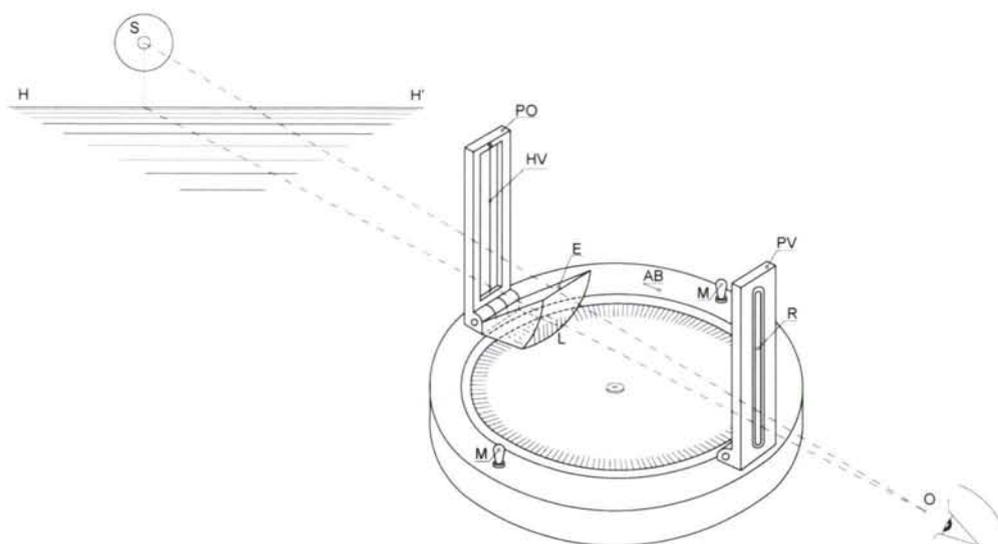


Fig - 1.138.VII - Fundamento de la alidada acimutal

4. LA ALIDADA ACIMUTAL DEL I.H. DE ITALIA. — Por constituir, dentro de las de su clase, un modelo casi universal, se ha seleccionado esta alidada, figura 1.139.VII, cuya originalidad radica en el espejo una de cuyas caras está obscurecida y se destina a las observaciones del Sol, la otra cara está destinada a la observación de puntos de tierra y los otros cuerpos celestes: Luna, estrellas y planetas; gira alrededor de un eje horizontal, — véase el detalle de la figura — permitiendo su adecuada orientación cuando el cuerpo observado tiene una altura significativa facilitando la lectura precisa del acimut. La pínula ocular va equipada con dos vidrios de color, solidariamente unidos a un cursor que puede desplazarse hacia arriba o abajo, que, al igual que los del sextante, actúan como filtros de la luz y evitan deslumbramientos y posibles daños en la vista del observador; un prisma con la cara que presenta al observador de forma lenticular ubicado en las proximidades de la pínula objetiva, y con un poder de aumento de la graduación de aproximadamente 2:1, facilita la lectura. La imagen reflejada en el espejo es la que es preciso colimar [CAPASSO-1981].

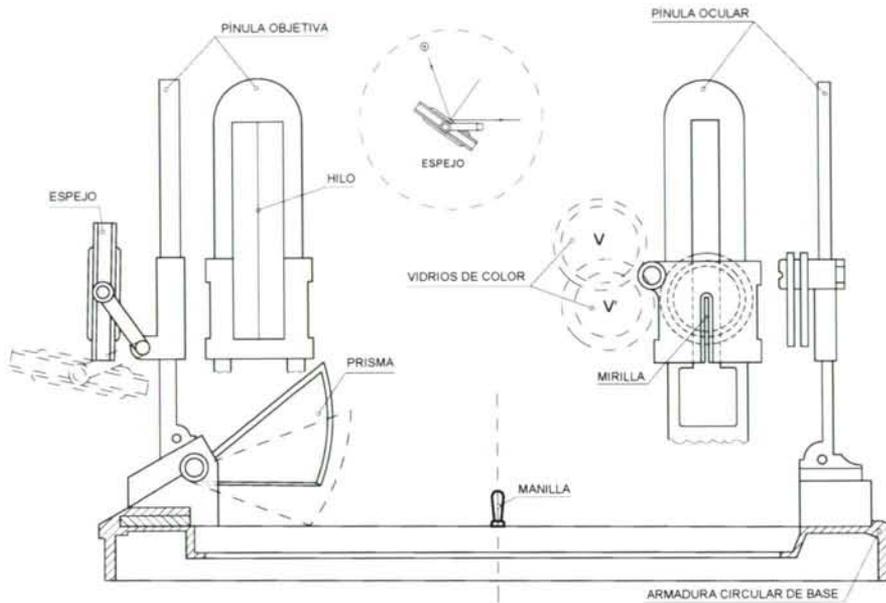


Fig - 1.139.VII - Alidada acimutal del H.I. de Italia

5. ALIDADA ACIMUTAL THOMSON. — Ideada por Thomson para su aguja y con el objetivo de eliminar los inconvenientes que para la observación presentan las masas compensadoras del desvío cuadrantal (esferas), esta alidada — *azimuthal mirror*—, apoya sus tres pies sobre la cubierta del mortero y rota alrededor de un perno central constituido por la base de la varilla (pínula) M, figura 1.140.VII, y que penetra en el adecuado hueco practicado en el centro de la tapa; una de las extremidades de la base A, porta un nivel N, la otra, el índice I. Sobre el índice la alidada dispone de un tubo T dispuesto oblicuamente, en el interior del que va una lente de aumento a través de la cual puede verse nítidamente la graduación de la rosa. En la parte superior del tubo se encuentra el prisma reflector P susceptible de girar en torno a un eje horizontal normal al plano que determinan la pínula y el eje óptico de la lente. Completan el instrumento dos vidrios de color sostenidos por el dispositivo V, giratorios alrededor de su eje horizontal y destinados a las observaciones de Sol.

Para la obtención del acimut es preciso orientar el plano definido por el índice y la pínula hasta que coincida sensiblemente con el vertical del objeto observado. En el caso de la observación del Sol, la sombra de la pínula debe coincidir con el eje de

simetría de la alidada. Se puede proceder de dos formas diferentes:

- 1) Observando el objeto directamente sobre el canto superior del prisma y

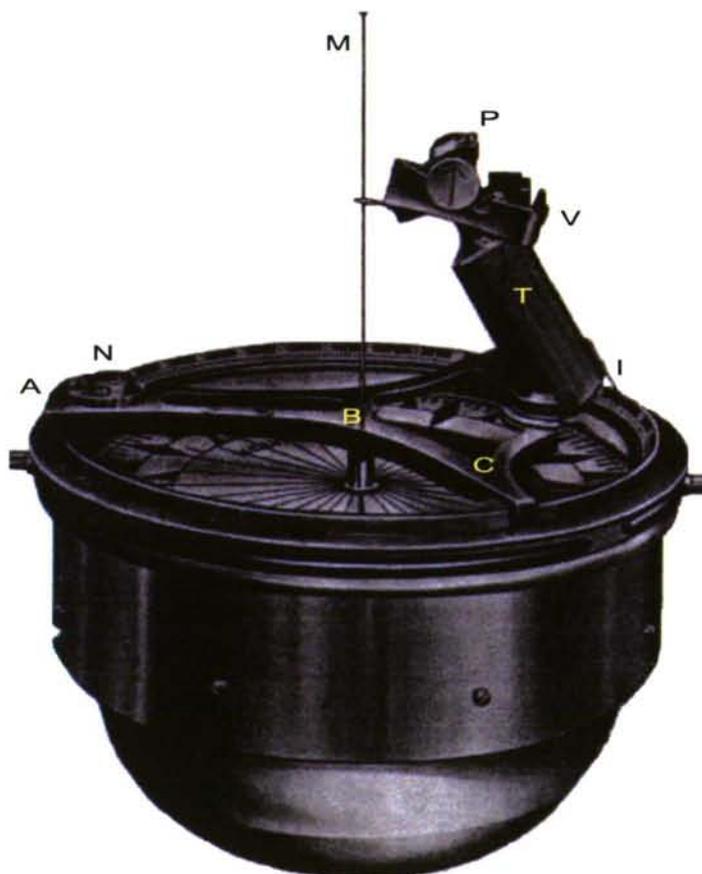


Fig - 1.140.VII - Alidada acimutal Thomson

disponiendo éste con el vértice hacia abajo, figura 1.141.VII, obsérvese la flecha del comando del prisma en la figura de esta página, en cuyo caso veremos la imagen de la graduación de la rosa reflejada por el prisma inmediatamente bajo el objeto observado.

2) Dirigiendo la visual directamente a través del tubo y la lente de aumento y disponiendo el prisma con su vértice hacia arriba; en tal posición observaremos la imagen del objeto marcado reflejada por el prisma inmediatamente sobre la graduación de la rosa, figura 2.141.VII.

El primer procedimiento se emplea en la observación de objetos terrestres próximos al horizonte, especialmente cuando son poco luminosos, evitando así la absorción de luz provocada por el prisma, y para el Sol y la Luna en las cercanías de

sus ortos u ocasos. El segundo método se emplea, indistintamente, tanto para objetos terrestres como para los astros cualquiera que sea su altura.

Compruébese cómo cualquiera que sea el método utilizado la lectura se efectúa

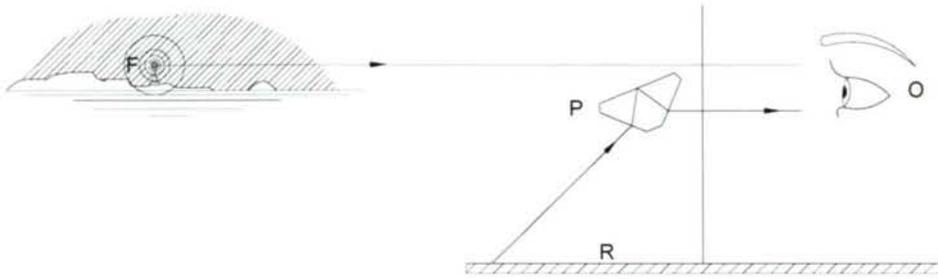


Fig - 1.141.VII - Primer procedimiento con la alidada Thomson

sobre la rosa en correspondencia con el propio objeto observado, sin que intervenga el índice, cuya misión principal consiste en una rápida orientación del dispositivo en el vertical del objeto marcado. Es una notable particularidad de esta alidada el que la exactitud de la medida no precise que el objeto marcado se encuentre exactamente en

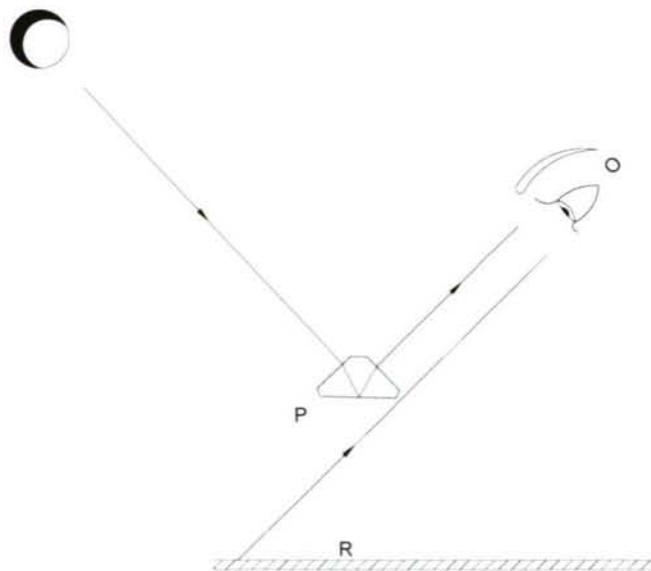


Fig - 2.141.VII - Segundo procedimiento

el plano vertical que contiene al eje óptico, es decir, que el índice apunte exactamente hacia el punto observado. En efecto, de acuerdo con las características de construcción de ésta alidada la lectura que se hace sobre la rosa en correspondencia con el objeto, es el acimut exacto aunque el índice se encuentre desplazado del plano de colimación. La teoría del aparato demuestra que cuando la altura del cuerpo marcado no supera los 38° , el error que se comete en el acimut como consecuencia de un error en la orientación del índice, no supera el medio grado, aunque el error de orientación alcance los 4° . Se comprende la altísima utilidad de tal característica especialmente en condiciones difíciles de observación: navegando con oleaje y con cielo entre claros y nubes que solamente permiten la observación a pequeños intervalos. En condiciones normales, debe orientarse adecuadamente con el objeto de minimizar cualquier error.

6. CÍRCULO DE MARCAR. — En los países de habla inglesa y aún en otros que no lo son, como Bélgica e Italia, es denominación muy empleada PELORUS al referirse tanto al taxímetro como al círculo de marcar. Tal denominación procede del piloto cartaginés del mismo nombre, que se dice que fue el primero en usarlo unos 200 años a. C. Constituido por una rosa metálica MM' provista de una alidada AA' con pínulas ocular P y objetiva P' , que gira en torno al eje vertical que pasa por el centro de la rosa. El eje sobresale un poco por la cara superior de ésta, de la que parte un índice fijo I denominado índice de la línea de fe y está destinado a indicar la dirección de la proa sustituyendo a la línea de fe de la aguja. La rosa puede ser fijada al eje mediante el tornillo de presión T' aplicado a la parte superior del eje mismo. La alidada, que se encuentra en la parte inferior de la rosa, puede ser fijada a ésta por medio de otro tornillo de presión T ubicado por delante de la pínula objetiva, en la parte en que esta lleva el índice de la alidada; el eje es sostenido por una suspensión cardánica que a su vez se apoya en un soporte en forma de horquilla fijado a un pie instalado en el plano longitudinal de la nave. Al objeto de mantener el eje en posición vertical, y por lo tanto la rosa en posición horizontal, la parte inferior de dicho eje está lastrado con el peso L . En otros tipos, de uso en los países anglosajones, la rosa se apoya en un soporte circular sostenido a lo Cardano que, a su vez, se apoya en el borde interno de una caja dentro de la cual puede encerrarse el aparato. El índice de fe está señalado por una incisión en el soporte circular de la rosa; sobre esta gira y puede ser fijada la alidada. Concluamos diciendo que con este aparato pueden obtenerse marcaciones o demoras, y, dentro de estas últimas verdaderas magnéticas o de la aguja.

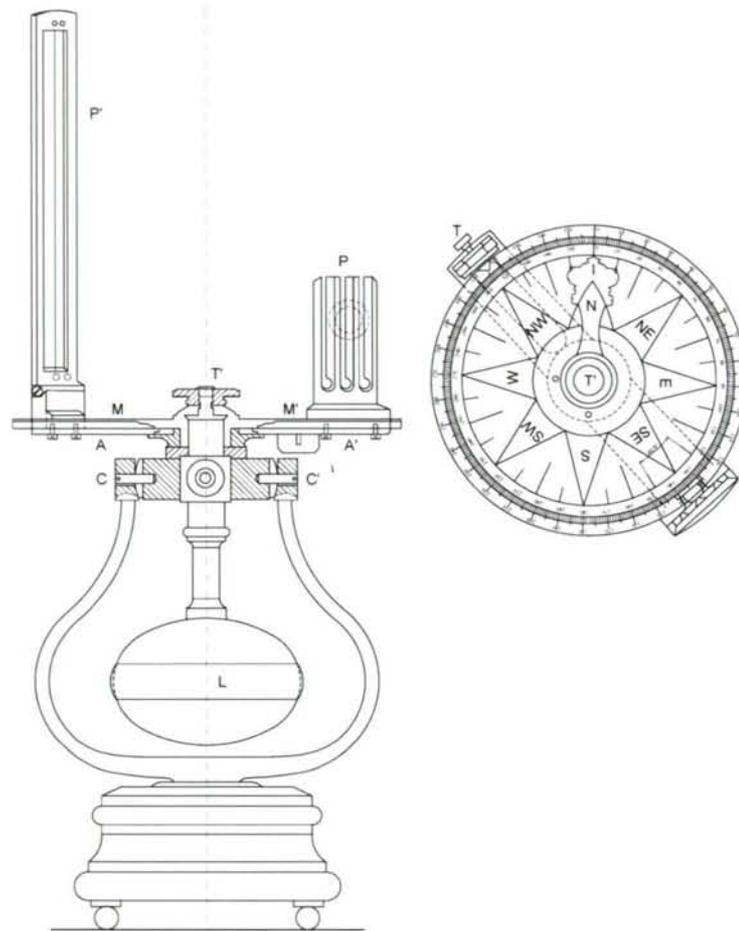


Fig - 1.143.VII - Círculo de marcar

7. ERRORES EN EL AZIMUT. — Es bien sabido que el error es inherente a todo proceso de medición; los errores que aquí trataremos son los derivados de una deficiente manipulación de los dispositivos de marcar, y no los derivados de defectos en su construcción, — cuya entidad los modernos procesos de fábrica reducen a límites indetectables en la práctica—, ya sean tales dispositivos los en estas páginas descritos, u otros de similares características pero, en todo caso, destinados al mismo fin, es decir, a la medición del acimut o demora.

8. ERROR EN EL AZIMUT COMO CONSECUENCIA DE LA INCLINACIÓN DEL PLANO DE COLIMACIÓN. — Es uno de los errores más comunes durante el proceso de observación debido a la imposibilidad práctica de mantener perfectamente horizontal el plano de la rosa mediante el control del nivel de burbuja, sometido a las aceleraciones de la plataforma móvil, —buque—, en la que se encuentra

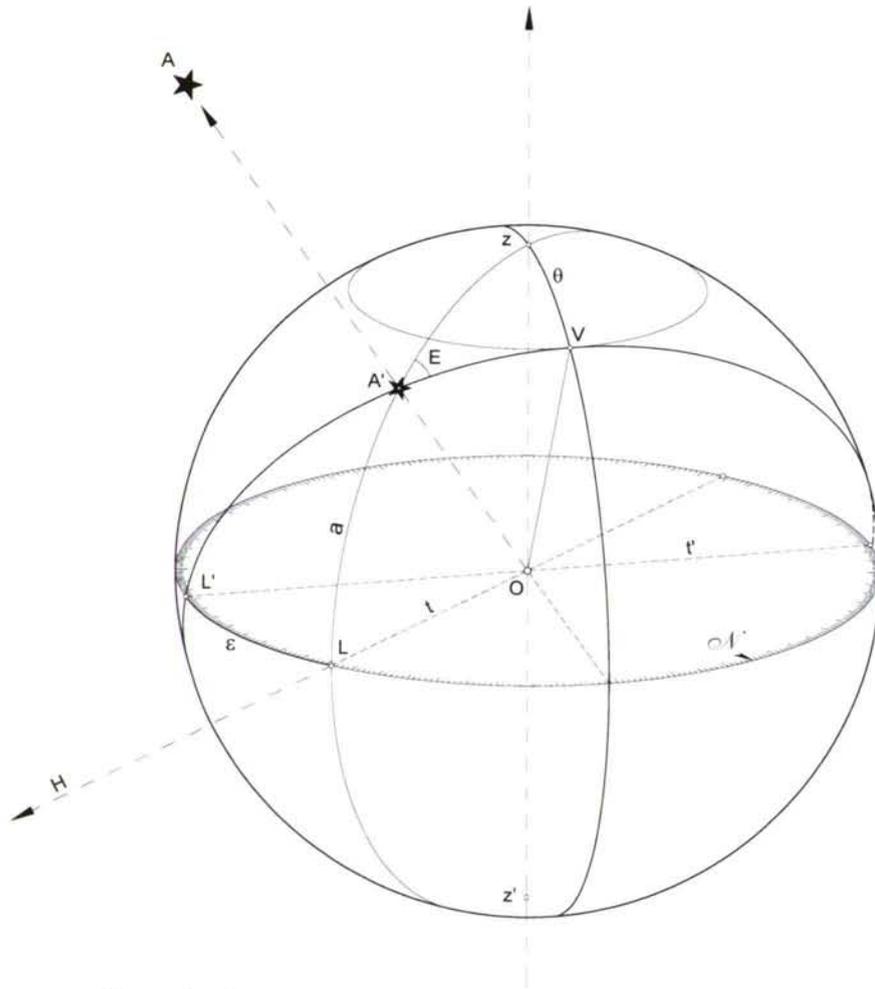


Fig - 1.144.VII - Error por inclinación del plano de colimación

instalado.

En la figura 1.144.VII se representa la esfera cuyo radio es el de la rosa, en realidad dicho radio puede suponerse arbitrario considerando que el plano de la rosa, plano horizontal, corta a tal esfera según el círculo máximo OLL' , en ella son:

A	Astro observado
zz'	Vertical astronómica
zA'Lz'	Vertical (plano de colimación)
VA'L'	Plano de colimación, inclinado el ángulo θ
θ	Ángulo de inclinación
a	Altura del astro A
$\angle V'L$	Acimut exacto
$\angle V'L'$	Acimut erróneo
ε	Error en el acimut por inclinación del plano de colimación

En el triángulo esférico zVA', rectángulo en V, se tiene:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{tg} E \quad (1.145.VII)$$

en el L'A'L, rectángulo en L:

$$\operatorname{sen} E = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cos} a} \quad (2.145.VII)$$

y siendo,

$$\operatorname{tg} E = \frac{\operatorname{sen} E}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 E}} \quad (3.145.VII)$$

sustituyendo en ésta los valores de (2.145.VII) tendremos,

$$\operatorname{tg} E = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\operatorname{cos}^2 a}}} \quad (4.145.VII)$$

expresión que sustituida en la (1.143.VII) y después de las pertinentes simplificaciones nos da:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{\operatorname{cos}^2 a - \operatorname{sen}^2 \theta}} \quad (5.145.VII)$$

que es la expresión del error en estudio. En ella podemos comprobar que el error cometido es función del ángulo de inclinación θ y de la altura del astro; si se supone para el astro observado una altura de 45° y una inclinación del plano de colimación de 1.5° , el error ε en el acimut resulta ser de $\pm 1,5^\circ$ dependiendo el signo de este error del signo del ángulo de inclinación. Véase, además, como para alturas muy próximas al cenit, valores del coseno de la altura próximos a 0° , el error alcanza valores inadmisibles, en particular, si la altura alcanza los 90° el astro no podría ser marcado por muy pequeño que fuera el ángulo de inclinación. El error máximo,— teórico—, sería de 90° y se tendría para $a = 90^\circ - \theta$, por anularse el denominador en la fórmula del error.

9. ERROR EN EL AZIMUT COMO CONSECUENCIA DE LA INCLINACIÓN DEL PLANO DE LA ROSA. —

Mucho más común que el anterior es este error, puesto que la inclinación del plano de colimación sin que se produzca simultáneamente la inclinación del plano de la rosa, resulta casi imposible, y la inclinación del plano de la rosa, sobre todo navegando entre olas, es frecuente; el control de la horizontalidad de este plano por medio del o de los niveles de burbuja, como ya se ha dicho, es poco menos que imposible en las circunstancias citadas. En la figura 1.147.VII, se tiene:

A	Astro observado
z	Cénit del observador, con el plano de la rosa horizontal
zA'L	Vertical perpendicular al plano de la rosa
z _o A'L'	Plano de colimación, inclinado
θ	Ángulo de inclinación del plano de la rosa
a	Altura del astro A
\mathcal{M} L	Acimut exacto
\mathcal{M}'_o L'	Acimut erróneo
ε	Error en el acimut por inclinación del plano de la rosa
MM'	Traza del plano de inclinación con el plano de la rosa
$\mathcal{E}\mathcal{E}$	Eje de inclinación

Puesto que el ángulo $z\mathcal{M}M'$ resulta ser igual al $z_o\mathcal{M}'_oG$, por no variar las posiciones relativas de estos puntos como consecuencia de la inclinación θ , el error cometido en

el acimut $\alpha' L$ será el mismo que el error cometido en el ángulo ML, acimut relativo al plano de inclinación. Tal error vendrá dado por la diferencia entre los ángulos $\alpha' L_0$ y $\alpha' L$, es decir: la diferencia GL' menos ML , correspondiente a los acimutes relativos; en estas condiciones, en el triángulo esférico $z z_0 A'$, supondremos conocidos: acimut relativo exacto, $z_0 z A'$, al que denominaremos Z_r , altura, a , e inclinación θ , por aplicación

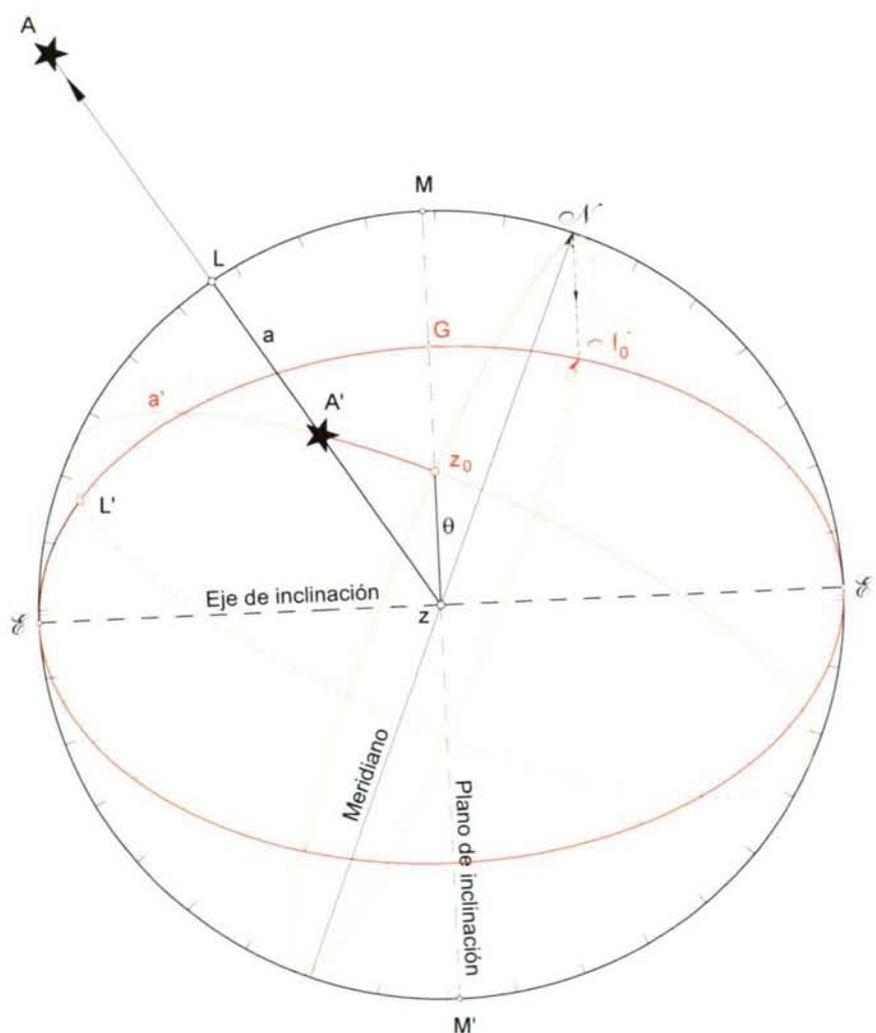


Fig - 1.147.VII - Inclinación del plano de la rosa

de la fórmula de la cotangente, calcularemos el ángulo $180^\circ - Gz_0 A'$, o sea, el suplemento del acimut relativo erróneo $Gz_0 A'$, que denominaremos Z'_r :

$$\text{ctg}(90^\circ - a) \cdot \text{sen } \theta = \cos \theta \cdot \cos Z_r + \text{sen } Z_r \cdot \text{ctg}(180^\circ - Z'_r) \quad (1.147.VII)$$

en la que operando como sigue:

$$\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{sen} \theta = \cos \theta \cdot \cos Z_r - \operatorname{sen} Z_r \cdot \operatorname{ctg} Z'_r \quad (1.148.VII)$$

y despejando $\operatorname{ctg} Z'_r$,

$$\operatorname{ctg} Z'_r = \cos \theta \cdot \operatorname{ctg} Z_r - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{csec} Z_r \quad (2.148.VII)$$

La diferencia $Z'_r - Z_r = \varepsilon$, nos dará el valor del error buscado. Puesto que $Z'_r = Z_r + \varepsilon$, tendremos,

$$\operatorname{ctg} (Z_r + \varepsilon) = \cos \theta \cdot \operatorname{ctg} Z_r - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{csec} Z_r \quad (3.148.VII)$$

de la que, sin dificultad, se llega a:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1 - \cos \theta + \operatorname{tg} Z_r \cdot \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{csec} Z_r}{\cos \theta \cdot \operatorname{ctg} Z_r - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{csec} Z_r + \operatorname{tg} Z_r} \quad (4.148.VII)$$

que nos proporciona el valor exacto del error. Dado que para los valores probables del ángulo θ , la diferencia $1 - \cos \theta$ es, a efectos prácticos, despreciable, la expresión final después de la simplificación indicada será:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\operatorname{sen} Z_r \cdot \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{sen} \theta}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{sen} \theta \cdot \cos Z_r} \quad (5.148.VII)$$

mucho más simple, y de la que se obtienen valores del error de gran exactitud. El error es función de la altura del astro, del ángulo de inclinación y del ángulo que el plano de inclinación forma con el meridiano, acimut del plano de inclinación. La tabla siguiente permite la comparación entre los resultados obtenidos por una y otra vía pudiéndose comprobar la efectiva validez de la última expresión, así como los valores, despreciables en la práctica, del error cuando se observan astros de baja altura, circunstancia esta bien conocida por todos los navegantes.

Z_r	a	θ	ϵ	ϵ
10°	15°	3°	0·15°	0·14°
20°	30°	3°	0·64°	0·61°
45°	40°	2°	1·23°	1·21°
60°	50°	3°	3·23°	3·19°
70°	45°	4°	3·89°	3·84°
80°	55°	2°	2·84°	2·83°

La figura 1.150.VII muestra, desde otro punto de vista, la interpretación gráfica del análisis del error en estudio.

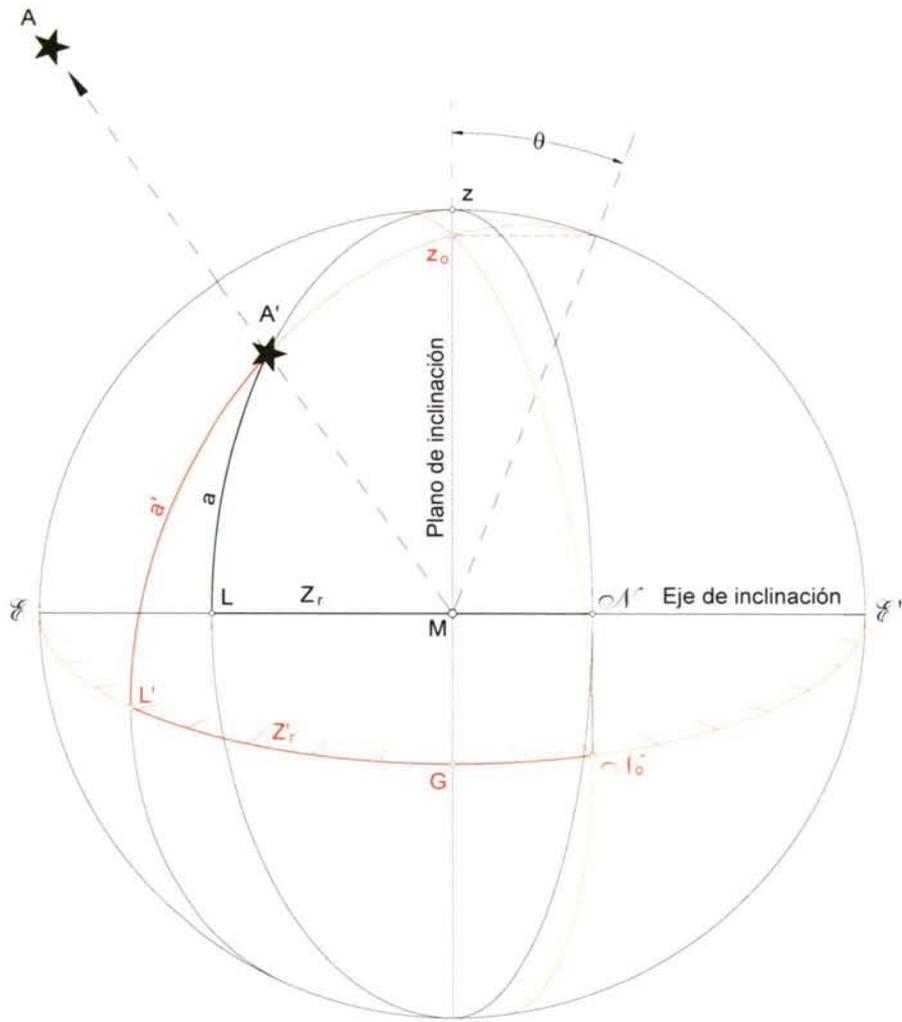


Fig - 1.150.VII - Error por inclinación del plano de la rosa

CAPÍTULO VIII

LA MEDIDA DEL TIEMPO

1. EL CRONÓMETRO. — Por reloj entendemos cualquier sistema físico que permite determinar mediante sus ecuaciones de movimiento, la variable tiempo (t) correspondiente a un estado del sistema [VIVES-71]. El reloj mediante el cual a bordo se mide el tiempo recibe el nombre de cronómetro.

2. EL CRONÓMETRO EN LA NAVEGACIÓN. — Imperdonable sería en este estudio, y a pesar de su necesaria brevedad, el no destinar unas líneas a uno de los mas apasionantes episodios en la historia de la navegación cual fue la invención del cronómetro marino, que permitió al navegante la determinación precisa de la longitud y cuyo exhaustivo tratamiento puede encontrar el estudioso en la magnífica obra "THE ILLUSTRATED LONGITUDE" ¹.

Don Julio Rey Pastor en "LA CIENCIA Y LA TÉCNICA EN EL DESCUBRIMIENTO DE AMÉRICA" ², págs 89 y sig, nos dice en cuanto al cálculo de la longitud "Varios son los métodos que enseñan los actuales tratados de Astronomía: 1º Por transporte de relojes, método que suele atribuirse a Alonso de Santa Cruz, pero en verdad pertenece a Fernando Colón (1524); imposible antes de la invención del cronómetro; 2º Por las distancias lunares a diversos planetas; tal fue el que siguió Andrés de San Martín, con el desconcertante éxito de situar Río de Janeiro en un meridiano de la China; tales eran las tablas de los movimientos de la Luna; 3º Por los eclipses de los satélites de Júpiter, los cuales no fueron descubiertos hasta el siglo XVII por Galileo". En la misma obra nos habla del "importante concurso abierto en 1598 para premiar la resolución del magno problema náutico del siglo, que muchos consideraban como «límite impuesto por Dios a la inteligencia humana». «Seis mil ducados de renta perpetua, dos mil más de vitalicia y mil de ayuda de costa, amén de la gloria, eran cebo suficiente para atraer sabios de todos los países y avivar el ingenio

¹ Dava Sobel and William J.H. Andrewes. Walker and Company, New York, 1998.

² Colección Austral. Espasa - Calpe, S.A. Cuarta edición 1970

de una caterva de inventores y de arbitristas».

En la ya citada obra de Sobel - Andrewes, leemos: *“To encourage a solution, governments established major prizes for anyone whose method or device proved successful. The largest reward of £20.000 — truly a king’s ransom — was offered by the British Parliament in 1714. The scientific establishment — from Galileo to Sir Isaac Newton — had been certain that a celestial answer would be found an invested untold effort in this pursuit. In stark contrast, one man, Jonh Harrison, imagined and built the unimaginable: a clock that solved the problem by keeping precise time at sea, called today the chronometer. His trials and tribulations to win the prize throughout a forty- year obsession are the culmination of this remarkable story”.*

Hasta el gran hallazgo de Jonh Harrison, el cronómetro marino, el cálculo de la longitud en la mar fue imposible. Harrison había nacido en Foulby cerca de Wakefield, Yorkshire, el 24 de marzo de 1693, — en España hubiera sido un hombre de tierra adentro, pero en Inglaterra esta especie jamás existió —, completó su primer reloj de

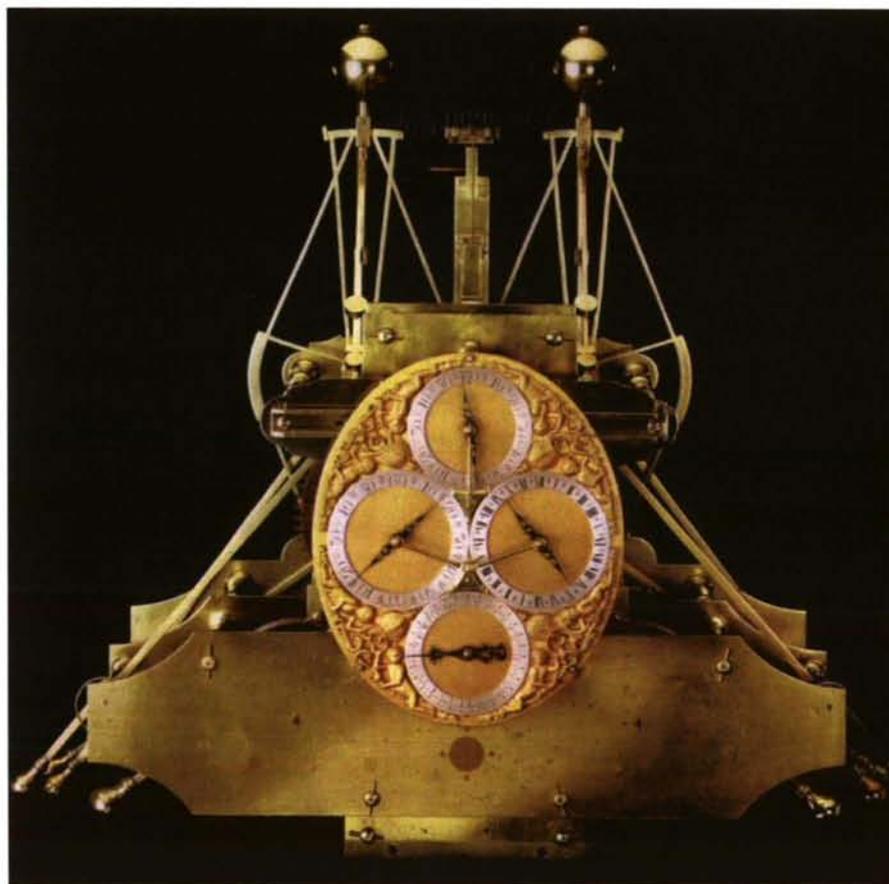


Fig - 1.152.VIII - El H -1 de Harrison

péndulo en 1713, antes de cumplir los veinte años. Su primer cronómetro marino conocido por H -1, ver figura 1.152.VIII, dispone de cuatro esferas: la superior indica los segundos, la de la izquierda los minutos, la de la derecha las horas y la inferior el día del mes; medía sobre dos pies de alto y tardó cinco años en construirlo completándolo en 1735. En el retrato que hacia sus setenta y tres años le hizo Thomas King se observa, amén de la mirada de un hombre extraordinariamente inteligente, un reloj de bolsillo en su mano derecha; detrás de él dos relojes simbolizando el de la derecha el reloj terrestre con su ingenioso péndulo "gridiron", y a la izquierda su tercer cronómetro marino, conocido por H - 3. La incontestable eficacia de su cronómetro H - 1 quedó patentemente demostrada en un viaje a Lisboa en 1736. A la vuelta de viaje, después

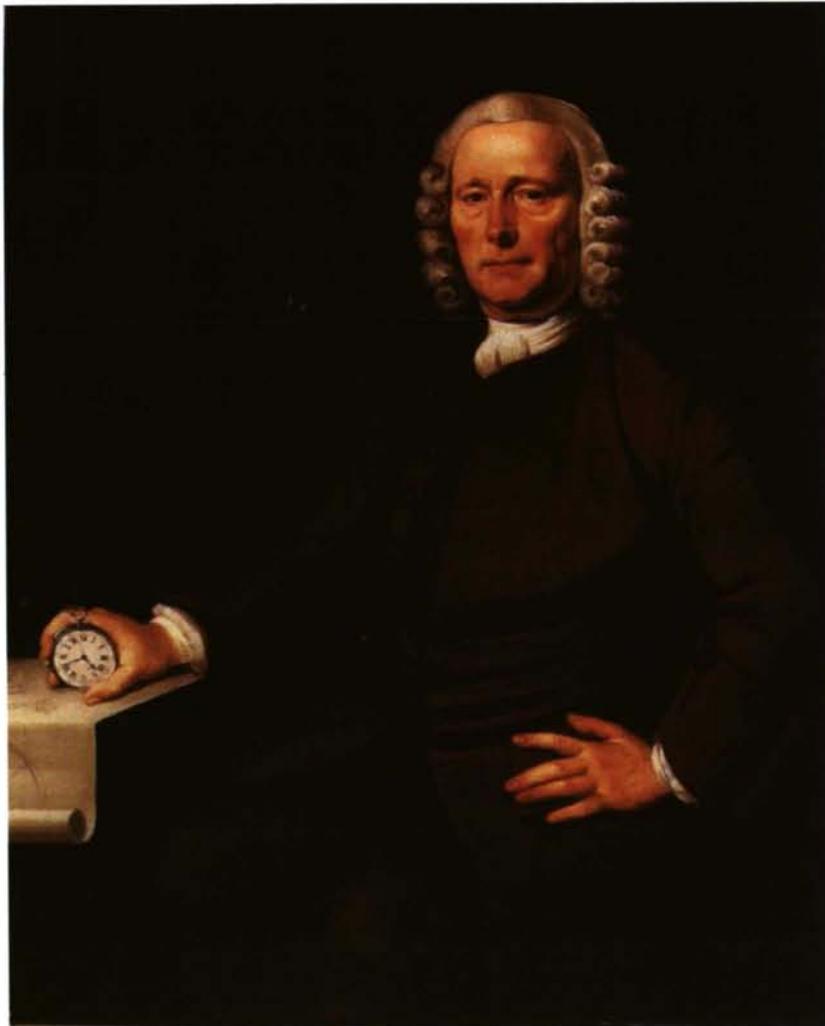


Fig - 1.153.VIII - John Harrison a los 73 años

de cuatro semanas de calmas y tormentas, fue avistada tierra en la lejanía; los marinos

pensaban que se trataba de Start Point, pero Harrison, observando la hora que mostraba su cronómetro, afirmó que la tierra avistada era Lizard Point. Cuando recalaron comprobaron la exactitud de las afirmaciones del inventor: su cronómetro había corregido la longitud del buque en sesenta y ocho millas. En memoria de este gran hombre ningún puerto de mar debiera carecer de una plaza o calle con su nombre.

3. COMPONENTES DE UN CRONÓMETRO MARINO CLÁSICO. — Con la demostración de que el cronómetro marino era en el único medio fiable para lograr el cálculo de la longitud en la mar con la necesaria precisión, se avanzó rápidamente en el diseño y fábrica de cronómetros cada vez mas precisos, apareciendo, sobre todo en Inglaterra y Francia, expertos constructores cuyo renombre y prestigio alcanza nuestros días. Las partes fundamentales de un cronómetro marino mecánico son: regulador, escape, rodaje y motor.

4. REGULADOR. — Constituido por un volante VV' , figura 1.154.VIII, que oscila en torno a un eje O que pasa por su centro de gravedad; las oscilaciones son producidas por un muelle en espiral EE' que recibe, precisamente, este nombre: espiral. Su extremo A está afirmado al eje del volante, el otro, M , se afirma a un punto fijo del cronómetro; si se imprime al volante un movimiento de rotación alrededor de su eje en el sentido $-\omega$, la espiral se deforma apretándose y almacenando energía elástica;

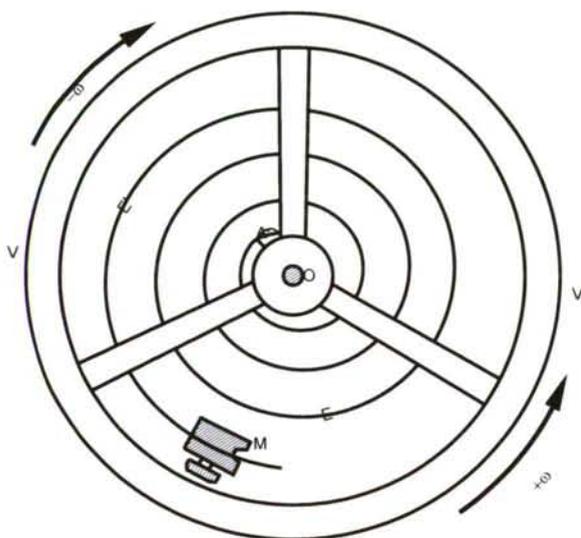


Fig - 1.154.VIII - Regulador

liberado el volante la reacción elástica le imprime un movimiento de rotación en el sentido $+\omega$ y, por efecto de la inercia, pasada la posición de equilibrio la espiral se abre almacenando nueva energía y oponiéndose al giro del volante, al que frena y vuelve a imprimir una rotación en el sentido $-\omega$. De no existir pérdidas por rozamiento, el movimiento de vaivén continuaría indefinidamente y el volante se comportaría como un péndulo. Puesto que las deformaciones de la espiral se producen dentro de su periodo elástico, y según la ley de Hooke³, "*dentro del periodo elástico, las deformaciones son proporcionales a los esfuerzos que las producen*", las oscilaciones resultan isócronas, es decir, tienen la misma duración; en el cronómetro el volante es el componente destinado a medir el tiempo. Para que las oscilaciones no se extingan y tengan todas la misma amplitud (aproximadamente 400° en los cronómetros marinos), es preciso suministrar al volante la cantidad de energía perdida por rozamiento en cada oscilación; tal energía es proporcionada por el motor que, a la vez que la suministra al sistema de engranajes que constituyen el rodaje, la transmite al volante a través de un ingenioso dispositivo que recibe el nombre de escape.

5. EL MOTOR. — Constituido por el muelle real (cuerda), una lámina de acero larga y delgada enrollado en espiral y contenido dentro del tambor T, que es de forma cilíndrica, figura 1.156.VIII; un extremo de la cuerda está afirmado al eje EE' y el otro esta fijado internamente a la superficie del tambor. En la superficie externa de este, en un punto B, se fija la extremidad de una cadena que se envuelve en torno al mismo y al huso o caracol C; este caracol es de forma cónica y presenta una rampa helicoidal a la que se ajusta la cadena. El eje del caracol termina en una cabeza de sección cuadrada M en la que se aplica la llave con la que se da la cuerda; durante el proceso de carga, la cadena se envuelve en el caracol arrastrando en su giro al tambor dentro del cual el muelle de cuerda se deforma cerrándose sobre el eje EE' y almacenando la energía elástica que moverá el cronómetro. El muelle está completamente cargado cuando toda la cadena se enrolla en el caracol, y al ser este solicitado por el tambor, al cual transmite el muelle su energía, pone en rotación todo el sistema de ruedas y

³ Roberto Hooke.- Físico y mecánico inglés, n. en Freshwater en 1635 y m. en Londres en 1703. Realizó gran número de descubrimientos, debiéndosele la primera idea del octante, la elección del punto de fusión del hielo como cero del termómetro, un ingenioso sistema de telegrafía óptica y una serie de instrumentos nuevos o perfeccionados, como el aritmétrógrafo, micrómetro, pluviómetro, anemómetro, barómetro, barométrógrafo, balanza de proporción, microscópio, telescopio, helioscopio, una sonda automática sin cuerda etc. Se le atribuye también, sin fundamento, el descubrimiento de la gravitación universal que, según sus admiradores, enunció antes que Newton. Presentó numerosas comunicaciones a la Real Sociedad sobre las manchas del Sol, de la Luna, de Marte y de Júpiter.

piñones que conforman el rodaje del cronómetro. El momento del par motor, fuerza por brazo⁴, se mantiene constante y los impulsos proporcionados por el motor al volante son siempre sensiblemente constantes. Anexo al caracol se encuentra un mecanismo destinado a impedir que durante el proceso de dar cuerda el cronómetro se pare.

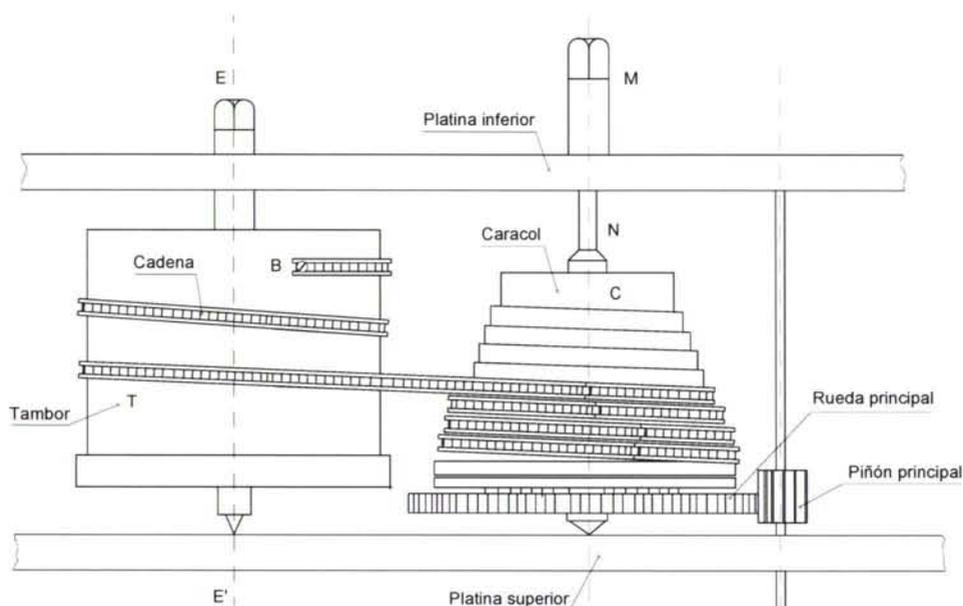


Fig - 1.156.VIII - Motor

6. RODAJE. — El piñón central o principal engrana en la rueda dentada unida al caracol, rueda central o principal, que efectúa una rotación cada hora, y sobre la misma rueda engrana un segundo piñón conectado a una segunda rueda dentada en la que engrana el piñón de los segundos concéntrico a la rueda de los segundos que realiza un giro cada minuto; El eje de esta atraviesa la platina superior y porta la saeta segunda. La rueda de los segundos engrana en el piñón de escape; el rodaje dispone, así, de cuatro ruedas y cuatro piñones, figura 1.157.VIII. El eje de la rueda central, recordemos que efectúa un giro por hora, atraviesa la platina superior pero no

⁴ Se demuestra en mecánica que la proyección horizontal o planta del caracol es una espiral de Arquímedes. La especial forma de este componente del cronómetro, obedece a la necesidad de mantener constante el par motor; al disminuir la tensión del muelle real, aumenta proporcionalmente el radio del caracol, lográndose así la constancia de dicho par motor. En la espiral de Arquímedes el radiovector es proporcional al ángulo polar:

$$p = k \cdot \theta$$

en la que p es el radiovector, θ el ángulo polar y k la constante de proporcionalidad.

porta directamente la saeta horaria ni a la de los minutos; la conexión con estas saetas se produce a través de un mecanismo especial que permite ajustarlas independientemente del movimiento del cronómetro.

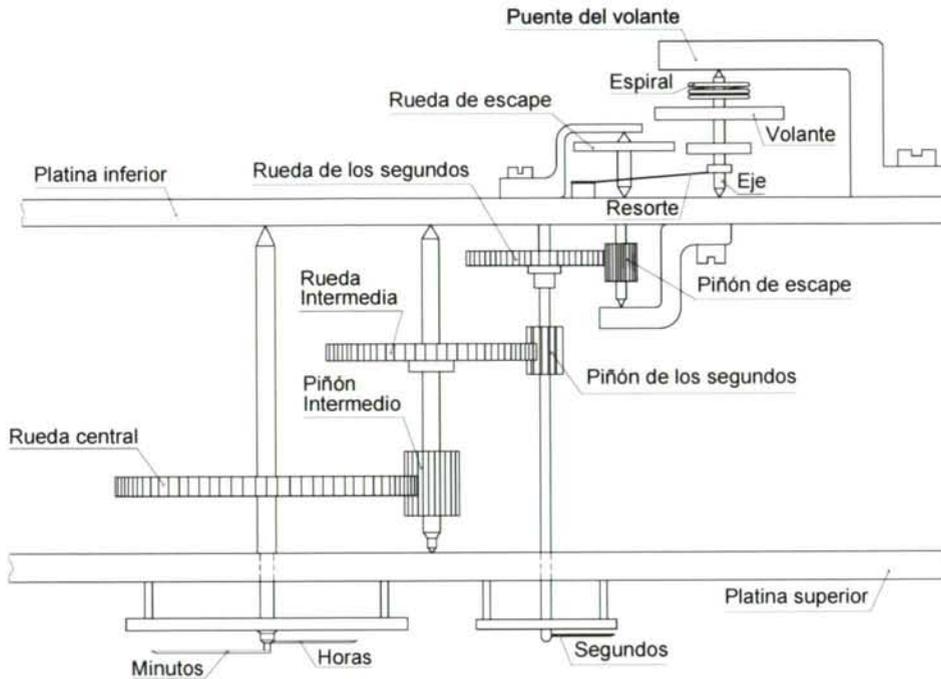


Fig - 1.157.VIII - Esquema del rodaje

7. ESCAPE . — El rodaje engrana con el volante, a intervalos concretos de tiempo, mediante el escape, figura 1.258.VIII, cuya rueda va montada en el eje del piñón de escape; este mecanismo tiene dos funciones:

- Interrumpir y restablecer periódicamente la acción del motor, que tiende a hacer girar continuamente al tambor y a todo el rodaje.
- Restituir regularmente al volante la energía perdida por efecto de las resistencias y rozamientos.

En los cronómetros marinos, generalmente, se usa el *escape libre de Leroy*⁵ compuesto de la rueda de escape D, que tiende a girar según $-\omega$; uno de sus dientes, el ① es frenado por el tope F de la leva FT, que oscila en torno al punto fijo T. Esta leva,

⁵ Pedro Leroy.- Relojero francés, n. en París en 1717 y m. en Vitry (Sena) en 1785. Disputó a Harrison el invento del cronómetro, habiendo obtenido el premio de la Academia de las Ciencias de París que se concedía al que inventara el mejor instrumento para la medida del tiempo, así en tierra como en el mar, debiéndosele, además, otros notables perfeccionamientos relacionados con su profesión.

por efecto del muelle E', es continuamente solicitada hacia la rueda de escape y porta un resorte E, constituido por una delgada lámina de acero, que es golpeada en cada oscilación por el diente R, solidario al eje del volante; durante la oscilación del volante que se produce en el sentido $+\omega$, el diente R arrastra, junto con la leva FT, el muelle E y el tope F libera el diente ① de la rueda de escape que puede girar libremente según

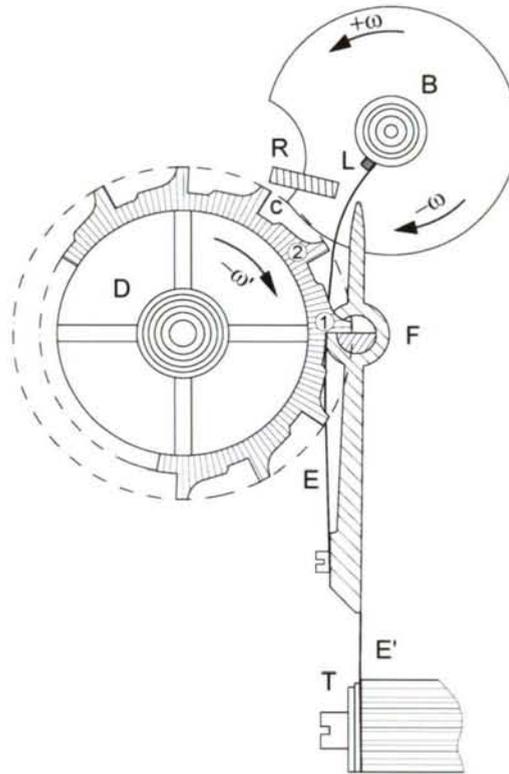


Fig - 1.158.VIII - Escape libre de Leroy

$-\omega'$. La leva FT, solicitada por el muelle E', torna a su posición de equilibrio y retiene el diente ② de la rueda de escape; así, la rueda de escape y todo el rodaje del cronómetro han girado un arco de amplitud equivalente al existente entre dos dientes consecutivos de esta rueda de escape. Durante la oscilación del volante en el sentido $-\omega$ el diente L sobrepasa la extremidad del muelle E, permaneciendo retenida la rueda D por lo que esta es liberada cada dos oscilaciones simples del volante. Con el mismo ritmo el volante recibe un impulso de la rueda de escape cada vez que esta es liberada, impulso proporcionado por el diente c al impactar con el diente R ligado al eje del volante. En conclusión: a cada oscilación doble del volante la rueda de escape es liberada

describiendo un arco de amplitud igual al paso entre sus dientes; los saltos se producen a intervalos iguales de tiempo, todo el mecanismo se mueve con la rueda de escape, tanto el tambor como el caracol o huso. En los cronómetros marinos, y con el fin de que el volante no acuse las aceleraciones periódicas propias del movimiento del buque entre las olas, la amplitud de cada oscilación del volante, como ya se ha dicho, es sensiblemente superior a una rotación completa (aproximadamente 400°), y su duración es de medio segundo. A cada oscilación simple la saeta de los segundos da un pequeño salto, oyéndose un batido seco característico: se dice que el cronómetro bate el medio segundo. De características similares, y ampliamente difundido, es el escape libre de Arnold⁶, ver figura 1.159.VIII; dada la extraordinaria semejanza con en el escape de Leroy (o Le Roy), obviamos toda indicación sobre su funcionamiento.

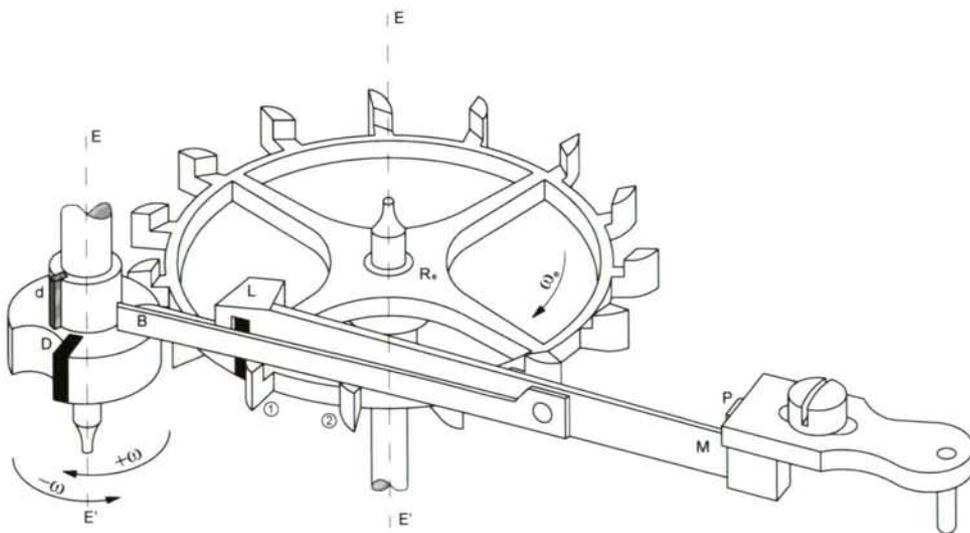


Fig - 1.159.VIII - Escape libre de Arnold

8. VOLANTE COMPENSADO. — El volante anteriormente descrito no está compensado por las variaciones de temperatura como sí sucede en los cronómetros marinos. Al variar la temperatura varía la duración de las oscilaciones, así al aumentar esta aumenta la amplitud de las oscilaciones y el cronómetro atrasa; cuando la temperatura disminuye, lo hace también la amplitud de las oscilaciones, y el cronómetro adelanta. Las razones de esta variación se justifican por los siguientes razones:

⁶ John Arnold (1735 - 1799). - Prolífico constructor de cronómetros marinos. Fue el primero en iniciar su fabricación en serie

- 1) Cuando el volante se dilata sus masas se alejan del centro de giro, es decir, se alejan de su eje de rotación y, por lo tanto, aumenta su momento de inercia.
- 2) La espiral se alarga.
- 3) La reacción elástica de la espiral disminuye al variar el estado molecular del material, normalmente acero o paladio, que la constituye.
- 4) El aceite de lubricación de todo el mecanismo se torna más fluido y acelera las rotaciones por lo que la amplitud de las oscilaciones aumenta.

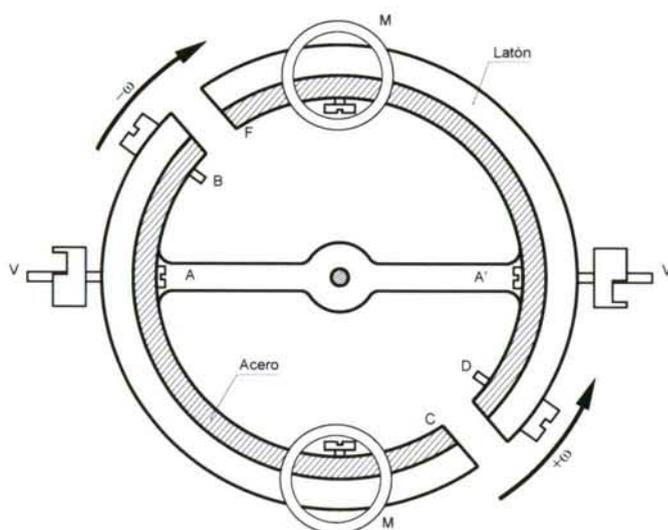


Fig - 1.160.VIII - Volante compensado

Todos estos efectos debidos al aumento de la temperatura, y sus contrarios ocasionados por una disminución de la misma, modifican la duración de las oscilaciones y el cronómetro atrasa o adelanta⁷. De una manera esquemática, un volante compensado, figura 1.159.VIII, está formado por una barreta diametral AA' de acero afirmada a dos arcos CB y FD, cada uno de amplitud algo inferior a una semicircunferencia. Estos arcos son bimetálicos, de acero su parte interna y de latón

⁷ El periodo de oscilación simple está dado por la expresión:

$$T = \pi \cdot \sqrt{\frac{M \cdot L}{E}}$$

en la que M es el momento de inercia del volante, L la longitud de la espiral, y E su momento de elasticidad, que depende del material de la que está fabricada y de su sección transversal.

la externa; el volante porta además dos masas compensatorias MM ubicadas en los extremos del mismo diámetro y en la zona libre de cada uno de los arcos, fijadas por medio de los adecuados tornillos. En las extremidades de la barreta se fijan dos masas VV' denominadas masas reguladoras que pueden ser acercadas o alejadas del eje de rotación, aumentando o disminuyendo convenientemente el momento de inercia del volante. Cuando la temperatura aumenta la sección interna de los arcos, acero, se dilata menos que la externa, latón; los arcos se curvan y las masas compensatorias MM se acercan al eje de giro de modo que el momento de inercia disminuye en vez de aumentar; esta disminución viene a compensar, más o menos bien, los efectos contrarios del aumento de la longitud de la espiral, de la alteración de su elasticidad y de la mayor fluidez del lubricante [FLORA-82]. La espiral esquemáticamente mostrada en la figura 1.154.VIII, es, realmente, un resorte cilíndrico de acero de unas 10 ó 12 espiras [RIBERA-05], uno de cuyos extremos se afirma a la barreta y el otro al puente, de tal modo, que resulte concéntrico con el eje del volante .

9. CONDICIÓN ESENCIAL DEL CRONÓMETRO . — La marcha del cronómetro queda, pues, supeditada al volante (regulador), puesto que a cada oscilación de éste, gira la rueda de escape el ángulo comprendido entre dos dientes, es decir, una cantidad constante. Bastará, por lo tanto, que las oscilaciones del volante sean isócronas, para que la rueda de escape y todas las demás conectadas a ella, marchen con movimiento uniforme.

Tan sólo será necesario para que el cronómetro nos indique el tiempo medio, que el volante emplee medio segundo en la oscilación simple, y entonces, cada diente de la rueda de escape que salta, nos indicará un segundo, y si, por ejemplo, ésta tiene doce dientes empleará doce segundos en dar una revolución completa, de modo, que si engranamos su piñón con otra rueda que tenga cinco veces más dientes, — razón de transmisión 1:5 —, el eje de esta nos servirá para montar el segundero y dará una revolución cada sesenta segundos.

De todo lo dicho se desprende que la parte más importante del cronómetro es el regulador, con el que se persigue la marcha perfecta del cronómetro acorde siempre con el tiempo medio, puesto que la navegación no exige otra cosa.

Seguidamente mostramos diversas perspectivas de algunos cronómetros marinos en los que son visibles algunos de sus principales componentes:

Comenzaremos mostrando el tercer cronómetro construido por John Harrison, y que es conocido por el H3, ver figura 1.162.VIII; obsérvese que en todos los cronómetros de este inventor, al virtuosismo técnico se suman genio y talento de gran artista. Para nuestro asombro, éstas máquinas inigualables siguen funcionando en la

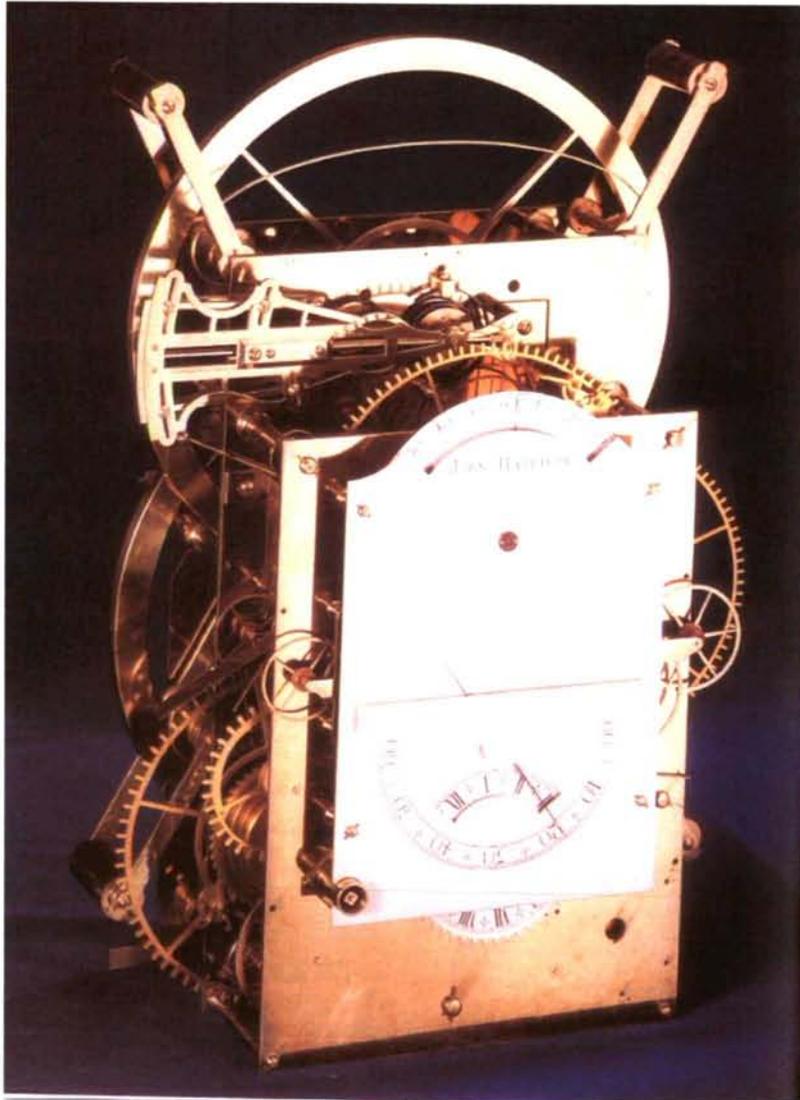


Fig - 1.162.VIII - El H3 de John Harrison

actualidad con inusitada precisión.

El cronómetro marino de la figura 1.163.VIII corresponde a un Arnold & Son, fabricado en Londres hacia 1791; la casa Arnold & Son es una de las más clásicas en la fábrica de cronómetros marinos; pueden observarse los mecanismos principales: volante compensado, espiral, escape, rodaje, caracol, etc. En la segunda figura se

muestra la maquinaria de un cronómetro marino Dent-Strand, fabricado en 1870; podemos observar los diversos componentes e incluso, las saetas. Las figuras 1.164.VIII y 2.164.VIII, corresponden a un cronómetro ULISSE NARDIN de fabricación



Fig - 1.163.VIII - Maquinaria de un Arnold & Son, 1791

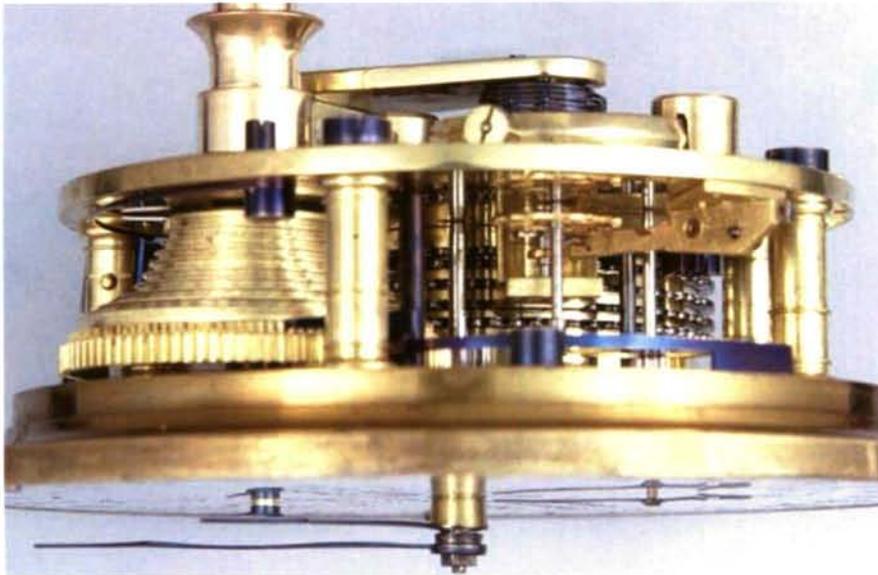


Fig - 2.163.VIII - Maquinaria de un Dent, Strand, 1870

suiza; en la primera es claramente visible la suspensión a lo Cardano con la palanca de bloqueo, la esfera en esmalte blanco con las cifras en numeración romana y esmalte

negro; en la parte inferior de la esfera, la aguja de los segundos y, en la parte superior



Fig - 1.164.VIII - Cronómetro Ulisse Nardin, Suiza



Fig - 2.164.VIII - Cronómetro Ulisse Nardin en su caja

de la misma, una pequeña esfera para indicar la reserva de cuerda de 0 a 56 horas en tramos de 8 horas. La segunda figura de la misma página muestra el mismo cronómetro en su caja de doble tapa; obsérvese la llave para dar cuerda. El cronómetro marino de

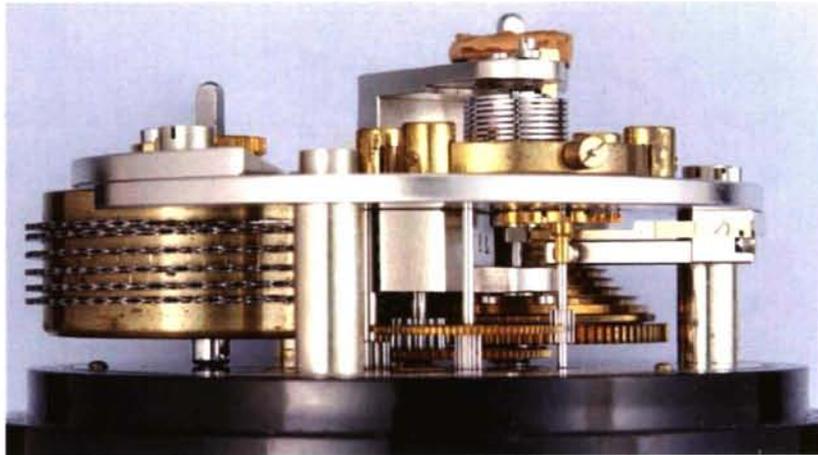


Fig - 1.165.VIII - Cronómetro marino Wempe, Hamburgo

la casa WEMPE, Hamburgo, de las figuras 1.165.VIII y 2.165.VIII, corresponde a los

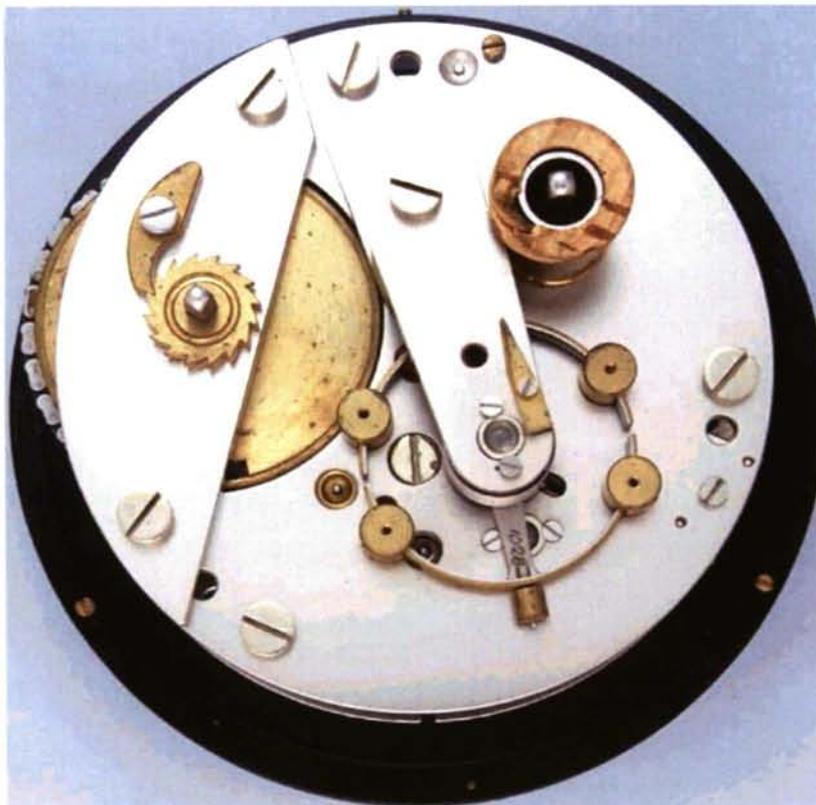


Fig - 2.165.VIII - Cronómetro Wempe, parte posterior

años 50 del pasado siglo XX; pueden contemplarse los componentes principales y, en su visión posterior, el mecanismo que permite la normal marcha del cronómetro mientras se le da cuerda.

10. EL CRONÓMETRO MODERNO. — El reloj atómico comienza a desarrollarse en 1948 y sus principios fueron enunciados por Willard Frank Libby, (1908 - 1980), — premio Nobel de Química en el año 1960 —; tiene una altísima precisión y su margen de error es de un segundo cada 300 años, su más sofisticado tipo es utilizado en la constelación GPS, su elevado coste, y alternativas más asequibles, desaconsejan su uso a bordo. En el año 1930 el relojero norteamericano Warren Alvin Marrison incorporó un circuito resonante de cuarzo a un reloj eléctrico surgiendo, así, el cronómetro de cristal de cuarzo que resulta de alta precisión y solo se atrasa o adelanta unos 3 segundos al año. Precisamente de este tipo son los modernos cronómetros marinos. El elemento fundamental en el actual cronómetro marino lo conforma el amplificador operacional que es un dispositivo lineal de propósito general [URL:www.geocities.com/CapeCanaveral/lab/2912/quees.html], el cual tiene una capacidad de manejo de señal desde $f = 0 \text{ Hz}$ hasta una frecuencia definida por el fabricante; tiene además límites de señal que van desde el orden de los nV , hasta unas docenas de voltios (especificación también definida por el fabricante). Los amplificadores operacionales se caracterizan por su entrada diferencial y una ganancia muy alta, generalmente mayor que 10^5 equivalentes a $100dB$.

El A.O. es un amplificador de alta ganancia directamente acoplado, que en general se alimenta con fuentes positivas y negativas, lo cual permite que tenga conexiones tanto por arriba como por debajo de tierra (o el punto de referencia que se considere).

El nombre de Amplificador Operacional proviene de una de las utilidades básicas de éste, como lo es realizar operaciones matemáticas en computadoras analógicas (características operativas).

El Amplificador Operacional se caracteriza por:

1. Resistencia de entrada, (R_{en}), tiende a infinito.
2. Resistencia de salida, (R_o), tiende a cero.
3. Ganancia de tensión de lazo abierto, (A), tiende a infinito.
4. Ancho de banda, (BW) tiende a infinito.
5. $v_o = 0$ cuando $v_+ = v_-$.

Ya que la resistencia de entrada, R_{en} es infinita, la corriente en cada entrada, inversora y no inversora, es cero. Además el hecho de que la ganancia de lazo abierto sea infinita hace que la tensión entre los dos terminales sea cero, como se demuestra a continuación:

$$V_+ - V_- = \frac{V_0}{A}, \quad V_+ - V_- = 0, \quad V_+ = V_-$$

El modelo del circuito equivalente con que este puede ser representado contiene una fuente de alimentación que depende de la tensión de entrada, figura 1.167.IX. La impedancia de salida se representa como una resistencia de valor R_o . El amplificador está excitado por dos tensiones de entrada v_+ y v_- . Las dos terminales de entrada se conocen como entradas no inversora e inversora respectivamente. De manera ideal, la salida del amplificador depende no de las magnitudes de las dos tensiones de entrada, sino de la diferencia entre ellas, así se designa una nueva tensión diferencial de entrada. como:

$$V_d = V_+ - V_-$$

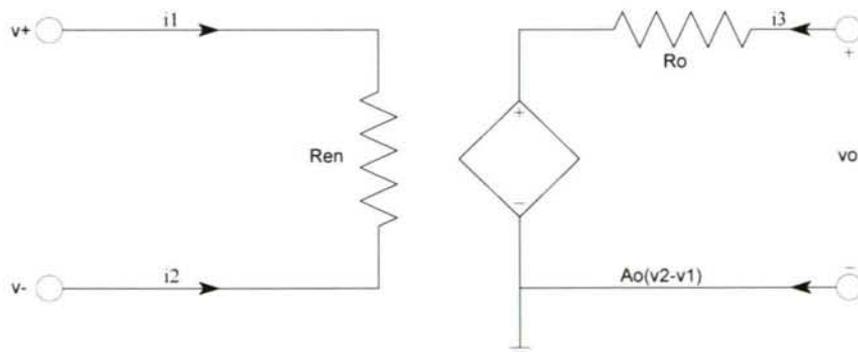


Figura - 1.167.VIII - Circuito equivalente

La impedancia de entrada del operacional está representada por la resistencia R_{en} . Finalmente la tensión de salida es proporcional a la de entrada, esta relación es denominada ganancia de lazo abierto, A . En su estructura interna el operacional típico esta compuesto de cuatro bloques; el primero es el amplificador diferencial que puede

tener una entrada Darlington o utilizar varios fet y una fuente de corriente constante. Va seguido de una etapa amplificadora lineal de alta ganancia, generalmente otro amplificador diferencial. Si la c.c existente en la salida del amplificador de alta ganancia, no es cero voltios cuando $v_1 = v_2 = 0$ V, se emplea un circuito desplazador de nivel



Figura - 1.168.VIII - Diagrama de bloques de un AO

como un amplificador cascodo⁸. La última etapa es un amplificador de salida, habitualmente uno de simetría complementaria.

$$v_0 = -A_d(v_1 - v_2) - \frac{a_0(v_1 + v_2)}{2}$$

En la elaboración de los Amplificadores Operacionales generalmente se utilizan más de 20 transistores. Un Amplificador Operacional sencillo, compuesto por ocho transistores, se muestra en la figura 1.169.VIII. Mediante líneas rojas se definen los contornos de los distintos bloques que lo conforman:

- 1 Amplificador Diferencial Darlington
- 2 Amplificador Diferencial Desplazador de Nivel
- 3 Amplificador de Salida

Como complemento a lo aquí tratado, en las páginas que siguen aparecen los

⁸ El término cascodo denomina un tipo especial de conexión entre amplificadores.

El amplificador Darlington, también llamado "amplificador compuesto" es una conexión muy popular de dos transistores de unión bipolar para funcionar como un solo transistor. La conexión Darlington tiene como característica principal que el amplificador actúa como una sola unidad con ganancia de corriente que es producto de las ganancias de corriente de dos transistores por separado.

Las siglas FET, indican transistor de efecto de campo.

esquemas de distintos circuitos osciladores generadores de onda cuadrada y susceptibles de utilización en la moderna fabrica de relojes. En la figura de la página 170, figura - 1.170.VIII, se muestra el esquema de un oscilador/generador de reloj [Rudolf F - 99]. Este oscilador de frecuencia fija con autoarranque proporciona una excelente estabilidad de frecuencia. R1 y C1 forman la red de determinación de la frecuencia, mientras que R2 proporciona la realimentación regenerativa. El diodo D1

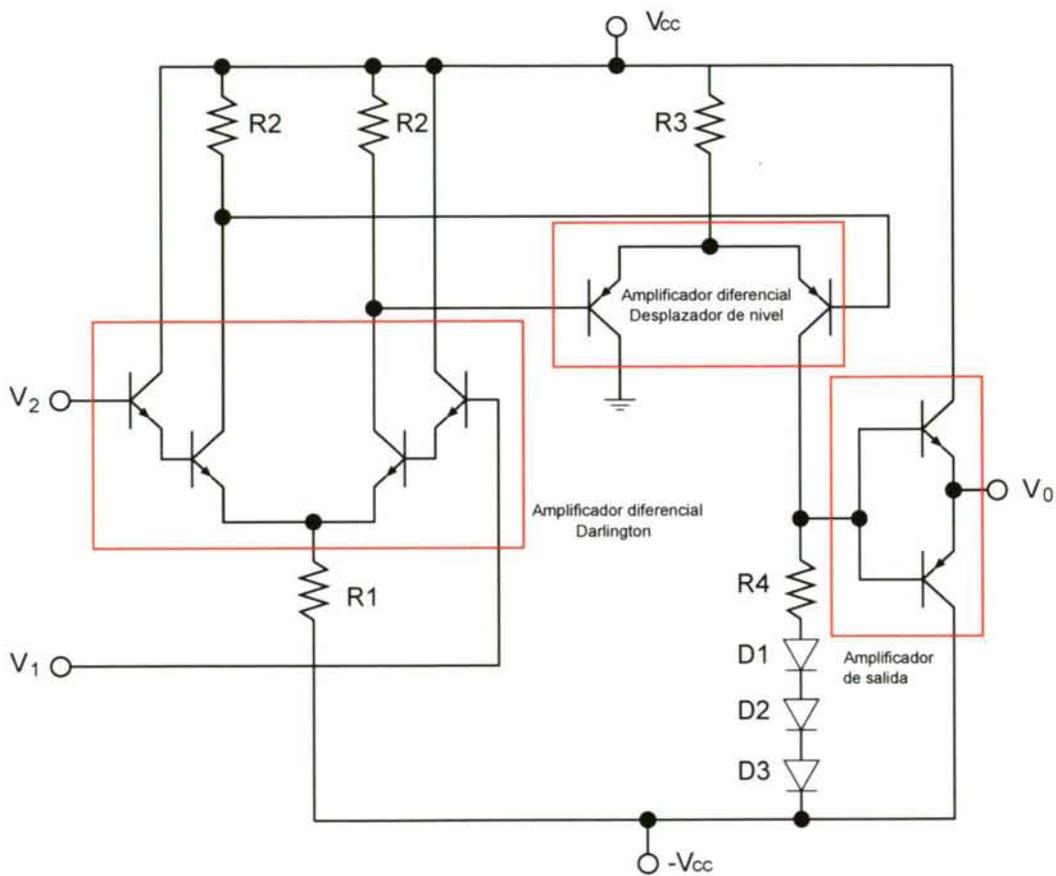


Figura - 1.169.VIII - Amplificador operacional

mejora la estabilidad, compensando la diferencia entre V_{OH} y $V_{alimentación}$. En aplicaciones donde se requiera un generador de reloj de precisión de hasta 100 KHz, como en el caso de los equipos automáticos de prueba, puede reemplazarse C1 Por un cristal. La fuente de este esquema es HARRIS SEMICONDUCTOR.

La figura 2.170.VIII, corresponde a un circuito oscilador de tecnología **CMOS**,

COUPLED METAL OXIDE SEMICONDUCTOR, un tipo de semiconductor utilizado desde hace muchos años para el diseño de procesadores comerciales: el variar el potenciómetro de 100 k Ω hace que cambie la velocidad de descarga C_T y, por tanto, la frecuencia [RUDOLF F-99]. El circuito genera una onda cuadrada de salida. La frecuencia máxima utilizando CMOS está limitada a 2 Mhz. Fuente: ELECTRONICS

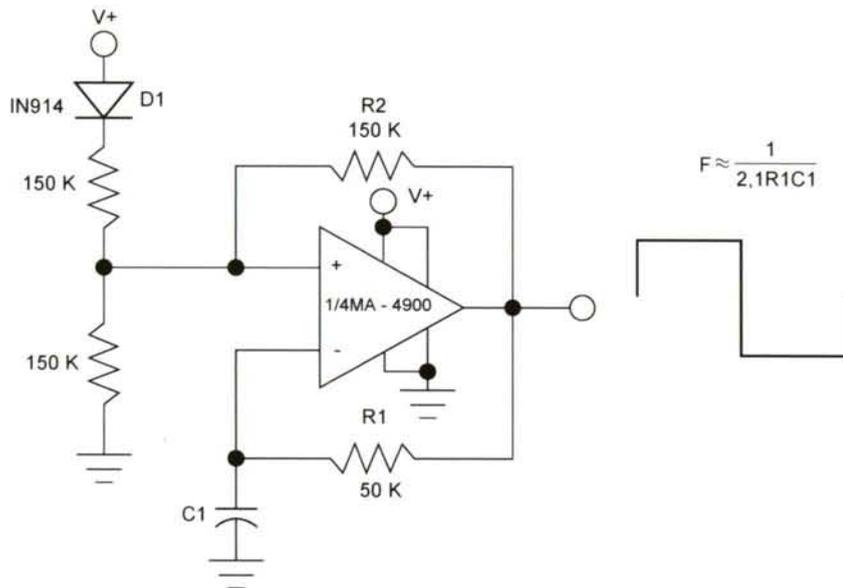


Fig - 1.170.VIII - Oscilador/generador de reloj

TODAY INTERNATIONAL.

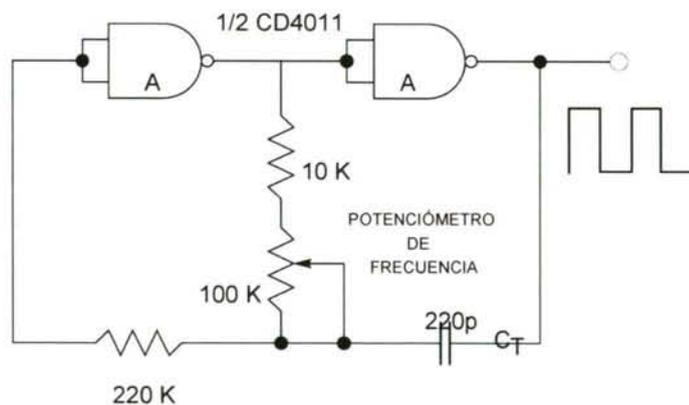


Fig - 2.170.VIII - Oscilador CMOS

Un oscilador libre de onda cuadrada de gran estabilidad es el correspondiente al esquema de la página 171, figura 1.171.VIII, OSCILADOR LIBRE DE ONDA CUADRADA. Fuente MOTOROLA.

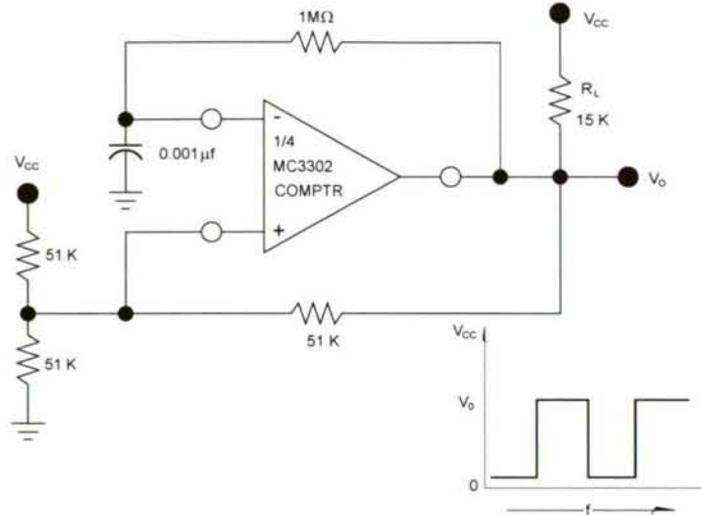


Fig - 1.171.VIII - Oscilador libre de onda cuadrada

Por último, entre los generadores de onda cuadrada que en número imposible

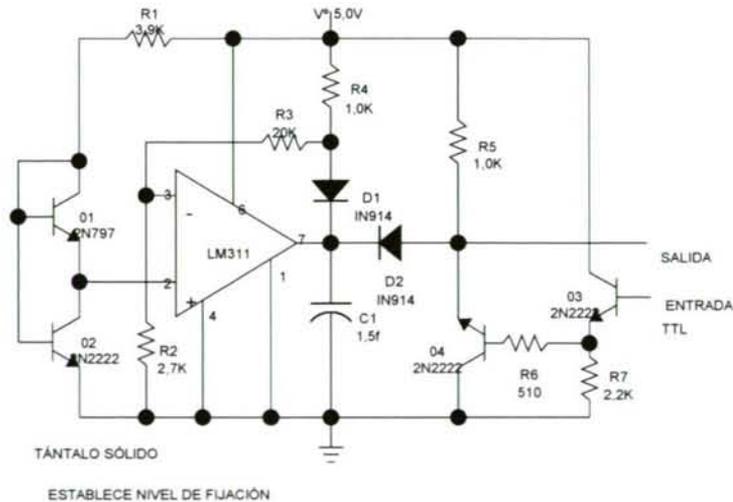


Fig - 2.171.VIII - Generador de onda cuadrada de precisión

de reflejar en estas páginas figuran en los diversos tratados, destacamos el reflejado

por el esquema de la figura 2.172.VIII, un GENERADOR DE ONDA CUADRADA DE PRECISIÓN. Fuente: NATIONAL SEMICONDUCTOR.

Por último, y como colofón al breve estudio del cronómetro electrónico, la figura 1.172.VIII, muestra el esquema:

RELOJ 12 HORAS CON DISPLAY DE DESCARGA DE GAS.

Fuente: MOTOROLA.

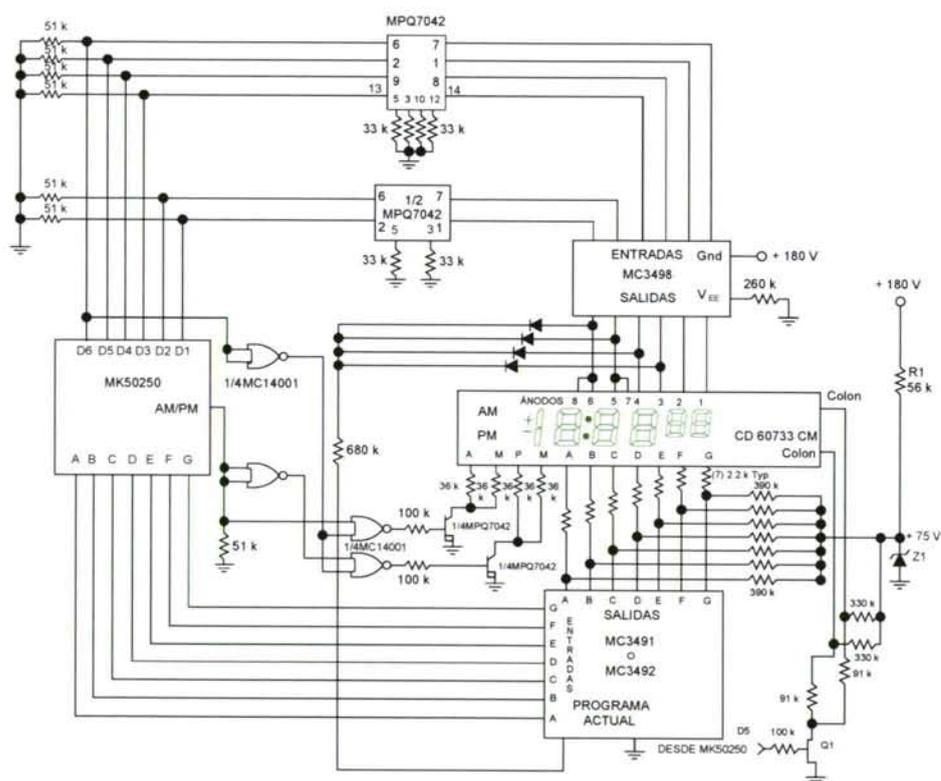


Fig - 1.172.VIII - Reloj de 12 horas con display de descarga de gas

La ilustración de la página 173, figura 1.73.VIII, muestra el esquema de un reloj electrónico digital (magistral), para el control de un equipo de relojes dependientes como el que pudiera ser el correspondiente a un gran buque destinado a turismo. Obsérvese la efectiva posibilidad de controlar los tiempos de circuitos de radio, televisión, señales horarias locales, etc

*La hipérbola esférica en la Navegación Astronómica.
 Recta diferenciométrica.
 Verdadera naturaleza de la bisectriz de altura.*

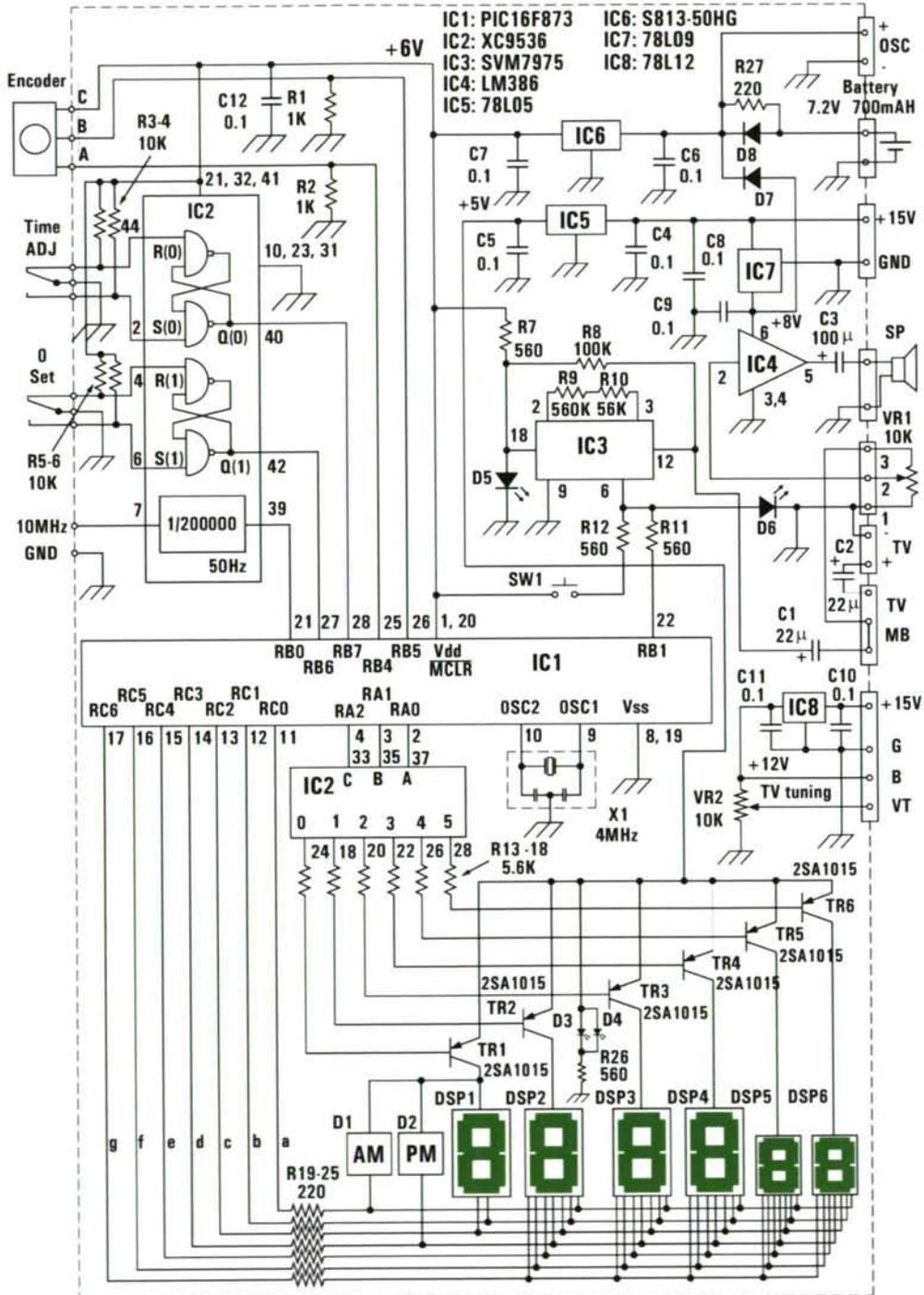


Figura - 1.173.VIII - Cronómetro magistral moderno

Dado que los marinos son muy apegados a sus procedimientos tradicionales, aun los modernos cronómetros presentan esferas clásicas, es decir, se prefiere la presentación analógica a la digital, tal como ocurre en el cronómetro de la figura 1.174.VIII, ejemplo avanzado de los modernos cronómetros electrónicos, en el que como puede comprobarse la suspensión cardánica propia del cronómetro mecánico ha desaparecido



Figura - 1.174.VIII - Cronómetro Glasshütte

al perder en este su utilidad práctica.

11. ESTADO ABSOLUTO Y MOVIMIENTO DEL CRONÓMETRO. —Estado absoluto del cronómetro, EA, es la diferencia que en un instante dado existe entre la hora del primer meridiano, HCG, y la que señala dicho cronómetro, HCron:

$$EA = HCG - HCron$$

La variación diaria del estado absoluto recibe el nombre de movimiento diario del cronómetro. En algunos textos no específicamente náuticos se conoce por marcha del cronómetro. Los modernos cronómetros carecen de movimiento sensible y una vez ajustados a la hora del meridiano de Greenwich, salvo averías que ocasionen su inutilidad o paradas por falta ocasional de alimentación, permanecen con la hora exacta, a los fines de la Navegación Astronómica, por largos periodos de tiempo. Desde una óptica didáctica el movimiento diario del cronómetro se calcularía una vez conocido el estado para dos instantes suficientemente espaciados en el tiempo, dividiendo la variación del estado por el número de periodos de 24 horas transcurrido; el ejemplo siguiente aclarará cualquier duda:

Fecha	HCG	HCron	EA	ΔEA	Periodo	m
05012003	103000	102954	000006			
07022003	174000	173949	000011	000005+	33,2986	+0,15 ^{SEG}

Si el estado aumenta, el cronómetro atrasa y el movimiento tiene signo positivo; si disminuye el estado, el cronómetro adelanta y el movimiento es negativo. Convencionalmente el estado absoluto se considera positivo; si resultara negativo, bastaría restarlo de 12 horas para restituir el signo +. Un cronómetro se considera óptimo si su movimiento, independientemente de su entidad, es constante, es decir, si tiene una marcha regular.

12. HORAS DEL CRONÓMETRO Y DEL PRIMER MERIDIANO. — Para obtener la hora del primer meridiano, HCG, dada la del cronómetro, Hcro, se sumará a esta el estado absoluto y la parte proporcional del movimiento correspondiente al periodo de tiempo transcurrido entre el instante de cálculo del estado y la hora actual. En las modernas salas de derrota se dispone continuamente de la HCG, pero todo marino que se precie llevará un diario de cronómetros en los que anotará estado y movimiento, lo que le permitirá, llegado el momento, determinar con rigor las horas precisas en toda observación.

CAPÍTULO IX

EL RECONOCIMIENTO DE LOS ASTROS

1. INTRODUCCIÓN. — Los navegantes expertos reconocen con cierta facilidad la mayoría de las estrellas contenidas en los almanaques náuticos. Cuando observamos en los crepúsculos claros, con cielos completamente despejados, no hay dificultad alguna en la selección de los observables que serán convenientemente elegidos en función de sus coordenadas horizontales: sus verticales deben cortarse lo más ortogonalmente posible evitando aquellos con alturas inferiores a los 20° para los que la corrección por refracción astronómica media pudiera acarrear errores sensibles, y aquellos que por su excesiva altura resulten poco adecuados. Esta operación puede ser previamente preparada efectuando los cálculos de alturas y azimutes para la hora aproximada de la observación y situación estimada correspondiente a este momento; destacamos por la sencillez de manejo las tablas *Sight Reduction*, [PUB N° 2000-VOL 1,2 & 3, (VOL 1 - SELECTED STARS)] vulgarmente conocidas como “Tablas Americanas”, que disponen de una óptima selección de estrellas de las que facilitan altura estimada y azimut. Ideadas para la navegación aérea, pueden resultar muy prácticas en la navegación marítima, debiendo tenerse en cuenta el inconveniente de la presencia de nubes en el instante de la observación, que puede convertirlas en prácticamente inútiles. Fijada en el sextante la altura estimada de la estrella a observar y encarando en la dirección de su vertical, el astro aparecerá en el campo óptico del sextante sobre o bajo la línea del horizonte marino. Cuando la observación se lleva a cabo entre claros en las nubes, los astros observados no son fácilmente reconocibles o resultan completamente desconocidos al perderse las referencias de su entorno: constelaciones, enfilaciones, proximidades de otras estrellas conocidas, etc, debiendo procederse a su reconocimiento una vez medidos altura y azimut, y tomada la correspondiente hora del cronómetro. Existen diferentes técnicas de reconocimiento: analítico, basado en la resolución del triángulo de posición, planisferios, identificadores, ortográfico, tablas etc, de los cuales nos ocuparemos a continuación, y para los cuales dispondremos de los datos situación, hora del primer meridiano, altura y azimut.

2. RECONOCIMIENTO ANALÍTICO. — Las fórmulas utilizadas serán:

$$\text{sen } d = \text{sen } \varphi \cdot \text{sen } a + \text{cos } \varphi \cdot \text{cos } a \cdot \text{cos } Z \quad (3.17.II)$$

conocida como fórmula de la declinación, y:

$$\text{ctg } hl = \text{cos } \varphi \cdot \text{tg } a \cdot \text{cosec } Z - \text{sen } \varphi \cdot \text{ctg } Z \quad (6.17.II)$$

denominada fórmula de la cotangente del horario. En la primera se debiera proceder de acuerdo a la siguiente disposición:

$$\begin{array}{rcl} \text{sen } \varphi \cdot \text{sen } a = & & + \\ + \text{cos } \varphi \cdot \text{cos } a \cdot \text{cos } Z = & & \pm \\ \text{sen } d = & & \pm \end{array}$$

En cuanto a los signos, pueden seguirse los de la trigonometría, pero resulta más eficaz la regla siguiente: el primer producto, tal como aparece en la precedente disposición, es siempre positivo; el segundo producto es positivo si el azimut, contado en modo cuadrantal, tiene origen en el polo elevado (recuérdese que por polo elevado entendemos el del mismo nombre que la latitud, de aquí que la regla pueda enunciarse: si el azimut tiene el mismo nombre que la latitud, el segundo producto es positivo), es negativo en caso contrario; aplicando a éste segundo producto (que viene precedido de signo +) la regla de signos, obtendremos su signo final. Sumando ambos productos se obtendrá el seno de la declinación con su signo: si este es positivo, la declinación es del mismo nombre que la latitud, si resulta negativo, latitud y declinación tienen nombre contrario. En el cálculo del horario local del astro dispondremos las operaciones en la misma forma que en el caso anterior:

siguiendo idéntico criterio de signos. Si la cotangente es positiva, el horario local es

$$\begin{array}{rcl} \text{cos } \varphi \cdot \text{tg } a \cdot \text{cosec } Z = & & + \\ - \text{sen } \varphi \cdot \text{ctg } Z = & & \pm \\ \text{ctg } hl = & & \pm \end{array}$$

menor de 90° , si es negativa, el horario es mayor de 90° , oriental u occidental según el azimut. Del horario local se pasa a horario en Greenwich,

$$hG = hl + \lambda$$

éste hG ha de ser occidental; si la declinación calculada es menor de $\pm 30^\circ$, con ésta y el hG comprobaremos si el astro observado es un planeta, si no lo es, determinaremos el horario en Greenwich de Aries para la hora de la observación, obteniendo el ángulo sidéreo del astro:

$$AS_{\star} = hG_{\star} - hG_{\gamma}$$

Con éstos valores del ángulo sidéreo y declinación, en las posiciones aparentes del Almanaque Náutico, o publicación similar, identificaremos el astro observado. En general, la diferencia entre los valores calculados y los exactos, coordenadas éstas últimas que han de utilizarse en el cálculo de la línea de posición, no irá más allá de 1° , lo que permite una identificación fiable en la mayoría de los casos. El reconocimiento analítico se simplifica al paso de los astros por el meridiano y en circunstancias favorables para la observación, cuyo estudio se verá en capítulos posteriores.

3. RECONOCIMIENTO POR MEDIO DE LAS TABLAS NÁUTICAS. — Con independencia de autor y modelo, éste reconocimiento se lleva a cabo en las tablas para el cálculo del azimut (también utilizadas para el cálculo del rumbo inicial); en ellas los valores tabulados corresponden a los obtenidos después de preparada la fórmula de la cotangente del azimut de la manera siguiente:

$$\operatorname{ctg} Z = \cos \varphi \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} d}{\operatorname{sen} hl} - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} hl} \right) \quad (1.178.IX)$$

Haciendo:

$$A = \frac{\operatorname{tg} d}{\operatorname{sen} hl} \quad ,, \quad B = - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} hl} \quad ,, \quad C = A + B \quad \text{y} \quad \operatorname{ctg} Z = \cos \varphi \cdot C$$

tendremos los valores de A, B, C y ctg Z a tabular. Por permuta circular de las variables tendremos:

$$\operatorname{ctg} hl = \cos \varphi \cdot \left(\frac{\operatorname{tga}}{\operatorname{sen} Z} - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} Z} \right) \quad (1.179.IX)$$

Y:

$$A = \frac{\operatorname{tga}}{\operatorname{sen} Z} \quad ,, \quad B = - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} Z} \quad ,, \quad C = A + B \quad \text{y} \quad \operatorname{ctg} hl = \cos \varphi \cdot C$$

por lo que el primer elemento a determinar es el horario local del astro. Una vez conocido éste, con azimut, altura y horario, se calcula la declinación por entrada inversa. Los siguientes pasos son los mismos que en el caso estudiado anteriormente, comunes a todos los procedimientos.

4. RECONOCIMIENTO ORTOGRÁFICO. — En éste procedimiento se pasa de las coordenadas horizontales, altura y azimut, a las coordenadas horarias relativas, declinación y horario local, por resolución mecánica del triángulo de posición y utilizando la proyección ortográfica, que no siendo conforme ni equivalente, permite dicho paso mediante sencillas operaciones de abatimiento y elevación, con medida directa de los valores angulares en verdadera magnitud.

Idealícese la esfera celeste, figura 1.180.IX, trazando una circunferencia de radio arbitrario, no debe emplearse un valor pequeño del radio en orden a obtener resultados suficientemente exactos; con un radio de unos 5 cm, y dependiendo de la habilidad del dibujante, puede conseguirse precisión cercana al medio grado. Tirar por el centro de esta circunferencia una línea vertical PP' para materializar el eje del mundo, y, por el mismo centro, una línea perpendicular al eje del mundo para fijar, así, la traza del ecuador celeste QQ' con el plano del dibujo. La línea ZZ' que pasando por el centro forma con el ecuador celeste el ángulo φ de la latitud, será la vertical astronómica, y la perpendicular a esta por el centro, materializa la traza NS del horizonte astronómico o línea meridiana. Mídase el valor de la altura, del horizonte hacia el cenit, y trácese el almicantarát. Abátase este al plano del dibujo y trácese el vertical formando con la meridiana el ángulo en el cenit o azimut; el corte de vertical y almicantarát materializa el astro; elevando el almicantarát, fijaremos en la esfera celeste el astro observado; trácese el paralelo de declinación: esta puede ser inmediatamente medida. Abátase dicho paralelo de declinación al plano del dibujo y trácese el círculo horario: mediremos

el horario local del astro desde el meridiano superior. Con horario local y declinación, síganse los pasos descritos en los métodos precedentemente estudiados.

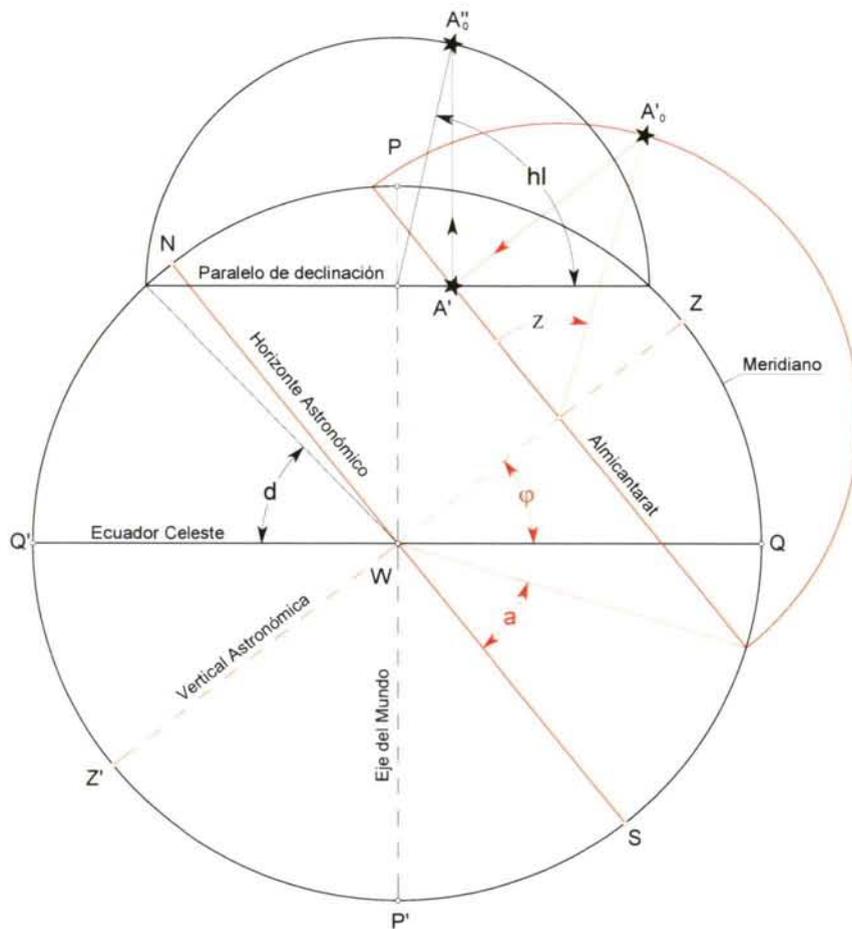


Figura - 1.180.IX - Reconocimiento ortográfico

5. PLANISFERIOS E IDENTIFICADORES. — La representación plana de la esfera celeste, planisferios, proporciona un sinfín de dispositivos susceptibles de facilitar al navegante los astros observables en un momento dado; de todos ellos, los que han alcanzado una mayor difusión dada su facilidad de manejo, se fundamentan en la proyección azimutal equidistante o proyección de Postel [CUENIN - 72]. Dado que los planisferios que figuran en nuestro Almanaque Náutico, así como los identificadores tipo “*Star Finder*”, que actualmente son los casi exclusivamente utilizados, se construyen en este tipo de proyección, consideramos de interés formativo el dedicar unas líneas al estudio de sus propiedades.

6. PROYECCIÓN AZIMUTAL EQUIDISTANTE. — Sea, en la superficie esférica, que para mayor facilidad consideramos de radio unidad, el punto O convenientemente elegido, considérese el haz de círculos máximos que pasan por dicho punto y, dentro de éste haz, fijese uno de los círculos máximos como origen de azimutes; la correspondencia biunívoca establecida entre los puntos G de la esfera, de coordenadas φ_G, Z_G , en las que φ_G es la distancia esférica OG y Z_G el acimut, y los puntos G' del plano, de coordenadas polares $\rho_{G'}, Z'_{G'}$, tales que:

$$\left. \begin{aligned} \rho_{G'} &= k \cdot \varphi_G \\ Z'_{G'} &= Z_G \end{aligned} \right\}$$

recibe el nombre de proyección azimutal equidistante, figura 1.181.IX. Desde el punto de vista matemático carece de trascendencia alguna la apariencia de la red de meridianos y paralelos del sistema de coordenadas geográficas; las modalidades polar, transversa y horizontal, son absolutamente arbitrarias. Para el estudio de las deformaciones analicemos en el entorno del punto G el triángulo rectángulo formado por los elementos diferenciales que se muestran en la figura 1.182.IX, en la esfera y en

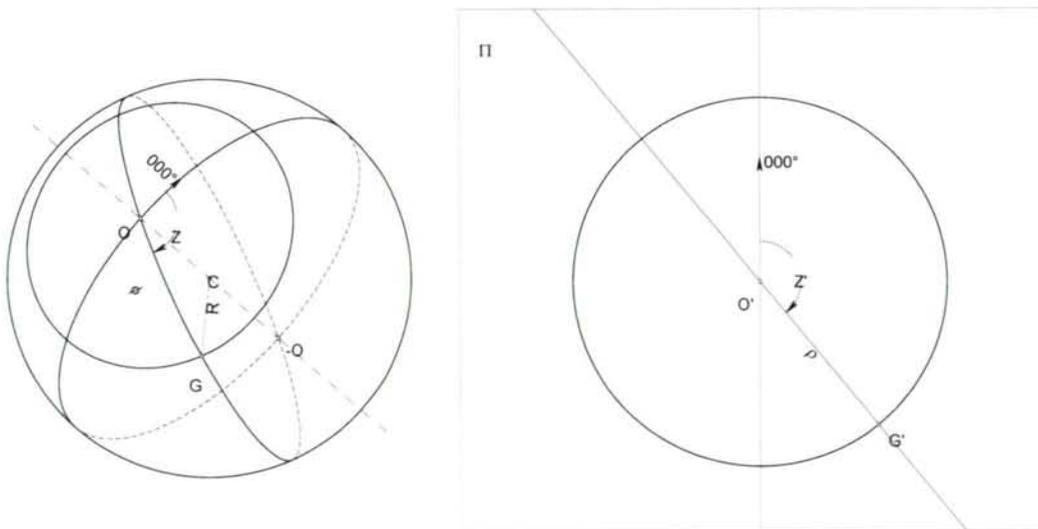


Figura - 1.181.IX - Proyección azimutal equidistante
 el plano de proyección Π . Considerando $k = 1$, las funciones de paso son :

$$\left. \begin{aligned} \rho_{G'} &= \varphi_G \\ Z'_{G'} &= Z_G \end{aligned} \right\}$$

La igualdad $\rho_G = \varphi_G$ implica que el segmento de recta (radio vector) ρ , es la rectificación del arco de círculo máximo φ ; de aquí en esfera y plano, respectivamente, tendremos:

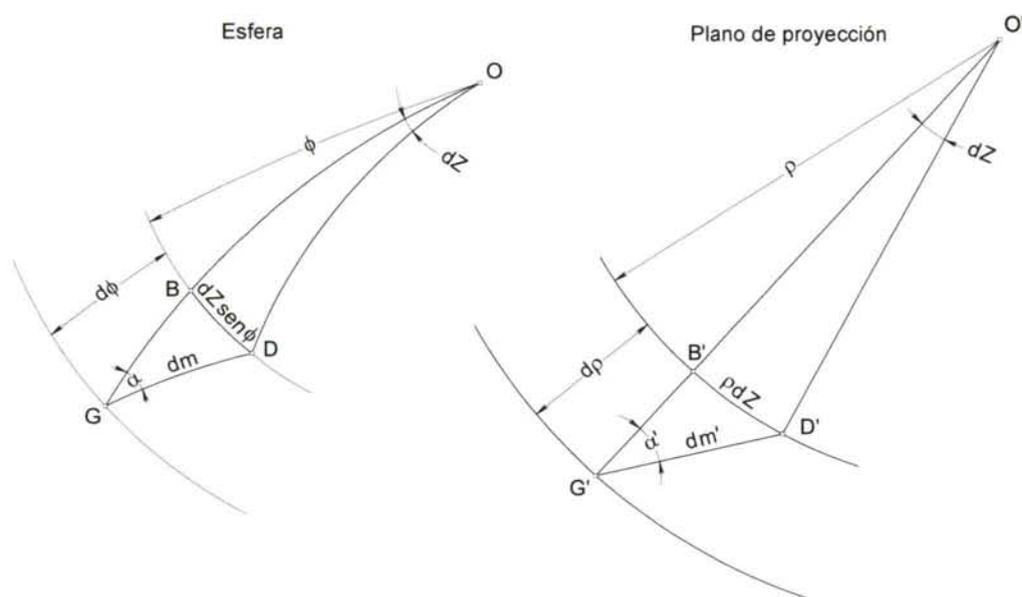


Figura - 1.182.IX - Deformaciones

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{dZ \operatorname{sen} \varphi}{d\varphi} \\ \operatorname{tg} \alpha' &= \frac{\rho dZ}{d\rho} \end{aligned} \right\}$$

Pasando a los cocientes de las tangentes,

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\varphi}{\operatorname{sen} \varphi}$$

demostrándose que la proyección no es conforme. Su condición de azimutal, y puesto que:

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\operatorname{sen} \varphi} = 1$$

queda patente. Por lo que se refiere a la deformación lineal,

$$dm = d\varphi \cdot \operatorname{sec} \alpha \quad , \quad dm' = d\rho \cdot \operatorname{sec} \alpha'$$

Estableciendo los cocientes de los elementos lineales diferenciales:

$$\frac{dm'}{dm} = \frac{\operatorname{sec} \alpha'}{\operatorname{sec} \alpha}$$

que, después de simples sustituciones y simplificaciones,

$$dm' = dm \cdot \sqrt{\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \frac{\varphi^2}{\operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

expresión polar de la elipse indicatriz de las deformaciones, elipse indicatriz de Tissot [ASIN - 90]. Las deformaciones aumentan con la distancia al origen (en la proyección, punto principal); para $\alpha = 0$, es $dm' = dm$: las líneas rectas que pasan por el punto principal y que son las transformadas de los círculos máximos que pasan por el punto O, son líneas automecoicas, es decir, a lo largo de las mismas no hay deformación lineal, (condición de equidistante). Para $\alpha = \pi/2$, resulta:

$$dm' = dm \cdot \frac{\varphi}{\operatorname{sen} \varphi}$$

Así, pues, los círculos menores de la superficie esférica con centro común O, se transforman en círculos concéntricos en O', familia de líneas isométricas a lo largo de las cuales la deformación lineal es constante [ROGSINOL - 97]. En particular el punto -O, diametralmente opuesto al O, se transforma en una circunferencia de radio $R = \pi$, en la proyección, la de mayor radio, lo que nos da una idea de la gran deformación en este tipo de proyección. Cualquiera otra línea de la esfera tiene por transformada una curva transcendente cerrada. Con similar razonamiento al aquí seguido puede demostrarse que ésta representación no es equivalente, consideración que carece de interés en nuestro estudio. Una proyección equidistante no azimutal, y de la que

hacemos mención debido al hecho de su inclusión en el Almanaque Náutico para la representación de la zona comprendida entre los paralelos $+40^\circ$ y -40° , es la denominada proyección cilíndrica equidistante; es un desarrollo cilíndrico con meridianos automecóicos.

7. RECONOCIMIENTO EN EL ALMANAQUE NÁUTICO. — Determinado el horario local occidental de Aries y expresado en tiempo, tendremos la ascensión recta del meridiano del lugar; para materializar dicho meridiano tracemos la línea radial correspondiente a esta coordenada, figura 1.185.IX. Sobre él y a partir del ecuador, llevemos la latitud φ fijando el cenit z , (alternativamente podremos llevar la colatitud desde el polo), con centro en el cenit y radio igual a la distancia cenital, tracemos una circunferencia y, con origen el meridiano, llevemos el azimut teniendo presente que la proyección invierte la orientación del vertical: el cardinal W quedará a la derecha cuando el observador encare el N; trácese el vertical como una línea recta: el astro más próximo al punto de intersección del vertical y el círculo centrado en el cenit será, muy probablemente, el astro observado. Este planisferio nos permite, además, la preparación de la observación; recordando que al no ser conforme, el ángulo de corte de los verticales, que idealizaremos por líneas rectas que con origen en el cenit pasan por los astros seleccionados, no aparece en verdadera magnitud, (a 40° de latitud, el azimut 060° medirá en la proyección unos 63° ; puesto que al trazar el vertical como una línea recta lo que realmente trazamos es la cuerda de un arco de cierta curva, el error será sensiblemente mayor). Para determinar los astros observables trazaremos con centro en el cenit una circunferencia de radio igual al cuadrante de meridiano, y para seleccionar astros con altura igual o superior a 20° , con centro en el mismo cenit trazaremos una circunferencia de radio 70° de meridiano: todas las estrellas que caigan dentro de esta circunferencia tendrán una altura superior a la fijada. Ya se ha dicho que los círculos de alturas iguales, así como los verticales, tienen por transformadas curvas cerradas transcendentales; las circunferencias y rectas trazadas simplifican el problema y los resultados obtenidos son aproximados; en zonas de estrellas relativamente concentradas este procedimiento puede resultar ineficaz. En la proyección también se representa la trayectoria aparente del Sol en la eclíptica, con las posiciones que aproximadamente corresponden al día 15 de cada mes. El procedimiento explicado es de aplicación tanto en el caso de las proyecciones polares (proyección polar azimutal equidistante), como en el caso de la proyección cilíndrica equidistante, tal y como puede verse en las siguientes páginas.

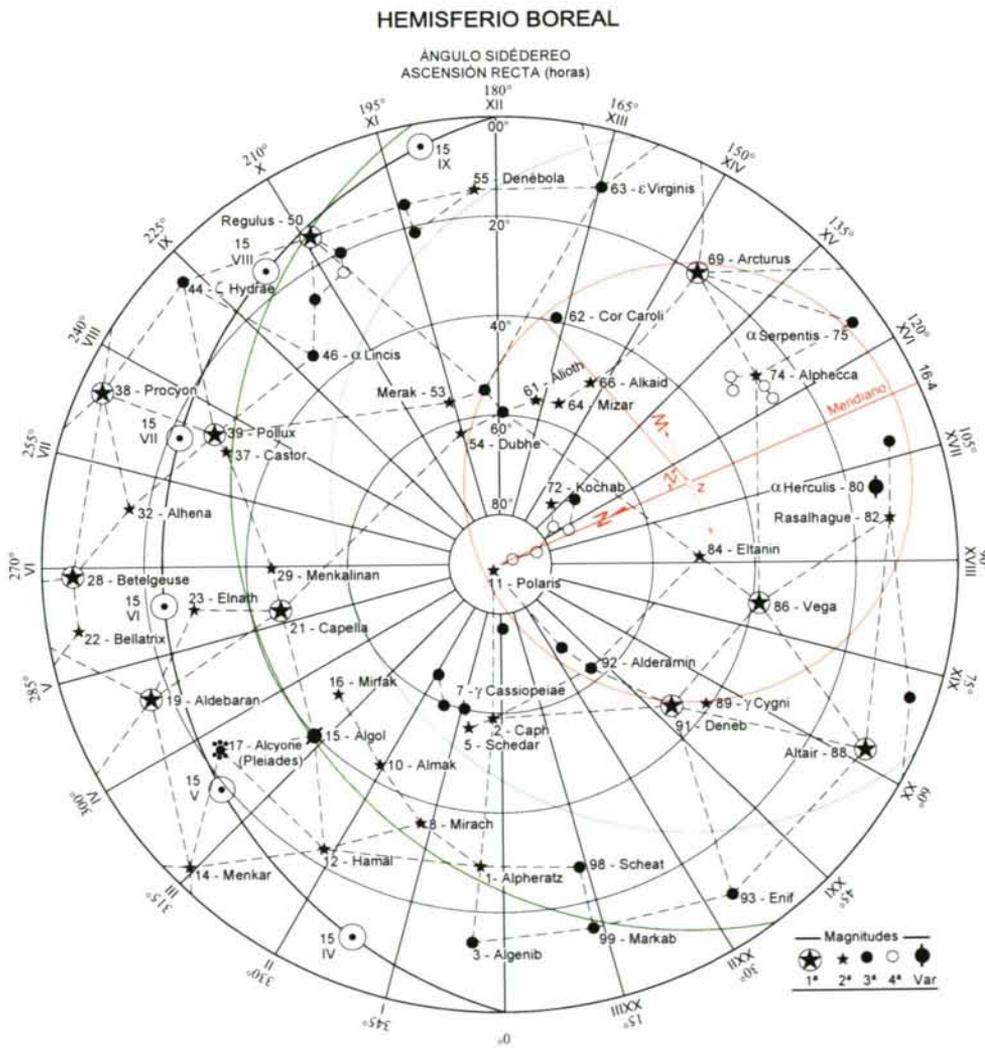


Figura - 1.185.IX - Reconocimiento en el Almanaque Náutico.

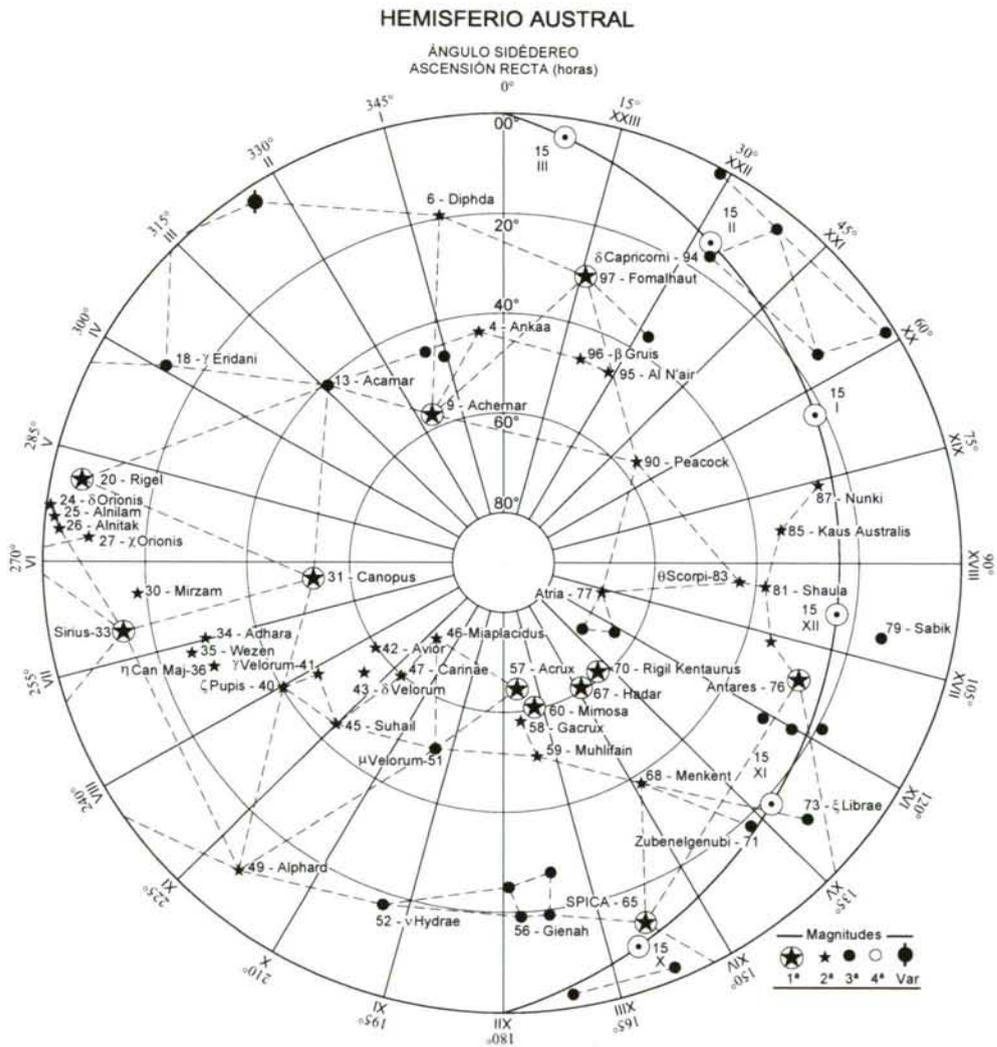


Figura - 1.186.IX - Hemisferio austral

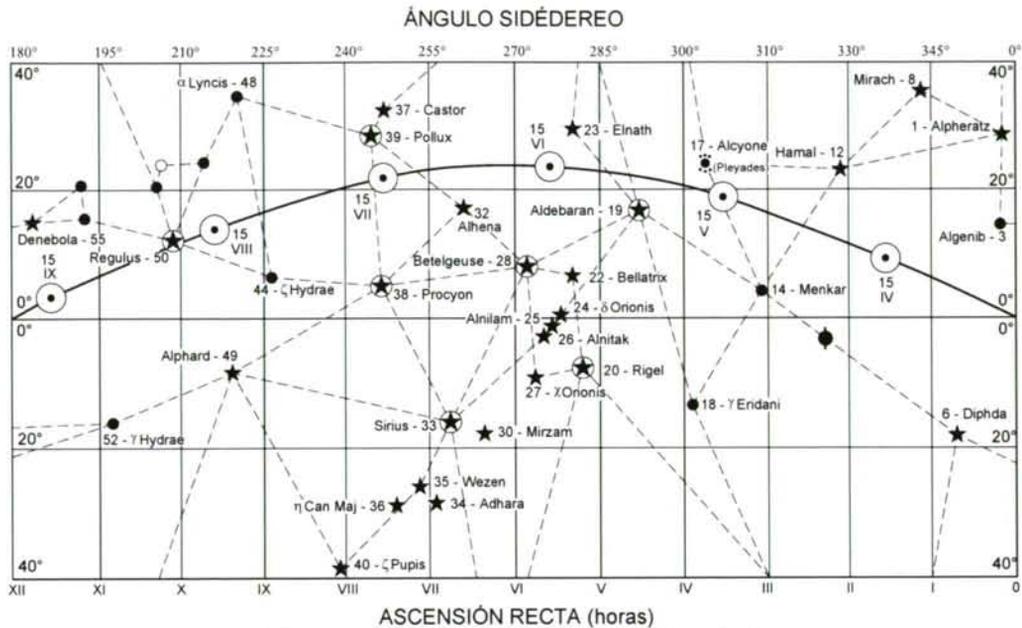


Figura - 1.187.IX - Cilíndrica equidistante A

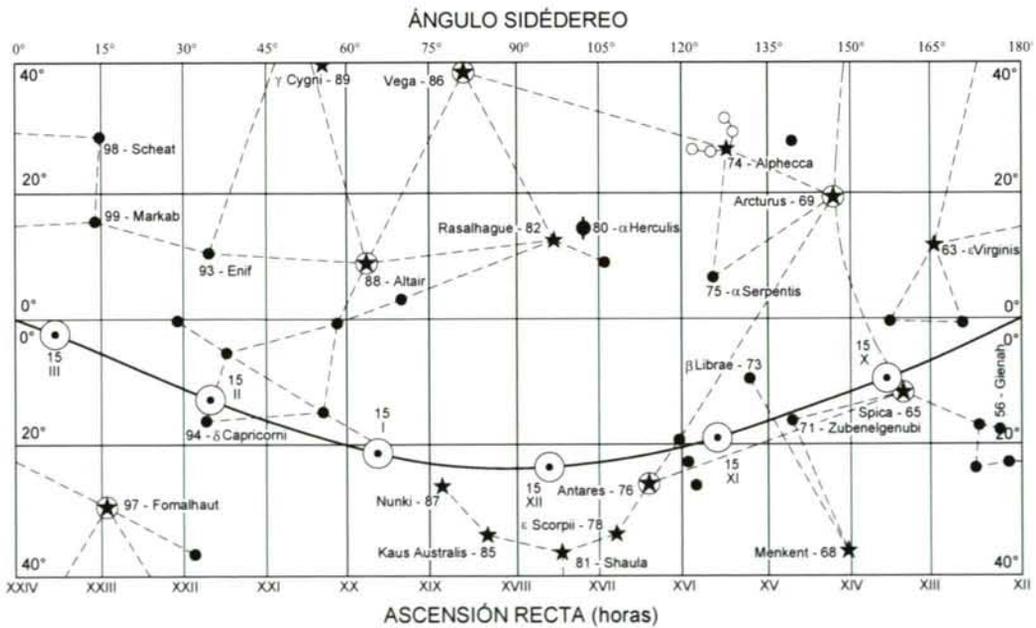
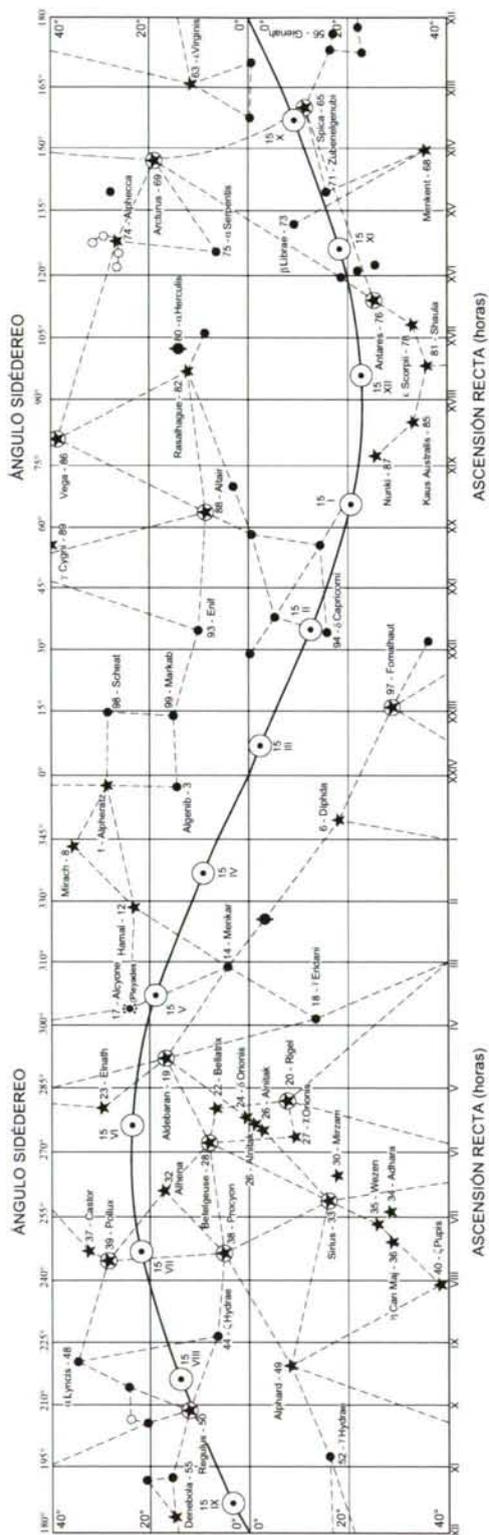


Figura - 2.187.IX - Cilíndrica equidistante B

*La hipérbola esférica en la Navegación Astronómica.
 Recta diferencial.
 Verdadera naturaleza de la bisectriz de altura.*



DESARROLLO CILINDRICO CON MERIDIANOS AUTOMECOICOS
 DECLINACIONES DE 40° N. A 40° S. ASCENSION RECTA DE 0 A 24 HORAS

Figura - 1.188.IX - Desarrollo cilindrico equidistante

8. DESCRIPCIÓN DEL “STAR FINDER 2102 - D”. — La mecanización del proceso de identificación encuentra aquí el más rápido y eficaz dispositivo; su huso es, hoy en día, casi general, si bien por no contar con un elevado número de estrellas, en determinados casos no resuelve el problema. En proyección polar azimutal equidistante presenta una amplia selección de las observables, las más comunes, disponiendo para

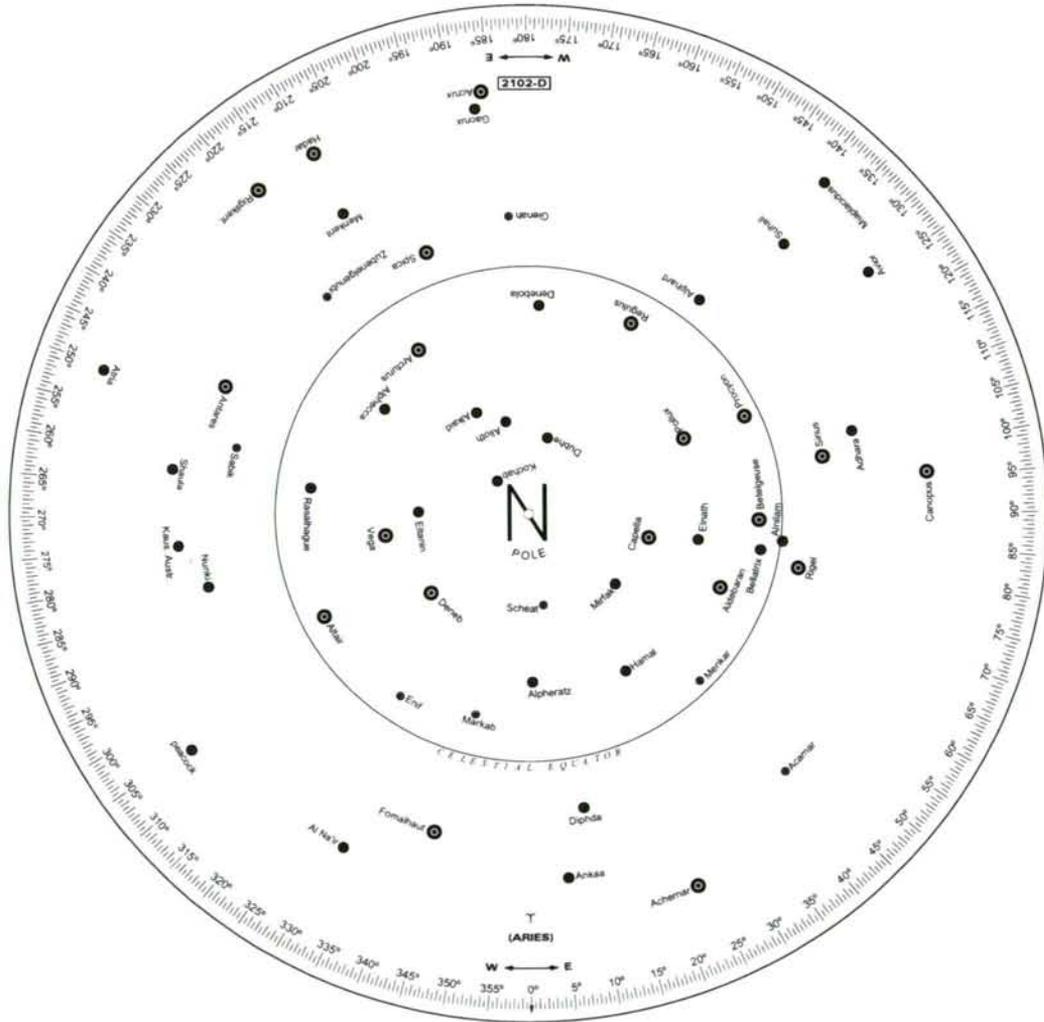


Figura - 1.189.IX - Polar azimutal equidistante. Plano boreal

ello de un disco plano opaco, una de cuyas caras es el plano que denominaremos boreal o norte, la cara opuesta es el plano austral o sur; ambos comprenden la totalidad de la esfera celeste, por lo que en uno y otro caso el polo antípoda aparece como la circunferencia que limita la proyección, internamente a la cual figura la graduación del

horario local de Aries con precisión de $0,5^\circ$; véanse las figuras 1.189.IX y 1.190.IX; el ecuador celeste aparece como una circunferencia de radio la mitad de la anterior. En el mismo tipo de proyección figuran una serie de discos transparentes susceptibles de girar libremente sobre un pequeño pivote que, a modo de eje, posee el disco que contiene los planos boreal y austral; cada uno estos discos transparentes presenta la

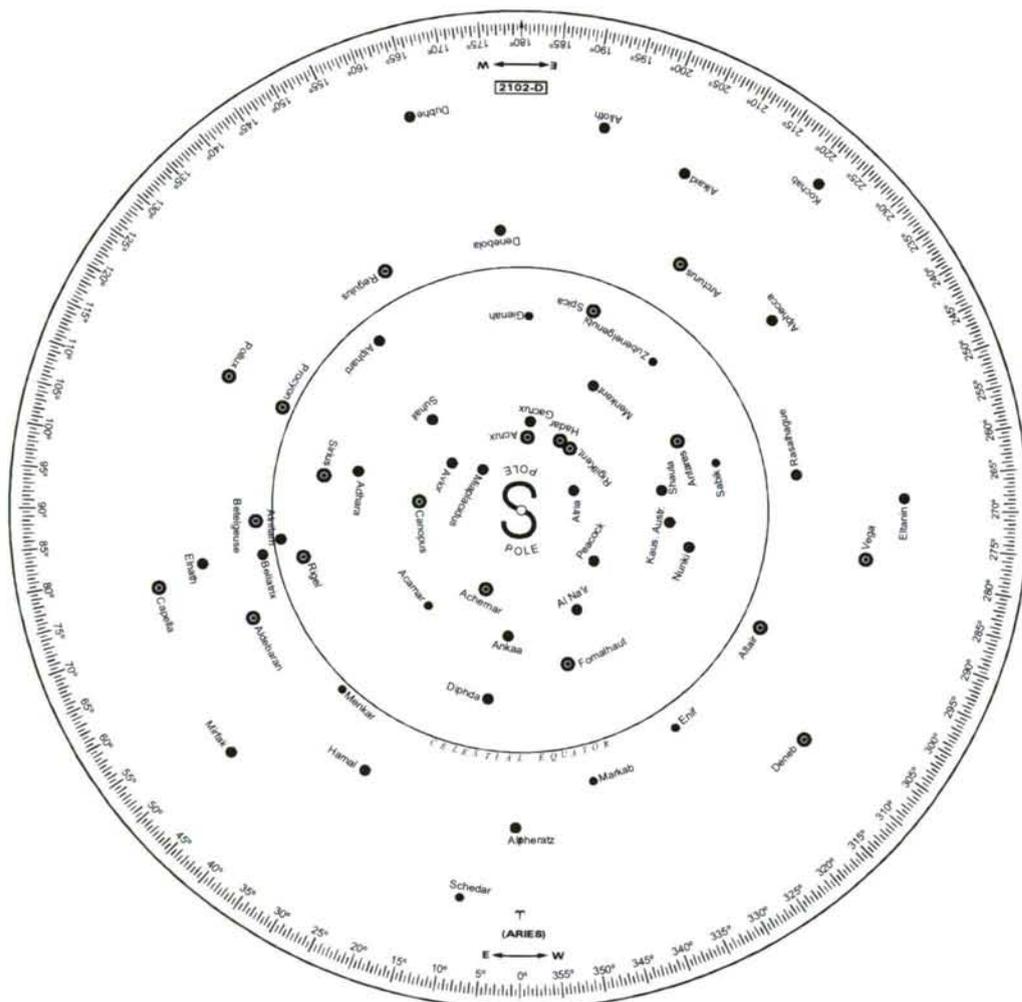


Figura - 1.190.IX - Polar azimutal equidistante. Plano austral

trama de verticales y almicanarates que corresponden al cenit del observador para las latitudes 5° , 15° , 25° , 35° , 45° , 65° , 75° y 85° : para cada disco, una cara pertenece al hemisferio norte y la opuesta, al hemisferio sur; ver figura 1.191.IX, en la que a título de ejemplo se presenta la proyección correspondiente a la latitud $\phi = 35^\circ$ N. El intervalo entre verticales y almicanarates es de 5° en todos ellos, siendo el almicanarat límite

el de altura 80° ; la graduación de la altura, de 10° en 10° , recorre el meridiano y los verticales 130° y 230° . La graduación de los verticales, con el mismo intervalo de 10° en 10° , aparece a lo largo del horizonte astronómico. Obsérvese la doble graduación; la que aparece invertida corresponde al hemisferio opuesto. Puesto que las coordenadas uranográficas ecuatoriales de las estrellas varían muy lentamente en el

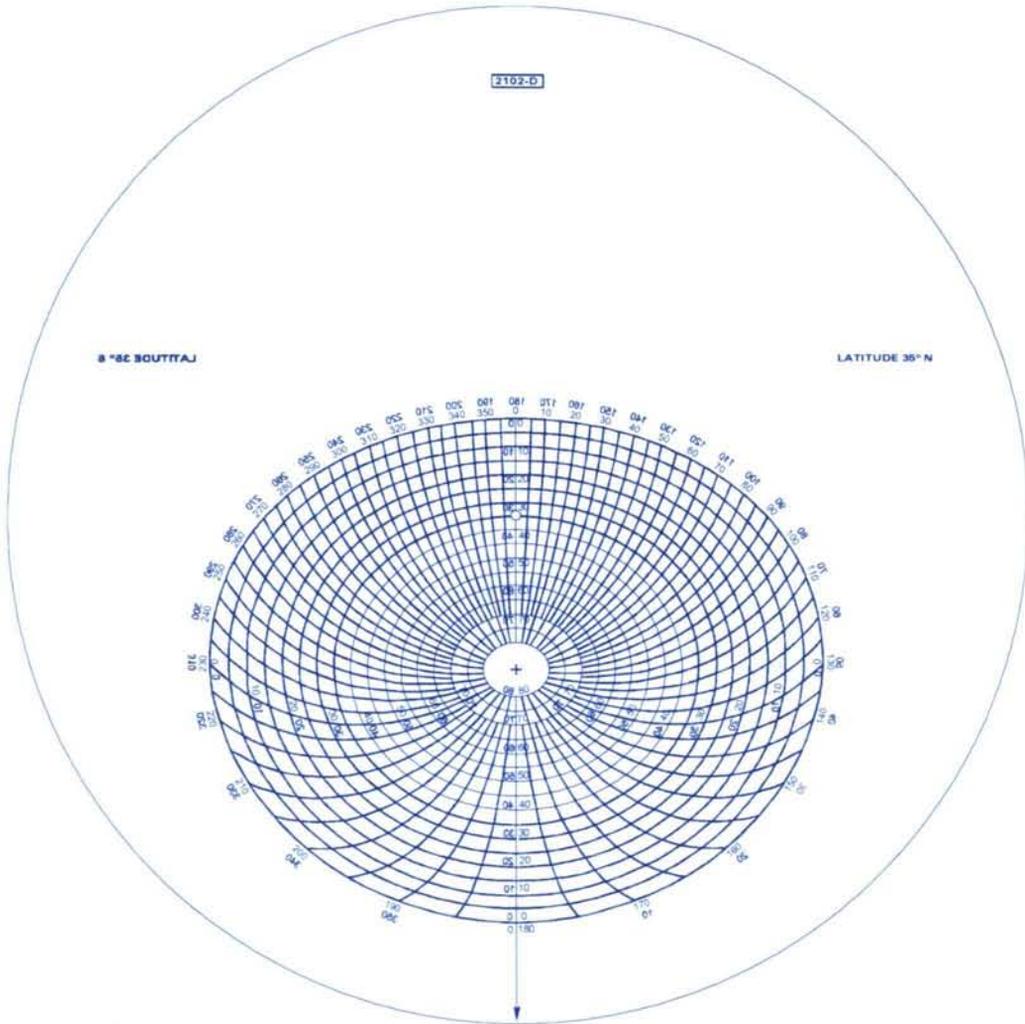


Figura - 1.191.IX - Verticales y almucantarats para $\phi = 35^\circ$ N

tiempo, de aquí el nombre de "fijas", la vida útil del "Star Finder" es muy elevada; para los planetas, sin embargo, tal variación es notable, por lo que no figuran en el identificador. No obstante esto, pueden ser incorporados al mismo, para lo cual dispone de un disco ad hoc, figura 1.192.IX, en el que mediante una ventana rectangular orientada según el meridiano y de amplitud 30° , pueden dibujarse con lapicero al objeto

de eliminarlos con facilidad cuando las circunstancias así lo requieran.

9. MANEJO DEL “STAR FINDER 2102 - D”. — Calculado el horario occidental de Aries para la hora de la observación, seleccionaremos el disco correspondiente a la latitud más próxima a la de estima, que insertaremos en el disco boreal o austral, según el hemisferio, girándolo hasta que la flecha al final del meridiano del lugar señale el

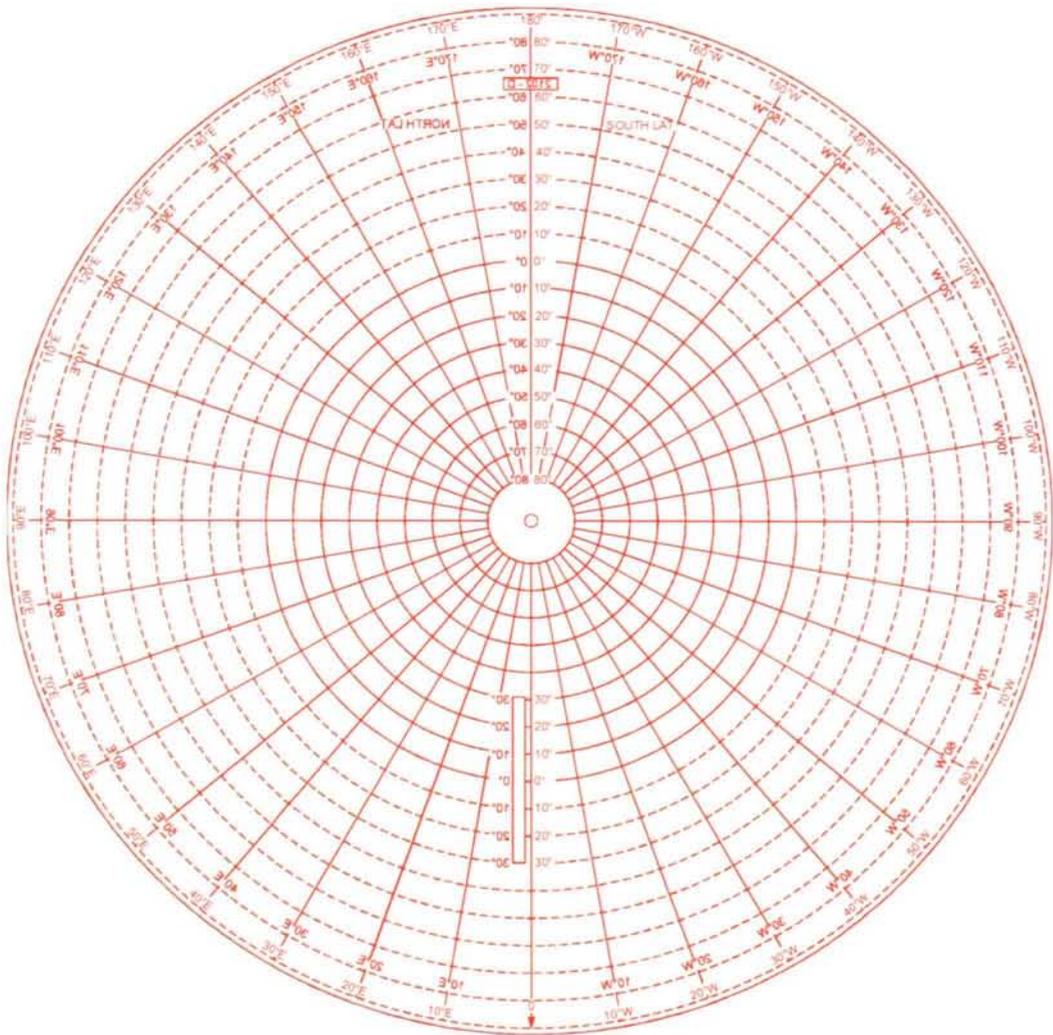


Figura - 1.192.IX - Transportador de planetas

horario de Aries en el lugar: en este preciso momento, figura 1.193.IX, estamos en disposición de seleccionar los astros convenientes, o proceder a la identificación de aquellos que habiendo sido observados no fueran reconocidos, buscando para ello el punto de corte de almicantrat y vertical correspondientes, cuyos valores sean los más

aproximados. Si, para fijar ideas, suponemos que con horario local de Aries 247° W, en ϕ $36^{\circ} 43'$ N observamos un \star ? con altura $37^{\circ} 28,3'$ y azimut 212° , la operación antes indicada muestra que, con toda probabilidad, el astro observado es Zubenelgenubi que, en el Star Finder, figura 1.193.IX, tiene aproximadamente altura 35° y azimut 211° . En las figuras 1.194.IX y 2.194.IX de la página siguiente se aprecian con mayor detalle la orientación del identificador así como la posición del astro observado dentro de la trama

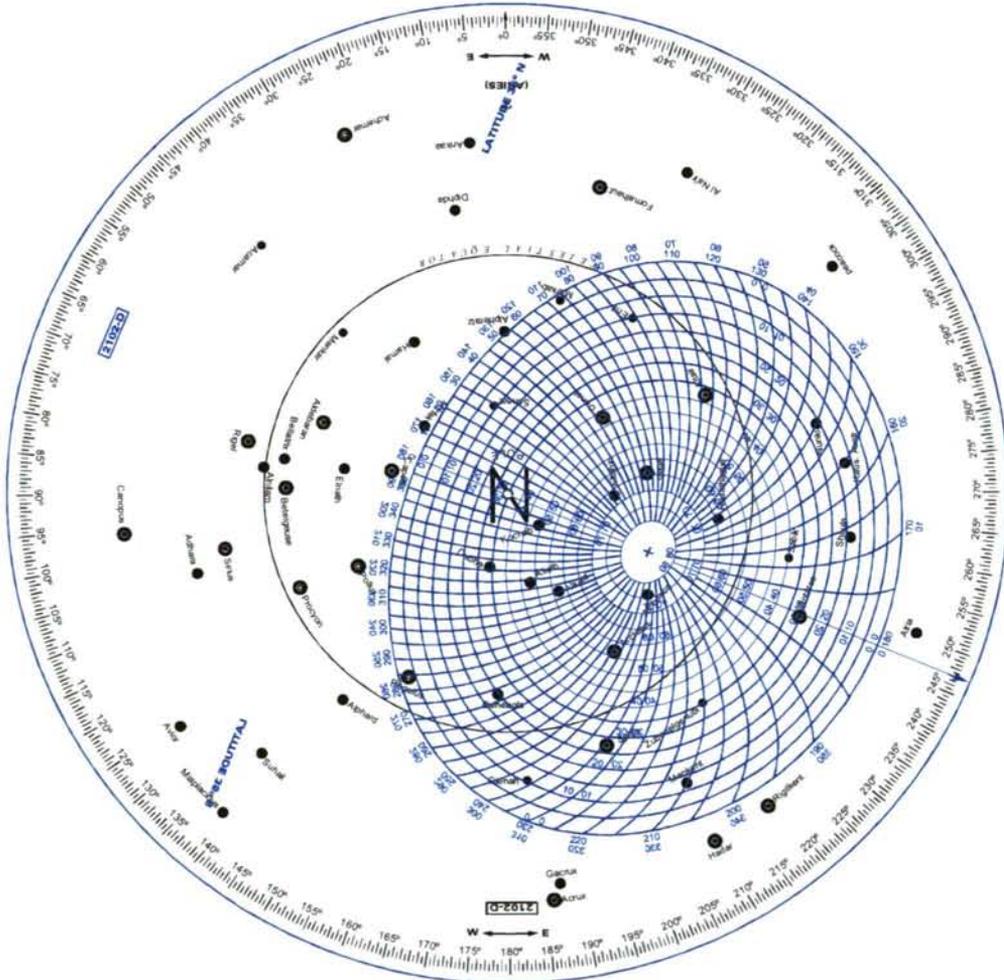


Figura - 1.193.IX - Reconocimiento en ϕ próxima a 35° N

de verticales y almicantrates. Si nuestra latitud estimada difiriera en mayor grado de la del identificador, el reconocimiento no sería tan claro, pero, en general, las diferencias muy pocas veces acarrear una ambigüedad insalvable, debiendo considerar la posibilidad de que un planeta pudiera dar lugar a confusión. Para concluir este apartado

destinado al estudio de este espléndido auxiliar del verdadero navegante, y continuando con la intención de fijar ideas en cuanto a su manejo, se procede al ejercicio de

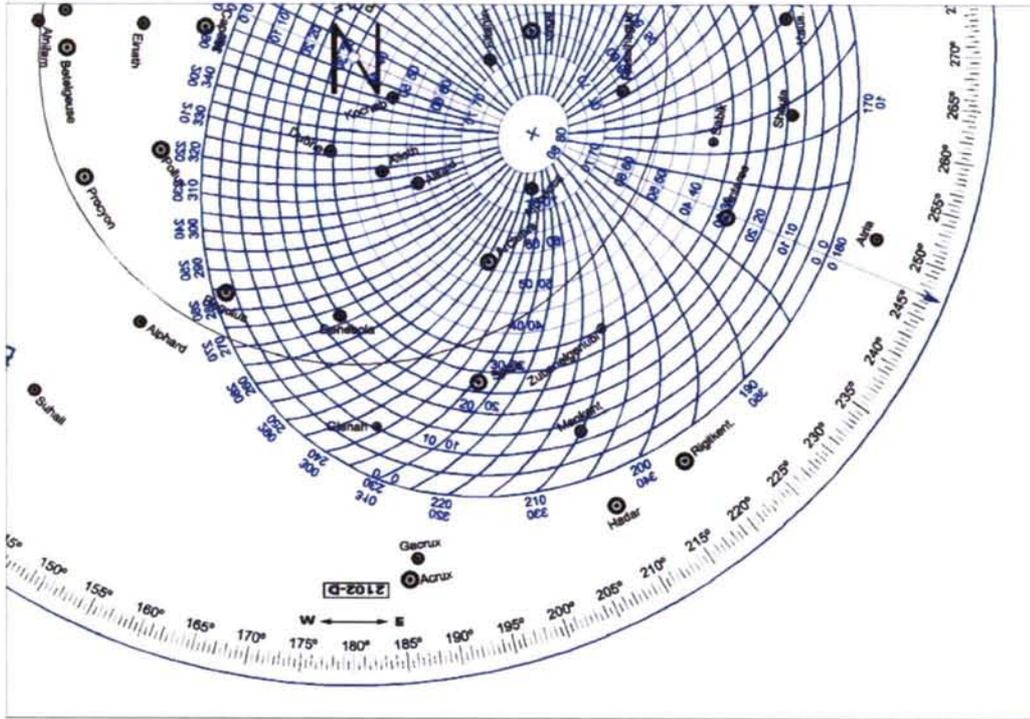


Figura - 1.194.IX - Detalle del reconocimiento anterior

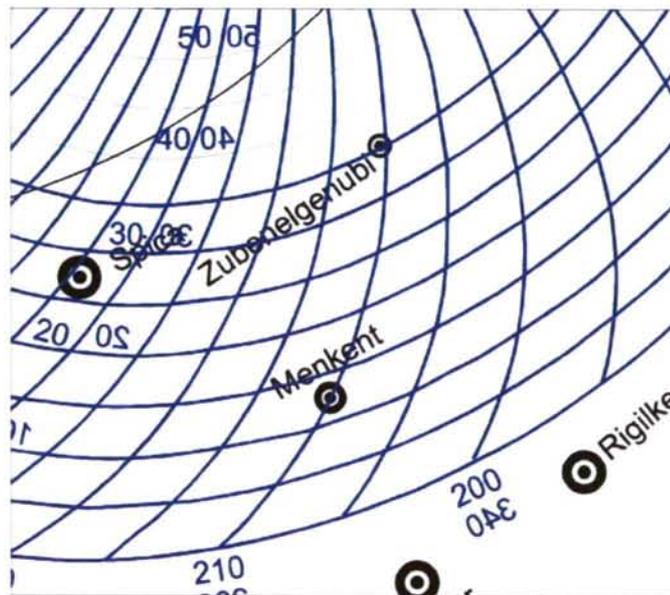


Figura - 2.194.IX - ★? Zubenelgenubi

reconocimiento para un observador ubicado en el hemisferio sur : Con horario de Aries en el lugar $062,5^{\circ} W$, $a_{\star} ? 41^{\circ} 15,3'$, $Z_{\star} ? 267^{\circ}$ y $\phi 27^{\circ} 38' S$, una vez efectuadas las operaciones indicadas en el caso precedente, el astro, con toda probabilidad es Diphda. Para una más clara interpretación, la figura 1.195.IX, correspondiente al último ejercicio realizado, se complementa con las 1.196.IX y 2.196.IX, en las que en detalles ampliados se percibe con mayor claridad el resultado del reconocimiento efectuado. Al

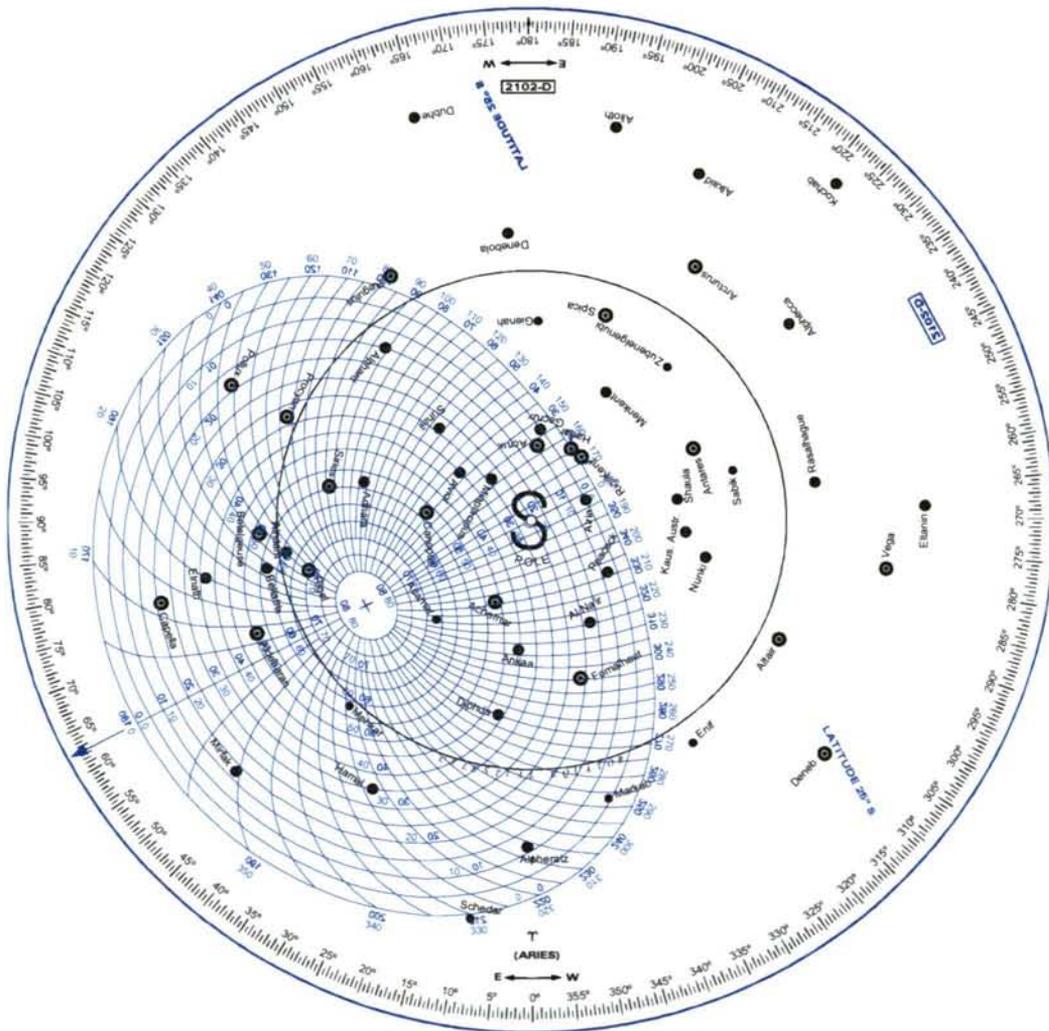


Figura - 1.195.IX - Reconocimiento en $\phi_e 27^{\circ} 38' S$

igual que en el caso del hemisferio norte, la disposición del identificador para el instante de la observación constituye un inestimable recurso a la hora de seleccionar los astros más favorables para una eficaz observación, debiendo, en la medida de lo posible, evitar ángulos de corte demasiado agudos entre los distintos verticales. En capítulos posteriores se verán los inconvenientes derivados de ángulos de corte inferiores a los

60°.

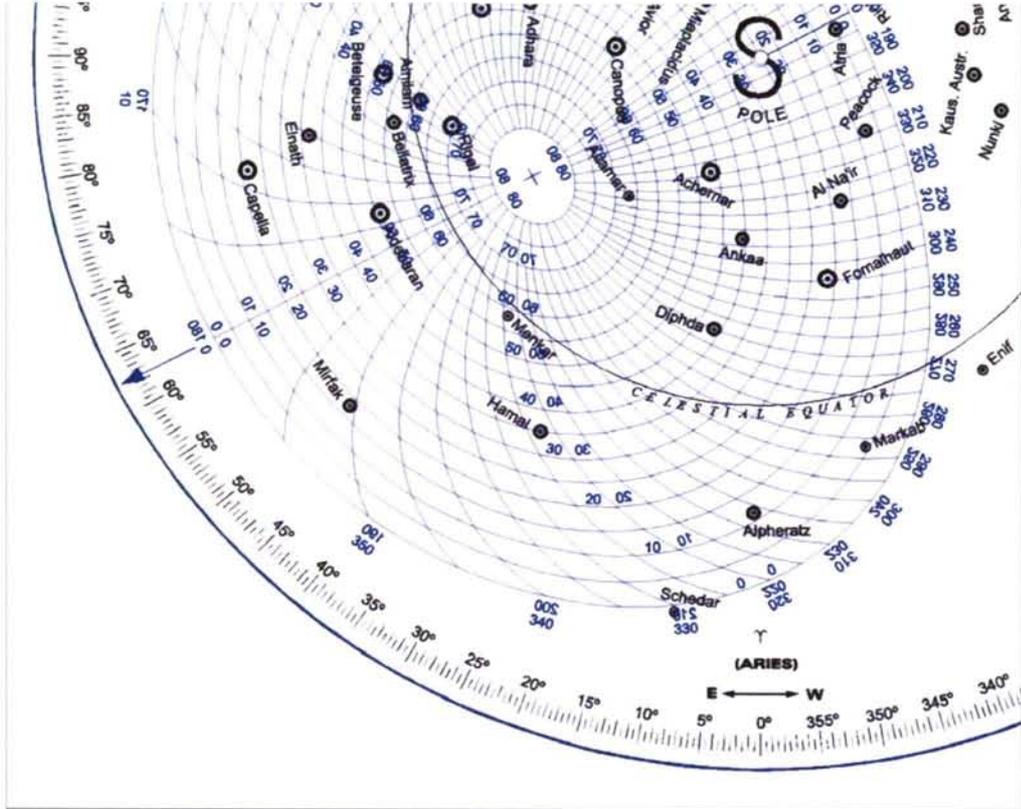


Figura - 1.196.IX - Detalle del reconocimiento en latitud S.

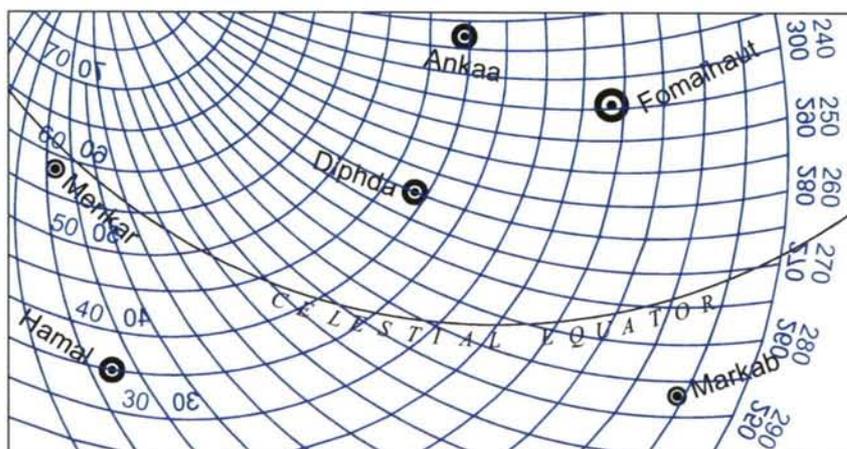


Figura - 2.196.IX - Reconocimiento: ★? Diphda

10. FIJAR UN PLANETA EN EL “STAR FINDER 2102 - D”. — Para una hora TU de la fecha que interese, calcúlense los horarios en Greenwich de Aries y del planeta en cuestión; la diferencia angular entre estos horarios, tal como se indica en la figura 1.197.IX para el caso de Saturno, nos permitirá localizar el máximo de ascensión correspondiente. Llevada la declinación en el adecuado sentido, marcaremos con

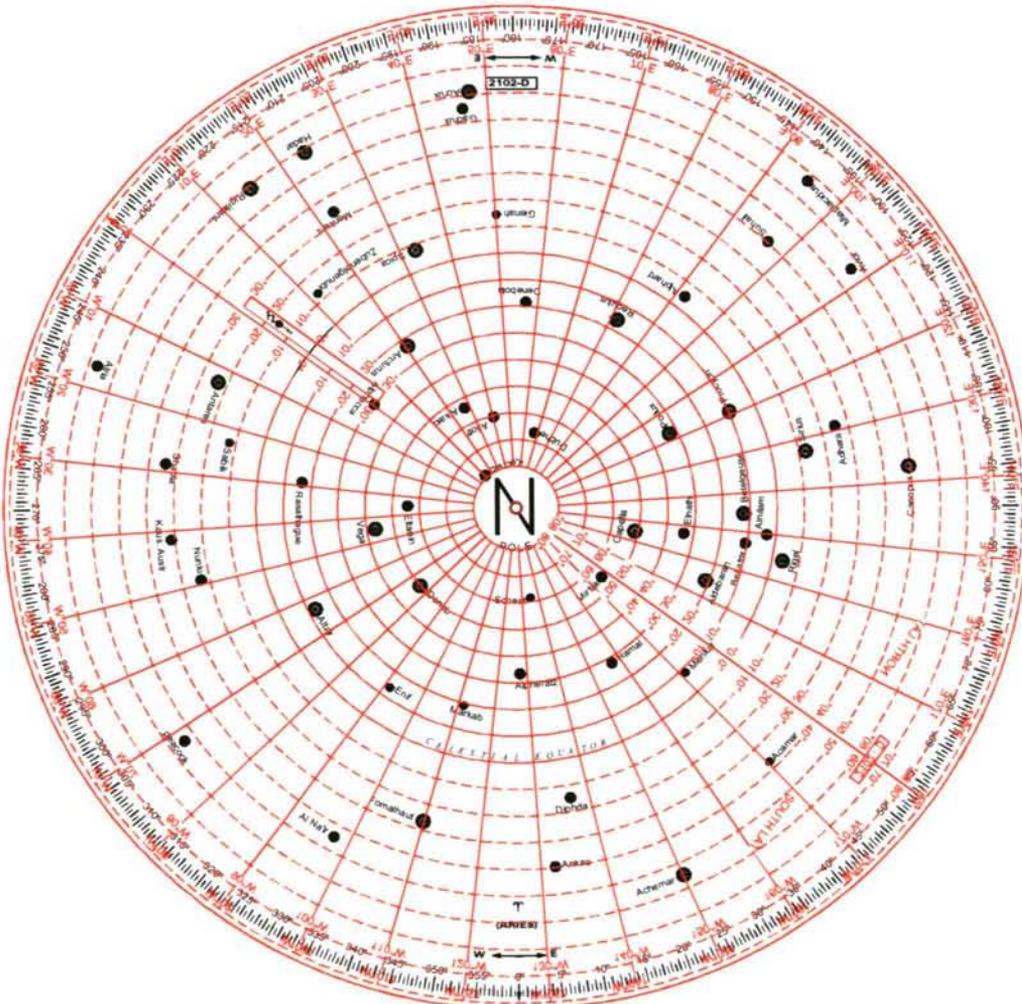


Figura - 1.197.IX - Fijación de los planetas

lapicero la posición del planeta que deberá ser modificada periódicamente.

11. CONSTRUCCIÓN DE UN IDENTIFICADOR DE ASTROS. — Del Almanaque Náutico tomaremos las coordenadas horarias absolutas (uranográficas ecuatoriales) de las estrellas que interese incorporar al identificador (las de nuestro Almanaque Náutico son número más que suficiente). En proyección azimutal equidistante, tratada en páginas anteriores, a la escala conveniente y a partir del punto de Aries, origen, con una simbología de fácil interpretación iremos fijando polo, ecuador celeste y circunferencia límite de la proyección, en la que se dibujará, a partir del origen, la graduación de 0° a 360°. Para el trazado de la red de verticales y almicanarates correspondientes a cada una de las latitudes patrón, figura 1.198.IX, resolveremos las expresiones que siguen:

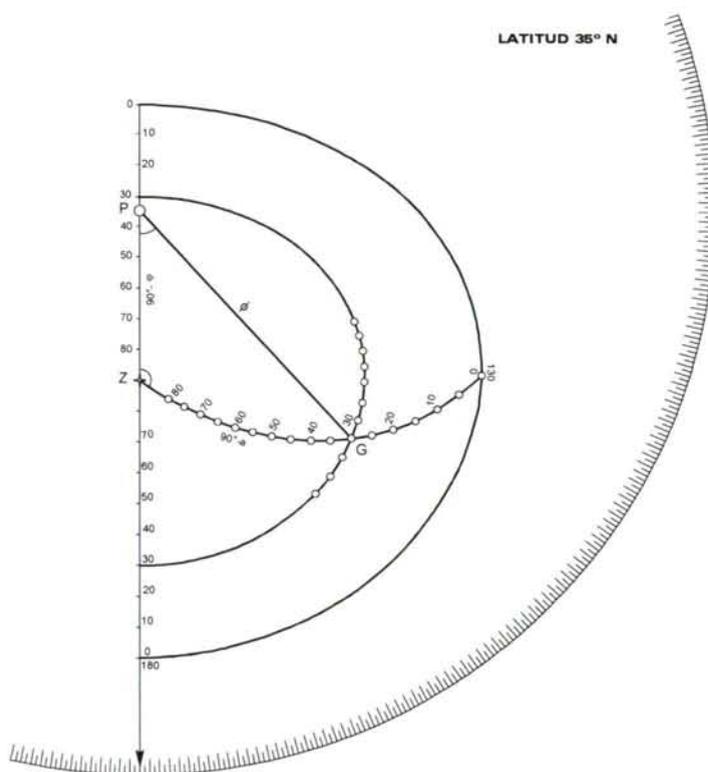


Figura - 1.198.IX - Construcción de un identificador

$$\left. \begin{aligned} \cos \vartheta &= \text{sen } \varphi \cdot \text{sen } a + \cos \varphi \cdot \cos a \cdot \cos Z & \textcircled{1} \\ \text{ctg } P &= \cos \varphi \cdot \text{tga} \cdot \text{cosec } Z - \text{sen } \varphi \cdot \text{ctg } Z & \textcircled{2} \end{aligned} \right\}$$

En la primera de ellas, para una φ dada, fijando la altura obtendremos ϑ para los puntos de los distintos verticales, que tomaremos de 5° en 5°, a lo largo del mismo almicanarata. La segunda coordenada, ángulo en el polo P, se obtiene resolviendo la

segunda ecuación en la que, ahora, son conocidos ϕ , a y Z . Unidos por medio de una plantilla los puntos trazados, obtendremos la red buscada. De las coordenadas esféricas calculadas $\{\phi, P\}$, pasamos a las planas $\{\rho, P\}$ mediante las funciones establecidas.

12. ENFILACIONES MÁS COMUNES PARA EL RECONOCIMIENTO. — Las figuras que siguen muestran éstas enfilaciones destinadas a la identificación de las estrellas. Su estudio, acompañado de la necesaria práctica, conduce a la memorización y conocimiento de los principales grupos, constelaciones, que han de contribuir a una

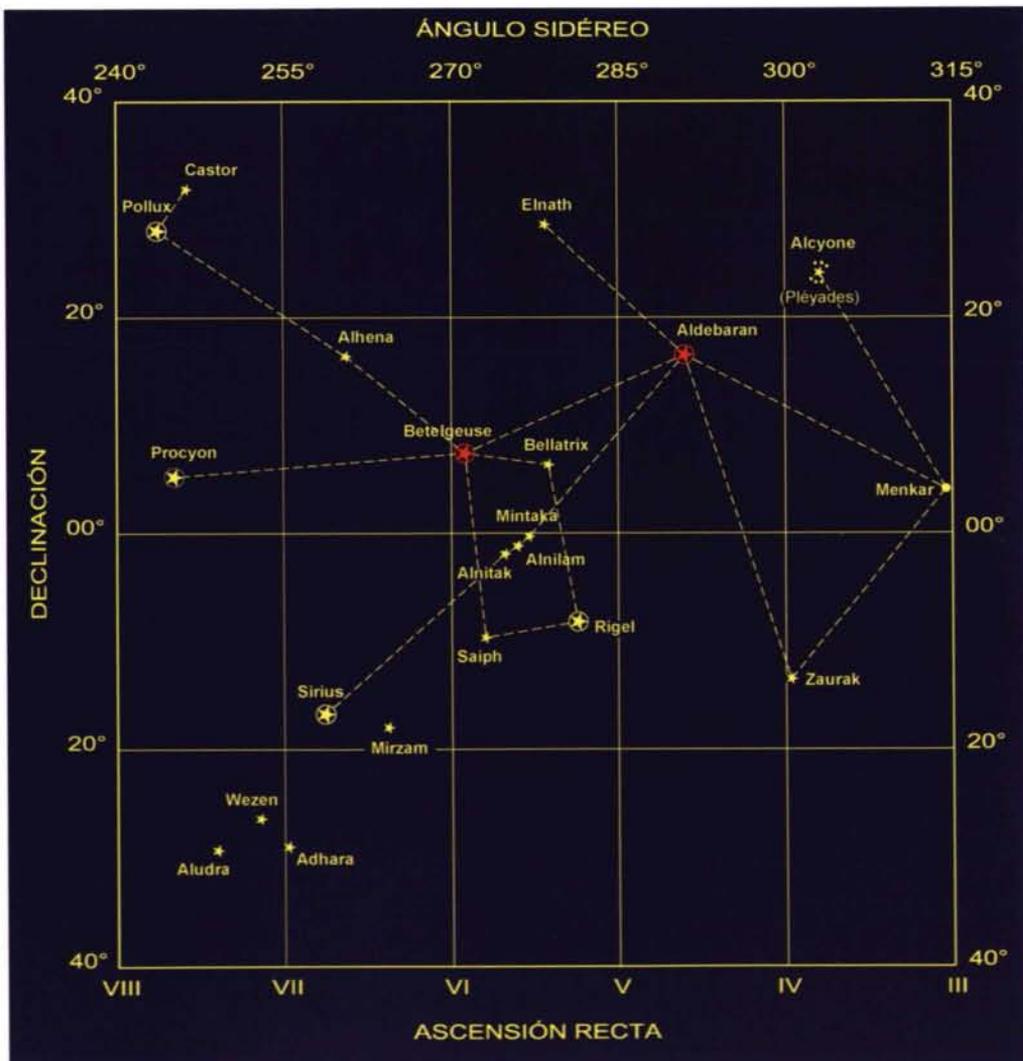


Figura - 1.199.IX - Estrellas de Orión y próximas

sólida formación en tan imprescindible materia. Las sesiones prácticas en el planetario

se verán complementadas durante la práctica profesional durante la cual, nuevas enfilaciones, más acordes con la personalidad del observador, podrán ir sustituyendo a las aquí propuestas. Para asignar nombres a las estrellas no se utiliza un sistema único sino varios esquemas distintos, incluso dentro de una misma constelación. A un gran número de estrellas se les designa con una combinación de letras o números y del genitivo (en latín) del nombre de la constelación [RIDPATH-99]; las estrellas más brillantes reciben letras griegas, las denominadas letras Bayer, que se disponen alfabéticamente más o menos según el orden de brillo: así la estrella más brillante de Cignus se denomina Alfa (α) Cigny. La mayoría de las estrellas visibles a simple vista

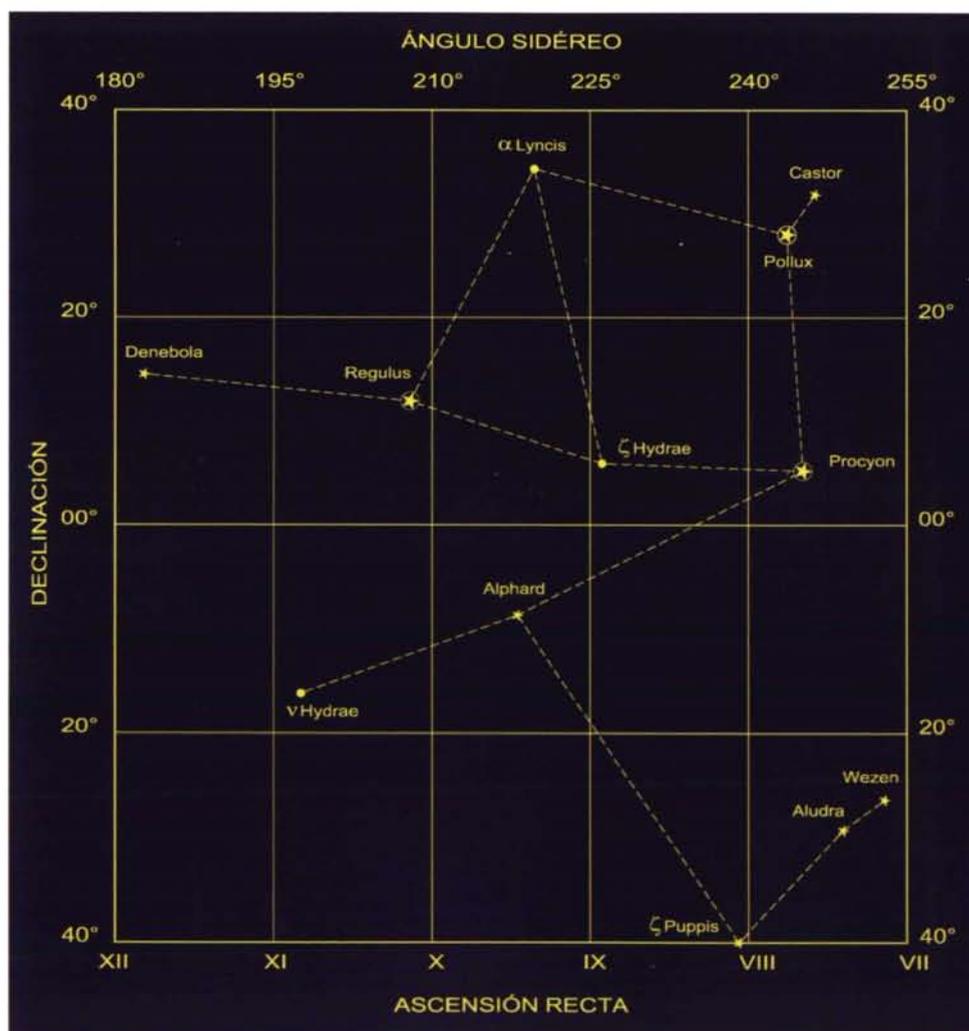


Figura - 1.200.IX - Regulus, Pollux, Procyon y proximidades

reciben números Flamsteed (61 Cigny) que siguen el orden de ascensión recta. En las

utilizadas en la navegación la mayoría tienen un nombre derivado del latín , griego o árabe, amén de su letra Bayer. En la figura 1.200.IX el centro es ocupado por la constelación más hermosa del firmamento: el gigante Orión con Betelgeuse, Bellatrix, Rigel, Saiph y las de su cinturón, Las tres Marías. A partir de ella son fácilmente identificables Pollux y Castor en Los Gemelos, Sirius y sus acompañantes en el Can

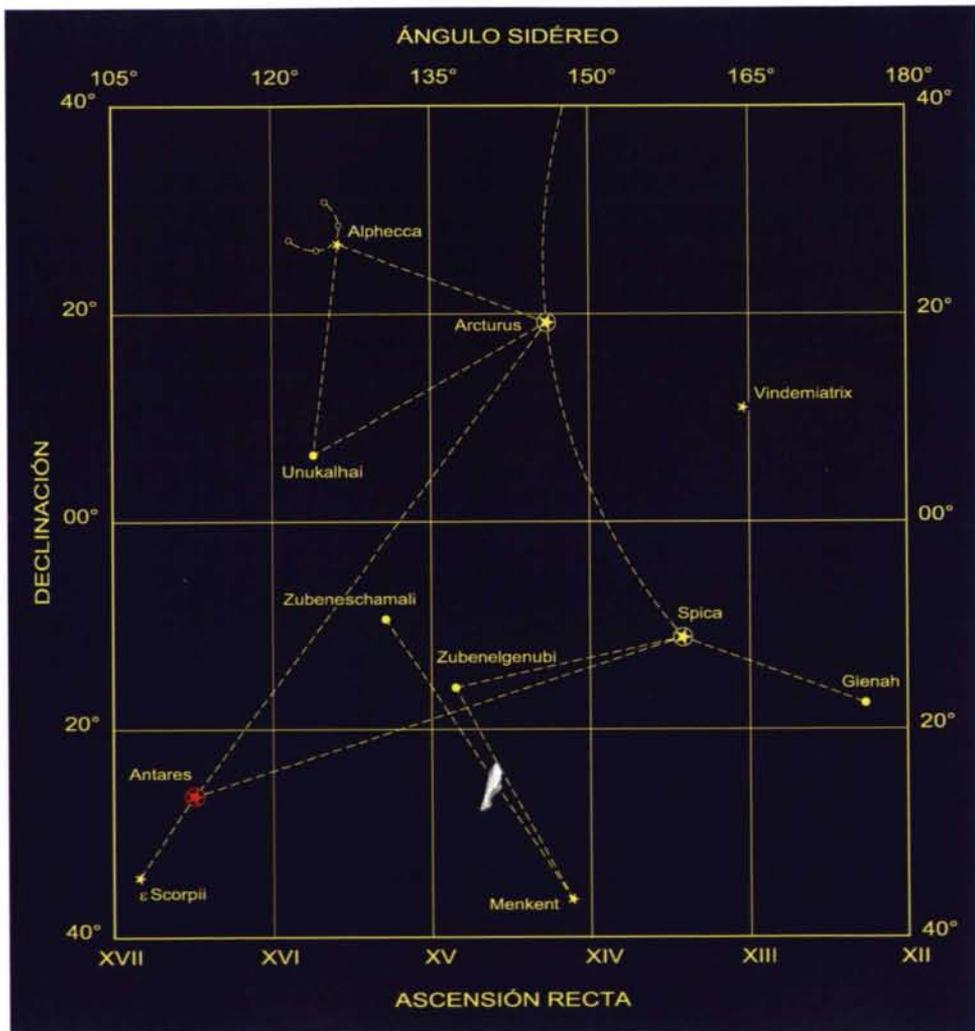


Figura - 1.201.IX - Arcturus, Antares, Spica y próximas

Mayor, Procyon, Aldebarán en el Toro, Alcyone en Las Pleiades, Menkar y Zaurak. En la figura 1.201.IX las referencias son Arcturus, Spica y la gigante roja Antares, a partir de las cuales podremos identificar Alphecca, la gema de la Corona Boreal entre otras como Zubenelgenubi, Menkent, Gienah, Unukalhai y Vindemiatrix. La figura 1.202.IX, tomando como puntos de partida Altair y Vega se encuentran sin dificultad Rasalhague,

Enif, Nunki, Rasalhgethi, etc. En la 1.203.IX podremos identificar, partiendo del gran cuadrado de Pegaso, las siguientes estrellas: Alpheratz, Scheat, Markab, Algenib, Hamal, Mirach, Diphda y Fomalhaut. Estas representaciones planas de la esfera celeste abarcan la zona comprendida entre las declinaciones $\pm 40^\circ$, y ascensión recta de 00 a 24 horas. Conviene aclarar en este punto que el almanaque náutico más utilizado por

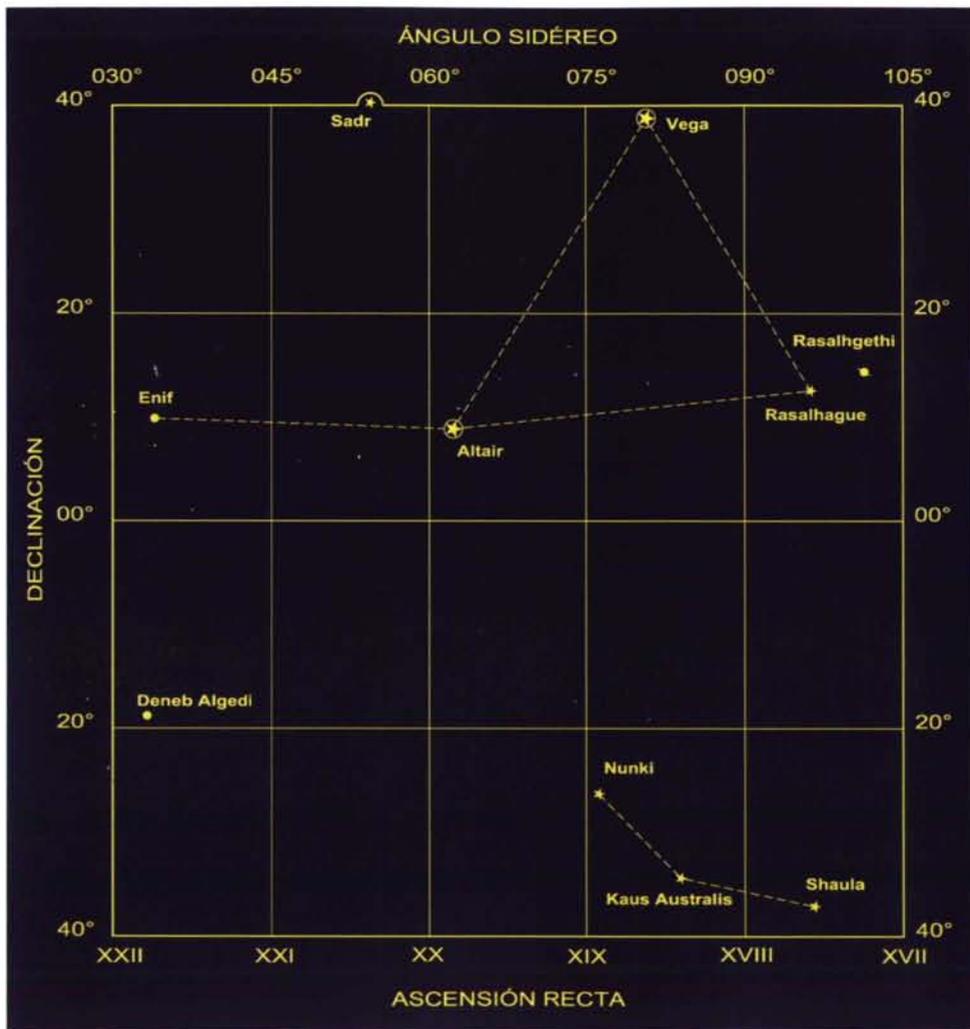


Figura - 1.202.IX - Vega, Altair y estrellas vecinas

los navegantes, sin duda alguna es el BROWN'S NAUTICAL ALMANAC, trae 173 estrellas catalogadas como, a título de ejemplo, sigue: 2.1 α Ophiuchi, Rasalhague 4.6. El primer número corresponde a su magnitud, el grupo α Ophiuchi nos dice que es la principal estrella en la constelación de Ofiuco, sigue su nombre de origen árabe Rasalhague, y el número Flamsteed, 46. Como curiosidad cabe decir que el significado

de Ofiuco es "El portador de la Serpiente" y Rasalhague, cuyo nombre en árabe antiguo era Unuk, significa Cabeza de la Serpiente Encantadora, según el Bowditch, pero más credibilidad nos merece el significado de Cabeza del portador de la Serpiente, en clara referencia a Ofiuco, [HERRMANN-97].

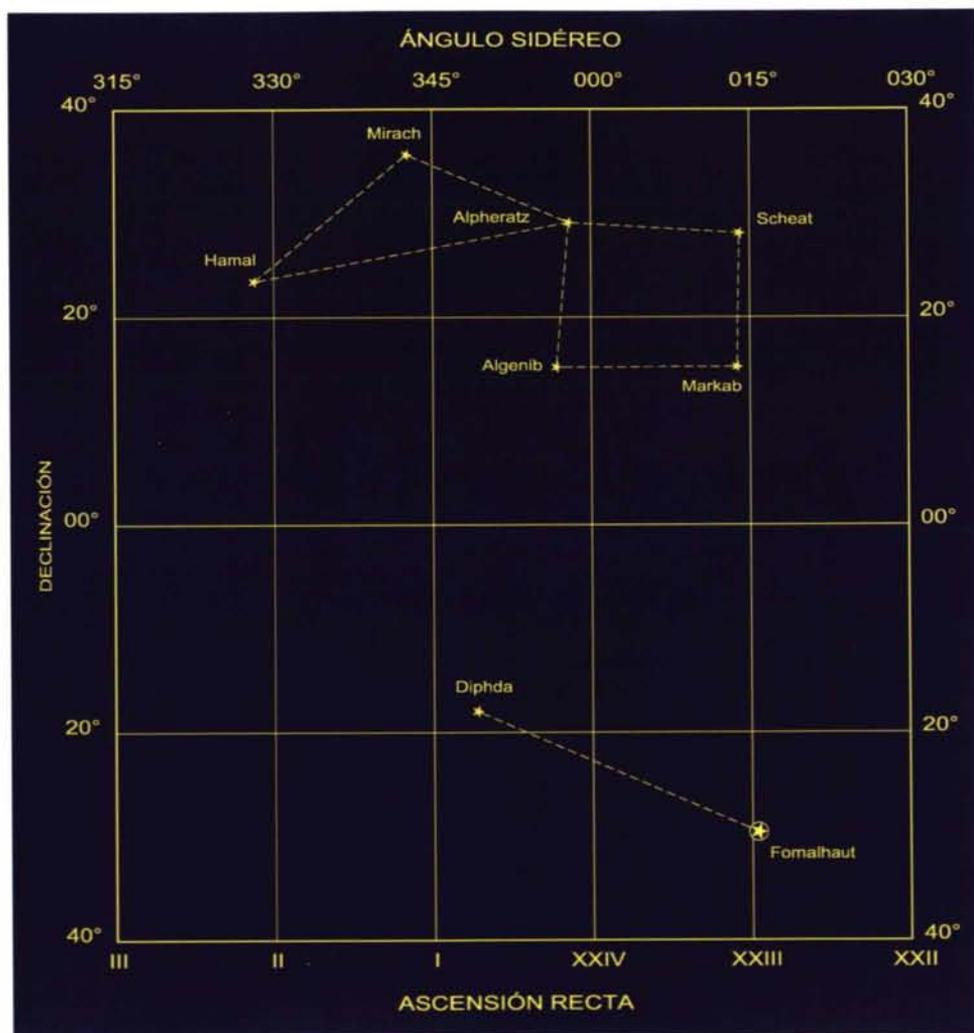


Figura - 1.203.IX - El gran cuadrado de Pegasus y próximas

En la figura de la presente página se muestran las líneas de referencia más usuales para en lazar las principales estrellas, Régulus y Arcturus, ambas de primera magnitud, con las que forman las constelaciones de la Osa Mayor con Dubhe, Merak, Alioth, Mizar y Alkaid; Osa Menor con La Polar y Kochab y Corona Boreal con Alphecca, la gema de la Corona. La estrella Polar, la más importante para el navegante, se encuentra a una distancia del polo¹ de unos 43,5' y para encontrarla en el cielo suele recurrirse al par Merak-Dubhe, que por esta razón se conocen como Las Indicadoras; a una distancia de unas cinco veces la existente entre ellas, se encuentra la Polar, que, en el hemisferio Norte, señala al marino la posición del polo celeste permitiendo la obtención rápida de

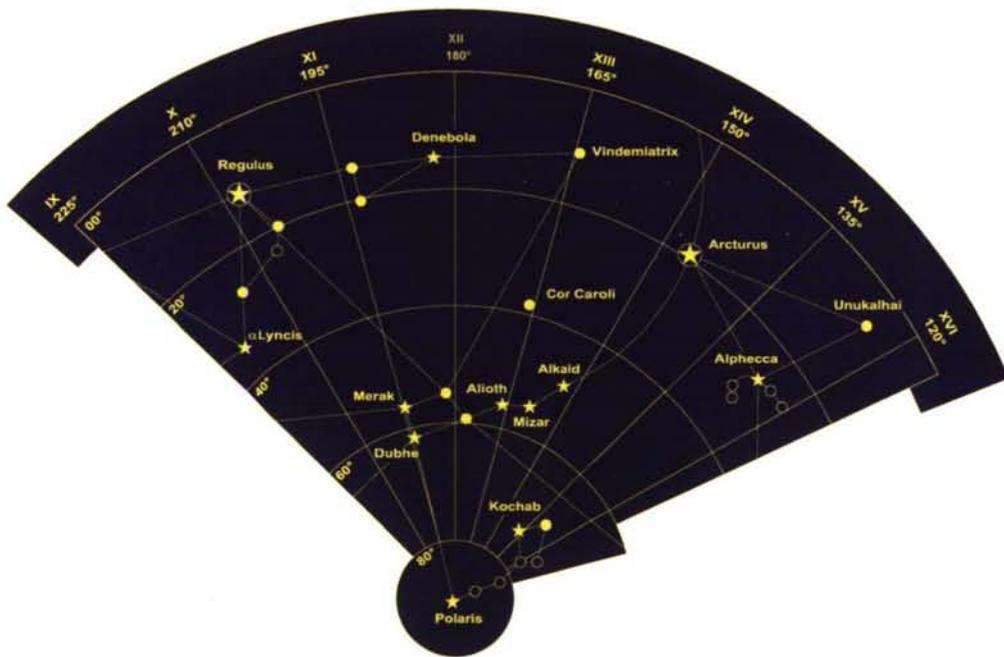


Figura - 1.204.IX - La Polar. Osas Mayor y Menor, y próximas

la corrección total del compás, y comprobar la adecuada orientación de la línea de proa, rumbo. En la Osa Menor, acompañando a Polar y Kochab se encuentra la estrella y *Ursae Minoris*, de nombre Pherkard, "Las dos Terneras". EL par Kochab-Pherkard fué conocido por el nombre de Las Guardas, y, según su posición en el cielo, se determinaba la corrección que aplicada a una altura de la estrella polar, daba la altura del polo sobre el horizonte, es decir, la latitud del observador.

¹ Esta distancia corresponde a junio de 2003. Su nombre en árabe fué, muy probablemente, ALRUKABA, que significa *rodilla*.

La parte del cielo que aparece en la figura 1.205.IX, exhibe el Triángulo de Verano , formado por las estrellas Deneb del Cisne, Vega de la Lira y Altair en el Águila. En la figura siguiente, la 1.206.IX, aparecen las pertenecientes a la constelación de Adrómeda, Almak, Mirach y Alpheratz. Mirfak en Perseo; Scheat, Markab y Algenib en Pegaso, y las que componen la característica geometría de la constelación de

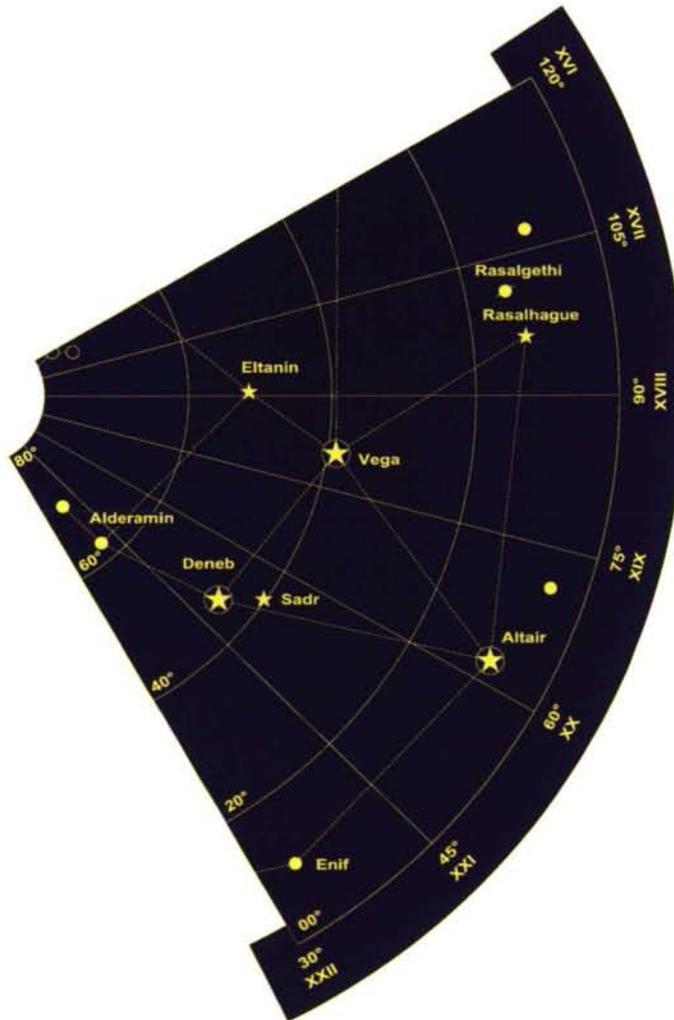


Figura - 1.205.IX - Deneb, Vega, Altair y cercanías

Casiopea. En la figura 1.207.IX, entre otras, encontramos de nuevo a la gigante roja Aldebarán, Castor y Pollux en los Gemelos, Betelgeuze en Orión, Procyon que es la estrella principal del Can Menor (α Cmi), Capella en el Auriga etc. Se concluye con la figura 1.207.IX, en la que se despliega toda la serie de estrellas del hemisferio Norte con las líneas y enfilaciones precisas para su reconocimiento.

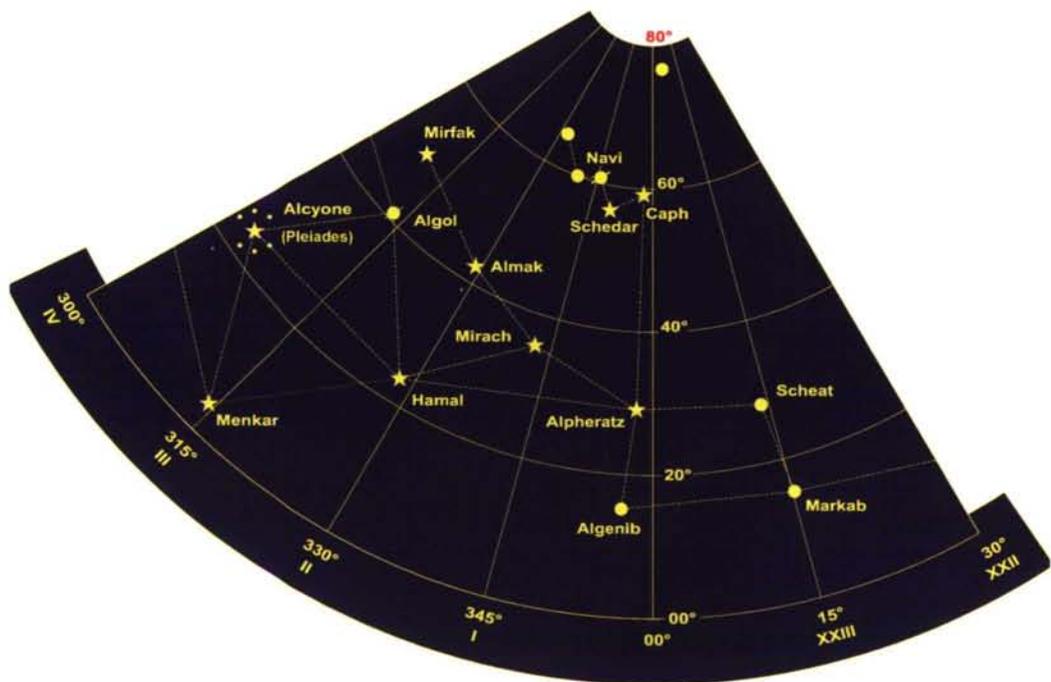


Figura - 1.206.IX - Casiopea, Pegaso y Pleyades

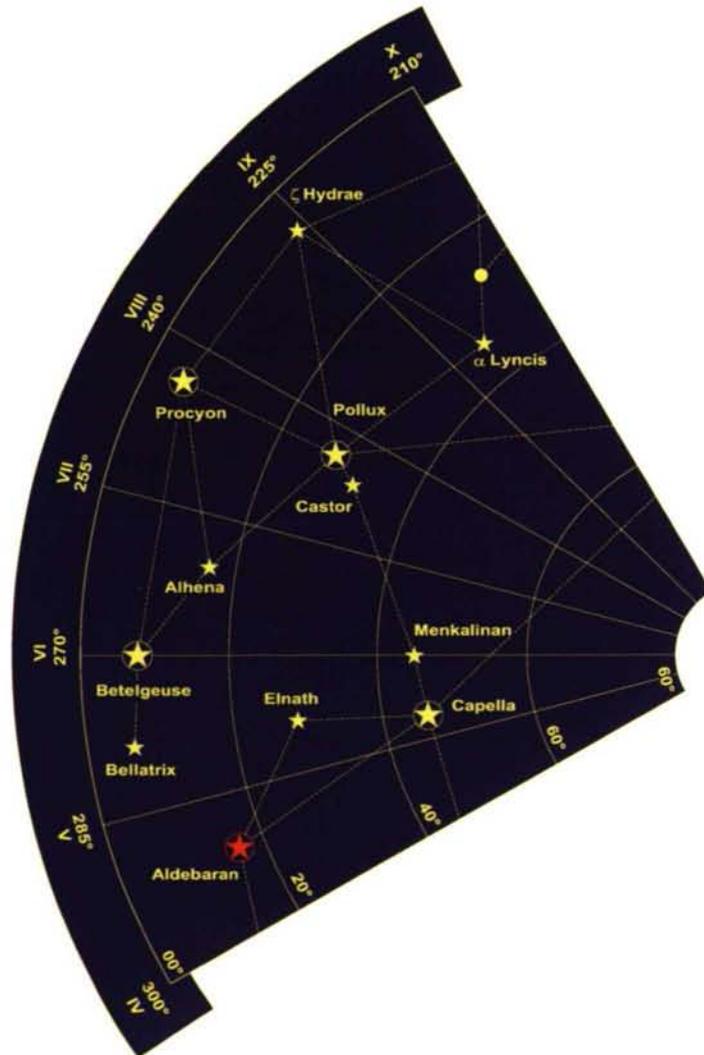


Figura - 1.207.IX - Betelgeuse, Aldebaran y próximas

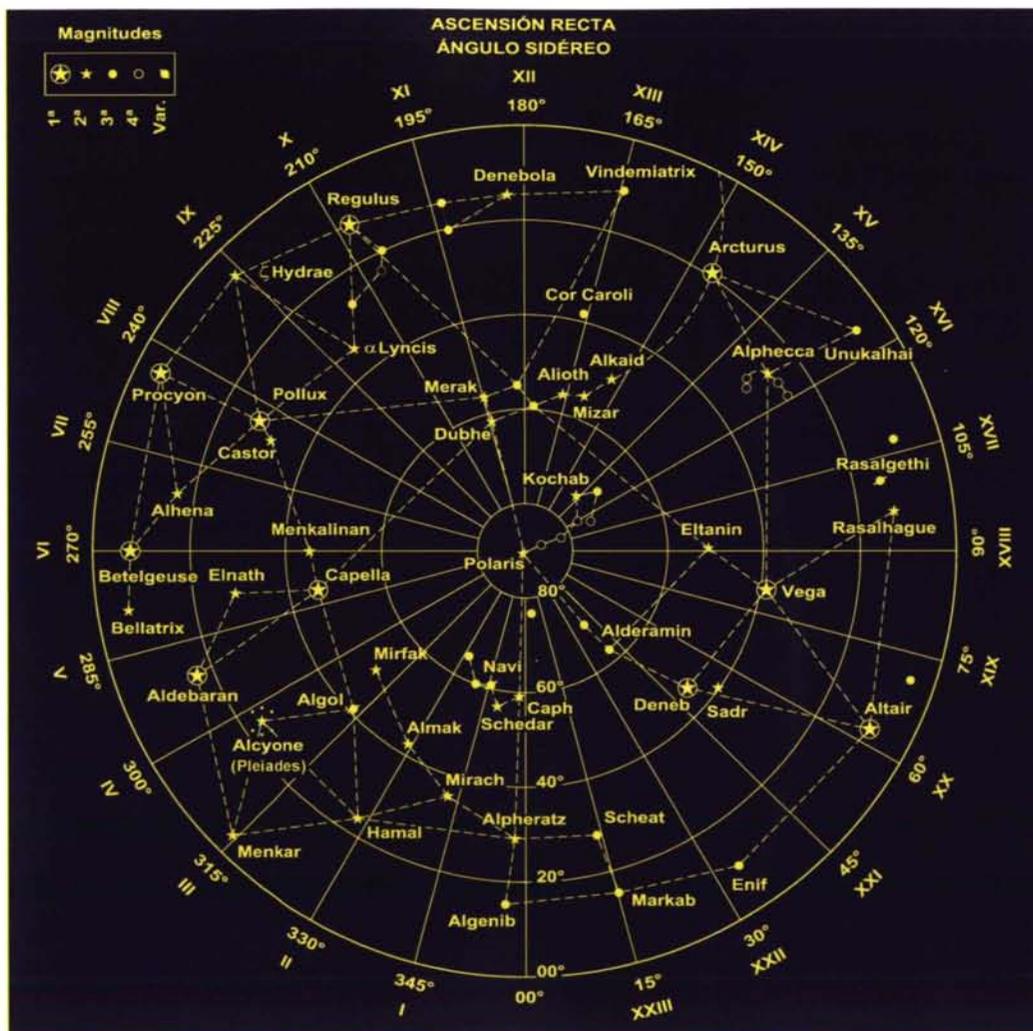


Figura - 1.208.IX - Hemisferio Boreal

En las páginas que siguen, y de forma similar a las anteriores, las estrellas que se muestran son aquellas cuya declinación sur es superior a los 40°. Así en la figura 1.209.IX aparece la gigante roja Antares, en el Escorpión, las de la Cruz del Sur que juegan en el hemisferio sur un papel semejante a aquellas de las osas: Acrux, Mimosa, Gacrux etc. Hadar y Rigil Kentaurus, α y β de la constelación del Centauro, respectivamente. Spica en la Virgen, Gienah en el Cuervo etc. En la figura 1.210.IX las

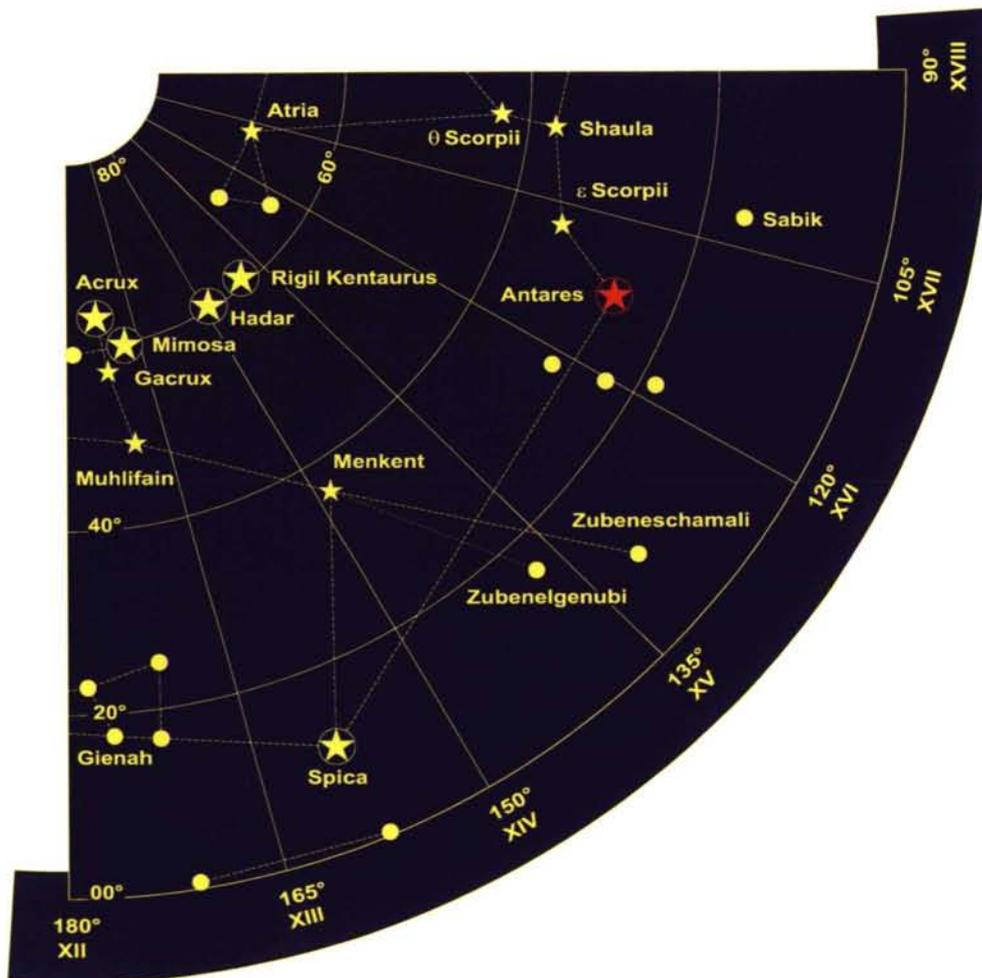


Figura - 1.209.IX - La Cruz del Sur, Spica, Antares y circundantes

estrellas enfiladas son, entre otras, Sirius: la estrella más brillante del cielo, aparte, claro está, nuestro Sol, en la constelación del Can Mayor, Canopus en Carinae cuyo significado en español es Quilla del Navío (Argos) y otras varias como Regor, Avior, Miaplacidus, Alphard, Adhara, Aludra etc. En la figura 1.211.IX, Rigel y Achernar son las más importantes en cuanto a su magnitud; Acamar, Achernar, Zaurak, Las Tres

Marias y otras completan la parte del firmamento representada. Las que aparecen en la figura 1.212.IX, son entre otras, Fomalhaut, Deneb Algedi, Al Na'ir, Peacock y Nunki. Completamos el presente capítulo, dedicado a tan interesantísimo tema, con una visión global de las estrellas del Hemisferio Austral.

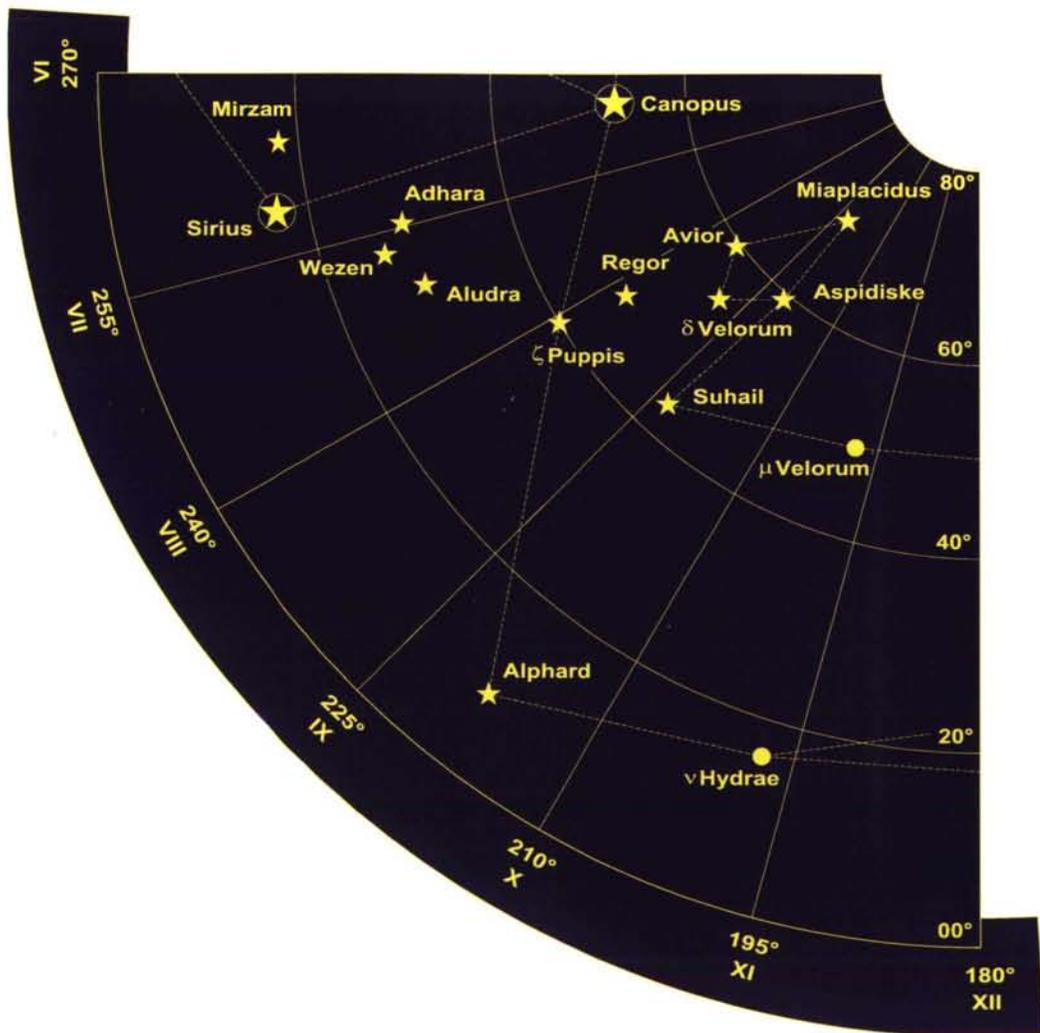


Figura - 1 210..IX - Sirius, Canopus y estrellas vecinas

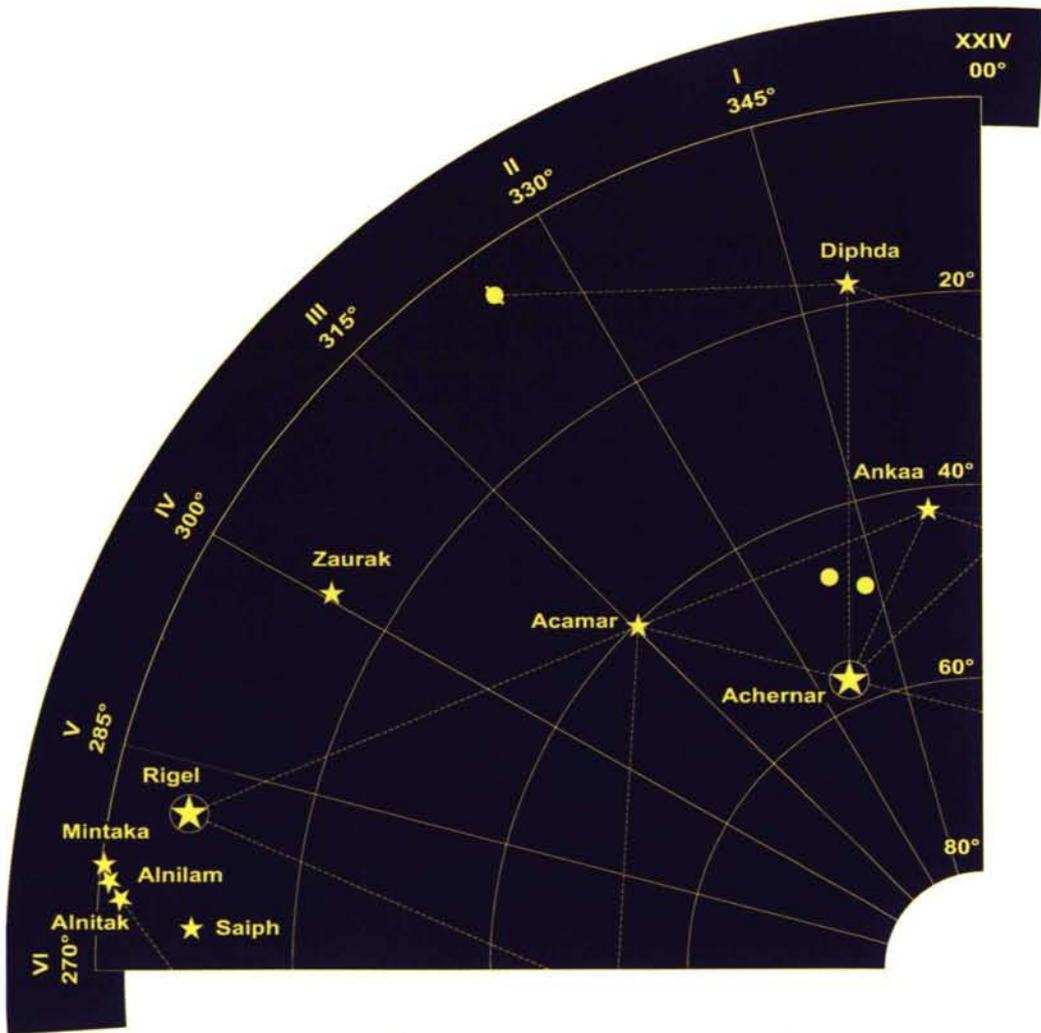


Figura - 1.211.IX - Rigel, Achernar y próximas

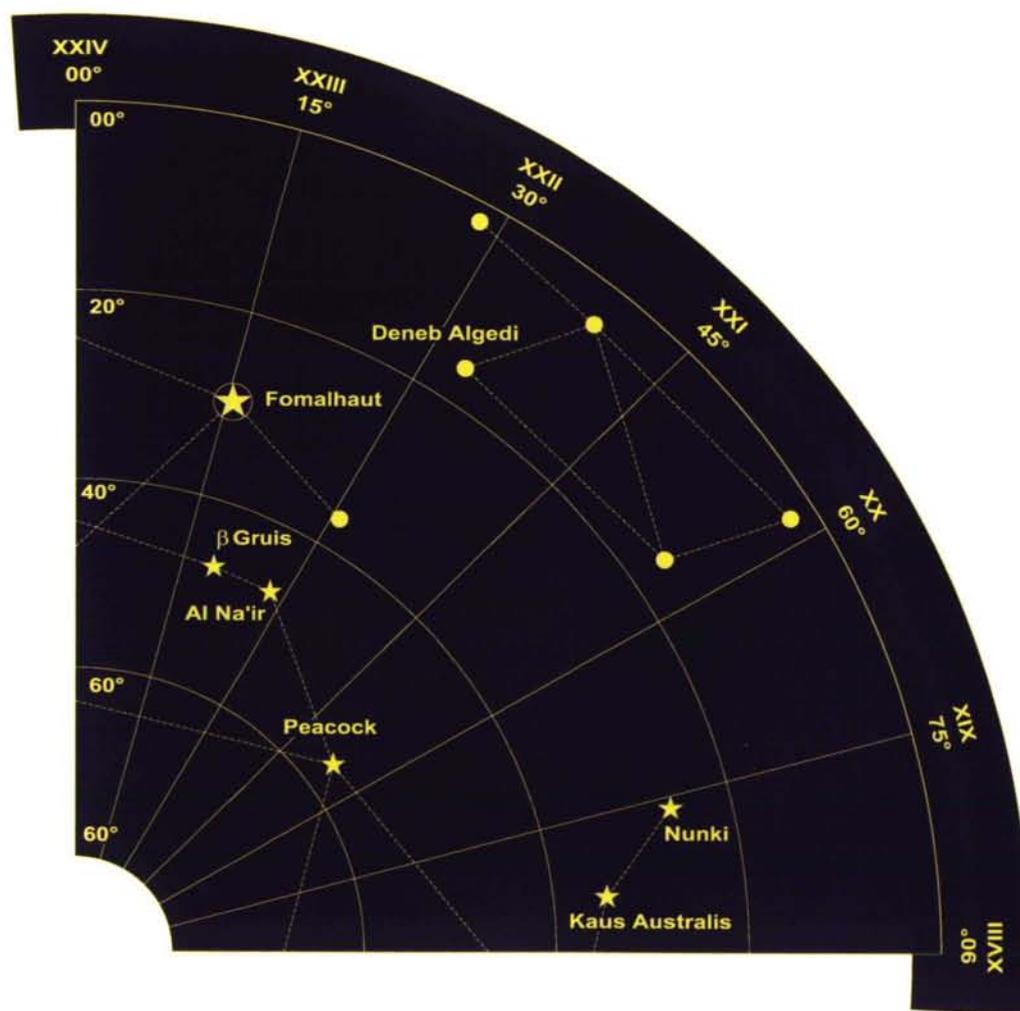


Figura - 1.212.IX - Fomalhaut y proximidades

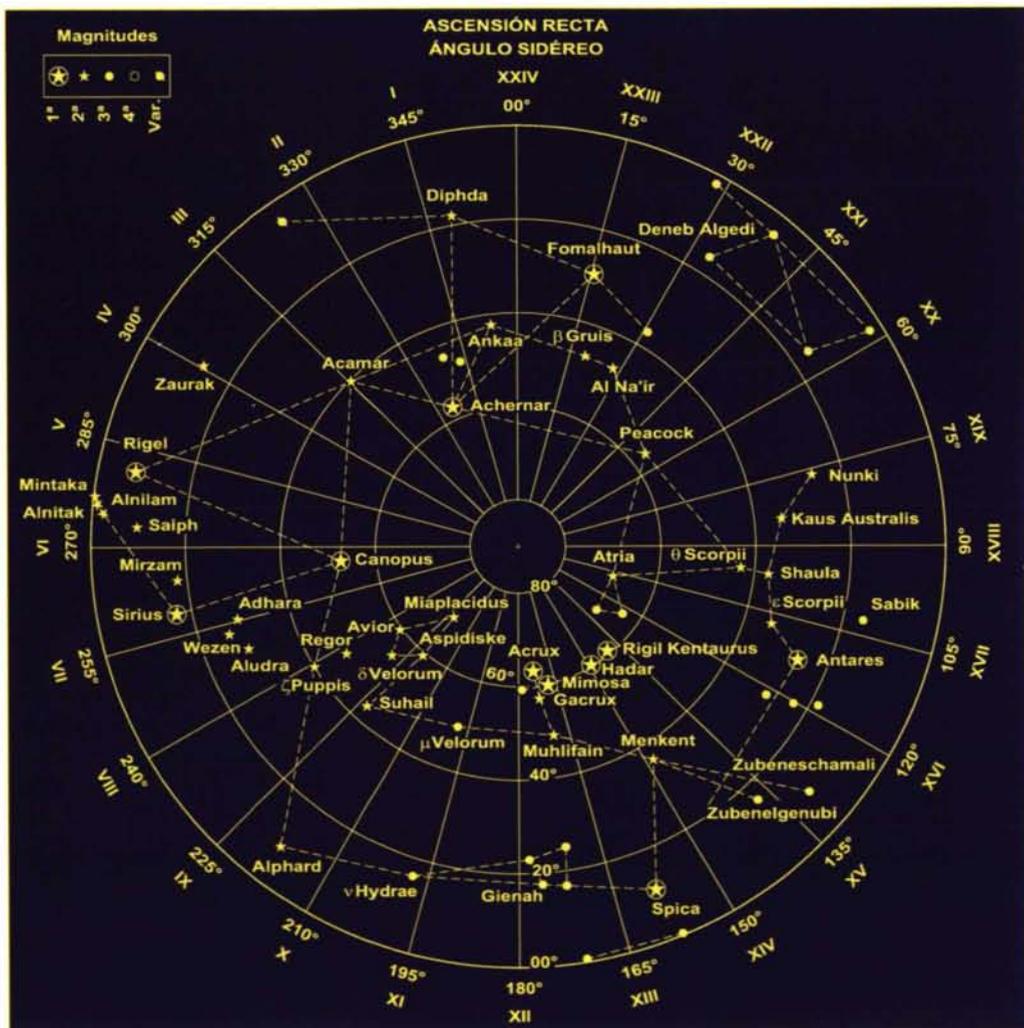


Figura - 1.213.IX - Hemisferio Austral

CAPÍTULO X

EL CÁLCULO DE LA LATITUD

1. LA TIERRA, FORMA Y DIMENSIONES. — La forma de la Tierra es extraordinariamente compleja no existiendo una expresión matemática capaz de definirla. Para su estudio, se recurre a un cuerpo ideal denominado Geoide y cuya característica fundamental es que su superficie es normal a la gravedad en todos sus puntos. En una primera aproximación, la forma de tal cuerpo pudiera concebirse como la que adoptaría la superficie de los océanos en calma y supuesta prolongada bajo las masas continentales; resulta, así, una superficie equipotencial respecto del campo gravitatorio terrestre [UTM1-76]. No existe, tampoco, expresión matemática sencilla que

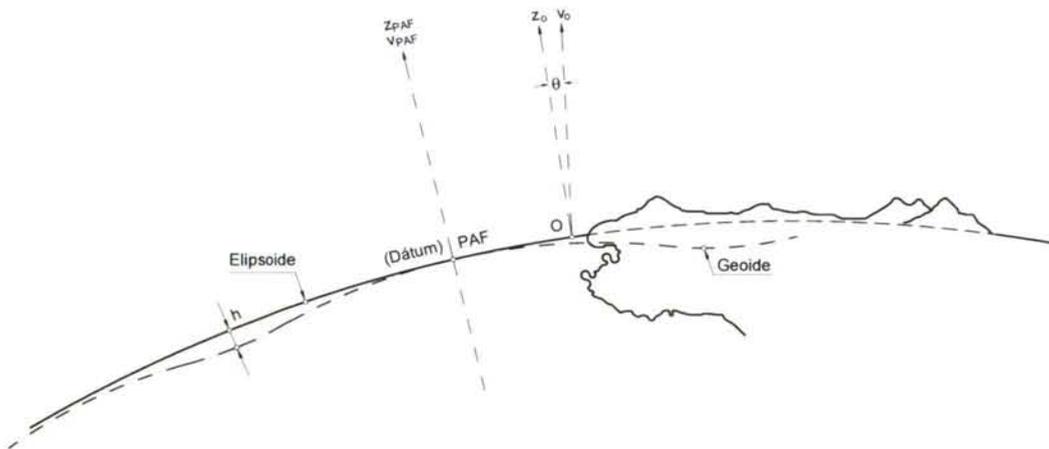


Figura - 1.214.X - Tierra, Geoide, Elipsoide

la defina, por lo que ha de suplirse por un cuerpo al que se aproxima con precisión tal, que las mediciones efectuadas sobre el mismo, y respecto de aquellas que pudieran efectuarse sobre el Geoide, varían dentro de límites carentes de trascendencia; este cuerpo es un elipsoide de revolución que resulta generado por la rotación de una determinada elipse alrededor de su eje menor y que se supone orientado según el eje de rotación de la propia Tierra. La superficie del Geoide teórico oscila de forma tal, que en unos lugares queda sobre la superficie del elipsoide y en otros bajo la misma; esta

distancia vertical h , figura 1.214.X, es casi siempre menor de 100 m, y rara vez supera los 80 m. El punto donde ambas superficies, Geoide-Elipsoide, son tangentes, recibe el nombre de punto astronómico fundamental o dátum; en él, la normal al Geoide, vertical astronómica del lugar o geodésica, y la normal al elipsoide o vertical geodésica, coinciden; en cualquier otro lugar forman un ángulo conocido como ángulo de la vertical o desviación de la vertical relativa, el ángulo θ en la figura de la página 214; este ángulo ha de ser medido y alcanza valores de unos cuantos minutos. En algunos lugares de la Tierra, sobre todo en la mar, cercanos a la línea de costa donde el talud submarino desciende con alto gradiente, como sucede en las costas de Puerto Rico, alcanza valores relativamente notables. Las medidas llevadas a cabo por Bessel en Europa en el año 1841, Clarke en el periodo 1886 a 1890, Helmert en 1901 y Hayford en 1909 en Estados Unidos, comprobaron la validez de la hipótesis formulada sobre la forma teórica del sólido que más se aproximaba a la del Geoide: *La superficie terrestre es un elipsoide de revolución achatado por los polos, siendo la vertical en cada punto perpendicular a la superficie de dicho elipsoide, y el eje de rotación de la Tierra, el eje de rotación del elipsoide* [GANDARIAS-56].

Las secciones planas al elipsoide de revolución son, en general, elipses; cuando el plano secante contiene al eje de rotación la sección resultante recibe el nombre de elipse meridiana. Si el plano corta al elipsoide perpendicularmente al eje de rotación, la intersección resultante es una circunferencia y recibe el nombre de paralelo; si en estas condiciones el plano de corte pasa por el centro del elipsoide, se obtiene el mayor de todos los paralelos, es decir, el ecuador. El elipsoide de revolución queda definido por los parámetros de la elipse meridiana (elipse generatriz), a , eje mayor, b , eje menor, aplanamiento p y excentricidad e . Si $QPQ'P'$ es la elipse generatriz, figura 1.216.X, el aplanamiento queda determinado por la relación entre la diferencia de los semiejes y el semieje mayor:

$$p = \frac{a - b}{a}$$

La excentricidad es la relación entre la distancia focal y el semieje mayor:

$$e = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

Un punto cualquiera O del elipsoide queda definido por sus dos coordenadas x e y . El paralelo de tal punto O queda a su vez definido por las siguientes especies de latitudes:

Latitud geodésica, ϕ , es el ángulo que con el plano del ecuador forma la normal

al elipsoide en punto considerado.

Latitud geocéntrica, ψ , ángulo formado por el radio vector con el plano del

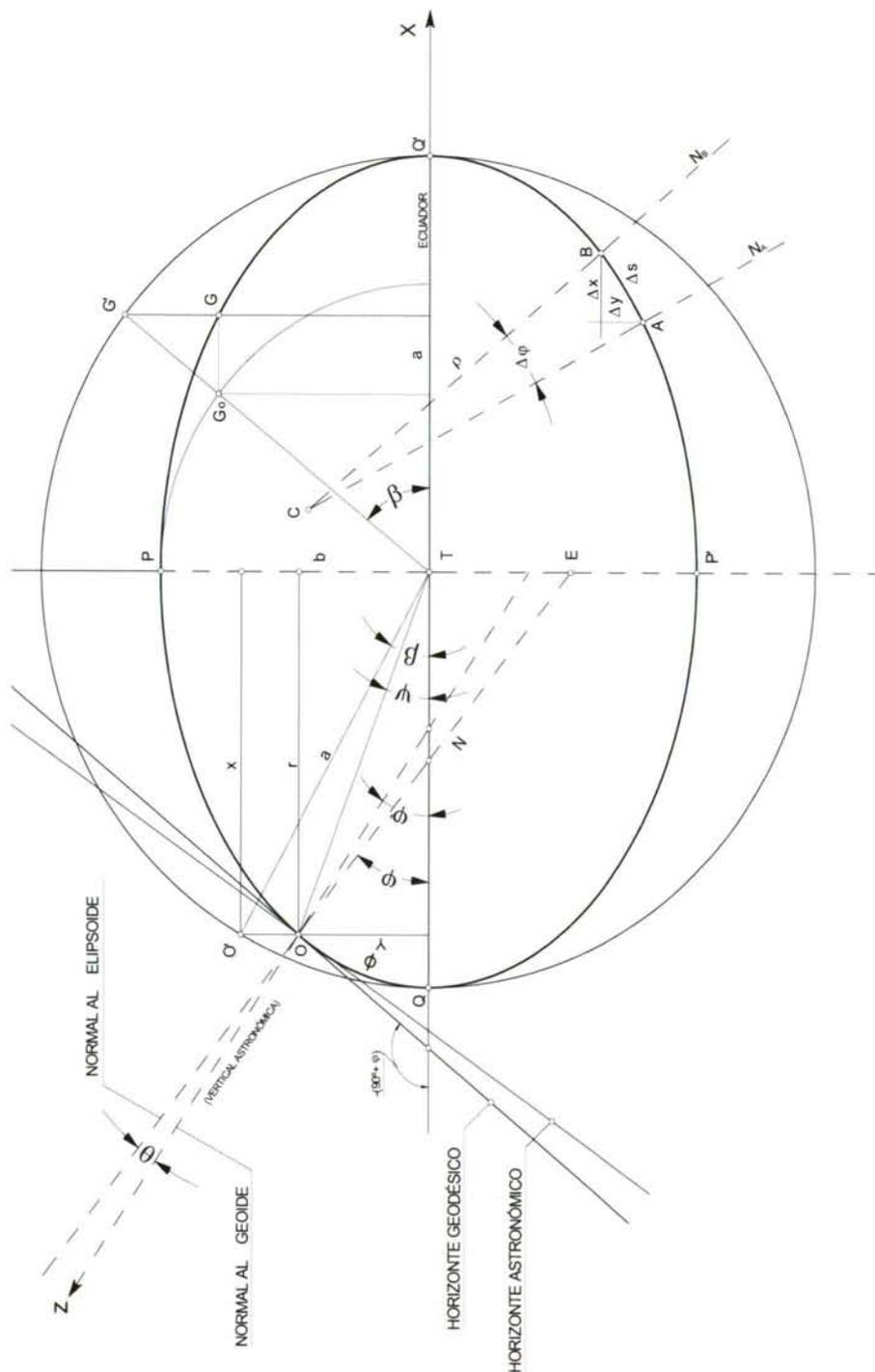


Figura - 1.216.X - Diferentes clases de latitud: ϕ astronómica, ϕ geodésica, ψ geocéntrica y β paramétrica

ecuador.

Latitud paramétrica, β , sobre la circunferencia de radio el semieje mayor y centro el centro de la elipse, circunferencia principal, el ángulo que el radio correspondiente al punto de igual abscisa, forma con el ecuador.

Las coordenadas x e y de un punto pueden ser expresadas en función de los parámetros y de la latitud geodésica; para la elipse meridiana de la figura 1.216.X se tiene:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1.217.X)$$

Derivando y despejando,

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y \cdot y'}{b^2} = 0 \quad (2.217.X)$$

$$y' = - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} \quad (3.217.X)$$

El significado geométrico del signo - queda claro: a todo incremento positivo de la ordenada corresponde un incremento negativo de la abscisa y viceversa. En la misma figura,

$$y' = \operatorname{tg} [- (90^\circ - \varphi)] \quad (4.217.X)$$

por lo tanto,

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} \quad (5.217.X)$$

Recordando que la excentricidad en la elipse viene dada por la expresión,

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (6.217.X)$$

de la que sucesivamente se obtienen,

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i), } e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \\ \text{(ii), } b^2 = a^2(1 - e^2) \\ \text{(iii), } a^2 = \frac{b^2}{(1 - e^2)} \\ \text{(iv), } \frac{b^2}{a^2} = (1 - e^2) \end{array} \right\} \quad (1.218.X)$$

Despejando la ordenada "y" en la (5.217.X),

$$y = x \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \varphi \quad (2.218.X)$$

y según (iv)(1.218.X), resulta

$$y = x(1 - e^2) \operatorname{tg} \varphi \quad (2.218.X)$$

sustituyendo esta en la ecuación canónica de la elipse, (1.217.X),

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2(1 - e^2)^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \varphi = 1 \quad (3.218.X)$$

en la que efectuando las operaciones indicadas, sustituyendo (ii)(7.225.X) y simplificando, nos queda,

$$x^2 = \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \quad (4.218.X)$$

y de esta,

$$x = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (1.219.X)$$

Usualmente se hace $W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$, obteniéndose finalmente,

$$x = \frac{a \cos \varphi}{W} \quad (2.219.X)$$

Que es la expresión del radio del paralelo. El segmento $N = OE$ recibe el nombre de gran normal y es elemento de común uso en los trabajos de Geodesia e Hidrografía; su valor es de inmediata inferencia:

$$N = \frac{a}{W}$$

poniendo ahora "y" en función de la "x" dada por (2.219.X),

$$y = \frac{a(1 - e^2) \sin \varphi}{W} \quad (3.219.X)$$

Las medidas efectuadas por Bessel, Clarke, Helmert y Hayford proporcionaron valores distintos para los parámetros del elipsoide de revolución. Si bien tales valores eran los más adecuados para los lugares donde se efectuaron las mediciones, ofrecían sin embargo dificultades para poder conectar distintos trabajos geodésicos y para realizar estudios sobre las anomalías de la dirección de la vertical en distintas partes del mundo. La Oficina Hidrográfica Internacional, en la conferencia celebrada en Madrid en 1924, adoptó un Elipsoide Internacional de referencia, cuyos parámetros fueron los mismos que determinó Hayford en 1909:

Radio ecuatorial = 6378388 metros
Aplanamiento 1:297

Hasta hace bien pocos años, aparición del elipsoide WGD, el Instituto Hidrográfico de la Marina tenía adoptado el Elipsoide Internacional, como superficie de referencia, en todos sus levantamientos.

2. COORDENADAS GEOGRÁFICAS EN ELIPSOIDE Y GEOIDE. — Puesto que en un lugar dado de la Tierra pueden considerarse dos verticales distintas, una geodésica o elipsóidica, referida a la superficie hipotética del elipsoide, y otra astronómica o geoídica, referida a la superficie real del geoide, es necesario distinguir dos sistemas de coordenadas geográficas:

a) **Coordenadas geodésicas.** Supuesto que el elipsoide de revolución representa la superficie matemática de la Tierra, la dirección de la vertical coincide con la normal al elipsoide y encuentra al eje de rotación de la Tierra, que está representado por el eje de simetría de dicho elipsoide.

El **plano meridiano** de un lugar es el plano que pasa por la vertical o normal a dicho elipsoide en dicho lugar y por el eje de simetría.

La **latitud** en el elipsoide es el ángulo que la normal al elipsoide forma con el ecuador.

La **longitud** en el elipsoide es el ángulo diedro que el plano meridiano del lugar forma con el plano meridiano origen de longitudes.

B) **Coordenadas astronómicas.** La superficie del geoide es irregular y la vertical de un punto, en general, no corta al eje de rotación de la Tierra, y, por lo tanto, el **plano meridiano** de un lugar se define como el plano que, conteniendo a la vertical, es paralelo al eje de rotación de la Tierra.

La **latitud** en el geoide es el ángulo que la vertical forma con la normal al eje de rotación, contenida en el plano meridiano del lugar; **es independiente de toda hipótesis sobre la forma de la Tierra.**

La **longitud** en el geoide es el ángulo que el plano meridiano del lugar forma con el plano meridiano, origen de longitudes.

3. RADIOS DE CURVATURA PRINCIPALES.— Las intersecciones con el elipsoide del haz de planos que pasan por la normal en un punto, reciben el nombre de secciones normales. De las infinitas secciones normales son notables dos: La sección meridiana y la sección por el plano del haz, que es perpendicular al de la elipse meridiana que recibe el nombre de sección perpendicular, representada en la figura por la traza OE; ambas secciones reciben el nombre de secciones principales y los radios de curvatura, ρ y N , según estas secciones, son los radios de curvatura principales en un punto del elipsoide. Las normales en dos puntos A y B infinitamente próximos en la elipse meridiana se cortan en un punto C formando el ángulo $\Delta\phi$; el arco de elipse

meridiana correspondiente es Δs . Cuando el punto A tiende al B (o viceversa), $\Delta \varphi$ tiende a 0, el punto C se convierte en el centro de curvatura de la elipse meridiana en dicho punto, y el círculo de radio ρ recibe el nombre de círculo osculador. Para encontrar la expresión del radio de curvatura de la elipse meridiana en un punto, partamos de las relaciones:

$$\left. \begin{aligned} \Delta s^2 &\approx \Delta x^2 + \Delta y^2 \\ \Delta s &\approx \rho \Delta \varphi \end{aligned} \right\}$$

Pasando a los elementos diferenciales,

$$\left. \begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\ ds &= \rho d\varphi \\ \rho &= \frac{ds}{d\varphi} \end{aligned} \right\}$$

En la circunferencia principal (radio el semieje mayor a) se tiene:

$$x = a \cos \beta \quad , \rightarrow dx = -a \sin \beta d\beta \quad (1.221.X)$$

$$y = b \sin \beta \quad , \rightarrow dy = b \cos \beta d\beta \quad (2.221.X)$$

por lo que,

$$ds = d\beta \sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta} \quad (3.221.X)$$

De las igualdades (2.219.X), (3.219.X), (1.221.X) y (2.221.X) deducimos:

$$\sin \beta = \frac{b}{a} \cdot \frac{\sin \varphi}{W} \quad (4.221.X)$$

y,

$$\cos \beta = \frac{\cos \varphi}{W} \quad (5.221.X)$$

Las latitudes geodésica y paramétrica están relacionadas por:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \beta \quad (1.222.X)$$

diferenciado esta expresión y despejando $d\beta$

$$d\beta = \frac{b}{a} \cdot \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \varphi} d\varphi \quad (2.222.X)$$

Sustituyendo (1.221.X), (2.221.X), (4.221.X), (5.221.X) y (2.222.X) en (3.221.X), operando y simplificando se obtiene

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.222.X)$$

que es el radio de curvatura de la elipse meridiana en el punto considerado. Desarrollando el cociente,

$$\frac{1}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

por el binomio de Newton y limitándonos a los términos en e^4 ,

$$(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2} e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + \frac{15}{8} e^4 \operatorname{sen}^4 \varphi + \dots$$

y teniendo en cuenta las fórmulas de Moivre¹

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \varphi = \frac{1 - \cos \varphi}{2} \quad ,, \quad \operatorname{sen}^4 \frac{1}{2} \varphi = \frac{3 - 4 \cos \varphi + \cos 2 \varphi}{8}$$

¹ Abraham De Moivre.- Pionero de la teoría de la probabilidad, "The doctrine of chances", y de la Trigonometría. Nació el 26 de mayo de 1667 cerca de París, en Vitre, y emigró a Inglaterra a raíz de la expulsión de los Hugonotes; murió en Londres en 1754.

nos queda finalmente:

$$\rho = a(1 - e^2) \left[1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4 - \cos 2\varphi \left(\frac{3}{4} e^2 + \frac{60}{64} e^4 \right) + \cos 4\varphi \frac{15}{64} e^4 \right]$$

quedando, una vez efectuadas las simplificaciones precisas,

$$\rho = a \left[1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{64} e^4 - \left(\frac{3}{4} e^2 + \frac{3}{16} e^4 \right) \cos 2\varphi + \frac{15}{64} e^4 \cos 4\varphi \right] \quad (1.223.X)$$

Para el radio de curvatura N del vertical primario, que como se verá es la gran normal, se recurre al teorema de Meusnier²: “El radio de curvatura de una sección normal de una superficie cualquiera, que tenga la misma tangente, es igual al radio de curvatura de una sección oblicua, dividida por el coseno del ángulo que formen ambas secciones”.

Así, en la figura 1.225.X el radio de curvatura de la sección normal OE, ρ' , es igual al de la sección oblicua r dividido por el coseno del ángulo que forman ambas, es decir:

$$\rho' = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \quad (2.223.X)$$

idéntica relación a la de la gran normal. Los radios de curvatura principales son constantes a lo largo del mismo paralelo.

Siendo la curvatura en un punto O del elipsoide variable con la sección normal que se considere, se toma muchas veces como radio de curvatura del elipsoide en el punto considerado la media aritmética de los infinitos radios de curvatura correspondientes a las infinitas secciones normales que pasan por O, y que resulta igual a la media geométrica $\sqrt{\rho N}$ de los radios de curvatura principales.

4. LONGITUD DEL ARCO DE PARALELO.— La longitud de un arco de paralelo de latitud φ , comprendido entre las longitudes λ_1 y λ_2 , figura 1.225.X, tiene por expresión:

² Jean-Baptiste Marie Meusnier.- General francés, teórico de la aeronáutica y matemático. Nacido en Tours el 19 de junio de 1754 y muerto en 1793.

$$A = r \cdot \Delta \lambda$$

siendo r el radio del paralelo y $\Delta \lambda$ la diferencia en longitudes. Si se sustituye r por su valor, que no es otro que el de la abscisa x de la expresión (1.219.X), se tendrá:

$$A = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \cdot \Delta \lambda \quad (1.224.X)$$

Este elemento es de gran importancia para el trazado de las cartas de Mercátor.

5. LONGITUD DEL ARCO DE MERIDIANO.— Si se considera un elemento diferencial de meridiano y ρ es el radio de curvatura correspondiente, la longitud de dicho elemento vendrá dada por:

$$d \ell = \rho \cdot d \varphi$$

Mas, cuando la diferencia en latitud sea de entidad tal que el radio de curvatura varíe notablemente, figura 1.225.X, la longitud del arco de meridiano tendrá que ser calculada mediante la integración de los elementos $d \ell$, comprendidos entre ambas latitudes. Es decir, la longitud de un arco de meridiano entre las latitudes φ_1 y φ_2 vendrá dado por la siguiente integral:

$$d \ell = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \cdot d \varphi$$

En la que sustituyendo ρ por su valor del desarrollo en serie de la (1.223.X) e integrando se tiene finalmente:

$$\ell = a \left[\left(1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{64} e^4 \right) \Delta \varphi - \left(\frac{3}{4} e^2 + \frac{3}{16} e^4 \right) \cos 2 \varphi_m \operatorname{sen} \Delta \varphi + \frac{15}{128} e^4 \cos 4 \varphi_m \operatorname{sen} 2 \Delta \varphi + \dots \right] \quad (2.224.X)$$

La Oficina Hidrográfica Internacional, en su publicación especial nº 21, tabla III, ha tabulado las longitudes de arco de meridiano de 10' en 10' a partir del ecuador, habiendo sido calculadas con los parámetros del Elipsoide Internacional.

6. LÍNEA GEODÉSICA.— Se llama línea geodésica de una superficie a la curva

cuya normal principal en cada punto coincide con la normal a la superficie. Si la superficie viene dada en la forma $z=f(x,y)$, la ecuación diferencial de las líneas geodésicas es:

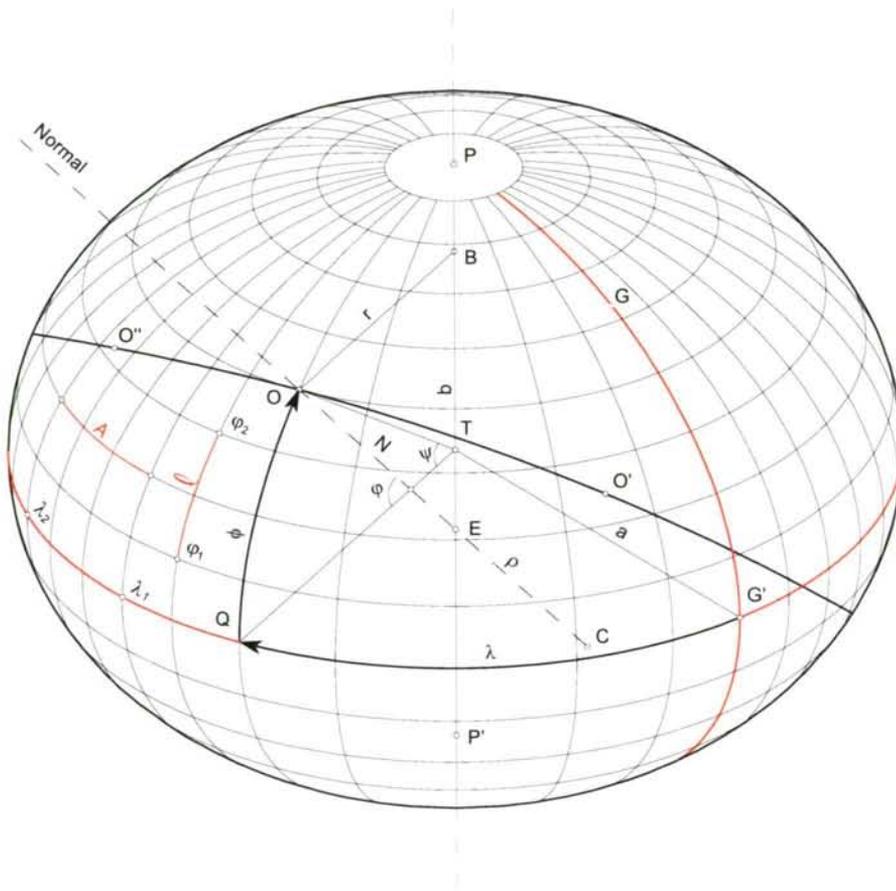


Figura - 1.225.X - Secciones principales. Coordenadas en el elipsoide

$$(1 + p^2 + q^2) \frac{d^2y}{dx^2} = pt \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 + (2ps - qt) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + (pr - 2qs) \frac{dy}{dx} - qr$$

en la que :

$$p = \frac{\delta z}{\delta x}, \quad q = \frac{\delta z}{\delta y}, \quad r = \frac{\delta^2 z}{\delta x^2}, \quad s = \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}, \quad t = \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} \quad \text{y} \quad h = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

Si la expresión de la superficie viene dada en forma paramétrica:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

la ecuación diferencial de las líneas geodésicas tiene una forma más complicada, [MIR-82].

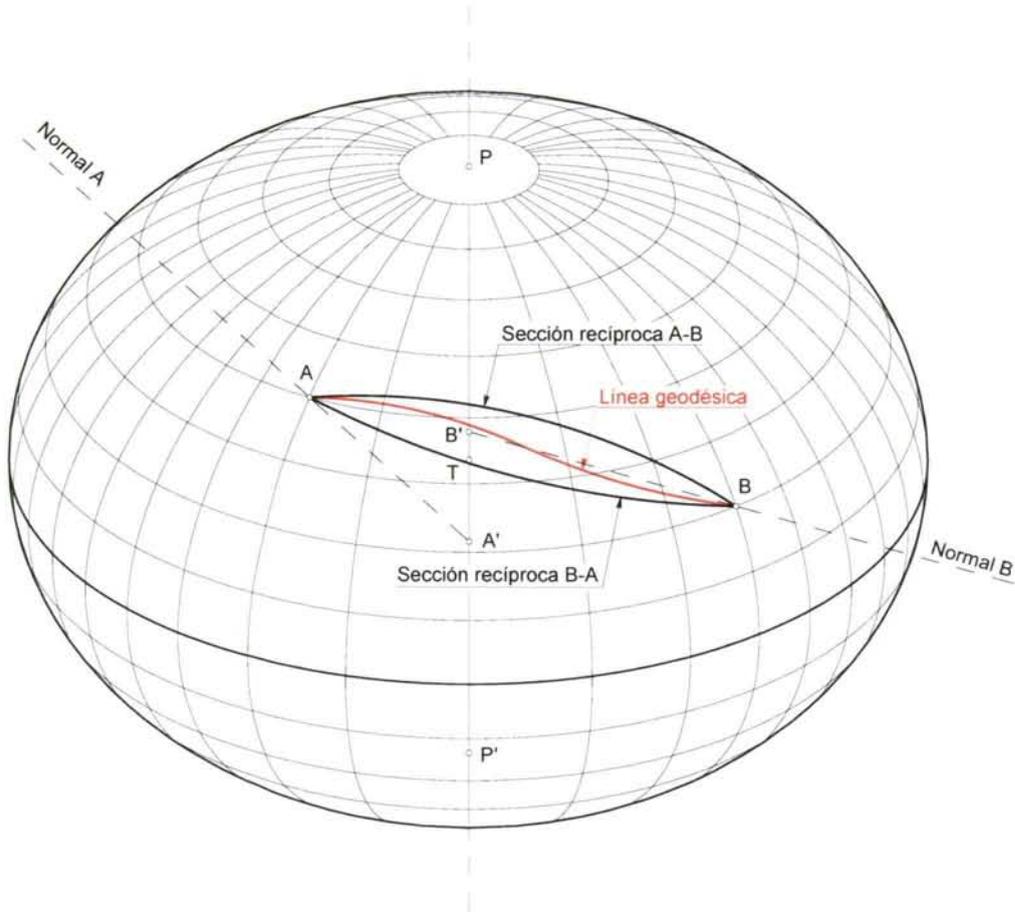


Figura - 1.226.X - Secciones recíprocas y línea geodésica

Considerados sobre la superficie del elipsoide de revolución dos puntos A y B, figura 1.226.X, sus normales son, en general y salvo para puntos situados en el mismo meridiano o paralelo, rectas que se cruzan en el espacio cortando al eje de rotación del elipsoide en los puntos A' y B'. Si de las infinitas secciones normales en cada uno de los puntos se considera aquella que contiene al otro, las secciones resultantes reciben el nombre de secciones recíprocas. La línea geodésica, que por definición es el camino

más corto entre dos puntos³, se ubica entre las secciones recíprocas presentando una inflexión. Cuando los puntos A y B se acercan continuamente, las secciones recíprocas tienden a confundirse con la geodésica. Para pequeñas distancias (pequeños arcos de geodésica), esta se trata como una sección recíproca.

La tabla de la página siguiente muestra una lista de los elipsoides más utilizados. En negrita se resaltan aquellos de común huso; actualmente el **WGS-84** es el más utilizado, [<http://www.esteio.com.br/newsletters/paginas/006/o-tabelp.htm>]:

7. TIERRA ESFÉRICA.— En el campo de la Navegación Astronómica, y puesto

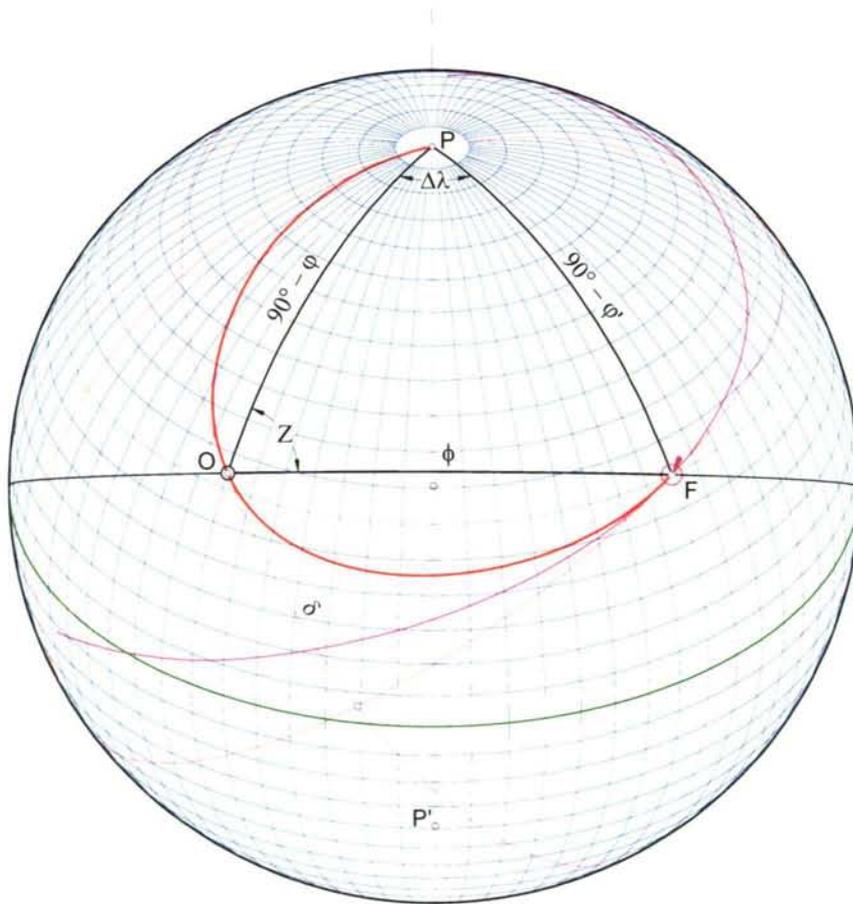


Figura - 1.227.X - La esfera Tierra

³ La línea geodésica en el plano euclideo es el segmento de línea recta. En el cilindro es la hélice. En la esfera, es el menor arco de círculo máximo. En el elipsoide, en general, es una línea de doble curvatura (flexión y torsión). En superficies más complejas, la línea geodésica adopta formas más complicadas.

que la precisión requerida no exige consideraciones demasiado rigurosas en cuanto a

TABLA DE ELIPSOIDES

Nombre	Semieje mayor a (m)	Achatamiento (1/...)
Airy 1830	6377563,40	299,324965
Airy Modificado	6377340,19	299,324965
Australian National (KAU63 o SA69)	6378160,00	298,250000
Bessel 1841	6377397,16	299,152813
Clarke 1880	6378249,15	293,465000
Danish	6377104,00	298,805359
Dalambre 1810	6376985,07	308,640000
Everest Modificado	6377304,06	300,801700
Fischer 1960 (Mercury)	6378166,00	298,300000
Geodetic Reference System 1967	6378160,00	298,247167
Geodetic Reference System 1980	6378137,00	298,257222
Hayford 1909	6378388,00	297,000000
Heiskanen 1929	6378400,00	298,195400
Helmert 1907	6378200,00	298,300000
Hough 1956	6378270,00	297,000000
Internacional 1924	6378388,00	297,000000
IUGG 1967	6378160,00	298,250000
Krassovsky	6378245,00	296,300000
South American 1969	6378160,00	298,250000
Struve 1860	6378298,30	294,730000
War Office 1924	6378300,58	296,000000
World Geodetic System 1960	6378165,00	298,300000
World Geodetic System 1966	6378145,00	298,250000
World Geodetic System 1972	6378135,00	298,260000
World Geodetic System 1984 (WGS-84)	6378137,00	298,257224

la forma de la Tierra, nuestro planeta es una esfera, figura 1.227.X. Ya quedó dicho que la latitud astronómica es independiente de toda hipótesis sobre la forma de la Tierra, y es precisamente la latitud astronómica la que se determina mediante las observaciones

con el sextante. Cualquier reducción al elipsoide requiere el conocimiento del ángulo de la vertical, dato que generalmente no interesa al marino.

Entre las latitudes relativas al elipsoide existen las relaciones:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{b^2}{a^2} \cdot \operatorname{tg} \varphi, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} \cdot \operatorname{tg} \varphi \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{b}{a} \cdot \operatorname{tg} \beta$$

La diferencia $\omega = \varphi - \psi$ se conoce con el nombre de reducción de la latitud; después de efectuadas las pertinentes simplificaciones se llega a:

$$\omega'' = -692,74'' \operatorname{sen} 2\varphi + 1,16'' \operatorname{sen} 4\varphi$$

expresión que el Almanaque Náutico da como reducción de la latitud. Insistamos en señalar que no existe ninguna relación matemática que ligue la latitud astronómica con las relativas al elipsoide. Para cálculos de precisión del rumbo inicial (azimut) y distancia ortodrómica, se emplea el método de Andoyer-Lambert, efectuándose un cálculo previo en la esfera de la latitud paramétrica; las formulas utilizadas son:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} Z &= \cos \beta_1 \operatorname{tg} \beta_2 \operatorname{cosec} \Delta\lambda - \operatorname{sen} \beta_1 \operatorname{ctg} \Delta\lambda \\ \cos \sigma &= \operatorname{sen} \beta_1 \operatorname{sen} \beta_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 \cos \Delta\lambda \\ M &= (\operatorname{sen} \beta_1 + \operatorname{sen} \beta_2)^2 \\ N &= (\operatorname{sen} \beta_1 - \operatorname{sen} \beta_2)^2 \\ U &= \frac{\sigma - \operatorname{sen} \sigma}{1 + \cos \sigma} \\ V &= \frac{\sigma + \operatorname{sen} \sigma}{1 - \cos \sigma} \\ D_G &= \sigma - \frac{f}{4} (MU + NV) \text{ en redianes} \\ D_G &= a \left[\sigma - \frac{f}{4} (MU + NV) \right] \text{ en millas} \end{aligned} \right\}$$

En las que Z es el azimut o rumbo inicial, D_G la distancia geodésica, f el aplanamiento

y a el semieje mayor de la elipse meridiana. El método tiene un error máximo de 1 metro a 500 millas y 7 metros a 6000 millas; el error en el azimut cae dentro del segundo de arco [ADMIRALTY MANUAL OF NAVIGATION. Volume I - págs. 93 y sig.].

8. LATITUD ASTRONÓMICA Y ALTURA DEL POLO.— Definida la latitud astronómica como el ángulo que la vertical astronómica del lugar forma con el plano del ecuador, es fácil comprobar que tal ángulo es precisamente la altura del polo celeste: así, en la figura 1.230.X, si PP' es el eje de rotación, Q el plano del ecuador y ZZ' la línea cénit-nadir, vertical astronómica, el ángulo ζ que la paralela $P_0P'_0$ al eje de rotación

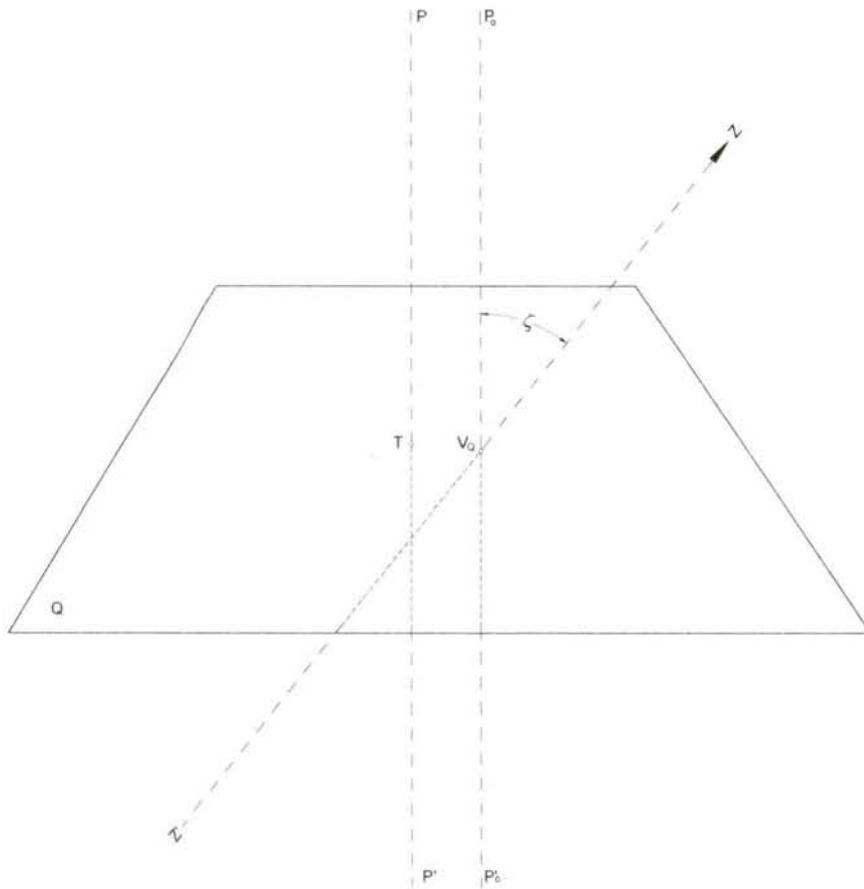


Figura - 1.230.X - Altura del polo celeste

forma con la vertical es la distancia zenital del polo celeste; por lo tanto la altura del polo sobre el horizonte es la latitud del observador. Bastaría medir con el sextante dicha altura para obtener directamente la latitud del lugar. Al no ser el polo un punto material, tal observación no puede llevarse a cabo; en el hemisferio norte, sin embargo, y cómo

posteriormente se verá, para el hemisferio norte, la altura de la estrella Polar, y aplicadas las precisas correcciones, nos permite este cálculo de la latitud. Los navegantes de épocas pasadas obtenían “*el altura del norte*” aplicando a la altura de la estrella una corrección función de la posición relativa de “Las Guardas”, respecto a la misma, [Regimiento de navegación - Pedro de Medina].

9. CIRCUNFERENCIA DE ALTURAS IGUALES .— Previo al estudio de los distintos procedimientos encaminados a determinar las coordenadas del navegante, latitud (a partir de ahora, ϕ) y longitud λ , es, y desde un punto de vista puramente

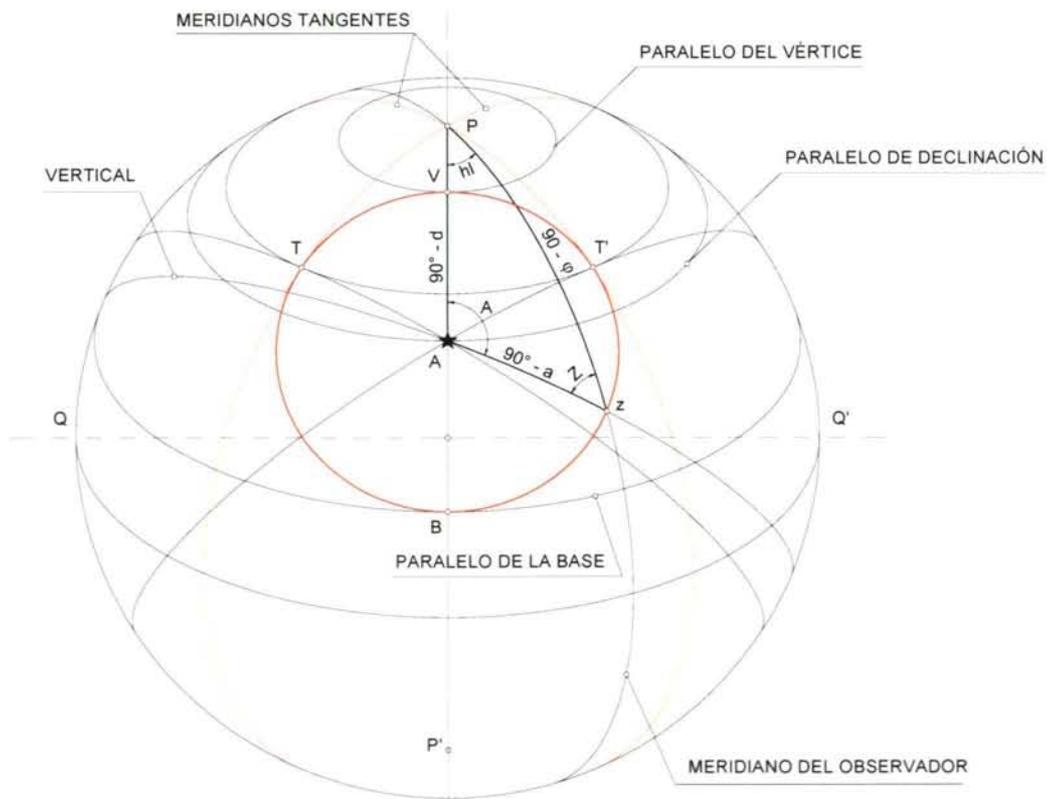


Figura - 1.231.X - Circunferencia de alturas iguales de primera especie

didáctico, preciso el estudio de este importantísimo lugar geométrico, verdadera línea de posición, y que se define como *el lugar geométrico de los puntos del observador*

para los cuales, en un determinado instante, un astro presenta la misma altura, figura 1.231,X; es decir, sobre la esfera celeste una circunferencia con centro el astro observado, y tal que cualquier observador que mida la altura a , tiene su zenit en un punto de esa circunferencia, su radio esférico es, por lo tanto, la distancia zenital; en algunos textos, e impropriamente, es denominado círculo de alturas iguales. Su propiedad fundamental es que la circunferencia de alturas iguales es perpendicular al vertical en el punto de observación. Su expresión matemática es la (1.17.II) que aquí recordamos:

$$\text{sen } a = \text{sen } \varphi \text{ sen } d + \text{cos } \varphi \text{ cos } d \text{ cos } hI$$

En ella son constantes la altura a y la declinación d del instante de la observación. A cada valor del ángulo en el polo u horario local hI corresponden en general dos valores de la latitud φ que satisfacen la ecuación; los puntos de coordenadas $\{\varphi, hI\}$ son puntos de la circunferencia de alturas iguales y definen todas las posibles formas que puede adoptar el triángulo de posición. Las coordenadas de su centro son declinación y horario en Greenwich del astro, denominándose base y vértice a los puntos de latitudes extremas (valores límite de φ que satisfacen la ecuación dada), y se llama zona de altura a la zona esférica delimitada por los paralelos de base y vértice [FLORA-82] clasificándose en:

- a) **De primera especie.**- El polo del astro (el de igual nombre que la declinación), es exterior a la circunferencia y los valores máximos del horario tienen por expresión:

$$\text{sen } hI = \frac{\text{cos } a}{\text{cos } d}$$

y corresponden a los puntos T y T' de la figura en los que el vertical es perpendicular al meridiano y, por lo tanto, el azimut Z (que puede tomar todos los valores), es E u W (astro en el primer vertical). Los extremos de φ , son $\varphi = d - z$, para la base y $\varphi = d + z$ para el vértice, en las que z es la distancia zenital. Se tiene así:

$$|d| < |a|$$

- b) **De segunda especie.**- El polo del astro es un punto interior a la circunferencia, figura 1.233.X. El horario local h puede tomar todos los valores, no así el azimut Z , pues en la expresión:

$$\cos Z = \operatorname{sen} d \sec \varphi \sec a - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} a$$

en la que son constantes d y a y variables Z y φ , el máximo de Z se obtendrá

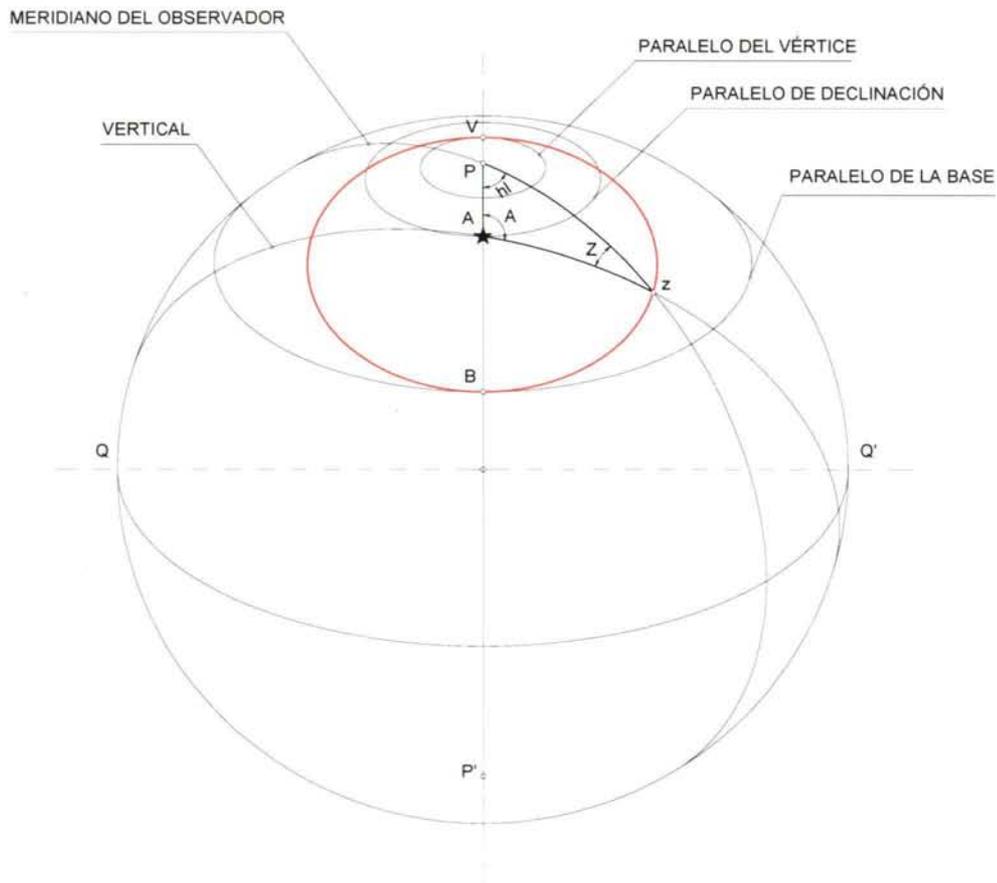


Figura - 1.233.X - Circunferencia de alturas iguales de segunda especie para el mínimo del segundo miembro de la igualdad, mínimo que cómo es fácil de ver obtendremos para:

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} d}$$

que solo tiene sentido si,

$$|a| \leq |d|$$

y el máximo valor del azimut vendrá dado por:

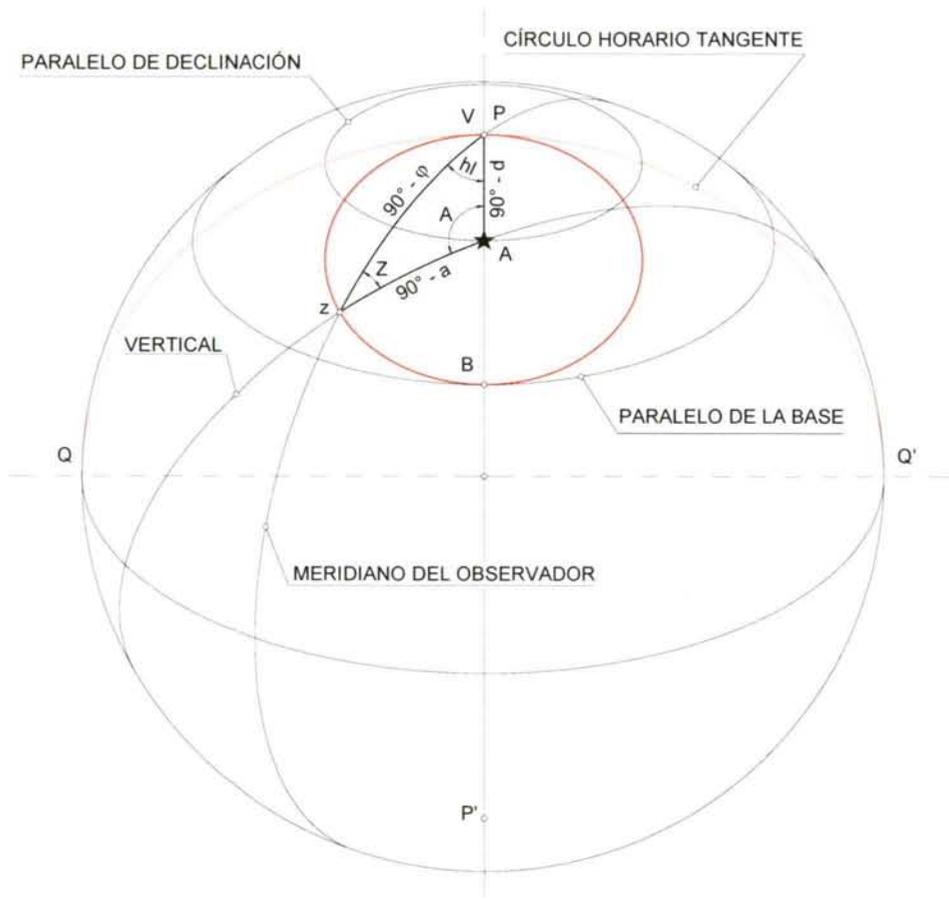


Figura - 1.234.X - Circunferencia de alturas iguales de tercera especie

$$\text{sen } Z = \frac{\cos d}{\cos a}$$

Los valores extremos de la latitud están comprendidos entre $d + z$, para el vértice y $d - z$, para la base.

- c) **De tercera especie.-** El polo es el vértice, figura 1.234.X, las latitudes extremas son $\varphi = 90^\circ$ y $\varphi = d - z$. Horario local y azimut pueden tomar todos los valores (realmente, para un observador en el polo el horario local es indeterminado y, estrictamente, el límite del horario es 090° oriental u occidental, círculo horario tangente en el polo). Para este caso,

d)

$$|d| = |a|$$

Como conclusión, *una circunferencia de alturas iguales es de primera, segunda o tercera especie, según que el valor absoluto de la declinación del astro sea menor, mayor o igual que su altura y la latitud del vértice es de igual nombre que la declinación.* La primera referencia histórica a la circunferencia de alturas iguales, si bien de manera indirecta, se encuentra en los trabajos del portugués Pedro Núñez, *iniciación de los métodos basados en observaciones extrameridianas, empleando pomas o esferas* [GARCÍA FRANCO-47].

10. EL CÁLCULO DE LA LATITUD .— En la navegación previa a la invención del cronómetro, la determinación de esta coordenada se fundamentaba en la observación de una altura de la estrella Polar (hemisferio norte), o en las alturas meridianas principalmente de Sol y Luna, y, dado lo particular del caso, aún hoy es creencia singularmente extendida el que para el cálculo de la latitud no es preciso el cronómetro; tal creencia es un error basado en la poca transcendencia que la precisión en la hora tiene en los instantes del tránsito de los astros dadas las pequeñas variaciones en declinación y posición del observador debido a la baja velocidad relativa del buque, y para la observación de las alturas de la estrella polar en las latitudes medias y bajas, su alta declinación. Recordando que según (2.42.III), expresión que con posterioridad se analizará, y pasando a los incrementos finitos,

$$\Delta a = \Delta \varphi \cos Z + \Delta d \cos A - \Delta P \cos \varphi \sin Z$$

y asimilando los incrementos al error, para los instantes próximos al paso por el meridiano y supuesto el observador inmóvil y declinación constante, nos queda:

$$\Delta a = - \Delta P \cos \varphi \sin Z$$

Dado que $\text{sen } Z=0$, independientemente del error en el horario derivado del error en la hora, el error en la altura $\Delta a=0$. De idéntica forma, de (3.42.III) se tiene,

$$\Delta a = - \Delta P \cos d \text{ sen } A$$

Para la Polar, la declinación d es muy próxima a 90° , por lo que, con independencia del valor de A , $\Delta a=0$. En ambos casos queda justificado que el error en la hora carece de influencia en el cálculo de la latitud, siendo suficiente la hora que proporciona el reloj de bitácora.

11. LATITUD POR ALTURA FUERA DEL MERIDIANO .— Los datos en este caso son, hora del primer meridiano, longitud y altura, o lo que es lo mismo, horario local, declinación y altura. En la fórmula de la altura,

$$\text{sen } a = \text{sen } \varphi \text{ sen } d + \cos \varphi \cos d \cos h$$

podría hacerse $\text{sen}^2 \varphi = x^2$ y $\cos^2 \varphi = 1 - x^2$, obteniéndose así una ecuación de segundo grado cuyas raíces corresponderían a las latitudes de los dos puntos donde el meridiano del observador corta a la circunferencia de alturas iguales, pero la solución más práctica es la que sigue, dividiendo ambos miembros por $\text{sen } d$,

$$\text{sen } a \text{ cosec } d = \text{sen } \varphi + \cos \varphi \frac{\cos P}{\text{tg } d}$$

y considerando el ángulo auxiliar α dado por,

$$\text{tg } \alpha = \frac{\cos P}{\text{tg } d} \tag{1.236.X}$$

se tiene,

$$\text{sen } a \text{ cosec } d = \text{sen } \varphi + \cos \varphi \text{ tg } \alpha$$

$$\text{sen } a \text{ cosec } d = \text{sen } \varphi + \cos \varphi \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

y de aquí,

$$\text{sen } a \text{ cosec } d \cos \alpha = \text{sen } \varphi \cos \alpha + \cos \varphi \text{ sen } \alpha$$

de la que se concluye,

$$\text{sen } a \text{ cosec } d \cos \alpha = \text{sen } (\varphi + \alpha) \quad (1.237.X)$$

El sistema (1.236.X) y (1.237.X), soluciona el problema. Alternativamente puede adoptarse la vía de solución que sigue,

$$\text{sen } a \text{ sec } P \text{ sec } d = \text{sen } \varphi \frac{\text{tg } d}{\cos P} + \cos \varphi$$

Haciendo,

$$\text{tg } \beta = \frac{\text{tg } d}{\cos P} \quad (2.237.X)$$

obtendremos,

$$\text{sen } a \text{ sec } P \text{ sec } d \cos \beta = \cos (\varphi + \beta) \quad (3.237.X)$$

Con idénticos resultados.

12. LATITUD POR ALTURA MERIDIANA .— Cuando el astro pasa por el meridiano superior el horario local es 0° y el triángulo de posición degenera en un arco de círculo máximo. Si en la fórmula de la altura hacemos $P=0$, y puesto que $\cos 0=1$,

$$\text{sen } a = \text{sen } \varphi \text{ sen } d + \cos \varphi \cos d$$

Poniendo en lugar de la altura la distancia zenital,

$$\cos z = \cos (\varphi - d) \text{ o } \cos z = \cos (d - \varphi)$$

por lo tanto,

$$z = (\varphi - d) \text{ o } z = (d - \varphi)$$

y de aquí,

$$\varphi_o = d + z \text{ o } \varphi_o = d - z$$

La ambigüedad desaparece al considerar la siguiente regla: Si el astro pasa cara al norte, la distancia zenital es positiva, si lo hace cara al sur, es negativa. Ahora, y en función de la citada regla, la expresión final resulta:

$$\varphi_o = d - z \tag{1.238.X}$$

Obteniéndose la latitud observada φ_o con una simple diferencia algebraica, recordando que la declinación de especie norte es positiva, y negativa la de especie sur.

Cuando el astro pasa por el meridiano inferior el ángulo en el polo es 180° y su coseno es -1 ; por lo tanto:

$$\text{sen } a = \text{sen } \varphi \text{ sen } d - \text{cos } \varphi \text{ cos } d$$

sustituyendo la declinación por su complemento Δ tenemos,

$$\text{sen } a = \text{sen } \varphi \text{ cos } \Delta - \text{cos } \varphi \text{ sen } \Delta$$

y de aquí,

$$\text{sen } a = \text{sen } (\varphi - \Delta)$$

por lo tanto,

$$a = \varphi - \Delta$$

Finalmente:

$$\varphi_o = a + \Delta \tag{2.238.X}$$

y para obtener la latitud observada φ_o al paso de los astros por el meridiano inferior, bastará sumar a la altura el complemento de la declinación. No se plantea ningún conflicto de signos puesto que solamente los astros circumpolares son observables en

tales circunstancias, y la latitud debe ser de igual especie que la declinación.

13. LATITUD POR ALTURA CIRCUNMERIDIANA .— Cuando la existencia de nubes nos haga presumir dificultades a la hora de la observación meridiana³, se tomarán anotando sus correspondientes horas de cronómetro, una serie de alturas anteriores y posteriores pero lo más cercanas posibles a la misma, para una vez seleccionada la altura más conveniente y reducida al meridiano, proceder al cálculo de la latitud observada. Para la reducción al meridiano calcularemos la corrección que sumada a la altura circunmeridiana la transforma en meridiana. Si a_M , a_C y C^{on} son, respectivamente, altura meridiana, altura circunmeridiana y corrección, teniendo en cuenta que $a_M = a_C - C^{on}$,

$$\operatorname{sen}(a_M - C^{on}) = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} d + \cos \varphi \cos d \left(1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{P}{2} \right)$$

$$\operatorname{sen} a_M \cos C^{on} - \cos a_M \operatorname{sen} C^{on} = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} d + \cos \varphi \cos d - 2 \cos \varphi \cos d \operatorname{sen}^2 \frac{P}{2}$$

$$\operatorname{sen} a_M \left(1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{C^{on}}{2} \right) - \cos a_M \operatorname{sen} C^{on} = \cos(d - \varphi) - 2 \cos \varphi \cos d \operatorname{sen}^2 \frac{P}{2}$$

$$\operatorname{sen} a_M - 2 \operatorname{sen} a_M \operatorname{sen}^2 \frac{C^{on}}{2} - \cos a_M \operatorname{sen} C^{on} = \operatorname{sen} a_M - 2 \cos \varphi \cos d \operatorname{sen}^2 \frac{P}{2}$$

$$- 2 \operatorname{sen} a_M \operatorname{sen}^2 \frac{C^{on}}{2} - \cos a_M \operatorname{sen} C^{on} = - 2 \cos \varphi \cos d \operatorname{sen}^2 \frac{P}{2}$$

$$\operatorname{sen} C^{on} = \frac{2 \cos \varphi \cos d \operatorname{sen}^2 \frac{P}{2}}{\cos a_M} - 2 \operatorname{tg} a_M \operatorname{sen}^2 \frac{C^{on}}{2}$$

³ Aunque de aplicación general, el método en estudio se aplicó y ocasionalmente aún se aplica solo en las observaciones de Sol

$$\text{sen } C^{\text{on}} = \frac{2 \cos \varphi \cos d \text{ sen}^2 \frac{P}{2}}{\text{sen}(d - \varphi)} - 2 \text{ctg}(d - \varphi) \text{ sen}^2 \frac{C^{\text{on}}}{2}$$

Puesto que corrección y horario son ángulos muy pequeños, puede sustituirse el seno por el arco,

$$C^{\text{on}} = \frac{\cos \varphi \cos d P^2}{2 \text{sen}(d - \varphi)} - \text{ctg}(d - \varphi) \frac{C^{\text{on}2}}{2} \quad (1.240.X)$$

admitiéndose con suficiente aproximación para la corrección buscada,

$$C^{\text{on}} = \frac{\cos \varphi \cos d P^2}{2 \text{sen}(d - \varphi)}$$

Para que la corrección aparezca en segundos

$$C^{\text{on}''} = \frac{\cos \varphi \cos d P''^2}{2 \text{sen}(d - \varphi)} \text{sen } 1''$$

y si hacemos que P venga expresado en minutos de tiempo, $P'' = 900'' \cdot t^m$, así,

$$C^{\text{on}''} = \frac{\cos \varphi \cos d}{2 \text{sen}(d - \varphi)} 900^2 t^2 \text{sen } 1''$$

y operando convenientemente,

$$C^{\text{on}''} = 1,9635 \frac{\cos \varphi \cos d}{\text{sen}(d - \varphi)} t^2 \quad (2.240.X)$$

Haciendo:

$$\alpha = 1,9635 \frac{\cos \varphi \cos d}{\text{sen}(d - \varphi)} \quad (3.240.X)$$

será,

$$C^{on''} = \alpha \cdot t^2 \quad (1.241.X)$$

Por lo tanto,

$$a_M = a_C + \alpha \cdot t^2 \quad (2.241.X)$$

Con lo que la latitud observada meridiana puede ser calculada. La presente vía de reducción al meridiano da buenos resultados solo para valores del horario suficientemente pequeños, debiéndose, cuando el horario supere los 16^m, obtener la reducción por la fórmula directa:

$$C^{on} = \cos \varphi \cos d \operatorname{cosec} (d - \varphi) \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P}{\operatorname{sen} 1''}$$

que en algunas colecciones de tablas aparece en la forma⁴,

$$\operatorname{sen} C^{on} = 2 \cos \varphi \cos d \operatorname{sec} a \operatorname{verso} P \quad (3.241.X)$$

14. TIEMPO LÍMITE DE LA CIRCUNMERIDIANA.— Circunmeridianas y extrameridianas no deben observarse más allá de un límite que es aquel valor del horario para el cual el segundo término de la corrección alcanza el valor de 1'. Siendo la constante $k = 7,5 \cdot 900^4 \cdot \operatorname{sen}^3 1''$, el horario límite viene dado por:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{P}{2} = \frac{\sqrt{k \cdot \operatorname{tg} (d - \varphi)}}{\alpha}$$

15. LATITUD POR DOS CIRCUNMERIDIANAS Y EL INTERVALO.— Cuando la longitud con la que determinaremos el horario local no sea de confianza, podremos calcular la latitud observando dos alturas circunmeridianas y midiendo con el

⁴ El seno verso del ángulo α es $1 - \cos \alpha$. Seno verso $\alpha = 1 - \left(1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \right)$; por lo tanto:

$$\operatorname{sen} \operatorname{verso} \alpha = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

En los tratados de navegación es común la denominación verso α al referirse al semisenso verso α (haversine).

cronómetro el intervalo transcurrido. Si en las ecuaciones:

$$a_M = a_C + \alpha t^2 \quad \text{y} \quad a_M = a'_C + \alpha t'^2$$

sumamos miembro a miembro y despejada la a_M tendremos,

$$a_M = \frac{a_C + a'_C}{2} + \alpha \frac{t^2 + t'^2}{2}$$

o sea,

$$a_M = \frac{a_C + a'_C}{2} + \alpha \left[\left(\frac{t' - t}{2} \right)^2 + \left(\frac{t' + t}{2} \right)^2 \right]$$

pero $t - t'$ es el intervalo de tiempo verdadero transcurrido, que dada su pequeñez, podremos considerar igual al cronométrico l_C ; de manera que,

$$a_M = \frac{a_C + a'_C}{2} + \alpha \left(\frac{l}{2} \right)^2 + \alpha \left(\frac{t + t'}{2} \right)^2 \quad (1.242.X)$$

Para hallar $t + t'$ restaremos las dos primeras ecuaciones y tendremos

$$a'_C - a_C + \alpha(t'^2 - t^2) = 0$$

osea

$$\Delta a = \alpha(t' - t)(t' + t)$$

de la que,

$$t + t' = \frac{\Delta a}{\alpha(t' - t)}$$

y, haciendo la oportuna sustitución,

$$t + t' = \frac{\Delta a}{\alpha l}$$

Elevando al cuadrado y dividiendo por 4, tendremos

$$\left(\frac{t + t'}{2} \right)^2 = \frac{\Delta a^2}{4 \alpha^2 l^2}$$

que podemos escribir,

$$\left(\frac{t + t'}{2} \right)^2 = \frac{(\frac{1}{4} \Delta a)^2}{\alpha^2 (\frac{1}{2} l)^2}$$

y sustituyendo este valor en (1.242.X) se tendrá,

$$a_M = \frac{a'_c + a_c}{2} + \alpha (\frac{1}{2} l)^2 + \frac{(\frac{1}{4} \Delta a)^2}{\alpha (\frac{1}{2} l)^2} \tag{1.243.X}$$

Para hallar la altura meridiana se suma al promedio de las dos alturas circunmeridianas dos correcciones; la primera es el producto de α por el cuadrado del semi intervalo cronométrico; la segunda es el cuadrado de la cuarta parte de la diferencia entre las alturas circunmeridianas dividido por la primera corrección. La exactitud del procedimiento depende de la que tengan a'_c y a_c , y, por tanto, su diferencia Δa . Observando escrupulosamente, esta diferencia será exacta, porque en tan pequeño intervalo de tiempo las condiciones de observación serán las mismas; pero conviene disminuir todo lo posible el error, procurando que las alturas sean casi correspondientes. En efecto; un error ε en Δa será causa de que la segunda corrección tome el valor

$$\frac{[\frac{1}{4}(\Delta a + \varepsilon)]^2}{\alpha (\frac{1}{2} l)^2}$$

y, por lo tanto, que el error E_M en la altura meridiana sea,

$$E_M = \frac{[\frac{1}{4}(\Delta a + \varepsilon)]^2}{\alpha(\frac{1}{2}l)^2} - \frac{(\frac{1}{4}\Delta a)^2}{\alpha(\frac{1}{2}l)^2}$$

lo que resulta,

$$E_M = \frac{\varepsilon^2 + 2\varepsilon\Delta a}{4\alpha l^2}$$

Error que evidentemente decrece con Δa . Las correcciones a las alturas son innecesarias al ser eliminadas al restar las propias alturas.

16. LATITUD POR DOS CIRCUNMERIDIANAS EQUIDISTANTES.— El procedimiento anterior exige que el cronómetro marche acorde con el tiempo verdadero en el pequeño intervalo de las observaciones, lo cual sucede en la práctica en los cronómetros modernos; en caso de desconfianza sobre este punto debe recurrirse al método de reducción de Chauvenet⁵, que no precisa de tablas para ser calculado.

Consiste en observar tres alturas circunmeridianas a intervalos iguales, apreciados con un reloj cualquiera que marche bien, si no se dispone, como es lógico, de un cronómetro.

Llamemos t al horario desconocido correspondiente a la altura media, $t - \Delta t$ y $t + \Delta t$ a los de las otras dos y planteemos el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} a_M &= a_1 + \alpha(t - \Delta t)^2 \\ a_M &= a_2 + \alpha t^2 \\ a_M &= a_3 + \alpha(t + \Delta t)^2 \end{aligned} \right\}$$

Hallando la diferencia entre la tercera y la primera ecuación, tendremos que

$$0 = a_1 - a_3 - 4\alpha t \Delta t$$

de donde

5 Chauvenet, William.- Astrónomo y profesor de Náutica norteamericano, nacido en 1820 y muerto en 1850. Autor de *Treatise on plane spherical Trigonometry* (filadelfia 1850) y *Manual of spherical Astronomy* (Filadelfia 1853).

$$\alpha t = \frac{a_1 - a_3}{4 \Delta t}$$

y elevando al cuadrado y dividiendo por α

$$\alpha t^2 = \frac{[\frac{1}{4}(a_1 - a_3)]^2}{\alpha (\Delta t)^2} \quad (1.245.X)$$

Si ahora hallamos la semi-suma de las mismas ecuaciones, resultará,

$$a_M = \frac{1}{2}(a_1 + a_3) + \alpha [t^2 + (\Delta t)^2]$$

y restándola de la segunda

$$0 = a_2 - \frac{1}{2}(a_1 + a_3) - \alpha (\Delta t)^2$$

de donde

$$\alpha (\Delta t)^2 = a_2 - \frac{1}{2}(a_1 + a_3)$$

y sustituyendo en (1.245.X)

$$\alpha t^2 = \frac{[\frac{1}{4}(a_1 - a_3)]^2}{a_2 - \frac{1}{2}(a_1 + a_3)}$$

luego

$$a_M = a_2 + \frac{[\frac{1}{4}(a_1 - a_3)]^2}{a_2 - \frac{1}{2}(a_1 + a_3)} \quad (2.245.X)$$

ecuación que nos determina el valor de la altura meridiana por medio de unas cuantas operaciones algebraicas, sin necesidad de conocer el tiempo del lugar ni disponer de tablas que faciliten los cálculos.

17. ALTURAS MERIDIANA Y DE CULMINACIÓN.— Los anteriores

procedimientos para el cálculo de la latitud se basan en la hipótesis de que durante el intervalo de observación permanecen constantes latitud y declinación, supuesto que con las actuales velocidades y en observaciones lunares, sobre todo en los instantes en los que la variación en declinación es máxima y de sentido contrario a la variación en latitud, dista mucho de ser cierto pudiéndose cometer errores inaceptables. Del estudio de la variación de la altura en función de la variación del horario por movimiento diurno y movimiento del observador, de la variación en declinación y de la variación en latitud, (2.42.III),

$$da = d\varphi \cdot \cos Z + dd \cdot \cos A - dP \cdot \cos \varphi \cdot \sin Z$$

Al paso por el meridiano,

$$\left. \begin{array}{l} \sin Z = 0 \\ \cos Z = \pm 1 \\ \sin A = 0 \\ \cos A = \mp 1 \end{array} \right\}$$

quedando

$$da = \pm d\varphi \mp dd$$

comprobándose así, que no anulándose da , el astro no culmina en el meridiano, es decir; la altura meridiana es menor que la de culminación. Siendo en el meridiano,

$$z = d - \varphi$$

diferenciando, se obtendrá,

$$dz = dd - d\varphi$$

o sea

$$da = d\varphi - dd$$

De modo que considerando los elementos finitos y llamando $\Delta\varphi - \Delta d$ lo que varía la altura en un minuto de horario, tendremos que en las proximidades del meridiano,

$$\Delta a = t(\Delta\varphi - \Delta d)$$

En función de la altura observada, cuando φ y d son constantes, la altura meridiana vale

$$a_M = a_C + \alpha t^2$$

Cuando se contempla la variación en latitud y declinación la altura a_C habrá recibido el incremento

$$\Delta a_C = t(\Delta\varphi - \Delta d)$$

y valdrá

$$a_M = a_C + \alpha t^2 + t(\Delta\varphi - \Delta d)$$

de donde,

$$a_C = a_M - \alpha t^2 + t(\Delta d - \Delta\varphi) \quad (1.247.X)$$

Sólo resta calcular cual es el valor de t que hace máximo el de a_C para obtener el valor de la altura que, al observar, consideramos cómo meridiana. Para ello,

$$\frac{da_C}{dt} = -2\alpha t + \Delta d - \Delta\varphi$$

Igualando a 0 y despejando

$$t = \frac{(\Delta d - \Delta\varphi)}{2\alpha}$$

que por ser la derivada segunda siempre negativa, corresponde a un máximo de la función altura. Sustituyendo en (1.247.X),

$$a_C = a_M + \frac{(\Delta d - \Delta\varphi)^2}{4\alpha}$$

y, por lo tanto,

$$a_M = a_C - \frac{(\Delta d - \Delta \varphi)^2}{4 \alpha} \quad (1.248.X)$$

La cantidad

$$\frac{(\Delta d - \Delta \varphi)^2}{4 \alpha}$$

se restará siempre a la altura de culminación para obtener la altura meridiana. Su conocimiento es de importancia, porque cuando se observan astros de gran variación en declinación, como la Luna, se navega con alta velocidad y latitud y declinación varían en sentido contrario, se cometen errores que pueden alcanzar valores próximos a los de la siguiente tabla [RIBERA-07]:

Velocidad Nudos	Sol y planetas Latitud, φ		Luna Latitud, φ	
	45°	70°	45°	70°
10	0' 16"	0' 43"	1' 43"	4' 40"
18	0' 47"	2' 09"	2' 50"	7' 36"
26	2' 10"	6' 04"	5' 46"	16' 08"

18. SERIE DE ALTURAS CIRCUNMERIDIANAS.— Al variar muy poco la altura cerca del meridiano, su observación no es muy exacta, por lo que es conveniente siempre tomar una serie de n alturas, con las que se plantearán n ecuaciones análogas a:

$$a_M = a_C + \alpha t^2$$

y considerando que dada la pequeñez del intervalo transcurrido en las observaciones, sean constantes φ y d , y, por lo tanto α , sumándolas nos darán,

$$n \cdot a_M = \Sigma a_C + \Sigma \alpha t^2$$

de donde,

$$a_M = \frac{\sum a_c}{n} + \alpha \frac{\sum t^2}{n} \quad (1.249.X)$$

El problema solo difiere del caso de la circunmeridiana en que son varios los horarios que se precisa obtener. En general, bastará deducir el primero con la hora del primer meridiano y la longitud de estima, y de este los demás, aplicándole los intervalos cronométricos entre cada observación y la primera, pues por su pequeñez pueden considerarse como verdaderos. Tampoco precisa de la corrección de todas las alturas observadas, sino que se hallará el promedio de ellas y se reducirá a verdadera. En lo demás se sigue el mismo procedimiento.

19. LATITUD POR DOS ALTURAS EN EL VERTICAL.— Si por cualquier circunstancia se precisara durante el día una latitud próxima, como acaecería cuando después de varios días de mal tiempo aclarase por la mañana y pudiera ser observado el Sol en las proximidades del vertical primario donde, como sabemos, no resulta exacta la determinación de la latitud y si se supusiera tan errónea la de estima, que esta que vamos a determinar nos resulta útil, se observarán dos alturas cerca del vertical primario anotando las correspondientes horas del cronómetro, y sabiendo que la variación de la altura en función de la variación del horario es, hasta los términos de primer orden:

$$\Delta a = - \Delta hl \cdot \cos \varphi \cdot \text{sen } Z$$

de la que,

$$\cos \varphi = - \frac{\Delta a}{\Delta hl \cdot \text{sen } Z}$$

y llamando l_c al intervalo cronométrico expresado en segundos de tiempo, podremos sustituir Δhl por $15 \cdot l_c$ y será,

$$\cos \varphi = - \frac{\Delta a}{15 \cdot l_c \cdot \text{sen } Z} \quad (2.249.X)$$

fórmula que nos da el valor de la latitud con suficiente aproximación, aunque no se conozca exactamente el valor de Z , ya que el seno varía muy poco en las proximidades de los 90° , obteniéndose el valor de esta coordenada en el momento que es más necesaria. El cálculo es muy sencillo y el azimut se obtiene con facilidad marcando el

Sol. Si la latitud es muy baja, la fórmula deducida no es muy buena al resultar el ángulo dado por su coseno; es conveniente, pues, transformarla sustituyendo,

$$\cos \varphi = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2}$$

y así tendremos,

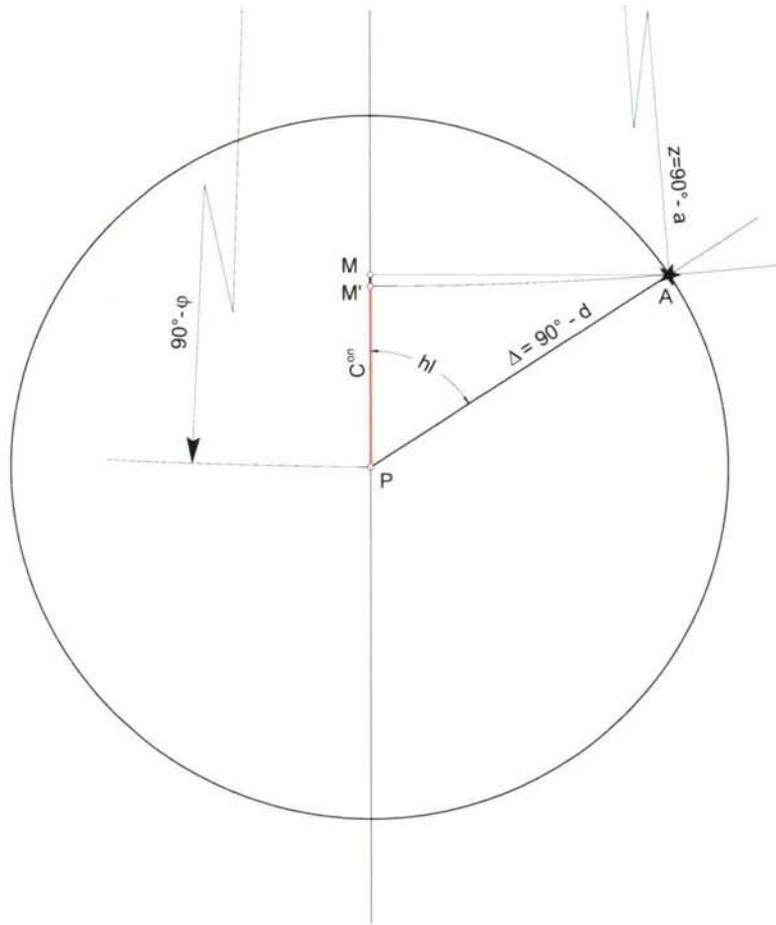


Figura - 1.250.X - Latitud observada por altura de la Polar -A-

$$2 \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2} = 1 + \frac{\Delta a}{15 \cdot l_C \cdot \operatorname{sen} Z}$$

o sea,

$$\operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{15 \cdot I_c \cdot \operatorname{sen} Z + \Delta a}{30 \cdot I_c \cdot \operatorname{sen} Z}} \quad (1.251.X)$$

20. LATITUD POR ALTURA DE LA POLAR.— Vimos en la página 230 que la altura del polo era la latitud del observador; bastaría, pues, si la estrella Polar estuviera en el polo, el tomar su altura para que una vez corregida, dispusiera el navegante de la latitud observada. Al no estar exactamente en el polo, la Polar describe durante su movimiento diurno un paralelo de declinación de radio esférico pequeño, unos 43.5' para junio de 2003, y su altura no da directamente la latitud. La moderna disposición de calculadoras de bolsillo facilita el cálculo empleando las fórmulas generales para el cálculo de la latitud a partir de la observación de cualquier astro, por altura fuera del meridiano⁶

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos P}{\operatorname{tg} d} \quad ,, \quad \operatorname{sen} (\varphi + \alpha) = \operatorname{sen} a \operatorname{cosec} d \cos \alpha$$

no obstante, el proceso de cálculo puede simplificarse sensiblemente facilitando el tabulado de variables auxiliares, lo que redunda en una más rápida y segura solución del problema. En la figura 1.250.X, A es la estrella polar, describiendo su paralelo de declinación de radio Δ , siendo el horario en ese instante h ; trazado el almicerantarat, corta al meridiano en el punto M' , el círculo máximo que pasa por el astro y es perpendicular al meridiano corta a este en el punto M ; se tendrá, así, que

$$90^\circ - \varphi = 90^\circ - a + MP - MM'$$

es decir,

$$\varphi = a - MP + MM'$$

Despreciando el sumando MM' , dada su efectiva pequeñez, tendríamos como primera aproximación para el valor de la corrección que sumada a la altura de la Polar nos daría la latitud observada,

⁶ La expresión "fuera del meridiano" indica alturas que corresponden a horarios límite mas allá de las circunmeridianas y extrameridianas, que, extractamente, también son alturas fuera del meridiano y pudieran recibir idéntico tratamiento de cálculo.

$$\varphi = a - MP$$

y en el triángulo esférico AMP,

$$MP = \Delta \cdot \cos h l$$

por lo cual

$$\varphi = a - \Delta \cdot \cos h l$$

Si en la fórmula de la altura

$$\text{sen } a = \text{sen } \varphi \text{ sen } d + \cos \varphi \cos d \cos h l$$

sustituimos a por $\varphi - C^{on}$, siendo C^{on} la corrección buscada,

$$\text{sen}(\varphi - C^{on}) = \text{sen } \varphi \cos \Delta + \cos \varphi \text{sen } \Delta \cos h l$$

desarrollando el seno de la suma,

$$\text{sen } \varphi \cos C^{on} - \cos \varphi \text{sen } C^{on} = \text{sen } \varphi \cos \Delta + \cos \varphi \text{sen } \Delta \cos h l$$

y poniendo en vez de los cosenos de C^{on} y Δ sus equivalentes,

$$\text{sen } \varphi \left(1 - 2 \text{sen}^2 \frac{C^{on}}{2} \right) - \cos \varphi \text{sen } C^{on} = \text{sen } \varphi \left(1 - 2 \text{sen}^2 \frac{\Delta}{2} \right) + \cos \varphi \text{sen } \Delta \cos h l$$

Efectuando los productos indicados y simplificando, llegamos a,

$$- 2 \text{sen } \varphi \text{sen}^2 \frac{C^{on}}{2} - \cos \varphi \text{sen } C^{on} = 2 \text{sen } \varphi \text{sen}^2 \frac{\Delta}{2} + \cos \varphi \text{sen } \Delta \cos h l$$

y despejando $\text{sen } C^{on}$

$$\operatorname{sen} C^{\text{on}} = 2 \operatorname{tg} \varphi \operatorname{sen}^2 \frac{\Delta}{2} - \operatorname{sen} \Delta \operatorname{cosh} l - 2 \operatorname{tg} \varphi \operatorname{sen}^2 \frac{C^{\text{on}}}{2}$$

ordenando adecuadamente,

$$\operatorname{sen} C^{\text{on}} = - \operatorname{sen} \Delta \operatorname{cosh} l - 2 \operatorname{tg} \varphi \left(\operatorname{sen}^2 \frac{C^{\text{on}}}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\Delta}{2} \right)$$

Puesto que C^{on} y Δ son ángulos muy pequeños, podemos sustituir sus senos por los arcos en minutos multiplicados por el seno de un minuto,

$$C^{\text{on}}/\operatorname{sen} 1' = - \Delta' \operatorname{sen} 1' \operatorname{cosh} l - 2 \operatorname{tg} \varphi \left(\frac{C^{\text{on}/2}}{4} - \frac{\Delta'^2}{4} \right) \operatorname{sen}^2 1'$$

expresión que una vez simplificada nos dará

$$C^{\text{on}}/ = - \Delta' \operatorname{cosh} l - \operatorname{tg} \varphi \left(\frac{C^{\text{on}/2}}{2} - \frac{\Delta'^2}{2} \right) \operatorname{sen} 1'$$

y asumida como primera aproximación de la corrección $\Delta \cdot \operatorname{cosh} l$ se llega a,

$$C^{\text{on}}/ = - \Delta' \operatorname{cosh} l - \operatorname{tg} \varphi \left(\frac{\Delta'^2 \cos^2 h l}{2} - \frac{\Delta'^2}{2} \right) \operatorname{sen} 1'$$

en la que operando tal como se indica

$$C^{\text{on}}/ = - \Delta' \operatorname{cosh} l - \operatorname{tg} \varphi \frac{\Delta'^2}{2} (\cos^2 h l - 1) \operatorname{sen} 1'$$

llegamos finalmente a

$$C^{\text{on}}/ = - \Delta' \operatorname{cosh} l + \operatorname{tg} \varphi \frac{\Delta'^2}{2} \operatorname{sen}^2 h l \operatorname{sen} 1'$$

Dado que la latitud φ es desconocida pero de valor muy próximo al de la altura podremos sin error sensible sustituir esta por aquella, por lo que

$$C^{on'} = -\Delta' \cdot \cos h l + \frac{\Delta'^2}{2} \cdot \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{sen}^2 h l \cdot \operatorname{sen} 1' \quad (1.254.X)$$

que es la expresión de la corrección buscada; de aquí:

$$\varphi_0 = a - \Delta' \cdot \cos h l + \frac{\Delta'^2}{2} \cdot \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{sen}^2 h l \cdot \operatorname{sen} 1' \quad (2.254.X)$$

fórmula que permite el cálculo planteado. En el precedente desarrollo se han obviado los términos superiores a la segunda potencia, lo que no constituye óbice alguno en lo referente a su contrastada eficacia. Como en el campo de la docencia universitaria debe optarse siempre por enfoques lo más generales posibles, la siguiente vía de razonamiento nos conduce a una expresión de resultados más rigurosos.

Para una más clara interpretación de los razonamientos que siguen, representemos el triángulo de posición en proyección gnomónica horizontal con plano de proyección tangente a la esfera celeste en el zenit del observador, figura 1.255.X, y tracemos desde el astro el círculo máximo perpendicular al meridiano, al que corta en el punto B, y el almicantrat del astro que lo corta en el punto S; para la colatitud se tiene,

$$(90^\circ - \varphi) = z + x - y$$

y en el triángulo PBA,

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \Delta \cdot \cos h l$$

y siendo x y Δ cantidades pequeñas, podemos desarrollar en serie sus tangentes despreciando los términos superiores a los de tercer orden y será

$$x + \frac{x^3}{3} = \left(\Delta + \frac{\Delta^3}{3} \right) \cos h l$$

y pasando $\frac{x^3}{3}$ al segundo miembro y sustituyendo su valor aproximado $\Delta \cos h l$,
 tendremos que

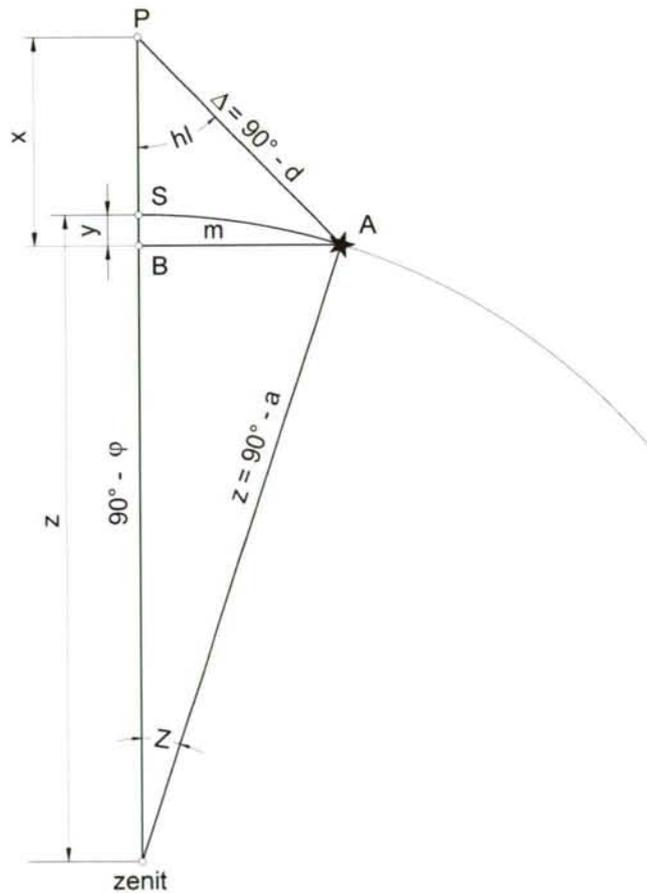


Figura - 1.255.X - Latitud por altura de la Polar -B-

$$x = \Delta \cos h l + \frac{\Delta^3}{3} (\cos h l - \cos^3 h l)$$

en la que desarrollando el paréntesis,

$$x = \Delta \cos h l + \frac{\Delta^3}{3} \cos h l \operatorname{sen}^2 h l$$

En el triángulo rectángulo BAz, (*zenit*), se verifica que

$$\cos Bz = \frac{\cos Z}{\cos AB}$$

pero $Bz = z - y$, y llamando m al cateto AB,

$$\frac{\cos Z}{\cos m} = \cos (z - y)$$

desarrollando el coseno de la diferencia indicada

$$\cos (z - y) = \cos z \cos y + \operatorname{sen} z \operatorname{sen} y$$

y como y es pequeño, podemos sustituir su coseno por la unidad y su seno por el arco, y tendremos,

$$\frac{\cos Z}{\cos m} = \cos z + y \operatorname{sen} z$$

desarrollando $\frac{1}{\cos m}$ hasta los términos de segundo orden, será

$$\frac{1}{\cos m} = \frac{1}{1 - \frac{m^2}{2}}$$

que podremos escribir

$$\frac{1}{\cos m} = 1 + \frac{m^2}{2}$$

y, por lo tanto,

$$y = \frac{m^2}{2} \cotg z$$

Pero en el triángulo BAP

$$\text{sen } m = \text{sen } \Delta \text{ sen } h l$$

y como m y Δ son pequeños sustituimos los senos por los arcos, y resultará

$$m = \Delta \text{ sen } h l$$

llevando este valor al de y

$$y = \frac{\Delta^2 \text{sen}^2 h l \cotg z}{2}$$

Con los valores hallados para x e y , la colatitud será,

$$90^\circ - \varphi = 90^\circ - a + \Delta \cos h l + \frac{\Delta^2}{3} \cos h l \text{sen}^2 h - \frac{\Delta^2 \text{sen}^2 h l \cotg z}{2}$$

y, por lo tanto,

$$\varphi = a - \Delta \cos h l + \frac{\Delta^2}{2} \operatorname{sen}^2 h l \operatorname{tg} a - \frac{\Delta^3}{3} \operatorname{sen}^2 h l \cos h l \quad (1.257.X)$$

que es la fórmula que da con suficiente exactitud la latitud observada.

El máximo valor del término en Δ^3 es 0,65", cantidad despreciable en navegación; en cambio, el término en Δ^2 puede llegar a valer cerca de 2' cuando se navega en altas latitudes, y, por lo tanto, se tendrá en cuenta o no, según las circunstancias. En general, en la mar, donde la observación de la altura no puede efectuarse con gran precisión, bastará con usar la fórmula aproximada

$$\varphi = a - \Delta \cos h l$$

y solamente en trabajos de precisión, observando en tierra sobre horizonte artificial, emplearemos la fórmula más exacta

$$\varphi = a - \Delta \cos h l + \frac{\Delta^2}{2} \operatorname{sen}^2 h l \operatorname{tg} a$$

El Almanaque Náutico tabula los valores de ésta fórmula simplificando los cálculos.

Los procedimientos estudiados determinan la latitud del observador, no su situación, y dependiendo el cálculo de esta variable del conocimiento de la longitud, es claro que la latitud así obtenida corresponde a la del punto de corte de la circunferencia de alturas iguales con el meridiano dado; si esta longitud es exacta, la precisión de la latitud calculada dependerá únicamente de la precisión en la altura y en la hora. Esta exposición teórica, hoy en día, tiene su ámbito de aplicación casi exclusivamente en la docencia, pues no nos cansaremos de insistir en la necesidad de una sólida formación de nuestros licenciados, que, de otra manera, poseerían, cuales simples especialistas, una formación ciertamente útil en el campo de la práctica profesional, para lo cual, y como por lo demás sucede en muchas otras titulaciones técnicas, no sería preciso recurrir a una formación universitaria. La enseñanza de los estrictamente útil conduce a una suerte de nuevos analfabetos, de individuos adocenados, en los que difícilmente se despertará la necesaria inquietud intelectual; la fundamental misión de la Universidad es la explicación del por qué de las cosas. Todos los métodos estudiados son de gran belleza y su práctica es un merecido homenaje a sus autores; nos atrevemos a decir que, dentro de la matemática aplicada, son auténticas obras de arte.

ERRATAS DETECTADAS

Página	Donde dice:	Debiera decir:	Observaciones
229	en redianes	en radianes	Andoyer-Lambert
261	nacido en Kasan en 1881	nacido en Kasan en 1811	Carlos Luis Littrow
409	Si embargo	Sin embargo	

CAPÍTULO XI

EL CÁLCULO DE LA LONGITUD

1. LA LONGITUD. — Se define como plano meridiano Λ de un lugar L al que conteniendo a la vertical astronómica del lugar, es paralelo al eje de rotación de la

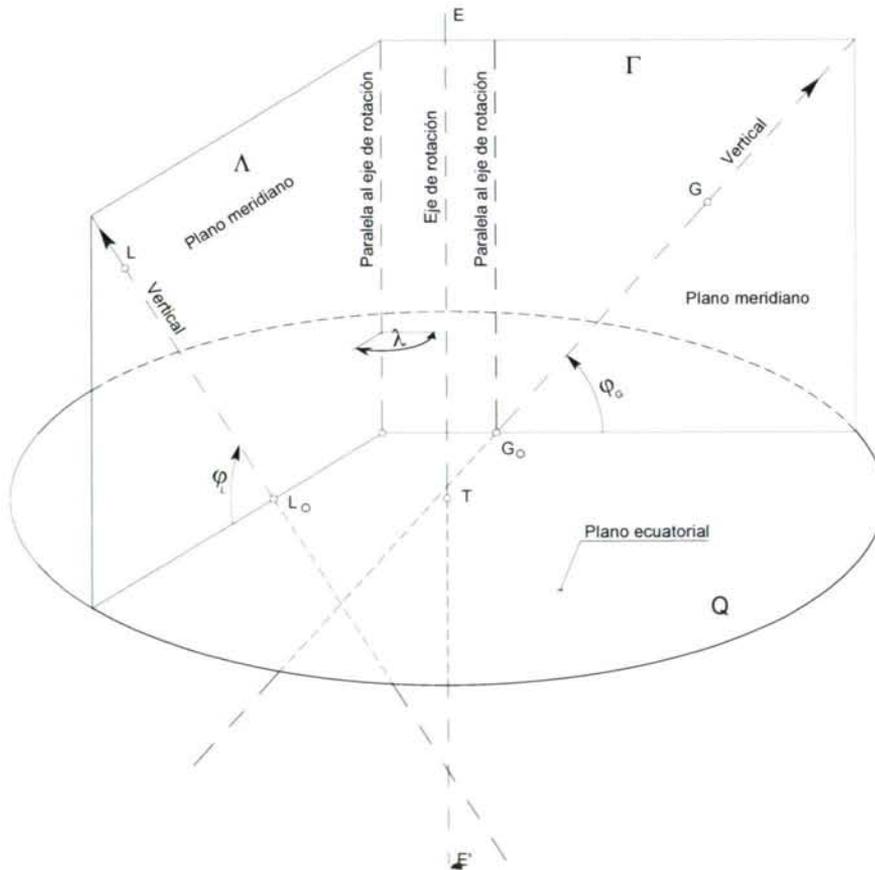


Figura - 1.259.XI - La longitud λ , definición

Tierra, figura 1.259.XI. Así, el plano meridiano origen, o simplemente meridiano origen, es aquel que contiene a la vertical del Observatorio Astronómico de Greenwich y es paralelo al citado eje de rotación. Longitud λ de un lugar L es, entonces, el ángulo diedro formado por el meridiano del lugar con el meridiano origen; se cuenta de 000°

a 180°, este (E), u oeste (W), aunque para ámbitos de aplicación distintos del náutico, a veces se cuenta de 000° a 360° siempre occidental. En el capítulo VIII del presente trabajo, "LA MEDIDA DEL TIEMPO", ya se hizo mención sobre una de las más apasionantes aventuras del espíritu humano cual fue la conquista de esta coordenada; en el capítulo presente únicamente se expondrán los procedimientos que con más éxito se emplearon en su cálculo.

2. LONGITUD POR LA OBSERVACIÓN DE LA ALTURA DE UN ASTRO. — Se observarán varias alturas del astro y la longitud se determinará como promedio de las calculadas a partir de cada una de ellas. Los datos de partida serán: latitud, hora del cronómetro de la que se obtendrá la correspondiente del primer meridiano y altura del astro observado (generalmente el Sol, ☉, cerca del vertical primario). Si en la fórmula de la altura,

$$\text{sen } a = \text{sen } \varphi \text{ sen } d + \cos \varphi \cos d \cos h l$$

despejamos $\cos h l$,

$$\cos h l = \text{sen } a \sec \varphi \sec d - \text{tg } \varphi \text{ tg } d \quad (1.260.XI)$$

y, como

$$h l_{\star} = h G_{\star} - \lambda$$

se tiene que,

$$\lambda = h G_{\star} - h l_{\star} \quad (2.260.XI)$$

Como sabemos, el $h G_{\star}$ lo facilita el Almanaque Náutico para la hora de la observación y, por lo tanto, todo error en la hora va íntegro a la longitud calculada, por ello y según posteriormente se verá en el capítulo dedicado a este particular, deberá minimizarse todo error observando en circunstancias favorables. El cálculo del horario por medio de la (1.260.XI) no presenta dificultad alguna con las modernas calculadoras, no obstante, no es apta para el cálculo logarítmico por lo que deberá recurrirse a las relaciones de Borda (2.21.II):

$$\operatorname{tg} \frac{P}{2} = \sqrt{\frac{\cos S \cdot \operatorname{sen}(S - a)}{\operatorname{sen}(S - \varphi) \cdot \cos(S - \Delta)}}$$

en la que,

$$S = \frac{\varphi + a + \Delta}{2}$$

3. MÉTODO DE LITTROW. — El presente método tiene su fundamento en la conveniencia de disponer de las dos coordenadas del buque en las proximidades del mediodía y fue desarrollado por Littrow¹, obteniéndose la longitud por la observación de dos alturas circunmeridianas. De las ecuaciones

$$\operatorname{sen} a_1 = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} d + \cos \varphi \cos d \cos h l_1$$

$$\operatorname{sen} a_2 = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} d + \cos \varphi \cos d \cos h l_2$$

y convencionalmente asumido que durante el corto periodo de observación permanecen constantes latitud del observador y declinación del astro, restándolas

$$\operatorname{sen} a_1 - \operatorname{sen} a_2 = \cos \varphi \cos d (\cos h l_1 - \cos h l_2)$$

o sea,

$$\operatorname{sen} \left(\frac{a_1 - a_2}{2} \right) \cos \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right) = \cos \varphi \cos d \operatorname{sen} \left(\frac{h l_1 + h l_2}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{h l_2 - h l_1}{2} \right)$$

pero,

$$\frac{h l_1 + h l_2}{2} = h l_m \quad \text{y} \quad \frac{h l_2 - h l_1}{2} \approx l_c$$

en las que $h l_m$ es el horario local medio e l_c es, aproximadamente, la mitad del intervalo

1 Carlos Luís Littrow.- Astrónomo austriaco nacido en Kasan en 1881 y muerto en Venecia en 1877 siendo director del Observatorio de dicha ciudad. Entre sus numerosas obras destaca la que en el año 1863 apareció en Viena, titulada "Sobre el método de la determinación de la longitud por diferencia de alturas circunmeridianas y su aplicación durante el viaje alrededor del mundo de la fragata Novara". Aunque este método no era totalmente original, pues ya fue tratado por el coronel Von Tempelhof y por su padre J.J. Littrow, a él le corresponde la originalidad de haberlo perfeccionado y simplificado hasta el punto de hacerlo aplicable.

cronométrico, entonces,

$$\text{sen } hI_m = \text{sen} \left(\frac{a_1 - a_2}{2} \right) \cos \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right) \sec \varphi \sec d \text{ cosec } \frac{I_C}{2} \quad (1.262.XI)$$

fórmula con la que puede obtenerse el horario local medio h_m del astro entre las dos observaciones, que será oriental si la segunda altura es mayor que la primera y occidental en caso contrario, y, por lo tanto la longitud λ . El inconveniente del procedimiento radica en la exigencia de gran exactitud para los términos que entran en el segundo miembro; en efecto, poniendo Δa en vez de la diferencia de las alturas, a_m para su promedio, I_C por el semi-intervalo cronométrico, y tomando logaritmos

$$\log \text{sen } hI_m = \log \text{sen } \Delta a + \log \cos a_m + \log \sec \varphi + \log \sec d + \log \text{cosec } I_C$$

y diferenciando esta expresión se tiene

$$\text{cotg } hI_m \delta hI_m = \text{cotg } \Delta a \delta \Delta a - \text{tg } a_m \delta a_m + \text{tg } \varphi \delta \varphi + \text{tg } d \delta d - \text{cotg } I_C \delta I_C$$

despejando $\text{cotg } hI$,

$$\delta hI_m = \text{tg } hI_m (\text{cotg } \Delta a \delta \Delta a - \text{tg } a_m \delta a_m + \text{tg } \varphi \delta \varphi + \text{tg } d \delta d - \text{cotg } I_C \delta I_C)$$

Fórmula que nos indica que el horario local medio debe ser lo menor posible, las alturas, que han de ser casi correspondientes ($\Delta a \rightarrow 0$), deben observarse escrupulosamente, puesto que cerca del meridiano son alturas próximas a la culminación y cualquier error en ellas se acrecienta al multiplicarse $\text{cotg } \Delta a$ y $\text{tg } a_m$, cantidades considerables; que el método debe utilizarse en latitudes bajas, con astros de poca declinación, y, por último, que debiendo ser grande el intervalo entre observaciones, no ha de serlo tanto de no poder considerar constantes φ y d . La mejor manera de armonizar condiciones tan opuestas consiste en observar correspondientes cerca del meridiano para que h_m sea pequeño, y, no obstante, el intervalo sea grande. Si el buque ha navegado mucho en el intervalo, se reducirá la primera altura al horizonte de la segunda, y se empleará en el cálculo la latitud de este lugar. Pero, generalmente, la que se usa es la latitud deducida de la meridiana, muy próxima a la

media que debiera emplearse.

Cuando se quiera tener en cuenta el error que produce en las alturas la variación de la declinación, que suele ser considerable, se calculará por la fórmula

$$\Delta a = - \Delta d \cos A$$

pero cerca del meridiano el ángulo de posición A estará próximo a 0° o 180° y podrá considerarse que el error en declinación recae íntegro en la altura, de modo que para tenerlo en cuenta bastará aplicar la corrección $-\Delta d$, variación de la declinación en el intervalo entre observaciones, a la segunda altura, empleando en el cálculo la declinación correspondiente a la primera; o, lo que es más general, emplear la declinación del instante medio y sumar $\frac{1}{2}\Delta d$ a la primera altura y restárselo a la segunda.

Al suponer constante la declinación en el transcurso de las observaciones, se origina un error en el horario, que tiene por valor

$$\frac{\delta h}{\delta d} = - \frac{\cos A}{\cos d \sin A}$$

y,

$$\frac{\delta h}{\delta d} = - \frac{\cos A}{\cos \varphi \sin Z}$$

y que serían mínimos en las proximidades del ángulo de posición recto o al corte con el vertical primario; pero en las proximidades del meridiano los senos de A y Z tienden a 0° el error puede alcanzar valores muy considerables, por lo que debieran observarse astros que culminen cerca del zenit, con pequeña declinación y en latitudes bajas.

4. MÉTODO DE MAGNAC. — En las cercanías del meridiano puede también hallarse la longitud por el método de Magnac², más rápido que el anterior y fundado como él en la pequeñez del horario. La observación de dos alturas circunmeridianas permite plantear las dos ecuaciones siguientes,

² Magnac. -Marino francés nacido en 1836. Autor con Villarceau de la "Nouvelle Navigation Astronomique" y "Diversos instrumentos para la navegación"

$$a_M = a_1 + \alpha t_1^2 \quad \text{y} \quad a_M = a_2 + \alpha t_2^2$$

de las que, restándolas, se deduce

$$0 = a_2 - a_1 + \alpha (t_2^2 - t_1^2)$$

o, lo que es lo mismo,

$$0 = a_2 - a_1 + \alpha (t_2 + t_1)(t_2 - t_1)$$

de donde

$$\frac{t_2 + t_1}{2} = \frac{a_1 - a_2}{2\alpha (t_2 - t_1)}$$

y puesto que el primer miembro de esta igualdad es el horario medio, y $t_2 - t_1$ es el intervalo verdadero transcurrido que podremos considerar igual al cronométrico l_c , tendremos, por último,

$$hl_m = \frac{\Delta a}{2\alpha l_c} \tag{1.264.XI}$$

fórmula que nos dará el valor del horario medio en minutos de tiempo, si expresamos l_c en la misma unidad y Δa en segundos de arco.

Al variar las alturas lentamente cerca del meridiano las horas del cronómetro no pueden ser debidamente precisadas, y, por lo tanto, la del primer meridiano; los errores en las alturas quedan poco atenuados a causa de la poca entidad del divisor y puede asegurarse que recaerá en el horario la mitad del error en las alturas, por todo ello no puede ser muy exacto este sencillo procedimiento.

5. MÉTODO DE CARDONA³. — Observándose una altura circunmeridiana y la meridiana, puede hallarse la longitud por medio de la fórmula

³ Pedro María Cardona y Prieto. - Capitán de Navío español nacido en Mahón en 1872 y muerto en Madrid en 1936.

$$a_M = a_C + \alpha t^2$$

de la que se deduce

$$t = \sqrt{\frac{\Delta a}{\alpha}} \tag{1.265.XI}$$

que nos da el horario en minutos en el momento de observar la circunmeridiana, poniendo Δa en segundos de arco y α calculada según se explicó en el apartado dedicado al estudio de la circunmeridiana. Conocido el horario y la hora del cronómetro de la que se deduce la del primer meridiano, queda determinada la longitud. Es un procedimiento que solo facilita una longitud poco exacta y que únicamente, y a falta de otra mejor, serviría de referencia.

6. LONGITUD POR EL ORTO U OCASO DEL SOL. — Varios son los procedimientos empleados para el cálculo de la longitud en esos instantes, todos ellos son de carácter aproximado. El primero de ellos consiste en tomar la hora del cronómetro correspondiente al momento en el que el centro del Sol corta el horizonte visible o de la mar, observando dicho acaecimiento con unos prismáticos, y calculando el horario local correspondiente a la altura del astro por el método general. En el segundo, algo más preciso, se anotarán las horas del cronómetro correspondientes a los instantes de contacto de ambos limbos con el horizonte marino, procediendo por vía similar al método de Littrow; la altura del sol en los instantes citados será, para el limbo inferior,

$$\begin{aligned} a_{\odot} &= 00^{\circ} 00,0' \\ D_a &= \quad ??,? - \\ r_m^h &= \quad 34,0' - \\ \sigma_{\odot} &= \quad ??,? + \\ av_{\odot} &= 00^{\circ} \text{ m,d}' - \end{aligned}$$

y para el limbo superior,

$$\begin{aligned} a_{\odot} &= 00^{\circ} 00,0' \\ D_a &= \quad ??,? \text{ -} \\ r_m^h &= \quad 34,0' \text{ -} \\ \sigma_{\odot} &= \quad ??,? \text{ -} \\ av_{\odot} &= 00^{\circ} \text{ n,s}' \text{ -} \end{aligned}$$

y restando ambas alturas tendremos,

$$\Delta a_{\odot} = 2 \cdot \sigma_{\odot}$$

es decir, el doble del semidiámetro solar para la fecha de la observación. La semisuma de las alturas será,

$$- \left(D_a + r_m^h \right)$$

siendo el valor de la refracción horizontal media, como quedó indicado, $-34'$; el valor de la depresión aparente D_a será función de la elevación del observador, E_{\odot} , y, estando esta última en metros,

$$D_a = 1,773 \cdot \sqrt{E_{\odot}}$$

por lo que, en la fórmula

$$\operatorname{sen} h |_{m} = \operatorname{sen} \left(\frac{a_1 - a_2}{2} \right) \cos \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right) \sec \varphi \sec d \operatorname{cosec} \frac{l_c}{2}$$

haciendo las correspondientes sustituciones,

$$\text{sen } h l_m = \text{sen } \sigma_{\odot} \cos \left[- \left(D_a + r_m^h \right) \right] \sec \varphi \sec d \text{ cosec } \frac{l_c}{2}$$

y asumiendo que $\text{sen } \sigma_{\odot} \approx \sigma_{\odot} \cdot \text{sen } 1'$ y $\cos \left[- \left(D_a + r_m^h \right) \right] \approx 1$, nos quedará,

$$\text{sen } h l_m = \frac{\sigma_{\odot} \cdot \text{sen } 1'}{\cos \varphi \cos d \text{ sen } \frac{l_c}{2}}$$

Poniendo el intervalo cronométrico en minutos de tiempo,

$$\text{sen } h l_m = \frac{\sigma_{\odot} \cdot \text{sen } 1'}{\cos \varphi \cos d \text{ sen } \frac{l_c}{8}} \tag{1.267.XI}$$

expresión que nos proporciona el horario local correspondiente al instante del corte del centro del disco solar con el horizonte visible, deduciéndose, así, la longitud del observador. Este procedimiento da buenos resultados y en él, como en los otros, consideramos constantes la declinación y la latitud que son, junto con las fluctuaciones de la refracción horizontal respecto de la media y de la indeterminación de los instantes del contacto de ambos limbos con el horizonte, las principales causas de error, error que recaerá en la longitud calculada.

7. LONGITUD POR ALTURAS CORRESPONDIENTES. — Las alturas correspondientes que tan buenos resultados proporcionaban en los cálculos del estado del cronómetro al paso del astro por el meridiano, se aplicó también en la mar para deducir la hora del primer meridiano del momento del paso por el lugar, método que tuvo muy acertada aplicación en las navegaciones tropicales, donde con frecuencia pueden ser observados astros que culminen cerca del zenit, y cuyas correspondientes,

observadas en circunstancias favorables, se toman pocos minutos antes o después de la meridiana, pudiéndose así hallar las dos coordenadas del buque independientes de la estima y con fácil cálculo.

La fórmula de Perrin⁴ resuelve el problema de las correspondientes en general, es decir, cuando el astro tiene movimiento en declinación (ecuación de alturas) y el observador se mueve durante el intervalo: Para ello, diferenciando respecto de d en la ecuación general

$$\text{sen } a = \text{sen } \varphi \text{ sen } d + \text{cos } \varphi \text{ cos } d \text{ cos } h l$$

obtendremos,

$$\delta h l = \delta d \left(\frac{\text{tg } \varphi}{\text{sen } h l} - \frac{\text{tg } d}{\text{tg } h l} \right)$$

y haciendo lo mismo respecto φ

$$\delta h l = \delta \varphi \left(\frac{\text{tg } d}{\text{sen } h l} - \frac{\text{tg } \varphi}{\text{tg } h l} \right)$$

y suponiendo finitos los elementos diferenciales y despreciando los términos de segundo orden dada su efectiva pequeñez, puede considerarse que el incremento total del horario como consecuencia del que experimentan latitud y declinación durante la mitad del intervalo transcurrido entre las dos observaciones, tiene por valor

$$\Delta h l = \Delta d \left(\frac{\text{tg } \varphi}{\text{sen } h l} - \frac{\text{tg } d}{\text{tg } h l} \right) + \Delta \varphi \left(\frac{\text{tg } d}{\text{sen } h l} - \frac{\text{tg } \varphi}{\text{tg } h l} \right)$$

siendo d y φ la declinación y latitud que corresponde a ese instante medio y Δd y $\Delta \varphi$ las semi variaciones de esos elementos entre las dos alturas. Pero como el incremento del

⁴ Eduardo Juan Perrin.- Marino de guerra francés, Capitán de Navío, nacido en Lyon en 1857. Fue premio de la Academia de las Ciencias en 1899 por el conjunto de sus trabajos entre los que destacan: "Annales du Bureau des Longitudes" y "Nouvelles tables destinées à abréger les calculs nautiques".

horario cuando sea occidental ha de restarse al mediodía sin corregir y sumarse cuando sea oriental, considerando que sin error sensible sea $\Delta h/l$ igual al intervalo cronométrico transcurrido mientras el astro contrae ese horario $\Delta h/l$, llamándole ΔM será

$$\Delta M = \Delta d \left(-\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{sen} h/l} + \frac{\operatorname{tg} d}{\operatorname{tg} h/l} \right) + \Delta \varphi \left(-\frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{sen} h/l} + \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} h/l} \right)$$

Sea l el semi-intervalo entre las dos observaciones y v_d y v_φ las variaciones horarias de la declinación del astro y latitud del observador; tendremos que

$$\Delta d = l v_d \quad \text{y} \quad \Delta \varphi = l v_\varphi$$

y sin error sensible $h = l$; luego

$$\Delta M = v_d \left(-\frac{l}{\operatorname{sen} l} \operatorname{tg} \varphi + \frac{l}{\operatorname{tg} l} \operatorname{tg} d \right) + v_\varphi \left(-\frac{l}{\operatorname{sen} l} \operatorname{tg} d + \frac{l}{\operatorname{tg} l} \operatorname{tg} \varphi \right) \quad (1.269.XI)$$

Ahora bien; según el autor ha demostrado [Revue Maritime], es suficientemente exacto considerar que

$$\frac{l}{\operatorname{sen} l} = 1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \frac{l}{2} \quad \text{y} \quad \frac{l}{\operatorname{tg} l} = 1 - \frac{2}{3} \operatorname{tg}^2 \frac{l}{2}$$

valores que substituidos en la ecuación (1.269.XI), nos darán

$$\Delta M = (v_\varphi - v_d) \operatorname{tg} \varphi - (v_\varphi - v_d) \operatorname{tg} d - \frac{2}{3} l \operatorname{tg} \frac{l}{2} \left[\left(v_\varphi + \frac{v_d}{2} \right) \operatorname{tg} \varphi + \left(\frac{v_\varphi}{2} + v_d \right) \operatorname{tg} d \right]$$

que es la expresión definitiva de la corrección que se debe aplicar al promedio de las horas del cronómetro, para obtener la hora del cronómetro en el momento del paso por el meridiano del observador en el instante medio de las dos observaciones; es decir

$$H_C = \frac{H'_C + H''_C}{2} + (v_\varphi - v_d) \operatorname{tg} \varphi - (v_\varphi - v_d) \operatorname{tg} d - \frac{2}{3} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \left[\left(v_\varphi + \frac{v_d}{2} \right) \operatorname{tg} \varphi + \left(\frac{v_\varphi}{2} + v_d \right) \operatorname{tg} d \right]$$

y si para abreviar se hace

$$\left. \begin{aligned} V_\varphi &= (v_\varphi - v_d) \operatorname{tg} \varphi \\ V_d &= (v_\varphi - v_d) \operatorname{tg} d \\ V'_\varphi &= \left(v_\varphi + \frac{v_d}{2} \right) \operatorname{tg} \varphi \\ V'_d &= \left(\frac{v_\varphi}{2} + v_d \right) \operatorname{tg} d \end{aligned} \right\}$$

la fórmula final será

$$H_C = \frac{H'_C + H''_C}{2} + V_\varphi - V_d - \frac{2}{3} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (V'_\varphi + V'_d)$$

y si se pone

$$(X) = V_\varphi - V_d \quad \text{e} \quad (Y) = \frac{2}{3} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (V'_\varphi + V'_d)$$

nos quedará

$$H_C = \frac{H'_C + H''_C}{2} + (X) - (Y)$$

expresión completamente general, dando a las cantidades que en ella entran los signos + o -, según sean boreales o australes. El factor

$$\frac{2}{3} \operatorname{tg} \frac{1}{2}$$

es siempre positivo.

Hallada esta hora del cronómetro se calculaba la del primer meridiano correspondiente, y con esta la sidérea que es en él cuando el astro pasa por el del lugar, y como la hora de este paso era la ascensión recta del astro, la diferencia de

ambas nos daba la longitud. Perrin calcula una tabla que da los valores de una expresión de la forma $a = b \operatorname{tg} \alpha$, con la cual se hallan fácilmente las cantidades V_φ , V_d ,

V'_φ y V'_d , y otra de la forma $y = \frac{2}{3} l \operatorname{tg} \frac{1}{2} l p$, para el cálculo de (Y), que permitieron

resolver el problema con gran sencillez. En ellas l está expresado en horas, φ y d en minutos de arco y ΔM en segundos de tiempo.

La diferencia en longitud contraída durante el intervalo influye en la corrección, excepto en el caso que sea igual a ambos lados del meridiano. El autor obtiene su valor

que resulta igual a $\frac{V_\lambda}{900}$ multiplicada por toda la corrección anterior; de modo que la

fórmula definitiva resulta ser,

$$H_c = \frac{H'_c + H''_c}{2} + (X) - (Y) + \frac{V_\lambda}{900} [(X) + (Y)] \quad (1.271.XI)$$

siendo V_λ la variación horaria de la diferencia en longitud contraída. Este término venía dado en una tablilla, entrando con V_λ en millas.

Cuando el astro observado era la Luna, era necesario tener en cuenta que las correspondientes se observaban con distinto limbo, y entonces se necesitaba agregar otra corrección que tenía por valor

$$\sigma_c \cdot \frac{\delta h l}{\delta a} = \frac{\sigma_c}{15} \cdot \frac{\cos a}{\cos \varphi \cdot \cos d \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{2} l}$$

siendo σ el semidiámetro lunar en altura e l el intervalo transcurrido.

Cuando se observaban varias alturas consecutivas, se podía deducir por medio de ellas el coeficiente $\frac{\delta h l}{\delta a}$ hallando lo que varía la hora por la misma variación de altura,

antes y después del paso, y tomando el promedio. La corrección es positiva en observaciones del limbo superior a levante y limbo inferior a poniente, es negativa en caso contrario.

El procedimiento que someramente se ha explicado, resultaba de gran sencillez y utilidad tan pronto se adquiría un poco de práctica en el manejo de signos y de las variaciones horarias en latitud, longitud y declinación, sobre todo en latitudes bajas donde resultaba de mayor aplicación, puesto que en esas latitudes pueden observarse las correspondientes de Sol cerca del meridiano, y se obtenían las dos coordenadas del punto al mediodía.

Las tablillas precisas para la resolución del problema ocupaban tan solo dos caras en la revista donde Mr. Perrin publicó su método.

8. MÉTODO GOODWIN. — Este procedimiento permite obtener la longitud observando un astro en las proximidades del vertical primario, merced a unas tablas donde el autor nos da el ángulo horario y la distancia zenital del corte de 18 estrellas principales, 11 del hemisferio norte y 7 del sur, con declinación comprendida entre los 5° y 30°, y otros elementos necesarios para la resolución del problema, fundado en la obtención de la cantidad que hay que aplicar al horario del corte para obtener el correspondiente a la altura observada.

Si z es la distancia zenital deducida de la observación, z_0 la que tiene el astro en el momento del corte y t el tiempo transcurrido, podemos escribir

$$z = z_0 + \frac{\delta z}{\delta t} (15 t) + \frac{\delta^2 z}{2 \delta t^2} (15 t)^2 + \frac{\delta^3 z}{6 \delta t^3} (15 t)^3 + \dots$$

y como

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta z}{\delta t} &= \cos \varphi \operatorname{sen} Z \\ \frac{\delta^2}{\delta t^2} &= \frac{\cos Z \cos A \cos \varphi \cos d}{\operatorname{sen} Z} \\ \dots\dots\dots & \\ \dots\dots\dots & \end{aligned} \right\}$$

en las proximidades del vertical primario, resultará,

$$z = z_0 + 15 \cdot t \cdot \cos \varphi$$

de donde

$$z - z_0 = 15 \cdot t \cdot \cos \varphi$$

es decir, que se puede considerar uniforme el movimiento en altura con una velocidad de $15 \cdot t \cdot \cos \varphi$ minutos de arco por minuto de tiempo, y, por lo tanto, si se conoce el horario local del astro en el momento del corte, se puede hallar el correspondiente a una cierta altura anterior o posterior. Para ello las tablas están calculadas en la forma que sigue:

<i>Antares</i>		<i>d = 26° 13'</i>		
<i>Latitud</i>	<i>hl en el corte</i>	<i>Corrección por 1' de d</i>	<i>z en el corte</i>	<i>corrección por 1° de z</i>
55°	4 ^h 39 ^m 19 ^s	5 ^s .4	57° 22'	418 ^s .6
»	»	»	»	»»
»	»	»	»	»

Para una cierta declinación de la estrella que se considera, se encuentra en línea con la latitud del observador el horario del corte, lo que varía éste por cada minuto de variación en la declinación, la distancia zenital al corte y lo que varía el horario por cada grado de variación en la coaltura, de modo que aplicando al horario del corte las dos correcciones por las diferencias de declinación y distancia zenital, obtendremos el horario buscado.

Conviene advertir que la corrección por la distinta declinación que tenga el astro en la actualidad es importante sobre todo en bajas latitudes. Aunque afecta al horario y a la distancia zenital; Goodwin combinó las dos correcciones en una sola que se aplica al horario facilitando así el problema. Su valor nunca es mayor de 7^s por cada minuto de Δd y se suma o se resta, según que la declinación aumente o disminuya.

El error que se comete al seguir este método es menor de una milla para los

horarios $07^{\circ} 30'$ (30^m) superiores o inferiores al del corte, en todas las latitudes hasta los 60° ; hasta latitud 45° la amplitud del horario puede ser de $08^{\circ} 45'$ (35^m); hasta latitud 35° de 10° (40^m) y asta 15° de latitud más de 15° (una hora). Cuando la observación pasa del límite de 30^m antes o después del corte, es preciso tener en cuenta el tercer término de la serie que el autor tabuló en función de φ y $\Delta h l$.

Cuando sea la latitud menor que la declinación y no se verifique el corte con el vertical primario, no se puede emplear este método; pero entonces el ángulo de posición es recto en algún instante de su movimiento diurno aparente, el astro se mueve temporalmente manteniendo casi el mismo vertical y la uniformidad del movimiento en altura es más notable e igual a $15 \cos d$ por minuto. Goodwin calculó las tablas de $h l$ y z cuando $A = 90^{\circ}$, con objeto de poder aprovechar las ventajas de su método en las proximidades del ecuador, y en otra tabla da el valor de la segunda corrección cuando $\Delta h l$ sea grande; su argumento es d en vez de φ . Para este caso la corrección por variación de la declinación es innecesaria.

9. LONGITUD POR DISTANCIAS LUNARES. — Imperdonable sería el que el presente trabajo no dedicara una páginas al método del cálculo de la longitud conocido de todos los navegantes de las épocas inmediatamente anteriores a la aparición del cronómetro que, lentamente, lo fue relegando hasta su total extinción, a pesar de la tenaz resistencia de muchos de sus devotos, que finalmente hubieron de ceder ante la más precisa y fácil metodología de la navegación astronómica ligada al cronómetro. Antes de que Harrison dotase a la humanidad de uno de los dispositivos que más contribuyera a su desarrollo, los navegantes calculaban su longitud siguiendo procedimientos inspirados en la observación de fenómenos tales como eclipses, ocultaciones, pasos de los planetas inferiores por el disco solar, etc, fenómenos que, no presentándose con la necesaria frecuencia para obtener la hora del primer meridiano, se convertían en casi pura anécdota. Solo la Luna con su caminar en el cielo de poniente a oriente, a razón de aproximadamente 0.5° por hora, (30 segundos de arco por minuto de tiempo), se convirtió en el reloj que el marino precisaba. El problema se reducía, pues, a medir la distancia desde nuestro satélite a otro cuerpo celeste "fijo", Sol, estrella o planeta, y comparala con la que a la misma hora del meridiano origen venía tabulada en el Almanaque Náutico, para así, de la diferencia de horas obtenida deducir la longitud del navegante. Considerando la lentitud de tal variable, se deduce que los resultados tenían que ser forzosamente inexactos, y, mucho más antes de la invención de los instrumentos de reflexión. El problema se componía de tres partes

principales:

Primera. Observación de la distancia, que debía efectuarse con toda meticulosidad, puesto que de ella dependen en gran parte los errores que tanto desprestigiaban al método.

Segunda. Reducción de la distancia observada a verdadera, es decir, al centro de la Tierra y de los astros, para lo cual precisaba del conocimiento de las alturas.

Tercera. Deducción de la hora del primer meridiano.

PRIMERA PARTE. OBSERVACIÓN DE LA DISTANCIA.- Como en general, y sobre todo cuando se trata de hallar distancias Luna - estrellas, no suele estar el horizonte en condiciones para observar simultáneamente las alturas de los astros con la exactitud requerida, ni tampoco era común el disponer de tres buenos sextantes ni de tres diestros observadores, y, por otra parte, que el cálculo fuese un poco más largo no era óbice para nadie cuando de la debida exactitud se trataba, resultaba ventajoso que tan solo se observara la distancia calculándose siempre las alturas, pues así el observador concentraba toda su atención en las distancias que hubiera de observar, atención necesaria para la debida precisión en el resultado, sin malgastarla en la de las alturas, que pudiera cansar su pulso y fatigar su vista, en detrimento de la observación principal.

En el supuesto de un solo observador, se hacían con anterioridad todas las rectificaciones que el sextante exigía para una observación precisa, y después se escogía la distancia que debía observarse. De entre todas las que se presentaban a la vista del navegante el día dado, se tomaba siempre la que resultaba comprendida entre 20° y 40° , pues si bien analíticamente se deduce que esta no es tan favorable como la próxima a los 90° , las distancias grandes son más difíciles de observar por la mucha movilidad de la imagen reflejada. Es indudable que la distancia se observará más favorablemente cuanto mayor sea su variación, como sucede en las alturas, y esta variación es máxima cuando el astro se halla en el plano de la órbita lunar, de modo que a simple vista se podía deducir cual era el astro más conveniente, puesto que debiera encontrarse en dirección perpendicular a la línea que une los cuernos.

Antes de la observación era conveniente hallar la altura de un astro en circunstancias favorables para tener la hora del lugar, y a partir de aquel momento, se llevaba cuidadosa cuenta de la estima para que al observar la distancia, fuera conocida lo más exactamente posible la del meridiano en que aquella se obtenía, y el sextante no se guardaba en su caja desde que se hallaba la corrección de índice, que sería

después de la observación de la altura, con objeto de que aquella no se alterara.

Como el astro que se iba a observar cambiaba de posición respecto a la Luna, se escogía aquella hora de la noche en que la posición del instrumento resultase más cómoda; y si llegada aquella hora, las nubes, los balances y cabezadas, etc, produjeran dificultades imprevistas, era preferible esperar a otro momento más oportuno, salvo que hubiera extraordinario interés en hallar la longitud.

SEGUNDA PARTE. REDUCCIÓN DE LA DISTANCIA.- Para reducir la distancia observada a verdadera, se calculaban las alturas verdaderas y aparentes de ambos astros y de la distancia observada se pasaba primero a la aparente de los centros de los astros, aplicándole la corrección de índice, y los semidiámetros de los astros

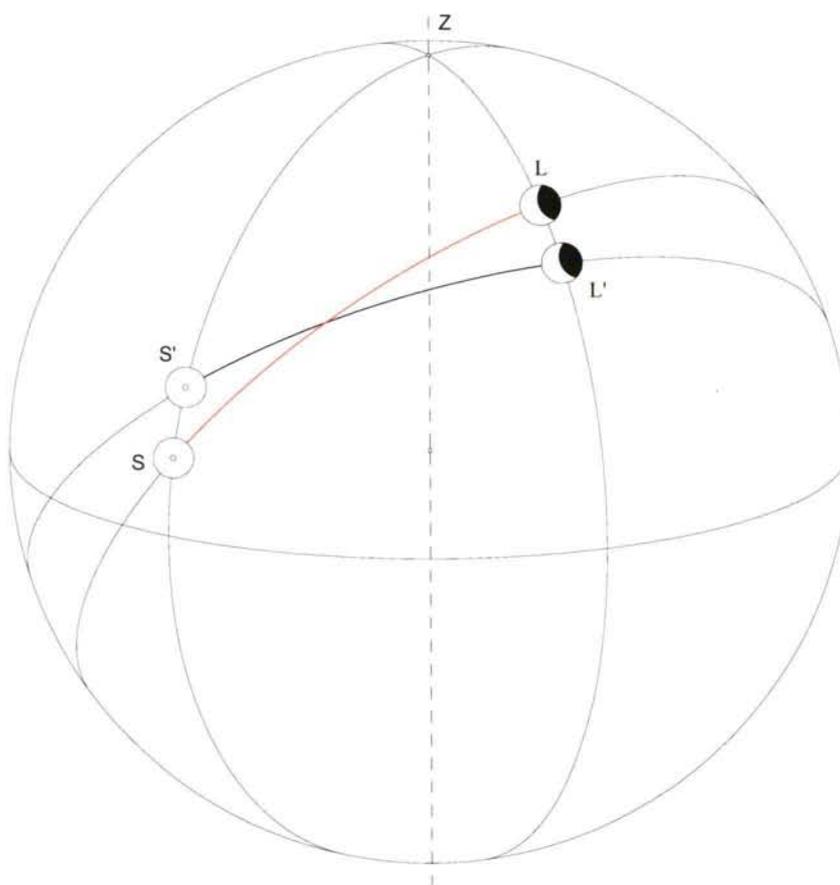


Figura - 1.276.XI - Distancias lunares

corregidos de contracción cuando sus alturas fueran inferiores a 30° , con el correspondiente signo, según se hubiera observado los contactos de los limbos próximos o lejanos. De esta distancia aparente $S'L'$, figura 1.276.XI, se deducía la

verdadera SL, resolviendo el triángulo SzL por medio del S'zL' en el que se conocen los tres lados, que son la distancia aparente y las distancias zenitales aparentes; se puede calcular, por lo tanto, el ángulo en el zenit ΔZ , y con éste y las distancias zenitales verdaderas queda conocido el triángulo el triángulo SzL, de donde se deducirá la distancia verdadera. Fueron muchos los procedimientos puestos en huso para facilitar la resolución de estos triángulos, entre los que destacaba el de Mendoza⁵, tan conocido de nuestros navegantes. Se expone a continuación un método que permitía calcular fácilmente la distancia verdadera:

Llamando a, ζ y D a las alturas a las alturas y distancia verdaderas, a', ζ' y D' a las aparentes, en el triángulo ZS'L', tendremos que

$$\cos D' = \sin a' \sin \zeta' + \cos a' \cos \zeta' \cos \Delta Z$$

de la cual se deduce,

$$\cos \Delta Z' = (\cos D' - \sin a' \sin \zeta') \sec a' \sec \zeta' \quad (1.277.XI)$$

En el otro triángulo SzL conocemos el ángulo ΔZ que se acaba de obtener y los dos lados complementos de las alturas verdaderas; luego se puede calcular el otro lado, que es la distancia verdadera, por la fórmula

$$\cos D = \sin a \sin \zeta + \cos a \cos \zeta \cos \Delta Z$$

en la cual, multiplicando y dividiendo el segundo miembro por $\cos a \cos \zeta$, se obtiene

$$\cos D = (\cos \Delta Z + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} \zeta) \cos a \cos \zeta \quad (2.277.XI)$$

Las fórmulas (1.277.XI) y (2.277.XI) debidamente tabuladas permitían calcular la distancia. La manera de calcular la distancia verdadera compartía, con la exactitud de la observada, el éxito del complicado problema de obtener la longitud dentro de moderados límites de error. Así era que cuando se precisaba de este medio para determinar la longitud, era necesario tener en cuenta todas las fuentes de error, pues

⁵ D. José de Mendoza y Ríos.- Capitán de Navío, español, autor de una colección de tablas náuticas cuya segunda edición se realizó en Londres en 1809 y alcanzaron notable éxito entre los marinos de la época.

de otro modo se corría el riesgo de que tan largos cálculos resultasen menos exactos que la simple estima, toda vez que, como veremos posteriormente, por cada minuto de error en la distancia verdadera, podía ascender a 30 millas el error en la longitud calculada. Cuando se observaba la distancia Luna -Sol y los astros tenían poca altura, cualquiera que fuera el método de reducción empleado, era necesario tener en cuenta, al pasar de la distancia observada a la aparente, la contracción de los semidiámetros,

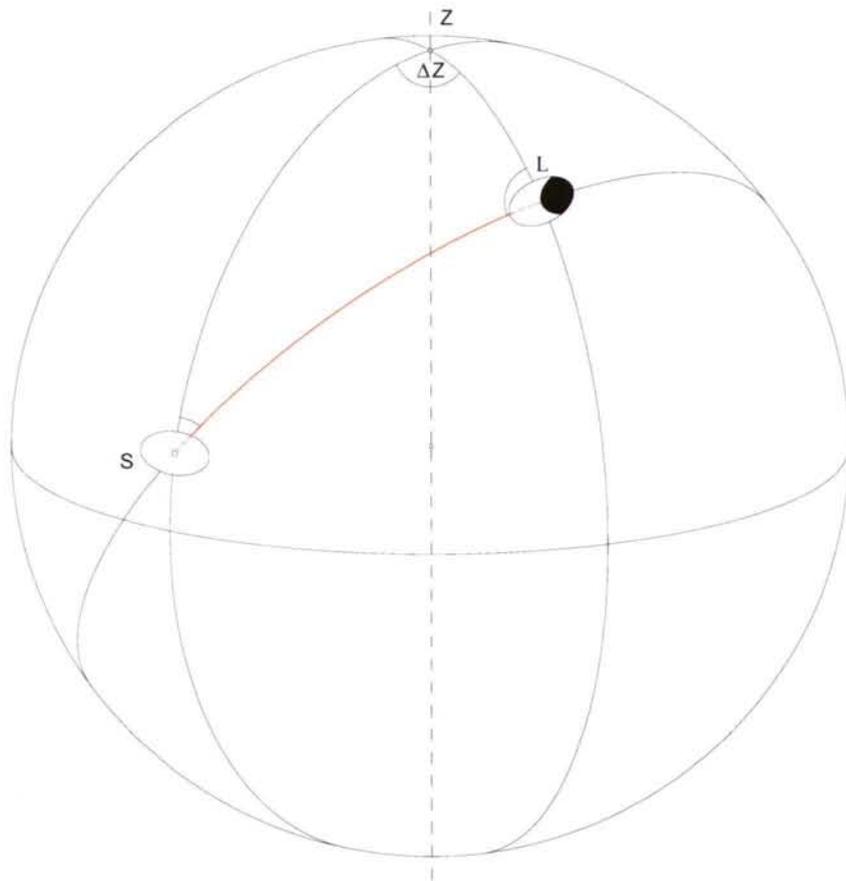


Figura - 1.278.XI - Contracción de los semidiámetros

por lo que había que conocer de antemano las alturas aparentes y los ángulos S y L, figura 1.278.XI, del triángulo SzL, y puesto que eran conocidos los tres lados, se hallaban los ángulos buscados por las fórmulas

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \frac{S}{2} &= \cos T \operatorname{sen} (T - \zeta') \sec a' \operatorname{cosec} D' \\ \operatorname{sen}^2 \frac{L}{2} &= \cos T \operatorname{sen} (T - a') \sec \zeta' \operatorname{cosec} D' \\ 2T &= \zeta' + a' + D' \end{aligned} \right\}$$

los cuales se calculaban rápidamente sin necesidad de interpolaciones, toda vez que los ángulos se precisaban al grado próximo. Si se conocían los azimutes de los astros, que se hallan fácilmente marcándolos en el momento de la observación, o bien calculándolos por tablas, las fórmulas más sencillas

$$\operatorname{sen} L = \frac{\operatorname{sen} \Delta Z}{\operatorname{sen} D'} \cos a' \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} S = \frac{\operatorname{sen} \Delta Z}{\operatorname{sen} D'} \cos \zeta'$$

permitían obtener los ángulos en los astros. Para alturas superiores a los 20° no era preciso tener en cuenta ésta corrección, pues su valor no llega entonces a 2".

Los errores de las alturas y la distancia observada afectaban a la distancia verdadera tal y como vamos a determinar. De las ecuaciones

$$\begin{aligned} \cos D' &= \operatorname{sen} a' \operatorname{sen} \zeta' + \cos a' \cos \zeta' \cos \Delta Z \\ \cos D &= \operatorname{sen} a \operatorname{sen} \zeta + \cos a \cos \zeta \cos \Delta Z \end{aligned}$$

se deduce eliminando $\cos \Delta Z$ y llamando Σ y Σ' a la suma de alturas, que

$$\cos D = (\cos \Sigma' + \cos D') \frac{\cos a \cos \zeta}{\cos a' \cos \zeta'} - \cos \Sigma$$

la cual, diferenciada respecto a D y D' , nos da

$$-\operatorname{sen} D \, dD = -\operatorname{sen} D' \frac{\cos a \cos \zeta}{\cos a' \cos \zeta'} \, dD'$$

de donde

$$dD = \frac{\text{sen } D' \cos a \cos \zeta}{\text{sen } D \cos a' \cos \zeta'} dD'$$

y como el cociente difiere muy poco de la unidad, todo error en la distancia aparente recae casi íntegro en la verdadera, lo cual justifica el cuidado que era necesario poner en la corrección de la distancia observada.

Si se halla la diferencial respecto a las sumas de alturas, y se considera el cociente,

$$\frac{\cos a \cos \zeta}{\cos a' \cos \zeta'} = 1$$

resulta que,

$$- \text{sen } D dD = - \text{sen } \Sigma' d\Sigma' + \text{sen } \Sigma d\Sigma$$

de donde,

$$dD = \frac{\text{sen } \Sigma' d\Sigma' - \text{sen } \Sigma d\Sigma}{\text{sen } D}$$

y como $\text{sen } \Sigma$ y $\text{sen } \Sigma'$ son casi iguales, si $d\Sigma$ y $d\Sigma'$ también lo son, el numerador será casi cero y nulo el error sobre la distancia, con tal de que el de la suma de alturas verdaderas sea el mismo que lleve en sí la de las aparentes. Resulta, pues, que éste error no depende del de las alturas, sino del que tengan las correcciones que se ha de aplicar a las aparentes para obtener las verdaderas, y, por lo tanto, se escogían los astros de modo que sus alturas no fuesen nunca inferiores a 10° .

En cuanto a la distancia, teniendo en cuenta que el denominador de la expresión del error es $\text{sen } D$, siempre será circunstancia favorable que la distancia tienda a los 90° .

TERCERA PARTE. CÁLCULO DE LA HORA DEL PRIMER MERIDIANO.- Para obtener la hora del primer meridiano, era preciso calcular antes dos distancias verdaderas para dos horas exactas, que comprendieran ciertamente a la hora incógnita buscada, y una vez halladas, se interpolaba entre ellas la distancia verdadera deducida de la observación y se obtenía su hora correspondiente que era el elemento que se

buscaba. Para ello con la hora del lugar y la longitud próxima que se conociera, se hallaba la hora del primer meridiano y se escogían las dos horas exactas anterior y posterior a la que se considerase. Co ellas se obtienen del *Almanaque* las ascensiones rectas y declinaciones de la Luna y del otro astro observado y en el triángulo que formaban el polo y los dos astros se conocían dos lados Δ y Δ' y el ángulo comprendido $\mathcal{R} - \mathcal{R}$, luego se podía hallar el tercer lado por la fórmula

$$\cos D = \frac{1}{2} \left[\left[\cos (d - d') - \cos (d + d') \right] + \left[(\cos d - d') + \cos (d + d') \right] \cos (\mathcal{R} - \mathcal{R}) \right]$$

que se resolvía con facilidad valiéndose de tablas. Una vez conocidas las dos distancias D_0 y D_1 que comprendían a la D deducida de la observación y sus horas H_0 y H_1 , se

hallaban sus diferencias ΔD_0 y t y se obtenía la variación $\frac{t}{\Delta D_0}$ de la hora por cada

unidad de la distancia; luego la hora H que se deseaba hallar era, llamando θ a la corrección que había que sumar a H_0

$$H = H_0 + \theta$$

o, lo que era lo mismo,

$$H = H_0 + \frac{t}{\Delta D_0} (D - D_0) \tag{1.281.XI}$$

El error en la hora hallada por medio de la distancia, se deducía de la fórmula

$$\theta = (D - D_0) \frac{t}{\Delta D_0}$$

pues si suponemos que era $\Delta \theta$ el error que se originaba en la hora por un error ΔD en la distancia, resultaba,

$$\theta + \Delta \theta = (D + \Delta D - D_0) \frac{t}{\Delta D_0}$$

de donde

$$\Delta \theta = \Delta D \frac{t}{\Delta D_0}$$

luego para igual error en la distancia el que recayera en la hora sería tanto menor cuanto

más lo fuera $\frac{t}{\Delta D_0}$ y, por lo tanto, variara más rápidamente la distancia; por ello convenía

escoger entre todas las que pudieran ser observadas en el día, aquella que cumpliera esa condición, que era la del astro que se encontrara en el plano de la órbita lunar.

La cantidad $\frac{t}{\Delta D_0}$ vale 30" por término medio en una distancia Luna - Sol ; de modo que

el error de un minuto en la distancia verdadera, podía producir 30 millas de error en la longitud, valor considerable que justifica la precisión con la que se debía observar la distancia y el cuidado que exigía su cálculo, para conseguir una mediana exactitud en el resultado.

Una vez conocida la hora del primer meridiano, deducida de la distancia, solamente restaba determinar la hora del lugar para hallar la longitud. Para ello se observaba un astro cualquiera en circunstancias favorables en el momento de la observación de la distancia y si esto no era posible, tan pronto se pudiera, llevando en este caso cuidadosa cuenta de la estima en el intervalo que mediaba entre las dos observaciones, que también debían ser anotadas, precisando bien las horas de las observaciones, con el mejor reloj de que se dispusiera a bordo. Una vez conocida la H_m del lugar donde se observara la altura del astro, se hallaba la H_m de la observación de la distancia en ese meridiano aplicándole el intervalo transcurrido, hora que se pasaba al meridiano de la distancia, valiéndose de la diferencia en longitud contraída. Conocida así la H_m del lugar, su diferencia con la del primer meridiano daba la longitud.[De como se han de observar las distancias lunares- Conde de Cañete del Pinar - Madrid 1904]

10. LONGITUD POR ASCENSIONES RECTAS DE LA LUNA. — Este método para calcular la longitud, resultaba aun más erróneo que el anterior, pues si bien la práctica de la observación de alturas en que su fundaba, presentaba menos dificultades y se hacía con mayor exactitud, en cambio el error en longitud, que suele ser como en

el caso anterior unas 30 veces mayor que el de la ascensión recta, viene aumentado en el que experimenta esta coordenada a consecuencia del de la altura, porque siendo este

$$dh = - \frac{da}{\cos \varphi \operatorname{sen} Z}$$

y su denominador menor que la unidad, dh es siempre mayor que da . El método consistía en observar la altura de la Luna, y simultáneamente la de otro astro en circunstancias favorables, que permitía deducir la hora del lugar. Con esta y la longitud de estima se hallaba la hora del primer meridiano; con esta se corregía la declinación de la Luna y con la altura se calculaba su horario. Con la hora del lugar deducida de la altura del otro astro, se calculaba la hora sidérea, de la que se restaba el horario de la Luna y se tenía su ascensión recta, que comparada con la del Almanaque, nos daba, por interpolación la hora media correspondiente del primer meridiano. Si esta difería mucho de la que nos había servido para la corrección de los elementos del Almanaque, se repetía el cálculo con esta hora más exacta y la diferencia entre la nueva hora calculada y la del lugar nos dará la longitud.

CAPÍTULO XII

LA RECTA DE ALTURA

1. LA SITUACIÓN ASTRONÓMICA. — De lo estudiado en el capítulo X sobre la circunferencia de alturas iguales, deducimos que la situación en la mar podría obtenerse de forma analítica resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas $\{\varphi, \lambda\}$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} a_1 &= \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} d_1 + \cos \varphi \cos d_1 \cos (hG_1 - \lambda) \\ \operatorname{sen} a_2 &= \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} d_2 + \cos \varphi \cos d_2 \cos (hG_2 - \lambda) \end{aligned} \right\}$$

cuyas soluciones son dos puntos de coordenadas $\{\varphi, \lambda\}$ y $\{\varphi', \lambda'\}$. La ambigüedad en la situación sería eliminada por la observación de un tercer astro con el que se volvería a resolver uno de los sistemas

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} a_1 &= \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} d_1 + \cos \varphi \cos d_1 \cos (hG_1 - \lambda) \\ \operatorname{sen} a_3 &= \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} d_3 + \cos \varphi \cos d_3 \cos (hG_3 - \lambda) \end{aligned} \right\}$$

o,

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} a_2 &= \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} d_2 + \cos \varphi \cos d_2 \cos (hG_2 - \lambda) \\ \operatorname{sen} a_3 &= \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} d_3 + \cos \varphi \cos d_3 \cos (hG_3 - \lambda) \end{aligned} \right\}$$

y, forzosamente, al menos uno de los pares de coordenadas de las soluciones sería común a los tres sistemas y determinaría las coordenadas del observador; teórica pero improbablemente, la indeterminación podría persistir, pues por dos puntos de la superficie esférica pasan infinitas circunferencias. En lugar de la tercera observación

se compararían las soluciones obtenidas, con las coordenadas de la situación de estima; o la simple contemplación del firmamento en el instante de la observación permitiría orientar grosso modo los verticales de los astros manejados. En la actualidad este procedimiento se resuelve con facilidad por medio de calculadoras programadas a tal efecto, pero no hace muchos años resultaba poco práctico para el marino por lo que se recurría a métodos más simples y cuya precisión era más que suficiente para

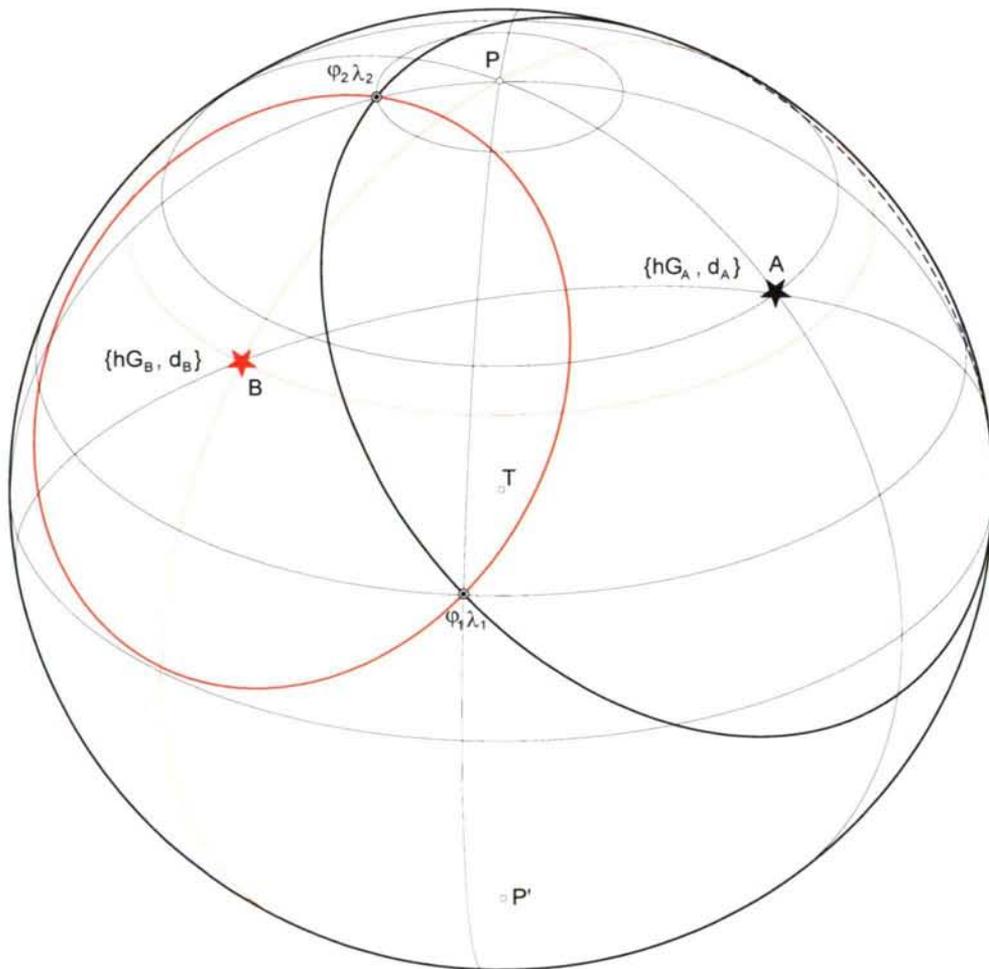


Figura - 1.285.XII - Situación por corte de 2 circunferencias de alturas iguales

las necesidades prácticas. Las *pomas* de Núñez, ya mencionadas en este trabajo, fueron el primer intento de obtener la situación por corte de circunferencias de alturas iguales y durante la Segunda Guerra Mundial la falta de tiempo para la formación de navegantes obligó al empleo de esferas celestes a escala, al objeto de trabajar mecánicamente el triángulo de posición; los resultados, aunque sin duda útiles, debían

ser bastante groseros teniendo en cuenta que para lograr la precisión de una milla representada por un milímetro, se precisaría una esfera de casi 7 m de diámetro. La solución analítica tiene su alternativa gráfica con los programas de dibujo de los ordenadores actuales que gozan, frente a aquella, de la ventaja de no ser tan abstractos, permiten ver físicamente la resolución del problema y dan prácticamente la

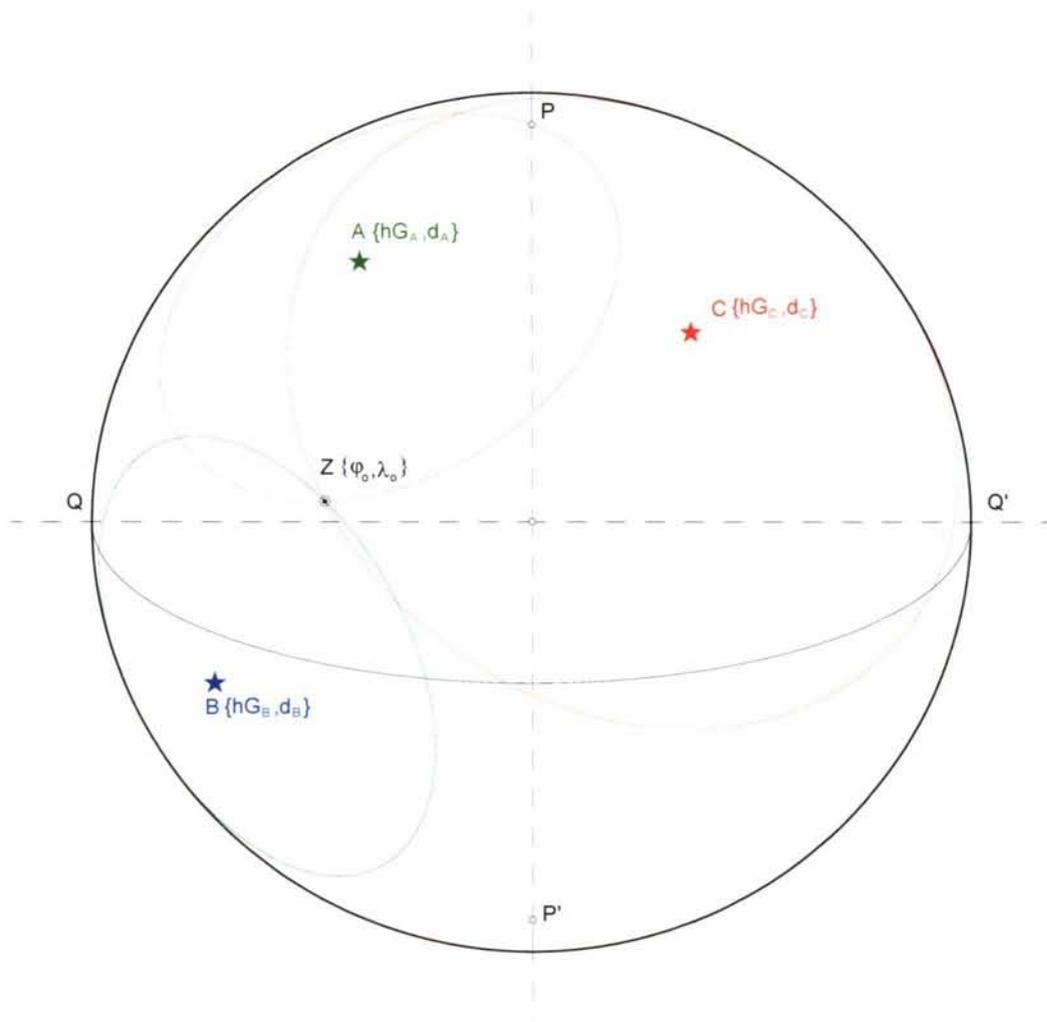


Figura - 1.286.XII - Situación por corte de 3 circunferencias de alturas iguales

misma precisión. En las figuras 1.285.XII y 1.286.XII podemos ver el fundamento de la solución por corte de circunferencias de alturas iguales; en la primera de ellas aparece la ambigüedad en la situación, en la segunda desaparece al recurrir a un tercer astro. Si la medida del azimuth pudiera hacerse con la precisión requerida, bastaría la observación de un solo astro para hallar las coordenadas del observador; el

plano del dibujo, llevamos el azimut Z para obtener la posición A_0 del astro abatido; elevamos el almicantarat para ubicar A' , posición del astro en la esfera celeste. Orientada arbitrariamente, se traza la cuerda representativa del paralelo de declinación del astro, para una mayor claridad en la figura se dibujó como un almicantarat. Con centro en el punto representativo de los cardinales E y W , centro de la esfera, y radio EA' , dibujamos una circunferencia auxiliar que corta al paralelo de declinación en los puntos C y C' , puntos cuya posición en el paralelo de declinación resulta independiente de su orientación. Con centro en la proyección A' del astro y radio CC'' trazamos una circunferencia que corta al meridiano en los puntos MM' ; la cuerda $MA'P_0M''$ es la proyección del paralelo de declinación en su verdadera posición; la perpendicular trazada desde el centro de la esfera al paralelo de declinación determina el eje del mundo y los polos celestes PP' ; la altura del polo es la latitud φ del observador. Para medir el horario local hl del que se deducirá la longitud λ , se abate el paralelo de declinación con lo que obtendremos la posición abatida del astro A'_0 ; el ángulo $A'P_0A'_0$ es el horario buscado, que será del mismo nombre que el horario.

En la mar el azimut de los astros no puede medirse con la precisión necesaria como para utilizarlo en el cálculo de las coordenadas del navegante por lo que, y como hemos dicho, se recurre a la observación de un segundo astro. La solución ortográfica, aun siendo simple, resulta algo más laboriosa y se desarrolla en la figura 1.288.XII: Con idénticas consideraciones en cuanto al radio, tracemos la esfera celeste de centro C , eje del mundo y polos celestes PP' , y ecuador celeste QQ' . Trácese los paralelos de declinación de acuerdo al hemisferio que corresponda, en nuestro caso ambos norte; situemos uno de los astros observados, el A , por ejemplo, en el meridiano del plano del dibujo, abatir el paralelo de declinación del astro B , y, una vez abatido llevemos el ángulo diferencia de horarios en Greenwich para la hora de la observación, ΔhG , para determinar la posición del astro en el paralelo abatido, B_0 ; elévese el paralelo de declinación y este astro pasará a ocupar la posición B' , proyección del mismo. Tomando como eje de giro la línea $A'C$, giremos la esfera el ángulo θ preciso para llevar el círculo máximo determinado por los dos astros al plano del dibujo; B' ocupará la posición B''_0 y ambos astros se encuentran ahora en el plano del dibujo por lo que sus circunferencias de alturas iguales, en sendos planos proyectantes, tendrán como representación dos segmentos rectilíneos. Para trazarlos, llévense las respectivas distancias zenitales z_A y z_B desde los astros en sus posiciones actuales A' y B'_0 ; el corte de ambas circunferencias determina los puntos z_1 y z_2 , con perspectiva común, por ser puntos de una línea proyectante. Abatir la circunferencia de alturas iguales de uno de

los astros, en nuestra figura, la del A; las posiciones de los zenits abatidos son z'_1 y z'_2 . Des hagamos el giro efectuado haciendo rotar sobre su centro la circunferencia de alturas iguales abatida, el ángulo θ ; las nuevas posiciones de los zenits son z''_1 y z''_2 , y, una vez elevada la circunferencia de alturas iguales pasan a z_{10} y z_{20} , su posición definitiva. Se trazan ahora los paralelos de latitud y esta podrá ser medida, hallándose

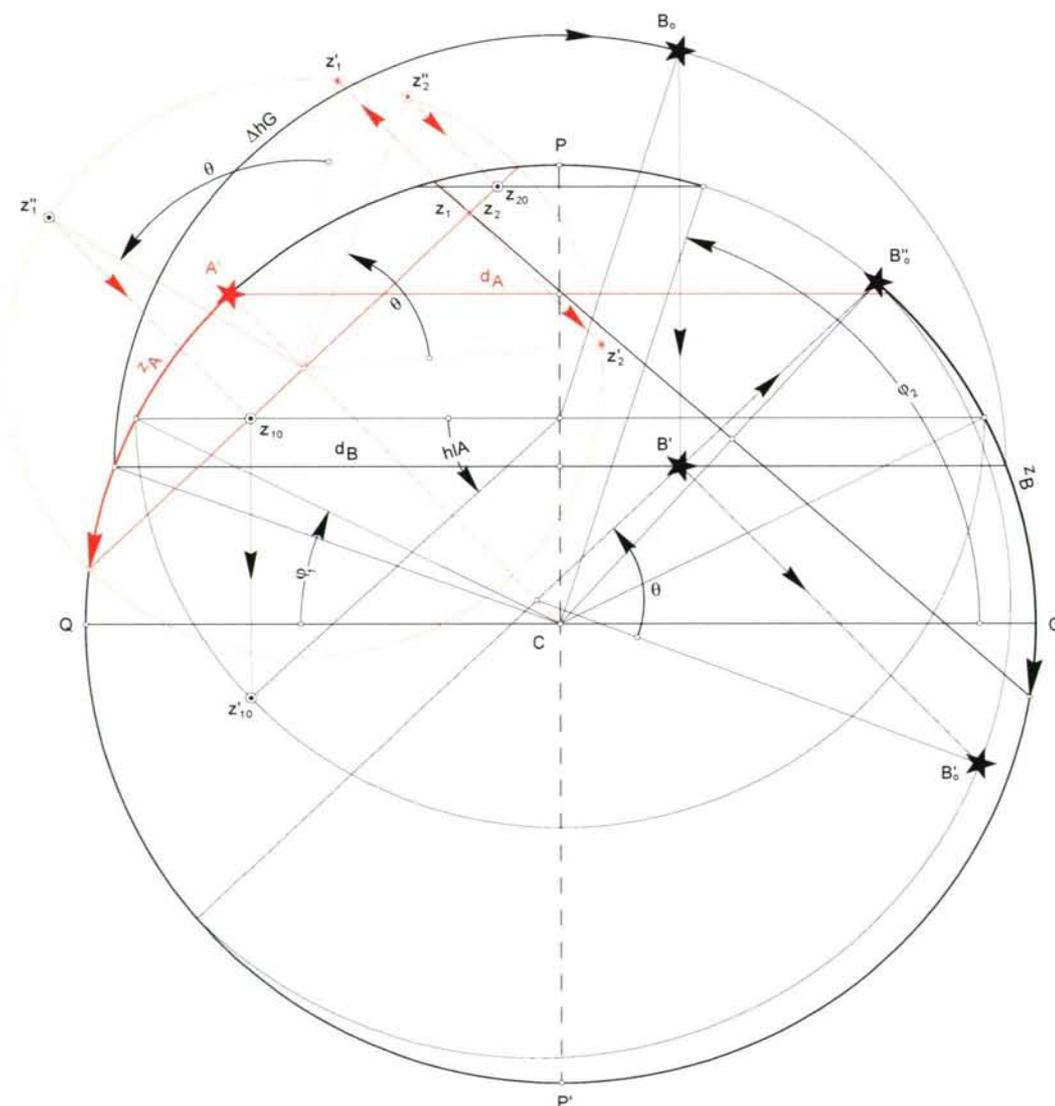


Figura - 1.289.XII - Situación ortográfica con dos alturas

φ_1 y φ_2 , latitudes que cumplen las premisas del problema. Para hallar las longitudes se abatirán los paralelos de latitud, determinándose así los horarios locales de cada uno de los astros, en la figura el del astro A, pasando el zenit z_{10} a z'_{10} y midiéndose su horario, del que se deducirá la longitud. Las flechas en el dibujo indican la marcha de

las operaciones.

Los procedimientos estudiados tienen, únicamente, interés teórico, por lo que en la práctica se recurre a procedimientos más simples y que dan la necesaria precisión.

2. CURVAS DE ALTURAS IGUALES. — Se llaman curvas de alturas iguales a las transformadas de las circunferencias de alturas iguales en la carta de Mercator, es decir, la representación de tales circunferencias en la carta náutica, y sabiendo que esta es, por antonomasia, la carta de Mercator. Se dividen, y de acuerdo con las propias circunferencias de alturas iguales, en curvas de primera, de segunda y de tercera especie, [ESPASA-T37]. Para obtener la ecuación de las curvas de alturas iguales basta con substituir en la ecuación de la circunferencia de alturas iguales la latitud φ por su equivalente en la carta, la latitud aumentada, siendo en la carta de Mercator:

$$l_a = L \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$$

se deduce que

$$e^{l_a} = \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$$

por lo tanto,

$$e^{l_a} = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} \varphi}{1 - \operatorname{sen} \varphi}}$$

de aquí concluimos que [CAPASSO-FEDE, 81],

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{e^{l_a} - e^{-l_a}}{e^{l_a} + e^{-l_a}} \quad \text{y} \quad \cos \varphi = \frac{2}{e^{l_a} + e^{-l_a}}$$

valores que substituidos en la expresión de la circunferencia de alturas iguales

$$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} d \operatorname{sen} \varphi + \cos d \cos \varphi \cos (hG - \lambda)$$

nos da,

$$\text{sen } a = \text{sen } d \left(\frac{e^{l_a} - e^{-l_a}}{e^{l_a} + e^{-l_a}} \right) + \cos d \left(\frac{2}{e^{l_a} + e^{-l_a}} \right) \cos (hG - \lambda)$$

que, siendo una de las posibles ecuaciones, resulta demasiado complicada para su estudio. Más práctico es tomar el meridiano del astro como eje de ordenadas y el ecuador como el de abscisas, y de las analogías de Neper (capítulo II),

$$\left. \begin{aligned} \frac{\text{tg } \frac{1}{2}(90^\circ - d + z)}{\text{tg } \frac{1}{2}(90^\circ - \varphi)} &= \frac{\cos \frac{1}{2}(Z - P)}{\cos \frac{1}{2}(Z + P)} \\ \frac{\text{tg } \frac{1}{2}(90^\circ - d - z)}{\text{tg } \frac{1}{2}(90^\circ - \varphi)} &= \frac{\text{sen } \frac{1}{2}(Z - P)}{\text{sen } \frac{1}{2}(Z + P)} \end{aligned} \right\}$$

o sea

$$\frac{1}{\text{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)} = \frac{1}{\text{tg} \left(45^\circ - \frac{d - z}{2} \right)} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(Z - P)}{\cos \frac{1}{2}(Z + P)}$$

$$\frac{1}{\text{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)} = \frac{1}{\text{tg} \left(45^\circ - \frac{d + z}{2} \right)} \cdot \frac{\text{sen } \frac{1}{2}(Z - P)}{\text{sen } \frac{1}{2}(Z + P)}$$

o lo que es lo mismo

$$\text{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) = \text{tg} \left(45^\circ + \frac{d - z}{2} \right) \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(Z - P)}{\cos \frac{1}{2}(Z + P)}$$

$$\text{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) = \text{tg} \left(45^\circ + \frac{d + z}{2} \right) \cdot \frac{\text{sen } \frac{1}{2}(Z - P)}{\text{sen } \frac{1}{2}(Z + P)}$$

y tomando logaritmos neperianos y llamando φ_a , φ'_a y φ''_a a las latitudes aumentadas

correspondientes a φ , $\varphi' = d - z$ y $\varphi'' = d + z$, tendremos

$$\varphi_a = \varphi'_a + L \frac{\cos \frac{1}{2}(Z - P)}{\cos \frac{1}{2}(Z + P)} \quad (1.292.XII)$$

$$\varphi_a = \varphi''_a + L \frac{\sen \frac{1}{2}(Z - P)}{\sen \frac{1}{2}(Z + P)} \quad (2.292.XII)$$

que son las ecuaciones que representan sobre la carta, la curva de alturas referida al meridiano del astro y al ecuador, y entre las muchas que se han desarrollado, las más manejables para el estudio de sus propiedades. Para su estudio, se consideran tres casos según que el polo del astro sea exterior, interior o pertenezca a la circunferencia de alturas iguales, es decir $\Delta > z$, $\Delta < z$ o $\Delta = z$. Además se considera siempre la declinación del mismo nombre que el polo elevado, es decir, en el estudio que sigue, los dos vértices fijos del triángulo de posición son el polo y el astro, y no el polo y el observador, como es costumbre en la navegación astronómica, [RIBERA]. Para la de primera especie ($\Delta > z$), todos los observadores del astro A, figura 1.292.XII, que miden la altura a, tienen su posición entre los meridianos tangentes a la circunferencia de alturas iguales (véanse las figuras en las páginas dedicadas al estudio de las circunferencias de alturas iguales), y los paralelos φ' y φ'' (zona de observación, [FLORA-86]); luego en la carta la curva imagen de la circunferencia de alturas iguales se encontrará entre los paralelos y meridianos dichos el paralelo φ' tiene por latitud en el globo $d - z$; luego en la carta tendrá φ'_a , y el φ'' tiene de latitud $d + z$, φ''_a ; de manera que trazados en la carta los paralelos de latitud $(d + z)$ y $(d - z)$, entre ambos quedará comprendida la curva (zona de altura). Los meridianos extremos quedan determinados respecto al círculo horario del astro, ver figura 1.231.XII, puesto que en el triángulo rectángulo PT'A se tendrá,

$$\sen P = \frac{\cos a}{\cos d}$$

luego si en la carta trazamos el meridiano PA con longitud igual al horario en Greenwich del astro deducido de la hora de la observación, y a partir de él se toma a uno y otro lado longitudes iguales al horario calculado por la anterior fórmula, tendremos trazados

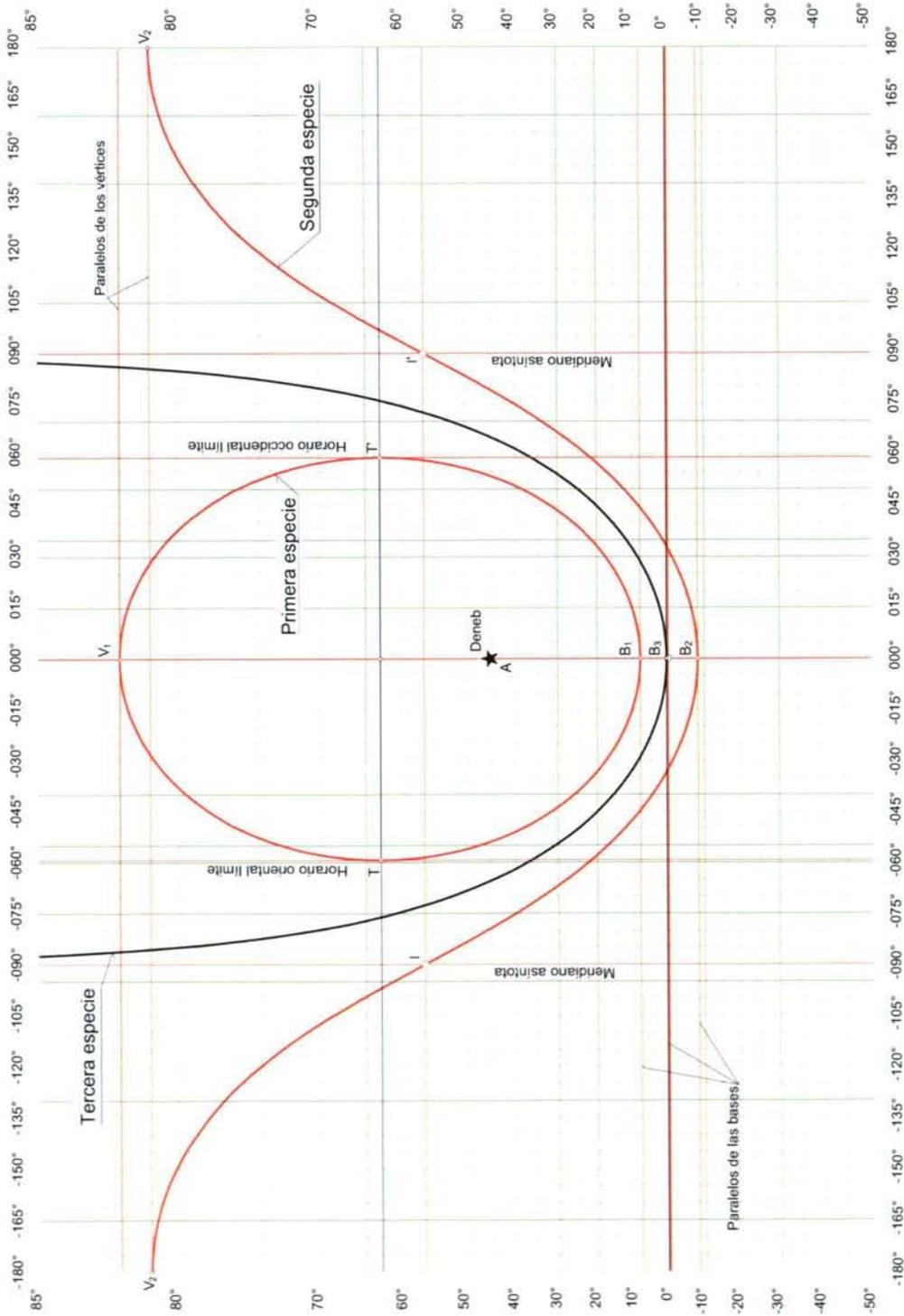


Figura - 1.293.XII - Curvas de alturas iguales de primera, segunda y tercera especies

los dos meridianos PT y PT' que limitan la curva.

La latitud de los puntos de tangencia T y T' se obtienen del mismo triángulo PAT,

$$\text{sen } \varphi = \frac{\text{sen } d}{\text{sen } a}$$

de modo que quedan determinados los cuatro vértices de la curva. Sus propiedades son:

PRIMERA PROPIEDAD.- La curva tiene por ejes de simetría el meridiano

del astro y el paralelo de latitud $\frac{\varphi'_a + \varphi''_a}{2}$, pues si se hace $Z = 90^\circ$ en las fórmulas

(1.292.XII) y (2.292.XII) y las sumamos tendremos,

$$2 \varphi_a = \varphi'_a + \varphi''_a + L \frac{\text{sen } \frac{1}{2}(90^\circ - P) \cos \frac{1}{2}(90^\circ - P)}{\text{sen } \frac{1}{2}(90^\circ + P) \cos \frac{1}{2}(90^\circ + P)}$$

equivalente a

$$2 \varphi_a = \varphi'_a + \varphi''_a + L \frac{\text{sen}(90^\circ - P)}{\text{sen}(90^\circ + P)}$$

y como para cualquier valor de P

$$L \frac{\text{sen}(90^\circ - P)}{\text{sen}(90^\circ + P)} = 0$$

y, por lo tanto,

$$\varphi_a = \frac{\varphi'_a + \varphi''_a}{2}$$

SEGUNDA PROPIEDAD.- El semieje menor es el valor máximo del horario, y el mayor es la latitud aumentada del menor.

Lo primero es casi evidente, puesto que el semieje menor es igual a la longitud λ del meridiano extremo respecto al círculo horario del astro, y es el horario máximo con el que puede ser observado desde cualquier punto de la curva de alturas. Respecto a la

segunda parte, basta considerar que el semieje mayor es la semi diferencia de las latitudes aumentadas correspondientes a los paralelos superior e inferior de la curva; luego llamando b a este semieje,

$$b = \frac{1}{2} \left[L \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{d+z}{2} \right) - L \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{d-z}{2} \right) \right]$$

es decir

$$b = \frac{1}{2} L \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(90^\circ + d + z)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(90^\circ + d - z)}$$

o sea

$$b = \frac{1}{2} L \frac{\operatorname{sen}(90^\circ + d) + \operatorname{sen} z}{\operatorname{sen}(90^\circ + d) - \operatorname{sen} z}$$

de la que,

$$b = \frac{1}{2} L \frac{1 + \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} \Delta}}{1 - \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} \Delta}}$$

y haciendo la oportuna sustitución

$$b = \frac{1}{2} L \frac{1 + \operatorname{sen} P_M}{1 - \operatorname{sen} P_M}$$

luego

$$b = \frac{1}{2} L \frac{\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{P_M}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{P_M}{2} \right)}$$

de la que,

$$b = \frac{1}{2} L \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{P_M}{2} \right)$$

y, finalmente,

$$b = L \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{P_M}{2} \right)$$

y puesto que P_M es el horario máximo, queda demostrada esta propiedad.

TERCERA PROPIEDAD.- *Todas las circunferencias de alturas iguales tangentes al mismo par de meridiano, se proyectan en la carta en curvas superponibles.*

De acuerdo con la propiedad anterior, todas tienen los mismos semi ejes; luego las curvas son idénticas, y únicamente varía la posición que ocupan a lo largo del meridiano dependiendo de la latitud de su centro, que como intersección de su los dos semi ejes, sabemos que es

$$\frac{1}{2} (\varphi'_a + \varphi''_a)$$

CUARTA PROPIEDAD.- *Para los distintos observadores, el azimut con el que se observa el astro puede tomar cualquier valor, mientras que el horario menor de 90° tiene un valor máximo igual al semi eje menor.*

En efecto, en el triángulo AzP, figura 1.231.X, se tiene,

$$\frac{\operatorname{sen} P}{\operatorname{sen} Z} = \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} \Delta} \quad (1.296.XII)$$

de donde

$$\operatorname{sen} P = \operatorname{sen} Z \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} \Delta}$$

y como por hipótesis $\frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} \Delta}$ es una cantidad constante < 1 , tendremos,

$$\operatorname{sen} P = k \operatorname{sen} Z$$

Esta igualdad se satisface para cualquier valor de Z entre 00° y $\pm 90^\circ$; pero $\operatorname{sen} Z$ no puede llegar nunca a valer la unidad, y por lo tanto, P tiene que ser menor de 90° ; su máximo valor será $P = \operatorname{arc} \operatorname{sen} k$, o sea el semi eje menor.

Para las curvas de segunda especie, $\Delta < z$, todos los observadores que ven al astro con la distancia zenital z , están situados entre los paralelos φ' y φ'' de latitud $(d - z)$ y $(d + z)$; pero en este caso $(d + z) > 90^\circ$; luego la latitud del vértice de la circunferencia de alturas iguales será $180^\circ - (d + z)$. La circunferencia corta a todos los meridianos y no está limitada en este sentido. Si como en el caso anterior se trazan los paralelos de latitud

$$\varphi'_a = L \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{d - z}{2} \right)$$

y

$$\varphi''_a = L \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{180^\circ - (d + z)}{2} \right)$$

se tendrán los dos que comprenden la curva y los dos puntos de tangencia, el de la base B_2 , figura 1.293.XII, en el meridiano central, de longitud $\lambda = hG_\star$, y el segundo V_2 en el meridiano inferior de éste; o sea a los 180° o 12 H. La curva corta a todos los meridianos (invariancia de la intersección), y recordando el desarrollo de Mercator, se comprende fácilmente que en los puntos I e I' en los que corta a los de $P = 090^\circ$, cambia su curvatura, presentando, por lo tanto, un punto de inflexión. Su característica forma recuerda una senoide como se ve en la figura.

PRIMERA PROPIEDAD.- *El paralelo medio corta a la curva en los puntos de inflexión.*

En efecto, estos corresponden a un horario $P = \pm 090^\circ$, luego dándole a P estos valores en las ecuaciones (1.292.XII) y (2.292.XII) y sumándolas se obtiene,

$$\varphi_a = \frac{\varphi'_a + \varphi''_a}{2}$$

SEGUNDA PROPIEDAD.- *La curva es simétrica respecto al meridiano del astro y cada una de las dos ramas en que éste la divide, tienen simetría inversa con los meridianos de $P = 90^\circ$.*

La ecuación (1.296.XII) nos indica que para valores de P iguales y de distinto signo, Z toma valores iguales y del mismo signo que los de P , y sustituidos éstos en cualquiera de las ecuaciones (1.292.XII) o (2.292.XII), se tiene el mismo valor para el

logaritmo; luego la latitud aumentada φ_a siempre resulta la misma en cada par de meridianos equidistantes del central. Si damos valores a P, igualmente distanciados de los 90° , por ejemplo $90^\circ - \omega$ y $90^\circ + \omega$, la ecuación (1.296.XII) nos indica que los valores correspondientes de Z son iguales; y sustituyendo en la (1.292.XII) Z y $90^\circ - \omega$ y en la (2.292.XII) Z y $90^\circ + \omega$, resulta

$$\varphi_a = \varphi'_a + L \frac{\cos \frac{1}{2}(Z - 90^\circ + \omega)}{\cos \frac{1}{2}(Z + 90^\circ - \omega)} = \varphi'_a + L \frac{\cos \left(\frac{Z + \omega}{2} - 45^\circ \right)}{\cos \left(\frac{Z - \omega}{2} + 45^\circ \right)}$$

y,

$$\varphi_a = \varphi''_a + L \frac{\sen \frac{1}{2}(Z - 90^\circ - \omega)}{\sen \frac{1}{2}(Z + 90^\circ + \omega)} = \varphi''_a + L \frac{\sen \left(\frac{Z - \omega}{2} - 45^\circ \right)}{\sen \left(\frac{Z + \omega}{2} + 45^\circ \right)}$$

o sea

$$\varphi_a = \varphi'_a + L \frac{\sen \left(\frac{Z + \omega}{2} + 45^\circ \right)}{\sen \left(\frac{Z - \omega}{2} - 45^\circ \right)}$$

y,

$$\varphi_a = \varphi''_a + L \frac{\sen \left(\frac{Z - \omega}{2} - 45^\circ \right)}{\sen \left(\frac{Z + \omega}{2} + 45^\circ \right)}$$

y como los cocientes son inversos, sus logaritmos son iguales y de distinto signo; luego los puntos determinados equidistan de los paralelos extremos y, por lo tanto, del central.

TERCERA PROPIEDAD.- *En la carta la distancia desde el paralelo medio a uno de los paralelos límites, es igual al azimut máximo convertido en latitud aumentada.*

Llamando D a ésta distancia

$$D = \frac{1}{2} \left[\varphi_a \left(180^\circ - (d + z) \right) - \varphi_a (d - z) \right] = \frac{1}{2} L \frac{\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{180^\circ - d - z}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{d - z}{2} \right)}$$

o sea

$$D = \frac{1}{2} L \frac{\operatorname{cotg} \left(\frac{d - a}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{d + a}{2} \right)}$$

y de esta,

$$D = \frac{1}{2} L \frac{\cos a + \cos d}{\cos a - \cos d} = \frac{1}{2} L \frac{1 + \frac{\operatorname{sen} \Delta}{\operatorname{sen} z}}{1 - \frac{\operatorname{sen} \Delta}{\operatorname{sen} z}} = \frac{1}{2} L \frac{1 + \operatorname{sen} Z_M}{1 - \operatorname{sen} Z_M}$$

y finalmente,

$$D = \frac{1}{2} L \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{Z_M}{2} \right) = \varphi_a (Z_M)$$

CUARTA PROPIEDAD.- El horario puede tomar cualquier valor, el azimut máximo corresponde a los puntos $P = 90^\circ$, y la curva corta a todos los meridianos.

En la ecuación

$$\frac{\operatorname{sen} Z}{\operatorname{sen} P} = \frac{\operatorname{sen} \Delta}{\operatorname{sen} z}$$

siendo $z > \Delta$, se obtiene que,

$$\operatorname{sen} Z = k_0 \operatorname{sen} P$$

y como $k_0 < 1$, vemos que P puede adquirir todos los valores de 000° a 180° ; pero sen Z tiene un valor máximo limitado cuando $P = 90^\circ$ e igual al arco cuyo seno es k_0

QUINTA PROPIEDAD.- Todas las curvas comprendidas entre el mismo par de paralelos son superponibles.

Si d_a y z_a son las coordenadas características del astro A, y d_B y z_B son las del B, para que se cumpla la condición enunciada es necesario que para el paralelo de los vértices sea

$$d_A + z_A = d_B + z_B$$

y para el de las bases,

$$d_A - z_A = d_B - z_B$$

y por lo tanto

$$\Delta_A = \Delta_B \quad \text{y} \quad z_A = z_B$$

luego $k_{OA} = k_{OB}$. Así, si damos valores iguales a P en las ecuaciones (1.296.XII) de ambas curvas, se obtienen los mismos para Z, y, por lo tanto, la (1.292.XII) y (2.292.XII) nos dan las mismas coordenadas para cada curva, pero, naturalmente, referidas a distintos meridianos.

En las curvas de alturas iguales de tercera especie se tenía que $\Delta = z$, y la circunferencia de alturas iguales pasa por el polo. En la proyección de Mercator el paralelo de la base tendrá por latitud φ la aumentada correspondiente a $d - z$ y la del paralelo superior es ∞ , es decir, la aumentada de 90° , ya que

$$d + z = d + \Delta = 90^\circ$$

el triángulo de posición es siempre isósceles, y, por lo tanto, $P = Z$: luego la ecuación de la curva

$$\varphi_a = \varphi'_a + L \frac{\cos \frac{1}{2}(Z - P)}{\cos \frac{1}{2}(Z + P)}$$

se convertirá en

$$\varphi_a = \varphi'_a + L \frac{1}{\cos P} = \varphi'_a + L \sec P (*)$$

trazando en la carta el paralelo de latitud φ'_a y el meridiano del astro, su punto de corte será el correspondiente a la menor latitud y el punto de tangencia co la curva.

PRIMERA PROPIEDAD.- *La curva es simétrica respecto al círculo horario del astro.*

Dando a P valores iguales y de distinto signo en la ecuación (*), resultarán para el término logarítmico y, por lo tanto, para la coordenada φ_a los mismos valores.

SEGUNDA PROPIEDAD.- *La curva tiene como asíntotas los meridianos de $P = 90^\circ$.*

En efecto; dando valores de $\pm 90^\circ$ al horario P, la latitud aumentada φ_a resulta infinita, o sea, la curva alcanza el polo en los meridianos citados.

TERCERA PROPIEDAD.- *Los distintos observadores ven al astro con un horario y un azimut cualquiera, siempre iguales y menores de 90° .*

En la ecuación

$$\frac{\text{sen } Z}{\text{sen } P} = \frac{\text{sen } \Delta}{\text{sen } z}$$

puesto que $\Delta = z$, $\text{sen } Z = \text{sen } P$, la cual se satisface con todos los valores de Z y P iguales desde 000° a 360° . Pero P no puede ser mayor de 90° , porque entonces no se satisface la ecuación (*); luego Z ha de ser siempre menor de 90° . En resumen, la curva de alturas iguales de tercera especie es tangente al paralelo de la base en el meridiano central, presentando dos ramas hiperbólicas simétricas, crecientes, con su concavidad hacia el astro, que son tangentes a los meridianos de 90° en el infinito, en cuyo momento pasa por el polo.

PROPIEDADES COMUNES A LAS TRES CURVAS.- Del estudio de las tres curvas se concluye que *el astro queda en la concavidad de la curva con horarios menores de 90° y cuando es mayor en la convexidad.*

La tangente a la curva en un punto cualquiera es perpendicular al vertical del astro.

Derivando la latitud aumentada respecto del horario y recordando que:

$$\delta \varphi_a = \frac{\delta \varphi}{\cos \varphi} \quad \text{y} \quad \delta P = \frac{\delta \varphi}{\cos \varphi \operatorname{tg} Z}$$

luego,

$$\operatorname{tg} Z = \frac{\delta \varphi_a}{\delta P}$$

De aquí se deduce que Z es el ángulo que la tangente a la curva forma con el paralelo, y como el vertical forma el mismo ángulo con el meridiano, la tangente y el vertical son perpendiculares, de donde se deduce la importantísima propiedad¹ de que **el vertical es normal a la curva**.

Para el estudio del radio de curvatura de las curvas de alturas iguales partiremos de la fórmula

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}$$

que es la expresión general del radio de curvatura de una curva cualquiera. En nuestro caso,

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{\delta \varphi_a}{\delta P} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\delta^2 \varphi_a}{\delta P^2}}$$

pero

$$\frac{\delta \varphi_a}{\delta P} = \operatorname{tg} Z \quad \text{y} \quad \frac{\delta^2 \varphi_a}{\delta P^2} = \sec^2 Z \frac{\delta Z}{\delta P}$$

y como

¹ Propiedad que tiene una más simple explicación recordando que la proyección de Mercator es conforme, y siendo el vertical perpendicular a la circunferencia de alturas iguales, sus respectivas transformadas son perpendiculares.

$$\operatorname{sen} Z = \frac{\operatorname{sen} \Delta}{\operatorname{sen} z} \operatorname{sep} P$$

derivando tendremos

$$\cos Z \frac{\delta Z}{\delta P} = \frac{\operatorname{sen} \Delta}{\operatorname{sen} z} \cos P = \frac{\operatorname{sen} Z}{\operatorname{sen} P} \cos P$$

de donde

$$\frac{\delta Z}{\delta P} = \frac{\operatorname{sen} Z \operatorname{sec} Z}{\operatorname{tg} P}$$

valor que sustituido en la anterior nos dará

$$\frac{\delta^2 \varphi_a}{\delta P^2} = \sec^3 Z \frac{\operatorname{sen} Z}{\operatorname{tg} P}$$

y, por tanto,

$$\rho = \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 Z)^{\frac{3}{2}}}{\sec^3 Z \frac{\operatorname{sen} Z}{\operatorname{tg} P}}$$

que simplificada, finalmente nos da

$$\rho = \frac{\operatorname{tg} P}{\operatorname{sen} Z} \tag{1.303.XII}$$

Vemos, figura 1.304.XII, que el radio de curvatura ρ es máximo para $P = 90^\circ$, y mínimo cuando $P = 0$, de modo que la curvatura aumenta desde el mínimo cuando se observa el astro con horario local de 90° , hasta alcanzar su máximo valor en el meridiano. En la curva de primera especie en que P tiene valor limitado, sucede lo mismo a partir del máximo del horario, que se corresponderá con el azimut.

Vemos después de este estudio, y dado la imposibilidad práctica de obtener la situación observada por corte de las circunferencias de alturas iguales sobre la esfera, según se ha visto, que cabría contemplar la posibilidad de obtenerla por corte de las curvas de alturas iguales en la carta de Mercátor; tal posibilidad, también por razones

de índole práctica, es poco aceptable, pues el marino no dispone del tiempo preciso a bordo para los complicados cálculos necesarios para el trazado de tales lugares geométricos. La figura 1.295.XII muestra la solución del problema; en ella podemos ver las dos posibles soluciones del sistema y el trazado de las dos curvas por medio de un gran número de puntos cuyas coordenadas fueron debidamente calculadas. La carta es de tipo general y se comprende la poca precisión que se obtendría, pues la misma

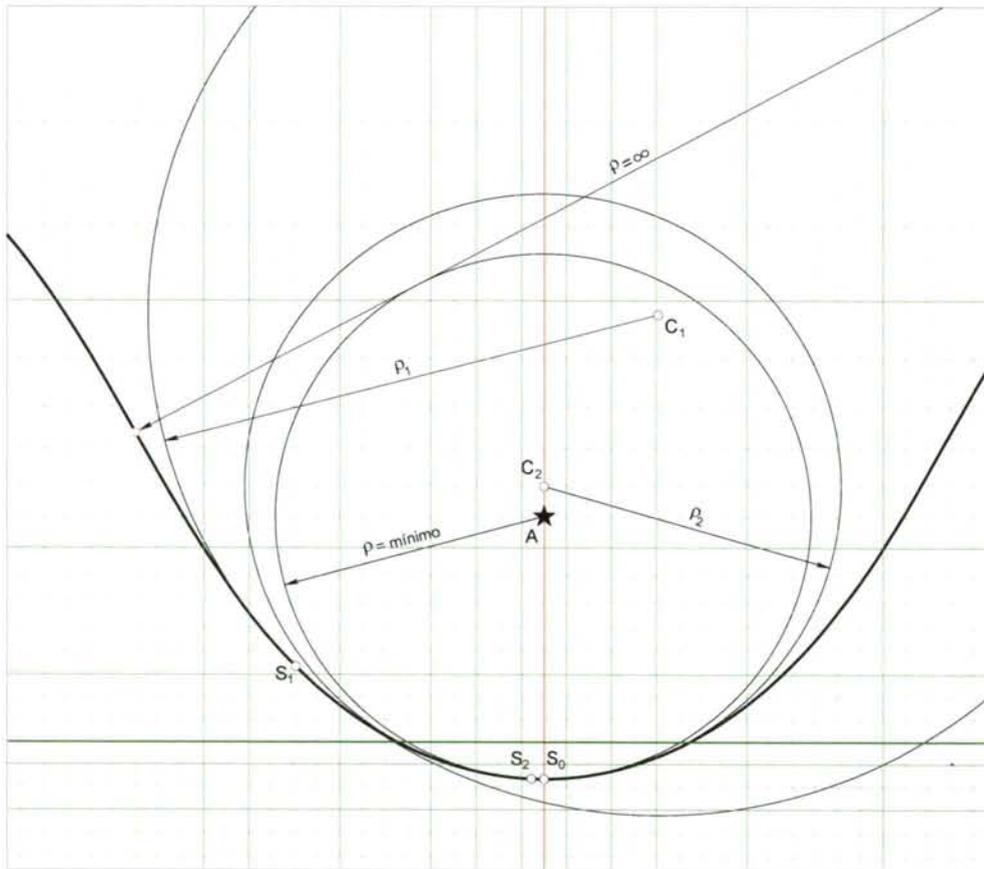


Figura - 1.304.XII - Círculos osculadores. Valores límites del radio p

situación sobre la carta de los puntos calculados, forzosamente sería aproximada, a pesar del rigor del cálculo; tal operación sería al final una lamentable pérdida de tiempo. La sustitución de la curva por el círculo osculador en un determinado entorno de la misma es otra de las posibilidades de solución práctica, para ello sería preciso hallar las coordenadas del centro de tal círculo osculador; el cálculo demuestra que estas coordenadas se deducen de las dos ecuaciones diferenciales siguientes:

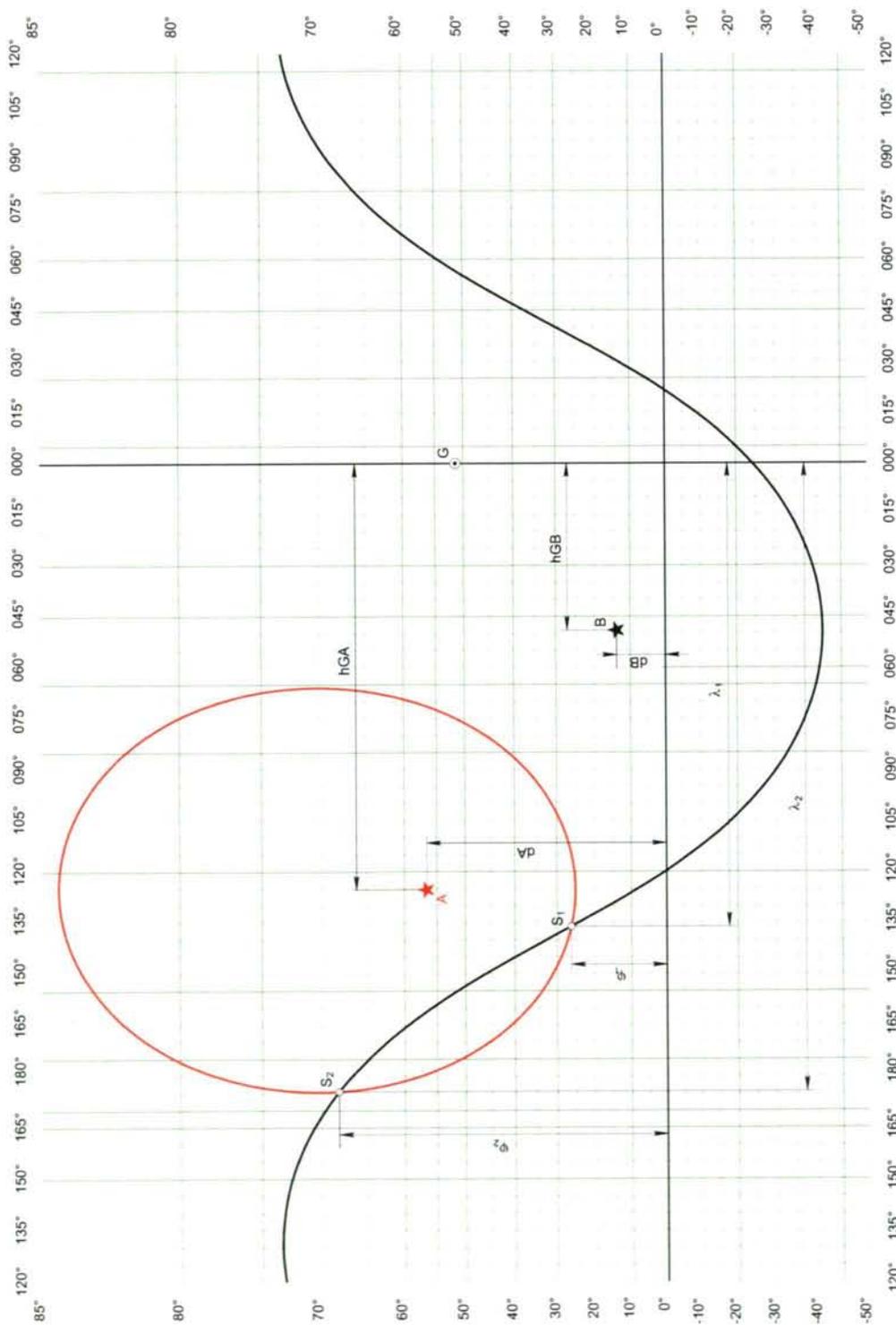


Figura - 1.305.XII - Situación por corte de curvas de alturas iguales

$$(P - \alpha) + (\varphi_a - \beta) \frac{\delta \varphi_a}{\delta P} = 0$$

y,

$$1 + \left(\frac{\delta \varphi_a}{\delta P} \right)^2 + (\varphi_a - \beta) \frac{\delta^2 \varphi_a}{\delta P^2} = 0$$

y como

$$\frac{\delta \varphi_a}{\delta P} = \operatorname{tg} Z$$

resulta

$$P - \alpha = \frac{1 + \left(\frac{\delta \varphi_a}{\delta P} \right)^2}{\frac{\delta^2 \varphi_a}{\delta P^2}} \frac{\delta \varphi_a}{\delta P}$$

es decir,

$$P - \alpha = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 Z}{\sec^2 Z} \frac{\operatorname{tg} Z}{\operatorname{tg} P}$$

y, por lo tanto,

$$P - \alpha = \operatorname{tg} P$$

finalmente,

$$\alpha = P - \operatorname{tg} P$$

Para hallar β :

$$\varphi_a - \beta = - \frac{1 + \left(\frac{\delta \varphi_a}{\delta P} \right)^2}{\frac{\delta^2 \varphi_a}{\delta P^2}}$$

de donde,

$$\varphi_a - \beta = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 Z}{\sec^2 Z} \frac{\operatorname{tg} Z}{\operatorname{tg} P}$$

y, así,

$$\varphi_a - \beta = - \frac{\operatorname{tg} P}{\operatorname{tg} Z}$$

de la que finalmente,

$$\beta = \varphi_a + \frac{\operatorname{tg} P}{\operatorname{tg} Z};$$

y si queremos expresarlos en millas, será:

$$\alpha = P - \frac{\operatorname{tg} P}{\operatorname{sen} 1'}$$

$$\beta = \varphi_a + \frac{\operatorname{tg} P}{\operatorname{tg} Z \cdot \operatorname{sen} 1'};$$

conocidos el centro y el radio queda determinado el círculo, pero tiene el inconveniente de que en la mayoría de los casos el radio de curvatura es muy grande, lo que de nuevo nos conduce a la necesidad de cartas generales para su resolución, con la consiguiente falta de precisión en los resultados. Cabe, no obstante, la posibilidad de una solución práctica basada en el trazado de un arco de curva en un entorno próximo al de la situación de estima, o, la del trazado de un arco del círculo osculador que sustituya a la curva en el mismo entorno. En el primer caso se calcularán las coordenadas de los puntos; en el segundo, se construye el arco de círculo por puntos, determinándolos por medio de un par de coordenadas $\{x,y\}$ cuyo origen es el punto O, ver figura 1.308.XII. Para su cálculo basta recordar que la cuerda es media proporcional entre la flecha y el diámetro; así que si llamamos c a la cuerda y f a la flecha de arco doble se tendrá,

$$c^2 = 2fp$$

de donde

$$f = \frac{c^2}{2p}$$

Los valores de f se encuentran tabulados en casi todas las colecciones de tablas náuticas, y entrando en ellas con el valor de p y las cuerdas de 10', 20', 30' etc. se tendrán los valores correspondientes de f . Para construir el círculo bastará hallar un punto de la curva, trazar por él una recta orientada

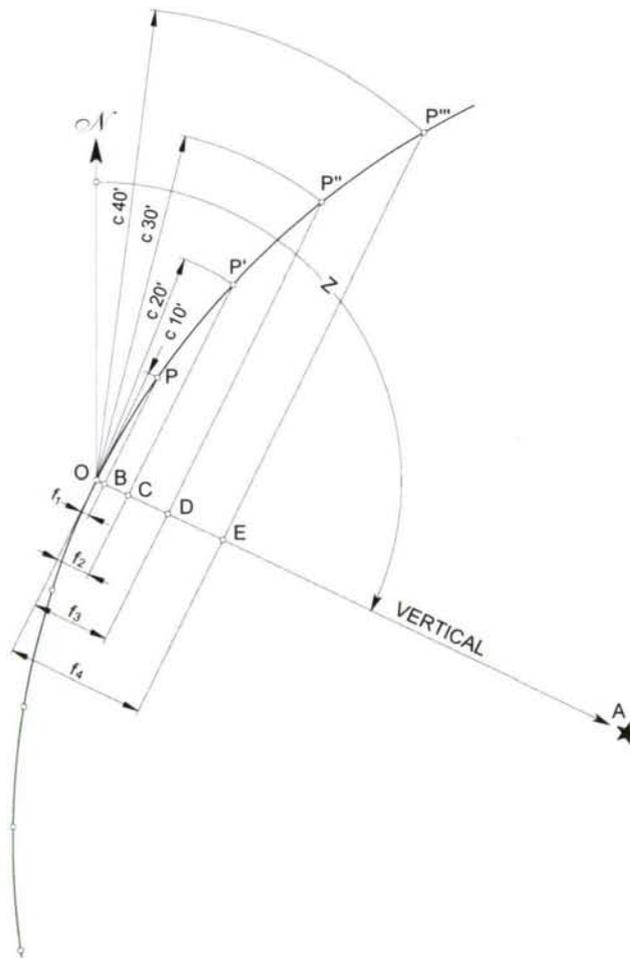


Figura - 1.308.XII - Trazado del círculo osculador

en la dirección del vertical del astro, azimut, tal como la OA, y, sobre ella, a partir del origen, llevar las magnitudes OB, OC, OD, OE etc. valores de la flecha f , por estos

puntos levantamos perpendiculares, y sus intersecciones con los arcos de centro O y radios 10', 20', 30' etc serán los puntos del círculo, que, unidos por medio de una plantilla y trazo continuo, nos materializarán el arco del círculo osculador que sustituye a la curva en las proximidades de la situación del buque, con tanta mayor exactitud cuanto más próximos sean los puntos así calculados.

En caso de que la curva fuera de primera especie, cabe la posibilidad de

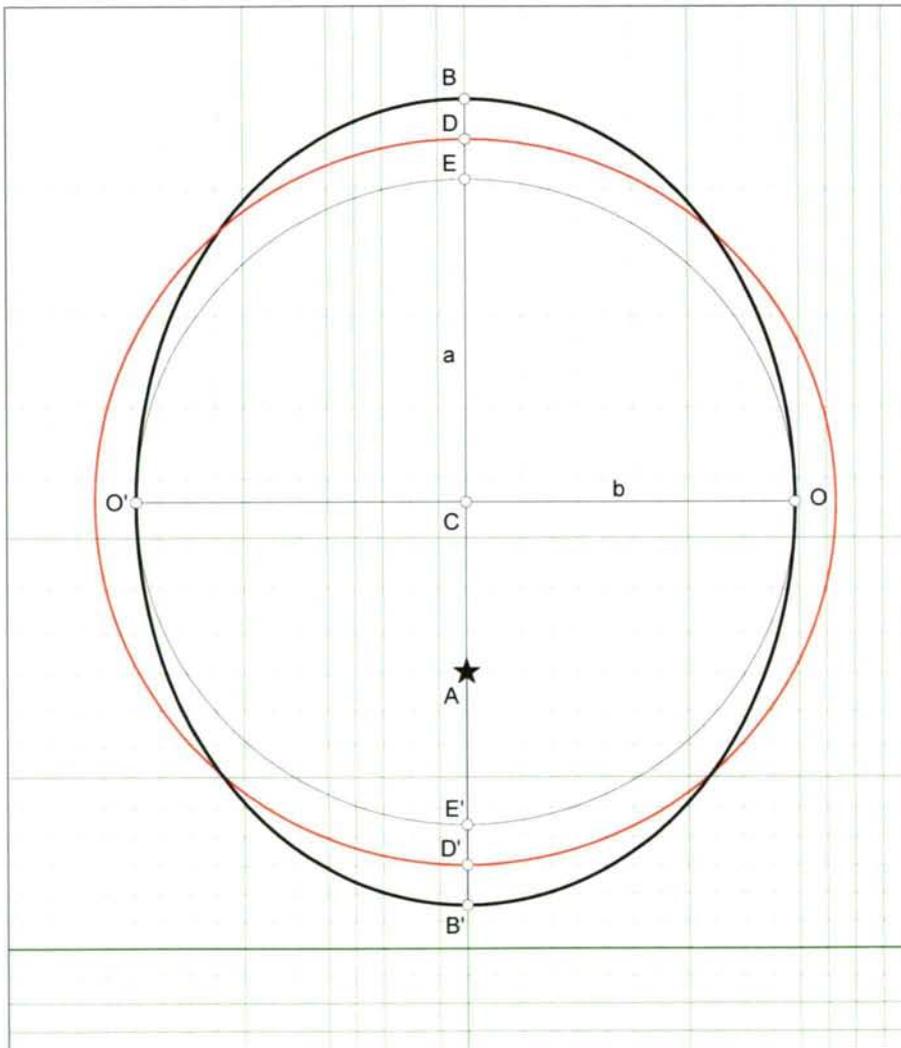


Figura - 1.309.XII - Sustitución por una circunferencia

sustitución de toda la curva por la circunferencia equivalente cuando la altura observada sea muy grande; el radio de tal circunferencia es la semisuma de los semiejes y su centro el mismo que el de la curva, tal como se muestra en la figura 1.309.XII. Esta sustitución será aceptable cuando el error que se comete no exceda el límite de 1',

cantidad asumida por la práctica náutica; la máxima distancia que separa a la curva de la circunferencia es la semidiferencia de los semiejes, y sabiendo que el semieje mayor es la latitud aumentada del menor, si se busca en las tablas la latitud aumentada cuya diferencia con la verdadera es una milla, (véase en la figura de la página 311 la solución gráfica de la ecuación $\varepsilon = \varphi_a - \varphi$), vemos que esto sucede para una latitud de unos 7° y, por lo tanto con cualquiera otra menor, de modo que para toda curva cuyo semieje es inferior a 7° , es decir, en el que el valor máximo del horario sea de 7° , es sustituible por una circunferencia. Este pequeño valor del horario exige la observación de astros cuya altura sea muy grande. La sustitución de la curva por la secante determinada por dos puntos cuyas coordenadas se obtienen por cálculo, o por la tangente en un punto y de cuyo estudio nos ocupamos seguidamente, es la única alternativa que ha dado resultados prácticos.

3. LA RECTA DE ALTURA. — La sustitución del arco de curva de alturas iguales por una recta secante o tangente era un procedimiento desconocido hasta su descubrimiento en 1837 por un marino de 30 años de edad, el Capitán Thomas H. Sumner, graduado en Harvard e hijo de un congresista de los Estados Unidos por Massachusetts. El descubrimiento de la “*Secante Sumner*” como es conocida, fue considerada por Maury “el comienzo de una nueva era en la práctica de la navegación”. En palabras del propio Sumner, el hallazgo tuvo lugar de la siguiente forma:

“Havig sailed from Charleston, S.C., 25th November, 1837, bound to Greenock, a series of heavy gales from the Westward promised a quick passage; after passing the Azores, the wind prevailed from Southward, with thick weather; after passing Longitude 21° W., no observation was had until near the land; but soundings were had not far, as was supposed, from the edge of the Bank. The weather was now more boisterous, and very thick; and the wind still Southerly; arriving about midnight, 17th December, within 40 miles, by dead reckoning, of Tusker light; the wind hauled S.E., true, making the Irish coast a lee shore; the ship was then kept close to the wind, and several tacks made to preserve her position as nearly as possible until daylight; when nothing being on sight, she was kept on E.N.E. under short sail, with heavy gales; at about 10 A.M. an altitude of the sun was observed, and the Chronometer time noted; but having run so far without any observation, it was plain the Latitude by dead reckoning was liable to error, and could not entirely relied on.

“Using, however, this Latitude, in finding the Longitude by Chronometer, it was found to put the ship 15' of Longitude, E. From her position by dead reckoning; which

in latitude 52° N. Is 9 nautical miles; this seemed to agree tolerably well with the dead reckoning; but feeling doubtful of the Latitude, the observati3n was tried with a Latitude $10'$ further N., finding this placed the ship E.N.E. 27 nautical miles, of the former position, it was tried again with a Latitude $20'$ N. of dead reckoning; this also placed the ship still further E.N.E., and still 27 nautical miles further; these three positions were then seen

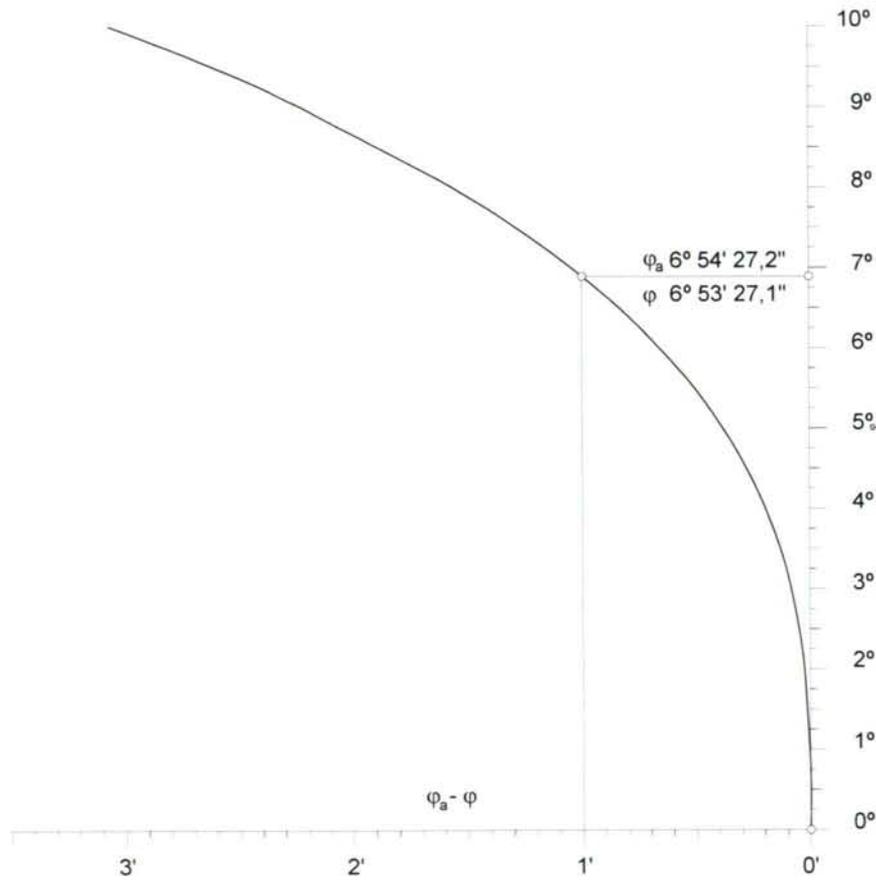


Figura - 1.311.XII - Latitud para la que $\varphi_a - \varphi = 1'$

to lie in the direction of Small's light. It then at once appeared that the observed altitude must have happened at all the three points, and at Small's light, and at the ship, at the same instant of time, and it followed, that Small's light must bear E.N.E., if the Chronometer was right. Having been convinced of this truth, the ship was kept on her course, E.N.E., the wind being still S.E., and in less than an hour, Small's light was made bearing E.N.E. $\frac{1}{2}$ E., and close aboard."

En 1843 Sumner publicó su libro **A New and Accurate Method of Finding a**

Shp's Position at Sea by Projection on Mercator's Chart que tuvo un gran recibimiento y aceptación.

La recalada del Capitán Sumner, figura 1.312.XII, modelo de espíritu analítico y sólida formación fue, en pocas palabras, como sigue; presumiendo la fiabilidad de la hora del cronómetro y en la sospecha de que la latitud de estima no habría de darle una longitud satisfactoria, después de calcular una primera longitud en base a su situación

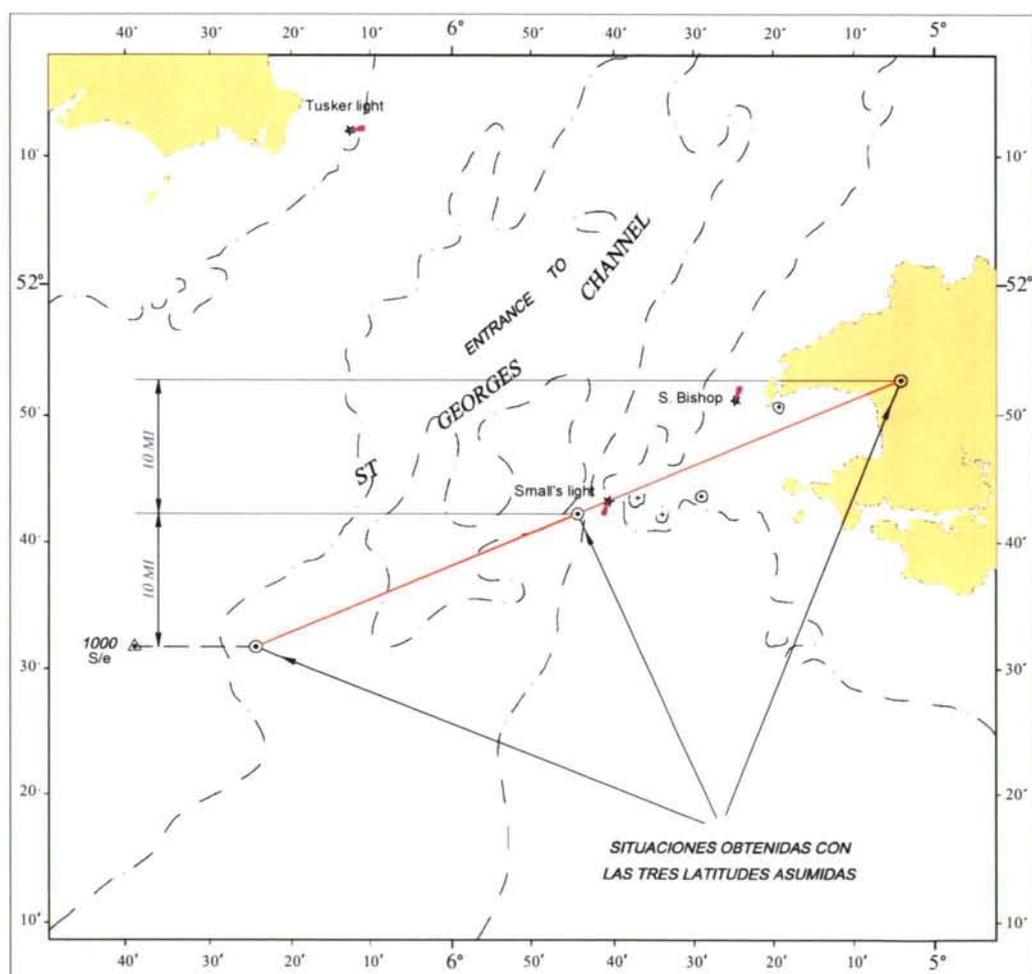


Figura - 1.312.XII - La primera secante del Capitán Sumner, 17.12.1837

de estima, supuso un error de 10' en la latitud calculando un nuevo horario del Sol y fijando el punto en la carta; repitió el cálculo asumiendo un nuevo error de 10' más al norte y fijó en la carta el punto calculado; los tres puntos hallados quedaban en una línea recta que pasaba por el faro de Small's light, y en la hipótesis de que tal línea contenía la situación del buque, mantuvo su derrota al rumbo de ésta línea, al cabo de

poco tiempo el faro de Small's light apareció por su amura de estribor: la recta de altura hizo así su aparición revolucionando la navegación astronómica y relegando los viejos métodos a los archivos de la historia. La curva de alturas iguales había sido sustituida por una línea recta, procedimiento de cuyo estudio se ocupan las páginas que siguen.

4. SUSTITUCIÓN DEL ARCO DE CURVA POR UNA RECTA. — Dado que la sustitución de la curva por el círculo osculador resulta muy limitada en su más sencillo procedimiento y poco práctica fuera de las circunstancias especiales de la de primera especie, con alturas próximas al zenit y en bajas latitudes, es necesario encontrar otros lugares geométricos de más fácil trazado, y, al efecto, ninguno más apropiado que la recta, que, al ser ya empleada por el Capitán Sumner, inició el estudio de las curvas y estableció el punto de partida de los que han dado en llamarse, hace ya años, nuevos métodos de navegación, que en rigor solo tiene de nuevo el perfecto conocimiento teórico, lo que no es poco, de lo que antes se hacia de manera rutinaria.

5. SEPARACIÓN ENTRE LA RECTA Y LA DE CURVA. — Al igual que en el caso del círculo osculador, la recta podrá sustituir a la curva cuando la máxima separación entre ambas sea inferior al límite de exactitud establecido. Las rectas empleadas son la secante y la tangente, y tanto una como otra no deben distar de la línea de posición teórica, curva de alturas iguales, más que una fracción de milla, si se desea que representen con este error el lugar geométrico del navegante. Es sabido que el círculo osculador, en la práctica, se confunde con la curva de alturas iguales en extensiones a veces superiores a las 400 millas². Consideremos, pues, como representación de la curva este círculo osculador cuyo radio es fácilmente calculable en función del horario y azimut del astro. Tracemos la secante SS' , figura 1.314.XII, y la tangente TT' ; como no es preciso el trazado de todo el lugar geométrico, sino únicamente el segmento que contiene al observador, es indudable que si encontramos una recta que prácticamente se confunda con la curva en la extensión del segmento señalado, habremos conseguido nuestro objetivo, y como tanto la tangente como la secante distan de la curva, como máximo, la magnitud x , si esta es despreciable, la sustitución será factible. Su valor, llamando c a la cuerda

² El astrónomo Antoine Joseph Francois Yvon-Villarceau, fué el primero en estudiar en profundidad las curvas de alturas iguales, y a él se debe su descubrimiento. Este autor fue ya citado en el estudio del cálculo de la latitud, junto con Magnac. Es autor del "Tratado de la Nueva Navegación Astronómica"

$$\frac{2\rho - x}{\frac{c}{2}} = \frac{\frac{c}{2}}{x}$$

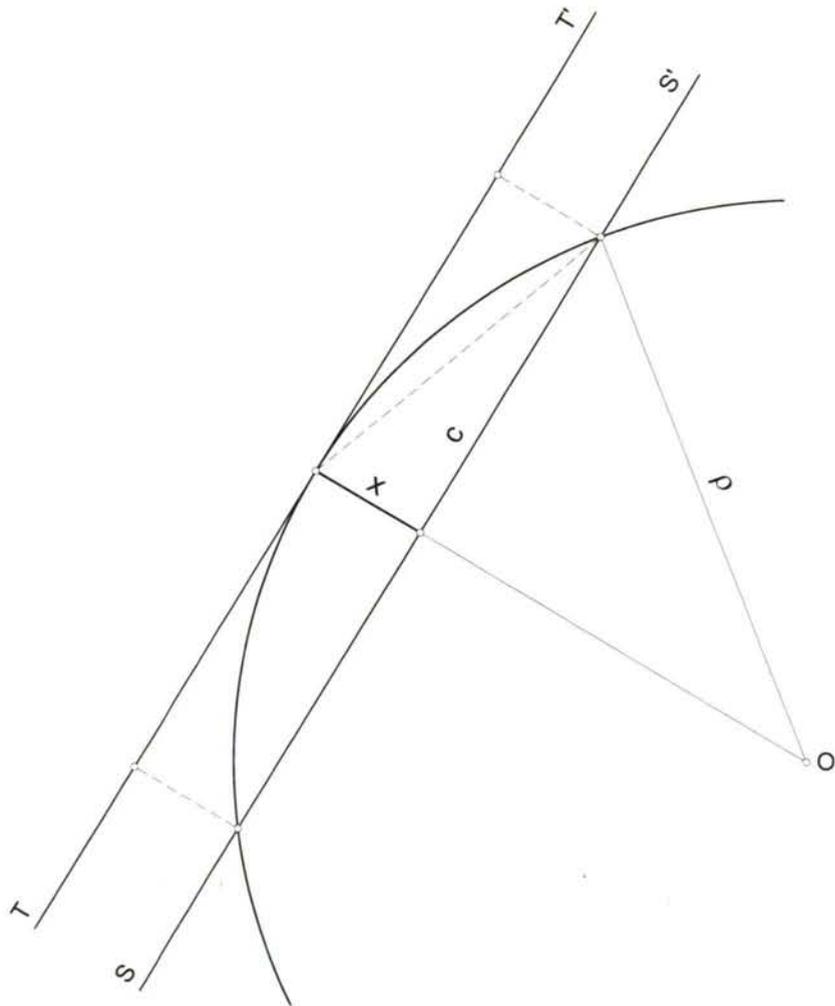


Figura - 1.314.XII - Separación entre curva y secante o tangente

de la que

$$2\rho x - x^2 = \frac{c^2}{4}$$

y para el menor valor de x se tiene,

$$x = \rho - \sqrt{\rho^2 - \frac{c^2}{4}} \quad (1.315.XII)$$

y si queremos que esta cantidad venga expresada en millas, será preciso que ρ y c también lo estén; por lo tanto bastará multiplicar ρ , expresado en radianes, por 3438, y resultará

$$x' = 3438 \rho - \sqrt{11819844 \rho^2 - \frac{c^2}{4}}$$

valores que se encuentran tabulados para una más rápida y segura solución del problema [Paredes-Barbudo. 54] entre otras.

Conviene tener presente que mientras más pequeño sea el radio de curvatura, menor resultará la extensión del segmento de recta que sustituye al arco de curva. Así para un radio de 480', asumiendo una separación máxima de 1', el segmento de recta sustituye a la curva en un arco de unas 62'. Si, para el mismo valor de x , el radio ρ es de 1400', la extensión del segmento de recta será 106'.

6. TRAZADO DE LAS RECTAS DE ALTURA. — Una vez convencidos de la posibilidad de sustitución del arco de curva de alturas iguales por el segmento de recta secante o tangente, sin incurrir en mayor error que el máximo asumido, media o una milla, cantidades generalmente tolerables en la navegación de altura, nada más sencillo que el trazado de éstas líneas de posición. Para la secante se hallarán dos de sus puntos, análogamente a como lo hizo Sumner; para la tangente, un punto y el rumbo de la recta, y en ambos casos queda ésta determinada. A estos puntos que fijan su posición se les llama determinantes, y a las rectas, **rectas de altura**.

7. SECANTE DE ALTURA. — Para hallar los determinantes de la secante, no tenemos más que resolver dos veces la ecuación del círculo de alturas,

$$\text{sen } a = \text{sen } \varphi \text{ sen } d + \text{cos } \varphi \text{ cos } d \text{ cos } (h_G - \lambda)$$

En ella, y dependiendo de la posición del astro respecto del observador, se fijarán dos latitudes o dos longitudes, para obtener dos longitudes o dos latitudes, disponiendo así de las coordenadas de los dos puntos determinantes de la secante. En general, este

procedimiento fue empleado en observaciones con el astro próximo al vertical primario, y dando incrementos de $\pm 30'$ a la latitud de estima se obtenían dos horarios, y, por lo tanto, dos longitudes. La marcha general de cálculo y trazado era la que sigue:

$$\left. \begin{aligned} \cos hl_1 &= \text{sen } a \sec (\varphi_e + \Delta \varphi) \sec d - \text{tg} (\varphi_e + \Delta \varphi) \text{tg } d \\ \cos hl_2 &= \text{sen } a \sec (\varphi_e - \Delta \varphi) \sec d - \text{tg} (\varphi_e - \Delta \varphi) \text{tg } d \end{aligned} \right\}$$

de éstas

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= hG - hl_1 \\ \lambda_2 &= hG - hl_2 \end{aligned} \right\}$$

Las coordenadas de los puntos P_1 y P_2 , determinantes de la secante son,

$$\left. \begin{aligned} P_1 &\rightarrow [(\varphi_e + \Delta \varphi), \lambda_1] \\ P_2 &\rightarrow [(\varphi_e - \Delta \varphi), \lambda_2] \end{aligned} \right\}$$

procediéndose al trazado de la línea de posición, tal y como se muestra en la figura 1.317.XII. Cuando la observación se lleva a cabo con el astro cerca del meridiano, la longitud de los determinantes resulta incierta porque el ángulo de corte de la curva con el paralelo es demasiado agudo, calculándose entonces las latitudes de aquellos,

$$\left. \begin{aligned} \text{tg } \alpha_1 &= \cos hl_1 \cotg d \\ \text{sen} (\varphi_1 + \alpha_1) &= \text{sen } a \text{ cosec } d \cos \alpha_1 \\ \text{tg } \alpha_2 &= \cos hl_2 \cotg d \\ \text{sen} (\varphi_2 + \alpha_2) &= \text{sen } a \text{ cosec } d \cos \alpha_2 \end{aligned} \right\}$$

y las coordenadas de los puntos determinantes P_1 y P_2 son,

$$\left. \begin{aligned} P_1 &\rightarrow [\varphi_1, (\lambda_e + \Delta \lambda)] \\ P_2 &\rightarrow [\varphi_2, (\lambda_e - \Delta \lambda)] \end{aligned} \right\}$$

trazándose la secante de altura tal como se muestra en la figura 1.318.XII.

8. LA TANGENTE DE ALTURA Y SUS DETERMINANTES. — Ya se ha visto que la tangente queda determinada por un punto y su dirección. Ésta se obtiene por

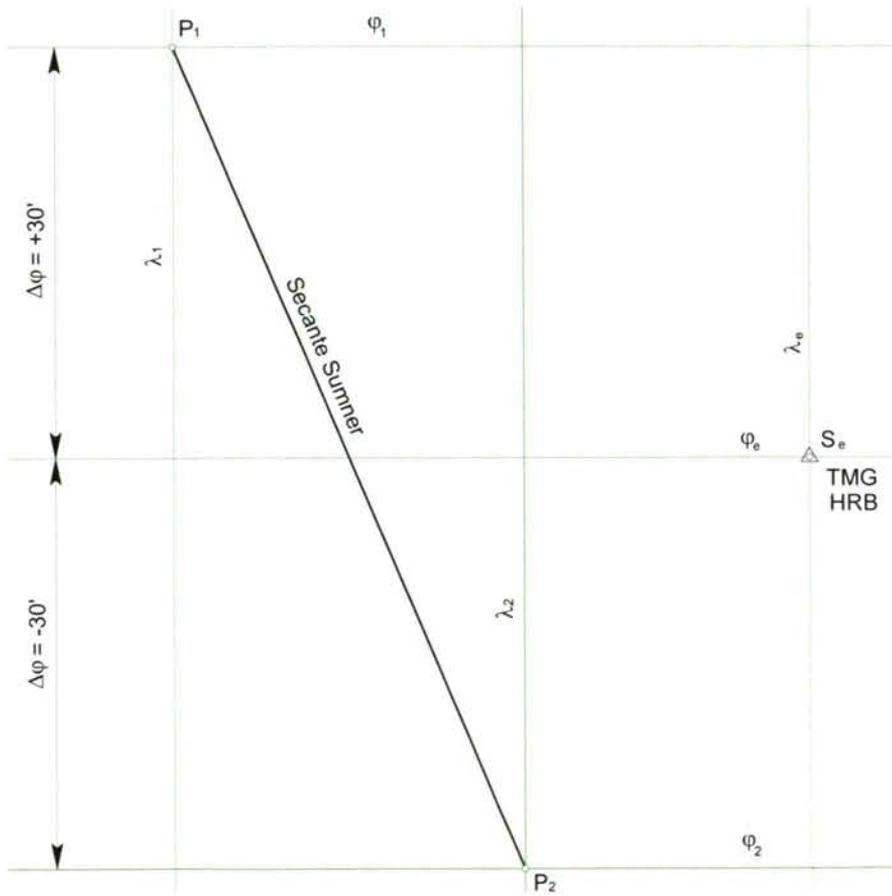


Figura - 1.317.XII - Trazado de la secante Sumner

medio del azimut calculado por fórmula o tablas, y, excepcionalmente, marcando el astro. El punto determinante puede hallarse por los tres diferentes procedimientos que seguidamente analizamos. El primero de ellos, J, figura 1.319.XII, fue propuesto en Inglaterra por Johnson³, es muy similar al de Sumner y consiste en hallar el punto de

³ Johnson. Alfred Ch. Oficial de la Marina inglesa, nacido en 1828 y muerto en 1909. Con el título de "Master of Arts" ingresó en la Armada en 1855 como Instructor naval. Su producción científica, además de numerosos artículos en diferentes revistas científicas y profesionales, alcanza publicaciones como "On finding the latitude and longitude in cloudy weather" entre otras.

corte del paralelo de estima con el círculo de alturas iguales; el segundo, B, conocido como determinante tipo Borda, resulta de la intersección del meridiano de estima con el círculo de alturas iguales, y el tercero, debido a Marcq Saint-Hilaire⁴ y por ello conocido como determinante tipo Saint-Hilaire, es el de corte del vertical de estima con el círculo de alturas iguales. Todos ellos son adecuados para obtener el lugar geométrico del observador, si la tangente no se aparta de la curva de alturas iguales

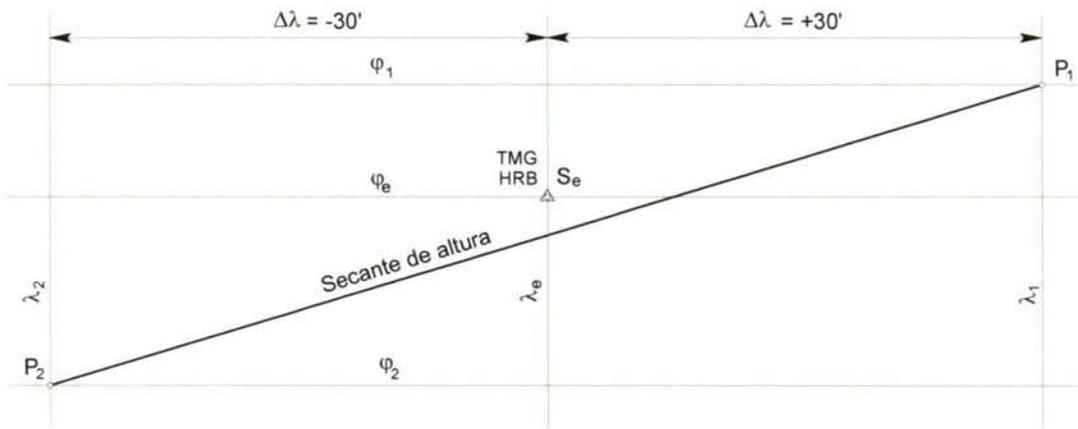


Figura - 1.318.XII - Secante de altura: Determinantes por longitud

más que el límite asumido e navegación; pero de todos ellos reúne ventajas incuestionables, que posteriormente se analizarán, el tercero, quedando los otros relegados al ámbito de estudios teóricos. Si la latitud empleada en el cálculo del determinante tipo Johnson fuera la que verdaderamente ocupa el buque, la longitud calculada, haciendo abstracción de cualquier otro tipo de error, sería, a su vez, la verdadera y, por lo tanto, ambas coordenadas corresponderían a la situación real del buque; pero no siendo en general así, al trazar la tangente con un determinante deducido de la latitud de estima que tiene un cierto error $\pm \varepsilon\varphi$, figura 1.320.XII, se obtendrían como situación del buque los puntos S'_o y S''_o intersecciones de la recta de altura con el paralelo verdadero, y que distan de las situaciones verdaderas S'_v y S''_v tanto más cuanto más próximo al meridiano se encuentre el astro observado, por ello, las circunstancias más favorables para el empleo de este determinante será cuando el astro corte al vertical primario, porque entonces el punto obtenido dista muy poco del

4 Marcq Saint Hilaire, Adolphe-Laurent-Anatole. Marino francés que se distinguió por sus notables trabajos sobre Navegación Astronómica. Nacido el 29.7.1832 y muerto el 30.12.1889. En 1837 publicó el trabajo "Determinación de una recta de altura por una sola observación" y en febrero de 1875 su "Cálculo del punto observado. Método de las alturas estimadas" que le dió fama mundial y que sigue utilizándose todavía.

verdadero.

Si el determinante es de tipo Borda, figura 1.321.XII, por la intersección del meridiano de estima con la curva de alturas iguales, para un mismo error en la longitud $\pm \varepsilon \lambda$, el punto obtenido resulta tanto más cercano al verdadero cuanto más próximo al meridiano esté el astro observado. Para el determinante tipo Marcq de Saint-Hilaire,

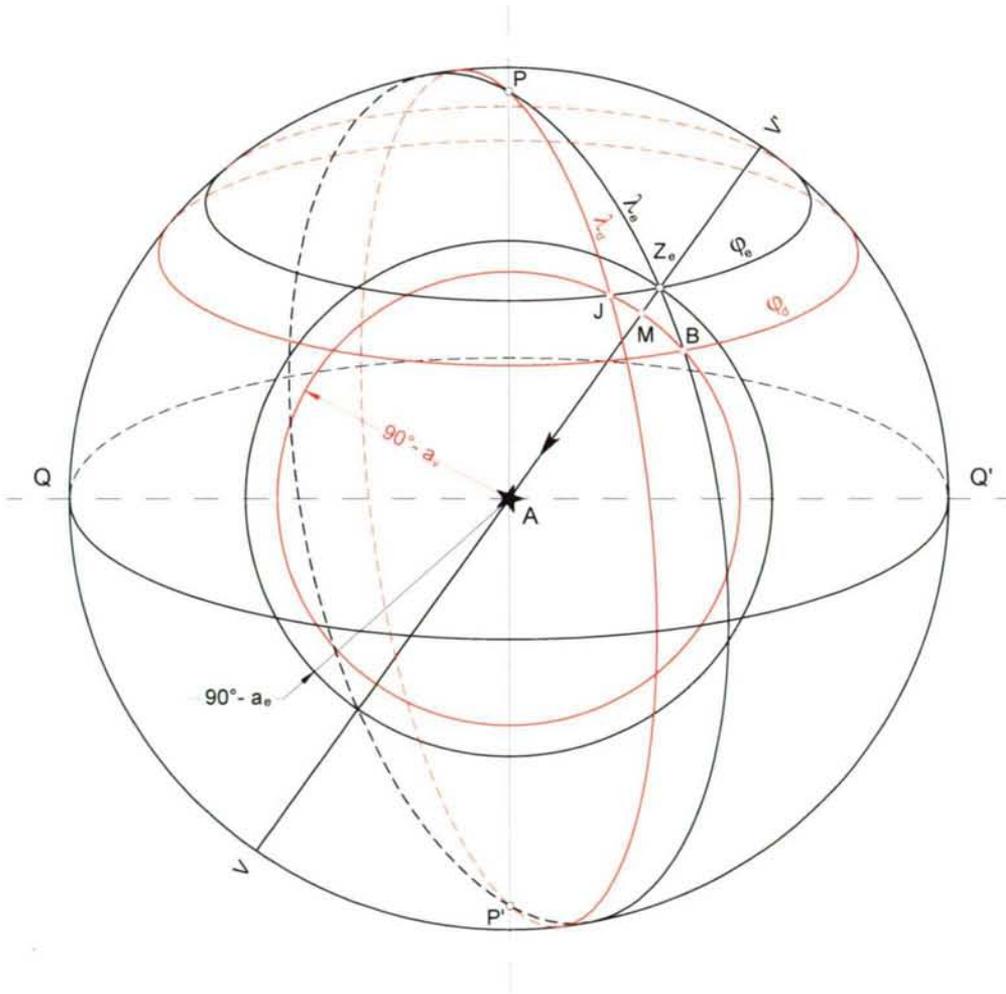


Figura - 1.319.XII - Diferentes puntos determinantes

intersección del vertical del punto de estima con la curva, no tienen la misma influencia los errores de la estima, pues si haciendo centro en la situación de estima se traza un arco de radio igual al máximo error asumido en esta situación, necesariamente el buque se encontrará en un punto del arco de la curva de alturas iguales interceptado por la circunferencia de error máximo, figura 1.322.XII; asimismo, el punto Marq ha de estar forzosamente ubicado en dicho arco, y es siempre el más ventajoso para el trazado de

la recta por las siguientes razones.

Su distancia a la verdadera situación del buque es siempre menor que la de estima.

Cualquiera que sea el azimut del astro, el determinante queda claramente definido.

Para un error en la altura el error en este determinante resulta menor que en los otros dos, en el peor de los casos, igual.

Las circunstancias de cálculo y trazado son siempre óptimas.

Por todo lo expuesto, cuando el navegante dispusiera de una sola observación, podrá

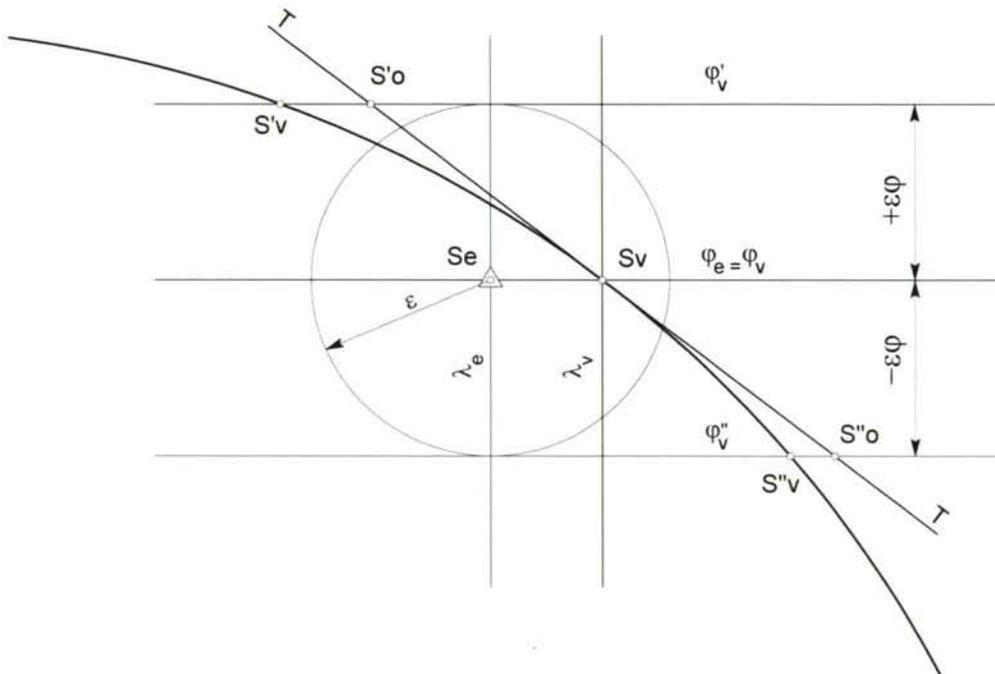


Figura - 1.320.XII - Inconvenientes del determinante tipo J

tomar como coordenadas las del determinante de Saint-Hilaire, que, como se ha dicho, son las más aproximadas a la situación verdadera del buque, de aquí que a tal punto se le conozca por punto aproximado, y a la operación consistente en asumir tales coordenadas, rectificación del punto de estima; y a la situación con estas coordenadas, situación rectificada. Para el cálculo y trazado de la recta de altura por el método de Marcq de Saint-Hilaire se procede del modo siguiente: Una vez observada la altura del astro y anotada la hora del cronómetro, se deduce la del primer meridiano y se corrige la altura pasándola a verdadera. Se calcula la altura correspondiente al punto de estima, es decir, la altura que el navegante hubiera obtenido como verdadera a la hora de la

observación, si su verdadera situación fuera la del punto de estima, (puede adoptarse una situación auxiliar, redondeando las coordenadas de estima al grado o medio grado próximo); recordemos que la fórmula a emplear es:

$$\text{sen } a_e = \text{sen } \varphi_e \text{ sen } d + \text{cos } \varphi_e \text{ cos } d \text{ cos } (hG - \lambda_e)$$

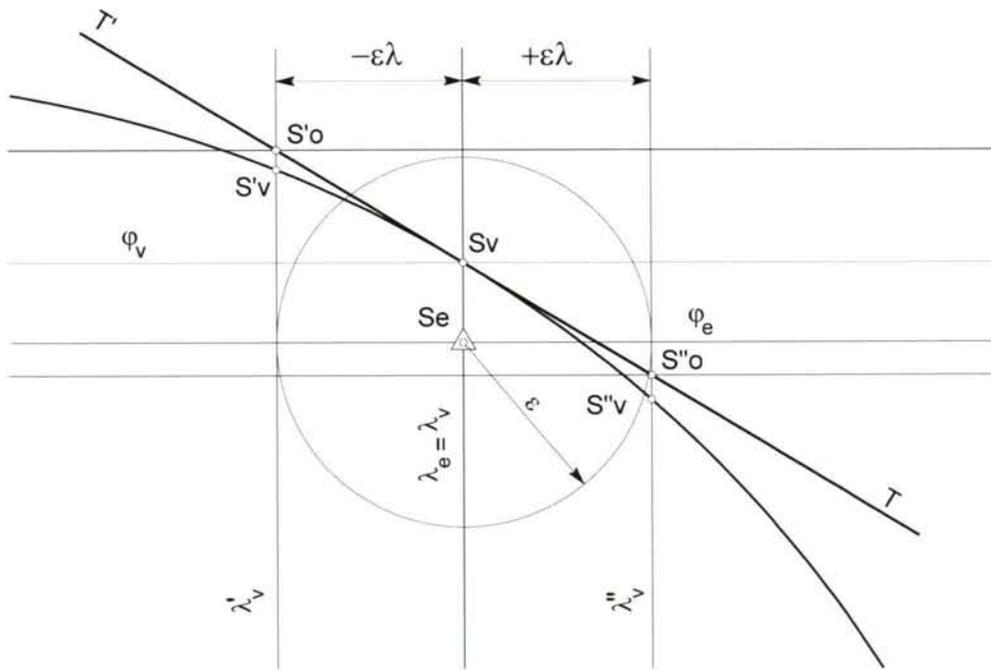


Figura - 1.321.XII - Desventajas del determinante tipo B

existiendo gran variedad de tablas rápidas para este cálculo, de cuyo manejo, por lo demás simple, no nos ocupamos. Se determina el azimut del astro correspondiente a la situación de estima, o auxiliar; las mismas tablas rápidas mencionadas nos dan el azimut, o se calcula por la fórmula

$$\text{cotg } Z_e = \text{cos } \varphi_e \text{ tg } d \text{ cosec } (hG - \lambda_e) - \text{sen } \varphi_e \text{ cotg } (hg - \lambda_e)$$

Calculamos la diferencia de alturas, que resulta ser la longitud del arco de vertical comprendido entre el círculo de alturas iguales correspondiente a la situación de estima y el círculo de alturas iguales verdadero, deducido de la observación,

$$\Delta a = a_v - a_e$$

si esta diferencia resulta positiva, el punto aproximado se encuentra en la dirección del azimut del astro, a la distancia Δa de la situación de estima; si es negativa, se encuentra en dirección opuesta al azimut y a esa distancia, Δa . Si es preciso, se traza la recta de altura, figura 1.323.XII; no disponiéndose de otra observación, se rectificará, si procede, el punto de estima:

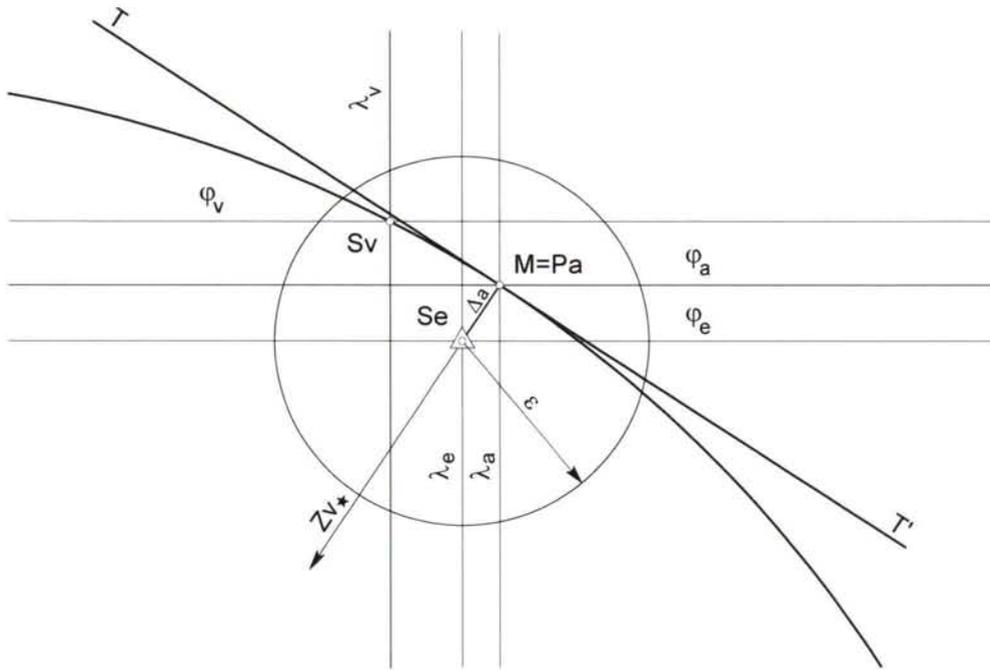


Figura - 1.322.XII - Ventajas del determinante M

$$\begin{array}{r}
 \varphi_e = \\
 \Delta\varphi = \\
 \varphi_r = \\
 \text{S/r a HRB:}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \lambda_e = \\
 \Delta\lambda = \\
 \lambda_r = \\
 (), \text{ HCG}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 R^0 = \pm Z \\
 d = \pm \Delta a \\
 A =
 \end{array} \right.
 \begin{array}{l}
 ()
 \end{array}$$

Siendo el vertical un círculo máximo de la esfera, su proyección en la carta no es una línea recta, propiedad que en la proyección de Mercator posee la loxodrómica, (los paralelos se representan por líneas rectas porque son loxodrómic, por lo tanto el ecuador, siendo un círculo máximo, también es una loxodrómica; igual sucede con los meridianos, aunque este punto es muy discutible), de manera que el punto aproximado que hallamos, intersección de la recta que idealiza el vertical con la curva

de alturas iguales, no es el verdadero, pues éste será la intersección de la proyección del vertical con dicha curva. El error cometido como consecuencia de ésta sustitución no es considerable, salvo que se navegue por altas latitudes y que la diferencia de alturas, Δa , sea muy grande. Yvon-Villarceau demostró que la separación entre el punto aproximado, tal como es usual trazar, y su verdadera posición, no supera la milla en las

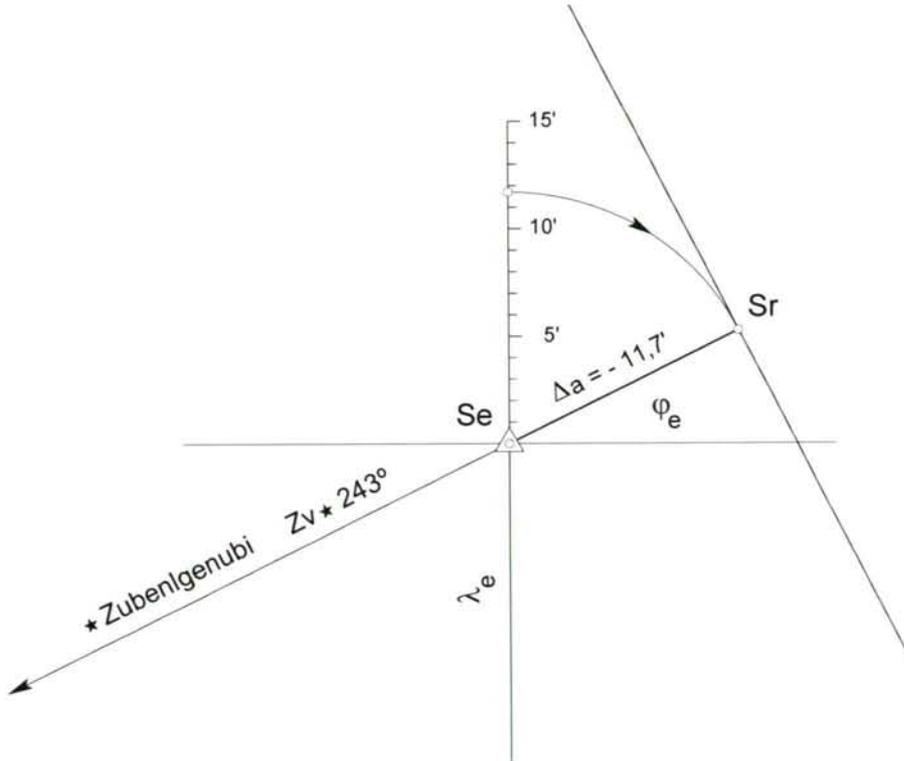


Figura - 1.323.XII - Tangente Marcq Saint Hilaire

condiciones que se reflejan en la tabla siguiente, y que debieran tenerse en cuenta para el trazado del punto:

φ	$\Delta a' <$	φ	$\Delta a' <$	φ	$\Delta a' <$
5°	280,3	30°	109,1	55°	69,4
10°	197,5	35°	99,1	60°	63,0
15°	160,2	40°	90,5	65°	56,6
20°	137,4	45°	82,9	70°	50,0
25°	121,1	50°	75,9	75°	45,5

9. ECUACIÓN DE LA RECTA DE ALTURA. — Si en la fórmula de la altura,

$$\text{sen } a = \text{sen } \varphi \text{ sen } d + \text{cos } \varphi \text{ cos } d \text{ cos } P$$

en la que el ángulo P representa el ángulo en el polo u horario local (en la misma expresión empleamos la notación h_l o $hG-\lambda$, indistintamente, dependiendo de la claridad expositiva y brevedad que se consideren oportunas; como es obvio, todas ellas hacen referencia al mismo elemento), se manejan las variables aproximadas φ y λ ; es preciso conocer las correcciones $\delta\varphi$ y δP , (la notación δ se usa para evitar la coincidencia con la variable d , declinación del astro, que por ser conocida a muy pequeños intervalos de tiempo, se considera constante), necesarias para obtener los valores exactos. Diferenciando [ASÍN-79] llegamos a

$$\text{cos } a \delta a = \delta\varphi (\text{cos } \varphi \text{ sen } d - \text{sen } \varphi \text{ cos } d \text{ cos } P) - \text{cos } \varphi \text{ cos } d \text{ sen } P \delta P$$

de esta,

$$\delta a = \delta\varphi \frac{\text{cos } \varphi \text{ sen } d - \text{sen } \varphi \text{ cos } d \text{ cos } P}{\text{cos } a} - \frac{\text{cos } \varphi \text{ cos } d \text{ sen } P}{\text{cos } a} \delta P$$

pero

$$\frac{\text{cos } \varphi \text{ sen } d - \text{sen } \varphi \text{ cos } d \text{ cos } P}{\text{cos } a} = \text{cos } Z$$

y en el triángulo de posición, por el teorema de los senos,

$$\text{sen } Z = \frac{\text{cos } d \text{ sen } P}{\text{cos } a}$$

sustituyendo convenientemente,

$$\delta a = \delta\varphi \text{ cos } Z - \delta P \text{ cos } \varphi \text{ sen } Z$$

y despejando $\delta\varphi$

$$\delta\varphi = \text{tg } Z \text{ cos } \varphi \delta P - \delta a \text{ sec } Z \tag{1.324.XII}$$

que es la ecuación buscada, referida al par de ejes coordenados que resultan de considerar el plano H_e tangente a la esfera en el zenit estimado, de forma que ambos ejes serán las intersecciones de dicho plano tangente con los planos del meridiano y del paralelo de estima. Los valores de Z son aproximados por serlo los términos φ y λ empleados en su cálculo, pero tal eventualidad no ocasiona errores apreciables en las rectas de altura; esta ecuación es la de una recta cuya normal forma con el eje de ordenadas un ángulo igual al azimut, pasando a una distancia δa del origen, ver figura 1.326.XII. Así, el zenit del observador se encontrará en tal recta de altura, pues recuérdese que este lugar geométrico no es más que un arco diferencial de la circunferencia de alturas iguales del astro observado. Las intersecciones de dos de estas rectas de altura nos darán un punto que es el zenit verdadero z_v , y por este punto deberán pasar todas las demás rectas de altura correspondientes a los astros observados. Por lo tanto, bastará que con la misma escala elegida para medir δz midamos δP y $\delta \varphi$ para obtener las correcciones que aplicadas a las coordenadas del punto de estima nos den las coordenadas de la situación observada. El valor medido sobre el eje de abscisas deberemos multiplicarlo por $\sec \varphi$ para obtener el arco sobre el ecuador, (relación entre el arco de paralelo, apartamiento entre meridianos en una latitud dada, y su correspondiente arco de ecuador). La recta de altura así estudiada es, como fácilmente se ve, independiente de la existencia de las curvas de alturas iguales, que, al fin y al cabo, no son más que una interpretación del problema en la proyección de Mercator. En proyección estereográfica, por ejemplo, tales curvas son simples circunferencias, excepto que el círculo de alturas iguales pase por el punto de vista, en cuyo caso, su proyección es una línea recta (propiedad del plano proyectante).

10. SITUACIÓN POR CORTE DE DOS O MÁS RECTAS DE ALTURA. — Se asume, en principio, que la observación de todas las alturas se produce de forma simultánea, cosa poco probable en la práctica. El determinante será, salvo a efectos de estudios teóricos, el de Saint-Hilaire; el proceso se repetirá para cada astro, calculando la altura estimada, diferencia de alturas y azimut para cada astro. Si se utilizan tablas náuticas para el cálculo de las alturas estimadas y alguna de ellas es muy grande, la función seno varía muy poco para valores del ángulo cercanos a los 90° y la altura resulta poco definida; es aconsejable en este caso el recurrir a la fórmula de Alessio⁵ que resuelve el problema por descomposición del triángulo de posición mediante el

⁵ Alessio .- Oficial de la Marina italiana. "Sulla teoria e la pretica della Nuova Navigazione astronomica"

perpendicular, la altura se obtiene por medio de la función tangente, que variando de $-\infty$ a $+\infty$, permite una mejor definición, ver figura 1.327.XII. En el triángulo de posición trazando el perpendicular desde el astro, queda dividido en los triángulos rectángulos APS y AzS; en el primero se tiene:

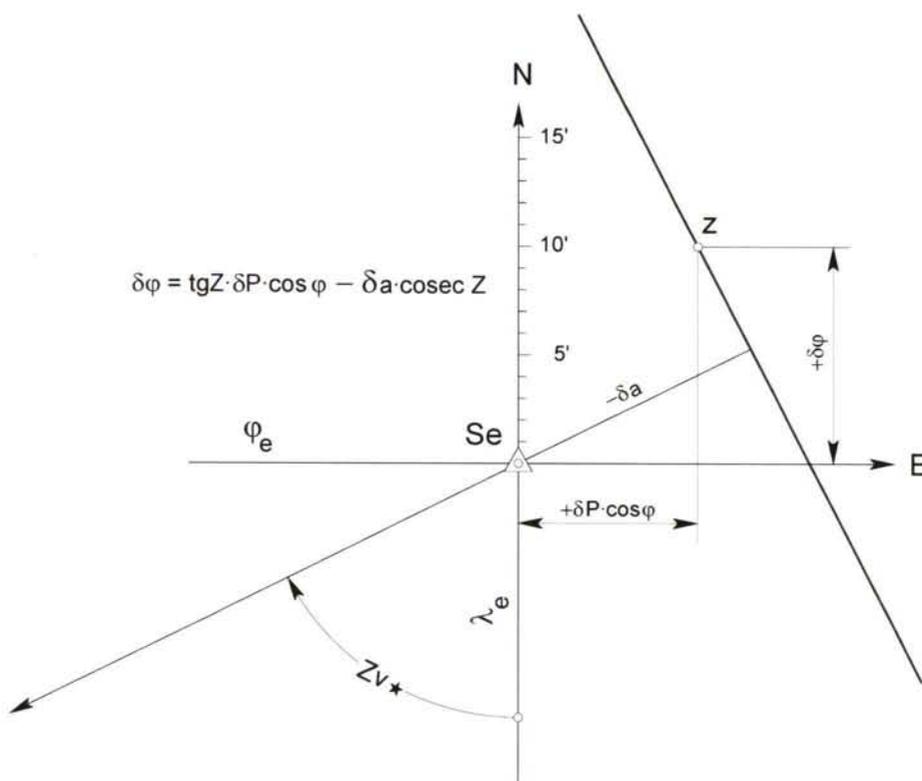


Figura - 1.326.XII - Ecuación de la recta de altura

$$\operatorname{tg} \omega = \cos P_e \operatorname{ctg} d \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} \zeta = \operatorname{tg} P \operatorname{sen} \omega$$

en las que ω y ζ son elementos auxiliares de cálculo. En el segundo,

$$\operatorname{tg} Z_e = \operatorname{tg} P_e \operatorname{sen} \omega \operatorname{sec}(\varphi_e + \omega) \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} a = \operatorname{tg}(\varphi_e + \omega) \cos Z_e$$

Es recomendable la comprobación de la bonanza de cada observación,

$$\operatorname{cosec} P_e \operatorname{sec} d \operatorname{sen} Z_e \cos a_e = 1$$

los subíndices e hacen referencia a datos y resultados dependientes de los d estima.

Una vez obtenidos todos los determinantes procederemos al trazado de las rectas de altura, cuyo punto de intersección, que en ausencia de errores debe ser único,

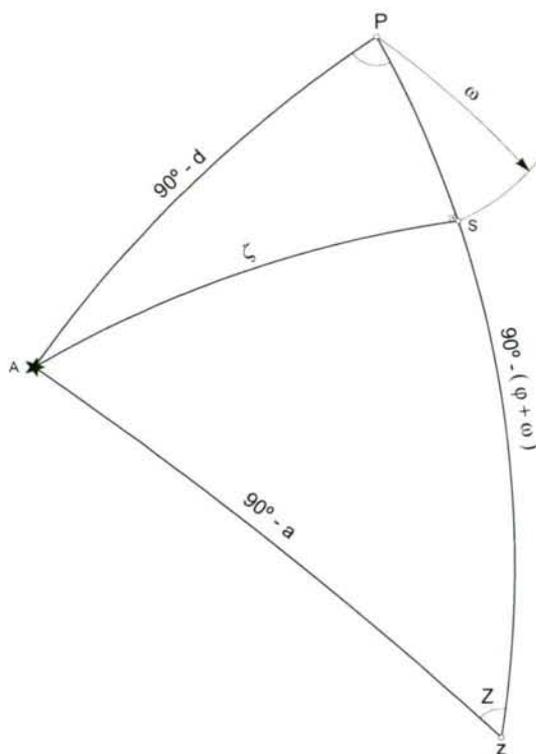


Figura - 1.327.XII - Método de Alessio

es la situación del buque, figura 1.328.XII.

Cuando las observaciones no son simultáneas, lo usual en la práctica, se recurre a dos procedimientos de solución. El primero consiste en trasladar la primera recta de altura (traslado del determinante), por rumbo y distancia, al tiempo de la segunda; si se observan más de dos se trasladan las primeras al tiempo de la última. Si el intervalo de tiempo que transcurre entre la primera y la última observación es del orden de algunos minutos, (tal como sucede en los crepúsculos), es más cómodo, seguro y rápido realizar esta operación gráficamente, una vez obtenido el determinante de cada recta con la hora y situación de estima correspondiente. Pero cuando las observaciones son al mismo astro, comúnmente las de Sol, pueden transcurrir hasta más de tres horas entre una y otra. Se hace preciso, pues, el estudio de los errores inherentes a dicho traslado, en orden a una correcta evaluación de la situación observada obtenida. El análisis que sigue se fundamenta en las razones que siguen: El navegante en la situación S_1 y a la

primera hora H_1 obtiene la recta de altura rectificando su situación de estima; con la velocidad V navega al rumbo R° durante el tiempo t la distancia m , hasta la hora H_2 , trazando en esta situación S'_2 la recta de altura. Si durante el tiempo navegado consideramos los errores α en el rumbo, y dm en la distancia navegada, el navegante debiera ocupar la posición S_2 , y la recta, debidamente trasladada, sería, en la figura, la roja; el error en el traslado es la magnitud ε cuya expresión vamos a determinar. Dada

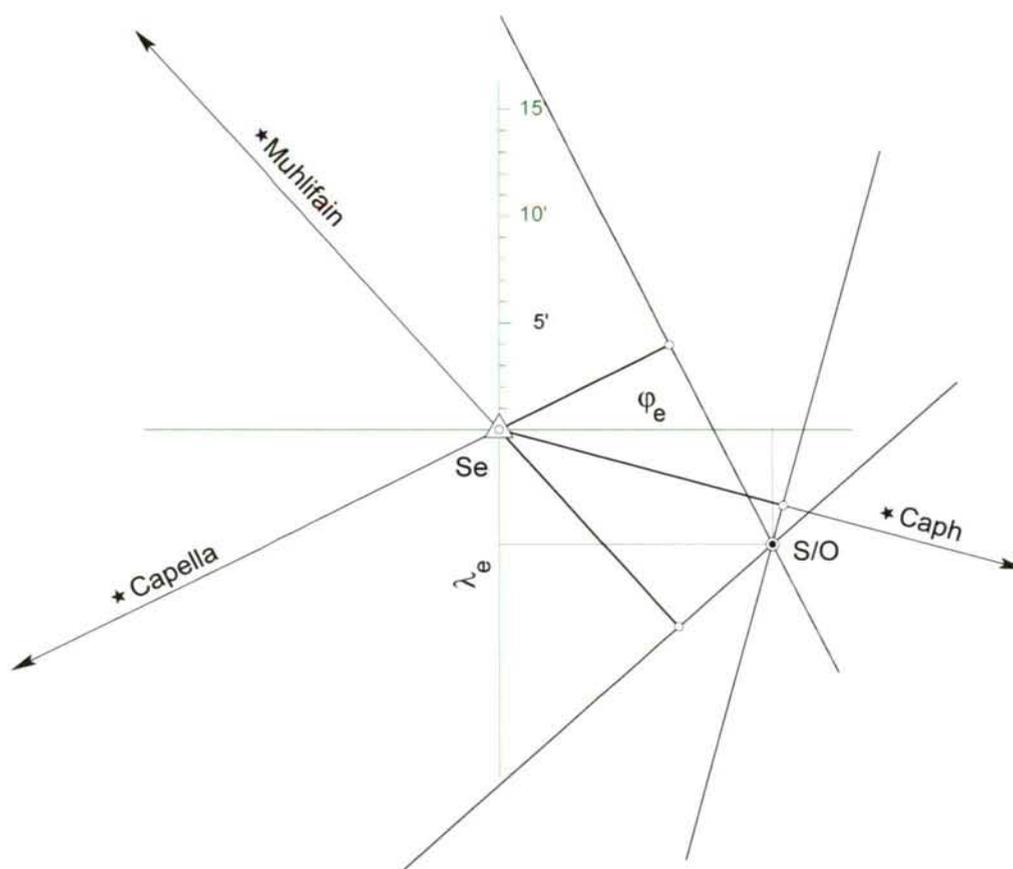


Figura - 1.328.XII - Situación por corte de tres rectas de altura simultáneas

la efectiva pequeñez del ángulo α , sin error sensible podremos considerar la existencia del triángulo rectángulo $S'_2 S_0 S_2$; el él se obtiene,

$$\text{sen } \beta = \frac{m \cdot \alpha}{\sqrt{dm^2 + m \cdot \alpha^2}} ; \quad \text{cos } \beta = \frac{dm}{\sqrt{dm^2 + m \cdot \alpha^2}}$$

En el triángulo rectángulo $S_2 TS'_2$, y siendo M la marcación del astro,

$$\varepsilon = \sqrt{m \cdot \alpha^2 + dm^2} \cdot \text{sen}(90^\circ + M - \alpha - \beta)$$

es decir,

$$\varepsilon = \sqrt{m \cdot \alpha^2 + dm^2} \cdot \text{sen}[90^\circ + (M - \alpha - \beta)]$$

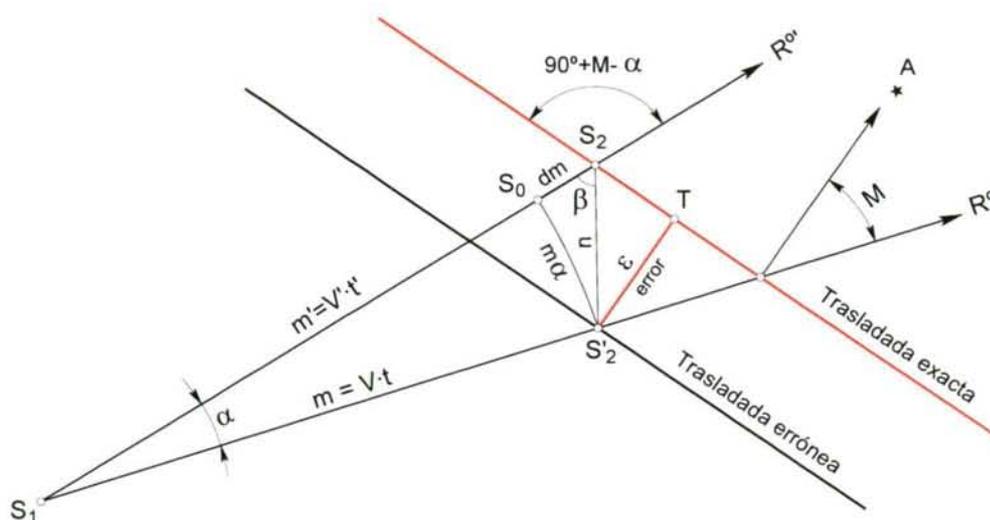


Figura - 1.329.XII - Error en el traslado de la recta de altura

o sea

$$\varepsilon = \sqrt{m \cdot \alpha^2 + dm^2} \cdot \text{cos}(M - \alpha - \beta)$$

o lo que es lo mismo,

$$\varepsilon = \sqrt{m \cdot \alpha^2 + dm^2} \cdot \text{cos}[(M - \alpha) - \beta]$$

Desarrollando el coseno de la diferencia, llegamos a

$$\varepsilon = \sqrt{m \cdot \alpha^2 + dm^2} \cdot [\text{cos}(M - \alpha) \cdot \text{cos} \beta + \text{sen}(M - \alpha) \cdot \text{sen} \beta]$$

sustituyendo los valores de $\text{sen} \beta$ y $\text{cos} \beta$ y simplificando, llegamos finalmente a

$$\varepsilon = dm \cdot \cos(M - \alpha) + m \cdot \alpha \cdot \sin(M - \alpha)$$

y para que ε venga expresado en millas náuticas estando, a su vez, m y dm en las mismas unidades

$$\varepsilon' = dm' \cdot \cos(M - \alpha) + m' \cdot \alpha \cdot \sin(M - \alpha) \quad (1.330.XII)$$

Siendo $m = V \cdot t$, se tendrá, $dm = V \cdot dt + t \cdot dV$, por lo que podemos escribir

$$\varepsilon' = (V \cdot dt + t \cdot dV) \cdot \cos(M - \alpha) + V \cdot t \cdot \alpha \cdot \sin(M - \alpha)$$

de la que pasando a los incrementos finitos

$$\varepsilon' = (V \cdot \Delta t + t \cdot \Delta V) \cdot \cos(M - \Delta R^\circ) + V \cdot t \cdot \alpha \cdot \sin(M - \Delta R^\circ)$$

fórmula del todo general y en la que se contemplan todas las variables que intervienen en el problema: Δt implica un error en la hora o en el intervalo computado, ΔV , un error en la velocidad y ΔR° es el error en el rumbo. Es claro que para una observación dada y para un error constante en el rumbo, como el que correspondería a un desvío no controlado o a la deriva ocasionada por una corriente desconocida, el error ε crece con la velocidad y el intervalo de tiempo que transcurre entre observaciones, por lo que éste deberá ser lo más pequeño posible. El ángulo α , siempre desconocido, es normalmente de pequeño valor, y un simple análisis de la expresión obtenida nos permite asegurar que las observaciones próximas al través son, a efectos de traslado, más favorables que las cerradas a proa o popa. Por otro lado, de la propia figura se desprende que el error será nulo si la recta de altura forma con la línea proa popa un ángulo igual a $\beta + \alpha$. El otro procedimiento consiste en la reducción de la altura o alturas tomadas en primer lugar, al horizonte del lugar donde se observa la última, ver pág. 338 y sig.

11. CASOS PARTICULARES DE LA RECTA DE ALTURA. — Cuando el astro pasa por el meridiano superior e inferior, el azimut es 000° o 180° y la recta de altura coincide con un paralelo de latitud. Si se observa un astro en el vertical primario la recta de altura corre a lo largo de un meridiano. Para las alturas circunmeridianas y extrameridianas es más preciso el cálculo de la recta de altura correspondiente a los instantes de tales observaciones, con el determinante Saint-Hilaire, sucediendo lo

mismo con las alturas de la estrella Polar; para éste último caso, el azimut se obtiene fácilmente con el Almanaque Náutico.

12. ERRORES EN LA RECTA DE ALTURA. — La recta de altura será la línea de posición del buque si todos los elementos que concurren en su determinación son exactos; si estos son erróneos, el grado de fiabilidad de la recta de altura dependerá de la entidad de los errores que afecten a los distintos elementos.

Para la determinación de una recta de altura Saint-Hilaire se precisa del conocimiento del azimut estimado y de la diferencia de alturas. La altura es observada sobre la línea del horizonte de la mar, estando normalmente afectada de errores derivados de las circunstancias del momento de la observación, de los errores del sextante (prácticamente nulos en los modernos), y de la anormal depresión del horizonte aparente.

La altura y el azimut estimados se calculan en base a las coordenadas del punto de estima y a la hora deducida del cronómetro, no es probable hoy en día error alguno derivado de la hora del cronómetro a excepción de los de lectura, bastante más comunes de lo cabe pensar, y que recaen íntegramente en la longitud del determinante [FLORA-82].

Por otra parte, cabe interpretar la recta de altura como un arco de loxodrómica que sustituye al arco de circunferencia de alturas iguales, lo que añade un nuevo error tanto más importante cuanto más alejado está el punto de estima de la verdadera situación del buque. En conclusión los errores que pueden afectar a la recta de altura son:

- 1º) Error accidental debido al sextante, de muy pequeña entidad, salvo excepciones.
- 2º) Error sistemático debido a un deficiente cálculo del error de índice; previo a toda observación.
- 3º) Errores accidentales en la observación: línea del horizonte mal definida, viento, olas, anomalías en la refracción astronómica, refracción terrestre no homogénea en todo el horizonte etc.
- 4º) Error sistemático debido al observador; cada observador desarrolla su propia técnica para determinar el instante en que debe tomar la altura.
- 5º) Error sistemático en la depresión del horizonte; mal conocimiento de la elevación, refracción horizontal diferente de la media etc.

El error total resulta de la suma algebraica de los errores parciales, que se dividen en sistemáticos (recordemos que estos entran en todas las observaciones con el mismo valor y signo) y accidentales (de naturaleza aleatoria). La suma de todos los errores sistemáticos da el error sistemático total ε_s ; la suma de todos los errores accidentales da el error accidental total ε_a . El error total ε_t en la observación es la suma de los accidentales más los sistemáticos; esto es:

$$\varepsilon_t = \varepsilon_s + \varepsilon_a$$

el error total recae íntegramente en la diferencia de alturas Δa por lo que la recta de altura errónea que se traza, resulta paralela a la exacta y desplazada en el sentido del azimut si la altura errónea es mayor que la exacta, y en sentido contrario si ésta última es menor que la primera. En general este error rara vez supera las 2' o 3'. Pero en circunstancias excepcionales puede alcanzar valores importantes. Depende de la pericia del observador el acotar la entidad de tal error en función de las circunstancias. La recta de altura en tal caso no puede considerarse como línea de posición, fijándose sobre la carta una zona de posición de $2\varepsilon_t$ de ancho, y conocida como zona de certidumbre por contener la situación del buque. Si haciendo centro en la situación de estima y con radio ρ_e igual al máximo error asumido en esta situación se traza una circunferencia, queda determinada en la carta el área de certidumbre, superficie sobre la que debe encontrarse el navegante, figura 1.333.XII.

13. ERROR EN LA RECTA DE ALTURA PARA UN ERROR EN LA HORA. —

El error que ahora vamos a analizar no es el referido a las imprecisiones del cronómetro que, salvo causas muy excepcionales, no se contemplan en los actuales, pero como en páginas precedentes se ha dicho, no son infrecuentes los errores en la lectura de la hora, sobre todo cuando un observador solo se ve en la obligación de batir el segundo por no disponer de cronógrafo. No hace muchas décadas el error en el estado absoluto del cronómetro era uno de los más temidos por los marinos y podía alcanzar valores notables, especialmente en las largas navegaciones oceánicas cuando este estado no se controlaba adecuadamente mediante las señales horarias que a tal efecto se emiten en forma continua. Para hallar el error que sobre la recta de altura ocasiona un error en el cronómetro, consideremos el efecto sobre la circunferencia de alturas iguales, figura 1.334.XII. El centro de esta circunferencia es el polo de iluminación del astro, cuyas coordenadas son:

Latitud.- La declinación del astro.

Longitud.- Es el horario en Greenwich del astro, que se obtiene directamente a partir de la hora.

Por lo tanto cualquier error en la hora recae con todo su valor en el horario del astro y,

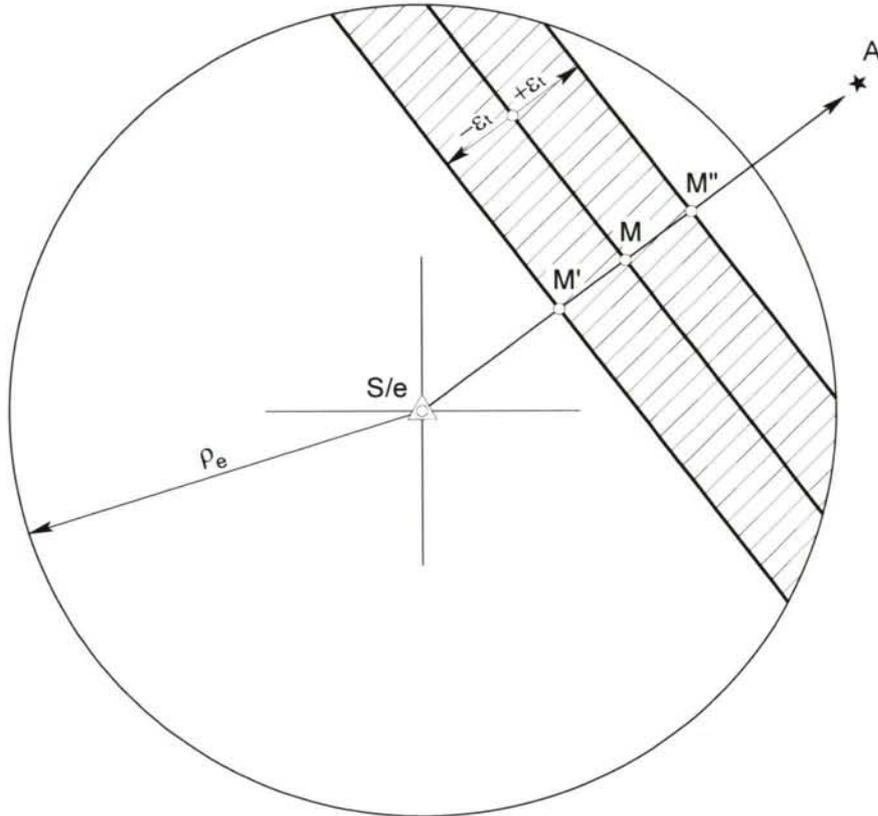


Figura - 1.333.XII - Zona y área de certidumbre

consecuentemente, en la longitud del polo de iluminación. Si se considera que este error en el tiempo es, en segundos, ϵ_t , el polo de iluminación del astro se desplaza

hacia poniente o levante, dependiendo del signo del error, $\epsilon' = \frac{\epsilon_t}{4}$ minutos de longitud,

ya que como recordamos, un segundo de tiempo equivale a 0,24 minutos de arco; si el error es positivo, el polo de iluminación se desplaza al oeste, desplazándose al este en caso de ser negativo. Atendiendo al primer supuesto, el polo de iluminación A, ver figura, se desplaza al oeste hasta la posición A' recorriendo el arco de paralelo de declinación AA' cuya amplitud es, en millas, $0,25\epsilon_t \cos d$. La circunferencia de alturas

iguales desplazará todos sus puntos, así, vértice V y base B pasarán a su nueva posición V' y B' recorriendo en sus respectivos paralelos $0,25\varepsilon_t \cos \varphi_V$ y $0,25\varepsilon_t \cos \varphi_B$ millas. Reseñemos que una recta de altura tangente en el vértice V o la base B de la circunferencia de alturas iguales en su posición exacta, coincidiría prácticamente con la recta de altura tangente en el vértice V' o en la base B' de la circunferencia de alturas desplazada; es decir, un error en la hora no produce error en la recta de altura orientada según paralelo, caso que ya sabemos corresponde a una observación meridiana. Si por

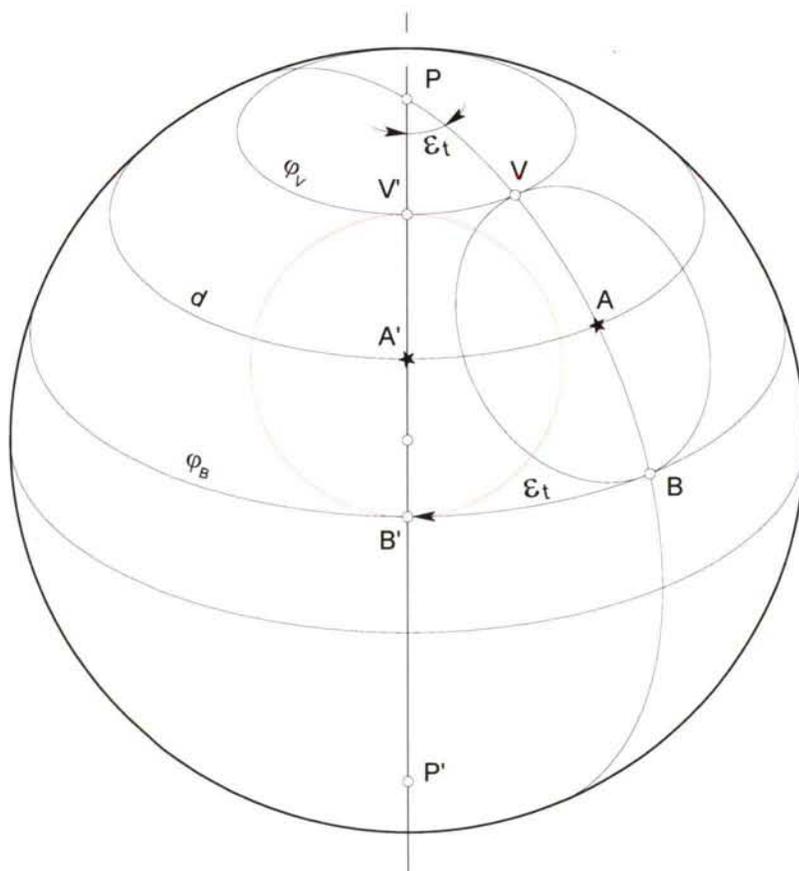


Figura - 1.334.XII - Error en la hora

el contrario se observa un astro en el vertical primario, la recta de altura orientada según meridiano, se traslada paralelamente a sí misma la cantidad $0,25\varepsilon_t$ millas, siendo, en este caso, el error máximo. En conclusión, un error en la hora produce en la recta de altura un error de la misma entidad. Si la observación es en el meridiano el efecto del error es nulo; si la recta es un meridiano el efecto del error es máximo. Un razonamiento analítico, como no podía ser de otra forma, conduce a las mismas conclusiones; si en la fórmula de la variación de la altura por variación en el horario, fórmula diferencial de

la que pasamos a los incrementos:

$$|\Delta a| = |\Delta P \cos \varphi \operatorname{sen} Z|$$

se sustituye ΔP , error en el ángulo en el polo u horario local, por el error en la hora en segundos, se obtendrá el error en minutos en la altura estimada o calculada,

$$|\Delta a| = \left| \frac{\varepsilon_t}{4} \cos \varphi \operatorname{sen} Z \right|$$

en la cual vemos que si el azimut es 0° o 180° , astro en el meridiano, Δa es nulo; si el azimut es 090° o 270° , astro en el primer vertical,

$$|\Delta a| = \left| \frac{\varepsilon_t}{4} \cos \varphi \right|$$

valor que es el máximo. Los errores en la hora, al igual que los contemplados en la altura observada, amplían la zona y el área de certidumbre, lo que conduce a una mayor incertidumbre en la situación. Los errores en el azimut como consecuencia del error estudiado son, en general, de escasa consideración; aunque al ser máxima la variación de este elemento en las proximidades del meridiano, la orientación de la recta en tales circunstancias, y dependiendo de la entidad del error y de la altura, se verá afectada.

14. ERROR EN LA RECTA DE ALTURA LOXODRÓMICA. — El primer estudio realizado sobre la sustitución del arco de curva de alturas iguales por su tangente en el punto determinante, nos lleva a la consideración de que en la proyección de Mercator tal recta es una línea loxodrómica. Existe otra interpretación conceptualmente más precisa, la de Alessio, que considera el círculo máximo tangente a la circunferencia de alturas iguales en el determinante, y cuya representación en gnomónica es una línea recta; las diferencias son solo de enfoque puesto que el resultado práctico es en ambos casos el mismo.

Supóngase, figura 1.336.XII, la loxodrómica tangente a la circunferencia de alturas iguales en el punto M, y, por lo tanto, perpendicular al vertical AM; para el punto L, a la distancia m del punto determinante o de tangencia, se puede encontrar una expresión aproximada (en la interpretación de Alessio, una expresión exacta) de la distancia ρ entre el punto L de la loxodrómica y el punto M' de la circunferencia de

alturas iguales, que nos proporciona una clara idea del error en estudio. Asumiendo que el arco de loxodrómica ML, a no muy grandes distancias, puede asimilarse al arco de círculo máximo, con error menor que el del análisis, tangente a la circunferencia de alturas iguales en el determinante M, en el triángulo rectángulo AML,

$$\cos(90^\circ - a + \omega) = \cos(90^\circ - a) \cos m$$

o sea

$$\sin(a - \omega) = \sin a \cos m$$

desarrollando el seno de la diferencia,

$$\sin a \cos \omega - \cos a \sin \omega = \sin a \cos m$$

dividiendo por $\sin a$ y desarrollando en serie $\sin \omega$, $\cos \omega$ y $\cos m$, y despreciando las potencias superiores a 2, dada la pequeñez de estos ángulos

$$1 - \frac{\omega^2}{2} - \omega \cotg a = 1 - \frac{m^2}{2}$$

despejando ω ,

$$\omega = \operatorname{tg} a \frac{m^2}{2} + \operatorname{tg} a \frac{\omega^2}{2}$$

en una primera aproximación podemos suponer

$$\omega = \operatorname{tg} a \frac{m^2}{2}$$

que sustituida en la anterior nos da

$$\omega = \operatorname{tg} a \frac{m^2}{2} + \operatorname{tg}^3 a \frac{m^4}{8}$$

Para que ω nos de en millas,

$$\omega' = \operatorname{tg} a \frac{m^2}{2} \operatorname{sen} 1' + \operatorname{tg}^3 a \frac{m^4}{8} \operatorname{sen}^2 1'$$

El segundo término del segundo miembro alcanza el valor de 1' a 300' del determinante para una altura de 73° 43' 01,81", exactamente, lo que justifica que la expresión

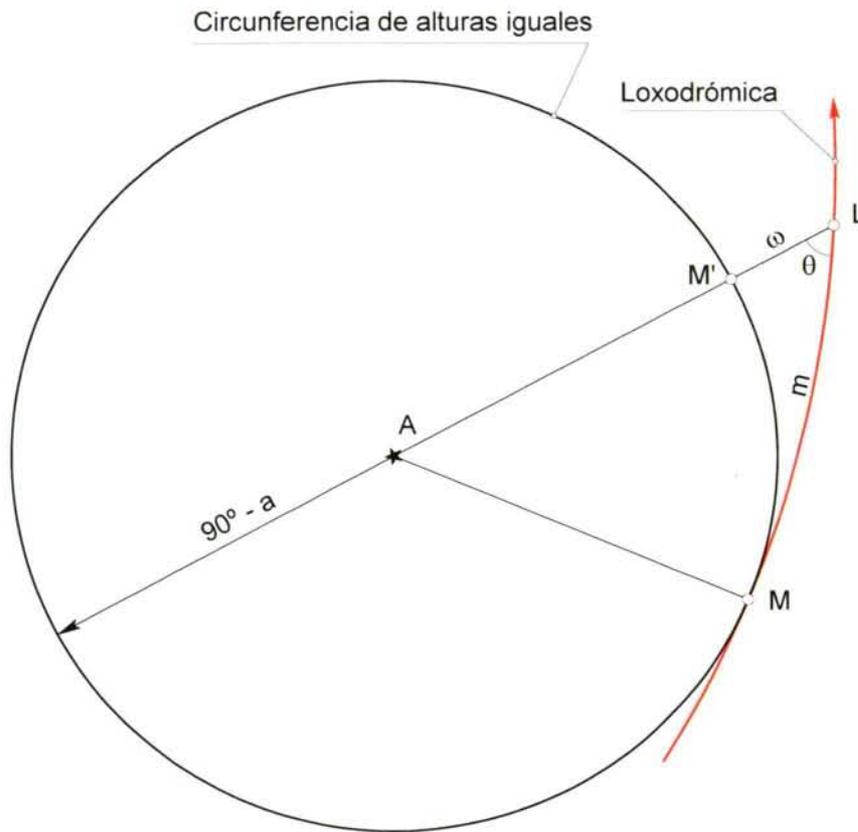


Figura - 1.337.XII - Error al sustituir por la loxodrómica tangente

$$\omega' = \operatorname{tg} a \frac{m^2}{2} \operatorname{sen} 1' \tag{1.337.1}$$

nos da con suficiente exactitud el valor de la distancia buscada; en todo caso, la distancia es menor que la dada por esta expresión, ya que la loxodrómica discurre por latitudes más altas que el círculo máximo que en un punto dado lleva su mismo rumbo. Esta separación la facilita, entre otras, la tabla XXIX del Instituto Hidrográfico de la Marina de Italia; *“Elementi per tracciare successive rette d’altezza”*, [FLORA-82], en

función de la distancia m en millas al determinante y de la altura verdadera del astro. El ángulo θ se obtiene por la fórmula

$$\cotg \theta = tg a \operatorname{sen} m$$

Cuando la situación observada por corte de dos rectas de altura se encuentra muy

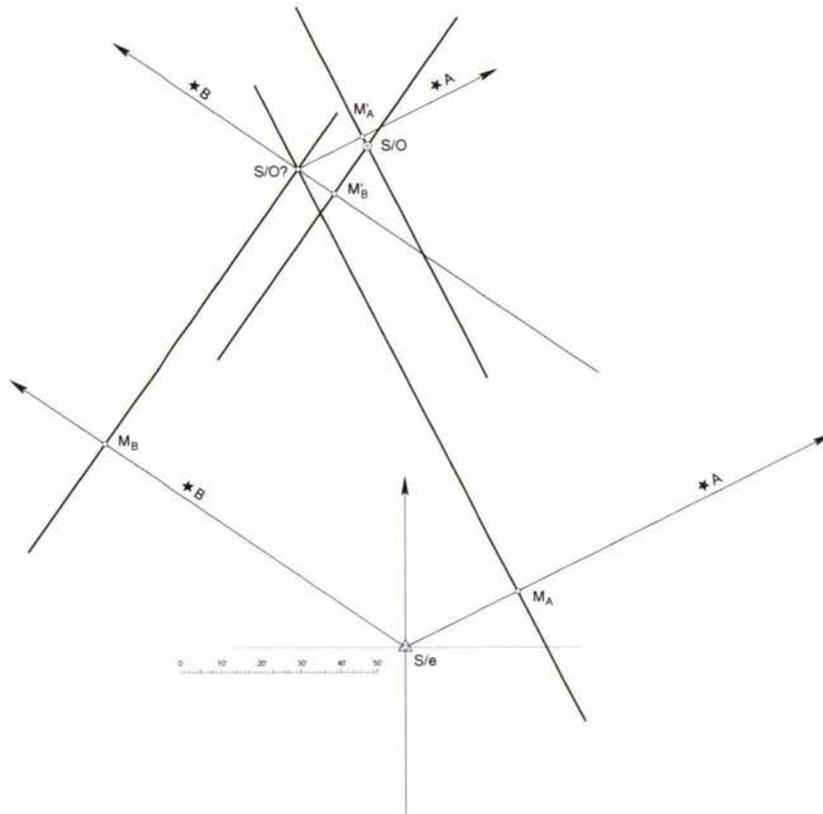


Figura - 1.338.XII - Rectas de altura sucesivas

alejado del punto determinante de las dos o de una de las rectas de altura, es preciso recurrir al trazado de rectas de altura sucesivas con nuevos determinantes calculados a partir de esa situación observada, figura 1.338.XII.

15. REDUCCIÓN DE UNA ALTURA AL ÚLTIMO HORIZONTE. — Vimos en la página 330 del presente capítulo que cuando las alturas no eran simultáneas, el procedimiento más clásico para obtener la situación era el de trasladar la primera recta al tiempo de la segunda, analizándose el error en dicho traslado. Más eficaz y cómodo es el método de reducir la primera altura al horizonte donde se toma la segunda; en el caso de más de dos observaciones procederemos por idéntica vía, reduciendo todas

las alturas al horizonte de la última. Para ello, figura 1.339.XII, supongamos que el navegante que en el instante t_1 y en situación S_1 , primer horizonte, navegando al rumbo R° con velocidad V toma la altura a_1 del astro A , desea saber qué altura a_2 tendría ese mismo astro si en el instante t_2 ocupara la posición S_2 , último horizonte; resulta evidente que la variación de la altura depende únicamente del movimiento del observador. Si asumimos que el pequeño arco de loxodrómica S_1S_2 coincide con el arco m de

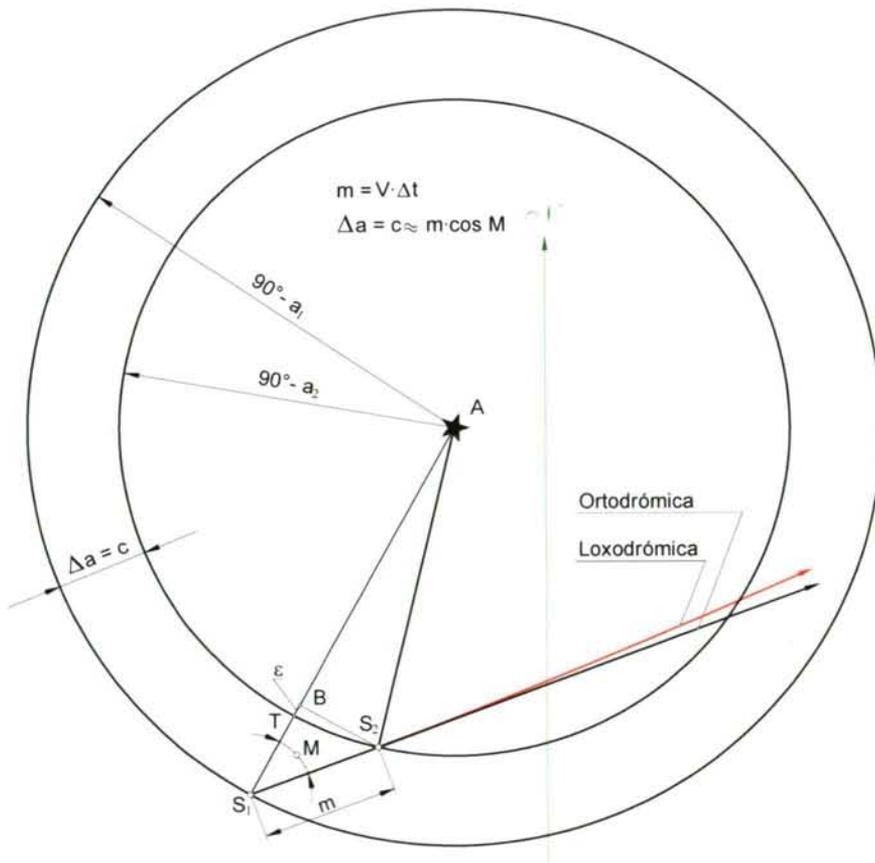


Figura - 1.339.XII - Reducción al último horizonte

ortodrómica definido por ambas posiciones, siendo M° la marcación del astro observado y c la corrección que aplicada a la altura del primer horizonte nos da la altura del segundo, del teorema del coseno de la trigonometría esférica, en el triángulo S_1AS_2 conocidos dos lados y el ángulo comprendido, tenemos:

$$\text{sen } a_2 = \text{sen } a_1 \cos m + \cos a_1 \text{ sen } m \cos M$$

expresión que da los resultados más exactos, no obstante, es usual recurrir a la fórmula más simple obtenida a partir de esta, después de las siguientes transformaciones: sustituyendo a_2 por $(a_1 + c)$ tendremos,

$$\text{sen}(a_1 + c) = \text{sen } a_1 \cos m + \cos a_1 \text{sen } m \cos M$$

considerando que la corrección c y el arco m son elementos diferenciales y recordando que

$$\text{sen}(a + c) = \text{sen } a + c \cdot \cos a - \text{sen } a \cdot \frac{c^2}{2!} - \cos a \cdot \frac{c^3}{3!} + \text{sen } a \cdot \frac{c^4}{4!} + \dots$$

$$\dots + \frac{c^n \cdot \text{sen}\left(a + \frac{n \cdot \pi}{2}\right)}{n!} \pm \dots$$

y

$$\cos m = 1 - \frac{m^2}{2!} + \frac{m^4}{4!} - \frac{m^6}{6!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{m^{2 \cdot n}}{(2 \cdot n)!} \pm \dots$$

$$\text{sen } m = m - \frac{m^3}{3!} + \frac{m^5}{5!} \dots + (-1)^n \cdot \frac{m^{2 \cdot n + 1}}{(2 \cdot n + 1)!} \pm \dots$$

Tomamos de estos desarrollos los términos de hasta la segunda potencia para obtener,

$$\text{sen } a + c \cdot \cos a - \text{sen } a \cdot \frac{c^2}{2!} = \text{sen } a \cdot \left(1 - \frac{m^2}{2!}\right) + m \cdot \cos a \cdot \cos M$$

en la que ordenando y despejando c

$$c = m \cdot \cos M + \frac{1}{2} \cdot \text{tg } a \cdot (c^2 - m^2)$$

admitiendo como primera aproximación de c el primer sumando del segundo miembro de la anterior igualdad y sustituyendo

$$c = m \cdot \cos M + \frac{1}{2} \cdot \text{tg } a \cdot (m^2 \cdot \cos^2 M - m^2)$$

que simplificada y debidamente dimensionada para que nos dé c en minutos de arco estando m en millas náuticas,

$$c' = m' \cdot \cos M - \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg} a \cdot m'^2 \cdot \operatorname{sen}^2 M \cdot \operatorname{sen} 1' \quad (1.341.XII)$$

obteniéndose, para las necesidades de la práctica de la Navegación Astronómica y salvo para valores excesivamente grandes de la altura con astros observados por el través, precisión suficiente con la primera aproximación; es decir

$$c' = m' \cdot \cos M$$

El error ε que se comete al considerar el triángulo S_1S_2B congruente con el S_1S_2T , véase figura, así como el derivado de asumir la coincidencia de los arcos de loxodrómica y ortodrómica en el intervalo m son, en general, de escasa magnitud e insensibles en la solución gráfica; para una distancia navegada de 15' y un astro por el través con una altura de 70° , la primera aproximación es nula y el error no alcanza los 0,1 minutos. Señalemos, finalmente, que caso de navegar en el seno de corriente la marcación del astro será la efectiva. Esta corrección será aplicada como una corrección más a las alturas observadas, y se aplicará con el signo correspondiente al coseno de la marcación; es decir, son positivas las correcciones para observaciones a proa del través y negativas a popa.

16. UTILIDAD DE UNA SOLA RECTA DE ALTURA. — Con una sola recta de altura no es posible obtener la situación observada, pero puede proporcionar utilísima información al navegante, ya sea en alta mar o en las proximidades de la costa. Una recta de altura observado el astro con azimut 000° o 180° se orienta según un paralelo dando una latitud observada. Las observaciones de astros en el vertical primario generan rectas de altura que corren a lo largo del meridiano, deduciéndose la longitud del observador. Considerados los errores propios de toda observación y debidamente evaluados según la experiencia y pericia del observador, la zona de certidumbre puede determinarse con porcentajes de acierto cercanos al 100% cuando se dispone de una observación aislada, (ver zona y área de certidumbre). Una recta de altura observando el astro por el través proporcionará al navegante valiosa información sobre su derrota (recta de altura de rumbo), figura 1.342.XII; el navegante, arrumbado al dispositivo de separación de tráfico, esta a poniente de la derrota deseada.

En la figura 1.343.XII, cerca de la recalada, el buque desarrolla una velocidad sensiblemente superior a la esperada o a la indicada por su corredera; la recta de altura, en este caso, es una recta de altura de velocidad.

El caso que se ilustra en la figura 1.344.XII, correspondería a una recalada con

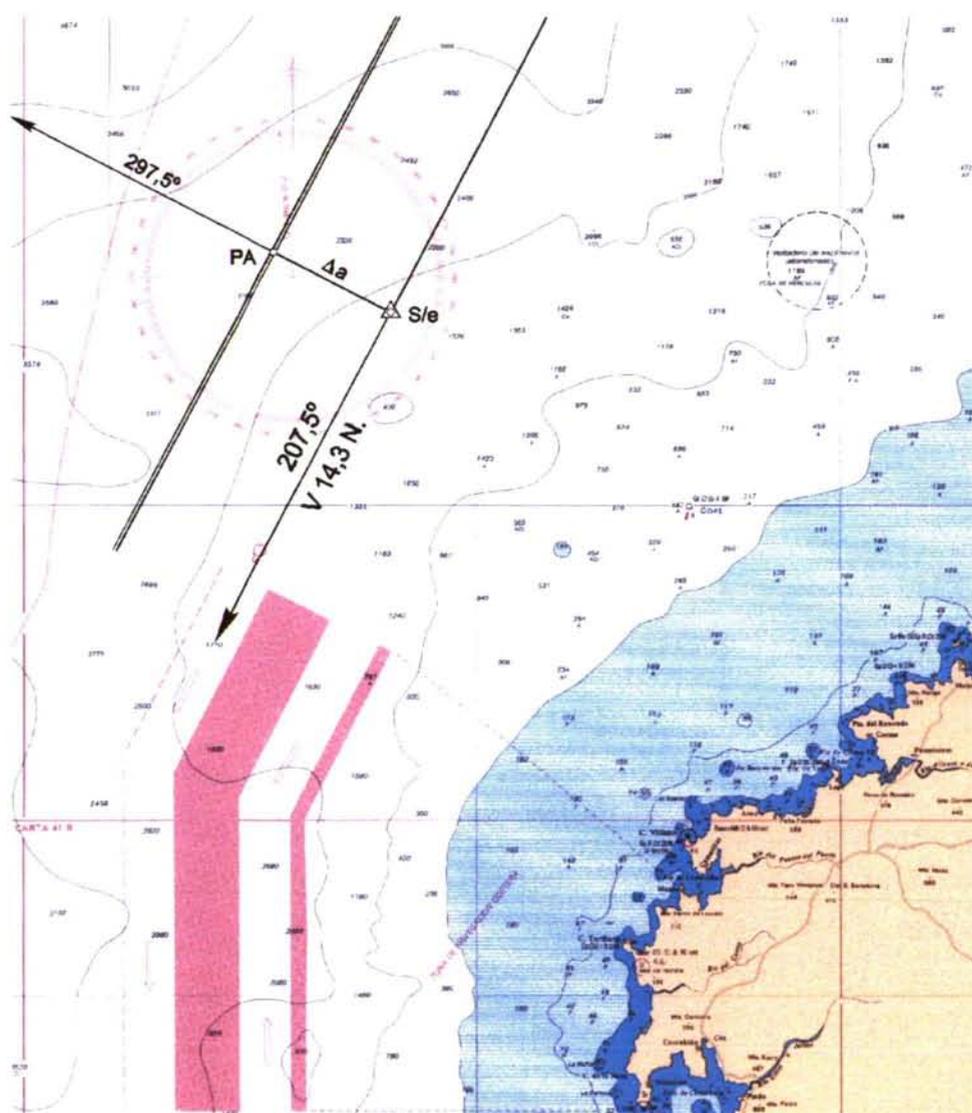


Figura - 1.342.XII - Recta de altura de rumbo

error asumido en la estima de ϵ_e millas náuticas y error total en la recta de altura de ϵ minutos, error del que ignorándose su signo, llevaríamos a uno y otro lado de punto aproximado para así determinar la zona de certidumbre. Haciendo centro en la estima y con radio ϵ_e , se describe una circunferencia, dentro de la cual, y con probabilidad de 95%, [ADMIRALTY MANUAL OF NAVIGATION-VOLUME I-87], que en su corte con las

rectas de altura límites, determina la zona de certidumbre. Para arrumbar al punto de recalada previsto se supondrá la posición más desfavorable dentro de dicha zona de certidumbre. Esta clase de maniobra no era infrecuente cuando los medios para detectar tierra a gran distancia no eran los actuales; no son tampoco excepcionales los días en los que, en la zona de la figura y en otras muchas del globo, el horizonte hacia mar abierto presenta inmejorables condiciones para la observación, mientras la zona

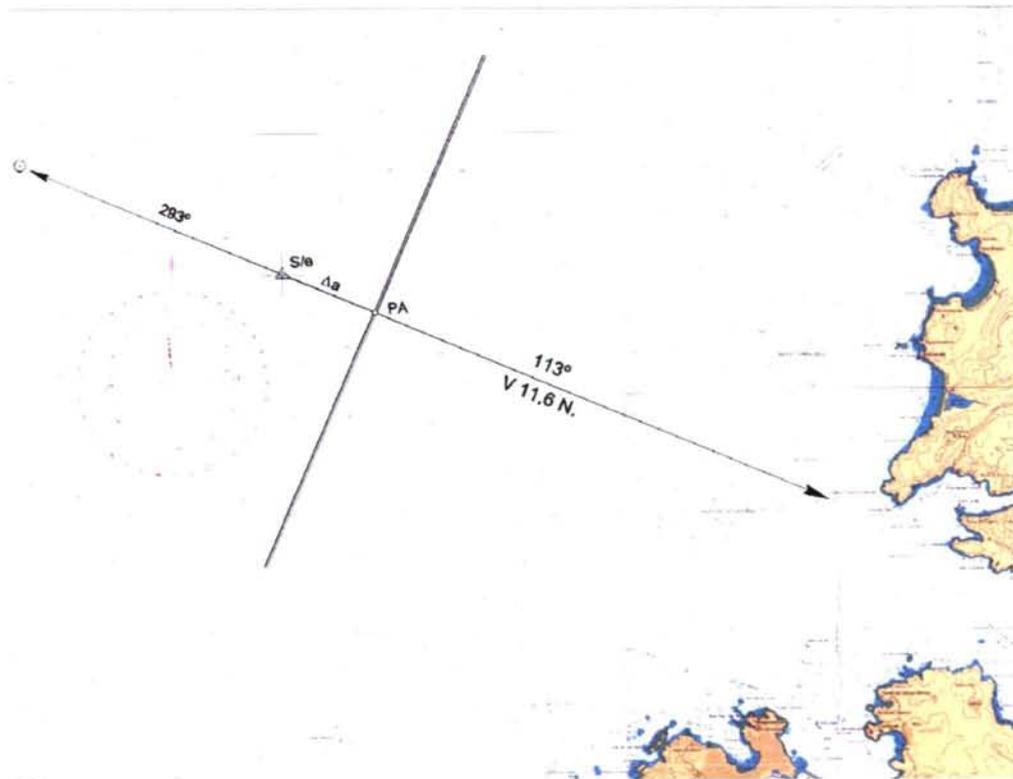


Figura - 1.343.XII - Recta de altura de velocidad

de costa se encuentra tomada por bancos de niebla de muy baja altura, que hacen imposible el reconocimiento de los puntos notables que servirán de referencia al navegante durante su maniobra de aproximación. Puede considerarse hoy en día que tal disposición para una recalada precisa está fuera de lugar al disponer el marino de sistemas de ayuda a la navegación más rápidos y seguros; mas el navegante debe poseer los conocimientos necesarios y herramientas precisas para solventar eficazmente toda situación fuera de la rutina de la práctica diaria. No serían pocos los accidentes de mar que después de un riguroso análisis fueran justamente atribuidos a situaciones parejas a las aquí descritas; no precisamente por la falta de una

observación astronómica en un instante dado, sino por la esclavitud a una rutina que vacía de contenido todo el nivel de formación de los marinos modernos y los convierte

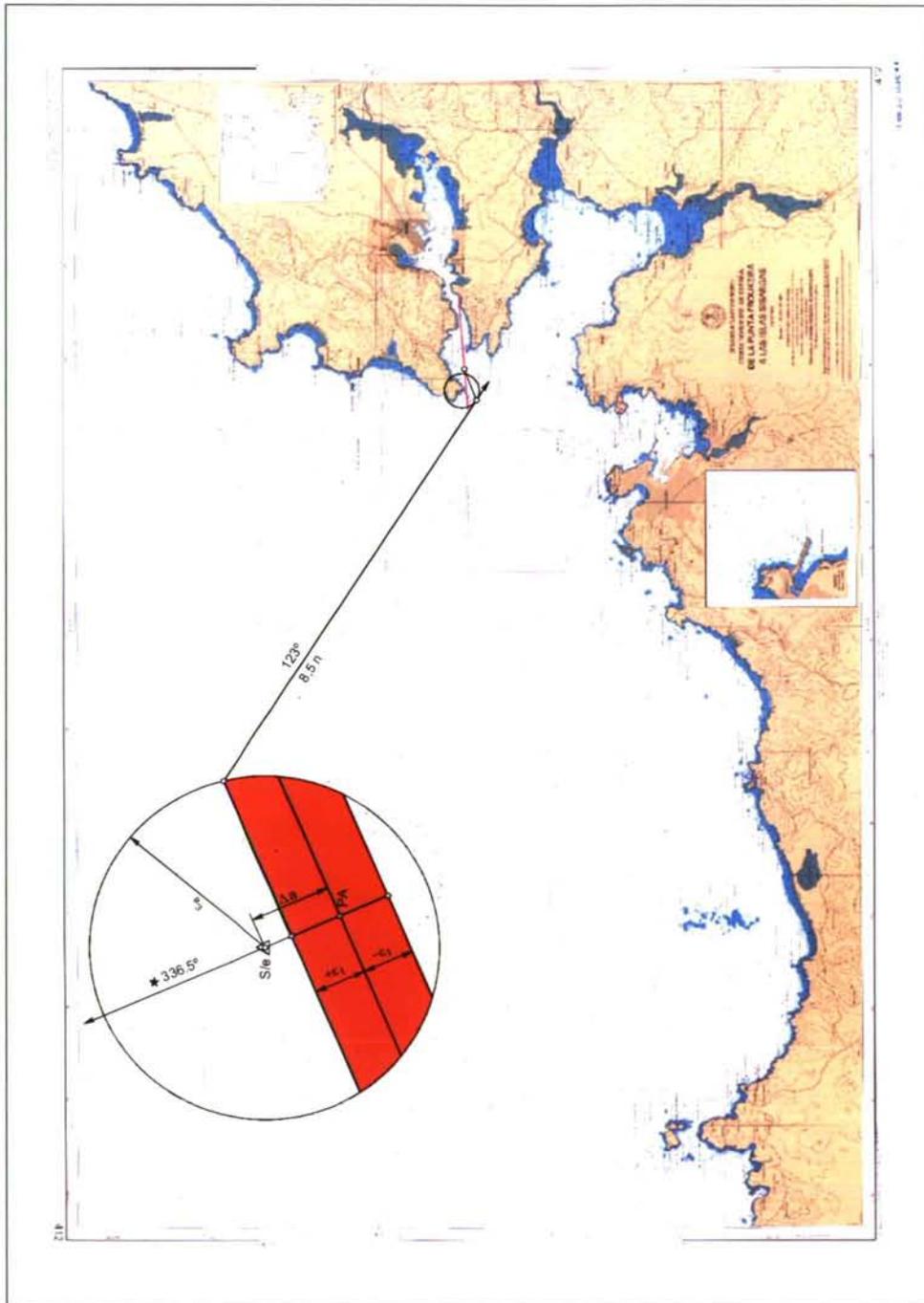


Figura - 1.344.XII - Recalada desde la zona de certidumbre

en una suerte de inevitables pasajeros con salario y derecho a tres platos al día. Por suerte, no es difícil de encontrar en la mar capitanes que exigen de sus pilotos la adecuada atención a una navegación absolutamente independiente de los medios externos, de los que, en todo caso, debe hacerse uso, complementando de esta manera un proceder acorde con la buena práctica marinera, pericia y la más pura tradición náutica.

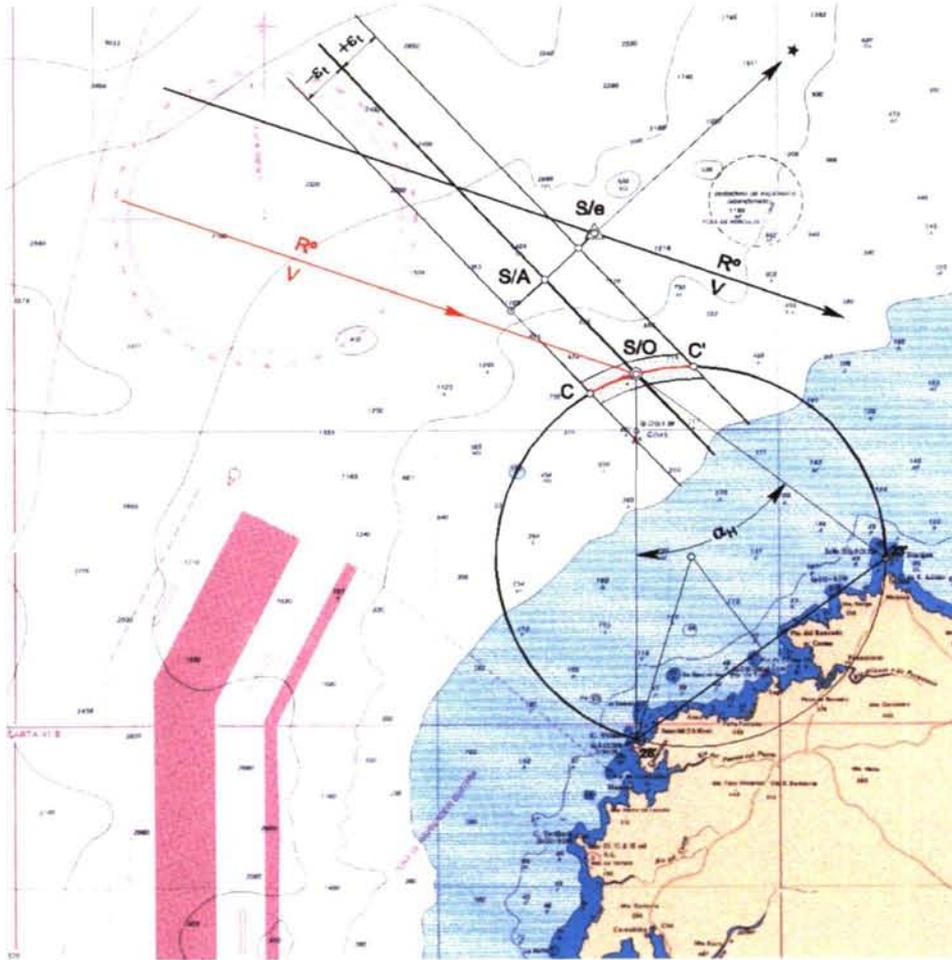


Figura - 1.345.XII - Líneas de posición combinadas

Para finalizar, y no sin previamente aclarar que las aplicaciones de una sola recta de altura van más allá de lo aquí expuesto, la figura 1.345.XII, ilustra el caso de corte una recta de altura con otra línea de posición para determinar la situación observada cuando la fiabilidad de ambas líneas sea alta; un arco de certidumbre, dado que en este caso se maneja un ángulo horizontal, si prevalece la calidad de la observación terrestre, o el área de certidumbre derivada de la suposición de errores en las dos líneas de posición.

17. EL MÉTODO DE DOWES. — No obstante todo lo dicho sobre la resolución analítica del problema de la situación astronómica y lo poco práctico que resultaba su aplicación a bordo, es desde hace muchos años conocido el método de cálculo de Doves, basado en la solución de cinco ecuaciones trigonométricas, fáciles de manejar con las modernas calculadoras, y cuyo desarrollo es como sigue: Supóngase, figura 1.346.XII, que a una hora dada H , el observador mide las alturas a_A y a_B de los astros

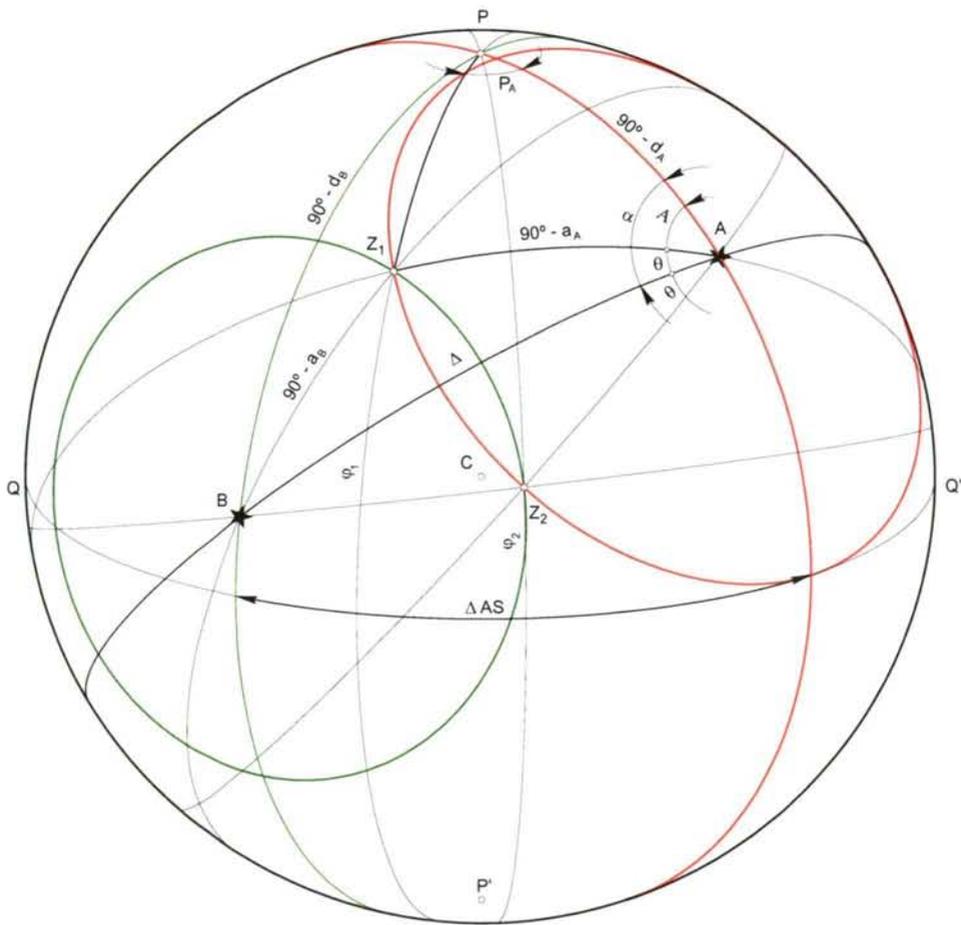


Figura - 1.346.XII - Método de Doves

A y B, cuyas coordenadas horarias referidas al ecuador y meridiano origen son, d_A , d_B , hG_A y hG_B , coordenadas de sus respectivos polos de iluminación, siendo ΔAS la diferencia de los ángulos sidéreos en observaciones simultáneas o, caso contrario, ΔhG , la diferencia de los horarios en Greenwich correspondientes a las distintas horas de observación; el método es, así, aplicable a la observación de un mismo astro en dos instantes diferentes. Las circunferencias de alturas iguales se cortarían en los puntos

Z_1 y Z_2 , posibles posiciones del observador y cuyas coordenadas referidas al ecuador y al círculo horario del astro que mejor convenga son $\{\varphi_1, P_A \text{ o } P_B\}$, y, $\{\varphi_2, P_A \text{ o } P_B\}$. En el triángulo APB se tiene

$$\cos \Delta = \sin d_A \sin d_B + \cos d_A \cos d_B \cos \overline{\Delta AS} \quad (1.347.XII)$$

con la que calculamos el arco de ortodrómica AB, definida por los astros observados. En el mismo triángulo,

$$\cos \alpha = \sin d_B \sec d_A \operatorname{cosec} \Delta - \operatorname{tg} d_A \operatorname{cotg} \Delta \quad (2.347.XII)$$

calculándose el ángulo auxiliar α . En uno cualquiera de los triángulos AZ_1B o AZ_2B

$$\cos \theta = \sin a_B \sec a_A \operatorname{cosec} \Delta - \operatorname{tg} a_A \operatorname{cotg} \Delta \quad (3.347.XII)$$

En el triángulo Z_1AP hallaríamos la latitud del punto Z_1 :

$$\sin \varphi_1 = \sin a_A \sin d_A + \cos a_A \cos d_A \cos (\alpha - \theta) \quad (4.347.XII)$$

Esta expresión puede generalizarse para obtener las dos latitudes soluciones,

$$\sin \varphi_{(1,2)} = \sin a_A \sin d_A + \cos a_A \cos d_A \cos (\alpha \pm \theta)$$

Para el horario P_A ,

$$\operatorname{cotg} P_{1A} = \operatorname{tg} a_A \cos d_A \operatorname{cosec} (\alpha - \theta) - \sin d_A \operatorname{cotg} (\alpha - \theta) \quad (5.347.XII)$$

que, generalizada,

$$\operatorname{cotg} P_{(1A,2A)} = \operatorname{tg} a_A \cos d_A \operatorname{cosec} (\alpha \pm \theta) - \sin d_A \operatorname{cotg} (\alpha \pm \theta)$$

Conocido el horario local de cualquiera de los dos astros, se deduce la longitud del observador. Las cinco ecuaciones numeradas conforman el sistema de Doves.

18. SITUACIÓN POR ALTURAS PRÓXIMAS AL ZENIT. — En esta excepcional circunstancia la recta de altura queda descartada, pues la excesiva altura del astro observado implicaría errores inadmisibles en la sustitución de la curva de alturas iguales por su tangente. El problema, en general, puede presentarse en cualquier situación, pero es cuando se navega en la zona intertropical y observando el Sol en las proximidades del mediodía verdadero cuando realmente acontece. En efecto, cuando se navega por tales latitudes, estando la declinación del Sol comprendida entre los valores $\pm 23^{\circ} 27'$, puede suceder que llegada la hora meridiana y alcanzando la latitud del observador valor parejo al de la declinación solar, el astro pase por el meridiano con altura muy próxima a los 90° . Si en la ecuación del seno de la altura,

$$\text{sen } a_{\odot} = \text{sen } \varphi \text{ sen } d_{\odot} + \cos \varphi \cos d_{\odot} \cos P_{\odot}$$

hacemos P_{\odot} igual a 000° y φ igual a d_{\odot} , se tiene

$$\text{sen } a_{\odot} = \text{sen}^2 d_{\odot} + \cos^2 d_{\odot}$$

es decir, la altura resulta igual a 90° . Naturalmente, si la igualdad anterior no se cumple, la altura estará tan próxima a los 90° como cercano a 000° sea el horario local y parejos los valores de φ y d_{\odot} , dándose el caso de alturas de más de 88° cuya medición resulta algo complicada, pues aún variando notablemente la altura en las cercanías del meridiano, el punto de colimación es de ambigua ubicación, observándose que el Sol recorre un amplio arco sensiblemente tangente a la línea del horizonte visible; esta aparente contrariedad es solventada por la experiencia del observador. La vía de solución en este particular caso consiste en observar una serie de alturas anotando las correspondientes horas y seleccionando, posteriormente, tres de ellas separadas en el tiempo un intervalo algo superior a los 6 minutos, y de manera tal que la altura intermedia sea lo más próxima posible a la meridiana. Una vez las alturas corregidas, hallaremos las distancias zenitales correspondientes, z_1 , z_2 y z_3 . Del Almanaque Náutico y para la hora promedio de la observación se obtendrá la declinación del Sol y el horario en Greenwich, con preferencia, el de la última hora. Se pasan los intervalos cronométricos a arco y, sobre una recta horizontal que representa el paralelo de declinación, se fijará la primera posición del polo de iluminación del Sol, ver figura 1.349.XII; seguidamente se llevarán hacia poniente los intervalos cronométricos en arco, multiplicados por el coseno de la declinación asumida y fijando las sucesivas

posiciones del polo de iluminación. Se trasladan por rumbo y distancia el primero y segundo polos al tiempo del tercero, y haciendo centro en cada uno de ellos y con radio

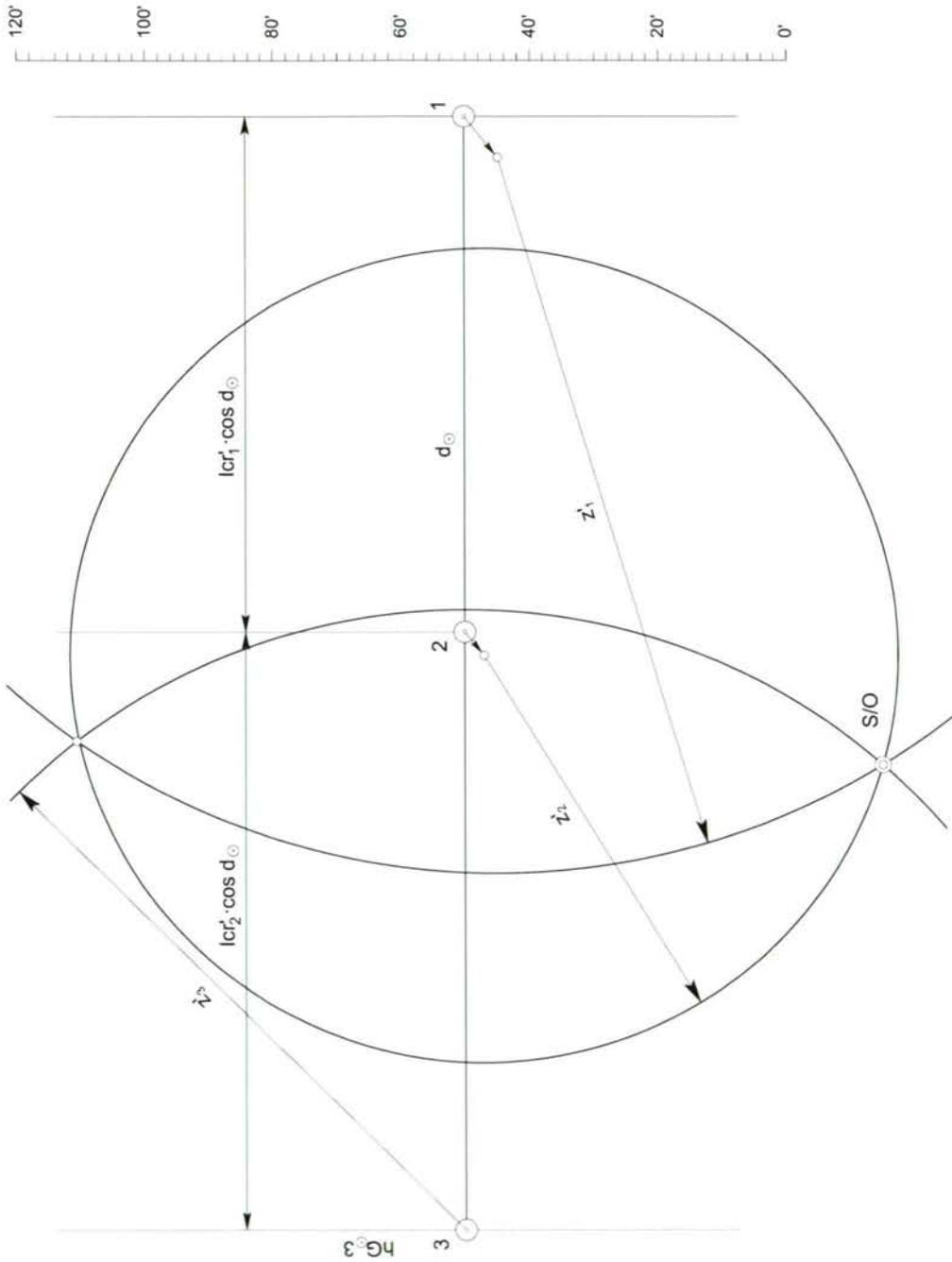


Figura - 1.349.XII - Situación por alturas circunzenitales

igual a la distancia zenital correspondiente, se trazan los arcos de circunferencia de alturas iguales de cada observación, que se cortarán en dos puntos; la ambigüedad en la situación desaparece al contrastar las dos posibles formas de encarar el Sol en el instante del paso por el meridiano, cara al norte o sur, o comparándolas con la situación estimada, aunque esta última vía puede no ser del todo fiable. La latitud se obtiene midiendo con la misma escala empleada para las distancias zenitales, su diferencia respecto del paralelo de declinación o del de estima; la longitud observada la hallaremos midiendo, en el paralelo de la latitud observada, el apartamiento entre el meridiano de esta situación y el círculo horario que corresponde a la tercera observación (o a cualquiera de los otros dos), multiplicando el resultado por la secante de la latitud observada, lo que nos dará el horario local; de este se pasará a la longitud del buque. El trazado realizado sobre la carta náutica simplifica estas operaciones.

CAPÍTULO XIII

CIRCUNSTANCIAS FAVORABLES PARA LA OBSERVACIÓN

1. GENERALIDADES. — Los inevitables errores que afectan a los resultados de todo proceso de medición y, por consiguiente, indefectiblemente presentes en los instantes de la observación a bordo, pueden, en este caso y por diferentes causas, alcanzar valores de magnitud tal, que den al garete con el trabajo realizado debiendo prevalecer en tales circunstancias la fiabilidad de la situación estimada sobre la obtenida con el sextante. Vimos que dichos errores se agrupan en dos clases:

ERRORES SISTEMÁTICOS.— Están sometidos a una determinada ley matemática, afectan por igual a todas las alturas y se repiten constantemente en signo y magnitud; algunos de ellos han sido ya enumerados al tratar ciertos errores en la recta de altura:

1º Desconocimiento del valor exacto de la elevación del observador. Recordando que en condiciones medias el valor de la depresión del horizonte está dado por

$$D'_a = 1,773 \cdot \sqrt{E_0}$$

Se tendrá

$$\Delta D'_a = \frac{D'_a}{2 \cdot E_0} \cdot \Delta E_0$$

De muy escaso valor, y que solamente para grandes tanques navegando en lastre y entre olas, podría alcanzar el minuto de arco.

2º) Imperfecto conocimiento del error de índice; rara vez alcanza $\pm 0,25'$

3º) Anomalías del coeficiente de refracción afectando por igual a los 360° de horizonte. El horizonte visible está anormalmente depresso, alcanzando valores

notables; ver en pág. 106 el estudio de este fenómeno.

4º) Errores del observador propios de la técnica de observación seguida; normalmente no alcanzan valores muy significativos

5º) Defectos del sextante ocasionados por mal uso o malos cuidados, cuando afectan por igual a todas las observaciones.

ERRORES ACCIDENTALES.- Subordinados a las leyes del azar, solo admiten un tratamiento estadístico, afectando de forma desigual a las alturas observadas. Se demuestra por cálculo de probabilidades que se reparten con desigual sigo aunque guardando cierta simetría alrededor del valor más probable:

1º) Errores de la depresión cuando el coeficiente medio de la refracción no es el mismo en los 360º del horizonte; la línea del horizonte visible oscila con diferentes valores respecto de una línea media teórica.

2º) Errores del observador que no afectan por igual a todas las observaciones.

3º) Errores del sextante, excentricidad, graduación y prismatismo. No alcanzan valor significativo en los instrumentos modernos; ver pág. 72 y sig.

4º) Variaciones del coeficiente de la refracción astronómica, sobre todo si por cualquier circunstancia se observan alturas bajas. La minimización de este error se consigue observando alturas sensiblemente iguales, cosa que no siempre es posible, pues en valor medio, ver pág.116 y sig., a efectos prácticos y sin error se admite como expresión de la refracción astronómica

$$r'_a = \cotg a$$

Y, si las alturas son iguales, el error es sistemático.

5º) Falsos horizontes, sobre todo en las observaciones de Sol cuando con nubes bajas y en el mismo vertical, se proyectan sombras que crean la ilusión de una línea de horizonte que realmente no existe; es bastante más común de lo que pudiere parecer y puede alcanzar valores notables.

6º) Los errores en la hora y de cálculo, que se trasladan íntegramente al determinante.

2. ATENUACIÓN DE LOS ERRORES EN LA OBSERVACIÓN. — Los errores sistemáticos se eliminan tomando como línea de posición la bisectriz de altura o recta diferenciométrica, como se verá en el siguiente capítulo. Los accidentales se reducen

observando una serie de alturas compuesta de 3, 5 o 7 alturas con breve intervalo de tiempo entre una y otra. La media aritmética de las alturas observadas corresponderá a la media aritmética de las horas de observación. Dado que los errores accidentales se reparten a uno y otro lado del valor medio con desigual signo y cuantía, la media aritmética reduce la magnitud del error, obteniéndose una altura observada afectada de un pequeño error accidental residual. Este método presupone que la altura de los astros, a pequeños intervalos de tiempo, varía proporcionalmente al tiempo, supuesto que podemos considerar cierto cuando el astro corta al primer vertical, se halla en las proximidades del mismo, está en máxima disgresión (ángulo de posición recto), o se encuentra cercano a este acaecimiento. No puede aceptarse, no obstante, cuando el astro se encuentra en las proximidades del meridiano ya que en tales circunstancias la altura aumenta antes de la culminación, que ocurre siempre cerca del meridiano, permanece estacionaria en esos instantes, y disminuye después. En todo caso, la teoría de errores demuestra que, salvo en esas circunstancias, el procedimiento es siempre ventajoso ya que el error accidental residual es siempre inferior al que normalmente afecta a cada altura contemplada individualmente, siempre que el intervalo de tiempo total de la serie no exceda de los 5 minutos y las alturas sean inferiores a los 80°.

3. IDENTIFICACIÓN DE ALTURAS ERRÓNEAS EN UNA SERIE. — Una de las incuestionables ventajas de la serie de alturas radica en la posibilidad de reconocer aquellas que resultan erróneas, facilitándonos así un criterio de fiabilidad para cada una de las alturas de la observación. Al objeto de eliminar de la serie aquellas alturas menos fiables, se comparan las diferencias entre dos alturas consecutivas de la observación y las correspondientes diferencias teóricas calculadas por la fórmula diferencial ya manejada en el estudio de la recta de altura:

$$\Delta a_e = \frac{\Delta P^s}{4} \cdot \text{sen } Z \cdot \text{cos } \varphi$$

en la que Z es el azimut, que sin error admitimos corresponde al instante medio de la observación y consideramos constante, ΔP^s es el intervalo de tiempo entre dos observaciones consecutivas expresado en segundos de tiempo, Δa_e la diferencia teórica calculada entre las correspondientes alturas consecutivas y expresada en minutos de arco, o sea, la variación teórica de la altura calculada en el intervalo ΔP^s , y φ la latitud del observador, de valor constante. Sean:

$$a_1; a_2; a_3; \dots ; a_n$$

las n alturas observadas respectivamente a las horas:

$$H_1; H_2; H_3; \dots ; H_n$$

A la altura media

$$a_m = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}$$

corresponderá la hora media

$$H_m = \frac{H_1 + H_2 + H_3 + \dots + H_n}{n}$$

Establecidas las diferencias entre la altura media y cada una de las alturas observadas, a las que corresponden los intervalos de tiempo obtenidos de las diferencias entre la hora media y la correspondiente a cada observación, se obtiene:

Diferencia de alturas observadas	Diferencia de tiempos
$\Delta a_1 = a_m - a_1$	$\Delta P_1 = H_m - H_1$
$\Delta a_2 = a_m - a_2$	$\Delta P_2 = H_m - H_2$
$\Delta a_3 = a_m - a_3$	$\Delta P_3 = H_m - H_3$
...
$\Delta a_n = a_m - a_n$	$\Delta P_n = H_m - H_n$

Calculadas las correspondientes diferencias de alturas por la fórmula

$$\Delta a_e = \frac{\Delta P^s}{4} \cdot \text{sen } Z \cdot \text{cos } \varphi$$

en la que sucesivamente sustituiremos ΔP^s por $\Delta P_1, \Delta P_2, \Delta P_3, \dots, \Delta P_n$, expresados en segundos de tiempo, se obtienen $\Delta a_{e1}, \Delta a_{e2}, \Delta a_{e3}, \dots, \Delta a_{en}$. Si todas las observaciones son correctas debe, muy aproximadamente, resultar que:

$$\Delta a_1 = \Delta a_{e1}$$

$$\Delta a_2 = \Delta a_{e2}$$

$$\Delta a_3 = \Delta a_{e3}$$

.....

$$\Delta a_n = \Delta a_{en}$$

Desechando por erradas aquellas alturas para las cuales no se cumpla con la debida aproximación la igualdad establecida.

Procedimiento de comprobación menos laborioso aunque también algo menos riguroso es el que resulta de la representación gráfica de alturas y horas correspondientes en un par de ejes cartesianos, ver figura 1.353.XIII: Las alturas a_2 y a_4 , deben desecharse por erróneas.

4. ERRORES EN LA ALTURA CALCULADA. — Todo error en la altura calculada revierte íntegro en el determinante; interviniendo en el cálculo de éste las variables φ , d y P , queda claro que todo error en cualquiera de ellas será origen del

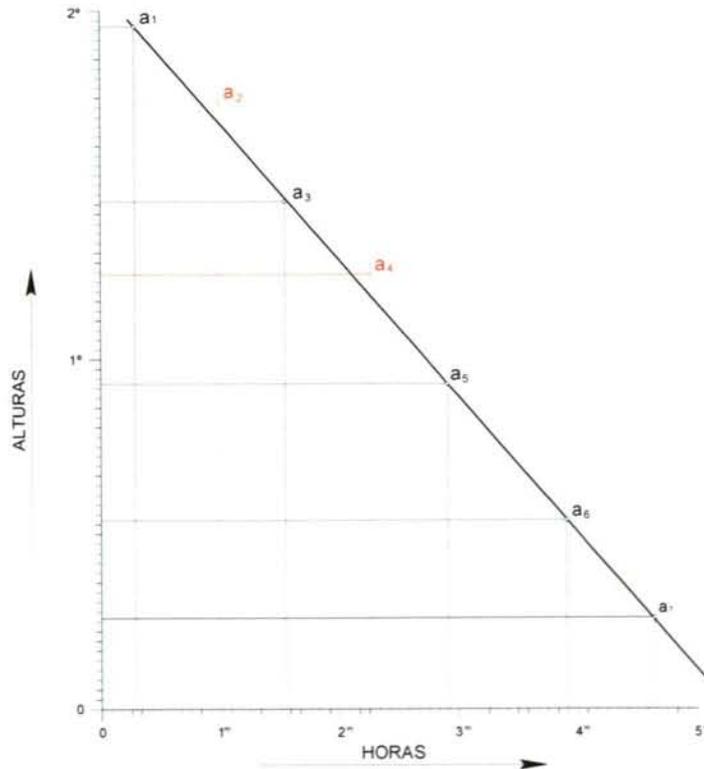


Figura - 1355.XIII - Variación lineal altura/tiempo

consiguiente error en la altura calculada, y el error total sobre esta es la suma de los errores parciales con origen en las variables citadas. Por otra parte, en el capítulo III al estudiar la variación de la altura de los astros, encontramos:

$$\left. \begin{aligned} da &= d\varphi \cdot \cos Z + dd \cdot \cos A - dP \cdot \cos \varphi \cdot \operatorname{sen} Z; & (2.42.III) \\ da &= d\varphi \cdot \cos Z + dd \cdot \cos A - dP \cdot \cos d \cdot \operatorname{sen} A; & (3.42.III) \end{aligned} \right\}$$

Considerando constantes φ y d se tendrán la expresiones

$$\left. \begin{aligned} da &= -dP \cdot \cos \varphi \cdot \operatorname{sen} Z; & (4.42.III) \\ da &= -dP \cdot \cos d \cdot \operatorname{sen} A; & (5.42.III) \end{aligned} \right\}$$

en las que el significado del signo negativo quedó ya explicado. Asimilando el elemento diferencial al error:

$$\epsilon a = -\epsilon P \cdot \cos \varphi \cdot \operatorname{sen} Z \quad (1.356.XIII)$$

y también,

$$\epsilon a = -\epsilon P \cdot \cos d \cdot \operatorname{sen} A \quad (2.356.XIII)$$

que nos permiten el análisis del error que se comete en la altura calculada como consecuencia de un error en el horario P , error que puede derivarse de una hora y/o de una longitud inexactas. El caso que interesa es el del error en la hora, cuyo efecto es el de modificar la longitud del polo de iluminación del astro observado y el navegante traza en la carta una línea de posición errada. Cuando es la longitud la causante del error en el horario, la línea de posición que se traza en la carta es exacta y el carece de influencia alguna. La figura 1.356.XIII ilustra ambos supuestos. En el primer caso, error en la hora, la línea de posición exacta es desplazada a su posición errónea; si el navegante dispone de otro lugar geométrico, la situación observada hallada por corte de ambas líneas es la S/O' en vez de la exacta S/O . En el segundo caso, error en la longitud, lo único que sucede es que las diferencias de alturas calculadas son distintas pero la situación observada obtenida es independiente del valor de esas diferencias de

alturas. Del análisis de las expresiones halladas deducimos que el máximo efecto del error se obtendrá para los instantes del corte con el primer vertical y ángulo de posición recto que, como sabemos, son circunstancias excluyentes. El error es nulo al paso de los astros por el meridiano, circunstancia en la que la altura calculada no se precisa. Las circunstancias favorables para la observación, cuando se sospecha error en la hora, son los instantes próximos a dichos pasos por el meridiano observando astros de alta

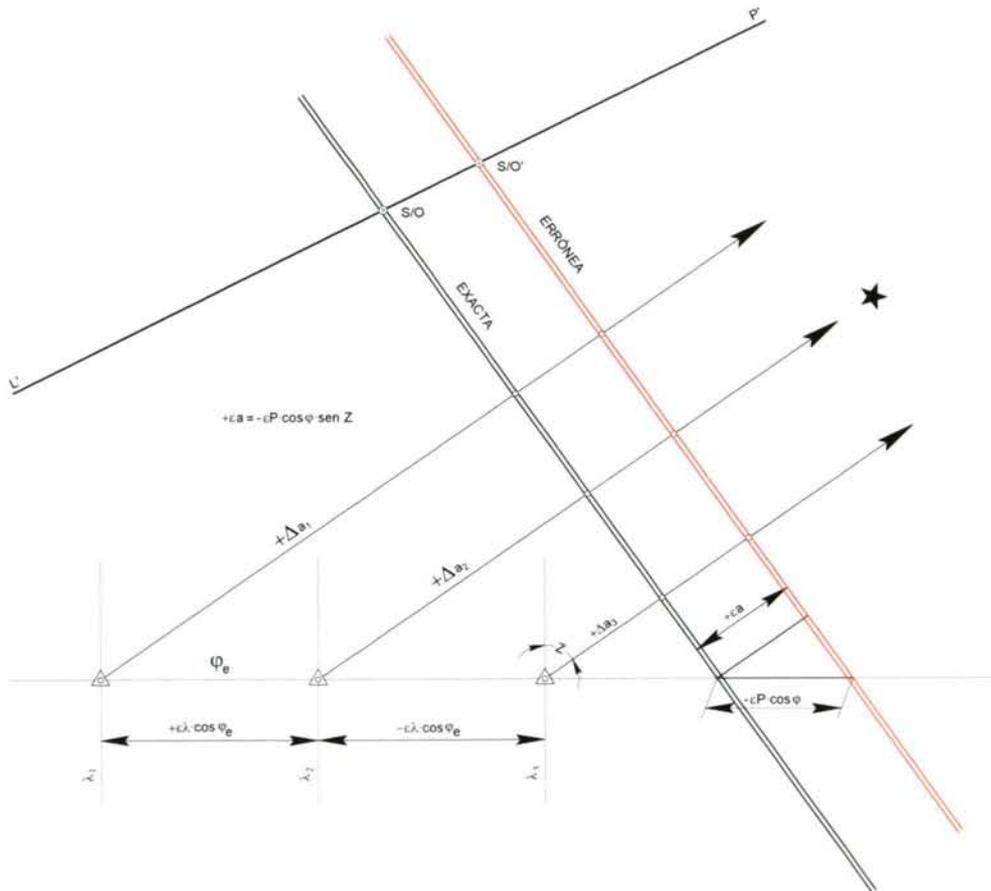


Figura - 1.357.XIII - Error en la altura calculada por un error en el horario. 1

declinación, de aquí que las observaciones de la estrella Polar no requieran de una hora de gran precisión; incluso un error de varios minutos tiene nula influencia en el resultado final, al ser la declinación muy próxima a los 90° y el azimut siempre cercano a 000° . La latitud por la que se navega no es variable que el navegante, en general, pueda elegir; mas desde un enfoque puramente teórico, la influencia del error decrece con la latitud y es nula en los polos. Una interpretación gráfica de lo analizado se muestra en la figura 1.358.XIII, en la que, dado que está formado por lados diferenciales podemos

considerar plano y rectángulo en O el triángulo SOO'; en él se tiene que $SO' = -\epsilon P \cdot \cos \varphi$ y $SO = +\epsilon a$, por lo tanto

$$\epsilon a = -\epsilon P \cdot \cos \varphi \cdot \text{sen } Z$$

Si en lugar de la circunferencia de alturas iguales consideramos el almicantarato, figura

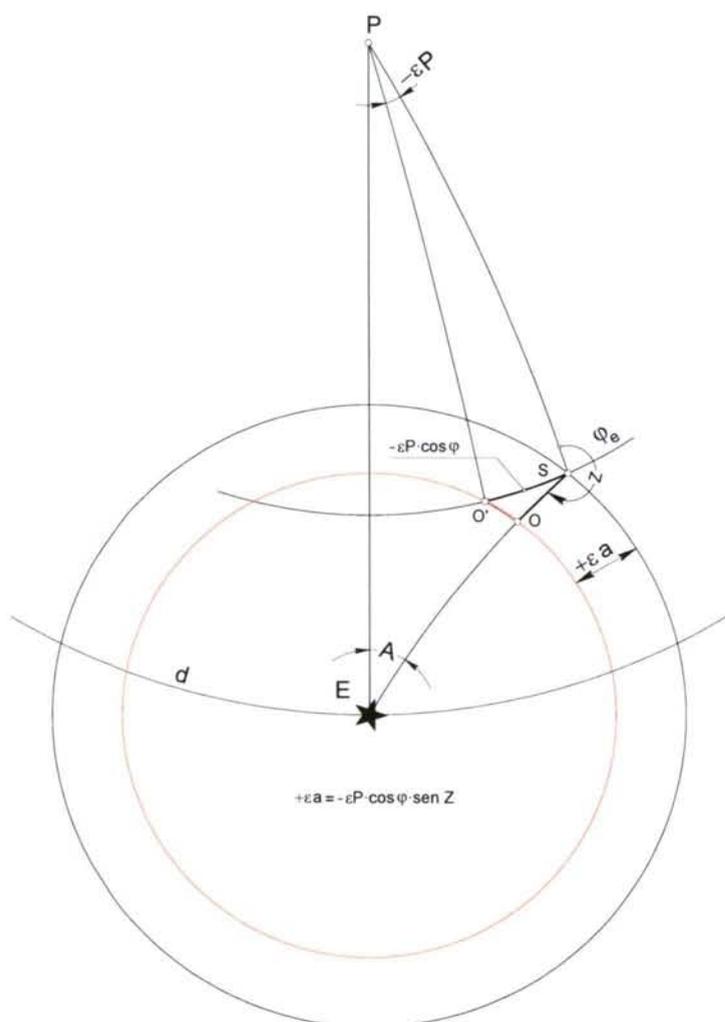


Figura - 1.358.XIII - Error en la altura calculada. 2

1.359.XIII, de idénticas consideraciones que en el caso precedente en cuanto al triángulo EA'O,

$$EA' = -\epsilon P \cdot \cos d$$

así como,

$$EO = + \epsilon a$$

De las que se obtenemos

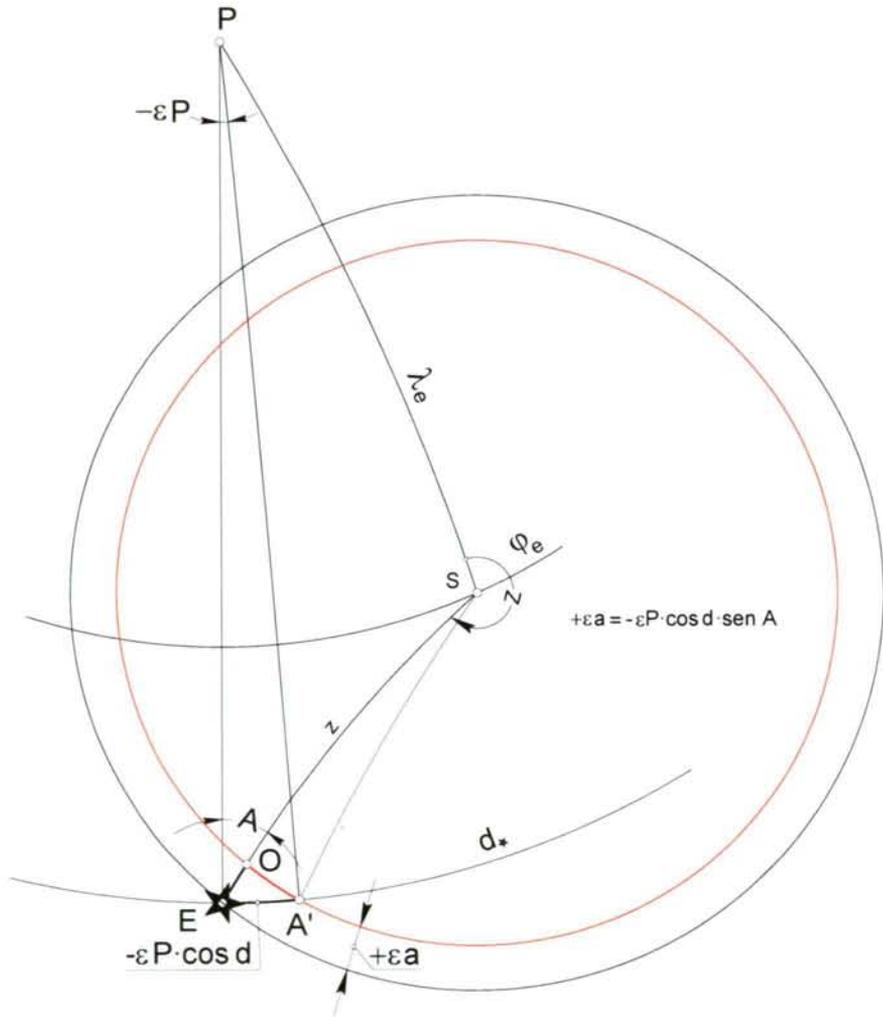


Figura - 1.359.XIII - Error en la altura calculada. 3

$$\epsilon a = - \epsilon P \cdot \cos d \cdot \text{sen } A$$

Para el análisis del error en la altura por un error en la latitud supondremos constantes P y d; y de acuerdo a (2.42.III), asimilando de nuevo los errores a los elementos diferenciales,

$$\epsilon a = \epsilon \varphi \cdot \cos Z$$

que será nulo con el astro en el primer vertical y máximo al paso por el meridiano. Las consideraciones hechas para el estudio del error en la longitud, son de aplicación en este caso; el error en la latitud solo modifica la diferencia de alturas y no afecta a la exactitud del punto aproximado, figura 1.360.XIII. Disponiendo de otra línea de posición como la PP', la situación observada S/O es independiente de este error en latitud; esto permite emplear en el cálculo una situación auxiliar en la que se redondean las

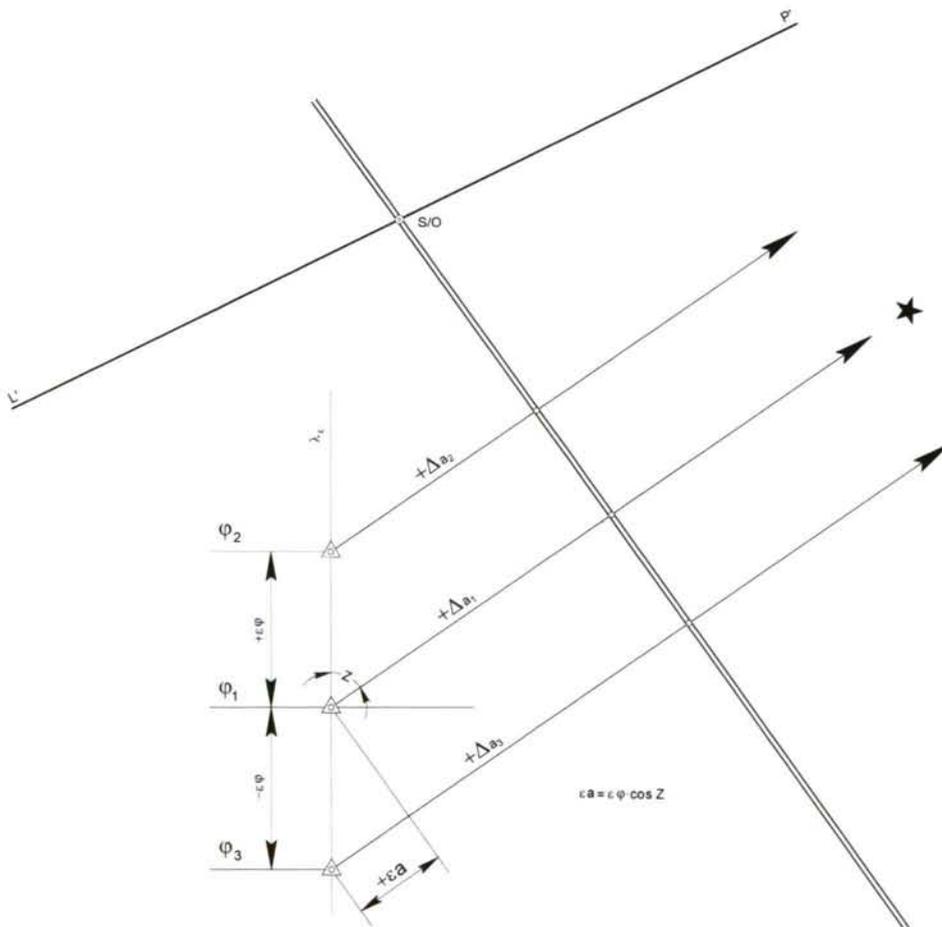


Figura - 1.360.XIII - Error en la altura calculada por un error en latitud. 1

coordenadas al medio o al grado próximos; por ejemplo, en lugar de las coordenadas $\varphi_e 38^\circ 17.3' N$, $\lambda_e 026^\circ 34.3' W$, para una mayor rapidez de cálculo y sin merma de la exactitud requerida, se podrían utilizar las coordenadas $\varphi_a 38^\circ 00.0' N$, $\lambda_a 027^\circ 00.0' W$. Al igual que en los casos precedentemente estudiados, es útil para la eficacia didáctica el análisis gráfico en un enfoque general; en el triángulo rectángulo SOO' se tiene,

$$SO = SO' \cdot \cos Z$$

por tanto,

$$|\varepsilon a| = |\varepsilon \varphi \cdot \cos Z|$$

Si el error es en la declinación, entonces se modifican las coordenadas del polo de

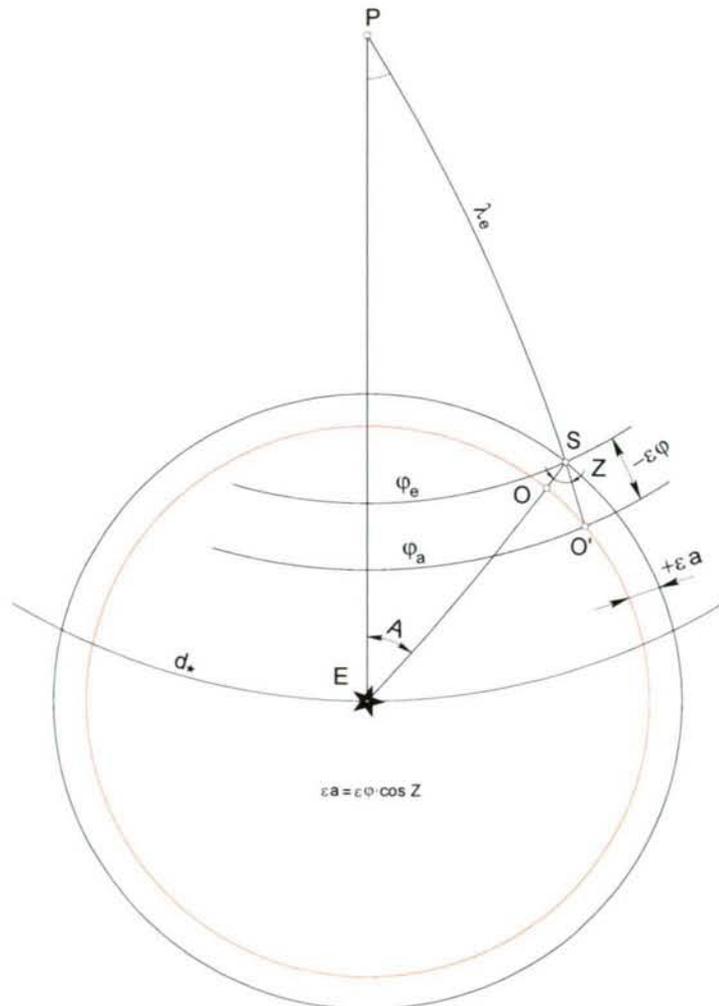


Figura - 1.361.XIII - Error en la altura calculada por error en la latitud. 2

iluminación y el determinante es inexacto. Considerando constantes φ y P , y partiendo de la misma fórmula que en el caso anterior, se tiene

$$\varepsilon a = \varepsilon d \cdot \cos A$$

El error es nulo cuando el ángulo de posición A es recto; es máximo con el astro en el meridiano. La interpretación geométrica es la indicada en la figura 1.362.XIII; en el triángulo rectángulo EOO' se tiene,

$$EO = EO' \cdot \cos A$$

luego,

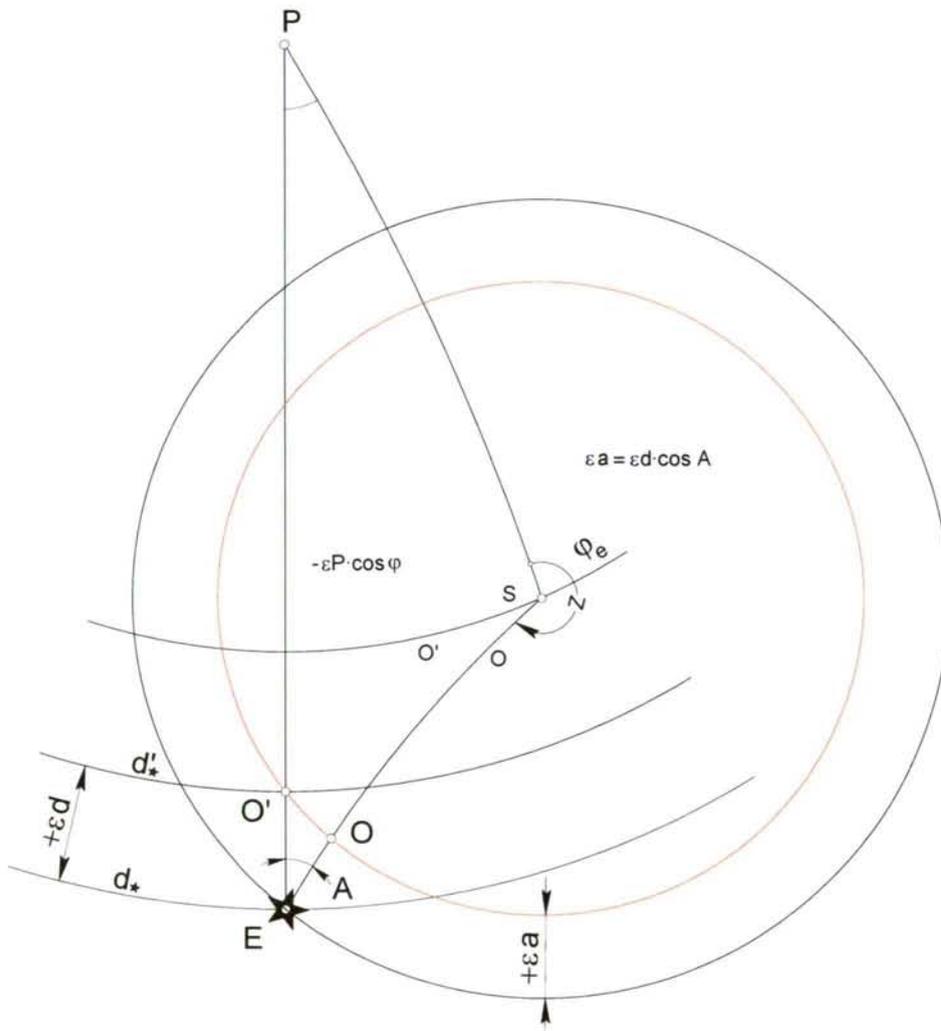


Figura - 1.362.XIII - Error en la altura calculada por un error en la declinación

$$|\varepsilon a| = |\varepsilon d \cdot \cos A|$$

5. ERRORES EN EL HORARIO CALCULADO. — Del cálculo del horario se deduce la longitud del observador y todo error en el horario calculado afecta a la

longitud. Las variables que interviene en éste cálculo son altura, latitud y declinación. La altura es la obtenida por medición directa con el sextante y debidamente corregida; en la hipótesis de la constancia de latitud y declinación, y asimilando los elementos diferenciales a los errores, de la expresión:

$$\varepsilon a = - \varepsilon P \cdot \cos \varphi \cdot \operatorname{sen} Z$$

despejando εP ,

$$\varepsilon P = - \varepsilon a \cdot \operatorname{sec} \varphi \cdot \operatorname{cosec} Z$$

El error es mínimo cuando el astro corta al vertical primario, en cuyo caso,

$$\varepsilon P = - \varepsilon a \cdot \operatorname{sec} \varphi$$

crece con la latitud, y alcanza valores inadmisibles al paso por el meridiano, de aquí los pobres resultados que en general se obtienen con los métodos ideados para el cálculo de la longitud en los instantes próximos a este acaecimiento, dada la imposibilidad de obtener una altura absolutamente exenta de error. Análogamente, si en la expresión,

$$\varepsilon a = - \varepsilon P \cdot \cos d \cdot \operatorname{sen} A$$

se despeja εP :

$$\varepsilon P = - \varepsilon a \cdot \operatorname{sec} d \cdot \operatorname{cosec} A$$

El error es mínimo cuando el astro presenta su ángulo de posición recto, crece con la declinación del astro, y, como en el caso anterior, alcanza valores inadmisibles al paso de los astros por el meridiano. Las circunstancias favorables para éste cálculo acaecen en latitudes bajas observando astros en el primer vertical; cuando se navega por latitudes más altas, observando astros de baja declinación en sus máximas disgresiones. La figura 1.364.XIII aclara el presente estudio; en el triángulo SOO' se tiene:

$$\varepsilon P \cdot \cos \varphi = \varepsilon a \cdot \operatorname{cosec} Z$$

y de esta,

$$\epsilon P = \epsilon a \cdot \sec \varphi \cdot \operatorname{cosec} Z$$

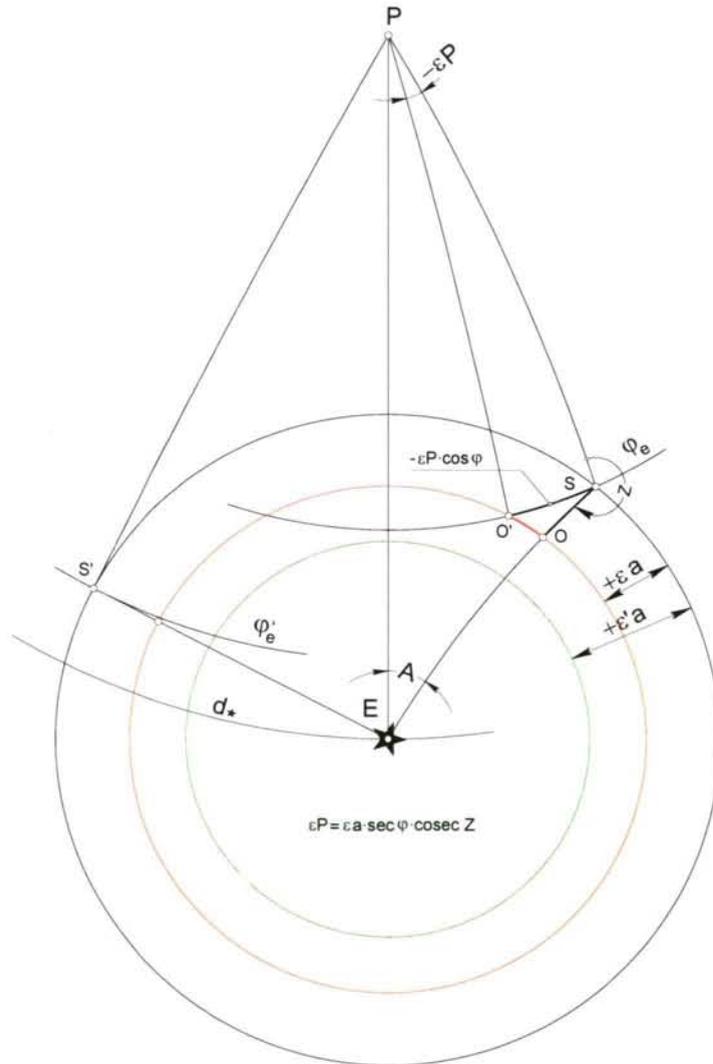


Figura - 1.364.XIII - Error en el horario por un error en la altura. 1

Aunque en la figura los elementos mostrados, exagerados para una mayor claridad, no son diferenciales, puede intuirse que para determinados valores del error, el observador en la situación S podría no obtener solución. Para el observador en S' con el astro en el vertical primario a oriente, igual error no acarrearía los mismos efectos. Una interpretación gráfica muy clara se obtiene del análisis de la figura 1.365.XIII: si el

vertical del astro tiende al meridiano, rotación ω , para un mismo error en la altura ϵa , el punto J se aleja indefinidamente por el paralelo creciendo el error en el horario de forma continua. Para la expresión que proporciona el valor del error en función del ángulo de posición, obsérvese la figura 1.366.XIII; en el triángulo rectángulo EOO' tenemos

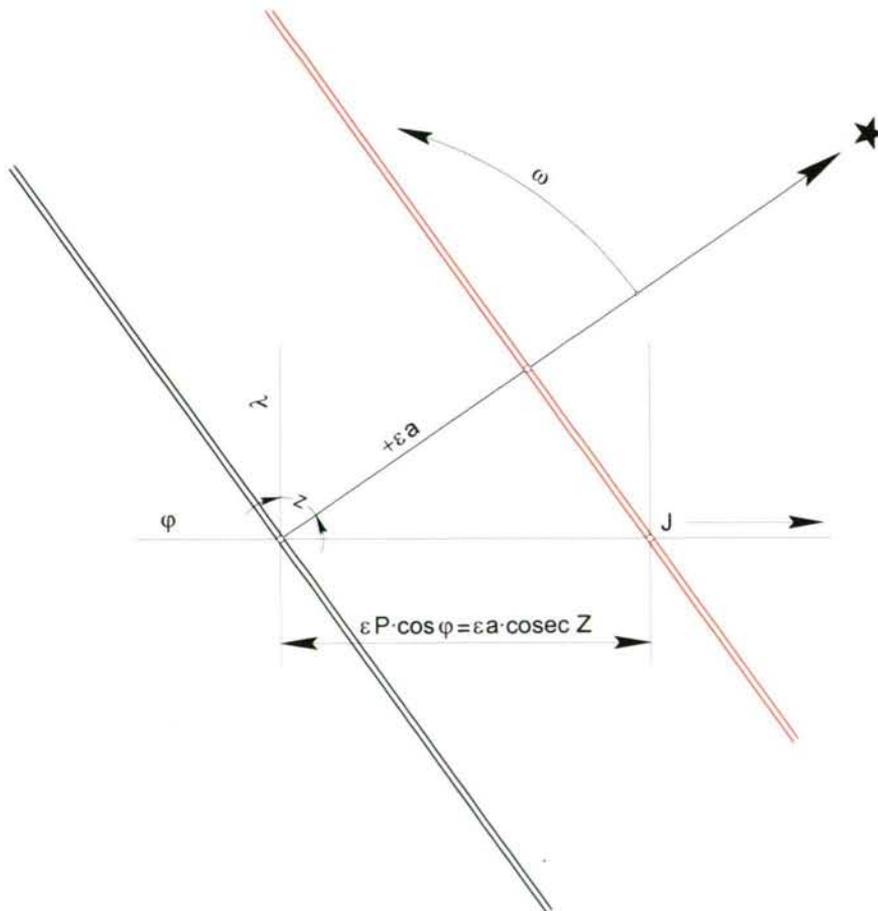


Figura - 1.365.XIII - Error en el horario calculado por un error en la altura. 2

$$EO' = EO \cdot \operatorname{cosec} A$$

por lo tanto,

$$-\epsilon P \cdot \cos d = +\epsilon a \cdot \operatorname{cosec} A$$

de la que despejando,

$$\epsilon P = -\epsilon a \cdot \sec d \cdot \operatorname{cosec} A$$

Para el estudio del error que sobre el horario calculado induce un error en la latitud, supónganse constantes altura y declinación; de (2.42.III) y (3.42.III) se obtienen:

$$\epsilon P = \epsilon \varphi \cdot \sec \varphi \cdot \cotg Z$$

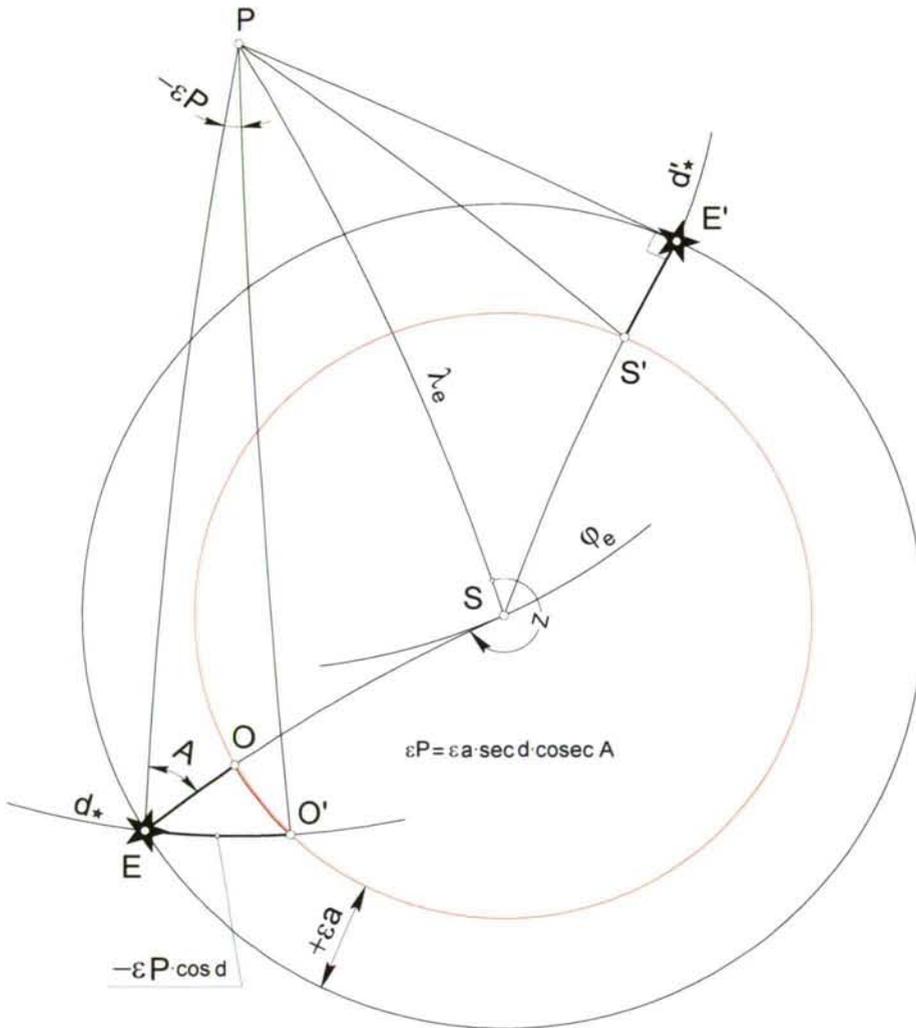


Figura - 1.366.XIII - Error en el horario calculado por un error en la altura. 3

y,

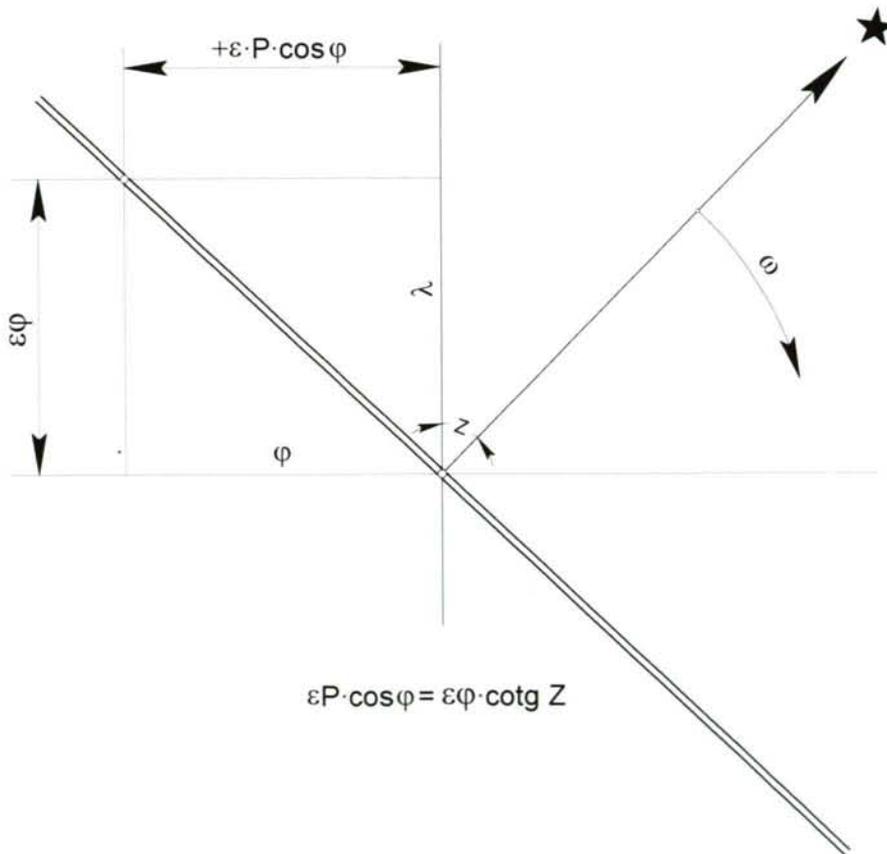
$$\epsilon P = \epsilon \varphi \cdot \sec d \cdot \cos Z \cdot \operatorname{cosec} A$$

En la primera de ellas el mínimo del error, al que como siempre en este estudio se asimila el elemento diferencial, lo encontramos para $Z=90^\circ$, el error en el horario

calculado, en este caso concreto, es nulo, abstracción hecha de $\varphi=90^\circ$; y decrece con la latitud, véase la interpretación geométrica correspondiente en figura 1.367.XIII; si el vertical tiende al paralelo, rotación ω , el error en el horario tiende a cero, independientemente del error en latitud, y la recta de altura se orienta según el meridiano. En la figura 1.368.XIII, interpretación gráfica de este análisis desde un enfoque más general, en el triángulo rectángulo SOO' , se tiene:

$$OO' = \varepsilon P \cdot \cos \varphi$$

$$SO = \varepsilon \varphi; \quad y \quad \operatorname{tg} Z = \frac{\varepsilon \varphi}{\varepsilon P \cdot \cos \varphi}$$



$$\varepsilon P \cdot \cos \varphi = \varepsilon \varphi \cdot \operatorname{cotg} Z$$

Figura - 1.367.XIII - Error en el horario calculado por un error en latitud. 1

luego,

$$\varepsilon P = \varepsilon \varphi \cdot \sec \varphi \cdot \cotg Z$$

igual que en el análisis. Para el observador en S', que tiene al astro en el vertical primario a oriente, el error es nulo ya que como es fácilmente entendible, cuando un astro corta al primer vertical la circunferencia de alturas iguales es tangente al meridiano y para pequeñas oscilaciones de la latitud del punto de tangencia la separación entre

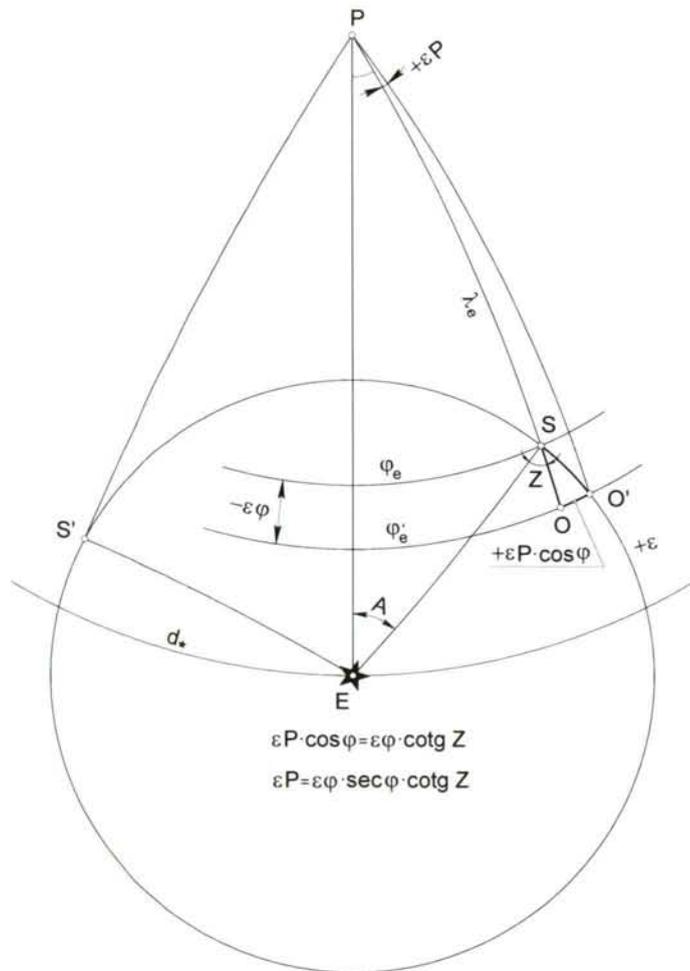


Figura - 1.368.XIII - Error en el horario calculado por un error en latitud. 2

ambas líneas es prácticamente nula.

En la segunda de las expresiones,

$$\varepsilon P = \varepsilon \varphi \cdot \sec d \cdot \cos Z \cdot \operatorname{cosec} A$$

el mínimo del error se tiene cuando $Z=90^\circ$, astro en el vertical primario, para $A=90^\circ$, ángulo de posición recto, o para $d=0^\circ$; o sea, las circunstancias favorables se cumplen observando astros de baja declinación en el vertical primario, recuérdese que los astros cortan al vertical primario sobre el horizonte cuando la declinación es menor que la latitud y de la misma especie; observando astros de baja declinación en los instantes de su ángulo de posición recto, como los astros presentan su ángulo paraláctico recto cuando la declinación es mayor que la latitud y de su misma especie, esta condición exige bajas latitudes, y la latitud no es variable que el navegante pueda seleccionar. Puesto que la expresión analizada se deriva de la anterior al sustituir $\cos \varphi \cdot \sin Z$ por $\cos d \cdot \sin A$, la interpretación geométrica es la misma que la de la figura anterior.

En el supuesto que las constantes sean latitud y altura, el error en el horario calculado por un error en la declinación tiene por expresión:

$$\varepsilon P = \varepsilon d \cdot \sec d \cdot \cotg A$$

y,

$$\varepsilon P = \varepsilon d \cdot \sec \varphi \cdot \cos A \cdot \operatorname{cosec} Z$$

ambas deducidas de las (2.42-III) y (3.42-III) y sustituidos los elementos diferenciales por los errores. Los análisis de sus máximos y mínimos y circunstancias favorables son los mismos que los del caso precedente; su interpretación geométrica se ilustra en la figura 1.370.XIII. En el triángulo rectángulo EOO' se tiene:

$$EO = \varepsilon d$$

$$OO' = \varepsilon P \cdot \cos d$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\varepsilon d}{\varepsilon P \cdot \cos d}$$

de las que deducimos,

$$\epsilon P = \epsilon d \cdot \sec d \cdot \cotg A;$$

la misma expresión que se había obtenido por análisis. Para el astro E', en circunstancias favorables de ángulo de posición recto, los errores en la declinación

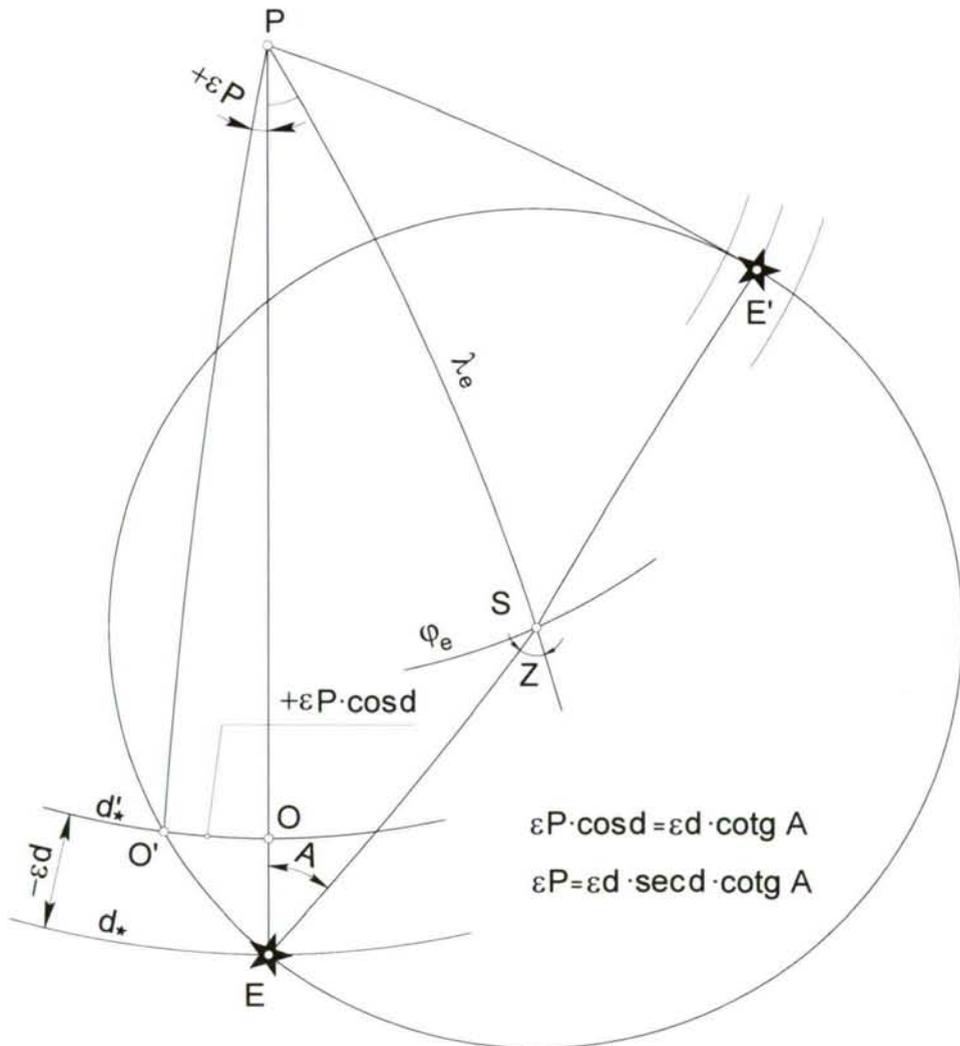


Figura - 1.370.XIII - Error en el horario calculado por error en declinación

tienen efecto nulo sobre el horario calculado por ser el meridiano tangente a la circunferencia de alturas iguales.

6. ERRORES EN LA LATITUD CALCULADA. — Los errores en la latitud son función de los errores en altura, declinación y horario local. Considerando constantes

declinación y horario, de (2.42.III) y (3.42.III), y asimilando los elementos diferenciales a los errores tendremos:

$$\epsilon \phi = \epsilon a \cdot \sec Z$$

que, claro está, nos dice que las circunstancias favorables para este cálculo ocurren con el astro en el meridiano. Si el astro se encuentra en las proximidades del primer vertical,

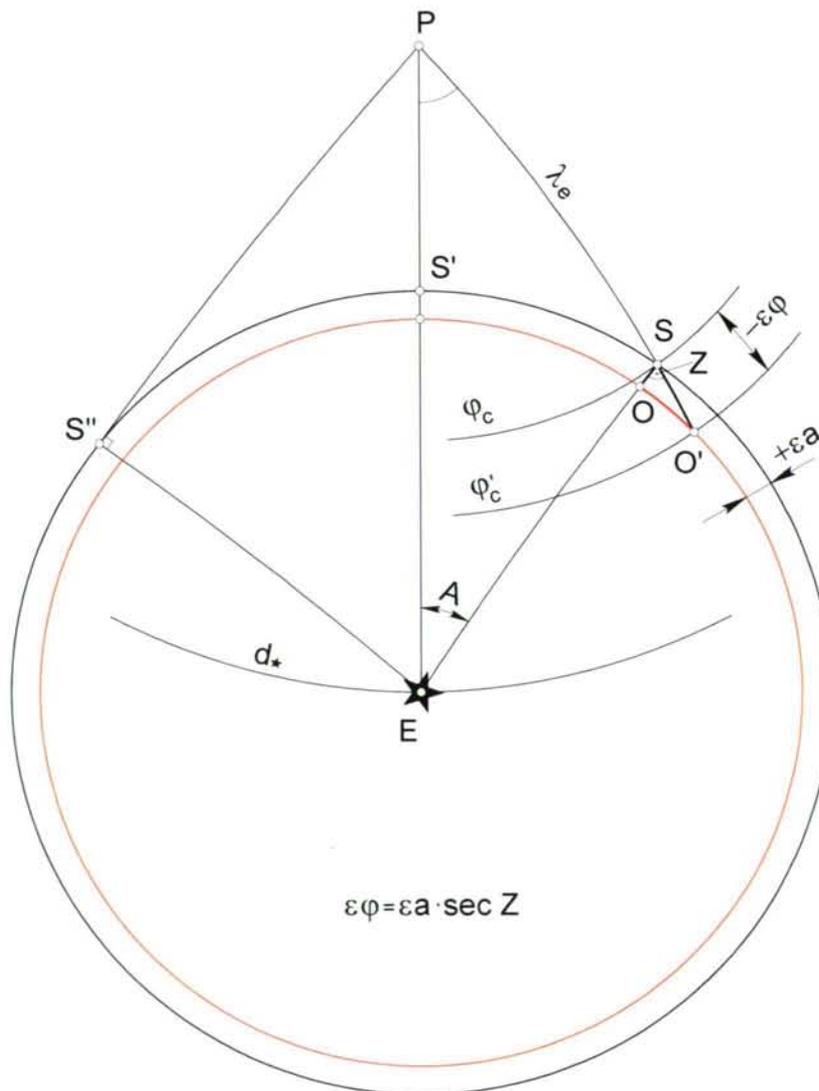


Figura - 1.371.XIII - Error en latitud por un error en la altura. 1

el error puede alcanzar valores inaceptables; la interpretación geométrica es la siguiente, figura 1.371.XIII, en el triángulo SOO' es:

$$\varepsilon \varphi = \varepsilon a \cdot \sec Z$$

expresión que ya se había obtenido por análisis. El observador en la situación S", con el astro en el vertical primario, no obtiene corte de la circunferencia de alturas iguales errónea con su meridiano, que es tangente a la exacta, como ya se ha visto. Para el observador en S', con el astro en el meridiano, el error es el mínimo e igual al error en la altura. Si analizamos el determinante de la recta de altura, figura 1.372.XIII, comprobaremos que si el vertical tiende al paralelo, rotación ω , el punto determinante B se aleja indefinidamente.

Considerando constantes altura y declinación se obtendrá el error que se comete en la latitud como consecuencia de un error en el horario. De nuevo, de las expresiones

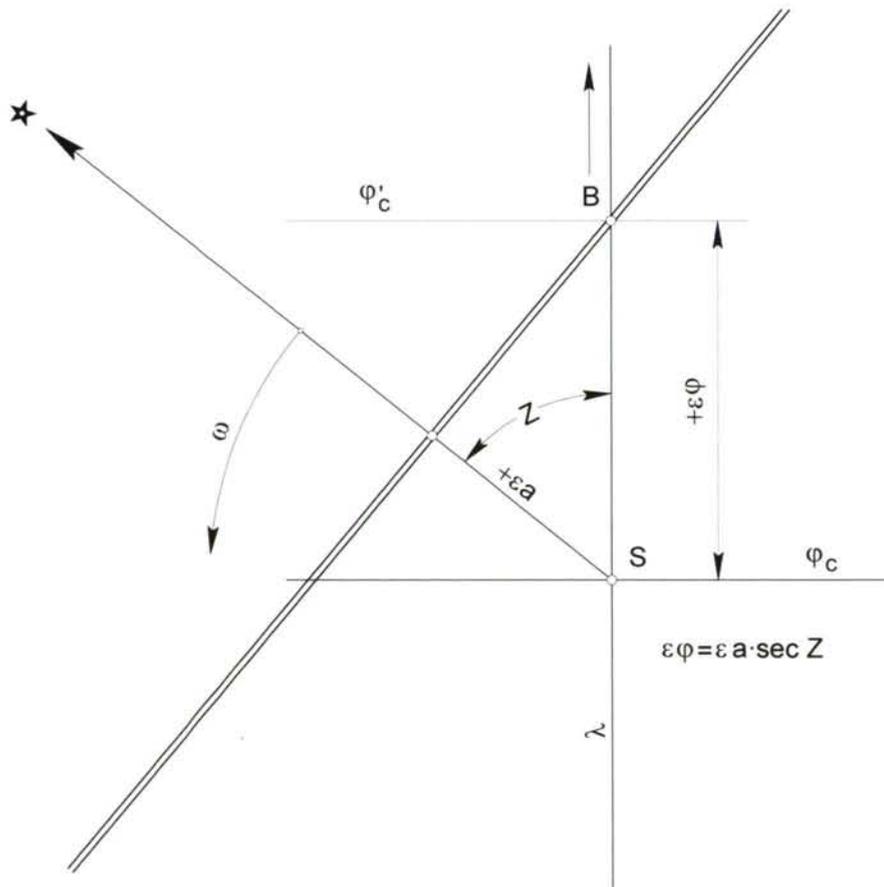


Figura - 1.372.XIII - Error en latitud por un error en la altura. 2

(2.42.III) y (3.42.III) obtenemos:

$$\varepsilon \varphi = \varepsilon P \cdot \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} Z$$

y también,

$$\varepsilon \varphi = \varepsilon P \cdot \cos d \cdot \sec Z \cdot \operatorname{sen} A$$

En la primera de ellas se comprueba que el error es nulo al paso de los astros por el meridiano y alcanza valores inaceptables en el primer vertical. La interpretación geométrica se expone en la figura 1.373.XIII: en el triángulo rectángulo SOO' se tiene que,

$$OO' = -\varepsilon \varphi$$

$$OS = +\varepsilon P \cdot \cos \varphi$$

$$\operatorname{tg} Z = \frac{\varepsilon \varphi}{\varepsilon P \cdot \cos \varphi}$$

y atendiendo únicamente a los valores absolutos,

$$\varepsilon \varphi = \varepsilon P \cdot \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} Z$$

Para el observador en S', con el astro en el meridiano, el error es nulo puesto que el paralelo es tangente a la circunferencia de alturas iguales; para pequeños errores en el horario las oscilaciones de la latitud son despreciables. Encontramos de nuevo aquí la justificación al hecho de que en las observaciones meridianas no se requiera gran precisión en la hora. Por el contrario, para el observador S'' que tiene al astro cerca del primer vertical, pequeños errores en el horario local ocasionan grandes variaciones en la latitud. Del análisis de la recta de altura para el presente caso, en la figura 1.375.XIII se observa que si el vertical tiende al meridiano, rotación ω , el punto B tiende al paralelo anulándose el error; si el vertical tiende al paralelo, rotación $-\omega$, el punto B se aleja continuamente y el error crece.

Del análisis de la segunda expresión,

$$\varepsilon \varphi = \varepsilon P \cdot \cos d \cdot \sec Z \cdot \operatorname{sen} A$$

se derivan análogas conclusiones; las circunstancias favorables concurren observando al paso por el meridiano astros de declinación alta.

Para el estudio que un error en la declinación del astro origina en la latitud calculada supondremos constantes altura y horario; de la expresiones (2.42.III) o (3.42.III) obtendremos:

$$\varepsilon \varphi \cdot \cos Z = - \varepsilon d \cdot \cos A$$

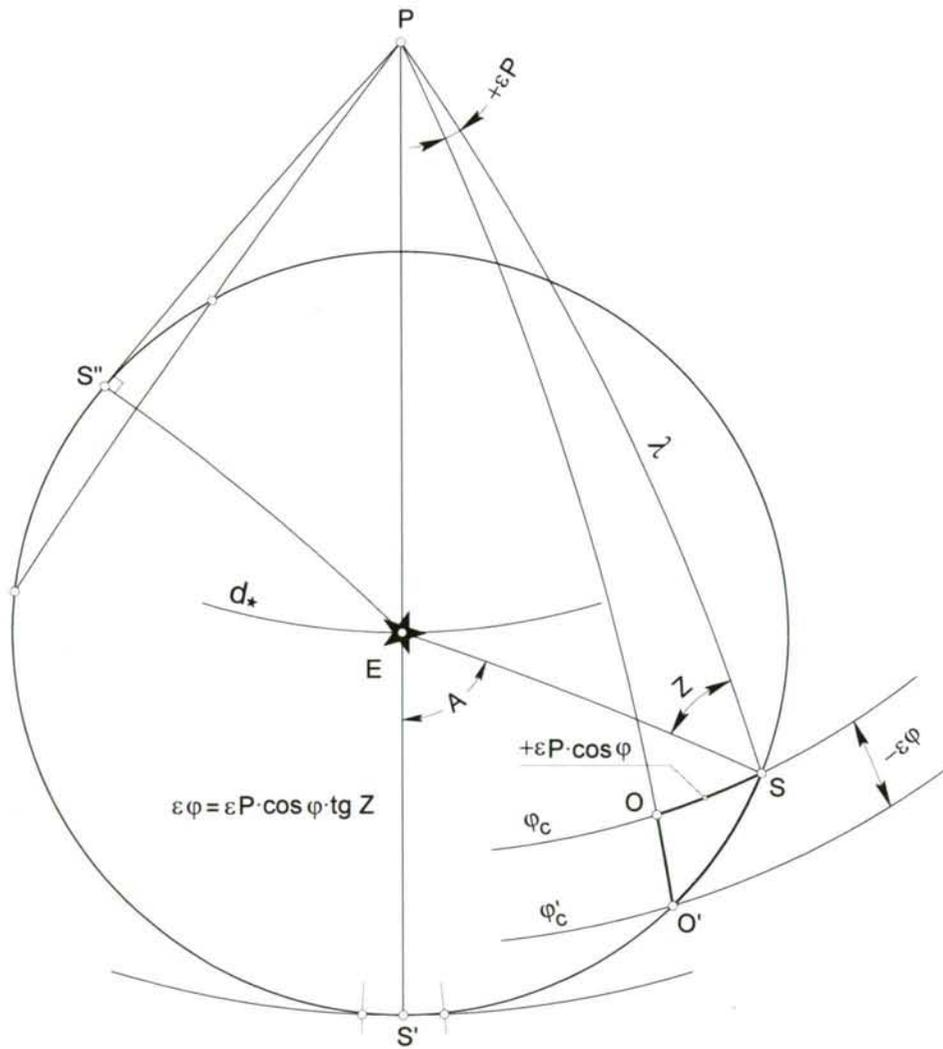


Figura - 1.374.XIII - Error en latitud por un error en el horario. 1

es decir,

$$\varepsilon \varphi = - \varepsilon d \cdot \cos A \cdot \sec Z$$

y las circunstancias favorables suceden con el astro en el meridiano, caso en el que

el error en latitud es igual al error en declinación, y con el ángulo de posición recto en que el efecto del error es nulo. Las condiciones más desfavorables corresponden al astro en el primer vertical donde el error alcanza proporciones inaceptables. La interpretación geométrica de este caso se muestra en la figura 1.376. XIII; En el triángulo rectángulo EO''O' se tiene.

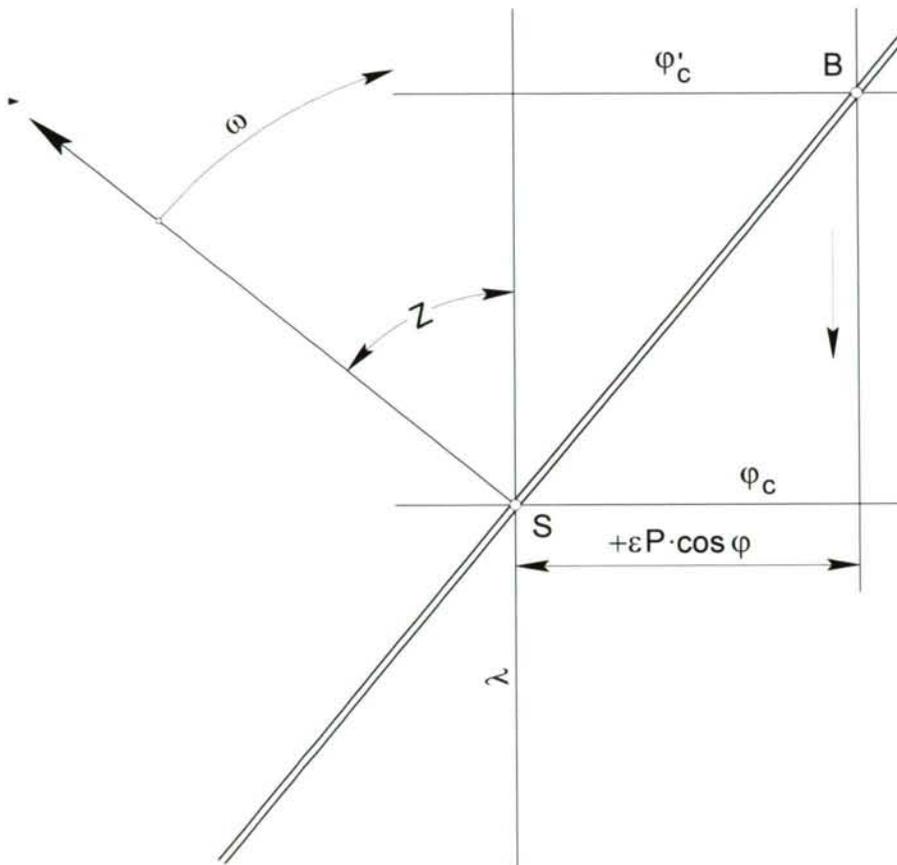


Figura - 1.375.XIII - Error en latitud por un error en el horario. 2

$$E'O'' = \epsilon d \cdot \cos A$$

En el SOO' siendo SO = E'O'',

$$\epsilon \varphi = - \epsilon d \cdot \cos A \cdot \sec Z;$$

la misma expresión que nos dio el análisis. Para el observador situado en S', con el astro en el meridiano, el error $\epsilon \varphi$ es igual al error $\epsilon \varphi$; el error es nulo en el caso del

observador S'' para el que el ángulo de posición es recto, y alcanza valores inaceptables en los observadores que como el S''' tiene al astro en el vertical primario. Como conclusión diremos que las circunstancias favorables para el cálculo del horario en función de altura, latitud y declinación, ocurren observando astros de baja declinación (no superior a 30°, [FLORA-82]), en el instante del paso por el vertical

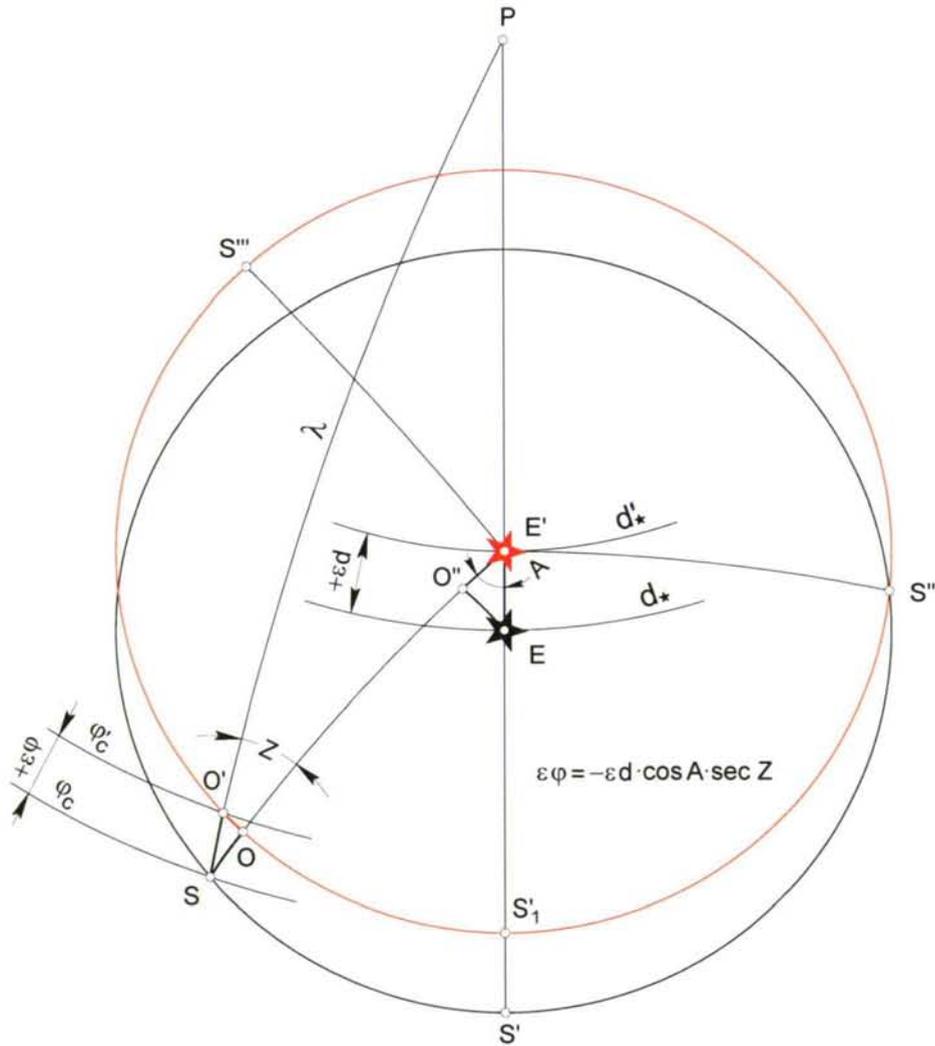


Figura - 1.376.XIII - Error en latitud por un error en declinación

primario ($Z = 90^\circ$), o, para los astros que no cortan el primer vertical, en el instante de la máxima disgresión (ángulo de posición recto, $A = 90^\circ$). Para el cálculo de la altura en función de horario, declinación y latitud las circunstancias favorables, que dependen de la variable afectada de error, en general, son las de paso por el primer vertical y ángulo de posición recto, y para el cálculo de la latitud los instantes del paso por el meridiano

si el error es en la hora o en la altura, y los de ángulo paraláctico recto si el error es en declinación.

Finalmente recordar que los errores en la hora no son sistemáticos salvo el improbable caso de un observador en el ecuador, observando astros de declinaciones iguales, de distinta especie y con la misma altura, y para el cual los triángulos de posición de uno y otro astro serían simétricos y, por lo tanto, la variación de altura la misma. Efectivamente, particularizando para los astros A y B la expresión diferencial de la altura en función del horario:

$$da_A = -dP_A \cdot \cos \varphi \cdot \operatorname{sen} Z_A$$

$$da_B = -dP_B \cdot \cos \varphi \cdot \operatorname{sen} Z_B$$

y para que $da_A = da_B$, condición de error sistemático, siendo $dP_A = dP_B$, tienen que ser iguales Z_A y Z_B , y, por lo tanto, $a_A = a_B$, y salvo en las citadas excepcionales condiciones, los astros A y B tendrían que ser el mismo astro.

7. ERRORES EN EL AZIMUT CALCULADO. — El azimut se calcula, generalmente, en función de las variables latitud, declinación y horario; la precisión requerida no va más allá del grado, rango de precisión que en circunstancias normales y para los errores usuales en la navegación, es alcanzado sin dificultad. Puesto que este cálculo a bordo se destina a determinar la orientación de la línea proa-popa, rumbo del buque, y para la orientación del vertical en el trazado de la recta de altura, todo error en el azimut provoca un error en el rumbo y por lo tanto en la estima, y en la orientación del vertical, lo que origina un giro de la recta de altura de magnitud igual a la del error en estudio. Es necesario conocer en que condiciones tal error puede alcanzar los valores máximo y mínimo, para, dependiendo de las necesidades prácticas, evaluar convenientemente el grado de fiabilidad de los resultados obtenidos. En el triángulo OO'E de la figura 1.378.XIII, en la que $Z' = 180^\circ - Z$:

$$\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{sen} \varepsilon \varphi = \cos \varepsilon \varphi \cdot \cos Z - \operatorname{sen} Z \cdot \frac{\cos Z'}{\operatorname{sen} Z'}$$

en la que haciendo $\operatorname{sen} \varepsilon \varphi = \varepsilon \varphi$, $\cos \varepsilon \varphi = 1$, $Z' - Z = \varepsilon Z$ y, finalmente, $Z' \approx Z$, llegamos a,

$$\epsilon Z = \epsilon \phi \cdot \text{sen } Z \cdot \text{tg } a$$

de la que se deduce que el error es nulo al orto y al ocaso, instantes en los que el azimut carece de utilidad en cuanto a la recta de altura; es nulo con el astro en el meridiano; crece con el azimut alcanzando el máximo con el astro en el primer vertical,

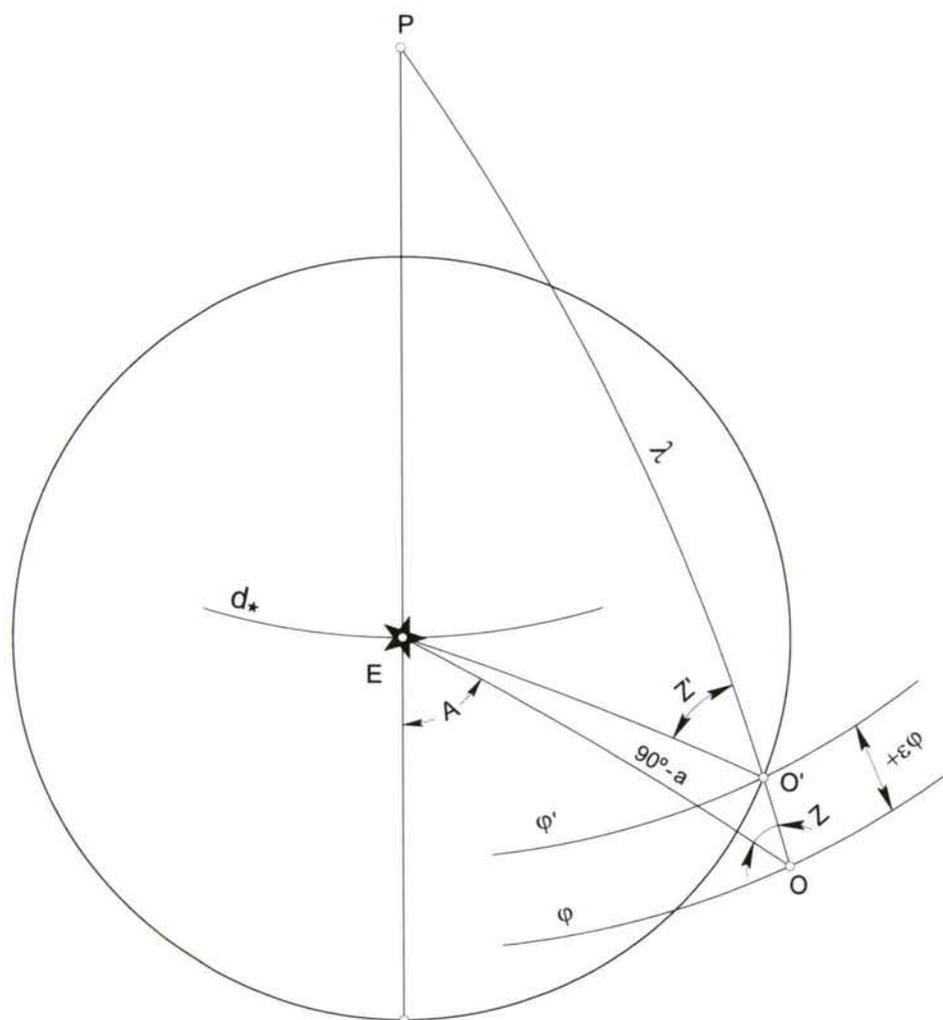


Figura - 1.378.XIII - Error en azimut por un error en latitud

y crece con la altura.

Para un error en la declinación, en la figura 1.379.XIII, en el triángulo ESE' tenemos:

$$\epsilon d \cdot \text{sen } A = \epsilon Z \cdot \text{cos } a$$

y de esta,

$$\varepsilon Z = \varepsilon d \cdot \frac{\text{sen } A}{\text{cos } a}$$

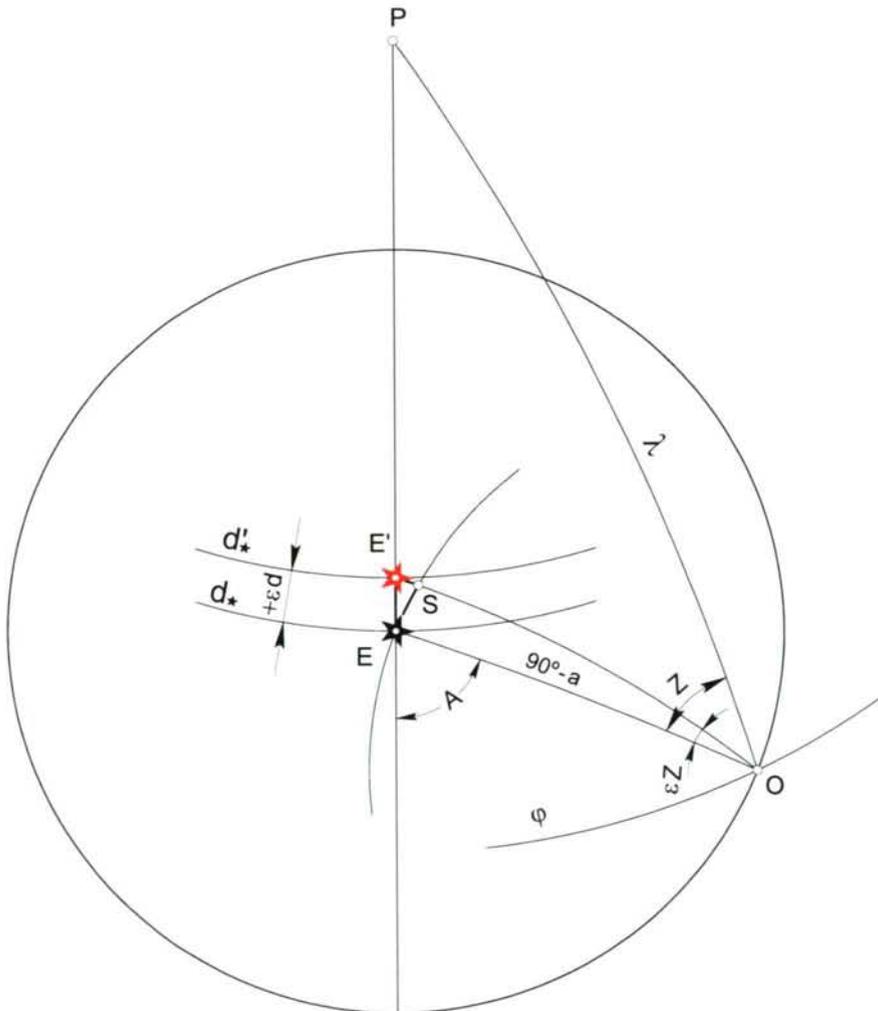


Figura - 1.379.XIII - Error en azimut por error en declinación

que nos dice que el error será nulo con el astro en el meridiano; es mínimo al orto y al ocaso, con iguales consideraciones que para el caso de error en latitud.

Si el error es en el ángulo en el polo u horario local, en la figura 1.380.XIII, en el triángulo rectángulo ESO' tenemos:

$$\cos A = \frac{\varepsilon Z \cdot \cos a}{\varepsilon P \cdot \cos d}$$

por lo tanto,

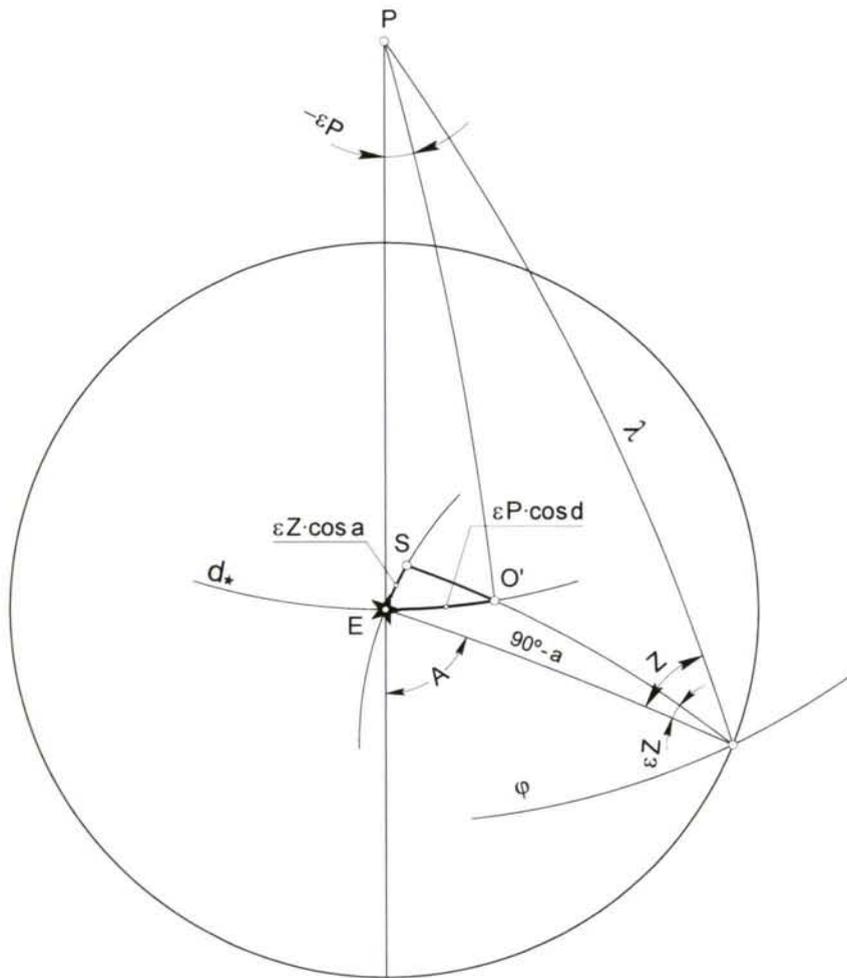


Figura - 1.380.XIII - Error en azimut por error en el horario local

$$\varepsilon Z = \varepsilon P \cdot \frac{\cos d}{\cos a} \cdot \cos A$$

de la que se concluye que el error es nulo en los instantes del ángulo de posición recto, decrece al aumentar la declinación y es mínimo al orto y al ocaso, circunstancias ya analizadas.

El valor absoluto del error total en el azimut es la suma de los valores absolutos de los errores parciales con origen en cada una de las variables:

$$\varepsilon Z = \varepsilon \varphi \cdot \frac{\text{sen } a}{\text{cos } a} \cdot \text{sen } Z + \varepsilon d \cdot \frac{\text{sen } A}{\text{cos } a} + \varepsilon P \cdot \frac{\text{cos } d}{\text{cos } a} \cdot \text{cos } A$$

El mínimo de esta expresión se cumplirá cuando sean máximos los denominadores y mínimos los numeradores; la primera condición se verificará al orto y al ocaso, la segunda al paso por el meridiano para el primero y segundo sumandos y al tener el astro el ángulo paraláctico recto. La presencia de la declinación en el numerador de este último indica la necesidad de observar astros de gran declinación.

CAPÍTULO XIV

SITUACIÓN OBSERVADA POR CORTE DE DOS O MÁS RECTAS DE ALTURA BISECTRIZ DE ALTURA

1. SITUACIÓN POR CORTE DE DOS RECTAS DE ALTURA. — La observación simultánea de dos alturas proporciona dos rectas de altura cuyo punto de corte es la situación del navegante astronómicamente obtenida. Si las alturas son exactas, cada una de las dos rectas de altura es el lugar geométrico de la posición del observador y, por lo tanto, su punto de intersección ha de ser la verdadera posición del buque.

Cuando las alturas no son simultáneas, caso general en la mar porque la observación la efectúa un solo observador, y, puesto que el buque navega a su rumbo y velocidad, es preciso trasladar mediante estima la primera recta de altura al tiempo de observación de la segunda, o, preferentemente, reducir la primera altura al horizonte en la que se toma la segunda, hallándose la situación de igual manera, es decir, por el corte de las dos rectas de altura como si se hubiesen observado simultáneamente. En orden a minimizar los errores derivados del citado traslado o reducción, se hace necesario acortar lo máximo posible el intervalo de tiempo que transcurre entre una y otra observación, requiriéndose, además, que el ángulo que forman los verticales tienda a 90° , si el error accidental prevalece sobre el sistemático, o se aproxime lo más posible a 60° , si es éste último error el predominante.

A consecuencia de los inevitables errores, la situación por dos rectas de altura está sujeta a cierto nivel de incertidumbre que se reduce al observar tres o, mejor, cuatro astros; así, las diferentes rectas de altura nos facilitan cierto criterio de control de unas sobre otras.

2. ERROR EN LA SITUACIÓN CON DOS RECTAS DE ALTURA. — El error en la situación es función de los errores en las rectas, y cada una de ellas viene afectada de inexactitudes derivadas de los errores accidentales y sistemáticos en la medida de

las alturas, de errores en la hora, errores en la estima o en la reducción, y errores que emanan de la sustitución del arco de circunferencia de alturas iguales por el arco de loxodrómica tangente en el punto determinante. Vemos de esta manera que el error total en la situación observada tiene su origen en los citados diferentes errores parciales que examinamos seguidamente.

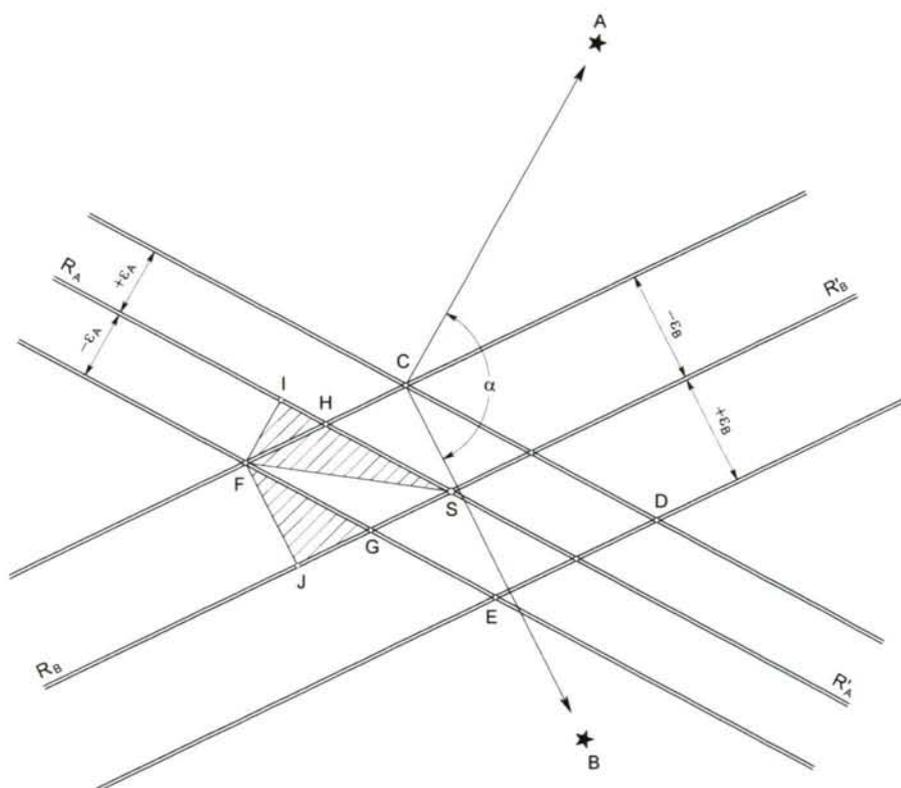


Figura - 1.383.XIV - Máximo error en la situación observada

3. ERRORES EN LAS ALTURAS OBSERVADAS. — Vimos que el error en la recta de altura como consecuencia de los errores en la altura observada (capítulo XII, pág. 331 y sig.), obliga a considerar en lugar de la recta de altura como línea de posición, una zona de certidumbre cuyo eje es la recta de altura errónea y de amplitud el doble del error total probable sobre la altura observada. Las dos rectas de altura que determinarían la posición del observador, en general, están afectadas de errores diferentes; sus respectivas zonas de certidumbre son, entonces, de diferente amplitud, y la intersección de ambas zonas define el denominado paralelogramo de seguridad o

paralelogramo de error, el CDEF de la figura 1.383.XIV, dentro del cual, muy probablemente, se encuentre el observador. Para que el error en la situación observada obtenida por corte de dos rectas de altura sea mínimo, es preciso que:

I) Cuando el error accidental supera al sistemático, las dos rectas de altura se corten ortogonalmente.

II) Si el error que prevalece es el sistemático, las dos rectas de altura deben cortarse con un ángulo de 60°.

Recordemos que el error total ϵ_t sobre cada altura observada se compone de dos partes, la primera es la suma de los errores sistemáticos ϵ_s , y la segunda la suma de los errores accidentales ϵ_a ; o sea:

$$\epsilon_t = \epsilon_s + \epsilon_a$$

Si a_A y a_B son las alturas verdaderas de los astros A y B, en base a las cuales se trazan las rectas de altura, será:

$$\epsilon_{tA} = \epsilon_s + \epsilon_{aA}$$

para la altura del astro A, y:

$$\epsilon_{tB} = \epsilon_s + \epsilon_{aB}$$

para el B. Los errores sistemáticos son los mismos, variando los accidentales.

La experiencia demuestra que si las observaciones son simultáneas, o casi simultáneas, el error sistemático, en general, supera al accidental. Si entre ambas observaciones transcurre un intervalo de tiempo grande, el error accidental es mayor que el sistemático. Tales diferencias se fundamentan en el hecho de que, siendo el más notable de los errores accidentales el que se deriva de la depresión del horizonte aparente, que puede ser anormal y alcanzar en circunstancias excepcionales valores que exceden la decena de minutos de arco sobre el valor medio, superando a todos los otros errores; si las alturas se observan simultáneamente las condiciones de mar y atmosféricas, humedad, temperatura, presión etc, son las mismas para ambas y el error es sistemático. Si ambas alturas se observan muy separadas en el tiempo las condiciones de mar y atmosféricas cambian al variar la presión, temperatura, humedad etc, la corrección por depresión es diferente para cada una de ellas y el error, que ahora

es accidental, prevalece sobre los sistemáticos. No obstante esto, deberemos tener presente que aún en el caso de observaciones simultáneas puede prevalecer el error accidental sobre el sistemático si las condiciones de mar , viento, línea del horizonte poco o mal definida etc, dificultan la observación.

l) Error accidental ϵ_a mayor que el sistemático ϵ_s .- Partiendo del supuesto de que el error accidental ϵ_a prevalece sobre el sistemático ϵ_s , sea ϵ_A el error total sobre la recta de altura del astro A y ϵ_B el error total sobre la recta de altura del B, en el caso de observaciones no simultáneas. Tracemos la recta $R_A-R'_A$, figura 1.383.XIV, y sus paralelas distantes de esta $\pm\epsilon_A$ definiendo la primera zona de posición de amplitud $2\cdot\epsilon_A$, y la recta de altura $R_B-R'_B$ con su zona de posición de amplitud $2\cdot\epsilon_B$; las dos zonas de posición se cortan según el paralelogramo CDEF, conocido por paralelogramo de error o certidumbre. Si ambas rectas de altura fueran exactas, la situación observada correspondería al punto S, mas la existencia de errores implica que tal situación será un punto indeterminado del paralelogramo de certidumbre, paralelogramo cuya superficie S_ϵ viene dada, en millas cuadradas, por la expresión:

$$S_\epsilon = \frac{4 \cdot \epsilon_A \cdot \epsilon_B}{\text{sen } \alpha}$$

que demuestra que su mínimo valor corresponde al ángulo $\alpha=90^\circ$, y puesto que la incertidumbre aumenta al aumentar esta superficie, es claro que la menor incertidumbre corresponde, precisamente, a éste valor del ángulo α , encontrando una primera justificación al objetivo de la mutua perpendicularidad de las rectas de altura.

El error máximo en la situación observada obtenida sucede cuando esta cae, bien en el punto D, o bien en el punto F, extremos de la mayor diagonal del citado paralelogramo de error, cuya expresión se obtiene como sigue:

En el triángulo FHS,

$$\overline{FS}^2 = \overline{FH}^2 + \overline{SH}^2 - 2 \cdot \overline{FH} \cdot \overline{SH} \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

es decir,

$$\overline{FS}^2 = \overline{FH}^2 + \overline{SH}^2 + 2 \cdot \overline{FH} \cdot \overline{SH} \cdot \cos \alpha.$$

En el triángulo rectángulo FIH, y atendiendo a los valores absolutos:

$$\overline{FH} = \frac{\varepsilon_A}{\text{sen } \alpha},$$

y en el triángulo rectángulo FJG, dado que FG=HS,

$$\overline{HS} = \frac{\varepsilon_B}{\text{sen } \alpha};$$

valores que sustituidos en la primera nos dará,

$$\overline{FS}^2 = \frac{\varepsilon_A^2}{\text{sen}^2 \alpha} + \frac{\varepsilon_B^2}{\text{sen}^2 \alpha} + 2 \cdot \frac{\varepsilon_A \cdot \varepsilon_B}{\text{sen}^2 \alpha} \cdot \cos \alpha,$$

de la cual:

$$\overline{FS} = \sqrt{\frac{\varepsilon_A^2 + \varepsilon_B^2 + 2 \cdot \varepsilon_A \cdot \varepsilon_B \cdot \cos \alpha}{\text{sen}^2 \alpha}}$$

Cuando el ángulo α , es decir, la diferencia de azimutes, es 90° o 270° , el error es el menor posible al ser el denominador $\cos \alpha = 1$, máximo, y el numerador,

$$\sqrt{\varepsilon_A^2 + \varepsilon_B^2}$$

mínimo. El paralelogramo de error en tal caso se reduce a un rectángulo, o, si los errores son iguales, a un cuadrado. Si el ángulo α tiende a cero, el denominador tiende a anularse y el error crece indefinidamente, por lo que se asume como ángulo límite el de $\alpha = 30^\circ$. Como conclusión diremos que cuando el error accidental ε_a prevalece sobre el sistemático ε_s , para que el error en la situación observada por corte de dos rectas de altura sea mínimo, es necesario que los verticales de los astros observados se corten con un ángulo lo más cercano posible a 90° , y en ningún caso inferior a los 30° .

1) Error sistemático ε_s mayor que el accidental ε_a .- Éste caso, en general, corresponde al de una observación de dos alturas simultáneas o casi simultáneas, o, en todo caso, separadas por un intervalo de unos pocos minutos entre una y otra. Puesto que cómo en el caso precedente se ignora el signo del error, se contempla un paralelogramo de seguridad CDEF, figura 1.387.XIV, pero al predominar el error sistemático sobre el accidental, las rectas se desplazan en el sentido del azimut, o en sentido contrario, resultando que la situación observada no puede caer indiferentemente en cualquiera de los cuatro vértices de los ángulos formados por las rectas de altura

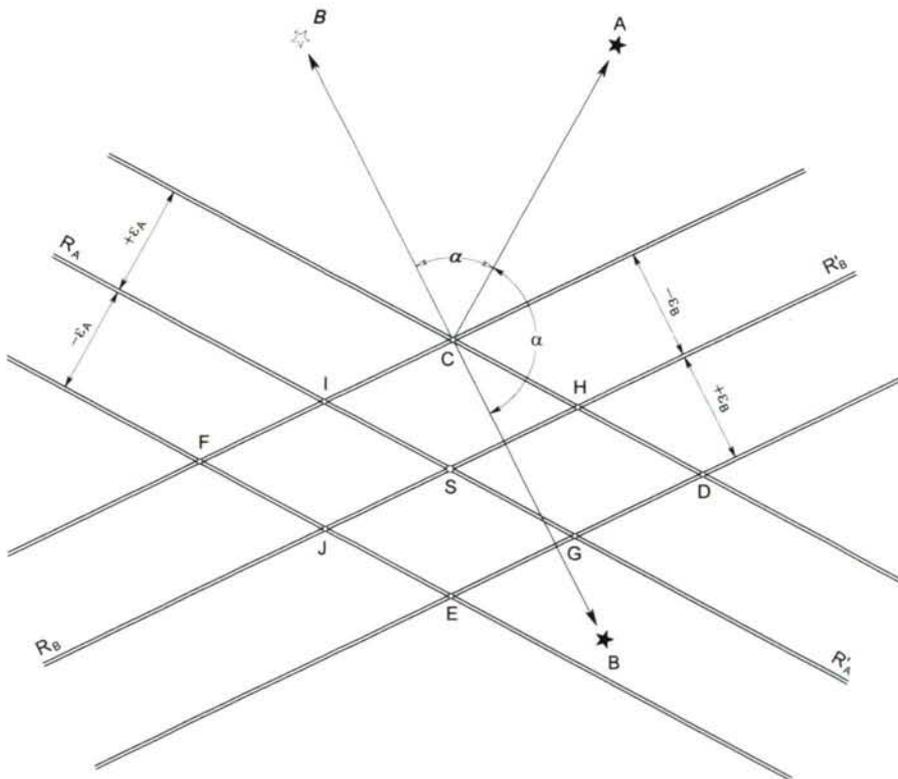


Figura - 1.387.XIV - Error sistemático mayor que accidental

erróneas, ubicándose en los puntos D o F si la diferencia de azimutes es menor de 90° , o en los puntos C o E si esta diferencia es mayor de 90° . Es recomendable que esta diferencia sea menor de 90° debido a que los puntos C y D son más cercanos a S que los F y D. Interpretaciones teóricas sobre la teoría de errores, con enfoques que difieren ligeramente, establecen que el ángulo α que hace mínimo el error en la situación observada en estas circunstancias, es de 60° según Alessio, y de 53° según G.Pes.

Sean $R_A-R'_A$ y $R_B-R'_B$, figura 1.388.XIV, las rectas de altura de los astros A y B, que supuestas exentas de error se cortan en el punto S, situación del observador; supuestos los errores ϵ_s sobre la altura del astro A y ϵ_a sobre la del astro B, y en la hipótesis de que el error sistemático es mayor que el accidental, $\epsilon_s > \epsilon_a$, las rectas erróneas se cortarían en el punto S', distante del exacto la magnitud ϵ_M , error máximo

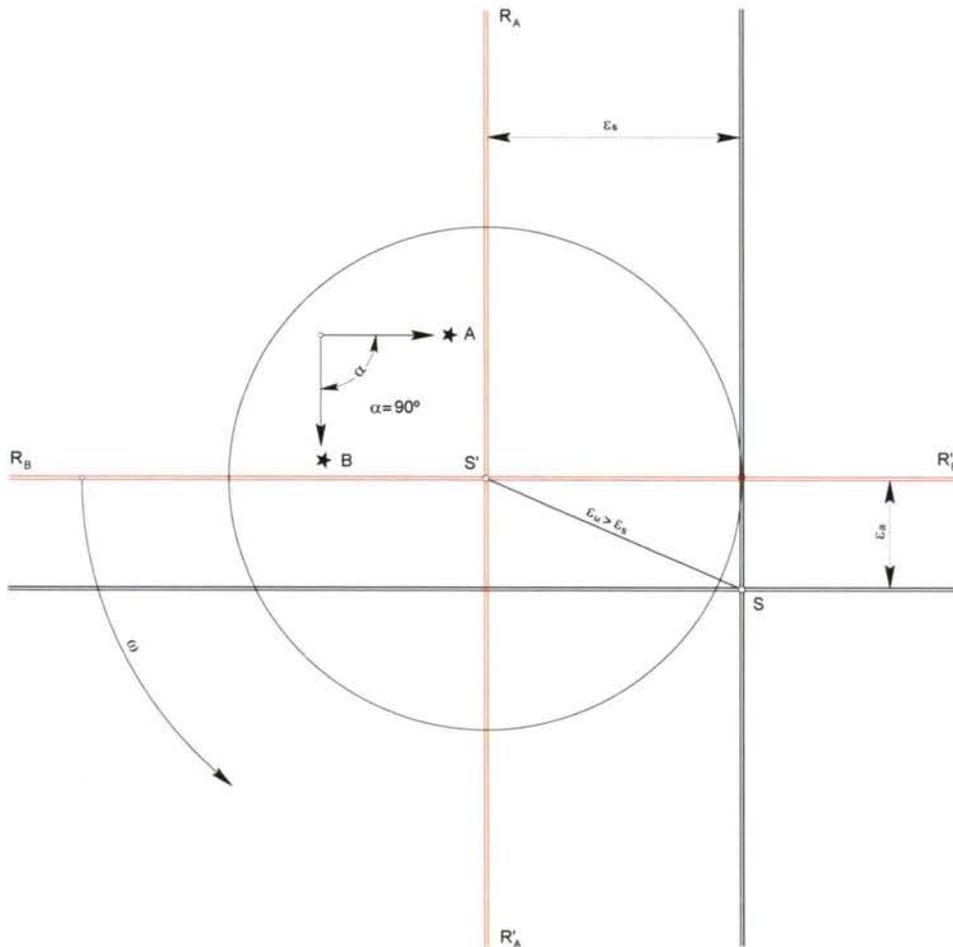


Figura - 1.388.XIV - Error sistemático mayor que accidental. 1

en la situación y que, como fácilmente se comprueba, es mayor que el error sistemático. Si giramos el vertical del astro B y con el su recta de altura mientras permanece fija la recta del astro A, el ángulo ω barrido hasta situar el punto S sobre la circunferencia de centro S' y radio ϵ_s , figura 1.389.XIV, de manera que el error en la situación observada sea el menor posible, es, en condiciones medias, de unos 30° , y su expresión es de deducción inmediata; en el triángulo SOS':

$$\text{sen } \omega = \frac{\epsilon_a}{\epsilon_s}$$

y como el ángulo ω barrido resulta ser el complemento del ángulo α que forman los verticales de los dos astros observados,

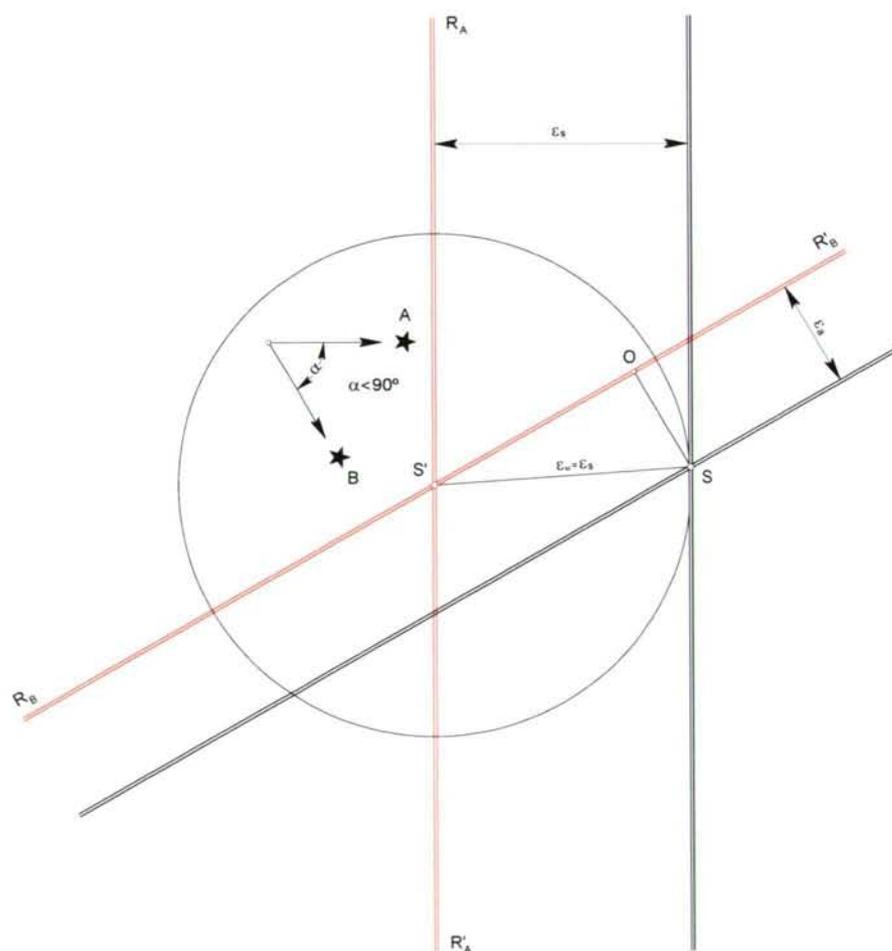


Figura - 1.389.XIV - Error sistemático mayor que accidental. 2

$$\alpha = \text{arc cos } \frac{\epsilon_a}{\epsilon_s},$$

el coseno de la diferencia de azimutes es el cociente de los errores en las dos rectas, cuando ambos tienen el mismo signo.

Como conclusión final al examen de los efectos de los errores en la recta de

altura como consecuencia de los errores en las alturas observadas, diremos que el criterio de selección del ángulo α de corte de las rectas de altura depende de los valores relativos de los errores accidental y sistemático; si prevalece el primero, caso de observaciones simultáneas o casi simultáneas, α deberá acercarse lo máximo posible al ideal de 90° , que además hace mínima el área de certidumbre. Cuando el error predominante es el sistemático, como en general sucede en las observaciones no simultáneas, α tenderá a los 60° . En resumen, como norma general y en ausencia del conocimiento sobre el predominio de uno u otro error, se buscarán ángulos de corte lo más cercanos posible a los 90° , y, salvo excepción, nunca menores de 30° .

4. LA BISECTRIZ DE ALTURA. — Si dos rectas de altura $R_A-R'_A$ y $R_B-R'_B$ obtenidas por observación simultánea de las alturas de los astros A y B, se suponen

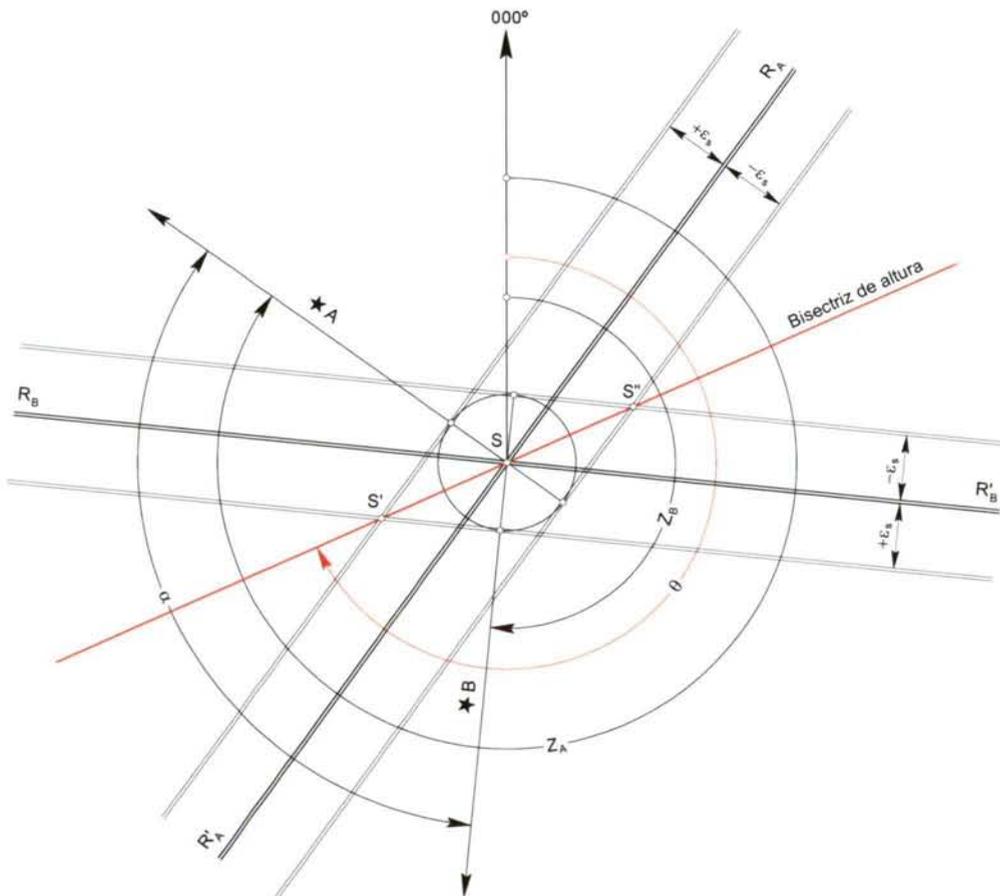


Figura - 1.390.XIV - Bisectriz de altura

carentes de cualquier tipo de error, su punto de corte S, es, cómo ya se ha dicho, la posición del observador. Si se asume la existencia de, únicamente, error sistemático $\pm \varepsilon_s$, por afectar igualmente a ambas líneas de posición las rectas de altura exactas sufrirán un desplazamiento paralelamente a sí mismas de magnitud igual a la del error sistemático. Trácese con centro en la situación exacta S, figura 1.390.XIV, una circunferencia de radio el error sistemático; las rectas de altura tangentes a dicha circunferencia en los puntos de intersección de la misma con los respectivos verticales, materializan las rectas de altura erróneas, que, al ignorarse el signo del error, entrará en cada una de ellas positiva y negativamente. Los puntos de corte de las rectas desplazadas, que en la hipótesis de existencia de error no pueden considerarse como líneas de posición, son ahora los puntos S' y S"; variando la magnitud del error sistemático y repitiendo el proceso, se obtendría la serie de puntos de corte S'', ... Sⁿ, lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas exactas; es decir, un lugar geométrico que cumple dos condiciones características: la primera es que contiene la situación del observador, la segunda es que elimina el error sistemático. La construcción realizada equivale al trazado de la bisectriz del ángulo que forman los verticales de los astros observados, de aquí la denominación de tan importante lugar geométrico que, no obstante, solo puede considerarse como línea de posición en ausencia de errores accidentales. Siendo Z_A y Z_B los azimutes de los astros contados circularmente, la dirección de la bisectriz viene dado por:

$$\theta = \frac{Z_A + Z_B}{2};$$

aunque su trazado, cómo posteriormente se verá, se realiza geoméricamente.

5. ERROR ACCIDENTAL EN LA BISECTRIZ DE ALTURA. — Los errores accidentales en la observación de las alturas de los astros A y B, figura 1.392.XIV, provocan el desplazamiento lateral de la bisectriz, paralelamente a sí misma, la magnitud d. Sean ε_A y ε_B los errores totales en las alturas de los astros citados; R_A-R'_A y R_B-R'_B las rectas de altura exactas cortándose en el punto S perteneciente a la bisectriz exacta, y X_A-X'_A y X_B-X'_B las rectas de altura erróneas, que se cortan en el punto S', punto que pertenece a la bisectriz errónea; por ser $\varepsilon_A \neq \varepsilon_B$, y en la hipótesis de que $\varepsilon_A > \varepsilon_B$, será:

$$\varepsilon_A = \varepsilon_B + \Delta \varepsilon$$

por lo tanto, ϵ_B es el error sistemático y $\Delta\epsilon$ el accidental. En el triángulo rectángulo $OO'S'$, en el que el ángulo en S' es β , se tiene:

$$m = \frac{\epsilon_A - \epsilon_B}{\text{sen } \beta};$$

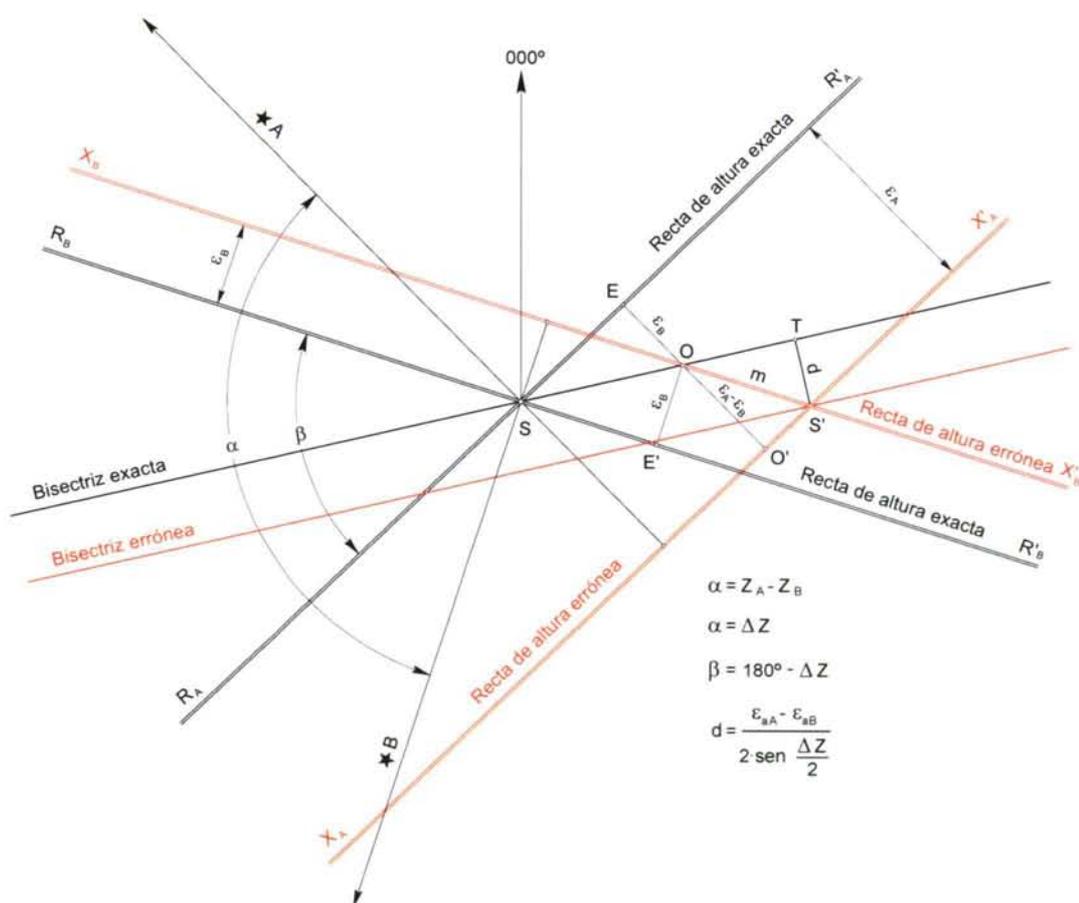


Figura - 1.392.XIV - Error accidental en la bisectriz de altura

y en el triángulo rectángulo $S'TO$,

$$d = m \cdot \text{sen } \frac{\beta}{2}.$$

Sustituyendo m por su valor:

$$d = \frac{\epsilon_A - \epsilon_B}{\text{sen } \beta} \cdot \text{sen } \frac{\beta}{2};$$

es decir,

$$d = \frac{\epsilon_A - \epsilon_B}{2 \cdot \text{sen } \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2}} \cdot \text{sen } \frac{\beta}{2},$$

puesto que,

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= Z_A - Z_B \\ \alpha &= \Delta Z \\ \beta &= 180^\circ - \Delta Z \\ \frac{\beta}{2} &= 90^\circ - \frac{\Delta Z}{2} \end{aligned} \right\}$$

sustituyendo y simplificando,

$$d = \frac{\Delta \epsilon}{2 \cdot \text{sen } \frac{\Delta Z}{2}} \tag{1.393.XIV}$$

que nos da la separación buscada, entre la bisectriz exacta y la errónea, y en la que ΔZ es el ángulo diferencia de azimutes y $\Delta \epsilon$, cómo ya se ha dicho, el error accidental. Dado que las unidades de éste error accidental son minutos de arco, la distancia d vendrá expresada en millas, y representa el error en la bisectriz como consecuencia de los errores accidentales en las alturas observadas. Es necesario aclarar en este punto, que cualquier pequeño error en el proceso de cálculo del determinante y que pudiera pasar desapercibido, implica, asimismo, un error accidental que modifica las diferencias de alturas integrándose en el error accidental total. Para que el efecto de el error accidental sea el mínimo posible es necesario que el denominador de la expresión (1.393.XIV) sea el máximo;

$$\text{sen } \frac{\Delta Z}{2} = 1,$$

lo que se cumplirá cuando ΔZ sea 180° ; es decir, cuando los verticales de los astros que determinan la bisectriz son opuestos;

$$d = \frac{\Delta \varepsilon}{2};$$

en este caso la bisectriz se dice óptima, figura 1.395.XIV. Si el ángulo que forman los verticales es de 60° , resulta $d = \Delta \varepsilon$. Para ángulos menores, $d > \Delta \varepsilon$, y, como norma general, no deben observarse astros con diferencia de azimutes menor de 30° .

6. SITUACIÓN POR CORTE DE BISECTRICES DE ALTURA. — La observación de tres alturas de tres astros proporciona tres rectas de altura; si las tres rectas se cortan en un mismo punto, muy probablemente tal punto es la situación del buque, pero es un error la creencia de que, inequívocamente, ese punto es la situación del observador; es fácil comprender que los errores pueden desplazar las rectas exactas hasta alcanzar tal configuración, cómo puede comprobarse en la figura 1.396.XIV. Imagínese las tres rectas de altura exactas de los astros A, B y C cortándose en el punto S, situación del navegante; si se suponen los errores ε_A , ε_B y ε_C en ellas, ahora, el punto de corte S' no puede ser la situación observada; naturalmente, este supuesto puede darse para cualquier número de observaciones, y únicamente basándonos en razones de experiencia y estadísticas asumimos el punto de corte cómo situación astronómica. Las bisectrices de altura quedan, en este caso, indeterminadas.

Si las tres rectas de altura no se cortan en el mismo punto, es preciso trazar las bisectrices de los ángulos que forman los respectivos verticales en los puntos de corte de cada dos de ellas, figura 1.397.XIV. Caso de que el punto o los puntos de corte de cada par de rectas fuera inaccesible, el trazado de la bisectriz se realizará siguiendo los procedimientos que se reflejan en la figura, aunque en la práctica, puede prescindirse del rigor geométrico en favor de una mayor rapidez y suficiente precisión procediendo al trazado aproximado, pero es necesario el trazado de las tres bisectrices ya que cada una de ellas sirve de elemento de control de las otras dos, contra fallos de trazado. Si los verticales de los astros observados tienen todos una componente en un mismo hemisferio, figura 1.398.XIV, las bisectrices de altura se cortan fuera del triángulo formado por las tres rectas de altura; en la observación de tres astros debe procurarse, en la medida de lo posible, que la diferencia angular entre los distintos azimutes se aproxime a los 120° ; diferencias angulares inferiores a los 60° no son deseables. El error sistemático, en este tipo de observación, es la distancia desde la situación

observada a cualquiera de las tres rectas de altura, es decir, el radio de la circunferencia que con centro en la situación observada, es tangente a las tres rectas de altura, tal cómo se indica en la figura. Si los azimutes forman ángulos de 120° , el triángulo cuyos vértices son los puntos de corte de las rectas, es equilátero, y la situación observada resulta de alta fiabilidad por ser el error accidental de muy poca entidad.

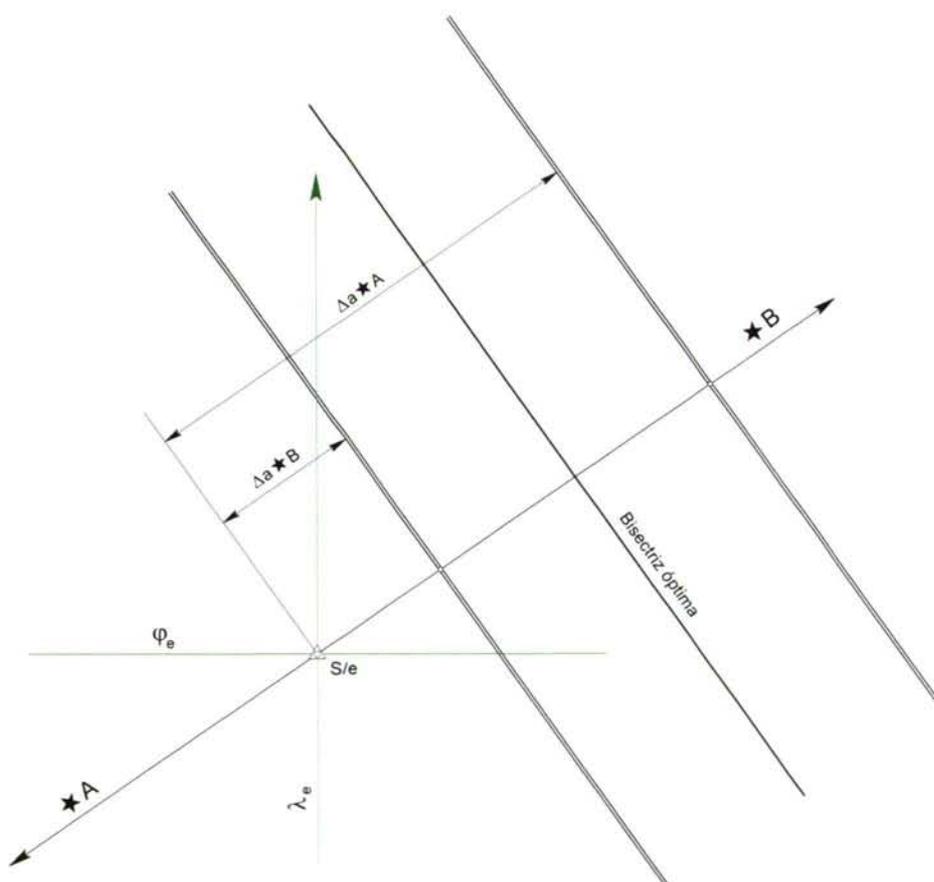


Figura - 1.395.XIV - Trazado de la bisectriz óptima

Los astros que deben observarse en orden a determinar una situación observada con la mayor fiabilidad, son cuatro, y sus verticales estarán orientados en forma tal que cada dos consecutivos formen un ángulo lo más próximo a 90° ; la situación observada en este caso recibe el nombre de *punto óptimo* por resultar del corte de bisectrices óptimas; tal situación se obtiene en observaciones crepusculares, transcurriendo breve intervalo de tiempo entre las tomas de las alturas; usualmente, un solo observador no tarda más de 15 o 20 minutos en circunstancias desfavorables, esto es, cielo con claros

y nubes que obligan a cierta espera, al objeto de la adecuada selección de los astros; con cielos claros, el tiempo se reduce y la observación puede estar preparada de antemano. Si en la observación únicamente esta presente el error sistemático, la intersección de las rectas de altura conforma un cuadrado cuyo lado es el doble del error sistemático, figura 1.399.XIV. Si además del error sistemático entran en la observación errores accidentales, los puntos de corte de las rectas de altura configuran

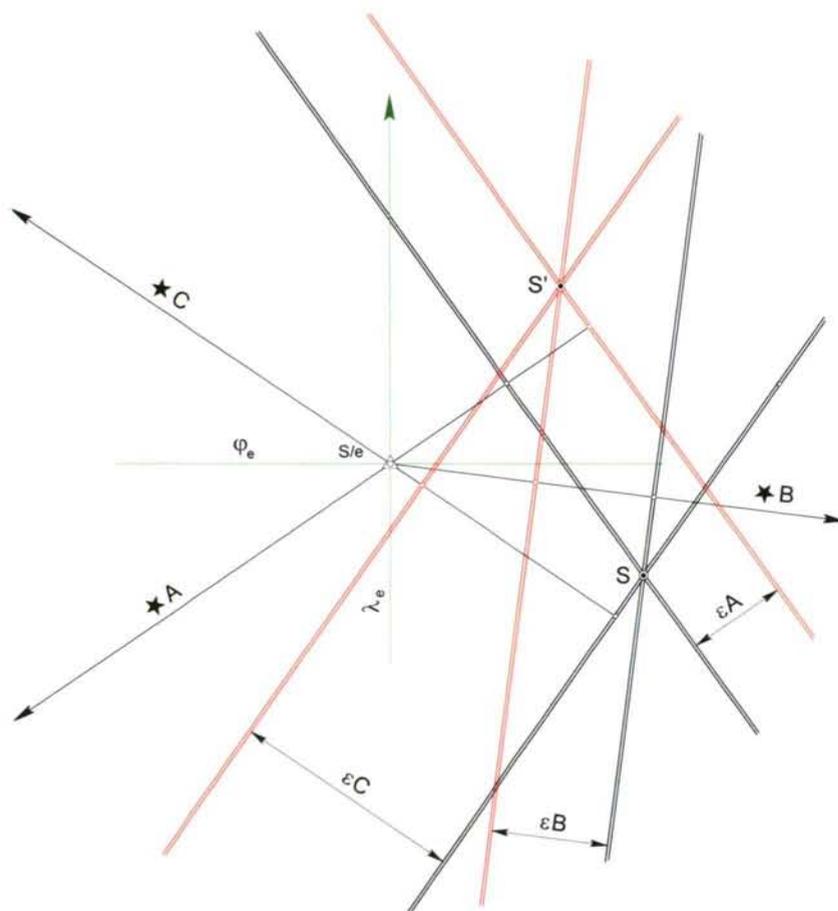


Figura - 1.396.XIV -Indeterminación de las bisectrices de altura

un rectángulo; el error sistemático se obtiene, en valor y signo, dividiendo por dos la suma de las distancias desde la situación observada al par de rectas no opuestas, figura 1.400.XIV, es decir:

$$\epsilon_s = \frac{r_1 + r_2}{2};$$

como valor accidental medio se asume la diferencia algebraica:

$$\epsilon_a = r_1 - r_2$$

Concluamos aclarando que la observación de más de cuatro astros no otorga mayor fiabilidad a la situación observada, no justificando en ningún caso el mayor trabajo de cálculo que supone. Recuérdese que al ser las observaciones no simultáneas, caso

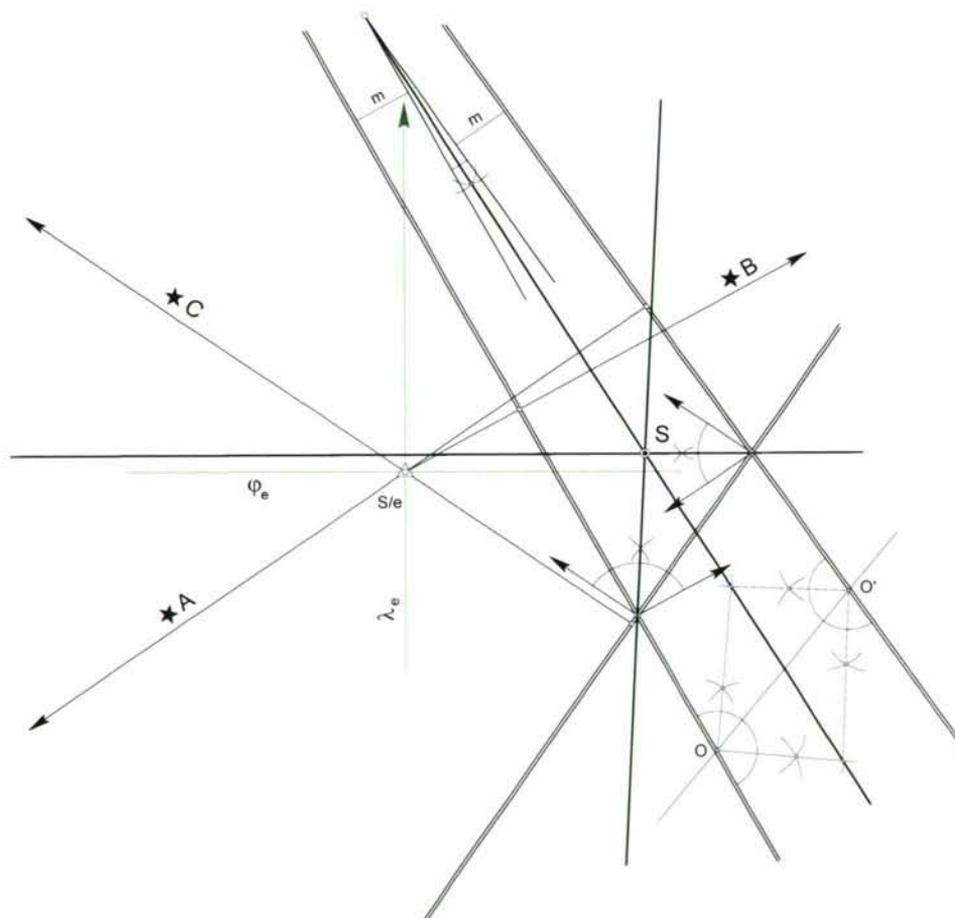


Figura - 1.397.XIV -Situación observada por corte de bisectrices de altura. 1

más general, la reducción de las tres primeras alturas al tiempo de la cuarta, reducción al último horizonte, debe contemplarse como una corrección más a las alturas observadas, y que junto a ésta, la única corrección que debe hacerse es por refracción astronómica, ya que el error de índice y la depresión son errores accidentales eliminados por la bisectriz de altura.

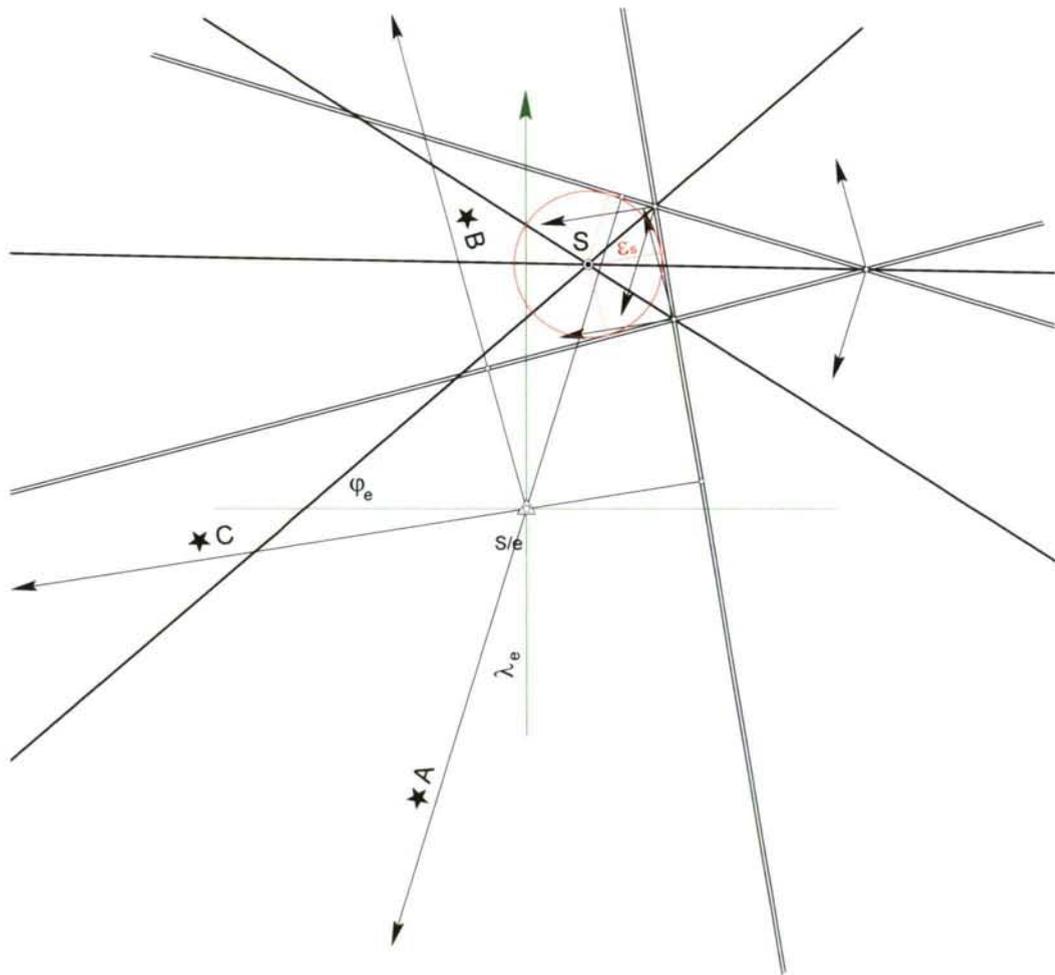


Figura - 1.398.XIV -Situación observada por corte de bisectrices de altura. 2

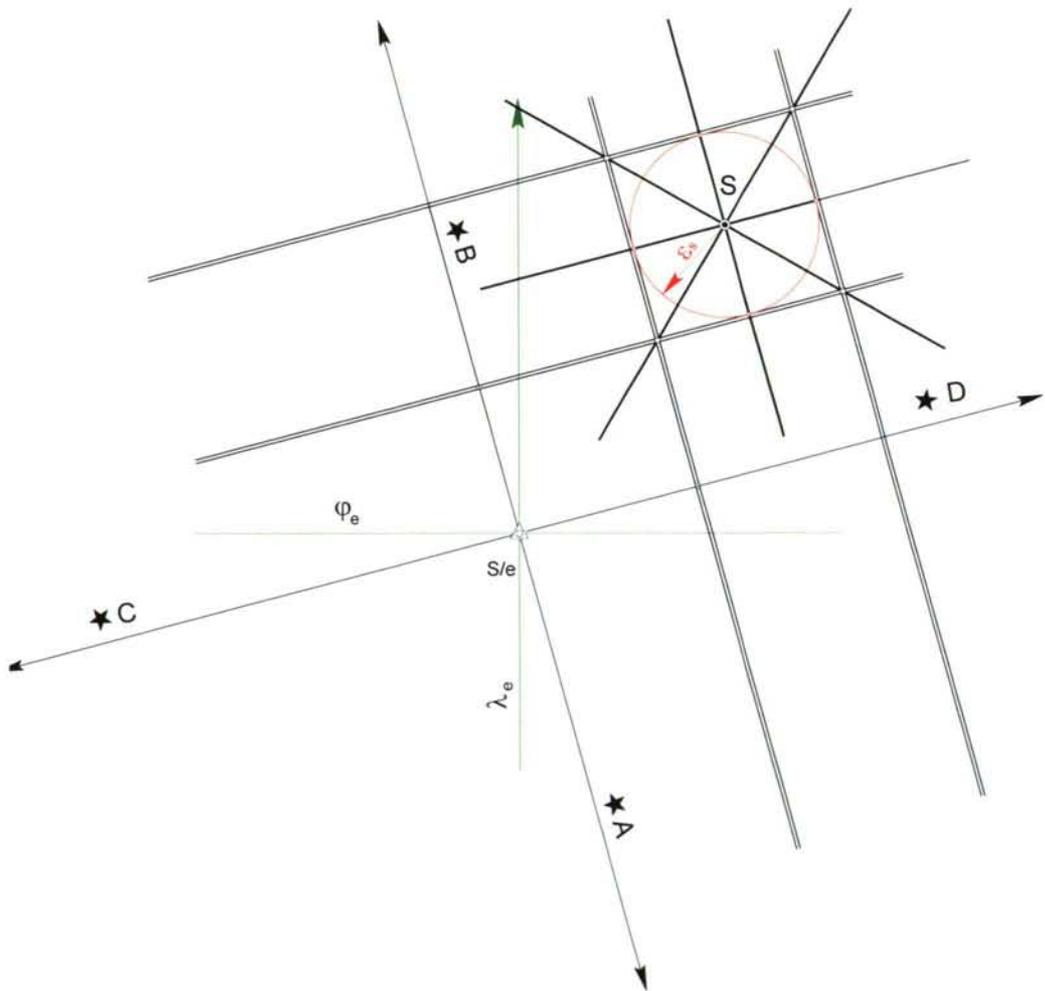


Figura - 1.399.XIV -Situación observada por corte de bisectrices óptimas. 1

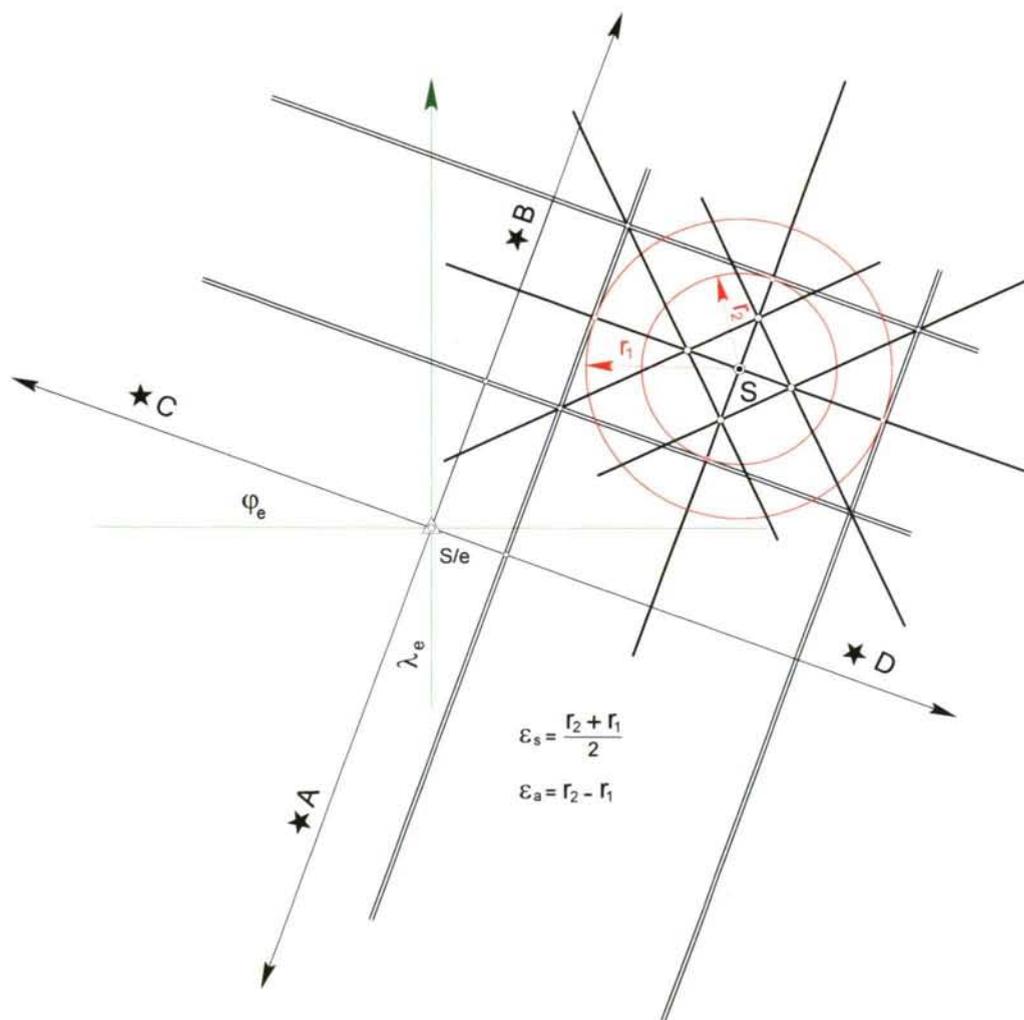


Figura - 1.400.XIV -Situación observada por corte de bisectrices óptimas. 2

CAPÍTULO XV

LA HIPÉRBOLA ESFÉRICA EN LA NAVEGACIÓN ASTRONÓMICA

RECTA DIFERENCIOMÉTRICA

VERDADERA NATURALEZA DE LA BISECTRIZ DE ALTURA

1. HIPÉRBOLA ESFÉRICA Y NAVEGACIÓN ASTRONÓMICA. — En las páginas que siguen, la hipótesis fundamental es que la bisectriz de altura es una hipérbola esférica. Ya vimos que en la situación observada por corte de rectas de altura inciden una serie de variables de difícil cuantificación, las correcciones a las alturas medidas con el sextante no son conocidas con precisión; la depresión del horizonte y refracción astronómica son, en general, conocidas en sus valores medios, y dichas alturas presentan errores que estudiamos englobados en dos grupos característicos: errores sistemáticos y errores accidentales, cuyas particularidades fueron ya tratadas. Si para un observador, en una situación e instante dados, las alturas verdaderas de los astros A y B son a_{VA} y a_{VB} , con $a_{VA} > a_{VB}$, las distancias zenitales respectivas serán,

$$\left. \begin{aligned} z_A &= 90^\circ - a_{VA} \\ z_B &= 90^\circ - a_{VB} \end{aligned} \right\},$$

y el observador se encuentra sobre una línea de posición de expresión:

$$(90^\circ - a_{VA}) - (90^\circ - a_{VB}) = k \quad (1.401.XV)$$

equivalente a la que sigue,

$$a_{VB} - a_{VA} = k \quad (2.401.XV)$$

que es la ecuación de una hipérbola esférica, es decir, de una línea de posición en la esfera celeste cuya diferencia de distancias (distancias zenitales) a dos puntos fijos, (los astros observados), es una constante k . Tales distancias son arcos de vertical, y, por lo tanto, arcos de círculos máximos que, cómo es bien sabido, son las líneas geodésicas de la esfera. Haciendo abstracción de los errores accidentales, supongamos que en la observación está presente el error sistemático ϵ_s ; en la (2.401.XV) tendremos:

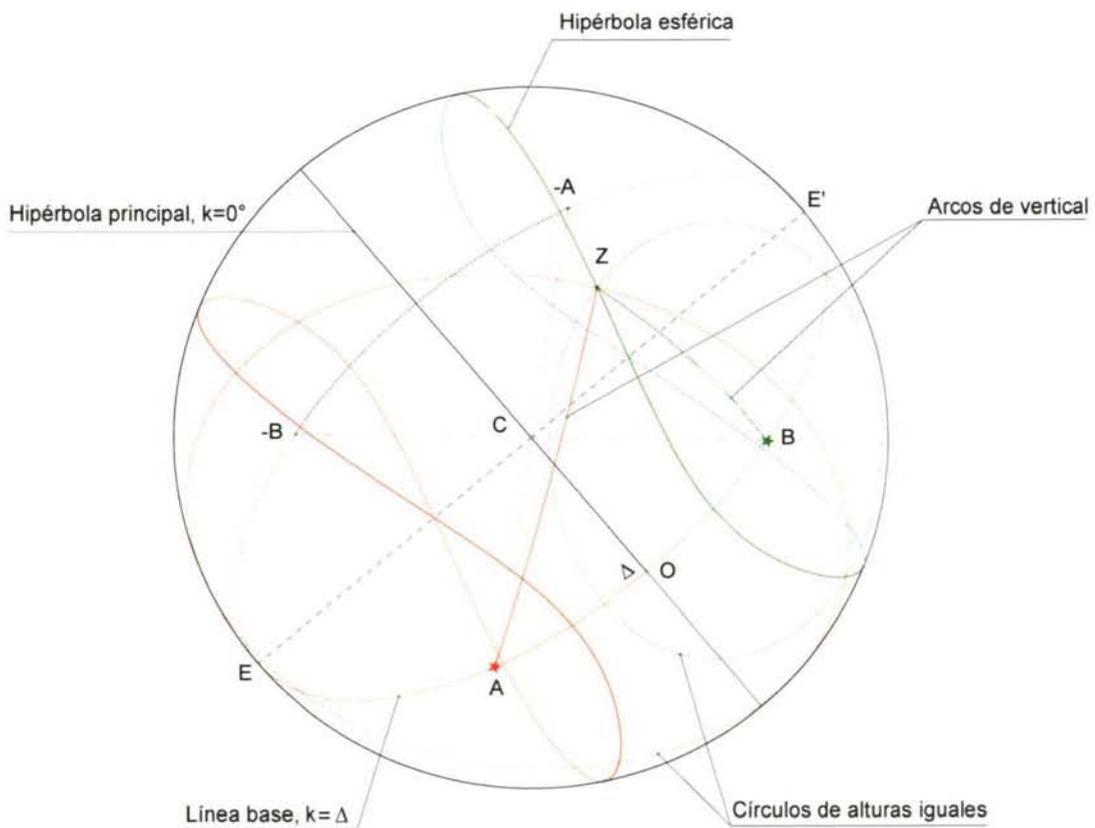


Figura - 1.402.XV - Hipérbola esférica de origen astronómico

$$(a_{VB} \pm \epsilon_s) - (a_{VA} \pm \epsilon_s) = k'$$

y eliminando paréntesis

$$a_{VB} \pm \epsilon_s - a_{VA} \mp \epsilon_s = k'$$

y por anularse el error sistemático resulta ser $k=k'$; una forma bien sencilla de evidenciar tan importante propiedad. En la figura 1.402.XV se materializa la imagen de la idea expuesta; si las alturas de los astros A y B difieren en la cantidad constante k, los círculos de alturas iguales se cortan a lo largo del lugar geométrico definido, y el punto Z, zenit del observador, recorre la rama de hipérbola esférica correspondiente al astro de mayor altura, es decir, menor distancia zenital. Los valores de k están comprendidos entre $k=0^\circ$, definida por analogía con los sistemas hiperbólicos conocidos, cómo hipérbola principal, lugar geométrico de los puntos del observador que ve a dos astros dados con la misma altura, y $k=\Delta$ que, por la misma razón, definimos como línea de base. Entre ambos valores, para cada k se determina una hipérbola, y

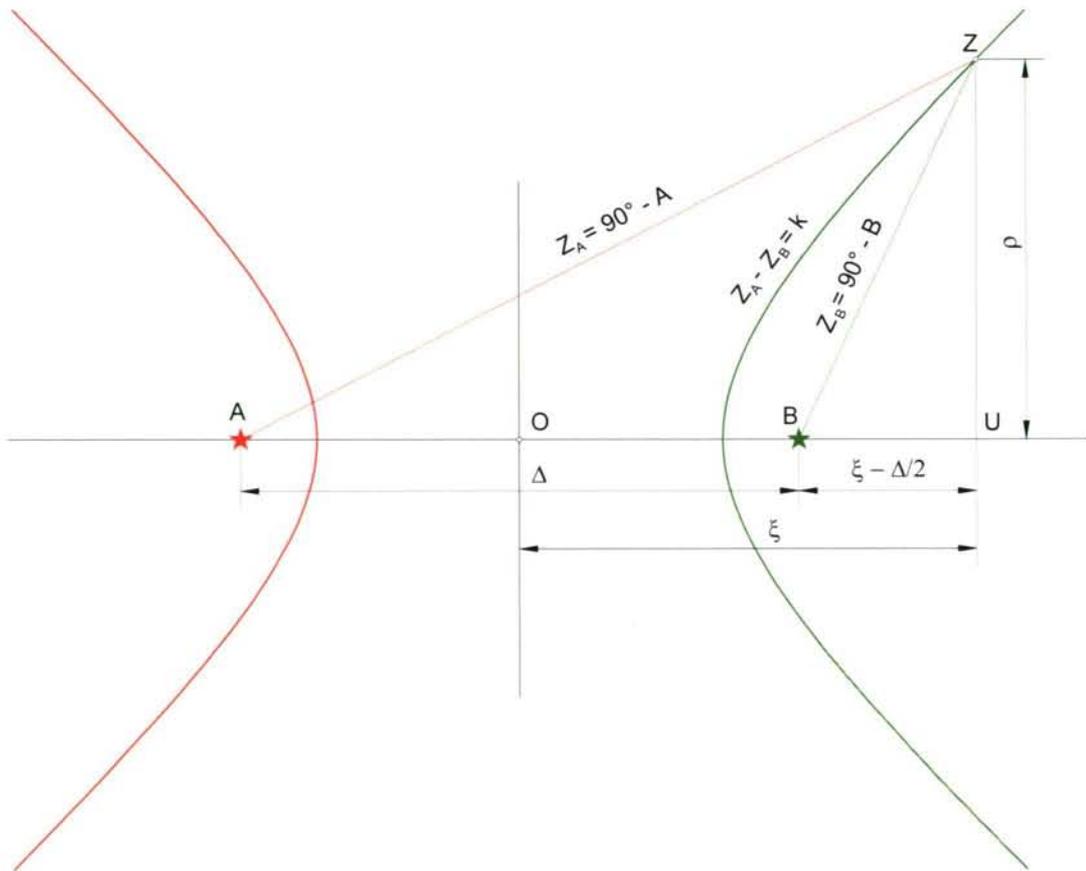


Figura - 1.403.XV - Hipérbola esférica en proyección gnomónica

el conjunto de todas ellas constituye la familia de hipérbolas esféricas homofocales, de foco A y B.

2. ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA ESFÉRICA. — La proyección gnomónica con cuadro tangente en el punto O transforma la hipérbola esférica en hipérbola plana, y los triángulos esféricos en triángulos planos, lo que nos permite una imagen plana más simple, ver figura 1.403.XV, para el estudio de la ecuación de esta línea. En aras de una mayor sencillez expositiva, llamemos A a la altura verdadera del astro A, y B a la del B, es fácil ver que,

$$\frac{\text{sen } B - \text{sen } A}{\cos B + \cos A} = \frac{\text{sen} \left(\frac{A - B}{2} \right)}{\cos \left(\frac{B - A}{2} \right)} = \text{tg } \frac{k}{2}; \quad (1.404.XV)$$

en efecto: haciendo $B = b + a$ y $A = b - a$, entonces, $b = \frac{B + A}{2}$, y $a = \frac{B - A}{2}$, por lo tanto el primer miembro de la igualdad (1.404.XV) queda,

$$\frac{\text{sen}(a + b) - \text{sen}(b - a)}{\cos(a + b) + \cos(b - a)},$$

desarrollando,

$$\frac{\text{se } b \cdot \cos a + \cos b \cdot \text{sen } a - \text{sen } b \cdot \cos a + \cos b \cdot \text{sen } a}{\cos b \cdot \cos a - \text{sen } b \cdot \text{sen } a + \cos b \cdot \cos a + \text{sen } b \cdot \text{sen } a},$$

cociente que simplificando resulta igual a $\text{tg } a$; haciendo la oportuna sustitución de a por su valor en función de A y B, tendremos,

$$\text{tg } a = \text{tg } \frac{B - A}{2}$$

y siendo $B - A = k$, el resultado final es el ya indicado, $\text{tg } \frac{k}{2}$.

En la figura 1.403.XV, en los triángulos esféricos AZU y BZU, por el teorema del coseno:

$$\text{sen } A = \cos p \cdot \cos \left(\xi + \frac{\Delta}{2} \right) \quad (2.404.XV)$$

$$\text{sen } B = \cos \rho \cdot \cos \left(\xi - \frac{\Delta}{2} \right) \quad (1.405.XV)$$

$$\cos A = \sqrt{1 - \cos^2 \rho \cdot \cos^2 \left(\xi + \frac{\Delta}{2} \right)} \quad (2.405.XV)$$

$$\cos B = \sqrt{1 - \cos^2 \rho \cdot \cos^2 \left(\xi - \frac{\Delta}{2} \right)} \quad (3.405.XV)$$

En orden a una más cómoda interpretación de los razonamientos que siguen, simplifiquemos las notaciones haciendo,

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen } A = a \\ \text{sen } B = b \\ \frac{k}{2} = m \\ \frac{\Delta}{2} = n \end{array} \right\} ;$$

sucesivamente tendremos,

$$\frac{b - a}{\sqrt{1 - a^2} + \sqrt{1 - b^2}} = m \quad (4.405.XV)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen } A = \cos \rho \cdot \cos (\xi + n) \\ \text{sen } A = \cos \rho \cdot \cos \xi \cdot \cos n - \cos \rho \cdot \text{sen } \xi \cdot \text{sen } n \end{array} \right\} \quad (5.405.XV)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen } B = \cos \rho \cdot \cos (\xi - n) \\ \text{sen } B = \cos \rho \cdot \cos \xi \cdot \cos n + \cos \rho \cdot \text{sen } \xi \cdot \text{sen } n \end{array} \right\} \quad (6.405.XV)$$

$$b + a = 2 \cdot \cos \rho \cdot \cos \xi \cdot \cos n \quad (1.406.XV)$$

$$b - a = 2 \cdot \cos \rho \cdot \sin \xi \cdot \sin n \quad (2.406.XV)$$

$$(b + a)^2 = 4 \cdot \cos^2 \rho \cdot \cos^2 \xi \cdot \cos^2 n \quad (3.406.XV)$$

$$(b - a)^2 = 4 \cdot \cos^2 \rho \cdot \sin^2 \xi \cdot \sin^2 n \quad (4.406.XV)$$

$$b^2 = \cos^2 \rho \cdot \cos^2 \xi \cdot \cos^2 n + \cos^2 \rho \cdot \sin^2 \xi \cdot \sin^2 n + \dots$$

$$\dots + 2 \cdot \cos^2 \rho \cdot \cos \xi \cdot \cos n \cdot \sin \xi \cdot \sin n \quad (5.406.XV)$$

$$a^2 = \cos^2 \rho \cdot \cos^2 \xi \cdot \cos^2 n + \cos^2 \rho \cdot \sin^2 \xi \cdot \sin^2 n - \dots$$

$$\dots - 2 \cdot \cos^2 \rho \cdot \cos \xi \cdot \cos n \cdot \sin \xi \cdot \sin n \quad (6.406.XV)$$

$$b^2 - a^2 = 4 \cdot \cos^2 \rho \cdot \cos \xi \cdot \cos n \cdot \sin \xi \cdot \sin n \quad (7.406.XV)$$

y operando convenientemente en la (4.405.XV):

$$b - a = m \cdot \sqrt{1 - a^2} + m \cdot \sqrt{1 - b^2}$$

$$[(b - a) - m \cdot \sqrt{1 - a^2}]^2 = (m \cdot \sqrt{1 - b^2})^2$$

$$(b - a)^2 - 2 \cdot m \cdot (b - a) \cdot \sqrt{1 - a^2} + m^2 \cdot (1 - a^2) = m^2 \cdot (1 - b^2)$$

$$(b - a)^2 + m^2 \cdot [(1 - a^2) - (1 - b^2)] = 2 \cdot m \cdot (b - a) \cdot \sqrt{1 - a^2}$$

$$(b - a) \cdot (b - a) + m^2 \cdot (b - a) \cdot (b + a) = 2 \cdot m \cdot (b - a) \cdot \sqrt{1 - a^2}$$

$$(b - a) + m^2 \cdot (b + a) = 2 \cdot m \cdot \sqrt{1 - a^2} \quad (8.406.XV)$$

Elevando al cuadrado los dos miembros de esta última igualdad,

$$(b - a)^2 + 2 \cdot m^2 \cdot (b^2 - a^2) + m^4 \cdot (b + a)^2 = 4 \cdot m^2 \cdot (1 - a^2) \quad (1.407.XV)$$

en la que al sustituir los paréntesis por sus valores obtenidos en las (3.406.XV), (4.406.XV), (6.406.XV) y (7.406.XV), tendremos:

$$\begin{aligned} &4 \cdot \cos^2 \rho \cdot \text{sen}^2 \xi \cdot \text{sen}^2 n + 8 \cdot m^2 \cdot \cos^2 \rho \cdot \cos \xi \cdot \text{sen} \xi \cdot \cos n \cdot \text{sen} n + \dots \\ &\dots + 4 \cdot m^2 \cdot \cos^2 \rho \cdot \cos^2 \xi \cdot \cos^2 n = 4 \cdot m^2 [1 - (\cos^2 \rho \cdot \cos^2 \xi \cdot \cos^2 n + \dots \\ &\dots + \cos^2 \rho \cdot \text{sen}^2 \xi \cdot \text{sen}^2 n - 2 \cdot \cos^2 \rho \cdot \cos \xi \cdot \text{sen} \xi \cdot \cos n \cdot \text{den} n)] \quad (2.407.XV) \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\cos^2 \rho \cdot \text{sen}^2 \xi \cdot \text{sen}^2 n \cdot (1 + m^2) + \cos^2 \rho \cdot \cos^2 \xi \cdot \cos^2 n \cdot (m^4 + m^2) = m^2 \quad (3.407.XV)$$

De la que, recordando que,

$$\left. \begin{aligned} m &= \text{tg} \frac{k}{2} \\ n &= \frac{\Delta}{2} \end{aligned} \right\}$$

obtenemos:

$$\cos^2 \rho \cdot \left(\frac{\text{sen}^2 \xi \cdot \text{sen}^2 \frac{\Delta}{2}}{\text{sen}^2 \frac{k}{2}} + \frac{\cos^2 \xi \cdot \cos^2 \frac{\Delta}{2}}{\cos^2 \frac{k}{2}} \right) = 1 \quad (4.407.XV)$$

ecuación de la hipérbola esférica en el sistema de coordenadas esféricas (ρ, ξ) relativas al par de círculos que constituyen la hipérbola principal y la línea de base. Esta

expresión puede aparecer también bajo la forma:

$$\cos^2 \rho \cdot \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \xi \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\Delta}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{k}{2}} - \frac{(\operatorname{sen}^2 \xi - 1) \cdot \operatorname{cos}^2 \frac{\Delta}{2}}{\operatorname{cos}^2 \frac{k}{2}} \right) = 1$$

y puede generalizarse al sistema de coordenadas geográficas (φ, λ) mediante el cambio de origen tal cómo se explica en la figura 1.408.XV, y según la cual,

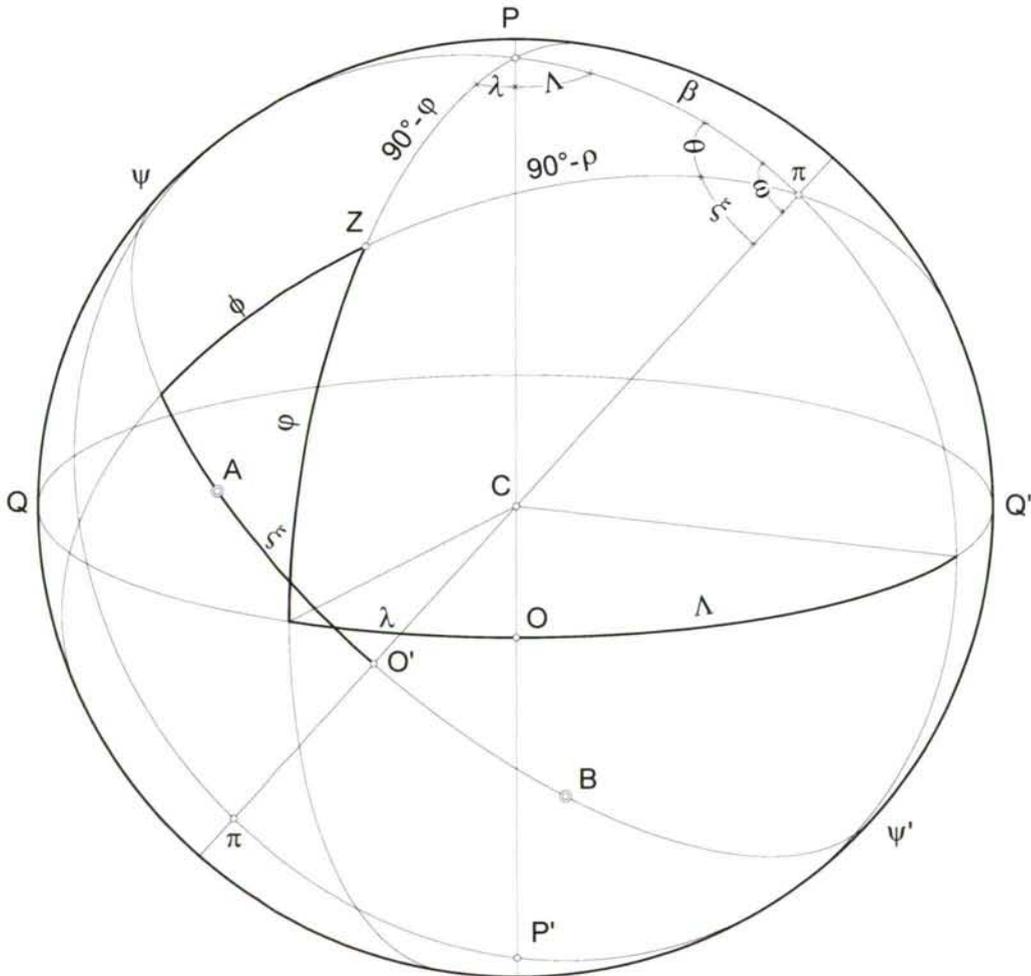


Figura - 1.408.XV - Cambio de coordenadas

$$\operatorname{sen} \varphi = \operatorname{sen} \rho \cdot \operatorname{cos} \beta + \operatorname{cos} \rho \cdot \operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{cos} (\omega - \xi) \tag{1.408.XV}$$

y,

$$\cotg(\lambda + \Lambda) = \operatorname{tg} \rho \cdot \operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{cosec}(\omega - \xi) - \cos \beta \cdot \cotg(\omega - \xi) \quad (1.409.XV)$$

siendo conocidos los elementos ρ , ξ , ω , β y Λ . Si embargo, la forma más eficaz de expresar la ecuación de la hipérbola esférica en función de las coordenadas geográficas (φ , λ) sería la siguiente: de las ecuaciones del seno de la altura,

$$\operatorname{sen} A = \operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} d_A + \cos \varphi \cdot \cos d_A \cdot \cos(hG_A - \lambda) \quad (2.409.XV)$$

$$\operatorname{sen} B = \operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} d_B + \cos \varphi \cdot \cos d_B \cdot \cos(hG_B - \lambda) \quad (3.409.XV)$$

en las que A y B son las alturas, d_A y d_B las declinaciones, y hG_A y hG_B los horarios en Greenwich respectivos, se obtienen:

$$\cos A = \sqrt{1 - [\operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} d_A + \cos \varphi \cdot \cos d_A \cdot \cos(hG_A - \lambda)]^2} \quad (4.409.XV)$$

$$\cos B = \sqrt{1 - [\operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} d_B + \cos \varphi \cdot \cos d_B \cdot \cos(hG_B - \lambda)]^2} \quad (5.409.XV)$$

por lo cual,

$$\frac{[\operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} d_A + \cos \varphi \cdot \cos d_A \cdot \cos(hG_A - \lambda)] - \dots}{\sqrt{1 - [\operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} d_A + \cos \varphi \cdot \cos d_A \cdot \cos(hG_A - \lambda)]^2} - \dots} \dots$$

$$\dots \frac{\dots - [\operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} d_B + \cos \varphi \cdot \cos d_B \cdot \cos(hG_B - \lambda)]}{\dots - \sqrt{1 - [\operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} d_B + \cos \varphi \cdot \cos d_B \cdot \cos(hG_B - \lambda)]^2}} = \operatorname{tg} \frac{k}{2} \quad (6.409.XV)$$

y operando paralelamente a lo ya tratado, nos daría la expresión deseada.

3. HIPÉRBOLA Y ELIPSE ESFÉRICAS. — Aunque de interés puramente teórico, se demuestra que la hipérbola esférica de focos A y B, es elipse esférica de focos -A y B; es decir: toda hipérbola esférica es elipse esférica respecto a uno de los

focos y al antípoda del otro; así, y según la figura 1.410.XV, tendremos:

$$(180^\circ - m^\circ) - n^\circ = k^\circ;$$

por lo tanto,

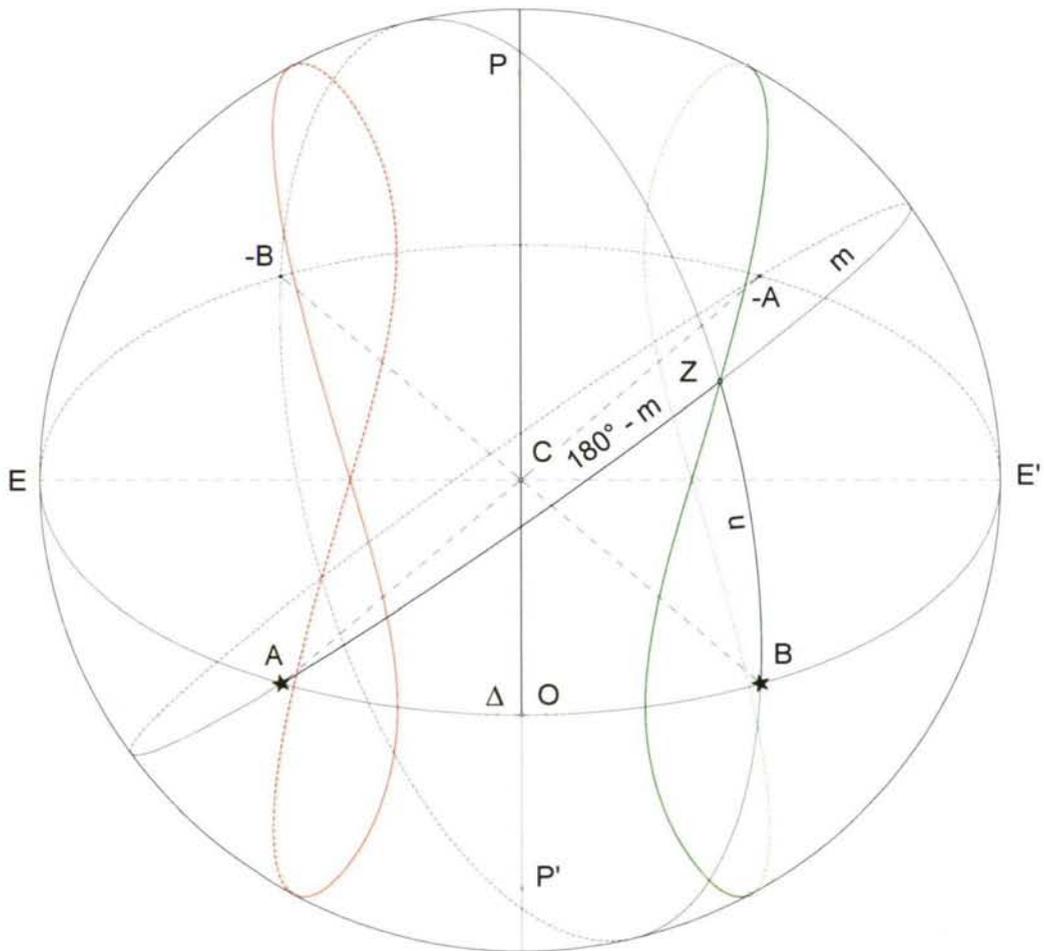


Figura - 1.410.XV - Hipérbola y elipse esféricas

$$m^\circ + n^\circ = 180^\circ - k^\circ$$

y siendo k una constante también lo es $180^\circ - k$, quedando demostrada tal propiedad.

4. RECTA DIFERENCIOMÉTRICA. — Puesto que la observación de dos astros que, de momento suponemos a la misma hora, determina por diferencia la línea de posición en estudio individualizándola entre las infinitas hipérbolas esféricas homofocales en los astros observados, —véase figura 1.411.XV, en la que en proyección azimutal equidistante con cuadro tangente en O, se representa la familia de hipérbolas esféricas de constante entera y de 5° en 5°, de los astros A y B—, al

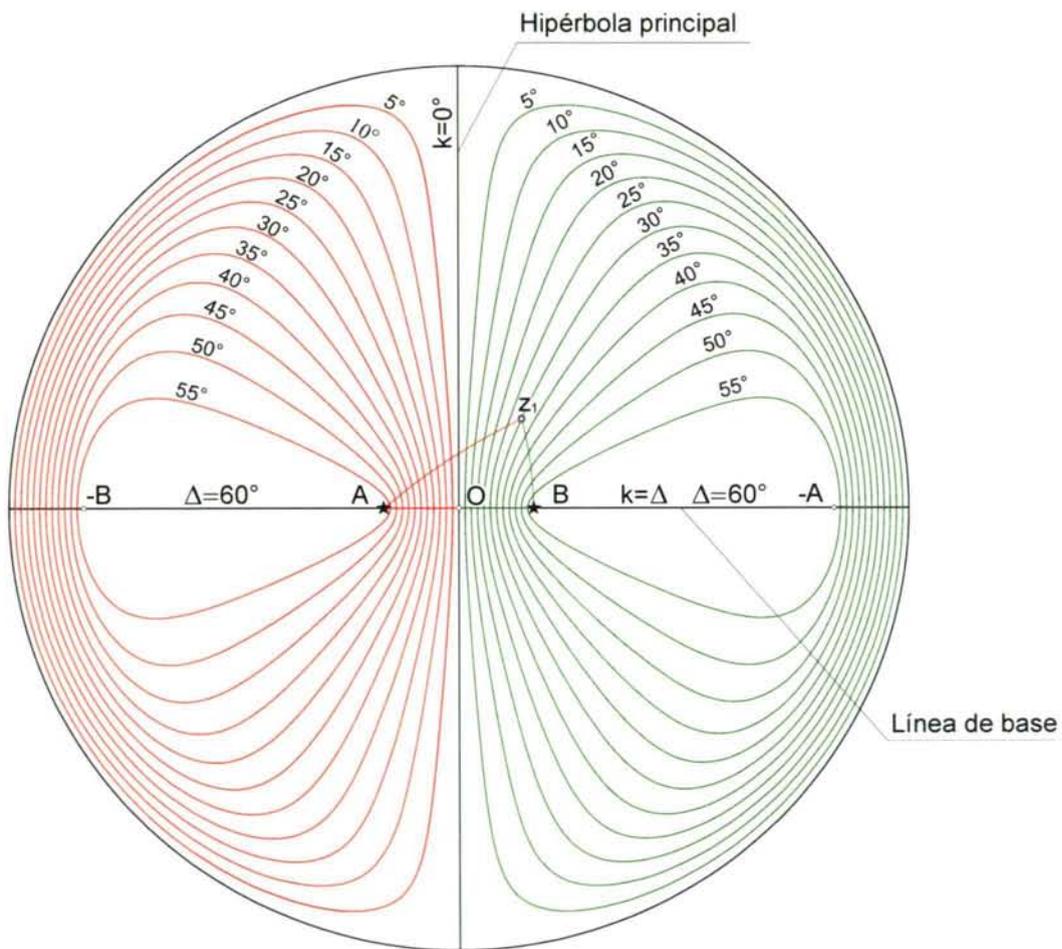


Figura - 1.411.XV - Familia de hipérbolas esféricas de los astros A y B

observar tres astros se definen tres líneas de posición cuyo corte será la situación observada. La solución analítica del problema resulta poco práctica y, por analogía con los procedimientos tradicionales, recurriremos al artificio de sustituir el arco de hipérbola

esférica que contiene al observador, por el arco de loxodrómica¹ secante (método de la secante de Sumner), definido por dos puntos determinantes, o tangente a la misma (métodos de Borda, Johnson y Saint-Hilaire) en el punto determinante y conocida su dirección; pero antes de iniciar el estudio de los distintos determinantes interesa un análisis breve del entorno de un punto de la línea, próximo a la situación de estima, figura 1.412.XV: los círculos de alturas iguales de los astros se cortan en el punto Z, punto generador de la línea de posición; Si en la observación se supone un error

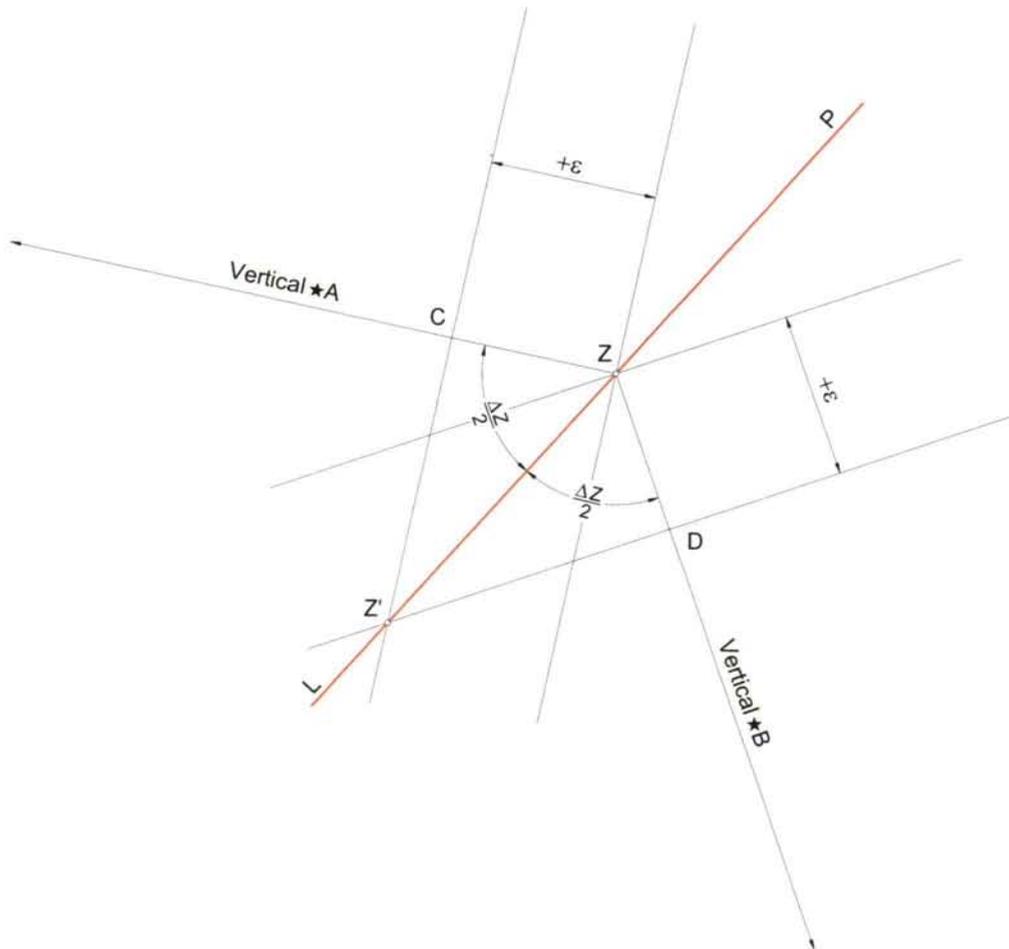


Figura - 1.412.XV - Dirección de la línea de posición

1 En rigor, no se debiera hablar de loxodrómica tangente y si del círculo máximo tangente a la hipérbola esférica, siguiendo el criterio de Alessio; la transformada de todo círculo máximo es, en el plano hidrográfico o náutico, una línea recta, recta de diferencia constante en las alturas de los dos astros observados, o recta "diferenciométrica", al estar determinada mediante una medición por diferencia.

sistemático $+\varepsilon$ el corte de las circunferencias afectadas de tal error se produce en el punto Z' y considerando infinitesimales, y por lo tanto rectilíneos, los arcos de las circunferencias de alturas iguales, arcos de vertical y arcos de la curva en estudio, por ser perpendicular el vertical a la circunferencia de alturas iguales, los triángulos rectángulos ZCZ' y ZDZ' , que dada su efectiva pequeñez consideramos planos, son iguales y la línea de posición biseca el ángulo formado por los verticales; en resumen: *La tangente a la línea de posición es bisectriz del ángulo que forman las tangentes a los verticales en el punto de intersección de las circunferencias de alturas iguales.* Tal es la verdadera naturaleza de la llamada bisectriz de altura: una hipérbola esférica; la hipótesis fundamental queda así demostrada. Vemos que una línea tratada como elemento local en el cálculo de la situación observada, es en realidad una línea de posición de naturaleza más compleja y precisa que la circunferencia de alturas iguales y cuya dirección Φ , según lo antedicho, viene dada por:

$$\Phi = \frac{Z_{VA} + Z_{VB}}{2} \quad (1.413.XV)$$

en la que Z_{VA} y Z_{VB} son los azimutes verdaderos de los astros observados.

5. RECTA DIFERENCIOMÉTRICA SECANTE. — El cálculo de las coordenadas de dos puntos permite el trazado de la secante a la curva, admitiéndose en la práctica la hipótesis de coincidencia entre ambas líneas cuando la distancia entre los determinantes tiende a cero; esta aproximación no supone error sensible en el resultado final, y simples consideraciones geométricas conducen a la conclusión de que siendo en todo caso la curvatura de esta línea menor que la de la circunferencia de alturas iguales, el error de la citada aproximación es también menor que aquel que resulta de la sustitución de la circunferencia de alturas iguales por su correspondiente secante. Si a y a' son las alturas simultáneas verdaderas de los astros, en la ecuación de la hipérbola:

$$a - a' = k \quad (*)$$

pasando a los senos, desarrollando y ordenando adecuadamente,

$$\text{sen } a \cdot \cos a' - \cos a \cdot \text{sen } a' = \text{sen } k$$

En la que al sustituir los senos de las alturas por sus valores y dividir por $\cos a'$,

$$\begin{aligned} & \text{sen } \varphi \cdot \text{sen } d + \cos \varphi \cdot \cos d \cdot \cos P - \dots \\ \dots - \frac{\cos a}{\cos a'} \cdot (\text{sen } \varphi \cdot \text{sen } d' + \cos \varphi \cdot \cos d' \cdot \cos P') &= \frac{\text{sen } k}{\cos a'} \end{aligned}$$

Tomemos el ángulo auxiliar α tal que:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\cos a}{\cos a'} \quad (1.414.XV)$$

sustituyendo en la anterior y ordenando,

$$\text{sen } \varphi \cdot (\text{sen } d - \text{sen } d' \cdot \text{tg } \alpha) + \cos \varphi \cdot (\cos d \cdot \cos P - \cos d' \cdot \cos P' \cdot \text{tg } \alpha) = \text{sen } k \cdot \sec a'$$

$$\text{sen } \varphi + \cos \varphi \cdot \frac{\cos d \cdot \cos P - \cos d' \cdot \cos P' \cdot \text{tg } \alpha}{\text{sen } d - \text{sen } d' \cdot \text{tg } \alpha} = \frac{\text{sen } k \cdot \sec a'}{\text{sen } d - \text{sen } d' \cdot \text{tg } \alpha},$$

y recurriendo a un segundo ángulo auxiliar β dado por,

$$\text{tg } \beta = \frac{\cos d \cdot \cos P - \cos d' \cdot \cos P' \cdot \text{tg } \alpha}{\text{sen } d - \text{sen } d' \cdot \text{tg } \alpha} \quad (2.414.XV)$$

tendremos,

$$\text{sen } \varphi + \cos \varphi \cdot \frac{\text{sen } \beta}{\cos \beta} = \frac{\text{sen } k \cdot \sec a'}{\text{sen } d - \text{sen } d' \cdot \text{tg } \alpha}$$

y de esta,

$$\text{se } (\varphi + \beta) = \frac{\text{sen } k \cdot \cos \beta}{\text{sen } d \cdot \cos a' - \text{sen } d' \cdot \cos a} \quad (3.414.XV)$$

El grupo de fórmulas (1.414.XV), (2.414.XV) y (3.414.XV) nos permite calcular el punto de corte de la hipérbola esférica con un meridiano dado, usualmente, el de estima. El sistema puede reducirse a dos ecuaciones en la forma que sigue:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\cos d \cdot \cos P \cdot \cos a' - \cos d' \cdot \cos P' \cdot \cos a}{\operatorname{sen} d \cdot \cos a' - \operatorname{sen} d' \cdot \cos a} \quad (1.415.XV)$$

y,

$$\operatorname{sen}(\varphi + \beta) = \frac{\operatorname{sen} k \cdot \cos \beta}{\operatorname{sen} d \cdot \cos a' - \operatorname{sen} d' \cdot \cos a} \quad (2.415.XV)$$

La precisión de los resultados depende de la exactitud de las alturas, no admitiendo errores sistemáticos arbitrariamente grandes; para los valores usuales en la práctica, el error que en el determinante introduce el utilizar las alturas imprecisas es despreciable. Sean en la (1.414.XV) a y a' los valores exactos de las alturas; tomando logaritmos:

$$\log \operatorname{tg} \alpha = \log \cos a - \log \cos a'$$

y derivando,

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \sec^2 \alpha \cdot d\alpha = \operatorname{tg} a' \cdot da' - \operatorname{tg} a \cdot da$$

en la que despejando $d\alpha$,

$$d\alpha = da \cdot \frac{\operatorname{sen} 2\alpha \cdot (\operatorname{tg} a' - \operatorname{tg} a)}{2}$$

y también,

$$d\alpha = -da \cdot \frac{\operatorname{sen} 2\alpha \cdot \operatorname{sen} k}{2 \cdot \cos a \cdot \cos a'}$$

que nos dicen que para cualquier valor del error sistemático el error en el ángulo auxiliar α solamente es nulo cuando ambas alturas son iguales, es decir, en la hipérbola principal para la que $k=0$, y aumenta al aumentar k con la consiguiente influencia en β y, por lo tanto, en la latitud determinante φ_D . Podremos comprobar, no obstante, que errores poco probables en las alturas tiene muy poca influencia en la latitud determinante φ_D , lo que justificaría desde el punto de vista práctico la utilización del sistema aquí desarrollado, en vez del más complicado procedimiento basado en la

fórmula de la hipérbola esférica. Calculando las coordenadas de dos puntos determinantes en latitud, o sea, el punto de corte de la curva con dos meridianos que comprendan al de estima, queda definida la recta diferenciométrica secante.

Algo más laborioso resulta el cálculo de las coordenadas del punto de corte de la hipérbola con el paralelo dado, sea éste el de estima, cómo es lo usual, o uno auxiliar próximo al de estima. Si como en el caso precedente partimos de la ecuación de la línea, con facilidad llegamos a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \text{sen } \varphi \cdot \text{sen } d + \cos \varphi \cdot \cos d \cdot \cos (h_G - \lambda) - [\text{sen } \varphi \cdot \text{sen } d' + \dots \\ \dots + \cos \varphi \cdot \cos d' \cos (h'_G - \lambda)] \cdot \text{tg } \alpha = \text{sen } k \cdot \text{sec } a' \end{aligned}$$

en la que operando como seguidamente se indica,

$$\begin{aligned} \cos \varphi \cdot \cos d \cdot \cos (h_G - \lambda) - \cos \varphi \cdot \cos d' \cdot \cos (h'_G - \lambda) \cdot \text{tg } \alpha = \dots \\ \dots = \text{sen } k \cdot \text{sec } a' - \text{sen } \varphi \cdot \text{sen } d + \text{sen } \varphi \cdot \text{sen } d' \cdot \text{tg } \alpha \\ \cos (h_G - \lambda) - \cos (h'_G - \lambda) \cdot \text{tg } \alpha \cdot \frac{\cos d'}{\cos d} = \dots \end{aligned}$$

$$\dots = \text{sen } k \cdot \text{sec } a' \cdot \text{sec } \varphi \cdot \text{sec } d - \text{tg } \varphi \cdot \text{tg } d + \text{tg } \varphi \cdot \text{tg } \alpha \cdot \text{sen } d' \cdot \text{sec } d$$

tomemos un segundo ángulo auxiliar β tal que,

$$\text{tg } \beta = \text{tg } \alpha \cdot \frac{\cos d'}{\cos d}$$

haciendo, además,

$$M = \text{sen } k \cdot \text{sec } a' \cdot \text{sec } d - \text{tg } \varphi \cdot \text{tg } d + \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \varphi \cdot \text{sec } d \cdot \text{sen } d'$$

si abreviamos en la notación, tendremos:

$$\cos (h_G - \lambda) - \cos (h'_G - \lambda) \cdot \text{tg } \beta = M$$

en la que desarrollando las operaciones indicadas,

$$\cos h_G \cdot \cos \lambda + \operatorname{sen} h_G \cdot \operatorname{sen} \lambda - (\cos h'_G \cdot \cos \lambda + \operatorname{sen} h'_G \cdot \operatorname{sen} \lambda) \cdot \operatorname{tg} \beta = M;$$

$$\cos \lambda \cdot (\cos h_G - \cos h'_G \cdot \operatorname{tg} \beta) + \operatorname{sen} \lambda \cdot (\operatorname{sen} h_G - \operatorname{sen} h'_G \cdot \operatorname{tg} \beta) = M;$$

$$\cos \lambda + \frac{\operatorname{sen} \lambda \cdot (\operatorname{sen} h_G - \operatorname{sen} h'_G \cdot \operatorname{tg} \beta)}{\cos h_G - \cos h'_G \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{M}{\cos h_G - \cos h'_G \cdot \operatorname{tg} \beta};$$

y recurriendo al ángulo auxiliar θ ,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} h_G - \operatorname{sen} h'_G \cdot \operatorname{tg} \beta}{\cos h_G - \cos h'_G \cdot \operatorname{tg} \beta},$$

$$\cos \lambda + \operatorname{sen} \lambda \cdot \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \frac{M}{\cos h_G - \cos h'_G \cdot \operatorname{tg} \beta};$$

operando según lo indicado,

$$\cos \lambda \cdot \cos \theta + \operatorname{sen} \lambda \cdot \operatorname{sen} \theta = \frac{M \cdot \cos \theta}{\cos h_G - \cos h'_G \cdot \operatorname{tg} \beta};$$

finalmente,

$$\cos (\lambda - \theta) = \frac{M \cdot \cos \theta}{\cos h_G - \cos h'_G \cdot \operatorname{tg} \beta};$$

y el problema quedará resuelto resolviendo el sistema siguiente:

$$\left. \begin{aligned}
 \operatorname{tg} \alpha &= \cos a \cdot \sec a' \\
 M &= \operatorname{sen} k \cdot \sec a' \cdot \sec \varphi \cdot \sec d - \operatorname{tag} \varphi \cdot \operatorname{tg} d + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \sec d \cdot \operatorname{sen} d' \\
 \operatorname{tg} \beta &= \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos d' \cdot \sec d \\
 \operatorname{tg} \theta &= \frac{\operatorname{sen} h_G - \operatorname{sen} h'_G \cdot \operatorname{tg} \beta}{\cos h_G - \cos h'_G \cdot \operatorname{tg} \beta} \\
 \cos(\lambda - \theta) &= \frac{M \cdot \cos \theta}{\cos h_G - \cos h'_G \cdot \operatorname{tg} \beta}
 \end{aligned} \right\}$$

que, como en el caso de la latitud y después de efectuar las oportunas sustituciones, puede reducirse a las dos que seguidamente se indican;

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} h_G \cdot \cos d \cdot \cos a' - \operatorname{sen} h'_G \cdot \cos d' \cdot \cos a}{\cos h_G \cdot \cos d \cdot \cos a' - \cos h'_G \cdot \cos d' \cdot \cos a} \quad (1.418.XV)$$

y,

$$\cos(\lambda - \theta) = \frac{[\operatorname{sen} k - \operatorname{sen} \varphi \cdot (\operatorname{sen} d \cdot \cos a' - \operatorname{sen} d' \cdot \cos a)] \cdot \cos \theta}{\cos \varphi \cdot (\cos h_G \cdot \cos d \cdot \cos a' - \cos h'_G \cdot \cos d' \cdot \cos a)} \quad (2.418.XV)$$

Con idénticas consideraciones, en cuanto a la influencia del error sistemático en el determinante, que las que se realizaron en el estudio de la latitud.

Para que k resulte siempre positivo de la altura mayor a restaremos la altura menor a' ; h_G y h'_G son los horarios en Greenwich para la hora de la observación; d y d' las respectivas declinaciones.

★ ★ ★

6. RECTA DIFERENCIOMÉTRICA TANGENTE. — El trazado de la recta diferenciométrica por el método de la tangente se reduce, cómo en el caso de la recta de altura, a encontrar el punto determinante que interese en cada caso y de acuerdo al ángulo de corte entre la recta y el meridiano o el paralelo, recordando que seleccionaríamos el corte con el paralelo, determinante tipo Johnson, para direcciones 315° a 045° y 135° a 225°, y con el meridiano, determinante tipo Borda, en los sectores 045° a 135° y 225° a 315°; haciendo pasar por el punto calculado la recta orientada al rumbo que resulta de la semisuma de los azimutes, tal y cómo vimos en su momento.

Para el cálculo del determinante tipo Marq de Saint-Hilaire, obsérvese la figura 1.411.XV. La hipérbola principal divide a la esfera celeste en dos hemisferios; el hemisferio del astro A y el del astro B, siendo la característica de cada uno de estos hemisferios la mayor altura del astro correspondiente; en el del astro A la altura de éste es siempre mayor que la del B y viceversa; así vemos que la constante k varía entre los valores 0° en la hipérbola principal y Δ° en el arco de círculo máximo definido por los puntos A, -B, -A y B, y que conforma la hipérbola particular denominada línea de base, (el arco AB no pertenece a esta hipérbola. Atendiendo a la mayor de las alturas, el observador conoce en cualquier caso el hemisferio (relativo) en el que se encuentra; cómo además conoce la dirección de la línea de posición, solo resta determinar la distancia desde su situación de estima (o cualquier situación auxiliar) a dicha línea de posición. Por la situación de estima pasa la hipérbola definida por:

$$a_{eA} - a_{eB} = k_e \quad (1.419.XV)$$

en la que a_{eA} y a_{eB} son las alturas estimadas de los astros, calculadas por la conocida fórmula,

$$\text{sen } a_e = \text{sen } \varphi \cdot \text{sen } d + \cos \varphi \cdot \cos d \cdot \cos P$$

y k_e la constante que define la hipérbola estimada. Para el cálculo del azimut:

$$\text{cotg } Z = \cos \varphi \cdot \text{tg } d \cdot \text{cosec } P - \text{sen } \varphi \cdot \text{cotg } P$$

que, asimismo, es una de las clásicas en los cálculos de la Astronomía Náutica, y nos permite determinar, cómo ya se ha visto, el azimut o rumbo de la línea de posición. Para

el cálculo de la distancia entre la situación de estima y la hipérbola, supondremos que la tangente a la hipérbola estimada en el punto de estima, es paralela a la tangente a la hipérbola observada en su punto determinante; este paralelismo se cumplirá con error inapreciable si los valores de los azimutes correspondientes a la situación observada difieren en magnitud despreciable, cómo así sucede en la práctica, de los calculados en base a las coordenadas φ_e y λ_e de la situación de estima. Sean, figura 1.420.XV, los astros A y B observados de forma simultánea y de los que por medio del pertinente cálculo se han obtenido las alturas estimadas, y sean $-\Delta a_{\star A}$ y $+\Delta a_{\star B}$ las diferencias de alturas encontradas. Los verticales de los astros, con origen en la situación de

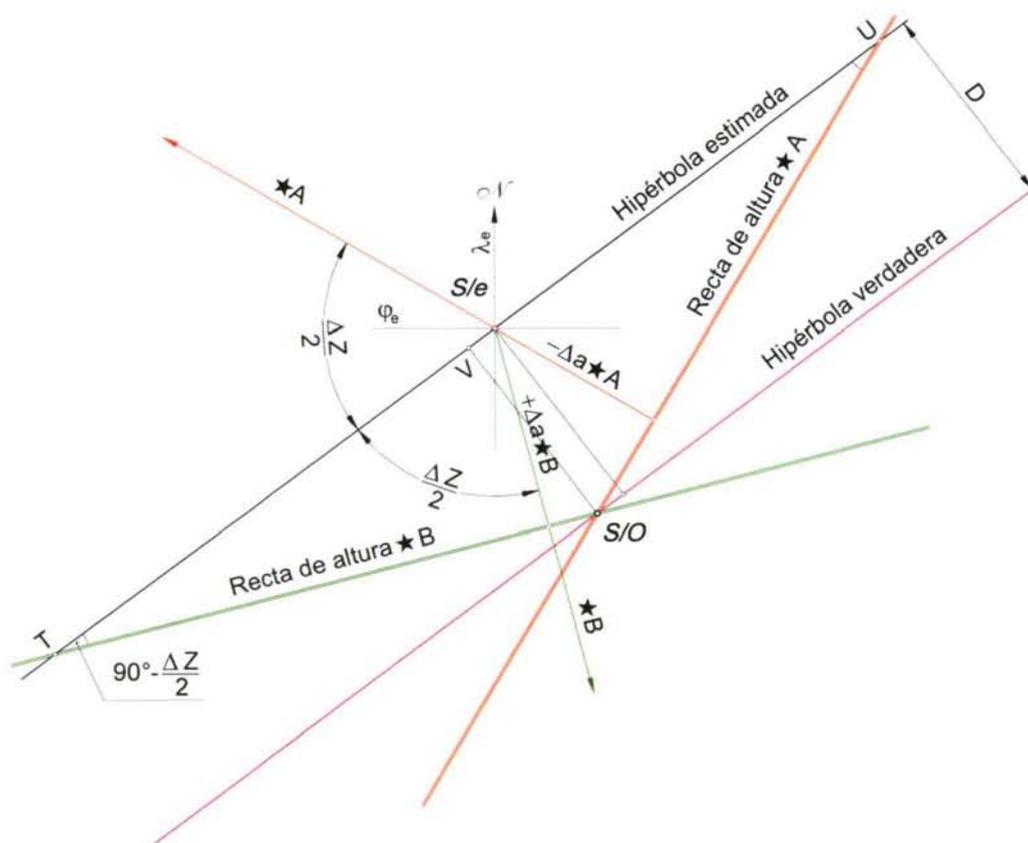


Figura - 1.420.XV - Distancia a la línea de posición

estima, forma el ángulo ΔZ que es bisecado por la tangente a la hipérbola estimada, formando dicha hipérbola con cada uno de los verticales el ángulo $\Delta Z/2$; la hipérbola verdadera, que está definida por la diferencia entre las alturas verdaderas de ambos astros, pasará por la situación observada S/O y será paralela a la hipérbola estimada. El triángulo TUS/O es isósceles por tener iguales los ángulos en T y U, y su altura VS/O

es, precisamente, la distancia entre las hipérbolas estimada y verdadera o, lo que es lo mismo, la distancia desde la situación estimada (o, en su caso, situación auxiliar) hasta la hipérbola verdadera; para el segmento TV tenemos:

$$TV = + \Delta aB \cdot \sec \frac{\Delta Z}{2} \quad (1.421.XV)$$

Para el segmento VU,

$$VU = - \Delta aA \cdot \sec \frac{\Delta Z}{2} \quad (2.421.XV)$$

para la distancia D,

$$D = \frac{TV + TU}{2} \cdot \cotg \frac{\Delta Z}{2} \quad (3.421.XV)$$

Sustituyendo los valores de TU y TV:

$$D = \frac{+ \Delta aB + (- \Delta aA)}{2 \cdot \cos \frac{\Delta Z}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{\Delta Z}{2}}{\sen \frac{\Delta Z}{2}} \quad (4.421.XV)$$

que simplificada nos da,

$$D = \frac{+ \Delta aB + (- \Delta aA)}{2 \cdot \sen \frac{\Delta Z}{2}} \quad (5.421.XV)$$

Pero teniendo en cuenta que:

$$\Delta aA = a_v A - a_e A$$

y,

$$\Delta aB = a_v B - a_e B,$$

resulta,

$$D = \frac{(a_v B - a_e B) + (a_e A - a_v A)}{2 \cdot \text{sen} \frac{\Delta Z}{2}} \quad (1.422.XV)$$

que ordenada convenientemente,

$$D = \frac{(a_v B - a_v A) - (a_e B - a_e A)}{2 \cdot \text{sen} \frac{\Delta Z}{2}} \quad (2.422.XV)$$

Pero siendo $a_v B - a_v A = k_v$ y $a_e B - a_e A = k_e$, al sustituir en la anterior expresión,

$$D = \frac{k_v - k_e}{2 \cdot \text{sen} \frac{\Delta Z}{2}} \quad (3.422.XV)$$

Pudiendo escribir:

$$D = \frac{\Delta k}{2 \cdot \text{sen} \frac{\Delta Z}{2}} \quad (4.422.XV)$$

que es la expresión buscada y coincide con la del coeficiente de expansión de los sistemas hiperbólicos. Conocida esta distancia a la línea de posición y su rumbo, basta trazar con centro en la situación de estima una circunferencia de radio $\rho = D$, ver figura 1.423.XV, y la recta tangente a esta circunferencia y cuyo rumbo es el dado por (1.413.XV). Tangentes a una circunferencia paralelas a una dirección dada, hay dos ; se hace preciso entonces eliminar la ambigüedad que presenta éste trazado; para ello recordemos que en el hemisferio relativo a cada astro, la constante k crece con la altura del mismo, fenómeno que ilustra la figura 1.411.XV, y esta variación de k nos permite eliminar la ambigüedad en el trazado atendiendo al signo de Δk ; si es positivo el trazado de la tangente se efectuará acercándola al astro más alto, si es negativo el trazado es hacia el astro menos alto, (aquí la expresión más bajo sería la correcta, el uso de menos bajo es intencionado y busca la concordancia de los signos más o menos de Δk

con los de más alto y menos alto). Sea B, figura 1.423.XV, el astro más alto, Δk positivo; es decir, $k_v > k_e$, y D la distancia a la línea de posición de rumbo Φ ; con centro en la situación de estima trázese la circunferencia de radio $\rho = D$ y tangente a esta, y hacia el vertical de B, la recta de rumbo Φ . El punto de tangencia de la línea de posición con la circunferencia es el punto aproximado P.A. El trazado se ha realizado siguiendo el orden creciente de k, aumentando la altura de B y disminuyendo la de A, tal cómo puede comprobarse en la figura. Si k_v fuera menor que k_e , Δk sería negativo y la tangencia hubiera tenido lugar por el punto diametralmente opuesto, pasando a ser la

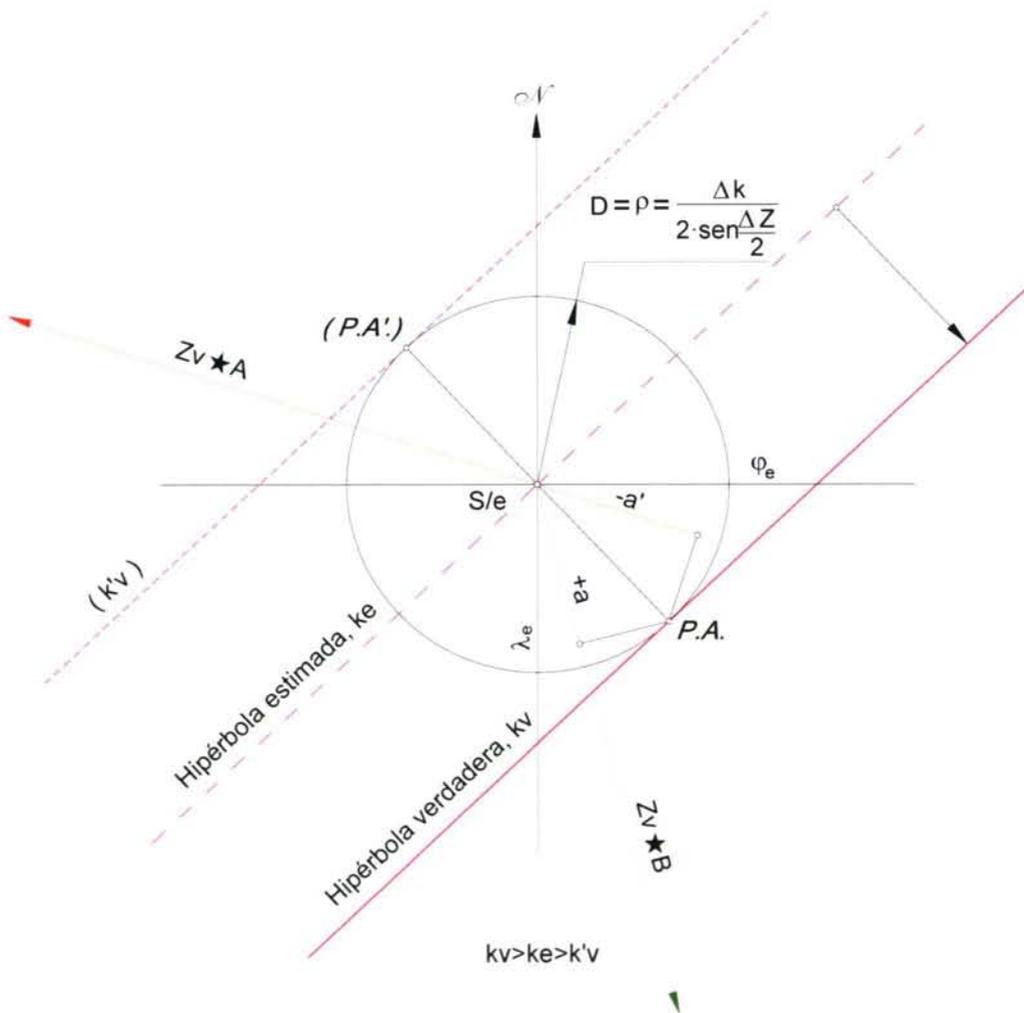


Figura - 1.423.XV - Trazado de la línea de posición

línea de posición la dibujada a trazos. En la práctica náutica, la selección de esta tangente podría hacerse por referencias como babor, estribor, proa o popa. El análisis de la expresión de la distancia D, fórmula (4.422.XV), nos dice que para un Δk dado,

esta es función del ángulo formado por los verticales, y alcanza su mínimo valor cuando éste ángulo es de 180°; para valores pequeños del mismo la distancia puede perder su carácter diferencial y, cómo por otro lado sucede en todos los métodos basados en análisis similares, el procedimiento resulta absolutamente inútil. Obsérvese la notable propiedad de que la distancia, y por lo tanto el radio ρ , es independiente del valor del error sistemático; al contrario de lo que sucede con los otros, este determinante no es afectado por los errores sistemáticos, cualquiera que sea la entidad de los mismos. Para el estudio de la influencia del error accidental, derivemos la (4.422.XV):

$$d\rho = \frac{d\Delta k}{2 \cdot \text{sen} \frac{\Delta Z}{2}}$$

y asimilando $d\rho$ y $d\Delta k$ a los errores,

$$\left. \begin{aligned} d\rho &= \frac{d\Delta k}{2}, \text{ mínimo para } \Delta Z = 180^\circ \\ d\rho &< d\Delta k, \text{ si } \Delta Z > 60^\circ \\ d\rho &= d\Delta k, \text{ para } \Delta Z = 60^\circ \\ d\rho &> d\Delta k, \text{ si } \Delta Z < 60^\circ \end{aligned} \right\}$$

de lo que se deduce que cuando se presuman errores accidentales, no deben observarse astros cuya diferencia de azimutes se inferior a 60°, buscando, siempre que las circunstancias lo permitan, la solución óptima con observaciones de astros en verticales opuestos. El error en azimut modifica el rumbo de la línea de posición; en efecto:

$$d\Phi = \frac{dZ + dZ'}{2}$$

y si $dZ = dZ'$, $d\Phi = dZ$. Calculando el azimut de los astros al medio grado próximo, el error sobre el rumbo de la línea de posición es de medio grado no afectando de manera sensible a las coordenadas de la situación observada. En las correcciones a las alturas observadas, por ser errores sistemáticos, no será preciso corregir de error de índice ni de depresión aparente, y, caso de observarse alturas sensiblemente iguales, tampoco

por refracción astronómica, pudiendo determinar la constante k_v por diferencia entre las alturas instrumentales con la consiguiente ventaja y sin menoscabo de la precisión. Los ejemplos que siguen y en los que, a modo de prueba, manejamos los diferentes tipos de determinantes, corroboran desde el punto de vista práctico el desarrollo teórico de estas páginas y cuyo fin último es el demostrar que al igual que la recta de altura es en el plano la transformada de la tangente a la circunferencia de alturas iguales, la bisectriz de altura es la transformada de la tangente a una hipérbola esférica; el nombre de bisectriz es, en nuestra opinión, inadecuado, y el de recta diferenciométrica sería mucho más acorde con su auténtica naturaleza.

El 15 de julio de 2001 en el crepúsculo vespertino y en S/e φ $43^\circ 30' N$, λ $012^\circ 40' W$, a la hora TU: 210428 de forma simultánea observamos:

$a_i \star$ Dubhe	$45^\circ 48.2'$
$a_i \star$ Arcturus	$58^\circ 34.5'$

Trácese la línea de posición por el método de Sumner.

\star Dubhe	\star Arcturus	$hG\Upsilon$	$248^\circ 46.5'$	
a_i $45^\circ 48.2'$	$58^\circ 34.5'$	$C^{on} ms$	$01^\circ 07.2'$	
r_a $1.0'$	$0.6'$	$hG\Upsilon_c$	$249^\circ 53.7'$	
a_c $45^\circ 47.2'$	$58^\circ 33.9'$	$-\lambda$	$012^\circ 40.0' W$	
		$hl\Upsilon$	$237^\circ 13.7' W$	
a_c	$58^\circ 33.9'$	AS_\star	$194^\circ 03.4'$	$146^\circ 04.2'$
a'_c	$45^\circ 47.2'$	58°	$071^\circ 17.1' W$	$023^\circ 17.9' W$
k_v	$12^\circ 46.7'$		P_1	P_2
		d_\star	$61^\circ 44.9' N$	$19^\circ 10.7' N$

Las fórmulas para el ángulo auxiliar β y latitud determinante φ_D son:

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\cos d \cdot \cos P_1 \cdot \cos a' - \cos d' \cdot \cos P'_1 \cdot \cos a}{\operatorname{sen} d \cdot \cos a' - \operatorname{sen} d' \cdot \cos a}$$

$$\operatorname{sen} (\varphi_1 + \beta_1) = \frac{\operatorname{sen} k \cdot \cos \beta_1}{\operatorname{sen} d \cdot \cos a' - \operatorname{sen} d' \cdot \cos a}$$

de las que obtenemos,

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= -66^\circ 20' 22.0'' \\ (\varphi_1 + \beta_1) &= -22^\circ 40' 03.2'' \\ \varphi_1 &= +43^\circ 40' 18.8'' - N \end{aligned} \right\}$$

Y como coordenadas del primer punto determinante de la secante:

$$\varphi_1 = 43^\circ 40.3' N \quad \lambda_1 = 012^\circ 40.0' W$$

Tomando una nueva longitud $\lambda_2 = 012^\circ 20.0' W$, lo que supone un $\Delta\lambda = 20' E$, por lo tanto, y en éste caso concreto, $\Delta P = \Delta P' = 20' W$:

$$\left. \begin{aligned} P_2 &= 023^\circ 37.9' W \\ P'_2 &= 071^\circ 37.1' W \end{aligned} \right\}$$

y de aquí,

$$\left. \begin{aligned} \beta_2 &= -66^\circ 20' 03.88'' \\ (\varphi_2 + \beta_2) &= -22^\circ 40' 20.47'' \\ \varphi_2 &= +43^\circ 39' 43.41'' - N \end{aligned} \right\}$$

Siendo las coordenadas del segundo punto determinante:

$$\varphi_2 = 43^\circ 39.7' N \quad \lambda_2 = 012^\circ 20.0' W$$

Procediéndose al trazado de la línea de posición según ilustra la figura 1.427.XV.

Si a título experimental se supone un error sistemático de $-30'$:

$$\begin{aligned} a &= 58^\circ 03.9' \\ a' &= 45^\circ 17.2' \\ a - a' &= 12^\circ 46.7' = k \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_3 &= -66^\circ 06' 12.89'' \\ (\varphi_3 + \beta_3) &= -22^\circ 25' 47.96'' \\ \varphi_3 &= +43^\circ 40' 24.93'' - N \end{aligned} \right\}$$

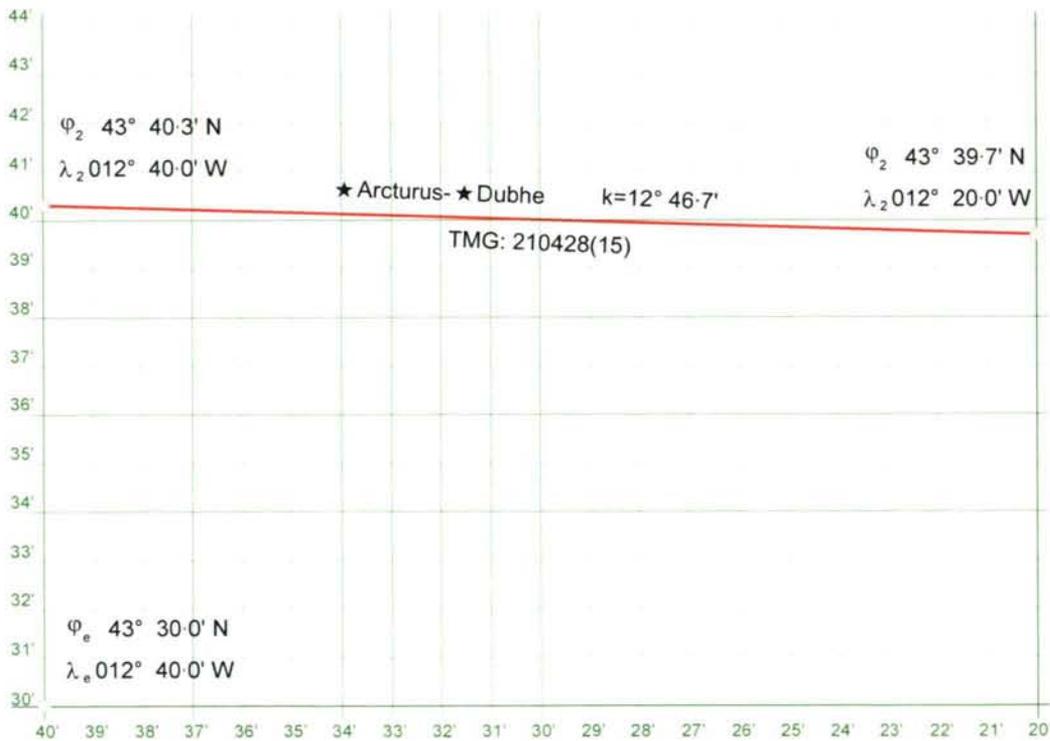


Figura - 1.427.XV - Recta diferenciométrica por el método de Sumner

Las coordenadas del primer punto determinante serían, en éste caso:

$$\varphi_3 = 43^\circ 40.4' N \quad \lambda_3 = 012^\circ 40.0' W$$

con error de +0.1'. Errores sistemáticos de la magnitud del aquí contemplado son altamente improbables, por lo que para errores menores el error en latitud es despreciable y se demuestra la completa fiabilidad de las fórmulas desarrolladas.

En el mismo ejemplo tratamos ahora el determinante por el método de la tangente en el meridiano o método de Borda, figura 1.428.XV; conocidas las coordenadas de uno de los puntos determinantes, se procede al cálculo de los azimutes en orden a determinar el rumbo de la recta, que haremos pasar por el citado

determinante; para el primero de ellos, siendo:

$$\cotg Z = \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} d \cdot \operatorname{cosec} P - \operatorname{sen} \varphi \cdot \cotg P$$

resultan,

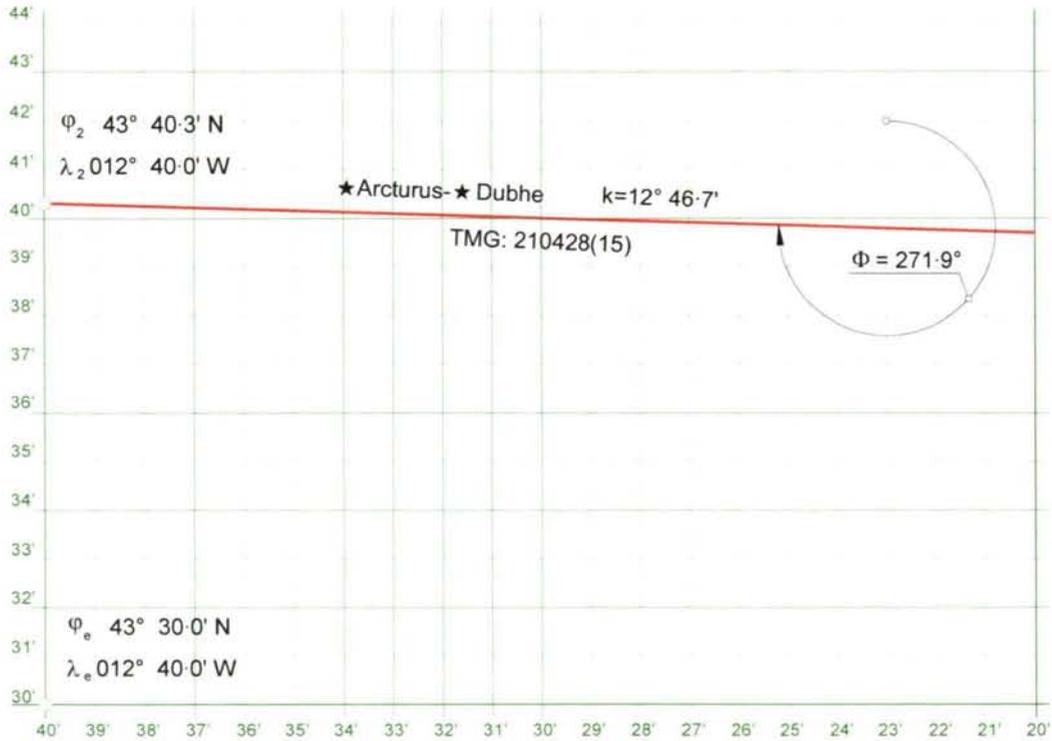


Figura - 1.428.XV - Determinante tipo Borda.

$$Z_1 \ 223.8^\circ$$

$$Z_2 \ 320.0^\circ$$

Y el rumbo de la recta diferenciométrica,

$$\Phi = \frac{Z_{VA} + Z_{VB}}{2} \quad ,, \quad \Phi = 271.9^\circ$$

habiendo dado para la secante $\Phi=271.8^\circ$, prácticamente el mismo.

La tangente de Johnson se aplica en el siguiente ejemplo, que resuelve un caso práctico completo, calculándose la situación observada por corte de tres líneas de

posición:

El 15 de mayo de 1977 a la HCG 233040 en S/e φ 43° 24' N, λ 033° 12' W, se observaron:

a_i ★ Arcturus	60° 17·4'
a_i ★ Regulus	42° 46·1'

Cálculo de la S/O.

	★ Arcturus	★ Regulus	★ Dubhe
a_i	60° 17·4'	42° 46·1'	65° 34·0'
r_a	0·6'-	1·1'-	0·5'-
a_c	60° 16·8'	42° 45·0'	65° 33·5'
$hG\Upsilon$	218° 33·1'		
$C^{on}ms$	07° 41·3'		
$hG\Upsilon_c$	226° 14·4'		
AS_\star	146° 20·2'	208° 12·4'	194° 24·8'
hG_\star	372° 34·6' W	434° 26·8' W	420° 39·2' W
$-\lambda$	033° 12·0' W	033° 12·0' W	033° 12·0' W
hl_\star	339° 2·6' W	401° 14·8' W	387° 27·2' W
hl_\star	020° 37·4' E = P₁	041° 14·8' W = P₂	027° 27·2' W = P₃
d_\star	19° 18·0' N	12° 04·6' N	61° 52·6' N

Hallados las alturas de cálculo, horarios locales y declinaciones de cada astro, procedemos al cálculo de los azimutes respectivos:

Azimutes: ★ Arcturus 138°, ★ Regulus 241°, ★ Dubhe 328°

Constantes que definen a cada una de las líneas de posición y rumbo de las mismas:

Línea de posición	Constante k	Rumbo Φ
★ Dubhe - ★ Regulus	22° 48·5' → k_{v1}	284·5°
★ Dubhe - ★ Arcturus	05° 16·7' → k_{v2}	233·0°
★ Arcturus - ★ Regulus	17° 31·8' → k_{v3}	189·5°

Línea ★ Dubhe - ★ Regulus: Cálculo del determinante tipo Borda.

$$\text{Ángulo auxiliar } \beta: \operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\cos d \cdot \cos P \cdot \cos a' - \cos d' \cdot \cos P' \cdot \cos a}{\operatorname{sen} d \cdot \cos a' - \operatorname{sen} d' \cdot \cos a}$$

$$\text{Latitud determinante, } \varphi_1: \operatorname{sen} (\varphi_1 + \beta_1) = \frac{\operatorname{sen} k \cdot \cos \beta_1}{\operatorname{sen} d \cdot \cos a' - \operatorname{sen} d' \cdot \cos a}$$

$$\beta_1 = +00^\circ 18' 01\cdot46''$$

$$(\varphi_1 + \beta_1) = +43^\circ 42' 10\cdot37''$$

$$\varphi_1 = +43^\circ 24' 08\cdot91'' \rightarrow N$$

$$\text{Determinante } \star \text{ Dubhe - } \star \text{ Regulus: } \begin{cases} \varphi_1 \ 43^\circ 24\cdot2' N \\ \lambda_e \ 033^\circ 12\cdot0' W \\ \Phi \ 284\cdot5^\circ \end{cases}$$

Línea ★ Dubhe - ★ Arcturus: Cálculo del determinante tipo Borda.

$$\beta_2 = -27^\circ 45' 15\cdot76''$$

$$(\varphi_2 + \beta_2) = +15^\circ 43' 12\cdot70''$$

$$\varphi_2 = +43^\circ 28' 28\cdot46'' \rightarrow N$$

$$\text{Determinante } \star \text{ Dubhe} - \star \text{ Arcturus: } \begin{cases} \varphi_2 \ 43^\circ \ 28.5' \text{ N} \\ \lambda_e \ 033^\circ \ 12.0' \text{ W} \\ \Phi \ 233.0^\circ \end{cases}$$

Línea \star Arcturus - \star Regulus: Cálculo del determinante tipo Johnson.

$$\text{Ángulo auxiliar } \theta: \operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} h_G \cdot \cos d \cdot \cos a' - \operatorname{sen} h'_G \cdot \cos d' \cdot \cos a}{\cos h_G \cdot \cos d \cdot \cos a' - \cos h'_G \cdot \cos d' \cdot \cos a}$$

Longitud determinante:

$$\cos (\lambda_D - \theta) = \frac{[\operatorname{sen} k - \operatorname{sen} \varphi \cdot (\operatorname{sen} d - \cos a' - \operatorname{sen} d' \cdot \cos a)] \cdot \cos \theta}{\cos \varphi \cdot (\cos h_G \cdot \cos d \cdot \cos a' - \cos h'_G \cdot \cos d' \cdot \cos a)}$$

$$\theta = +030^\circ \ 03' \ 01.99''$$

$$(\lambda_D - \theta) = -063^\circ \ 21' \ 11.49''$$

$$\lambda_D = +033^\circ \ 18' \ 09.50'' \text{ - W}$$

$$\text{Determinante } \star \text{ Arcturus} - \star \text{ Regulus: } \begin{cases} \varphi_e \ 43^\circ \ 28.5' \text{ N} \\ \lambda_D \ 033^\circ \ 18.2' \text{ W} \\ \Phi \ 189.5^\circ \end{cases}$$

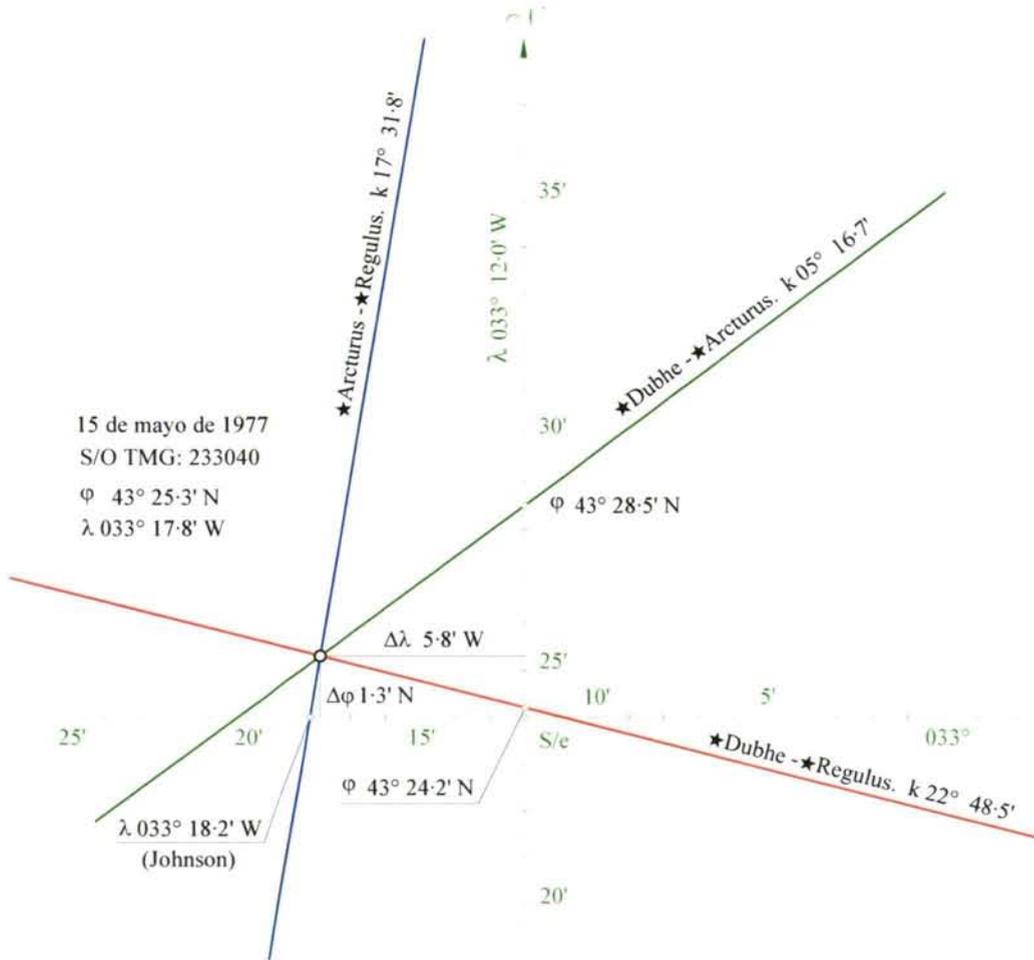


Figura - 1.432.XV - Situación observada por corte de rectas diferenciométricas

Determinante tipo Marcq de Saint-Hilaire: Si en el ejemplo precedente utilizamos el determinante Marcq de Saint-Hilaire, debemos calcular las alturas estimadas, según la vía clásica, mediante la fórmula,

$$\text{sen } a = \text{sen } \varphi \cdot \text{sen } d + \cos \varphi \cdot \cos d \cdot \cos (h_G - \lambda),$$

que generalmente escribimos,

$$\text{sen } a = \text{sen } \varphi \cdot \text{sen } d + \cos \varphi \cdot \cos d \cdot \cos P;$$

obteniendo para cada uno de los astros las alturas estimadas que siguen:

★ Arcturus	a_e	$60^\circ 19.8'$
★ Regulus	a_e	$42^\circ 41.1'$
★ Dubhe	a_e	$65^\circ 29.4'$

Para los determinantes de cada línea de posición, recordando que:

$$\rho = \frac{k_v - k_e}{2 \cdot \text{sen } \frac{\Delta Z}{2}}, \text{ y } \Phi = \frac{Z_v + Z'_v}{2}$$

obtenemos,

★Dubhe - ★ Arcturus

a_c	$65^\circ 33.5'$	a_e	$65^\circ 29.4'$	Z_v	328°	★Dubhe
- a'_c	$60^\circ 16.8'$	- a'_e	$60^\circ 19.8'$	Z'_v	138°	★ Arcturus
= k_v	$05^\circ 16.7'$	= k_e	$05^\circ 09.6'$			
- k_e	$05^\circ 09.6'$	ρ	$3.56'$			
= $k_v - k_e$	$00^\circ 07.1' +$	Φ	233.0°	- Dubhe N-W		

★Dubhe - ★ Regulus

a_c	$65^\circ 33.5'$	a_e	$65^\circ 29.4'$	Z_v	328°	★Dubhe
- a'_c	$42^\circ 45.0'$	- a'_e	$42^\circ 41.2'$	Z'_v	241°	★ Regulus
= k_v	$22^\circ 48.5'$	= k_e	$22^\circ 48.2'$			
- k_e	$22^\circ 48.2'$	ρ	$0.22'$			
= $k_v - k_e$	$00^\circ 00.3' +$	Φ	284.5°	- Dubhe N-W		

★ Arcturus - ★ Regulus

a_c 60° 16·8'	a_e 60° 19·8'	Z_v 138°	★ Arcturus
- a'_c 42° 45·0'	- a'_e 42° 41·2'	Z'_v 241°	★ Regulus
= k_v 17° 31·8'	= k_e 17° 38·6'		
- k_e 17° 38·6'	ρ 4·34'		
= $k_v - k_e$ 00° 06·8' -	Φ 189·5° - Regulus S-W		

Cuyo trazado, figura 1.434.XV, es en todo concordante con la 1.432.XV.

Prosiguiendo con el análisis comparativo de los distintos determinantes, se calculan las

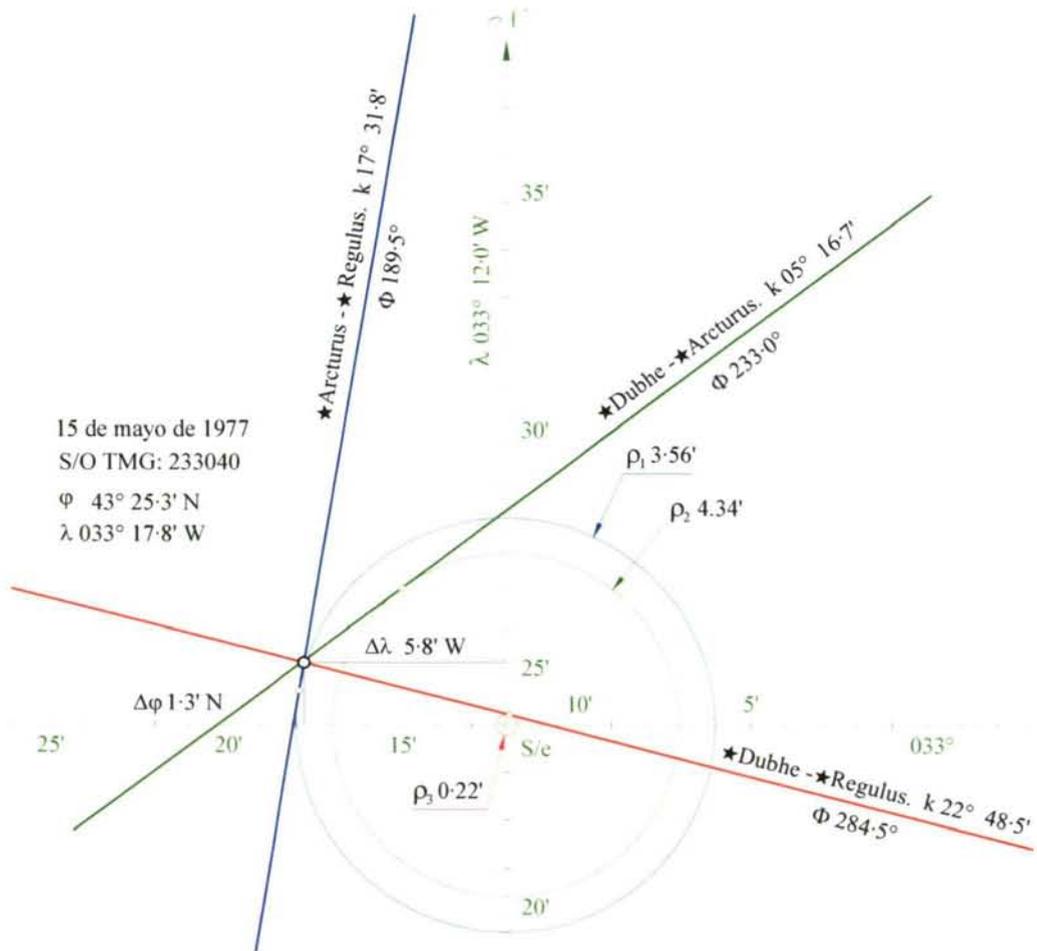


Figura - 1.434.XV - Determinantes Marcq de Saint-Hilaire

diferencias de alturas de los astros del ejemplo:

	a_c	$60^\circ 16.8' +$	
★ <i>Arcturus</i>	a_e	$60^\circ 19.8' -$	$Z_v 138^\circ$
	Δa	$3.0' -$	
	a_c	$42^\circ 45.0' +$	
★ <i>Regulus</i>	a_e	$42^\circ 41.2' -$	$Z_v 241^\circ$
	Δa	$3.8' -$	
	a_c	$65^\circ 33.5' +$	
★ <i>Dubhe</i>	a_e	$65^\circ 29.4' -$	$Z_v 328^\circ$
	Δa	$4.1' +$	

Y el cálculo de la situación observada por corte de bisectrices de altura, figura 1.436.XV, muestra de manera inequívoca la auténtica naturaleza de la bisectriz que, cómo ya habíamos establecido, no es otra que la de la hipérbola esférica, hipótesis fundamental de éste trabajo; dichas líneas de posición son las mismas que las obtenidas por procedimientos independientes de las rectas de altura, demostrando, una vez más, su indiscutible origen hiperbólico.

Vimos que el error accidental provocaba una modificación del determinante, variación del elemento ρ en el procedimiento del tipo Marcq, cuya entidad venía dada por:

$$d\rho = \frac{d\Delta k}{2 \cdot \text{sen} \frac{\Delta Z}{2}}$$

el signo de tal variación depende del aumento o disminución del valor absoluto de $d\Delta k$; el radio aumenta si lo hace $|\Delta k|$, y se contrae cuando $|\Delta k|$ disminuye. Supóngase que sobre la altura de uno de los astros del ejemplo tratado, Arcturus por ejemplo, se ha cometido un error accidental $+\varepsilon'$; todas las líneas de posición dependientes de éste astro sufrirán una traslación paralelamente a sí mismas, dando cómo resultado una situación observada errónea que, al variar el error ε' , se desliza por la línea de posición exacta. La configuración de corte de las líneas de posición cuando se observan tres

astros es siempre la misma: las tres líneas se cortan en un punto² y, por ello, la situación observada en estas circunstancias no es de absoluta confianza; con tres líneas no puede detectarse la existencia de errores accidentales, y estos no tienen como única fuente el proceso de la observación misma; la experiencia demuestra que los errores accidentales forman parte de la rutina de cálculo; debemos buscar una

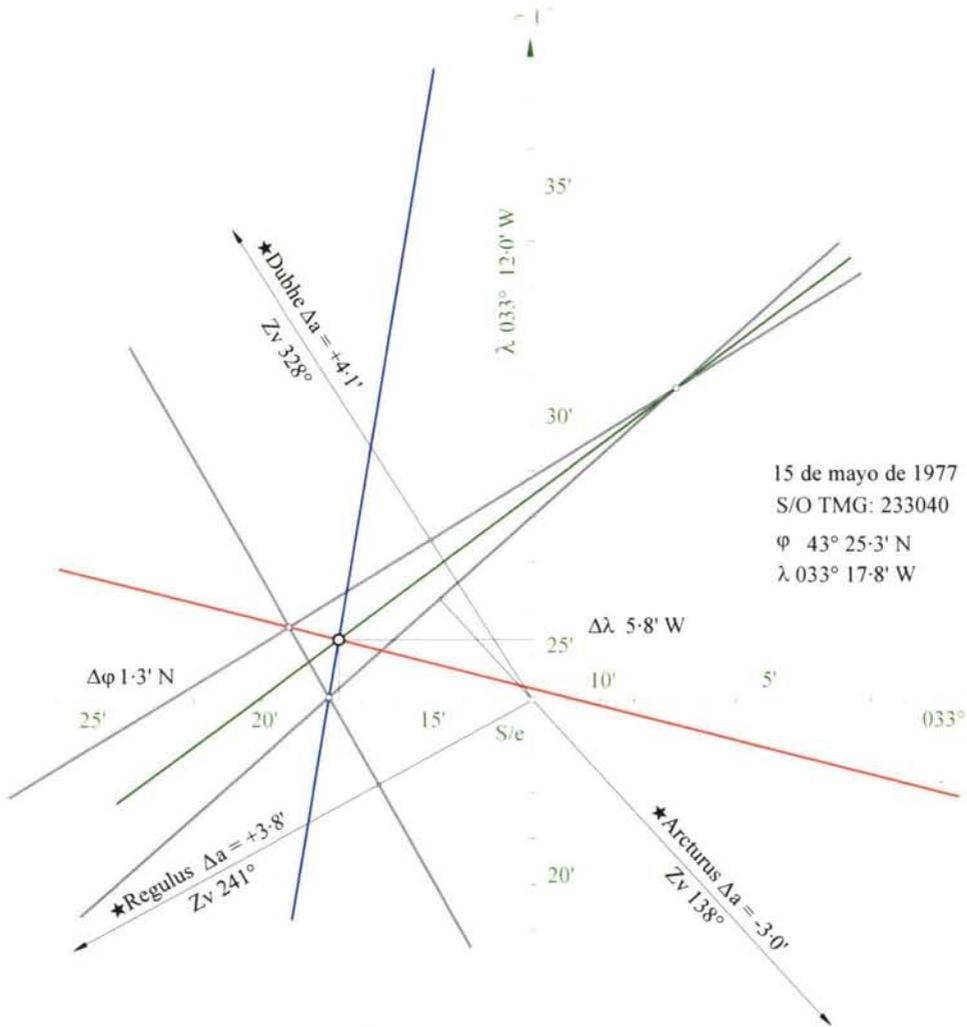


Figura 1.436.XV - Situación observada por corte de "bisectrices"

configuración capaz de mostrar la existencia de tales errores, pues una vez detectados, y si se han cometido durante el cálculo, podrán ser subsanados.

² Las bisectrices de un triángulo se cortan en un punto denominada incentro, que es el centro de la circunferencia inscrita; en el caso de tres rectas de altura y tres bisectrices, el radio de esta circunferencia sería el error sistemático si no existieran errores accidentales.

Cómo ejemplo de aplicación de lo expuesto, supongamos un error accidental ε_a de + 3.5' en la altura observada del astro Arcturus; calculamos los nuevos radios comprobando el desplazamiento lateral de las líneas de posición:

★ Dubhe - ★ Arcturus	ρ_ε 1.81'	ρ 3.56'	dp - 1.76'
★ Arcturus - ★ Regulus	ρ_ε 2.11'	ρ 4.34'	dp - 2.23'

El resultado de llevar estos valores a la figura 1.434.XV, queda reflejado en la figura 1.437.XV. Las distancias ρ a las líneas de posición afectadas del error accidental ε_a , se acortan cómo consecuencia del incremento negativo de Δk .

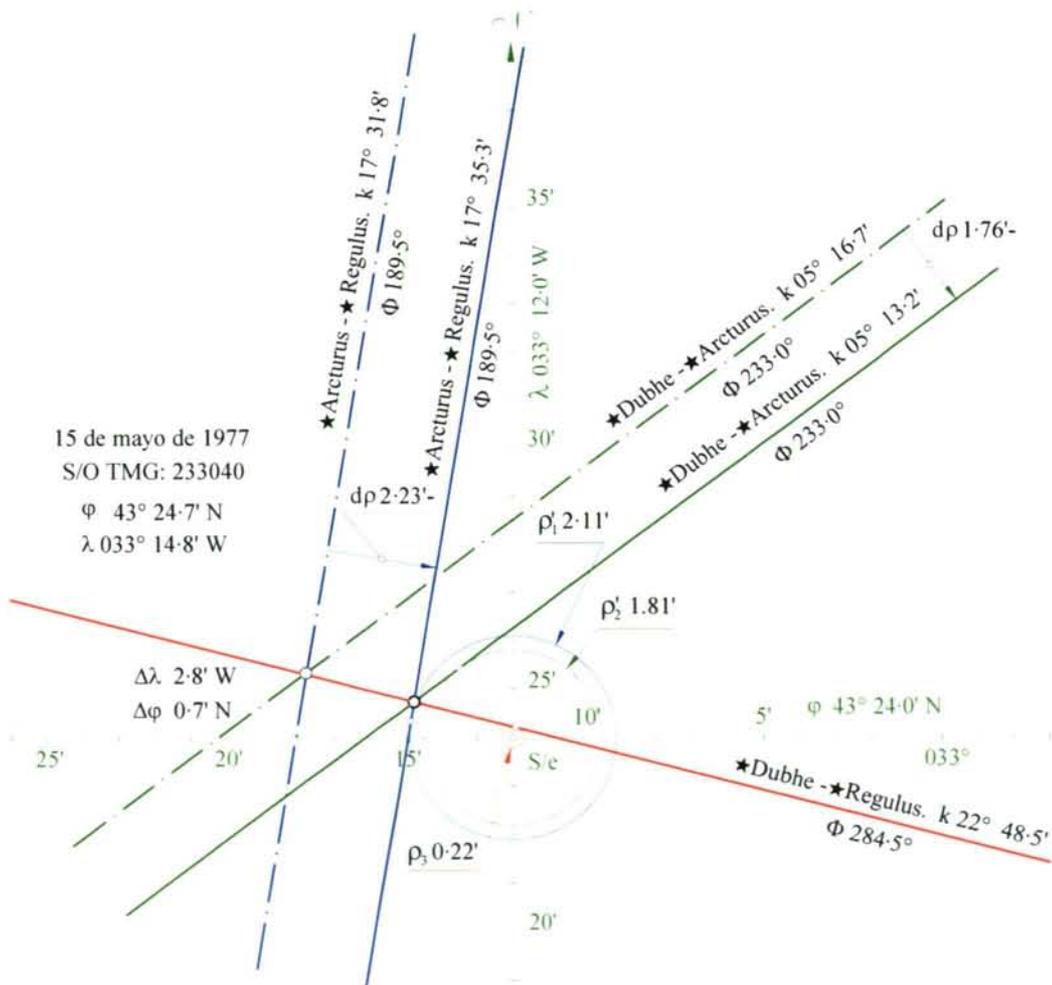


Figura - 1.437.XV - Influencia del error accidental

Para que la existencia de errores accidentales quede patente es preciso la observación de cuatro astros que nos proporcionarán seis líneas de posición, si cuatro

de ellas se cortan en un mismo punto, y salvo error en el trazado, se cortarán en el mismo punto. La observación de más de cuatro astros no añade mayor certidumbre a la situación observada; por el contrario, el ángulo de corte de alguna de las líneas de posición no sería aconsejable. En el ejercicio que sigue se estudia la configuración en una observación de éste tipo; consideremos en primer lugar la inexistencia de error accidental alguno y, posteriormente, introduciremos un error en el cálculo.

En la amanecida del día 21 de abril de 2001 a la hora del primer meridiano 142436, en S/e φ 39° 35·0' S y λ 126° 30·0' W se observaron:

	★ Shaula	★ Fomalhaut	★ Atria	★ Altair
a_i	61° 45·3'	52° 11·6'	51° 38·3'	41° 18·8'

Calcular S/O.

	★ Shaula	★ Fomalhaut	★ Atria	
a_i	61° 45·3'	52° 11·6'	51° 38·3'	41° 18·8'
r_a	0·5'-	0·8'-	0·8'-	1·1'-
a_c	61° 44·8'	52° 10·8'	51° 37·5'	41° 17·7'

$hG\Upsilon$ 059° 42·4'

C_{ms}^{on} 06° 10·0'

S/e φ 39° 35·0' N λ 126° 30·0' W

$hG\Upsilon_c$ 065° 52·4'

- λ 126° 30·0' W

$hl\Upsilon$ 299° 22·4' W

AS_\star 096° 34·7' 015° 34·7' 107° 47·9' 062° 17·6'

hl_\star 395° 57·1' W 314° 57·1' W 407° 10·3' W 361° 40·0' W

hl_\star 035° 57·1' W P_1 045° 02·9' E P_2 047° 10·3' W P_3 001° 40·0' W P_4

d_\star 37° 06·2' S 12° 04·6' N 69° 01·6' W 08° 52·1' N

sen $a = \text{sen } \varphi \cdot \text{sen } d + \cos \varphi \cdot \cos d \cdot \cos P_i$, $\text{cotg } Z = \cos \varphi \cdot \text{tg } d \cdot \text{cosec } P - \text{sen } \varphi \cdot \text{cotg } Z$

a_e 61° 52·9' 52° 01·4' 51° 29·5' 41° 31·4'

Z_v 263·5° 089·0° 205·0° 358·0°

Cálculo de los determinantes de las líneas de posición; distancia desde la situación de estima y rumbo de las líneas.

Líneas y determinantes:

		★ Shaula	★ Fomalhaut	★ Atria	★ Altair
	$a_{v★}$	61° 44·8'	52° 10·8'	51° 37·5'	41° 17·7'
	$a_{e★}$	61° 52·9'	52° 01·4'	51° 29·5'	41° 31·4'
	$Z_{v★}$	263·5°	089·0°	205·0°	358·0°
★ Fomalhaut	$+k_v$	09° 34·0'			
	$-k_e$	09° 51·5'			
	$=\Delta k$	00° 17·5' -			
	ρ	8·8' - N-E			
	Φ	176·25°			
				$\rho = \frac{k_v - k_e}{2 \cdot \text{sen} \frac{\Delta Z}{2}}$	
				$\Phi = \frac{Z_v + Z'_v}{2}$	
★ Atria	$+k_v$	10° 07·3'	00° 33·3'		
	$-k_e$	10° 23·4'	00° 31·9'		
	$=\Delta k$	00° 16·1' -	00° 01·4'		
	ρ	16·5' - S-W	0·7' - N-E		
	Φ	234·25°	147·00°		
★ Altair	$+k_v$	20° 27·1'	10° 53·1'	10° 19·8'	
	$-k_e$	20° 21·5'	10° 30·0'	09° 58·1'	
	$=\Delta k$	00° 05·6' -	00° 23·1'	00° 21·7'	
	ρ	3·8' - S-W	16·2' - N-E	11·3' - S-W	
	Φ	310·75°	223·50°	281·50°	

Las distintas líneas de posición se representan en la figura 1.444.XV en la que se contempla una configuración sin errores accidentales sensibles a la escala usada. Es

preciso señalar que en la práctica de la Navegación Astronómica los errores accidentales están siempre presentes; la simple operación de redondeo de las lecturas del sextante a la décima de minuto así como el control del tiempo con un rango de precisión que excepcionalmente alcanza el medio segundo, son el principal origen de los mismos. Si se ampliase la escala utilizada en la solución gráfica, las líneas de posición no se cortarían todas en el mismo punto como aparentemente ocurre.

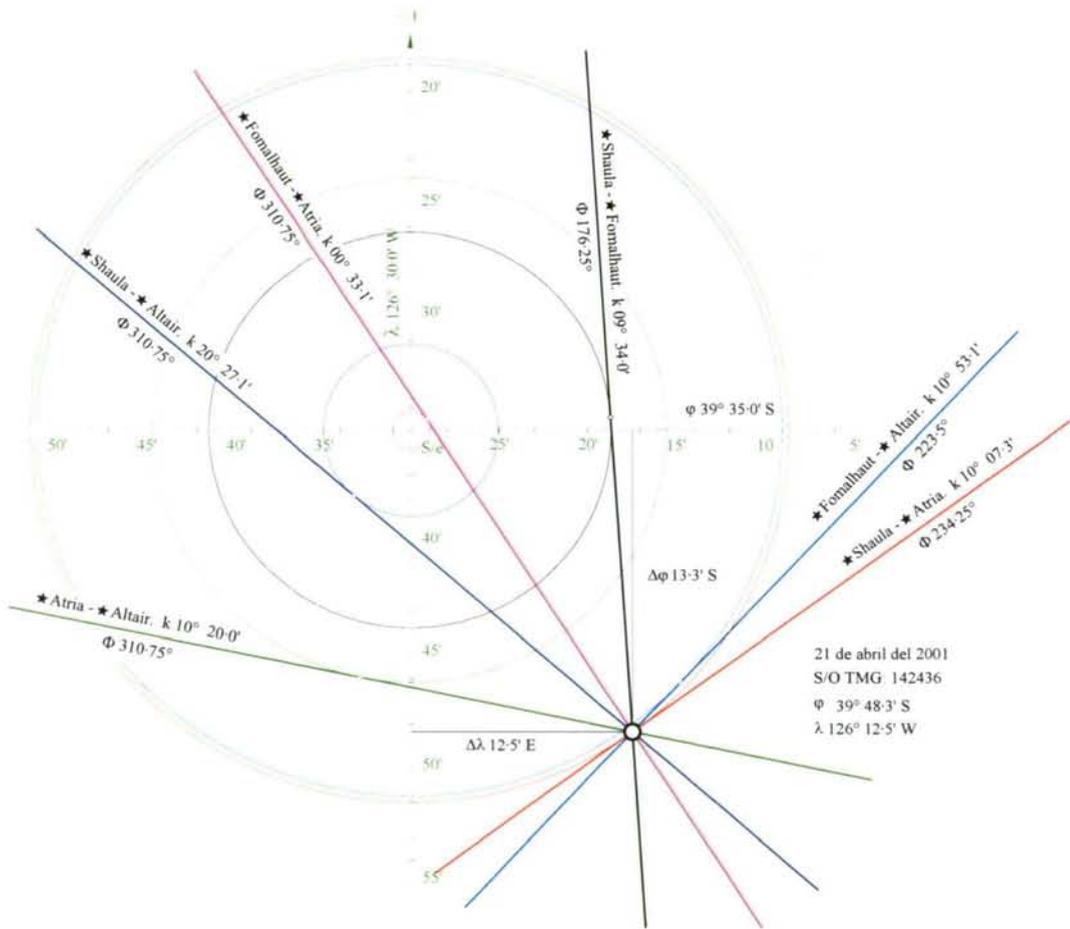


Figura - 1.440.XV - Configuración sin error accidental sensible

Continuando en nuestro estudio sobre una configuración más general, introduzcamos un error accidental de, por ejemplo, $-7.5'$ en el cálculo del horario del ★ Atria; el error en la altura vendrá dado por:

$$da = -dP \cdot \cos \varphi \cdot \cos d \cdot \sec P \cdot \sec a$$

O, de forma más simple

$$da = -dP \cdot \cos \varphi \cdot \text{sen } Z;$$

y en nuestro caso, siendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} dP - 7 \cdot 5' \\ \varphi_e 39^\circ 35 \cdot 0' S \\ Z_v 205 \cdot 0^\circ \end{array} \right.$$

fácilmente se obtendría para $da +2 \cdot 4'$; a todo incremento positivo del horario corresponde un incremento negativo de la altura y viceversa. Recordemos que el error en la hora cuando afecta a todos los astros observados no es error sistemático; se demostró en este trabajo que no podía ser tal; para recordarlo basta una simple ojeada a cualquiera de las fórmulas diferenciales arriba escritas. Teniendo en cuenta el error en estudio, la altura estimada de Atria será:

$$a_e 51^\circ 31 \cdot 9'$$

obviando, dada su efectiva pequeñez, la variación en azimut como consecuencia de éste error en el horario. Las líneas de posición y determinantes son, ahora, las reflejadas en la página siguiente (442), valores que aplicados a la solución gráfica de la figura 1.440.XV, dan cómo resultado la configuración en la figura 1.443.XV. En las circunstancias expuestas, las líneas de posición se cortan tres a tres en cuatro puntos bien diferenciados; el área del trapezoide que resulta será función de los errores accidentales existentes, y dos de las líneas de posición son diagonales del trapezoide de error. En la práctica no se podría dirimir sobre qué o cuales astros recaen los errores accidentales; recordemos que los errores sistemáticos fueron barridos por la naturaleza diferenciométrica de las líneas de posición, pero esta configuración manifiesta, sin duda alguna, que los errores accidentales está presentes. Si el error es de cálculo, un simple repaso lo pondrá al descubierto procediéndose a su corrección; mas si tiene su origen en el proceso de observación, nada podrá hacerse excepto una ponderación de la calidad de las líneas basada en la experiencia del observador, que permitirá disponer de los elementos de juicio precisos para seleccionar la situación observada dentro de

la configuración resultante.

	★ Shaula	★ Fomalhaut	★ Atria	★ Altair
	$a_{v★}$ 61° 44·8'	52° 10·8'	51° 37·5'	41° 17·7'
	$a_{e★}$ 61° 52·9'	52° 01·4'	51° 31·9'	41° 31·4'
	$Z_{v★}$ 263·5°	089·0°	205·0°	358·0°
★ Fomalhaut	$+k_v$ 09° 34·0'			
	$-k_e$ 09° 51·5'			
	$=\Delta k$ 00° 17·5' -			
	ρ 8·8' - N-E			
	Φ 176·25°			
			$\rho = \frac{k_v - k_e}{2 \cdot \text{sen} \frac{\Delta Z}{2}}$	
			$\Phi = \frac{Z_v + Z'_v}{2}$	
★ Atria	$+k_v$ 10° 07·3'	00° 33·3'		
	$-k_e$ 10° 21·0'	00° 29·5'		
	$=\Delta k$ 00° 13·7' -	00° 03·8'+		
	ρ 14·0' - S-W	2·2' - N-E	$dp \approx -2·5'$,, $dp \approx -1·4'$	
	Φ 234·25°	147·00°		
★ Altair	$+k_v$ 20° 27·1'	10° 53·1'	10° 19·8'	
	$-k_e$ 20° 21·5'	10° 30·0'	10° 00·5'	
	$=\Delta k$ 00° 05·6' -	00° 23·1'	00° 19·3'	
	ρ 3·8' - S-W	16·2' - N-E	9·9' - S-W	$dp \approx -1·2'$
	Φ 310·75°	223·50°	281·50°	

Cuando la superficie del trapezoide alcanza una magnitud tal que ponga de manifiesto errores inadmisibles, es preciso recurrir a una nueva observación tan pronto las circunstancias lo permitan, y en caso de necesidad, debe procederse con la prudencia propia del buen navegante. El resultado que cabe esperar de toda

observación es el que muestra la figura 1.443.XV; excepcionalmente, el de la figura 1.440.XV. La superficie del trapecoide debe ser el área de certidumbre y parece razonable tomar cómo S/O el corte de las dos diagonales.

Hasta aquí se ha idealizado el presente análisis en la simultaneidad de las observaciones, imposible salvo circunstancias excepcionales; en la práctica el piloto observará a intervalos de tiempo más o menos cortos, un cielo con nubes y claros

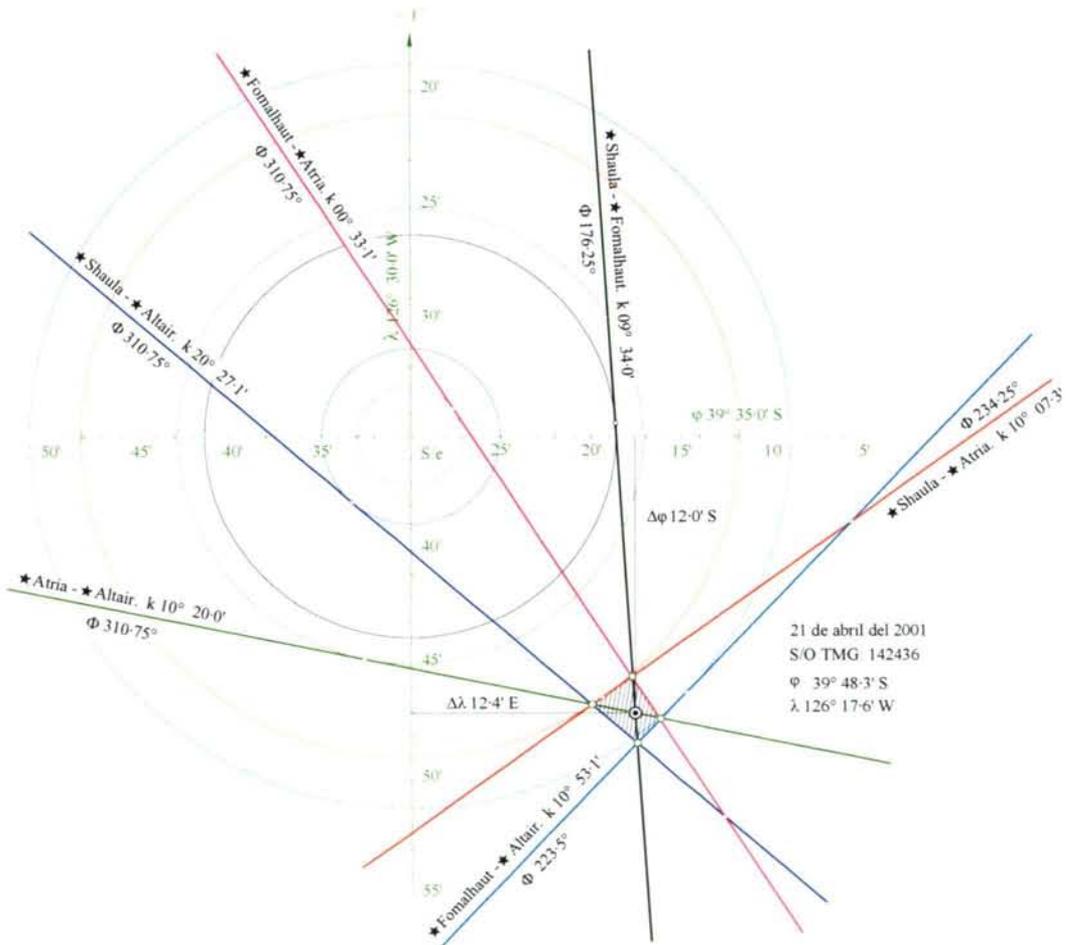


Figura - 1.443.XV - Configuración cuando el error accidental es notable

puede exigir esperas de varios minutos entre las tomas de las alturas y, en general y aún con cielos completamente despejados, la medida de las alturas será realizada con diferencias que pueden ser de algunos minutos. No hay una regla que permita discernir claramente cuando pueden considerarse simultáneas dos alturas, y cualquier intervalo de tiempo que transcurra deberá ser tenido en cuenta, pues durante se tiempo la altura de los astros variará cómo consecuencia del movimiento diurno aparente, variación

dependiente de las coordenadas horizontales del astro, y del rumbo y la velocidad del buque. La consideración de la distinta situación de estima que corresponde a cada hora y altura es poco práctica por manejar diferentes coordenadas φ y λ , alargando innecesariamente el cálculo; la mejor solución consiste en la reducción de las alturas al último horizonte, tal y cómo se explica en la página 339 de éste estudio, procediéndose al cálculo de las alturas estimadas y azimutes de los astros con las mismas φ y λ , las del último horizonte, y cada astro con su hora. Sirva cómo ejemplo de aplicación el siguiente ejercicio práctico:

El día 26 de mayo de 2001 navegábamos al 096°/v con velocidad d 18.3 nudos y en el crepúsculo vespertino, en S/e φ 38° 15.0' N, λ 156° 50.0' W, observamos:

TMG 27052001	★ Observado	Altura instrumental, a_i
061253	Gienah	34° 01.0'
061816	Kochab	49° 43.1'
062402	Regulus	51° 07.4'
062813	Alphecca	48° 08.5'

Determinése S/O.

Cálculo de los horarios:

	★ Gienah	★ Kochab	★ Regulus	★ Alphecca
$hG\Upsilon$	334° 51.7'			
$C^{\circ}ms$	03° 13.8'	04° 34.8'	06° 01.5'	07° 04.4'
$hG\Upsilon_c$	338° 05.5'	339° 26.5'	340° 53.2'	341° 56.1'
$-\lambda$	156° 50.0' W	156° 50.0' W	156° 50.0' W	156° 50.0' W
$hl\Upsilon$	181° 15.5' W	182° 36.5' W	184° 03.2' W	185° 06.1' W
AS_{\star}	176° 01.9'	137° 18.3'	207° 53.6'	126° 18.7'
hl_{\star}	357° 17.4' W	319° 54.8' W	391° 56.8' W	311° 24.8' W
hl_{\star}	002° 42.6' E- P_1	040° 05.2' E- P_2	031° 56.8' W- P_3	048° 35.2' E- P_4
d_{\star}	17° 33.0' S	74° 09.1' N	11° 57.7' N	26° 46.2' N

Cálculo de alturas estimadas y azimutes

	★ Gienah	★ Kochab	★ Regulus	★ Alphecca
$\text{sen } a = \text{sen } \varphi \cdot \text{sen } d + \cos \varphi \cdot \cos d \cdot \cos P \quad \text{cotg } Z = \cos \varphi \cdot \text{tg } d \cdot \text{cosec } P - \text{sen } \varphi \cdot \text{cotg } P$				
a_e	34° 08·7'	49° 26·0'	51° 16·8'	47° 57·4'
Z_v	177·0°	016·0°	236·0°	091·0°
M_{\star}	081·0°	080·0°	140·0°	

Reducción al último horizonte

	$m = \Delta t \cdot V \quad U_h = m \cdot \cos M_{\star}$		
Δt	001520	000957	000411
m	4·7'	3·0'	1·3'
U_h	0·7' +	0·5' +	1·0' -

Correcciones a las alturas observadas

a_i	34° 01·0'	49° 43·1'	51° 07·4'	48° 08·5'
r_a	- 1·5'	- 0·8'	- 0·8'	- 0·9'
U_h	+ 0·7'	+ 0·5'	- 1·0'	
a_c	34° 00·2'	49° 42·8'	51° 05·6'	48° 07·6'

Líneas de posición y determinantes

	★ Regulus	★ Kochab	★ Alphecca	★ Gienah
$a_{v★}$	51° 05·6'	49° 42·8'	48° 07·6'	34° 00·2'
$a_{e★}$	51° 16·8'	49° 26·0'	47° 55·7'	34° 08·5'
$Z_{v★}$	236·0°	016·0°	091·0°	177·0°
★ Kochab	$+k_v$	01° 22·8'		
	$-k_e$	01° 50·8'		
	$=\Delta k$	00° 28·0' -		
	ρ	14·9' - N-E		
	Φ	126·0°		
			$\rho = \frac{k_v - k_e}{2 \cdot \text{sen } \frac{\Delta Z}{2}}$	
			$\Phi = \frac{Z_v + Z'_v}{2}$	
★ Alphecca	$+k_v$	02° 58·0'	01° 35·0'	
	$-k_e$	03° 21·1'	01° 30·3'	
	$=\Delta k$	00° 23·1' -	00° 04·9'+	
	ρ	12·1' - S-E	4·0' - S-E	
	Φ	163·5°	053·5°	
★ Gienah	$+k_v$	17° 05·4'	15° 42·6'	14° 07·4'
	$-k_e$	17° 08·3'	15° 17·5'	13° 47·2'
	$=\Delta k$	00° 02·9' -	00° 25·1'	00° 20·2'
	ρ	2·9' - S-E	12·7' - N-E	14·8' - S-E
	Φ	206·5°	096·5°	132·0°

La figura 1.447.XV muestra la configuración resultante y solución gráfica del problema en la que, para la escala utilizada, no se contempla error accidental sensible. Si interesase la medida del error sistemático presente en la observación, bastaría con el trazado de una de las rectas de altura; la distancia desde la situación observada a la

recta de altura es el error sistemático buscado y solo tiene cierta importancia teórica.

7. CARTA PARA LA NAVEGACIÓN ASTRONÓMICA. — Una vez estudiado el procedimiento de cálculo y trazado de las líneas de posición, es evidente la posibilidad de construcción de una carta para la navegación astronómica que cubra una determinada zona geográfica; los pasos a seguir serían los siguientes:

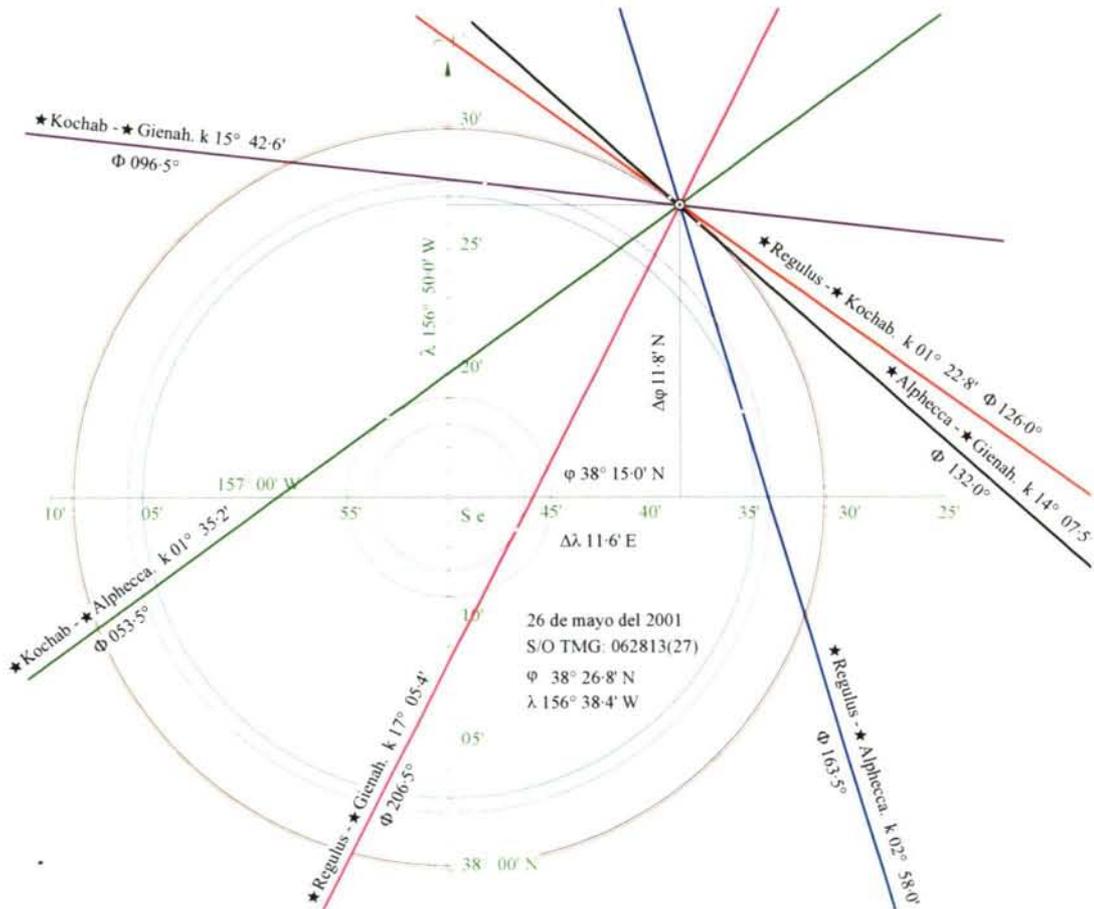


Figura - 1.447.XV - S/O con reducción de las alturas al último horizonte

- Selección del grupo de estrellas, cuyas coordenadas permiten el adecuado ángulo de corte de las líneas de posición generadas, para la zona que interese.
- Acotación de los valores útiles de las alturas y , por lo tanto, de la constante k que definen cada una de las líneas de posición a intervalos concretos.

- c) Cálculo de las coordenadas de un número suficiente de puntos para cada una de las líneas de posición.
- d) Para cada, línea trazado y posterior unión de los puntos sobre la carta en la proyección elegida y a escala conveniente.
- e) Dotar a la carta de los medios auxiliares precisos, para que su manejo práctico resulte lo más sencillo posible. Su objetivo final es la determinación directa de la latitud observada, y del horario de Aries en el lugar, para de éste, y en función de la hora de TU, deducir la longitud observada.

El navegante tomará las alturas de los astros, las corregirá únicamente por refracción astronómica, toda vez que las demás correcciones constituyen errores sistemáticos, y, comenzando por la más alta, las restará dos a dos para eliminar los errores sistemáticos definiendo así cada una de las líneas de posición por el valor positivo de k_v y determinará la posición por corte de dos o más líneas de posición fácilmente interpoladas entre las fijadas en la carta. El problema de cálculo se reduce a la aplicación del método de Doves: dadas las alturas de dos astros a y a' de dos astros A y B, determinar las coordenadas φ, λ de los puntos que satisfacen el sistema, ya expuesto en páginas precedentes:

$$\left. \begin{aligned} \text{sen } a &= \text{sen } \varphi \cdot \text{sen } d + \cos \varphi \cdot \cos d \cdot \cos (h_G - \lambda) \\ \text{sen } a' &= \text{sen } \varphi \cdot \text{sen } d' + \cos \varphi \cdot \cos d' \cdot \cos (h'_G - \lambda) \\ a - a' &= k \end{aligned} \right\} \quad (1.448.XV)$$

y cuya interpretación geométrica se muestra en la figura 1.448.XV.

Cálculo de D:

$$\cos D = \text{sen } d \cdot \text{sen } d' + \cos d \cdot \cos d' \cdot \cos \Delta h_G \quad (2.448.XV)$$

en la que D es el arco AB de círculo máximo de la esfera celeste, d y d' las declinaciones de los astros y Δh_G la diferencia de los horarios en Greenwich (diferencia de los ángulos sidéreos).

Para el ángulo β tendremos:

$$\cotg \beta = \operatorname{tg} d \cdot \cos d' \cdot \operatorname{cosec} \Delta h_G - \operatorname{sen} d' \cdot \cotg \Delta h_G \quad (1.449.XV)$$

El ángulo γ se calcula por:

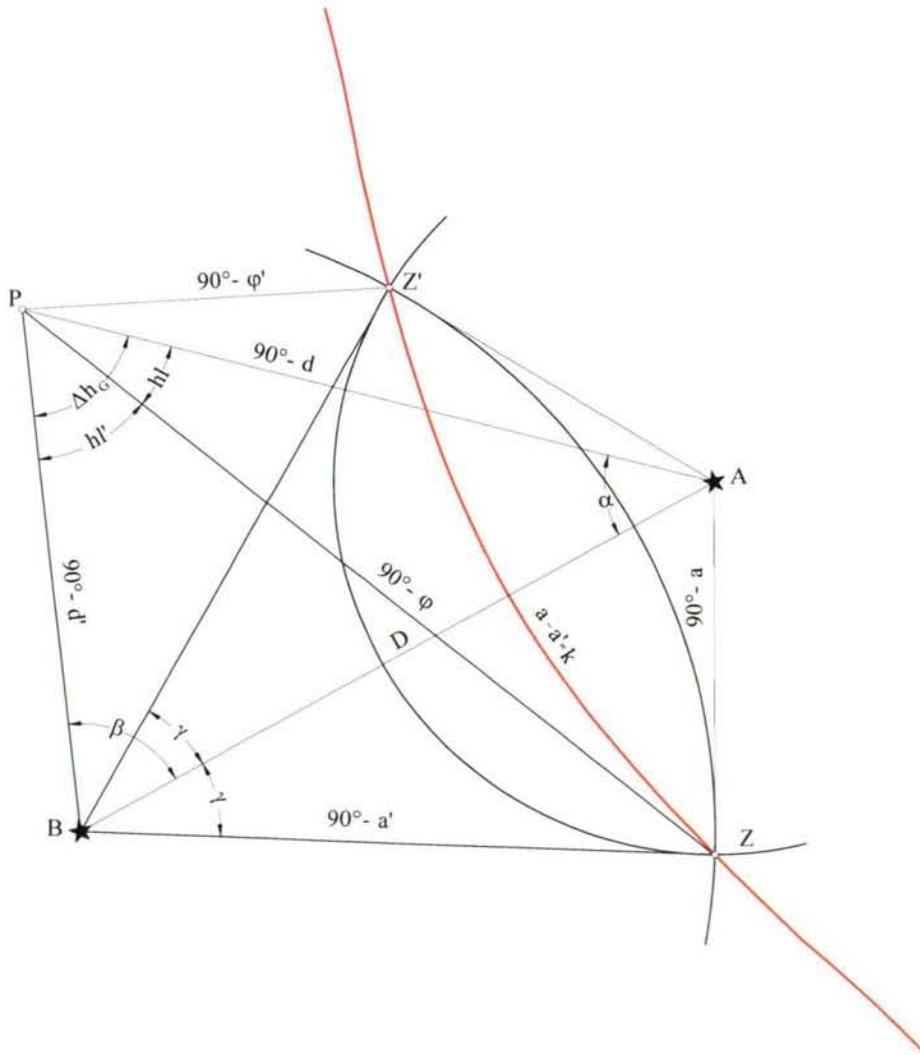


Figura - 1.449.XV - Cálculo de los puntos de la línea de posición

$$\cos \gamma = \operatorname{sen} a \cdot \sec a' \cdot \operatorname{cosec} D - \operatorname{tg} a' \cdot \cotg D \quad (2.449.XV)$$

ángulo éste que podrá calcularse en función de la constante k por medio de la expresión:

$$\cos \gamma = \frac{\operatorname{tg} a' \cdot (\cos k - \cos D) + \operatorname{sen} k}{\operatorname{sen} D} \quad (1.450.XV)$$

calculándose la latitud,

$$\operatorname{sen} \varphi = \operatorname{sen} d' \cdot \operatorname{sen} a' + \cos d' \cdot \cos a' \cdot \cos (\beta \pm \gamma) \quad (2.450.XV)$$

y el horario local del astro que interese,

$$\cos h|_B = \operatorname{sen} a' \cdot \sec \varphi \cdot \sec d' - \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} d' \quad (3.450.XV)$$

Este fue el procedimiento de cálculo de las coordenadas para los puntos y posterior trazado de la carta ARCTURUS - VEGA - DUBHE correspondiente a la época 14 de julio de 1994, que, debido a su naturaleza experimental, cubre un área geográfica pequeña. Se muestra en la doble página 453 y 454, y puesto que las observaciones excepcionalmente serían simultáneas, se acompaña la carta de los nomogramas de puntos alineados que permiten la reducción de las alturas a la última hora y al último horizonte, así como un interpolador gráfico para la obtención rápida de las líneas comprendidas entre las que definen las diferentes k fijadas en la misma. A modo de ejemplo se realiza el siguiente ejercicio práctico con observaciones simultáneas:

El día 15 de junio de 1994 a 212812 TMG simultáneamente observamos,

a_i ★ VEGA	58° 25·7'
a_i ★ DUBHE	45° 58·6'
a_i ★ ARCTURUS	58° 50·0'

Corregidas por refracción astronómica, y asumiendo como valor suficientemente aproximado el de la cotangente de la altura, se tendrá:

a_c ★ VEGA	58° 25·1'
a_c ★ DUBHE	45° 57·6'
a_c ★ ARCTURUS	58° 49·4'

lo que nos permite individualizar las siguientes líneas de posición,

★ ARCTURUS - ★ VEGA	- $k = 00° 24·3'$
★ ARCTURUS - ★ DUBHE	- $k = 12° 51·8'$
★ VEGA - ★ DUBHE	- $k = 12° 27·5'$

identificando en la carta, de forma inmediata, la zona que comprende los valores de las constantes; después de una simple interpolación cada una de las líneas de posición podrá ser trazada en la carta.

El problema está solucionado sobre la carta correspondiente a las páginas 455 y 456. Para la interpolación de líneas se procederá como se explica en la figura 1.451.XV: en la zona donde se localiza nuestra situación mídase, por medio de una

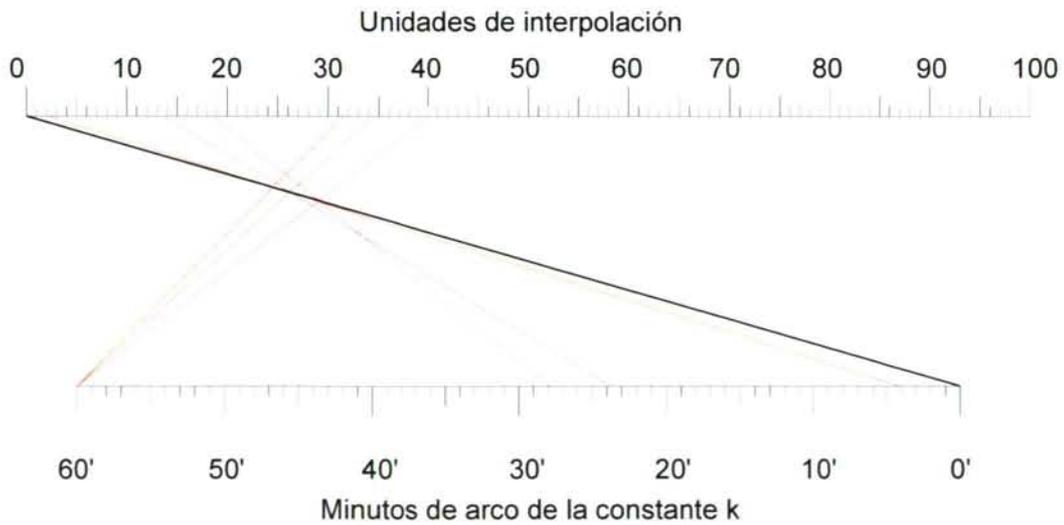


Figura - 1.451.XV - Interpolador de líneas

línea recta sensiblemente perpendicular a ambas, la distancia entre dos de las líneas trazadas, la naturaleza de las unidades lineales empleadas en esta medición es indiferente, y cuyos valores de constante comprenda el de la constante a interpolar. En nuestro caso y para el par ★ Vega - ★ Dubhe esta distancia es de, aproximadamente,

34.3 millas que corresponde a una variación de 60' en la constante k; la línea a interpolar es la de la constante $k = 12^\circ 25.7'$ comprendida entre los valores $k = 12^\circ$ y $k = 13^\circ$. Únase por medio de una recta el punto 60' de la graduación de las es.cala de los minutos de arco de la constante k con el punto 34.3' de la escala de unidades de interpolación; la nueva recta trazada por los puntos 27.5' de la escala de minutos de arco de la constante k y por el de intersección de la recta que une los ceros de ambas escalas, línea proporcional, con la trazada en primer lugar, determina en la escala en la escala de unidades de interpolación el valor de la distancia 15.7 millas desde la línea de constante $k = 12^\circ$, trazada en la carta, a la línea de posición buscada y que dibujaremos "paralela" a las $k = 12^\circ$ y $k = 13^\circ$. Repitiendo el proceso para las otras dos líneas de posición se tendrá:

Par	Constante	Comprendida entre	Distancia	Interpolación
★ Arcturus - ★ Dubhe	$k = 12^\circ 51.8'$	$k = 12^\circ$ y $k = 13^\circ$	$\approx 41.5'$	$\approx 35.8'$
★ Arcturus - ★ Vega	$k = 00^\circ 24.5'$	$k = 00^\circ$ y $k = 01^\circ$	$\approx 32.0'$	$\approx 13.0'$

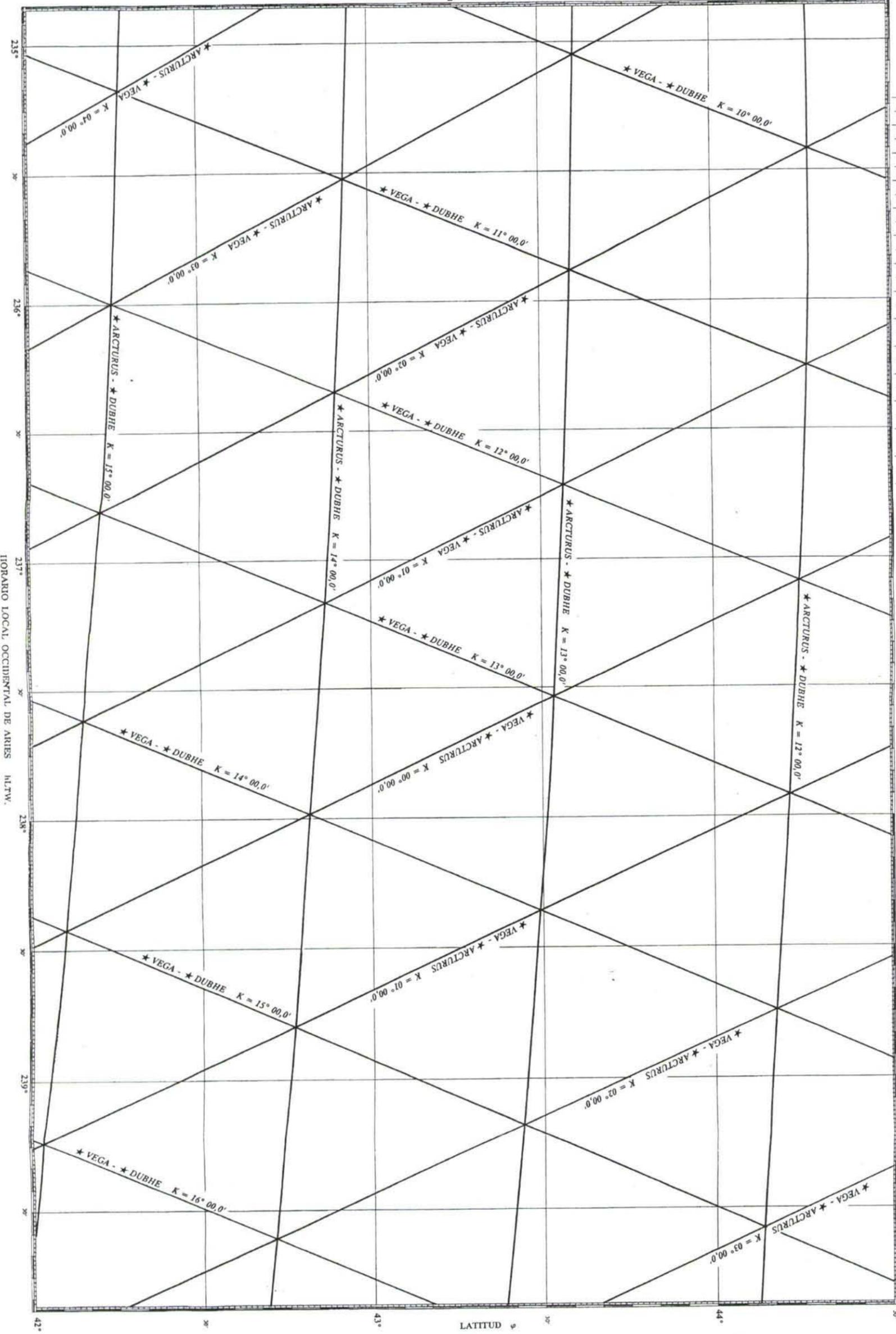
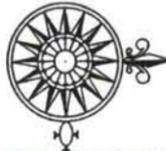
Al asumir la proporcionalidad lineal de la constante k con la distancia, el interpolador resuelve de forma gráfica una simple regla de tres. Una vez materializadas sobre la carta, la situación será el punto de intersección de las tres líneas de posición.

El ejemplo que sigue contempla el caso general de la observación en la mar, buque en movimiento y alturas no simultáneas.

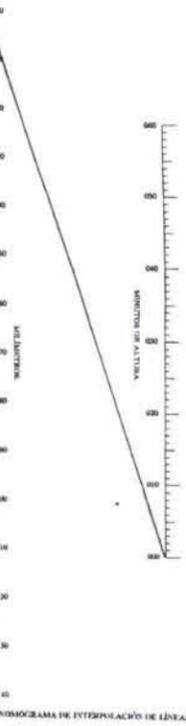
El 10 de mayo de 1994 navegando al $R^\circ_v 076^\circ$ con velocidad de 18.4 nudos observamos:

TMG	★ Observado	Altura sextante	Azimut/v
020811	Vega	$55^\circ 26.9'$	$\approx 080^\circ$
021256	Dubhe	$46^\circ 18.4'$	$\approx 320^\circ$
021717	Arcturus	$60^\circ 14.7'$	$\approx 225^\circ$

Determínese S/O.



HORARIO LOCAL OCCIDENTAL DE ARIES M.L.T.W.

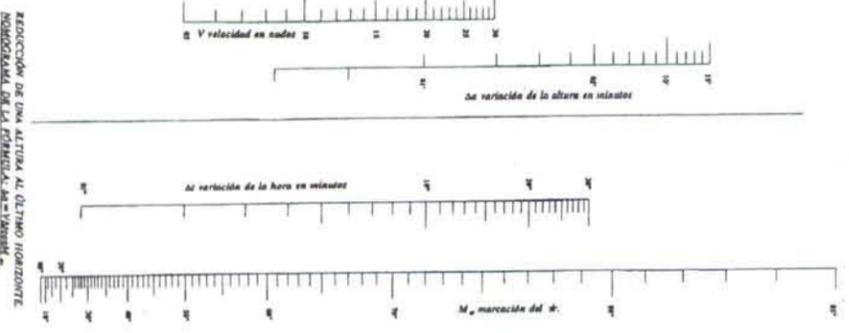


Mapa de uso civil.
 Cada vez que se observen estas estrellas, se debe dar cuenta de su posición en el cielo y registrarlas en el cuaderno de observaciones. El punto de intersección de las tres líneas que se ven en el mapa es el punto de observación. Este punto se debe registrar en el cuaderno de observaciones. El punto de observación se debe registrar en el cuaderno de observaciones. El punto de observación se debe registrar en el cuaderno de observaciones.

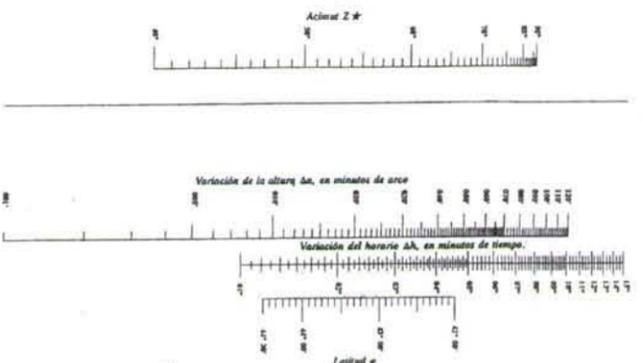
UNIVERSIDAD DE LA CORUÑA
 ESCUELA SUPERIOR DE LA MARINA CIVIL
 CIENCIA Y TÉCNICA DE LA NAVEGACION
 CARTA PARA LA OBTENCIÓN DE LA SITUACION OBSERVADA
 POR CORRIE DE HIPERBOLAS ESFERICAS DE ORIGEN
 ASTRONÓMICO.
 * VEGA, * ARCTURUS Y * DUBHE.

453 - 454

PROYECCIÓN MERCATORIANA
 ESCALA EN EL PARALELO $\phi = 43^\circ$
 1:580.000
 LATITUDES:
 DE $\phi = 42^\circ 00' N$. A $\phi = 44^\circ 30' N$.
 HORARIO LOCAL DE ARIES. H.L.T.W.
 DE $232^\circ 55' W$. A $239^\circ 50' W$.
 CÁLCULO Y DISEÑO:
 CENTRO ASTRONÓMICO NACIONAL P.N.A.
 MAR 1960



RECCIÓN DE UNA ALTURA AL ÚLTIMO HORIZONTE
 NOMBRADA DE LA ESTRELLA. A LA OBTENCIÓN DE LA SITUACION OBSERVADA.



Como en el caso precedente, asumiremos como valor de la corrección por refracción astronómica el de la cotangente de la altura. Para reducir las alturas al horizonte de Arcturus, último horizonte, tendremos:

<i>Intervalos navegados</i>	<i>Velocidad</i>	<i>Marcación</i>	<i>Corrección</i>
★ Vega - ★ Arcturus 000906	18·4'	★ Vega ≈ 004°	+ 2·8'
★ Dubhe - ★ Arcturus 000421	18·4'	★ Dubhe ≈ 115°	- 0·6'

Obtenidas del nomograma de puntos alineados de la figura 1.458.XV, expresión gráfica de la fórmula,

$$c' = m' \cdot \cos M$$

Para obtener la corrección, para el caso de Vega, por ejemplo, bastará con unir por medio de una línea recta el punto correspondiente a la velocidad 18·4 nudos con el punto $\Delta H=0906$ de la escala de la variación de la hora, intervalo de tiempo transcurrido entre la observación de Vega y la de Arcturus; por el punto de intersección de esta recta con el eje neutro trácese una recta hasta el punto que, en la escala de marcaciones, indica la marcación $M=004^\circ$, marcación de Vega, esta última recta intercepta Δa , variación de la altura, el valor de la corrección buscada +0·6', que tendrá el signo del coseno de la marcación. Puesto que la geometría de las líneas de posición fijadas en la carta es función del horario de Aries en el lugar, es preciso reducir las alturas a una única hora, en nuestro caso, la última; esta corrección será positiva cuando el astro esté a levante del meridiano y negativa en caso contrario. El nomograma de la página 1.461.XV, que facilita la corrección, es la expresión gráfica de la fórmula:

$$\Delta a = - \Delta P \cdot \cos \varphi \cdot \text{sen } Z$$

que requiere del conocimiento del azimut del astro; en general será precisión suficiente la obtenida del azimut de la aguja si, como cabe esperar, la corrección total es conocida. Conviene significar que tanto la reducción por cambio de posición del observador como la variación debida al movimiento diurno pueden hacerse a horizonte y hora distintos de los últimos. En el ejemplo en estudio las correcciones obtenidas para esta reducción resultan ser:

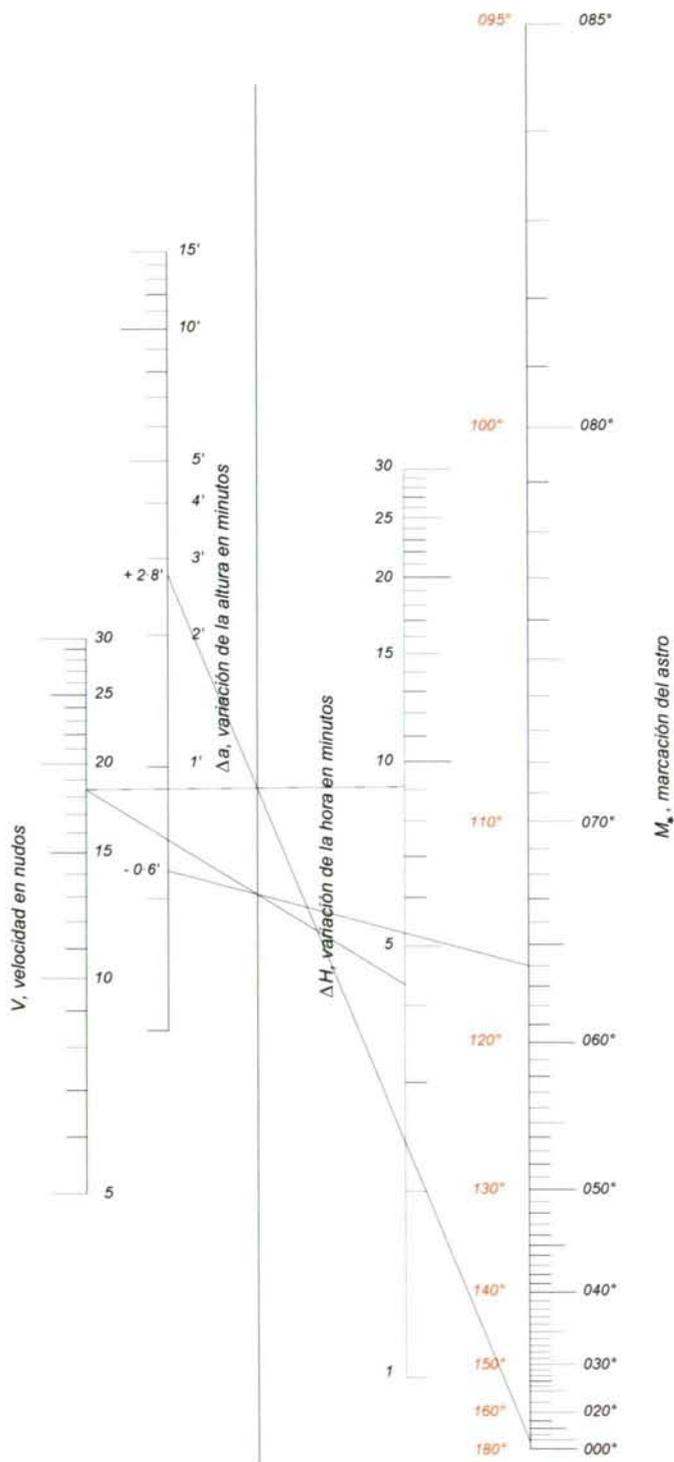


Figura - 1.458.XV - Reducción de las alturas al último horizonte

★ Vega	$\Delta a \approx + 1^\circ 40\cdot0'$
★ Dubhe	$\Delta a \approx - 0^\circ 30\cdot5'$

Por lo que las alturas debidamente corregidas serán:

	★ Vega	★ Dubhe	★ Arcturus
Altura sextante	55° 26·9'	46° 18·4'	60° 14·7'
Refracción astronómica	- 0·7'	-1·0'	-0·6'
Último horizonte	+2·8'	-0·6'	
Última hora	+01° 40·0'	-30·5'	
Altura de cálculo	57° 10·0'	45° 46·3'	60° 14·1'

Y la constante que define a cada una de las líneas de posición:

Línea de posición	Constante k
★ Arcturus - ★ Vega	03° 04·1'
★ Arcturus - ★ Dubhe	14° 27·8'
★ Vega - ★ Dubhe	11° 23·7'

que interpolamos de acuerdo a lo visto en el ejemplo anterior, y las distancias interpoladas serán las que seguidamente se consignan:

Par	Constante	Límites de k	Distancia	Interpolación
★ Arcturus - ★ Vega	k=03° 04·1'	03° y 04°	≈ 31·5'	≈ 02·2'
★ Arcturus - ★ Dubhe	k=14° 27·8'	14° y 15°	≈ 40·0'	≈ 18·5'
★ Vega - ★ Dubhe	k=11° 23·7'	11° y 12°	≈ 34·5'	≈ 13·6'

El trazado de las líneas de posición calculadas y la situación observada se muestra en la página 462-463.

Una nueva carta calculada y trazada en febrero del año 2001, y que al

igual que la precedente tiene carácter experimental, se refleja en la página 464-465

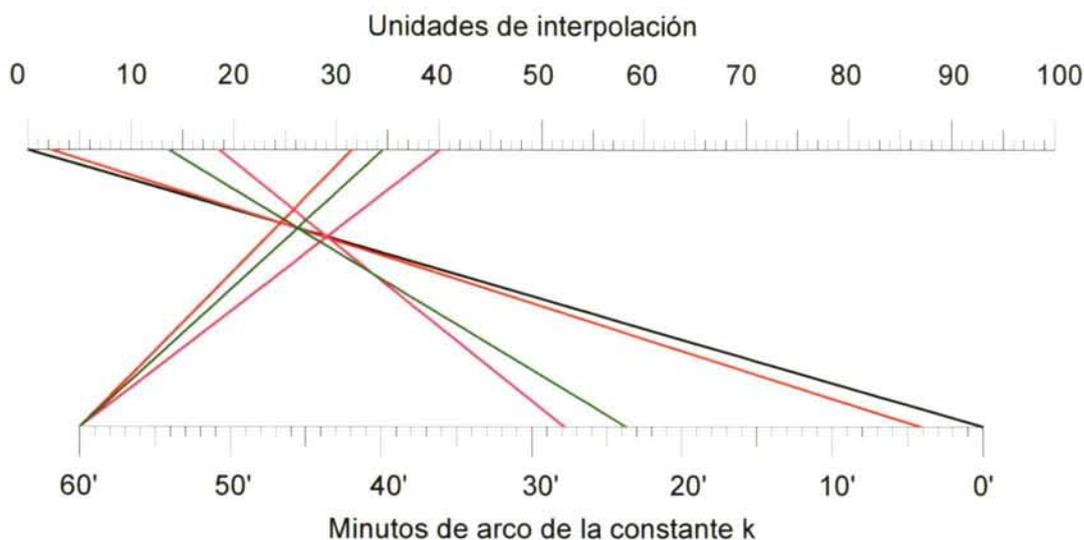


Figura - 1.460.XV - Interpolación de las líneas de posición

ofreciendo la posibilidad de observación de los cuatro astros siguientes:

★ **ALDEBARAN**, ★ **PROCYON**, ★ **REGULUS** y ★ **POLAR**. La disponibilidad de seis líneas de posición, cuatro de ellas con buen ángulo de corte, le otorga mayor exactitud al poder evidenciar la existencia de errores accidentales sensibles. Con los mismos dispositivos auxiliares para la solución de los problemas de reducción de las alturas al último horizonte, última hora e interpolación de líneas de posición, se complementa con una escala logarítmica que puede utilizarse como alternativa al interpolador de líneas. Su manejo en nada difiere del anterior y se ilustra con los ejemplos que siguen; corresponde el primero de ellos a una observación de alturas simultáneas y el siguiente al caso más general de observador en movimiento y alturas observadas a diferentes horas.

El día 11 de marzo de 2001 a las 201535(11) TMG, observamos:

- a_i ★ *Polar* $44^{\circ} 14\cdot0'$
- a_i ★ *Procyon* $45^{\circ} 48\cdot6'$
- a_i ★ *Regulus* $26^{\circ} 53\cdot9'$
- a_i ★ *Aldebaran* $58^{\circ} 34\cdot5'$

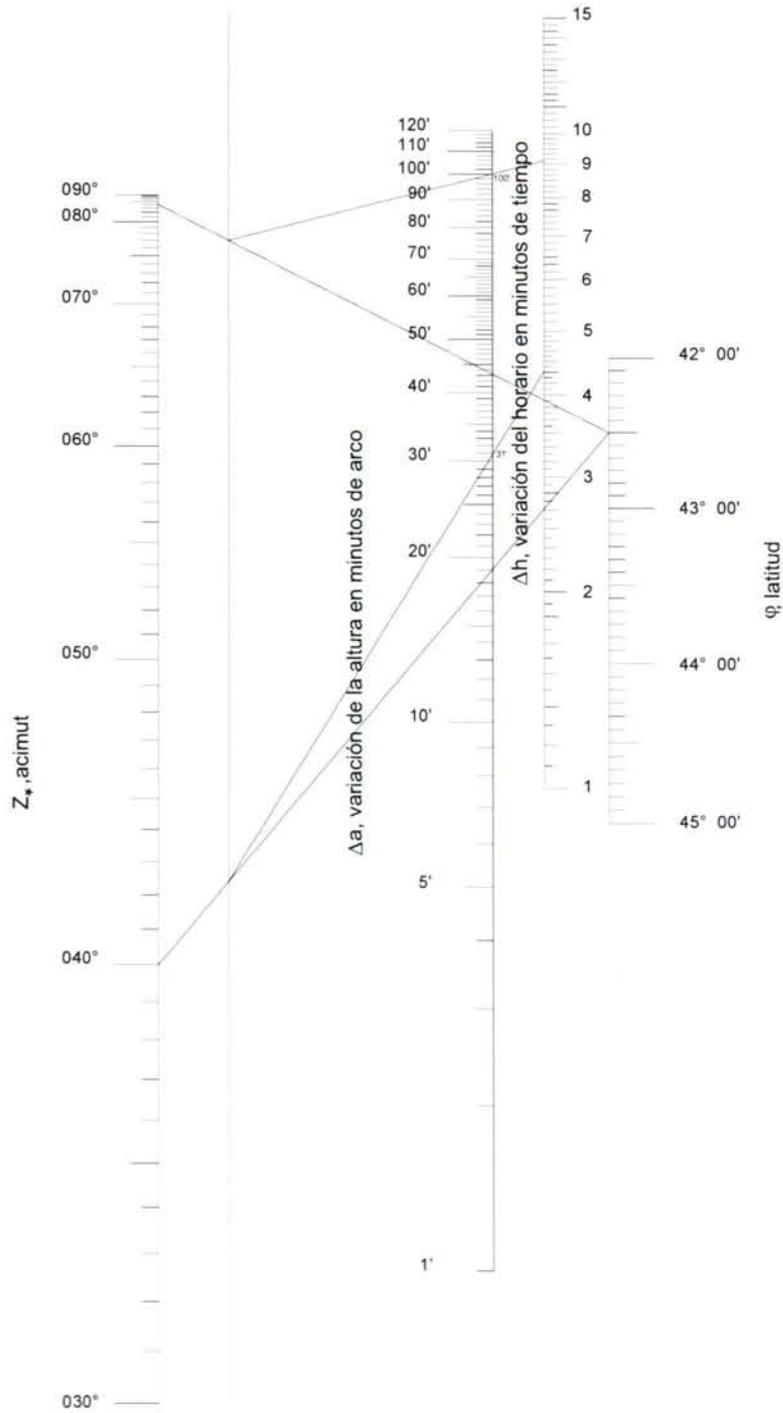
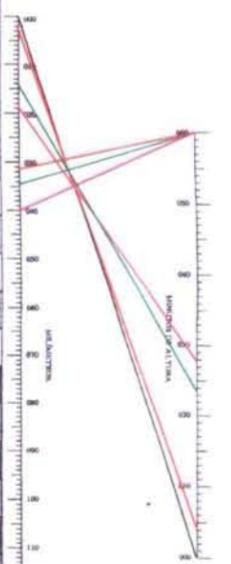
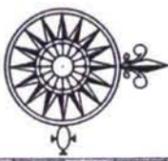
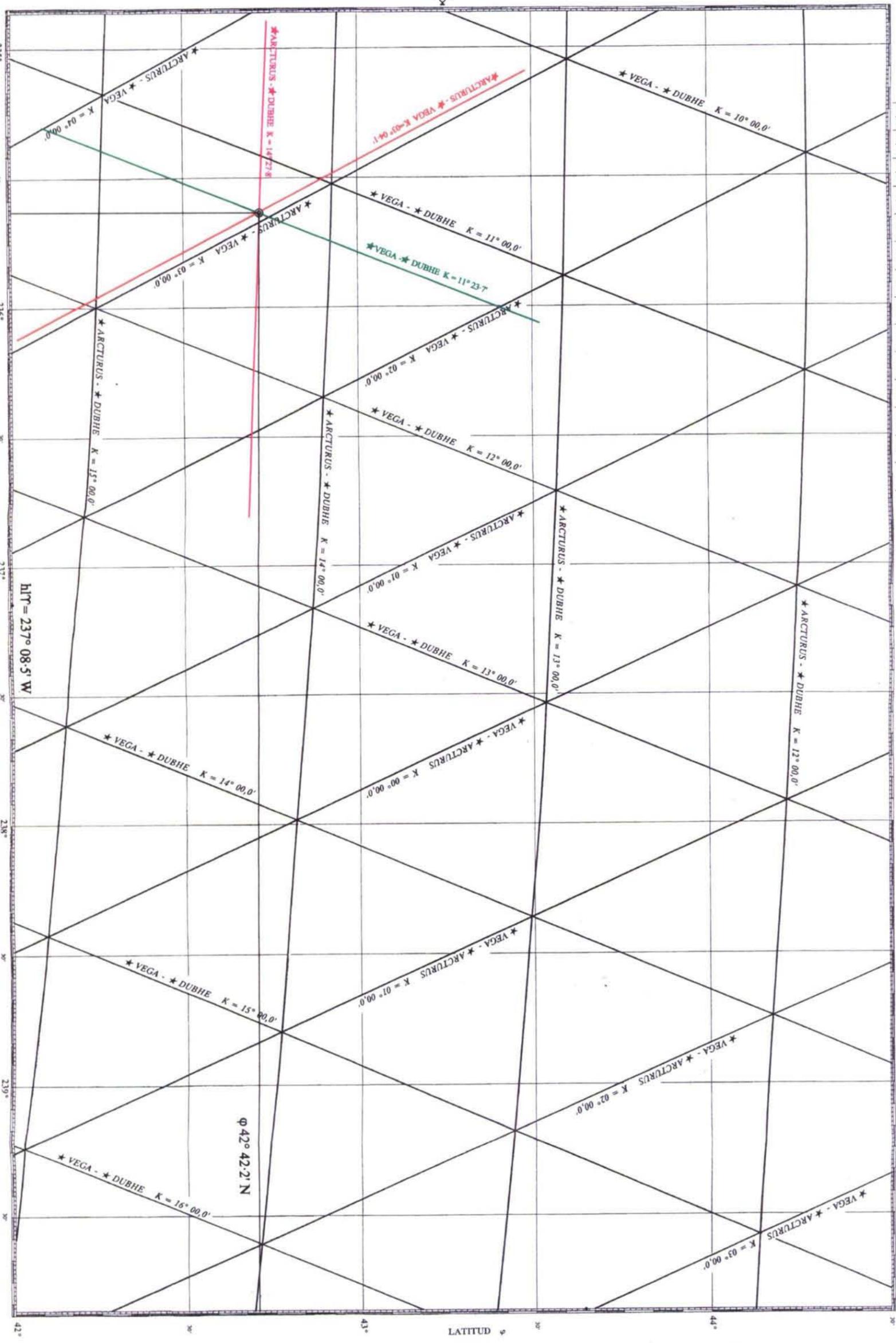


Figura - 1.462.XV - Reducción de las alturas a la última hora



MONOCROMA DE INTERSECCIONES DE LÍNEAS

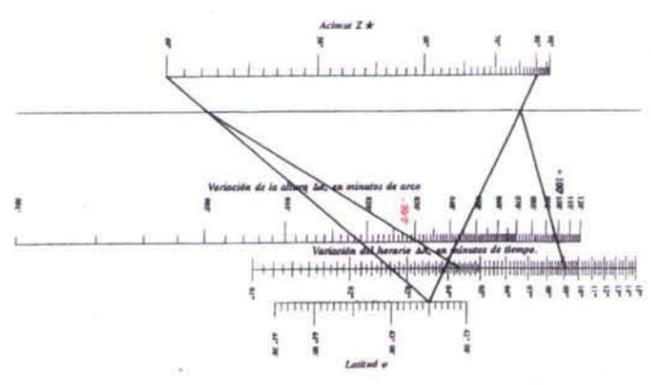
Manera de usar esta carta:
 Cuando las observaciones sean simultáneas, trazar las alturas de los dos puros sobre la circunferencia "h" que determine cada una de las líneas de posición. Interceptar la línea dibujada por uno u otro "h", con el uso de los escalas de la carta y, según corresponda, la circunferencia, el punto de intersección de las dos líneas es la situación. La misma se obtiene si se traza una línea de posición por uno de los puros y se intercepta con la línea de posición que se obtiene al usar el otro puro. Si las observaciones no son simultáneas, como en el caso de los puros, se debe usar el método de las alturas ficticias. Para practicar, se han trazado en la carta las alturas ficticias de los puros, para que se pueda practicar el uso de la carta.



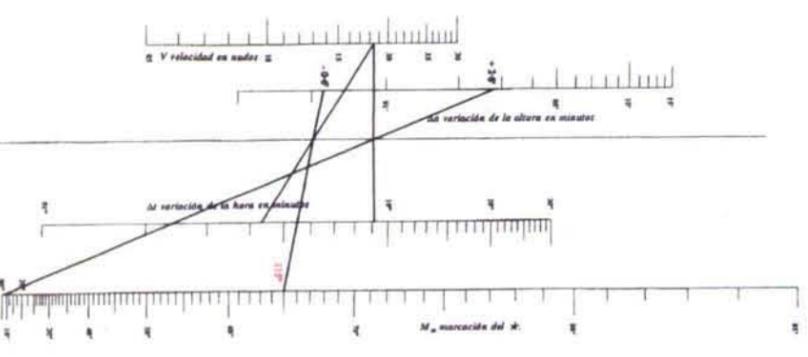
$h_{DT} = 237^{\circ} 08.5' W$
 $h_{DT} = 257^{\circ} 38.9' W$
 $c^{ms} = 04^{\circ} 20.0'$
 $h_{DT} = 261^{\circ} 58.9' W$
 $h_{DT} = 235^{\circ} 37.5' W$
 $\lambda_0 = 026^{\circ} 21.4' W$

HORARIO LOCAL OCCIDENTAL DE ARIES MLTW.
 $h_{DT} = 237^{\circ} 08.5' W$

UNIVERSIDAD DE LA CORUÑA
 ESCUELA SUPERIOR DE LA MARINA CIVIL
 CIENCIA Y TÉCNICA DE LA NAVEGACION
 CARTA PARA LA OBTENCIÓN DE LA SITUACIÓN OBSERVADA
 POR CORTE DE HIPERBOLAS ESFERICAS DE ORIGEN
 ASTRONÓMICO.
 * VEGA - * ARCTURUS Y * DUBHE.



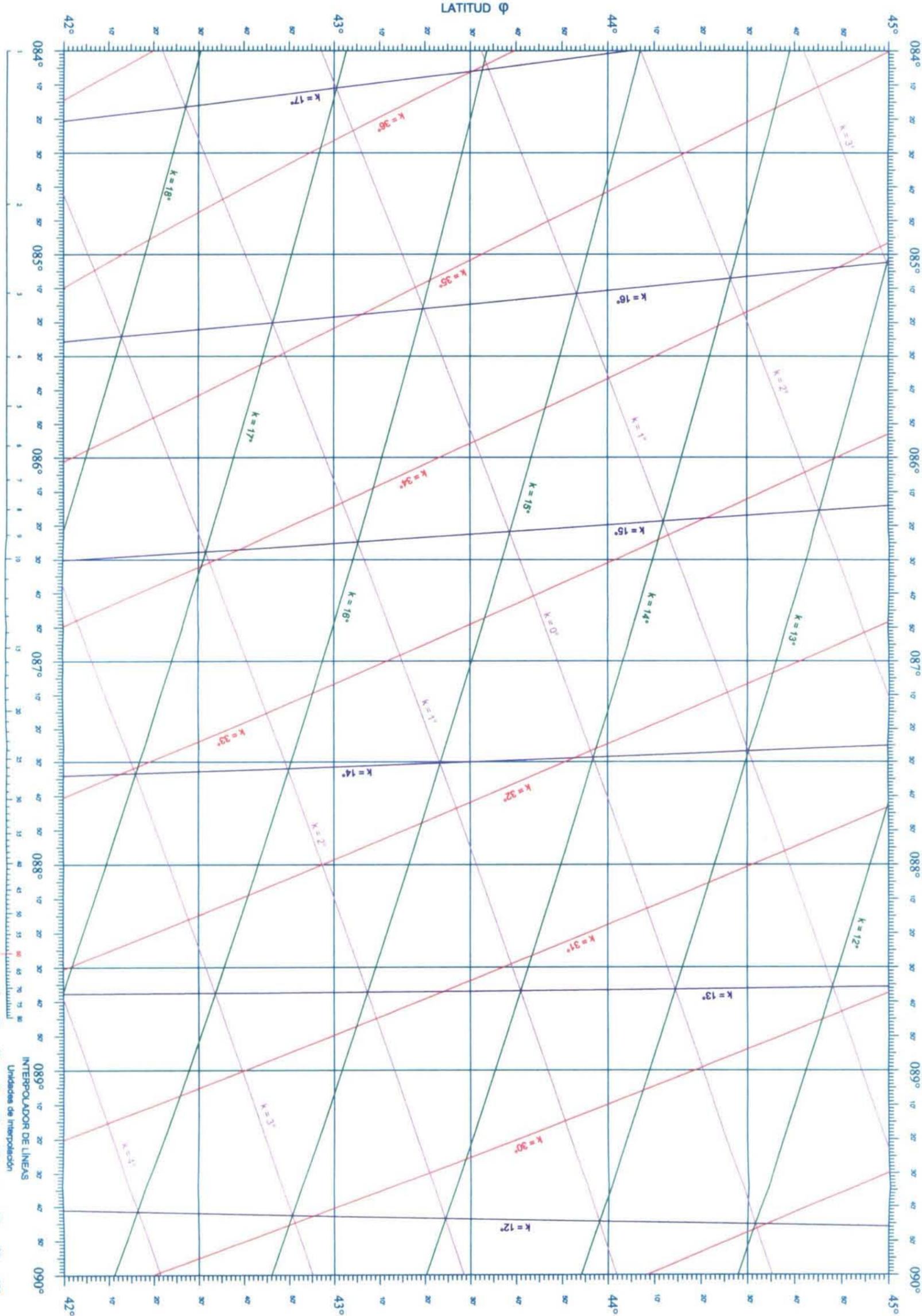
REDUCCIÓN DE UNA ALTURA A LA ÚLTIMA LÍNEA MONOCROMA DE LA ESFERA LOCAL DE LA OBSERVACIÓN.



REDUCCIÓN DE UNA ALTURA AL ÚLTIMO HORIZONTAL MONOCROMA DE LA ESFERA LOCAL DE LA OBSERVACIÓN.

PROYECCIÓN MERCATORIANA
 ESCALA EN EL PARALELO $\phi = 43^{\circ}$
 1:580,000
 LATITUDES:
 DE $\phi = 42^{\circ} 00' N$ A $\phi = 44^{\circ} 30' N$
 HORARIO LOCAL DE ARIES, MLTW.
 DE $232^{\circ} 55' W$ A $239^{\circ} 50' W$
 CORTE DE HIPERBOLAS ESFERICAS DE ORIGEN
 ASTRONÓMICO.

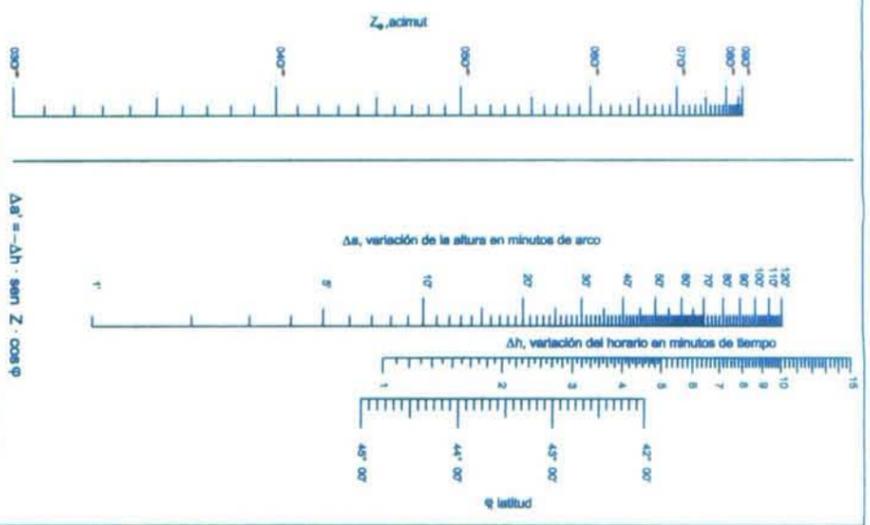
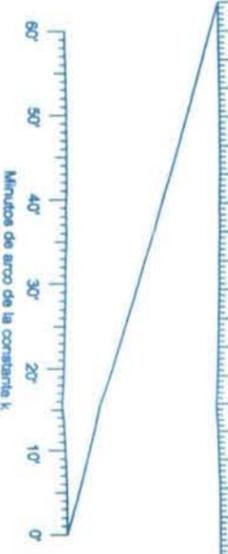
HORARIO LOCAL OCCIDENTAL DE ARIES HTT



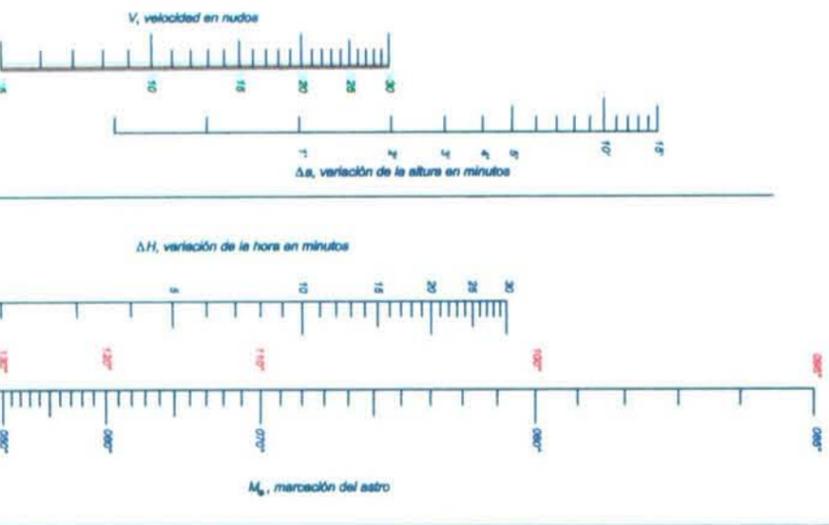
CARTA PARA LA OBTENCIÓN DE LA SITUACIÓN OBSERVADA POR CORTE DE HIPERBOLAS ESFERICAS DE ORIGEN ASTRONÓMICO

PROYECCIÓN DE MERCATOR
 EDICIÓN, CALCULO Y DISEÑO:
 CARLOS ANTONIO F. PITA PORTA
 Febrero del 2001

0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100
 Unidades de interpolación
 INTERPOLADOR DE LINEAS



$\Delta h' = -\Delta h \cdot \text{sen } Z \cdot \cos \phi$
 REDUCCIÓN DE UNA ALTURA A LA ÚLTIMA HORA



$\Delta h' = V \cdot \Delta h \cdot \cos M$
 REDUCCIÓN DE LA ALTURA AL ÚLTIMO HORIZONTE

Corregidas por refracción astronómica, y asumido como es usual para el valor de esta corrección, con precisión suficiente, el de la cotangente de la altura, se tendrá:

a_c ★ Polar	44° 08·0'
a_c ★ Procyon	45° 47·6'
a_c ★ Regulus	26° 53·9'
a_c ★ Aldebarán	58° 34·5'

Lo que nos permite individualizar las siguientes líneas de posición,

★ Aldebaran - ★ Procyon	→ $k = 13^\circ 40\cdot0'$
★ Aldebaran - ★ Polar	→ $k = 14^\circ 20\cdot9'$
★ Aldebaran - ★ Regulus	→ $k = 31^\circ 42\cdot0'$
★ Procyon - ★ Polar	→ $k = 00^\circ 40\cdot9'$

Identificada en la carta el área que comprende los valores de estas constantes, y después de una simple interpolación, pasaremos al trazado de las líneas de posición.

Par	Constante k	Límites de k	Distancia	Interpolación
★ Aldebaran - ★ Procyon	13° 40·0'	13° y 14°	≈ 49·0'	≈ 32·0'
★ Aldebaran - ★ Polar	14° 20·9'	14° y 15°	≈ 32·0'	≈ 11·0'
★ Aldebaran - ★ Regulus	31° 42·0'	31° y 32°	≈ 35·0'	≈ 25·0'
★ Procyon - ★ Polar	00° 40·9'	00° y 01°	≈ 32·0'	≈ 22·0'

Para la interpolación de líneas empleando la escala logarítmica procederemos de acuerdo a la explicación que sigue: En la zona de la carta correspondiente a las constantes deducidas de la observación, se medirá la distancia entre dos líneas consecutivas cuyas constantes comprendan la que tratamos de interpolar. Con un compás (u otro dispositivo similar) pincharemos el punto 60 de la escala logarítmica y la distancia medida en la carta; sin modificar la apertura del compás desplazaremos una de sus puntas al valor a interpolar, y la otra punta del compás marcará en la escala la distancia que corresponde a la línea interpolada. Asumida para intervalos pequeños la

variación lineal de la distancia con la constante, tendríamos,

$$\frac{k_2 - k_1}{D} = \frac{k' - k_1}{d}$$

en la que D es la distancia medida en la carta entre las dos líneas consecutivas de constantes k_2 y k_1 , siendo, en este caso, la diferencia k_2 menos k_1 igual a 60 minutos de arco, k' la constante de la línea interpolada y d la distancia desde la línea de constante k_1 a la de constante k' . Tomando logaritmos:

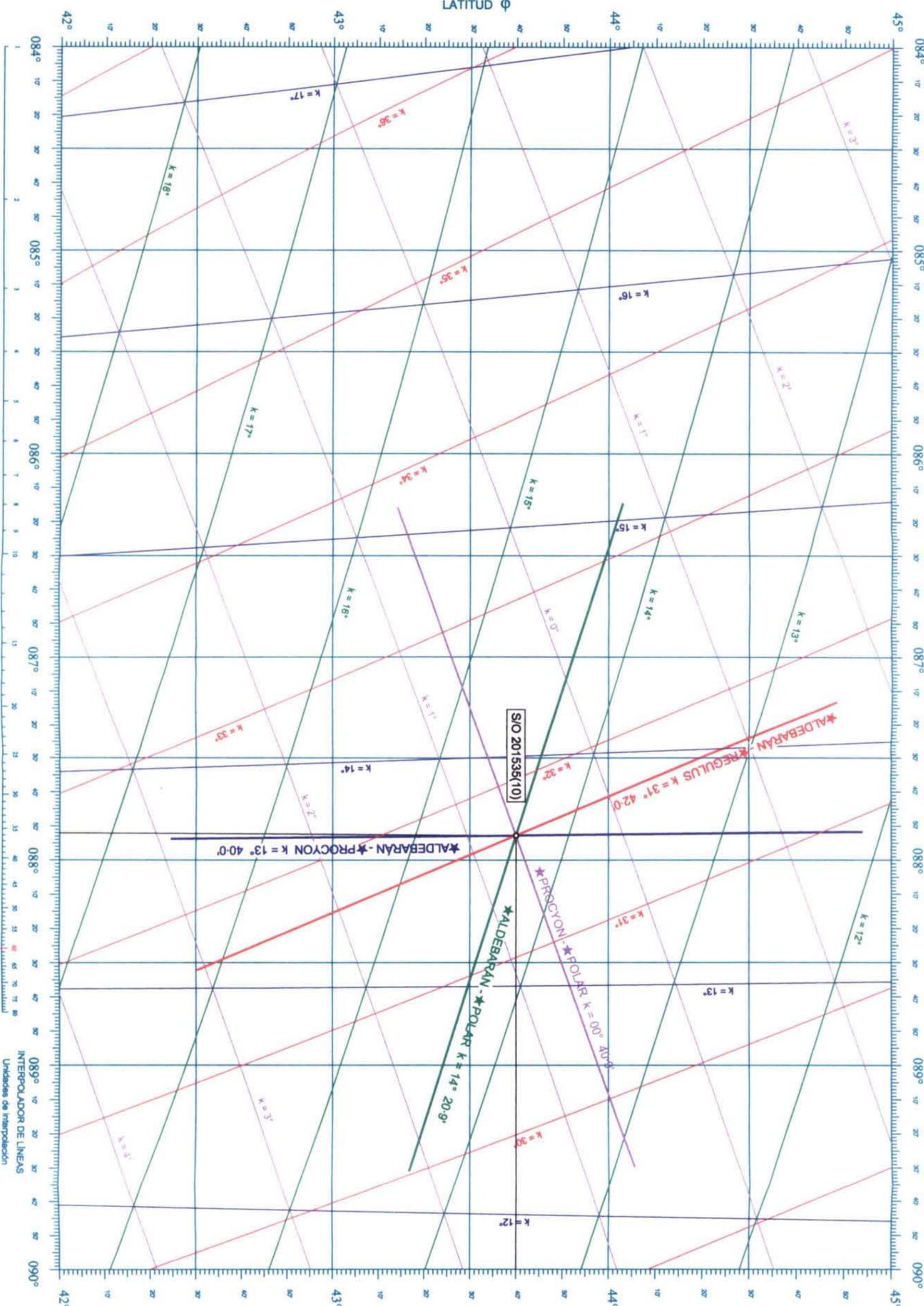
$$\log (k_2 - k_1) - \log D = \log (k' - k_1) - \log d$$

Diferencias dadas por la escala logarítmica; ver figura 1.467.XV.

El trazado de las líneas de posición y situación observada del ejemplo estudiado quedan reflejadas en la página 468 - 469.



Figura - 1.467.XV - Interpolación con la escala logarítmica

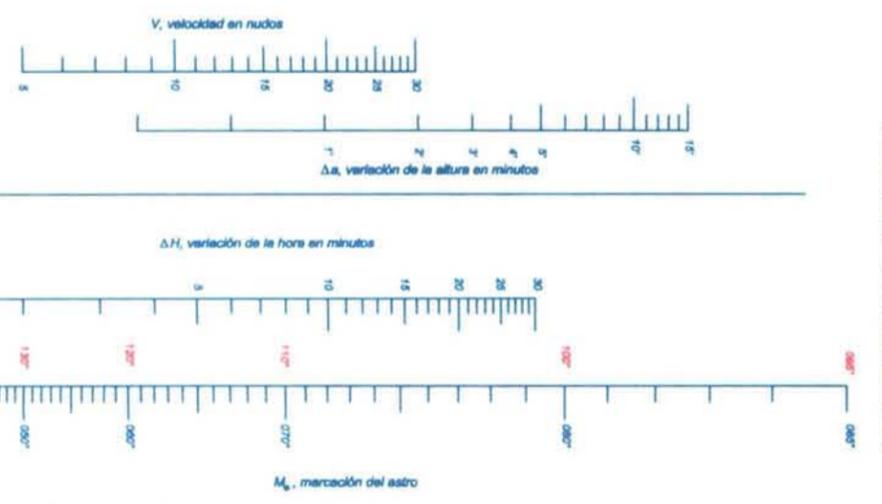
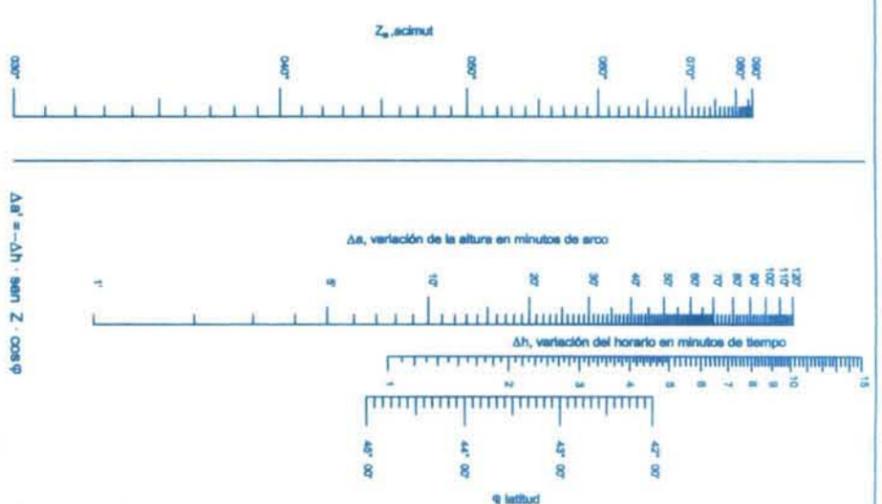
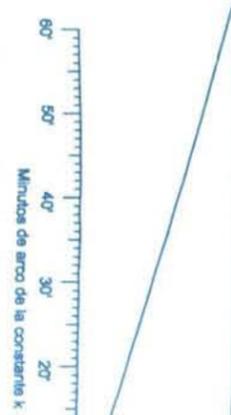
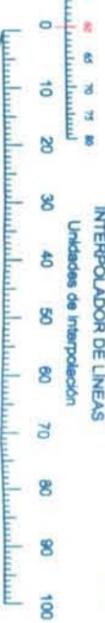


ALDEBARÁN - PROCYON
 ALDEBARÁN - POLAR
 PROCYON - POLAR / POLAR - PROCYON
 ALDEBARÁN - REGULUS

HGT = 109° 32.5' W
 Cms = 03° 54.4'
 HGT = 113° 26.9' W
 HI'T = 087° 52.0' W
 λo = 025° 34.9' W
 φo = 43° 40.0' N

CARTA PARA LA OBTENCIÓN DE LA SITUACIÓN OBSERVADA
 POR CORTE DE HIPÉRBOLAS ESFÉRICAS DE ORIGEN
 ASTRONÓMICO

PROYECCIÓN DE MERCATOR
 ESCALA CALCULADA Y VERBUDA
 CARTA ANTIGUA F. RITA PORTA
 Febrero del 2007



En el siguiente y último ejemplo que se propone, analizamos la casuística del problema general de la observación a bordo; observación de cuatro astros, cada altura con su correspondiente hora TMG y buque en movimiento.

El 13 de octubre de 2001 navegando al 128°/v con velocidad de 16·7 nudos, observamos:

TMG	★ Observado	Altura sextante	Azimut/v
131836	★ Polar	43° 46·2'	≈ 359°
132158	★ Procyon	43° 22·5'	≈ 136°
132605	★ Regulus	24° 59·5'	≈ 097°
132811	★ Aldebarán	59° 44·7'	≈ 214°

Reducción de las alturas al último horizonte (horizonte de Aldebaran), ver figura 1.471.XV:

Intervalos	Velocidad	Marcación	Corrección
000935	16·7'	★ Polar ≈ 129°	≈ - 1·7'
000613	16·7'	★ Procyon ≈ 008°	≈ + 1·7'
000206	16·7'	★ Regulus ≈ 031°	≈ + 0·5'

Reducción a la última hora, ver figura 1.472.XV:

Intervalos	★ Observado	Azimut	Reducción
000935	Polar	≈ 359°	≈ - 01·8'
000613	Procyon	≈ 136°	≈ + 47·0'
000206	Regulus	≈ 097°	≈ + 22·7'

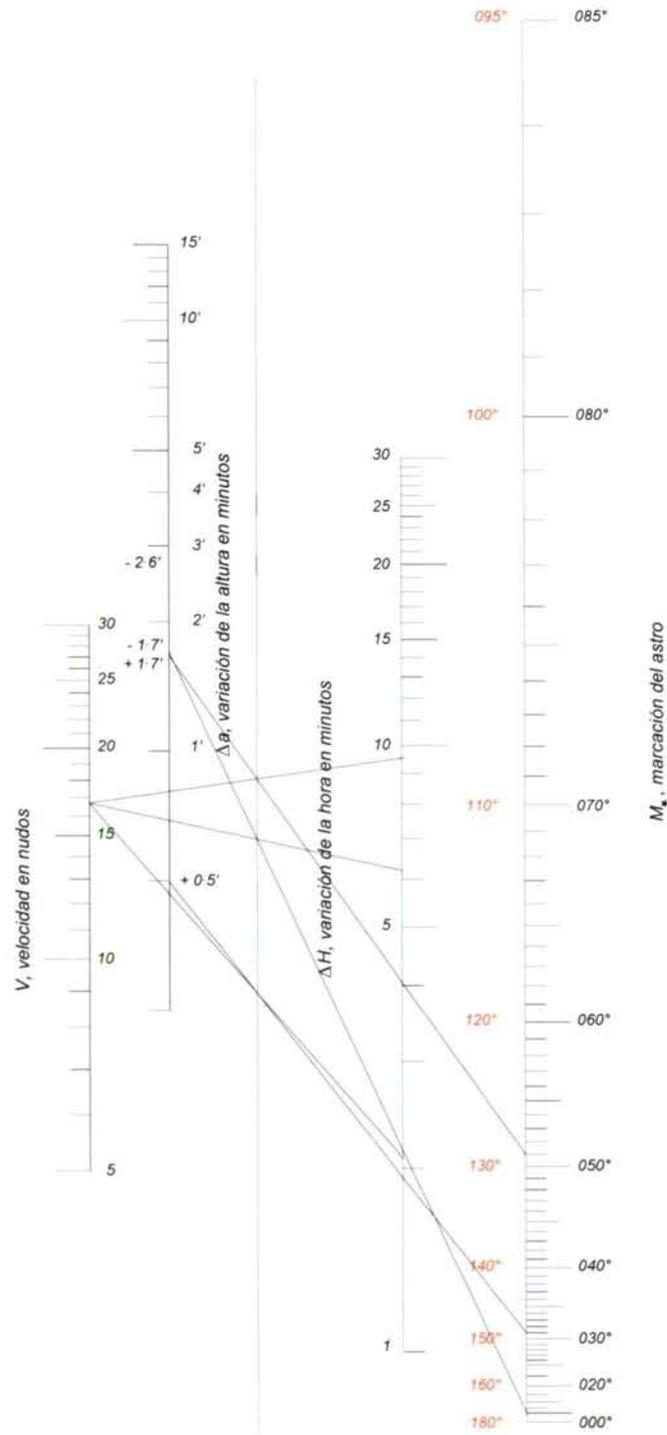


Figura - 1.471.XV - Reducción al último horizonte

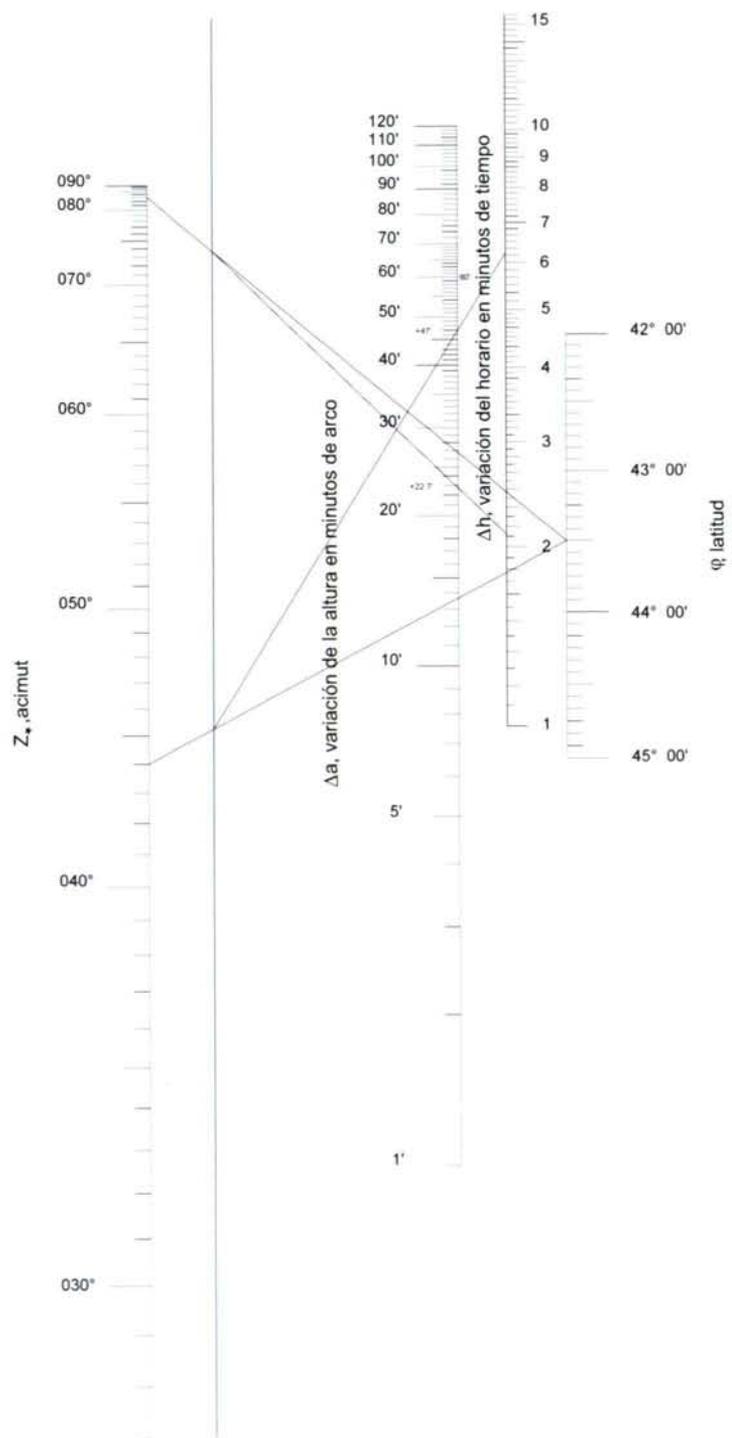


Figura - 1.472.XV - Reducción de alturas a la última hora

Correcciones a las alturas:

	★ Polar	★ Procyon	★ Regulus	★ Aldebaran
a_i	43° 46·2'	43° 22·5'	24° 59·5'	59° 44·7'
r_a	- 1·0'	- 1·1'	- 2·1'	- 0·6'
U_h	- 1·7'	+ 1·7'	+ 0·5'	
U_H	- 1·8'	+ 47·0'	+ 22·7'	
a_c	43° 41·7'	44° 10·1'	25° 20·6'	59° 44·1'

Constantes que define cada una de las líneas de posición:

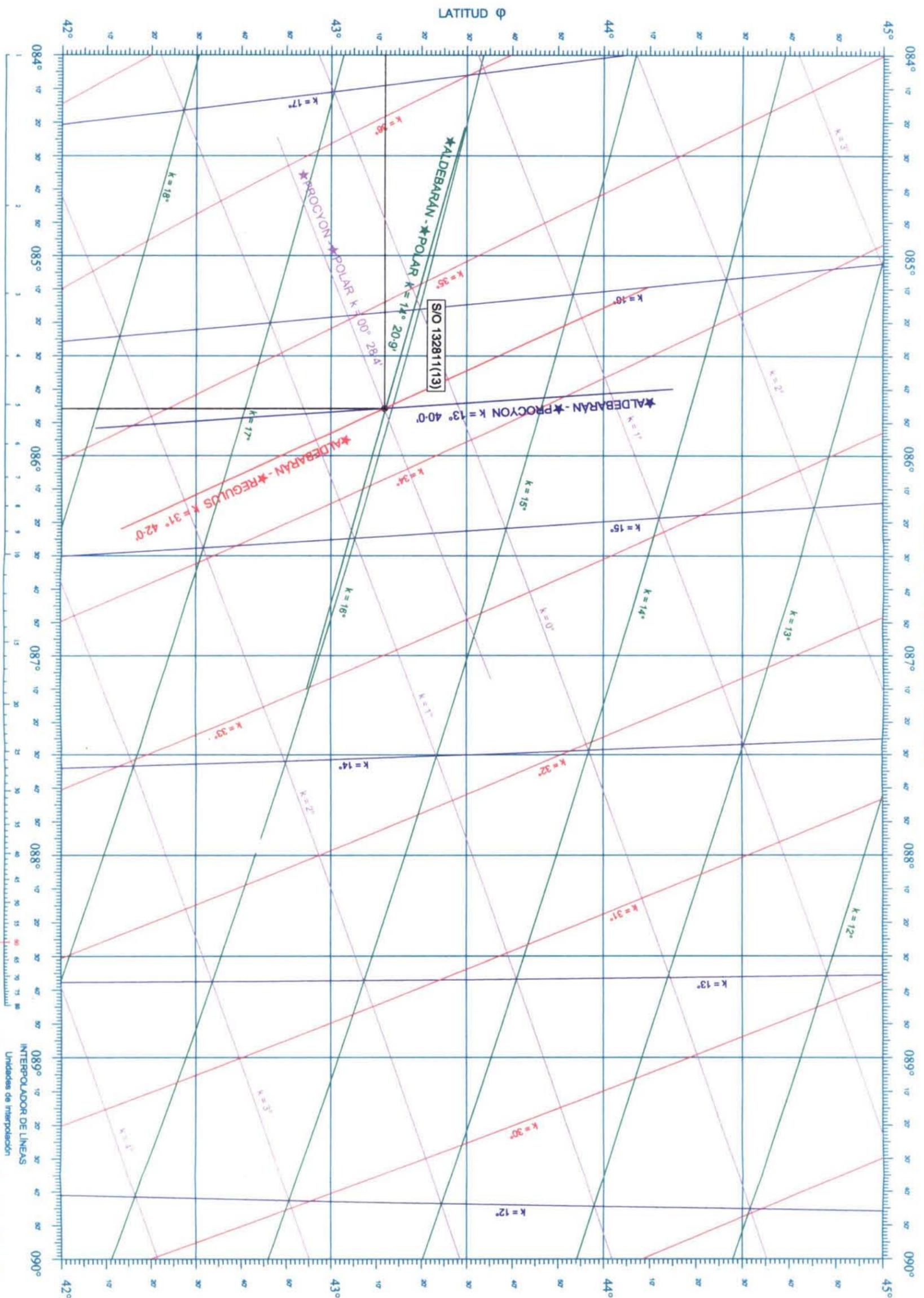
Línea de posición	Constante k
★ Aldebaran - ★ Polar	16° 02·4'
★ Aldebarán - ★ Procyon	15° 34·0'
★ Aldebaran - ★ Regulus	34° 23·5'
★ Procyon - ★ Polar	00° 28·4'

Líneas de posición interpoladas:

Par	Constante k	k límites	Distancia	Interpolado
★ Aldebaran - ★ Polar	16° 02·4'	16° y 17°	≈ 31·0'	≈ 01·2'
★ Aldebarán - ★ Procyon	15° 34·0'	15° y 16°	≈ 49·5'	≈ 28·0'
★ Aldebaran - ★ Regulus	34° 23·5'	34° y 35°	≈ 36·0'	≈ 14·1'
★ Procyon - ★ Polar	00° 28·4'	00° y 01°	≈ 32·5'	≈ 15·5'

Con trazado de las líneas y situación observada en la carta de la página 474 - 475.

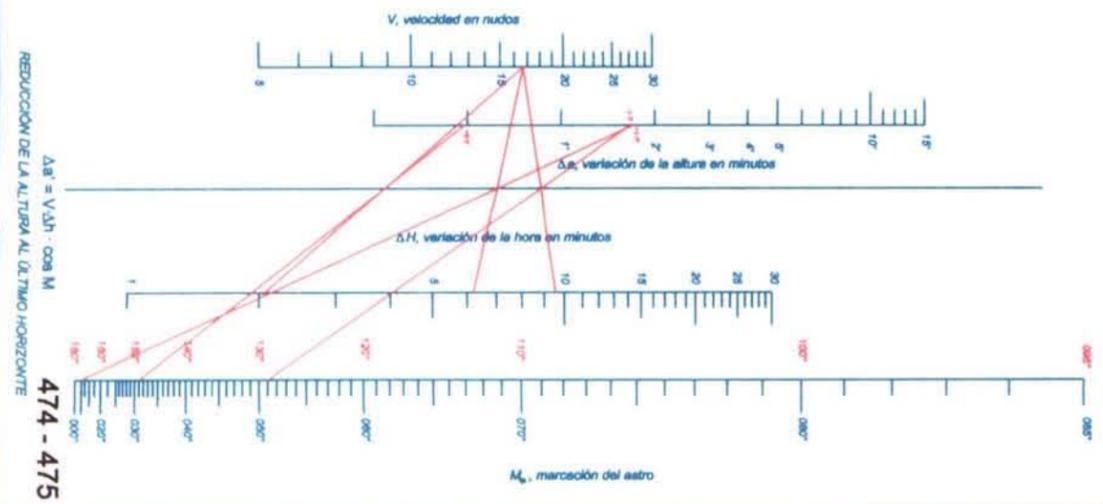
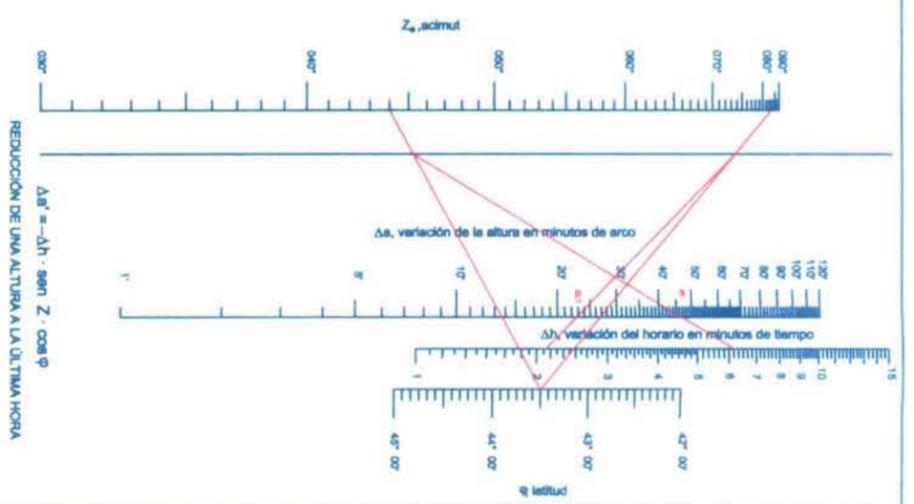
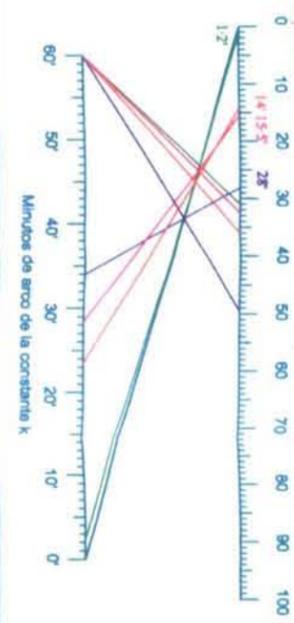
HORARIO LOCAL OCCIDENTAL DE ARIES HTT



ALDEBARÁN - PROCYON
 ALDEBARÁN - POLAR
 PROCYON - POLAR / POLAR - PROCYON
 ALDEBARÁN - REGULUS

CARTA PARA LA OBTENCIÓN DE LA SITUACIÓN OBSERVADA
 POR CORTE DE HIPÉRBOLAS ESFÉRICAS DE ORIGEN
 ASTRONÓMICO
 PROYECCIÓN DE MERCATOR
 SENAL CALCULADA Y DIBUJADA
 CARTA ANTONIO F. RITA ROCHA
 Febrero del 2007

HGT = 217° 09.2' W
 C^mms = 07° 03.9'
 HGR = 224° 13.1' W
 HLT = 085° 45.8' W
 λ0 = 138° 27.3' W
 φ0 = 43° 11.8' N



Concluiremos resaltando que la precisión de los resultados obtenidos en este tipo de cartas depende de los intervalos de tiempo transcurridos entre la toma de las alturas para los distintos astros; de los nomogramas utilizados el que presenta un comportamiento más problemático es de la reducción de las alturas a la última hora, pues, si en la expresión:

$$da = -dh \cdot \cos \varphi \cdot \operatorname{sen} Z$$

que, para una mejor exposición, podemos escribir,

$$\Delta a = -\Delta h \cdot \cos \varphi \cdot \operatorname{sen} Z,$$

consideramos variables los elementos φ y Z , y se supone un error en ambos,

$$d\Delta a = -\Delta h \cdot (\cos \varphi \cdot \cos Z \cdot dZ - \operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} Z \cdot d\varphi)$$

pudiéndose comprobar la gran influencia que, para determinados valores de φ y Z , tienen sobre Δa los errores en ambas variables. El valor nulo se obtendría para:

$$\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} Z = \frac{dZ}{d\varphi}$$

En particular, para nuestro último ejemplo, en el supuesto que fueran:

Latitud de estima φ_e $43^\circ 45' N$; con $d\varphi$ $15' N$
Azimut de la Polar 359.5° ; con dZ $30' +$

la reducción a la última hora sería $-0.9'$, mientras que la encontrada con los valores:

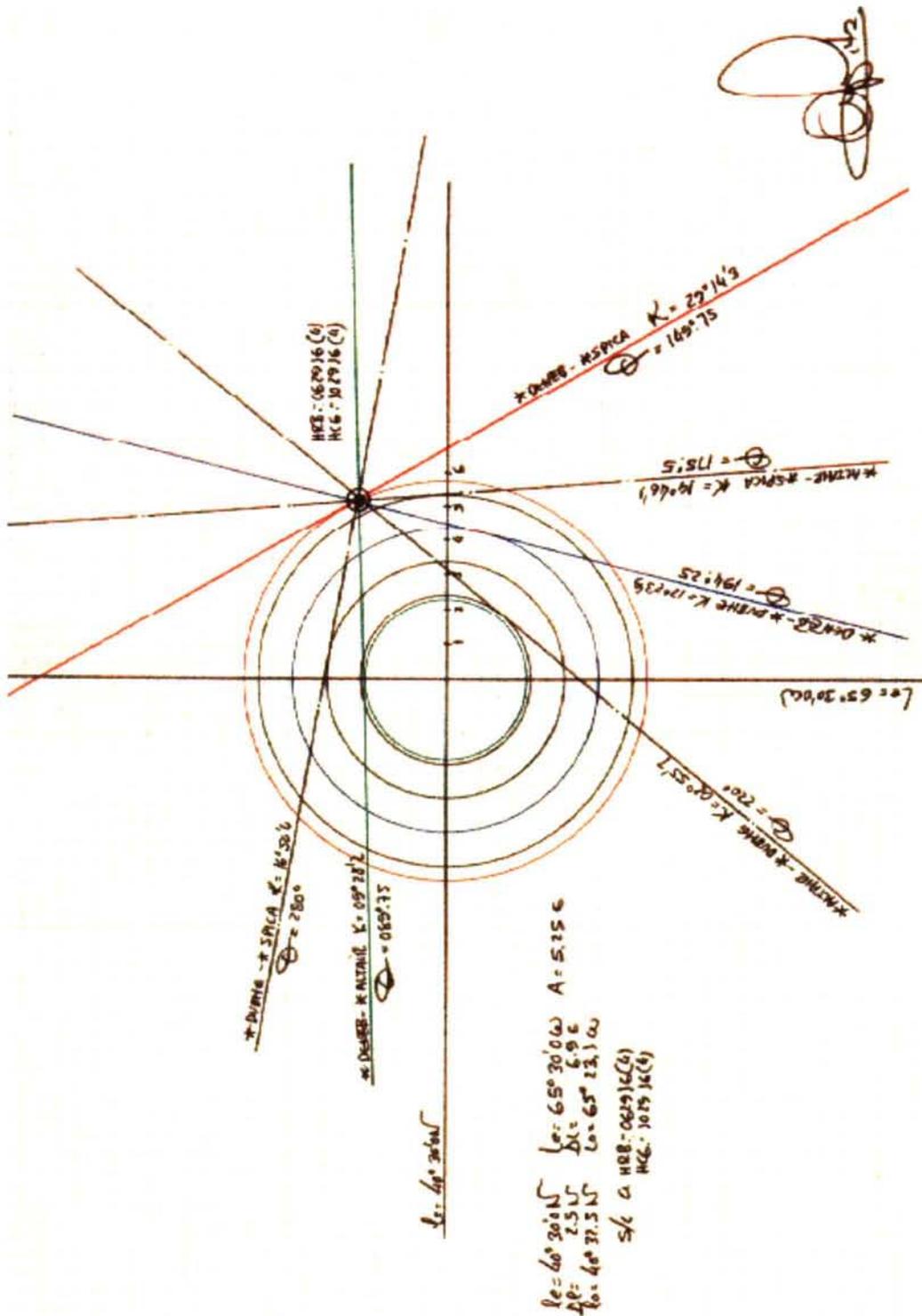
Latitud de estima φ_e $43^\circ 30' N$
Azimut de la Polar 359°

es de $-1.8'$. En la misma hipótesis, para Procyon, supuesto el azimut Z 136.5° se tendría un Δa de $+46.4'$, valores aceptables en la práctica. Para mayores intervalos de tiempo entre observaciones se podrían alcanzar valores de esta reducción de entidad tal que perdieran su carácter diferencial, convirtiendo el procedimiento en absolutamente inútil;

la configuración de corte de las diferentes líneas de posición presentaría una superficie carente de toda lógica, debiendo recurrirse a los procedimientos explicados en páginas anteriores.

Se insertan en las página siguientes tres casos prácticos de aplicación del procedimiento desarrollado y que fueron realizados, entre otros muchos, en la mar en marzo del año 1979. Forman parte de una serie de trabajos que, para contrastar la eficacia del método en estudio, se llevaron a cabo a bordo de los distintos buques en los que el autor desempeñó el cargo de Primer Oficial, finales de la década de los setenta y principio de los ochenta; los resultados obtenidos fueron, en todos los casos, de muy estimable precisión. Ilustran las páginas finales del presente trabajo las dos proyecciones ortográficas en las que se muestran la familia de hipérbolas esféricas asociadas a dos astros imaginarios ★A y ★B; las circunferencias de alturas iguales están trazadas a intervalos de 10° y creemos que, de manera bastante clara, queda patente la forma de las líneas de posición en estudio.

La hipérbola esférica en la Navegación Astronómica.
 Recta diferenciométrica.
 Verdadera naturaleza de la bisectriz de altura.



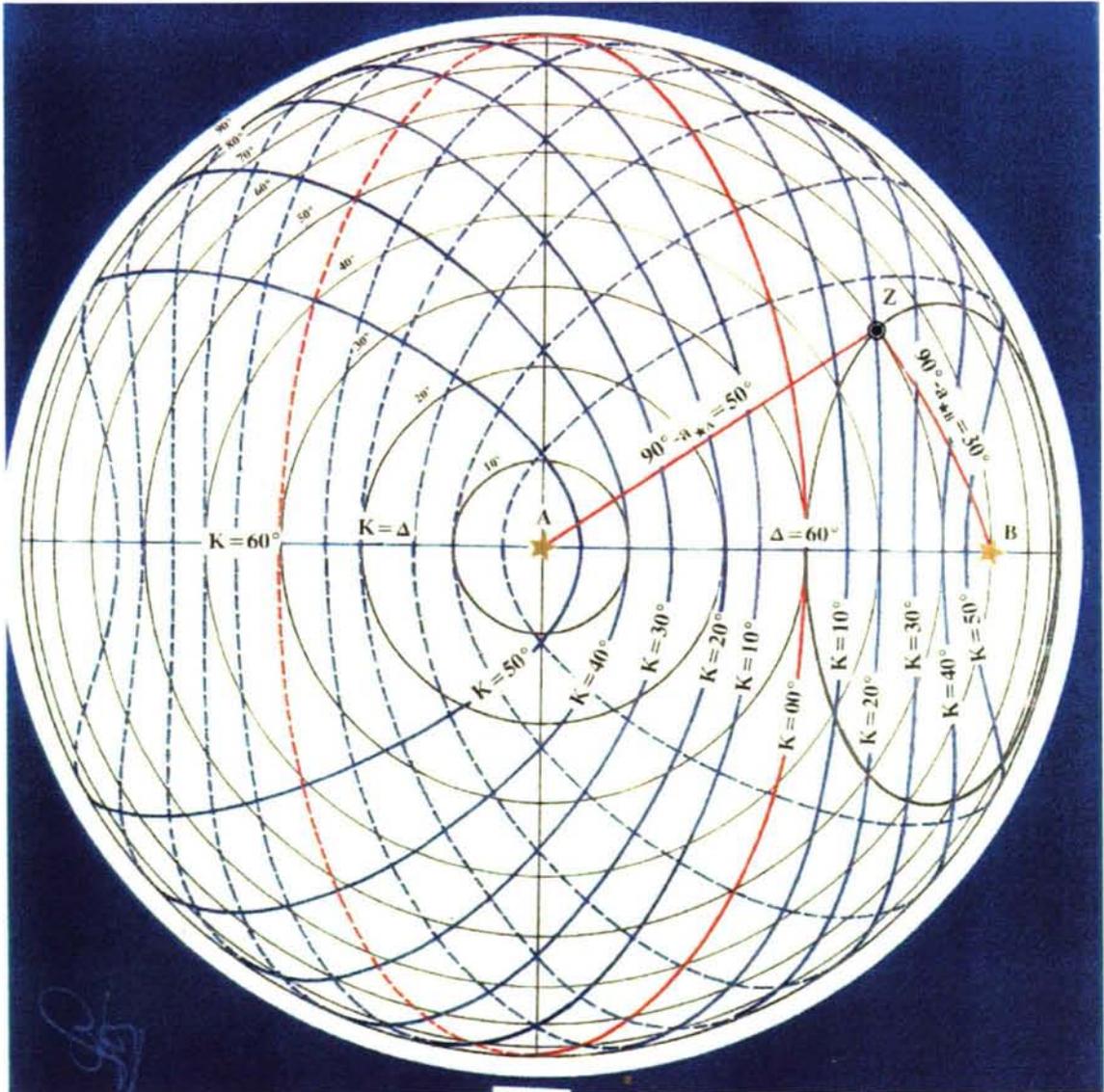


Figura - 1.484.XV - Proyección ortográfica sobre el horizonte del ★ A

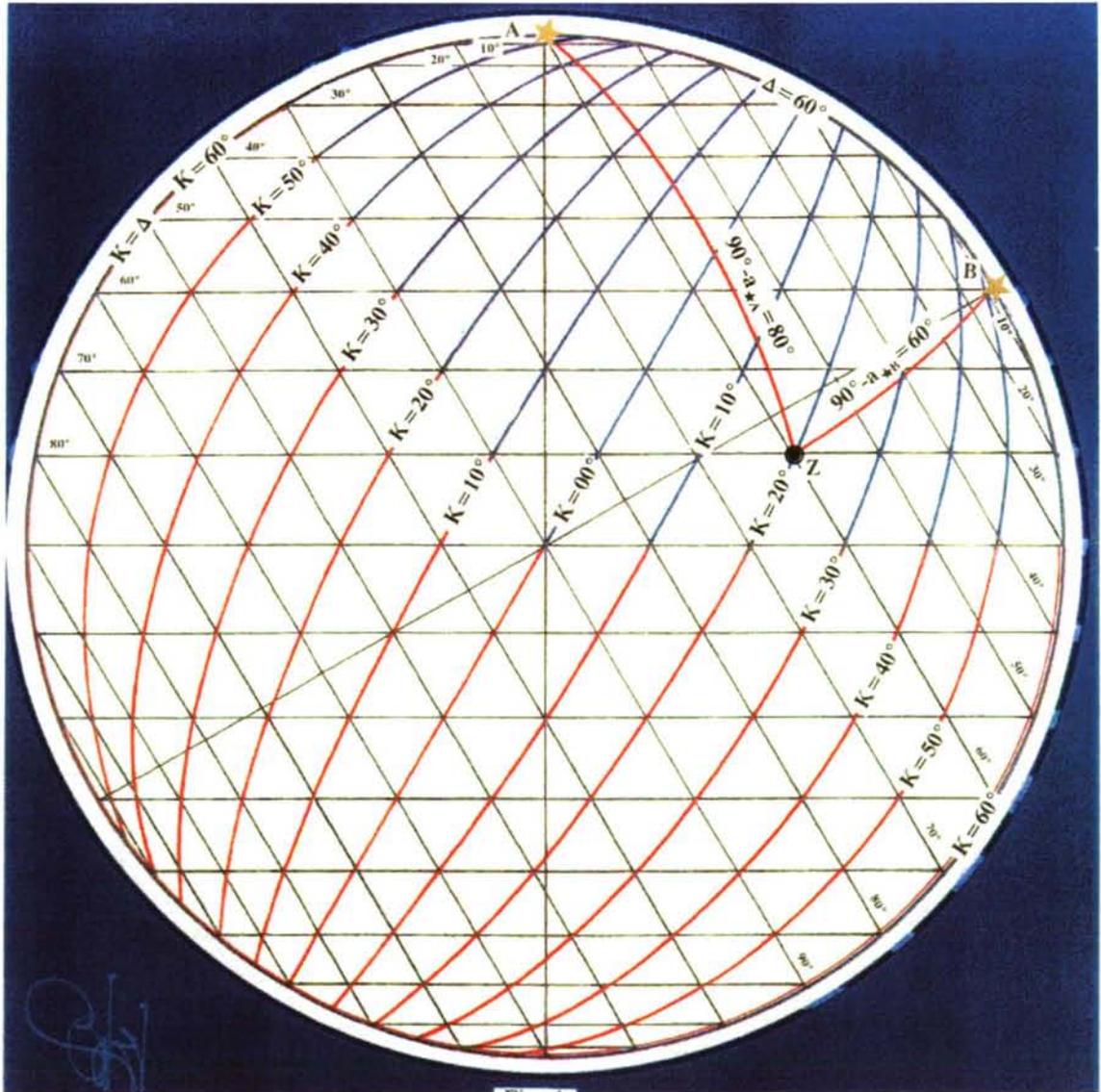


Figura - 1.485.XV - Proyección ortográfica sobre el plano del círculo máximo ★A - ★B

CONCLUSIONES

Lo expuesto en las páginas del capítulo precedente, y que constituye la esencia de este trabajo, nos conduce a las conclusiones que siguen, que aun siendo de inmediata inferencia, y confirmadas en su enfoque teórico mediante las expresiones matemáticas desarrolladas y, en su aspecto práctico, por los ejemplos en él incluidos, a modo de resumen y de acuerdo a la lógica formal en este tipo de estudios, enumeramos seguidamente:

1) Si provisto del adecuado instrumental de medida, el observador determina la distancia ortodrómica a dos puntos de la superficie esférica, cuyas coordenadas suponemos conocidas, su línea de posición, respecto al mismo sistema de coordenadas, es una hipérbola esférica, definida como el lugar geométrico de los puntos de la esfera cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos es una constante. ***“Tal línea es independiente del error sistemático cometido en el proceso de medida de las distancias, y los errores accidentales modifican las coordenadas de los puntos que constituyen tal lugar geométrico, en una magnitud que depende del ángulo que forman los círculos máximos definidos por la posición del observador y cada uno de los puntos dados”.***

2) La hipérbola esférica es utilizada en la navegación astronómica desde mediados del pasado siglo. En este aspecto temporal debiera ubicarse, al menos, con la aparición del sistema CONSOL, el primero de los sistemas hiperbólicos ideados para ayuda a la navegación, y, por lo tanto, anterior a todos los demás sistemas de la misma naturaleza: DECCA, LORAN etc. El trazado de la bisectriz de altura no tiene otra justificación matemática que el de la ejecución del procedimiento de geometría diferencial consistente en la sustitución del adecuado arco de una determinada curva, por el segmento de la recta tangente a la misma en el entorno del punto de tangencia, punto determinante; en nuestro caso, la sustitución del arco de hipérbola esférica

definida por la observación de las alturas de dos astros, por el segmento de recta denominado bisectriz de altura; así, **“el elemento diferencial de la hipérbola esférica de origen astronómico, a efectos prácticos, coincide, en el entorno del punto determinante, con el segmento de bisectriz”**. La bisectriz de altura es a la hipérbola esférica, o lugar geométrico de diferencia constante entre las alturas de dos astros, lo que la recta de altura es a la circunferencia de alturas iguales.

3) Puesto que la hipérbola esférica de origen astronómico es el lugar geométrico de los puntos de la esfera celeste cuya propiedad característica es que la diferencia entre las alturas instantáneas de dos astros es constante, resulta ser una línea diferenciométrica, por lo que el arco de tangente que la sustituye es, asimismo, una recta diferenciométrica; la denominación de bisectriz de altura no es acorde con la naturaleza de la línea que sustituye, concluyéndose que el adecuado término de referencia es el de **“recta diferenciométrica”**, en completa consonancia con la naturaleza de tal línea de posición.

4) Una vez establecida la verdadera naturaleza de la línea de posición estudiada y desarrolladas las expresiones matemáticas y procedimientos de cálculo conducentes a la obtención de los distintos determinantes, **“el determinante de la recta diferenciométrica es independiente de la diferencia entre las alturas verdadera y estimada o calculada de cada uno de los astros observados”**. Propiedad esta de gran importancia al minimizarse el error cometido al sustituir el arco de curva por el segmento de tangente. Los radios de curvatura de la hipérbola esférica son mayores que los de la circunferencia de alturas iguales, y cómo el error cometido en dicha sustitución es función del radio de curvatura y decrece al aumentar este, el error derivado de tal sustitución resulta ser menor.

5) El comportamiento de la recta diferenciométrica respecto del tipo de determinante utilizado es de idéntica naturaleza al de su homólogo en la recta de altura, depende, entonces, de la orientación de la línea de posición y de los errores propios de toda medida, de aquí que **“el determinante más favorable y por lo tanto el que debiera utilizarse con preferencia sobre los demás, y salvo a efectos de estudio y docencia, es el de tipo Saint Hilaire”**.

6) El corte de tres rectas diferenciométricas, salvo error de trazado, es siempre un punto. **“Tal configuración no evidencia la existencia de errores accidentales, por ello, dicho punto, no debe interpretarse de manera incontestable como situación observada del buque; los astros que deben observarse para poner de manifiesto la existencia de estos errores son cuatro, y, a ser posible, observados en verticales opuestos. Ya que cuatro astros generan seis líneas de posición, si cuatro de estas líneas se cortan en un punto, entonces, las seis líneas se cortan en dicho punto, que será la situación observada del buque”**. Aunque trazadas las cuatro primeras líneas de posición, estas se corten en un punto, es aconsejable completar el proceso con el trazado de las dos restantes; con ello confirmamos que el punto de intersección común no es debido a un hecho azaroso. La observación de más de cuatro astros no aumenta la certidumbre de la situación obtenida aumentando de manera injustificada la carga de trabajo precisa. La importancia de lo aquí concluido, se manifiesta en el ejemplo que se acompaña.

El 27 de setiembre de 1982 navegando al 055°/v con velocidad de 17,6 nudos, en S/e φ 42° 19,5' S, λ 088° 05,0' W, observamos:

TMG	★ Observado	a_i
123614	★ Procyon	42° 11,7'
124201	★ Miaplacidus	58° 27,7'
124541	★ Suhail	70° 02,7'
124922	★ Rigel	42° 14,7'

Determinar S/O.

Horarios, declinaciones, alturas de cálculo, alturas estimadas y azimut:

	★ Procyon	★ Miaplacidus	★ Suhail	★ Rigel
$hG\Upsilon$	185° 57,0'	185° 57,0'	185° 57,0'	185° 57,0'
$C_{m,s}^{on}$	09° 05,0'	10° 32,0'	11° 27,1'	12° 22,5'
$hG\Upsilon_c$	195° 02,0'	196° 29,0'	197° 24,1'	198° 19,5'
$-\lambda$	088° 05,0' W	088° 05,0' W	088° 05,0' W	088° 05,0' W
$h\Upsilon$	106° 57,0' W	108° 24,0' W	109° 19,1' W	110° 14,5' W
AS_\star	245° 24,5' W	221° 45,5' W	223° 10,1' W	281° 34,6'
hl_\star	352° 21,5' W	330° 09,5' W	332° 29,2' W	391° 49,1' W
hl_\star	007° 38,5' W	029° 50,5' E	027° 30,8' E	031° 49,1' W
d_\star	05° 16,3' N	69° 38,5' S	43° 21,4' S	08° 13,1' S
a_i	42° 11,7'	58° 27,7'	70° 02,4'	45° 57,9'
r_a	-1,1'	-0,6'	-0,4'	-1,0'
uh	+2,7'	-0,6'	+0,7'	-
a_c	42° 13,3'	58° 26,5'	70° 02,7'	45° 56,9'
a_e	41° 53,9'	58° 41,5'	69° 53,5'	45° 53,5'
Z_e	010,0°	160,5°	102,5°	311,5°

Determinantes de las líneas de posición:

	★ Suhail	★ Miaplacidus	★ Rigel	
★ Miaplacidus	k_v	11° 36,2'		
	k_e	11° 12,0'		
	$k_v - k_e$	00° 24,2'		
	ρ	25,0'		
		- E		
	Φ	131,5°		
★ Rigel	k_v	24° 05,8'	12° 29,6'	
	k_e	24° 00,0'	12° 48,0'	
	$k_v - k_e$	00° 05,8'	-00° 18,4'	
	ρ	3,0'	9,5'	
		- E	- NW	
	Φ	207,0°	236,0°	
★ Procyon	k_v	27° 49,4'	16° 13,2'	03° 43,6'
	k_e	27° 59,6'	16° 47,6'	03° 59,6'
	$k_v - k_e$	-00° 10,2'	-00° 34,4'	-00° 16,3'
	ρ	7,1'	17,8'	16,4'
		- N	- N	- N
	Φ	056,25°	085,25°	160,75°

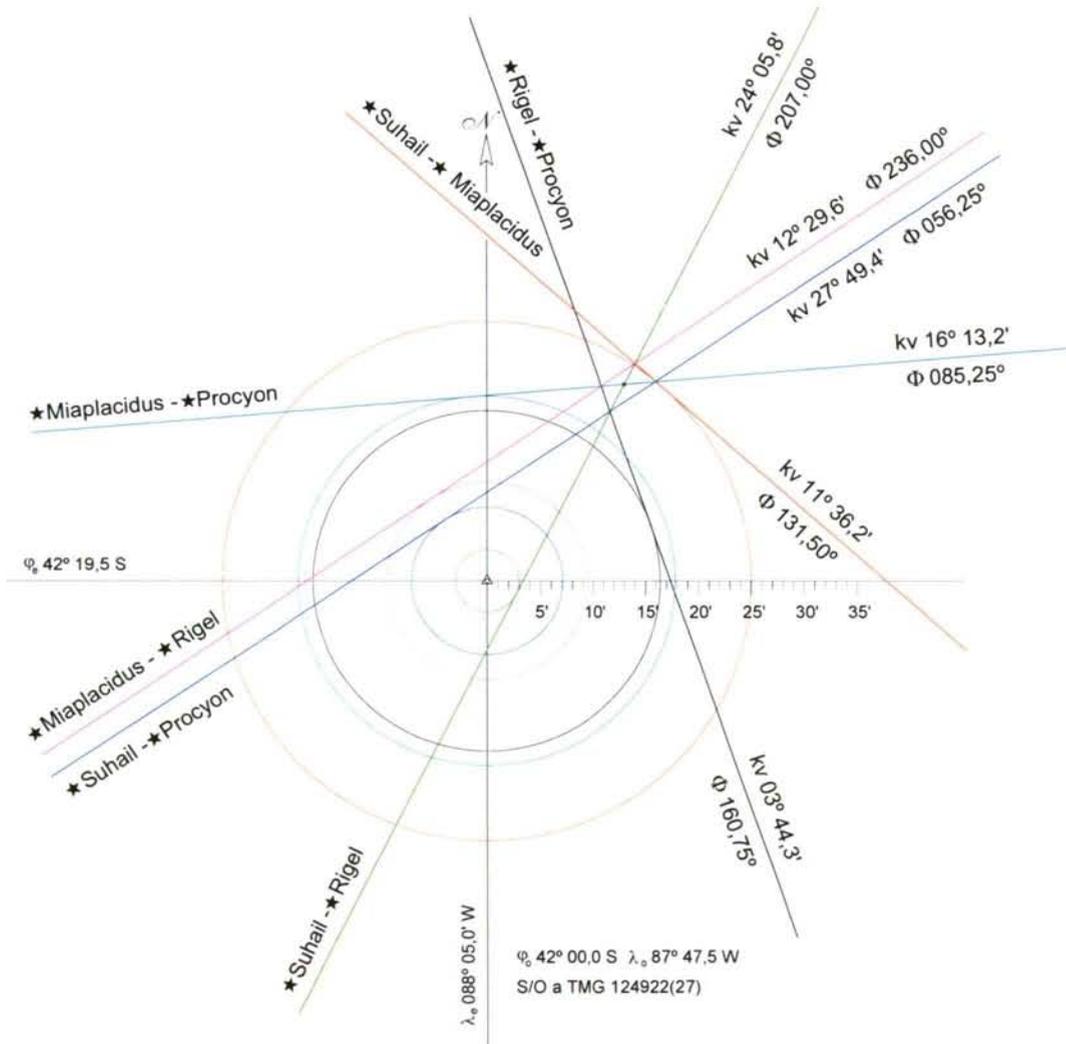


Figura - 1.491.C - Evidencia de error accidental. Valor medio $\approx 3'$

La configuración resultante evidencia errores accidentales cuya entidad puede asumirse como normal en la práctica. De no estar presentes dichos errores, las líneas ★Miaplacidus - ★Rigel y ★Suhail - ★Procyon, sensiblemente paralelas, deberían coincidir. En general, a un observador experto provisto de un buen sextante, le basta con la observación de una altura para cada astro para obtener una configuración como

b) La velocidad del buque. **“Si se observan astros convenientemente cerrados a proa y popa, siendo el caso óptimo con observaciones por ambas cabezas, la recta diferenciométrica que resulta es una recta de velocidad. Si se navega con corriente, nos informa sobre su componente longitudinal horaria; si la corriente es de proa o popa y se conoce con precisión la velocidad de máquinas, obtendremos la intensidad horaria de la corriente. La información final es la distancia navegada desde la última situación observada, y, por lo tanto, la velocidad media desarrollada”.**Figura 1.493.C.

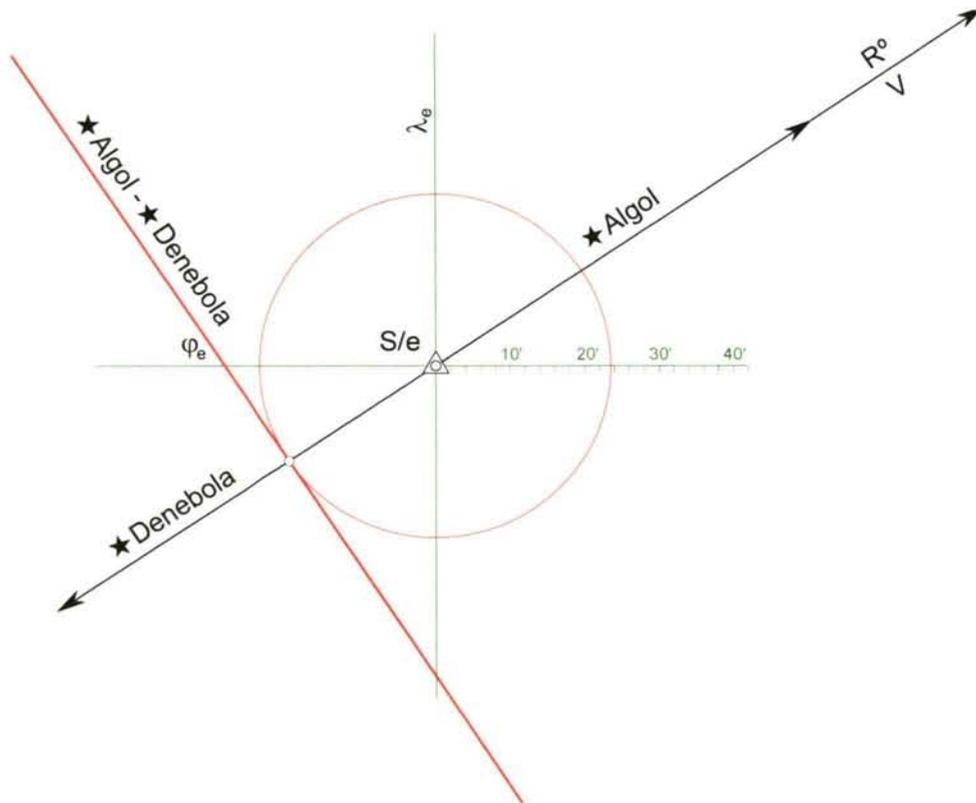


Figura - 1.493.C - Recta de velocidad

8) **“Cuando se observen pares de astros con intervalos de tiempo notables entre cada dos observaciones, no pueden asumirse cómo sistemáticos los errores derivados de las oscilaciones de los coeficientes de refracción debidos a los cambios en las variables presión, humedad, temperatura, etc; las líneas de posición se calcularán de forma individualizada, trasladándose la primera al tiempo de la segunda”.** Este caso se da cuando a media tarde ☉ y ☾ generan una

buena línea de posición que puede ser cortada por otra determinada por dos astros observados en el crepúsculo. El caso inverso puede darse a media mañana. El ejemplo siguiente ilustra este supuesto.

El 29 de abril de 1982 navegando al 063°/v con velocidad de 14,26 nudos, en S/e ϕ 38° 38' N λ 016° 36' W, observamos:

TMG 162638 $a_{i\odot}$ 39° 02,3'

TMG 163213 $a_{i\zeta}$ 57° 09,9'

Más tarde, en el crepúsculo:

TMG 202116 $a_{i\star}$ Alphard 41° 55,6'

TMG 202638 $a_{i\star}$ Kochab 42° 09,8'

E0 16 m, ei 2,1'. Determinar S/O en el crepúsculo.

Horarios, declinaciones y alturas verdaderas:

hG_{\odot} 060° 39,9'	$a_{i\odot}$ 39° 02,3'	hG_{ζ} 336° 47,0' 59	$a_{i\zeta}$ 57° 09,9'
$C_{m,s}^{on}$ 06° 39,5'	ei -2,1'	$C_{m,s}^{on}$ 07° 41,2'	ei -2,1'
$hG_{\odot c}$ 067° 19,4' W	D_a -7,1'	Δ 3,3'	D_a -7,1'
$-\lambda$ 016° 36,6' W	r_a -1,2	$hG_{\zeta c}$ 344° 31,5' W	r_a -0,6'
hl_{\odot} 050° 43,4' W	σ_{\odot} +15,9'	$-\lambda$ 016° 36,6' W	σ_{ζ} +16,1'
	$a_{v\odot}$ 39° 07,8'	hl_{ζ} 327° 55,5' W	π^a_{ζ} +32,0'
			π^h_e 59,1'
d_{\odot} 14° 30,4' N	uh -1,3'	hl_{ζ} 032° 04,5' E	$a_{v\zeta}$ 57° 48,2'
	$a_{c\odot}$ 39° 06,5'	d_{ζ} 21° 36,2' N	
		Δ -2,3' 42	
		$d_{\zeta c}$ 21° 33,9' N	

Alturas estimadas y azimut:

a_e_{\odot} 39° 25,9' Z_{\odot} 256,0°

a_e_{ζ} 57° 40,7' Z_{ζ} 112,5°

Determinante de la línea de posición \odot :

$a_v \odot$	57° 48,2'	$a_e \odot$	57° 40,7'	$Z \odot$	112,5°
$a_c \odot$	39° 06,5'	$a_e \odot$	39° 25,9'	$Z \odot$	256,0°
k_v	18° 41,7'				
$-k_e$	18° 14,8'		ρ	14,16' - \odot - E	
$k_v - k_e$	+ 00° 26,9'			Φ	184,25°

Rectificación de la situación de estima:

ϕ_e	38° 38,0' N	λ_e	016° 36,0' W	$R^\circ = \Phi - 90^\circ$
$\Delta\phi$	01,1' S	$\Delta\lambda$	18,1' E	$R^\circ 094,25^\circ$
ϕ_r	38° 36,9' N	λ_r	016° 17,9' W	$d = \rho - 14,16'$
	S/r a TMG 163213(29)			A 14,12'
	HRB 153213(29)			

Navegación hasta el crepúsculo:

TMG	163213(29)	V	14,26' dn 55,7'
TMG	202638(29)	R°	063°
In	035425	A	49,63'
ϕ_r	38° 36,9' N	λ_r	016° 17,9' W
$\Delta\phi$	25,4 N	$\Delta\lambda$	01° 03,7' E
ϕ_{π}	39° 02,3' N	λ_{π}	015° 14,2' W
	S/r a TMG 202638(29)		
	HRB 192638(29)		

Horarios, declinaciones y alturas verdaderas:

★ Alphard				★ Kochab			
$hG\Upsilon$	157° 26,7'	$a_{i\star}$	41° 55,6'	$hG\Upsilon$	157° 26,7'	$a_{i\star}$	42° 09,8'
$C_{m,s}^{on}$	05° 19,9'	ei	-2,1'	$C_{m,s}^{on}$	06° 40,6'	ei	-2,1'
$hG\Upsilon_c$	162° 46,6' W	D_a	-7,1'	$hG\Upsilon_c$	164° 07,3'	D_a	-7,1'
$-\lambda$	015° 14,2' W	r_a	-1,1'	$-\lambda$	015° 14,2' W	r_a	-1,1'
$h\Upsilon$	147° 32,4' W	$a_{v\star}$	41° 45,3'	$h\Upsilon$	149° 53,1' W	$a_{v\star}$	41° 59,5'
AS_{\star}	218° 19,4'	uh	-0,7'	AS_{\star}	137° 17,8'		
hl_{\star}	365° 51,8' W	$a_{c\star}$	41° 44,6'	hl_{\star}	287° 10,9' W		
hl_{\star}	005° 51,8' W			hl_{\star}	072° 49,1' W		
d_{\star}	08° 35,0' S			d_{\star}	74° 13,7' N		

Alturas estimadas y azimut:

$a_e\star$ Alphard	42° 04,0'	Z_{\star}	188,0°
$a_e\star$ Kochab	41° 57,1'	Z_{\star}	020,5°

Determinante de la línea de posición ★ Kochab - ★ Alphard:

$a_c\star$	41° 59,5'	$a_e\star$	41° 57,1'	Z_{\star}	020,5°
$a_c\star$	41° 44,6'	$a_e\star$	42° 04,0'	Z_{\odot}	188,0°
k_v	+00° 14,9'				
$-k_e$	-00° 06,9'	ρ	11,0' - Kochab - NNE		
$k_v - k_e$	+ 00° 21,8'			Φ	104,25°

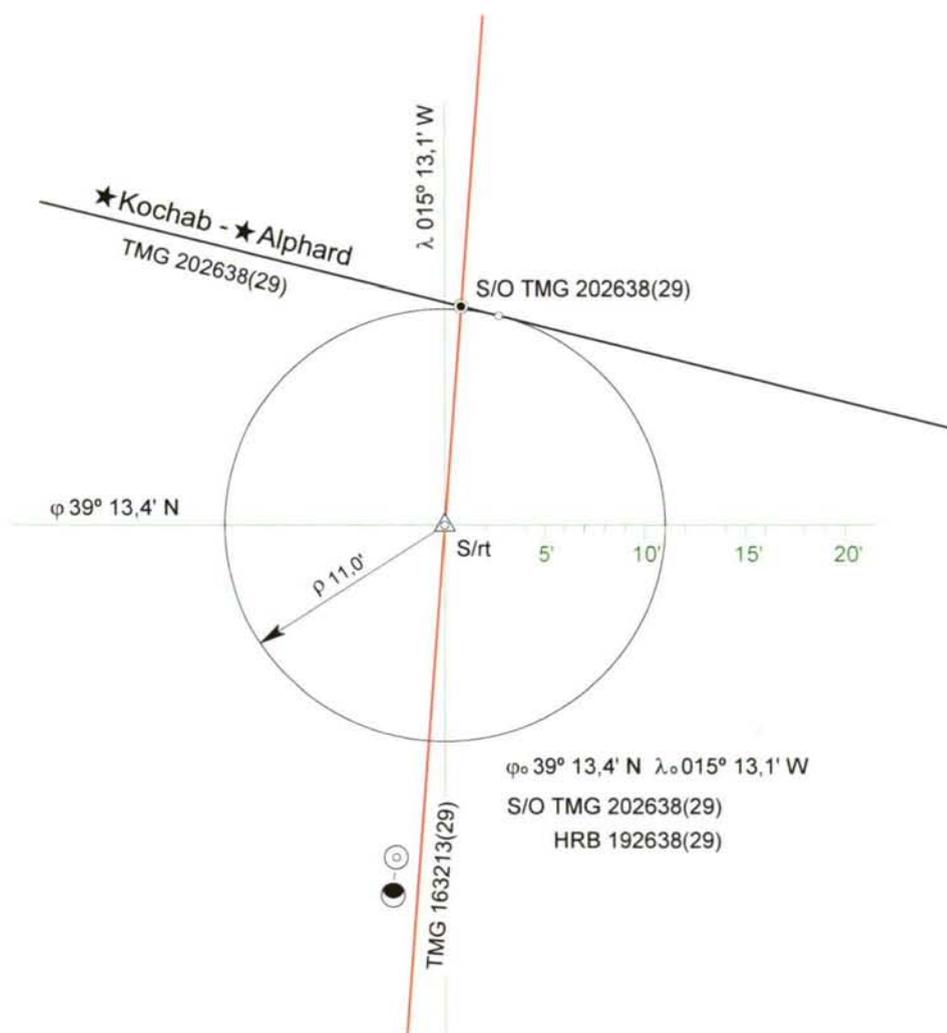


Figura - 1.497.C - Situación por corte de rectas con traslado de la primera

9) “Si por observación en el crepúsculo obtenemos una recta diferenciométrica, y, posteriormente, una única observación genera una recta de altura de garantía, la situación observada resultará del corte de ambas líneas de posición, una vez trasladada la primera al tiempo de la segunda”. Este supuesto ocurre cuando se observan al amanecer un par de astros, y de mañana, cerca del primer vertical, observamos el ☉. Como en el caso precedente, ilustramos tal supuesto con el ejemplo que sigue.

El 3 de febrero de 2003, navegando al 086°/v con velocidad de 18,6 nudos, en el crepúsculo matutino, en S/e φ 37° 35' S, λ 070° 55' E, observamos:

TMG	★ Observado	a_i	Z_a
235140(2)	★ ACRUX	63° 05,8'	-
235807(2)	★ SPICA	63° 16,2'	-

A HRB 0755 y TMG 025525(3), con el ☉ en el vertical primario: $a_i \ominus 27^\circ 52,4'$. E_0 18 m, e_i 1,1' +. Determinar S/O por corte de recta diferenciométrica Spica- Acrux, y recta de altura ☉.

	★ Acrux				★ Spica	
$hG\Upsilon$	117° 43,1'	a_i	63° 05,8'		a_i	63° 16,2'
$C^{on}_{m,s}$	12° 50,6'	u_h	-0,6'	14° 34,1'		
$hG\Upsilon_c$	130° 33,7'	a_c	63° 05,2'	132° 17,2'	a_c	63° 16,2'
$-\lambda E$	070° 55,0'		Δt 000627	070° 55,0'		
$h\Upsilon$	201° 28,7'	W	d_D 2'	203° 12,2'	W	
AS_\star	173° 18,2'		M_\star 108,5°	158° 39,7'		
hl_\star	014° 46,9'	W	da -0,6'	001° 51,9'	W	
d_\star	63° 06,7'	S		11° 10,5'	S	

Alturas estimadas y azimut de los astros observados

★ Acrux	62° 56,3'	194,5°
★ Spica	63° 32,3'	356,0°

Línea de posición ★ Spica - ★ Acrux

★ Spica	a_c	$63^\circ 16,2'$	a_e	$62^\circ 56,3'$	$Z_e 194,5^\circ$
★ Acrux	a_c	$63^\circ 05,2'$	a_e	$63^\circ 32,3'$	$Z_e 356,0^\circ$
	k_v	$00^\circ 11,0'$	k_e	$00^\circ 36,0'$	
	$k_v - k_e$	$- 00^\circ 25,0'$			
	ρ	$00^\circ 12,66'$			$\rightarrow \star \text{ Acrux} - S$
	Φ	$275,25^\circ$			

Rectificación de la situación de estima

φ_e	$37^\circ 35,0' S$	λ_e	$070^\circ 55,0' E$	$R^\circ = \Phi - 90^\circ$	$182,25^\circ$
$\Delta\varphi$	$12,7' S$	$\Delta\lambda$	$0,6' E$	$d = \rho$	$12,66'$
φ_r	$37^\circ 47,7' S$	λ_r	$070^\circ 55,6' E$	A	$0,5'$

S/r a HRB 045807(3) y TMG 235807(2); último horizonte

Estima hasta la observación ☉

TMG 025525(3)

TMG 235807(2)

In 025718

φ_r	$37^\circ 47,7' S$	λ_r	$070^\circ 55,6' E$	R°	086°
$\Delta\varphi$	$3,8' N$	$\Delta\lambda$	$1^\circ 09,4' E$	dn	$55'$
φ_{rt}	$37^\circ 43,9' S$	λ_{rt}	$72^\circ 05,0' E$	A	$54,87'$

S/rt a HRB 075525(3) y TMG 025525(3)

Recta de altura de ☉

hG_{\odot}	206° 33,8'		$a_{i_{\odot}}$	27° 52,4'
$C_{m,s}^{\circ n}$	13° 51,3'		e_i	+1,1'
$hG_{\odot c}$	220° 25,1'	W	$a_{o_{\odot}}$	27° 53,5'
- λE	072° 05,0'	E	d_a	-7,5'
hI_{\odot}	292° 30,6'	W	$a_{r_{\odot}}$	27° 46,0'
hI_{\odot}	067° 29,9'	E	r_a	-1,9'
d_{\odot}	16° 41,0'	S	$a_{v_{\odot}}$	27° 44,1'
			σ_{\odot}	+16,2'
			$a_{vc_{\odot}}$	28° 00,3'

Altura estimada, diferencia de alturas y azimut de ☉

a_v	28° 00,3'	
a_e	27° 45,0'	
Δa	+15,3'	Z_e 090,5°



Figura - 1.501.C - Corte con recta de altura ☉

10) “Toda recta diferenciométrica puede combinarse con cualquier otra línea de posición de origen terrestre, siendo en este caso de aplicación idénticos supuestos que los contemplados para la recta de altura en lo que se refiere a las zonas, áreas y arcos de certidumbre”. En el ejemplo que sigue se plasma la conclusión expuesta.

El día 16 de enero de 2003, al amanecer, navegamos al 266° de la aguja con velocidad de 7,4 nudos, observando:

TMG	★ Observado	a_i	Z_a
072341	★ ARCTURUS	64° 50,2'	-
072602	★ KOCHAB	59° 51,6'	008°
073014	Faro de Estaca de Bares		192°

Determinar S/O.

Coordenadas para el cálculo: φ **43° 47,2' N** λ **007° 41,1' W**
Faro de Estaca de Bares

	★ Arcturus			★ Kochab		
$hG\Upsilon$	220° 18,3'	a_i	64° 50,2'	220° 18,3'	a_i	59° 51,6'
$C^{on}m,s$	05° 56,2'	r_a	-0,5'	006° 31,4'	r_a	-0,6'
$hG\Upsilon_c$	226° 14,5'	u_h	+0,3'	226° 49,9'	u_h	-0,1'
$- \lambda W$	007° 41,1'	a_c	64° 50,0'	007° 41,1'	a_c	59° 50,9'
$hI\Upsilon$	218° 33,4'	W	$\Delta t=000633$	219° 08,8'	W	$\Delta t=000414$
AS_\star	146° 03,3'		$d_D=0,81'$	137° 19,8'		$d_D=0,52'$
hl_\star	364° 36,7'	W	$M_\star=069,5^\circ$	356° 28,6'	W	$M_\star=102,0^\circ$
hl_\star	004° 36,7'	W	$da=0,3'+$	003° 31,4'	E	$da=0,1'-$
d_\star	19° 09,9'	N		74° 08,3'	N	

Cálculo de las alturas estimadas:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} d &= 0,227168 + 0,665628 + \\ \cos \varphi \cdot \cos d \cdot \cos hl &= 0,679703 + 0,196939 + \\ \operatorname{sen} a_e &= 0,906871 + 0,862567 + \\ a_e &= 65^{\circ} 04,6' \quad 59^{\circ} 36,4' \end{aligned}$$

Cálculo del azimut de los astros observados

$$\begin{aligned} \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} d \cdot \operatorname{cosec} hl &= 3,120638 + 41,343651 + \\ - \operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{cotg} hl &= 8,578591 (+) - 11,238582 (+) - \\ \operatorname{cotg} Z &= 5,457953 - 30,105069 + \\ Z &= 190,5^{\circ} \quad 002,0^{\circ} \end{aligned}$$

★ Kochab

$$\begin{aligned} Z_{v\star} &= 002^{\circ} \\ Z_{o\star} &= 008^{\circ} \\ CT &= 006^{\circ} - \end{aligned}$$

Faro de Estaca de Bares

$$\begin{aligned} D_a &= 192^{\circ} \\ CT &= 006^{\circ} \\ D_v &= 186^{\circ} \end{aligned}$$

Línea de posición ★ Arcturus - ★ Kochab

★ Arcturus	a_c	$64^{\circ} 50,0'$	a_e	$65^{\circ} 04,6'$	Z_e	$190,5^{\circ}$
★ Kochab	a_c	$59^{\circ} 50,9'$	a_e	$59^{\circ} 36,4'$	Z_e	$002,0^{\circ}$
	k_v	$04^{\circ} 59,1'$	k_e	$05^{\circ} 28,2'$		
	$k_v - k_e$	$00^{\circ} 29,1'$				
	ρ	$00^{\circ} 14,6'$			- Kochab - N	
	Φ	$096,25^{\circ}$				

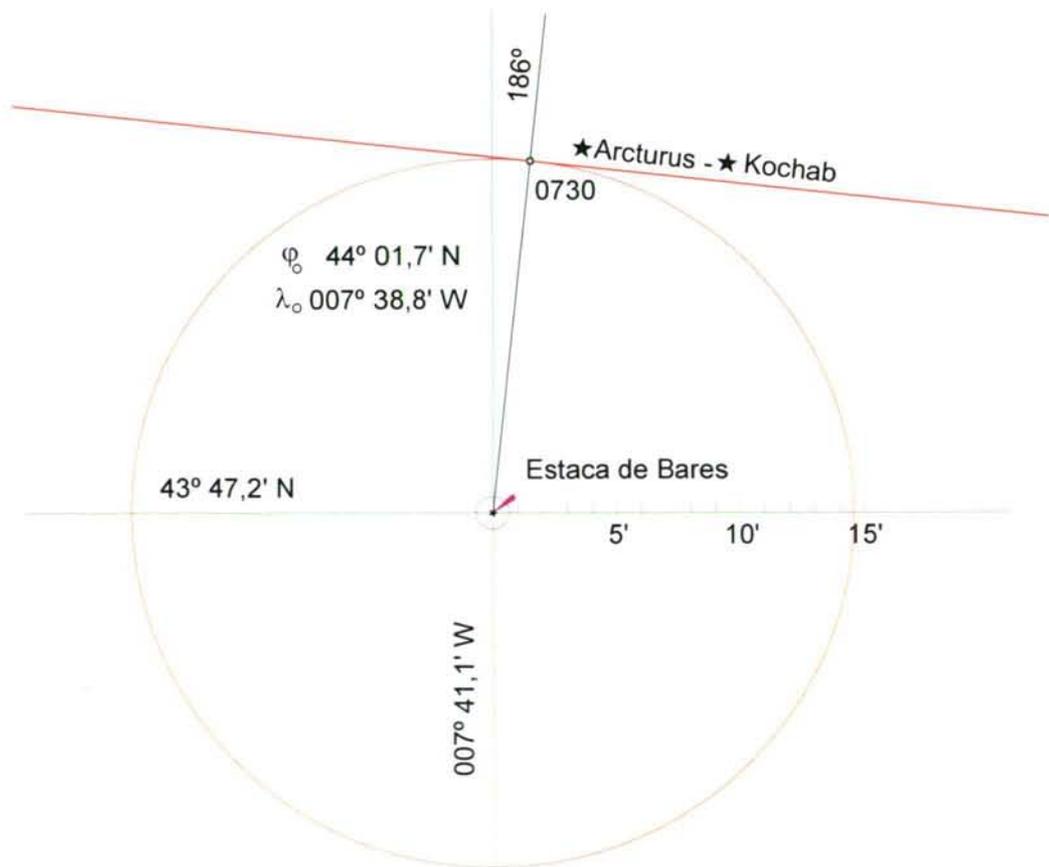


Figura - 1.504.C - Corte con recta de demora

11) Una vez demostrada la naturaleza matemática de la línea de posición en estudio, **“se manifiesta la posibilidad de construcción de cartas mercatorianas para la navegación astronómica que faciliten el proceso de determinación de la situación observada al navegante”**, tal y como se refleja en las figuras de las páginas 453 - 454 y 464 - 465, con ejemplos prácticos para su uso en las páginas 455 - 456, 462 - 463, 464 - 465 y 468 - 469.

∞ ∞

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura	Leyenda	Página
1.1.I	La esfera celeste	1
1.3.I	Esfera celeste geocéntrica	3
1.4.I	Horizontes sensible, visible y racional. Polo de iluminación y círculo racional	4
1.6.I	Coordenadas horizontales	6
1.7.I	Coordenadas horarias	7
1.9.I	Coordenadas absolutas	9
1.12.I	Coordenadas uranográficas eclípticas	12
1.13.I	Coordenadas uranográficas eclípticas	13
1.14.I	Relación fundamental de la Astronomía de Posición	14
1.16.II	El triángulo de posición	16
1.25.II	Triángulo de posición rectángulo Pentágono de Neper	25
1.28.III	Movimiento diurno	28
1.31.III	Esfera recta	31
1.32.III	Esfera paralela	32
1.33.III	Posiciones correspondientes	33
1.34.III	Máximas disgresiones	34
1.35.III	Variación de φ y d	35
1.37.III	Astros circumpolares	37
1.40.III	Variación del horario 1	40
1.41.III	Variación del horario 2	41
1.44.III	Variación en altura 1	44
1.46.III	Variación en altura 2	46
1.52.III	Variación en altura y azimut	52
1.53.IV	La doble reflexión	53
1.55.IV	Descripción del sextante	55
1.56.IV	Lectura rápida: 54.7'	56
1.57.IV	Lectura rápida: 36.7'	57

1.58.IV	Lectura a la derecha: - 4.3'	58
1.59.IV	Aspecto de limbo y nonius	59
2.59.IV	Lectura 21° 46' 15"	59
1.60.IV	Lectura 29° 19' 45"	60
1.61.IV	Punto inicial o de paralelismo	61
1.63.IV	Punto de colimación o coincidencia: ángulo de paralaje de los espejos	63
1.65.IV	Aproximación del horizonte	65
1.66.IV	Esquema de la observación al crepúsculo	66
1.67.IV	Error de índice por el Sol	67
1.68.IV	Error de índice por ★ 3ª magnitud	68
1.69.IV	Error de índice con la línea del horizonte	69
1.70.IV	Examen de la perpendicularidad espejo grande-plano del limbo	70
1.71.IV	Comprobación de la perpendicularidad	71
1.73.IV	Espejo chico inclinado hacia dentro	73
1.74.IV	Espejo chico inclinado hacia fuera	74
1.75.IV	Imagen en un espejo plano	75
1.76.IV	Espejo plano con prismaticismo	76
1.79.IV	Corrección por prismaticismo	79
1.80.IV	Vidrio de color con caras paralelas	80
1.81.IV	Vidrio de color con caras no paralelas	81
1.85.IV	Error de excentricidad	85
1.88.IV	Sextante Cassens & Plath	89
1.90.IV	Sextante Cassens & Plath mostrando su notable espejo chico	90
1.91.IV	Trommel-Sextant. Obsérvese la posición de la alidada	91
1.92.IV	Trommel-Sextant	92
1.93.IV	Sextante marca Kongo-Hatta	93
1.94.IV	Sextante Kongo-Hatta. Véase su característico espejo chico	94
1.95.IV	Sextante Guardiamarina	95
1.96.IV	Sextante Guardiamarina desde otro ángulo	96
1.97.IV	Certificado del sextante Cassens & Plath	97

1.98.IV	Cassens & Plath. Características y descripción	98
1.99.IV	Trommel-Sextant	99
1.100.IV	Sextante Guardiamarina	100
1.102.V	Correcciones a las alturas observadas	102
1.103.V	Depresión aparente	103
1.107.V	Distancia al horizonte	107
1.108.V	Depresión de la línea de costa	108
1.110.V	Variación de la depresión	110
1.111.V	Paralaje	111
1.114.V	Semidiámetro	114
1.117.V	Refracción astronómica	117
1.119.V	Estudio de la refracción astronómica	119
1.128.VI	Observación de una altura de Sol con horizonte artificial	128
1.129.VI	Horizonte de mercurio	129
1.130.VI	Mercurio en la cubeta	130
1.131.VI	Horizonte listo para la observación	131
1.132.VI	Horizonte de burbuja	132
1.133.VI	Horizonte tipo BOOTH HORIZON	133
1.134.vi	Horizonte de burbuja	134
1.135.VI	Moderno sextante de Cassens & Plath	135
1.137.VII	Observación con pínula	137
1.138.VII	Fundamento de la alidada azimutal	138
1.139.VII	Alidada azimutal del H.I. de Italia	139
1.140.VII	Alidada azimutal Thomson	140
1.141.VII	Primer procedimiento con la alidada Thomson	141
2.141.VII	Segundo procedimiento	141
1.143.VII	Círculo de marcar	143
1.144.VII	Error por inclinación del plano de colimación	144
1.147.VII	Inclinación del plano de la rosa	147
1.150.VII	Error por inclinación del plano de la rosa	150

1.152.VIII	El H-1 de Harrison	152
1.153.VIII	John Harrison a los 73 años	153
1.154.VIII	Regulador	154
1.156.VIII	Motor	156
1.157.VIII	Esquema del rodaje	157
1.158.VIII	Escape libre de Leroy	158
1.159.VIII	Escape libre de Arnold	159
1.160.VIII	Volante compensado	160
1.162.VIII	El H-3 de John Harrison	162
1.163.VIII	Maquinaria de un Arnold & Son, 1791	163
2.163.VIII	Maquinaria de un Dent Strand, 1870	163
1.164.VIII	Cronómetro Ulisse Nardin, Suiza	164
2.164.VIII	Cronómetro Ulisse Nardin en su caja	164
1.165.VIII	Cronómetro marino Wempe, Hamburgo	165
2.165.VIII	Cronómetro Wempe, parte posterior	165
1.167.VIII	Circuito equivalente	167
1.168.VIII	Diagrama de bloques de un AO	168
1.169.VIII	Amplificador operacional	169
1.170.VIII	Oscilador/generador de reloj	170
2.170.VIII	Oscilador CMOS	170
1.171.VIII	Oscilador libre de onda cuadrada	171
2.171.VIII	Generador de onda cuadrada de precisión	171
1.172.VIII	Reloj de 12 horas con display de descarga de gas	172
1.173.VIII	Cronómetro magistral moderno	173
1.174.VIII	Cronómetro Glasshutte	174
1.180.IX	Reconocimiento ortográfico	180
1.181.IX	Proyección azimutal equidistante	181
1.182.IX	Deformaciones	182
1.185.IX	Reconocimiento en el Almanaque Náutico	185
1.186.IX	Hemisferio austral	186

1.187.IX	Cilíndrica equidistante A	187
2.187.IX	Cilíndrica equidistante B	187
1.188.IX	Desarrollo cilíndrico equidistante	188
1.189.IX	Polar azimutal equidistante. Plano boreal	189
1.190.IX	Polar azimutal equidistante. Plano austral	190
1.191.IX	Verticales y almícantarats para $\varphi=35^\circ$ N	191
1.192.IX	Transportador de planetas	192
1.193.IX	Reconocimiento en φ próxima a 35° N	193
1.194.IX	Detalle del reconocimiento anterior	194
2.194.IX	★? Zubenelgenubi	194
1.195.IX	Reconocimiento en $\varphi_e 27^\circ 38'$ S	195
1.196.IX	Detalle del reconocimiento en latitud S	196
2.196.IX	Reconocimiento: ★? Diphda	196
1.197.IX	Fijación de los planetas	197
1.198.IX	Construcción de un identificador	198
1.199.IX	Estrellas de Orión y próximas	199
1.200.IX	Regulus, Pollux, Procyon y proximidades	200
1.201.IX	Arcturus, Antares, Spica y próximas	201
1.202.IX	Vega, Altair y estrellas vecinas	202
1.203.IX	El gran cuadrado de Pegaso y próximas	203
1.204.IX	La Polar. Osas Mayor y Menor, y próximas	204
1.205.IX	Deneb, Vega, Altair y cercanías	205
1.206.IX	Casiopea, Pegaso y Pleyades	206
1.207.IX	Betelgeuse, Aldebarán y próximas	207
1.208.IX	Hemisferio Boreal	208
1.209.IX	La Cruz del Sur, Spica, Antares y circundantes	209
1.210.IX	Sirius, Canopus y estrellas vecinas	210
1.211.IX	Rigel, Achernar y próximas	211
1.212.IX	Fomalhaut y proximidades	212
1.213.IX	Hemisferio Austral	213

1.201.X	Tierra, Geoide, Elipsoide	214
1.216.X	Diferentes clases de latitud: φ' astronómica, φ geodésica, ψ geocéntrica y β paramétrica	216
1.225.X	Secciones principales. Coordenadas en el elipsoide	225
1.226.X	Secciones recíprocas y línea geodésica	226
1.227.X	La esfera Tierra	227
1.230.X	Altura del polo celeste	230
1.231.X	Circunferencia de alturas iguales de primera especie	231
1.233.X	Circunferencia de alturas iguales de segunda especie	233
1.234.X	Circunferencia de alturas iguales de tercera especie	234
1.250.X	Latitud observada por altura de la Polar -A-	250
1.255.X	Latitud por altura de la Polar -B-	255
1.259.XI	La longitud λ , definición	259
1.276.XI	Distancias lunares	276
1.278.XI	Contracción de los semidiámetros	278
1.285.XII	Situación por corte de 2 circunferencias de alturas iguales	285
1.286.XII	Situación por corte de 3 circunferencias de alturas iguales	286
1.287.XII	Situación ortográfica, por altura y azimut	287
1.289.XII	Situación ortográfica con dos alturas	289
1.293.XII	Curvas de alturas iguales de primera, segunda y tercera especies	293
1.304.XII	Círculos osculadores. Valores límite del radio ρ	304
1.305.XII	Situación por corte de curvas de alturas iguales	305
1.308.XII	Trazado del círculo osculador	308
1.309.XII	Sustitución por una circunferencia	309
1.311.XII	Latitud para la que $\varphi_a - \varphi = 1'$	311
1.312.XII	La primera secante del Capitán Sumner, 17.12.1837	312
1.314.XII	Separación entre curva y secante o tangente	314
1.317.XII	Trazado de la secante Sumner	317
1.318.XII	Secantes de altura. Determinantes por longitud	318
1.319.XII	Diferentes puntos determinantes	319

1.320.XII	Inconvenientes del determinante tipo J	320
1.321.XII	Desventajas del determinante tipo B	321
1.322.XII	Ventajas del determinante M	322
1.323.XII	Tangente Marcq Saint Hilaire	323
1.326.XII	Ecuación de la recta de altura	326
1.327.XII	Método de Alessio	327
1.328.XII	Situación por corte de tres rectas de altura simultáneas	328
1.329.XII	Error en el traslado de la recta de altura	329
1.333.XII	Zona y área de certidumbre	333
1.334.XII	Error en la hora	334
1.337.XII	Error al sustituir por la loxodrómica tangente	337
1.338.XII	Rectas de altura sucesivas	338
1.339.XII	Reducción al último horizonte	339
1.342.XII	Recta de altura de rumbo	342
1.343.XII	Recta de altura de velocidad	343
1.344.XII	Recalada desde la zona de certidumbre	344
1.345.XII	Líneas de posición combinadas	345
1.346.XII	Método de Doves	346
1.349.XII	Situación por alturas circunzenitales	349
1.355.XIII	Variación lineal altura/tiempo	355
1.357.XIII	Error en la altura calculada por un error en el horario. 1	357
1.358.XIII	Error en la altura calculada. 2	358
1.359.XIII	Error en la altura calculada. 3	359
1.360.XIII	Error en la altura calculada por un error en la latitud. 1	360
1.361.XIII	Error en la altura calculada por un error en la latitud. 2	361
1.362.XIII	Error en la altura calculada por un error en la declinación	362
1.364.XIII	Error en el horario por un error en la altura. 1	364
1.365.XIII	Error en el horario calculado por un error en la altura. 2	365
1.366.XIII	Error en el horario calculado por un error en la altura. 3	366
1.367.XIII	Error en el horario calculado por un error en latitud. 1	367

1.368.XIII	Error en el horario calculado por un error en latitud. 2	368
1.370.XIII	Error en el horario calculado por error en declinación	370
1.371.XIII	Error en latitud por un error en la altura. 1	371
1.372.XIII	Error en latitud por un error en la altura. 2	372
1.374.XIII	Error en latitud por un error en el horario. 1	374
1.375.XIII	Error en latitud por un error en el horario. 2	375
1.376.XIII	Error en latitud por un error en declinación	375
1.378.XIII	Error en azimut por un error en latitud	378
1.379.XIII	Error en azimut por error en declinación	379
1.380.XIII	Error en azimut por error en el horario local	380
1.383.XIV	Máximo error en la situación observada	383
1.387.XIV	Error sistemático mayor que accidental	387
1.388.XIV	Error sistemático mayor que accidental. 1	388
1.389.XIV	Error sistemático mayor que accidental. 2	389
1.390.XIV	Bisectriz de altura	390
1.392.XIV	Error accidental en la bisectriz de altura	392
1.395.XIV	Trazado de la bisectriz óptima	395
1.396.XIV	Indeterminación de las bisectrices de altura	396
1.397.XIV	Situación observada por corte de bisectrices de altura. 1	397
1.398.XIV	Situación observada por corte de bisectrices de altura. 2	398
1.399.XIV	Situación observada por corte de bisectrices óptimas. 1	399
1.400.XIV	Situación observada por corte de bisectrices óptimas. 2	400
1.402.XV	Hipérbola esférica de origen astronómico	402
1.403.XV	Hipérbola esférica en proyección gnomónica	403
1.408.XV	Cambio de coordenadas	408
1.410.XV	Hipérbola y elipse esféricas	410
1.411.XV	Familia de hipérbolas esféricas de los astros A y B	411
1.412.XV	Dirección de la línea de posición	412
1.420.XV	Distancia a la línea de posición	420
1.423.XV	Trazado de la línea de posición	423

1.427.XV	Recta diferenciométrica por el método de Sumner	427
1.428.XV	Determinante tipo Borda	428
1.432.XV	Situación observada por corte de rectas diferenciométricas	432
1.434.XV	Determinante Marcq de Saint Hilaire	434
1.436.XV	Situación observada por corte de "bisectrices"	436
1.437.XV	Influencia del error accidental	437
1.440.XV	Configuración sin error accidental sensible	440
1.443.XV	Configuración cuando el error accidental es notable	443
1.447.XV	S/O con reducción de las alturas al último horizonte	447
1.449.XV	Cálculo de los puntos de la línea de posición	449
1.451.XV	Interpolador de líneas	451
	- Carta 01. ★ Vega - ★ Arcturus - ★ Dubhe	453-454
	- Carta 02. ★ Vega - ★ Arcturus - ★ Dubhe	455-456
1.458.XV	Reducción de las alturas al último horizonte	458
1.460.XV	Interpolación de las líneas de posición	460
1.462.XV	Reducción de las alturas a la última hora	461
	- Carta 03. ★ Vega - ★ Arcturus - ★ Dubhe	462-463
	- Carta 01. ★ Aldebaran - ★ Procyon - ★ Polar - ★ Regulus	464-465
1.467.XV	Interpolación con la escala logarítmica	467
	- Carta 02. ★ Aldebaran - ★ Procyon - ★ Polar - ★ Regulus	468-469
1.471.XV	Reducción al último horizonte	471
1.472.XV	Reducción de alturas a la última hora	472
	- Carta 03. ★ Aldebaran - ★ Procyon - ★ Polar - ★ Regulus	474-475
	- (Ejemplo 1). Sin leyenda	478
	- (Solución gráfica del ejemplo 1). Sin leyenda	479
	- (Ejemplo 2). Sin leyenda	480
	- (Solución gráfica del ejemplo 2). Sin leyenda	481
	- (Ejemplo 3). Sin leyenda	482
	- (Solución gráfica del ejemplo 3). Sin leyenda	483
	- (Proyección ortográfica.1). Sin leyenda	484

- (Proyección ortográfica.2). Sin leyenda

485

BIBLIOGRAFÍA

(Índice cronológico)

Autor	Título-Editorial.
GINO LORIA [LORIA-Z]	CURVE SGHEMBE SPECIALI. NICOLA ZACHINELLI. BOLOGNA
FERNÁNDEZ FONTECHA [FONTECHA-04]	CURSO DE ASTRONOMÍA NÁUTICA Y NAVEGACIÓN. LITOGRAFÍA Y TIPOGRAFÍA DE F. RODRÍGUEZ DE SILVA. 5ª EDICIÓN. CÁDIZ - 1904
RIBERA Y URUBURU, L. [RIBERA-07]	TRATADO DE NAVEGACIÓN. IMP. Y EST. DE "EL CORREO GALLEGO". 2ª EDICIÓN. FERROL 1907.
PAREDES Y CASTRO. J. [PAREDES-35]	EL INDISPENSABLE DEL PILOTO. TIPOGRAFÍA CATALANA.
WILLIAM G. SHUTE [SHUTE-44]	AN INDRODUCTION TO NAVIGATIÓN AND NAUTICAL ASTRONOMY. THE MACMILLAN COMPANY. NEW YORK, 1944
GARCÍA FRANCO, S. [FRANCO-47]	HISTORIA DEL ARTE Y CIENCIA DE NAVEGAR. DESENVOLVIMIENTO HISTÓRICO DE "LOS CUATRO TÉRMINOS" DE LA NAVEGACIÓN. TOMOS I Y II. INSTITUTO HISTÓRICO DE LA MARINA. MADRID 1947.

- ALLER, RAMÓN M.
[ALLER-48] **ASTRONOMÍA A SIMPLE VISTA:** facsimile da edición 1948
SERVICIO DE PUBLICACIÓN DA UNIVERSIDADE DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA.
- FOSSI GUTIÉRREZ, I.
[FOSSI-49] **TRATADO DE NÁUTICA.**
DOSSAT. MADRID, 1949.
- GARCÍA DE PAREDES, J.
BARBUDO, E.
[BARBUDO-51] **ASTRONOMÍA GENERAL Y NÁUTICA.**
CADIZ 1951
- VICENTE GANDARIAS
[GANDARIAS-56] **GEODESIA E HIDROGRAFÍA.**
Editorial DOSSAT. S.A. MADRID 1956
- HUGHES, A. J.
[HUGHES-57] **THE BOOK OF THE SEXTANT** WITH Ancient and Modern
Instruments of Navigaton.
NAUTICAL PRESS. *New Edition* 1957
- FLAMMARION, C.
[FLAMMARION-63] **ASTRONOMÍA POPULAR**
MUNTANER Y SIMÓN. BARCELONA, 1963
- NATHANIEL BOWDITCH,
LL.D.
[BOWDITCH-66] **AMERICAN PRACTICAL NAVIGATOR.**
AN EPITOME OF NAVIGATION. 1966 - Corrected Print.
U.S. NAVAL OCEANOGRAPHIC OFFICE.
WASHINGTON: 1966
- COTTER, C.H.
[COTTER-68] **A HISTORY OF NAUTICAL ASTRONOMY**
Hollis & Carter, Ltd. LONDON 1968
- COTTER, C.H.
[COTTER-69] **THE COMPLETE NAUTICAL ASTRONOMER.**
HOLLIS & CARTER, LTD. LONDON 1969.
- MUELLER, I.
[MUELLER-69] **SPHERICAL AND PRACTICAL ASTRONOMY**
Ungar Publications & Co. NEW YORK, 1969.

G. MONSALVE, M.
J. PALENCIA CORTÉS
[MONPAL-70]

TRAZADO GEOMÉTRICO.
MANUEL SIUROT, 3 SEVILLA 1970

REY PASTOR, J.
[REY-70]

LA CIENCIA Y LA TÉCNICA EN EL DESCUBRIMIENTO DE AMÉRICA.
COLECCIÓN AUSTRAL. ESPASA CALPE, S.A. MADRID 1970.

LE CALVE, A.
[CALVE-70]

COURS DE NAVIGATION: A L'USAGE DES CANDIDATS AUX EXAMENS DE LA MARINE MARCHANDE ET DES PALISANCIERS.
EDITIONS MARITIMES D'OUTRE-MER. PARÍS, 1970.

MARIO SACCHETTI
[SACCHETTI-71]

LA NAVIGAZIONE ASTRONÓMICA. Manuale pratico per chi va per mare.
U. MURSIA & C. MILANO. PRIMA EDIZIONE 1971

TEODORO J. VIVES
[VIVES-71]

ASTRONOMÍA DE POSICIÓN. ESPACIO Y TIEMPO.
EDITORIAL ALHAMBRA, S.A. PRIMERA EDICIÓN. MADRID 1971

MOREU CURBERA
MARTÍNEZ JIMÉNEZ
[CURBERA-72]

ASTRONOMÍA Y NAVEGACIÓN. TOMOS I, II Y III.
"LIBRERÍA SAN JOSÉ" VIGO 1972.

RENE CUENIN
[CUENIN-72]

CARTOGRAPHIE GÉNÉRALE.
Tome 1, Notions générales et principes d'élaboration.
ÉDITIONS EYROLLES. PARIS 1972.

ESCUELA DE GEODESIA Y
TOPOGRAFÍA.
[EGT-72]

CURSO DE ASTRONOMÍA GEODÉSICA.
Fascículo primero. Elementos de Cosmografía.
Servicio Geográfico del Ejército. MADRID, 1972.

MOREU CURBERA, J.M.
[CURBERA-73]

ASTRONOMÍA Y NAVEGACIÓN.
LIBRERÍA SAN JOSÉ. VIGO, 1973.

- MILLIGAN, JOHN E.
[MILLIGAN-74] **CELESTIAL NAVIGATION.**
MARYLAND CORNELL MARITIME PRESS. CENTREVILLE, 1974.
- ARANA L. I.
[ARANA-75] **EJERCICIOS, TEMAS Y PROBLEMAS DE
TOPOGRAFÍA, GEODESIA Y ASTRONOMÍA DE
POSICIÓN.**
Urmo S.A. de Ediciones. BILBAO, 1975.
- JOSÉ LUIS ROSSIGNOLI
JUST. [ROSSIGNOLI-76] **PROYECCIÓN UNIVERSAL TRANSVERSA MERCATOR**
Talleres del Servicio Geográfico del Ejército. MADRID - 1976
- SON & FERGUSON
[FERGUSON-77] **BROWN'S STAR ATLAS SHOWING ALL THE BRIGHT
STARS WITH FULL INSTRUCTIONS HOW TO FIND AND
USE THEM FOR NAVIGATIONAL PURPOSES AND
DEPARTMENT OF TRADE EXAMINATION.**
BROWN, SON & FERGUSON. GLASGOW, 1977.
- COTTER, CHARLES H.
[COTTER-77] **THE ELEMENTS OF NAVIGATION AND NAUTICAL
ASTRONOMY.**
BROWN, SON & FERGUSON. GLASGOW, 1977.
- MEDINA PERALTA, M.
[MEDINA-78] **ELEMENTOS DE ASTRONOMÍA DE POSICIÓN.**
EDITORIAL LIMUSA. MEXICO 1978.
- A. LE CALVÉ
[CALVÉ-78] **CURS D'ASTRONOMIE NAUTIQUE.**
Editions Maritimes et d'Outre-Mer. PARIS, 1978.
- MARTÍNEZ JIMÉNEZ
[MARTÍNEZ-78] **MANUAL DE NAVEGACION.**
HIJOS DE E. MINUESA. MADRID, 1978.
- VORONTSOV-VELIAMINOV
[VORONTSOV-79] **PROBLEMAS Y EJERCICIOS PRÁCTICOS DE
ASTRONOMÍA.**
EDITORIAL MIR. MOSCU, 1979.

MARTÍN ASÍN, F.
[ASÍN-79]

ASTRONOMÍA.
PARANINFO. MADRID 1979.

ABETTI, GIORGIO
[ABETTI-80]

HISTORIA DE LA ASTRONOMÍA
FONDO DE CULTURA ECONÓMICA. BARCELONA, 1980

I. CAPASSO - S. FEDE.
[CAPASSO-81]

NAVIGAZIONE.
EDITORE ULRICO HOEPLI MILANO. SETTIMA EDIZIONE
AGGIORNATA ED AUMENTATA. MILANO 1981.

FLORENT, ROGER
[FLORENT-81]

GUIDE PRACTIQUE DE NAVIGATION ASTRONOMIQUE
EDITIONS DU PEN DUICK. PARÍS, 1981

FERDINANDO FLORA
[FLORA-82]

ASTRONOMIA NAUTICA.
(NAVIGAZIONE ASTRONOMICA). QUINTA EDIZIONE. EDITORE
ULRICO HOEPLI MILANO 1982.

CURBERA, MUREU
[CURBERA-82]

ASTRONOMÍA NÁUTICA Y NAVEGACIÓN.
HIJOS DE E. MINUESA. MADRID, 1982. [6ª ED.].

I. BRONSHTEIN
K. SEMENDIAEV
[MIR-82]

MANUAL DE MATEMÁTICAS PARA INGENIEROS Y
ESTUDIANTES.
EDITORIAL· MIR· MOSCU. 4ª edición.

CHARLES H. COTTER
[COTTER-83]

A HISTORY OF THE NAVIGATOR'S SEXTANT. NAUTICAL
PRESS, BROWN, SON & FERGUSON. LTD. FIRST EDITION 1983.

J.A. DOCOBO DURÁNTEZ
A. ELIPE SÁNCHEZ
[DOCOBO-ELIPE-83]

ASTRONOMÍA.
280 problemas resueltos
Imprenta de la Universidad de Santiago, 1983.

HERRMANN, JOACHIM
[HERRMANN-84]

ATLAS DE ASTRONOMÍA
ALIANZA. MADRID, 1984.

MALONEY, ELBERT S.
[MALONEY-85]

DUTTON'S NAVIGATION AND PILOTING.
S.L. 1985.

- DIXON, CONRAD
[DIXON-85] **NAVEGACIÓN ASTRONÓMICA BÁSICA.**
PARANINFO. MADRID, 1985.
- BRUCE BAUER
[BRUCE-86] **THE SEXTANT HANDBOOK.** Adjustment, Repair, Use and
History. International Marine Publishing Company, Camden, Maine
04843. 1986.
- MINISTRY OF DEFENCE
(NAVY) [NAVY.1-87] **ADMIRALTY MANUAL OF NAVIGATION.**
VOLUME I. New edition 1987.
HER MAJESTY'S STATIONERY OFFICE. LONDON 1987.
- BAKER, DAVID
[BAKER-87] **GUÍA DE ASTRONOMÍA**
OMEGA. BARCELONA, 1987.
- ALTIMIRAS, JORGE
[ALTIMIRAS-87] **NAVEGACIÓN ASTRONÓMICA SIMPLIFICADA**
NORAY. BARCELONA, 1987.
- ROTH, GÜNTER D.
[ROTH-89] **GUÍA DE LAS ESTRELLAS Y DE LOS PLANETAS: SU
CONOCIMIENTO E IDENTIFICACIÓN.**
OMEGA. BARCELONA, 1989.
- CAILLOU, MICHEL
[CAILLOU-89] **TRAITÉ DE NAVIGATION.**
MASSON. PARÍS-BARCELONA, 1989.
- HARRIS, MIKE J.
[HARRIS-89] **ASTRONAVIGATION BY POCKET COMPUTER.**
ADLARD COLES. LONDON, 1989.
- HERRMANN, JOACHIM
[HERRMANN-90] **ESTRELLAS**
BLUME. BARCELONA, 1990.
- MARTÍN ASÍN, F.
[ASÍN-90] **ASTRONOMÍA**
3ª EDICIÓN. PARANINFO. MADRID, 1990.

- MENZEL, DONALD H.
[MENZEL-90] **GUÍA DE CAMPO DE LAS ESTRELLAS Y LOS PLANETAS DE LOS HEMISFERIOS NORTE Y SUR.**
OMEGA. BARCELONA, 1990.
- MINISTRY OF DEFENCE
(NAVY) [NAVY.2-92] **ADMIRALTY MANUAL OF NAVIGATION.**
VOLUME II. New edition 1973. *Fourth impresson 1992*
London: HMSO.
- SELLÉS, MANUEL A.
[SELLÉS-92] **ASTRONOMÍA Y NAVEGACIÓN EN EL SIGLO XVIII**
AKAL D.L. TORREJON DE ARDOZ, 1992.
- HOBBS, RICHARD R.
[HOBBS-92] **MARINE NAVIGATION.**
NAVAL INSTITUTE PRESS. ANNAPOLIS (USA), 1992.
- BROWN'S
[BROWN'S-92] **BROWN'S NAUTICAL ALMANAC.**
BROWN, SON & FERGUSON, LTD. GLASGOW, 1992.
- MINISTERIO DE DEF.
[ALMANC-92] **ALMANAQUE NÁUTICO 1992.**
REAL INSTITUTO Y OBSERVATORIO DE LA ARMADA.
SAN FERNANDO, 1992.
- MANUEL SELLÉS
[SELLÉS-94] **INSTRUMENTOS DE NAVEGACIÓN**
Del Mediterráneo al Pacífico
Lunweg Editores. BARCELONA 1994
- MARTÍN ASÍN, F.
[ASÍN-94] **EL CAMINO DEL SOL POR EL ZODIACO**
F. MARTÍN D.L. MADRID, 1994
- CAMBLOO O. ABEL
[CAMBLOO-95] **TEORÍA DE ASTRONOMÍA**
COMME D.L. MADRID 1995.
- PIKE, DAG
[PIKE-95] **REED'S SEXTANT SIMPLIFIED.**
HAMPTON COURT THOMAS REDD, 1995.
- BOURGE, PIERRE
[BOURGE-96] **EL CIELO A SIMPLE VISTA Y CON PRISMÁTICOS**
OMEGA. BARCELONA, 1996.

WILLIAM D. H.
ANDREWES
[ANDREWES-96]

THE QUEST FOR LONGITUDE

THE PROCEEDINGS OF THE LONGITUDE SYMPOSIUM
HARVARD UNIVERSITY-CAMBRIDGE-MASSACHUSETTS
NOVEMBER 4 - 6, 1993. EDITED BY WILLIAM D.H. ANDREWES
PUBLISHER: BULLETIN OF HISTORICAL SCIENTIFIC
INSTRUMENTS, 1996. ISBN: 0 - 9644329-0-0. HARVARD
UNIVERSITY

DEREK HOWSE
[DEREK-97]

GREENWICH TIME AND LONGITUDE

PHILLIP WILSON PUBLISHERS LIMITED, LONDON 1977
ISBN: 0-85667-468-0

FRANOLIC, PETAR
[FRANOLIC-97]

INTRODUCCIÓN A LA NAVEGACIÓN ASTRONÓMICA

ALIANZA. MADRID, 1997.

DAVA SOBEL
AND
WILLIAM J.H. ANDREWES
[SOBEL-98]

THE ILLUSTRATED LONGITUDE. The True Story of a Lone
Genius Who Solved the Greatest Scientific Problem of His Time.
Walker and Company. New York 1998

AUPÍ, VICENTE
[AUPÍ-98]

ATLAS DEL FIRMAMENTO: De la Osa Mayor a las Nubes de
Magallanes. Atlas de las estrellas y mapas celestes de Juan Conejero
Gil. GEO-PLANETA. BARCELONA, 1998.

PELLEQUER, BERNARD
[PELLEQUER-98]

GUÍA DEL CIELO

ALIANZA. MADRID, 1998.

CORBASÍ ORTÍN, ANGEL
[CORBASÍ-98]

**SISTEMAS DE NAVEGACIÓN: DESDE EL COMPÁS
MAGNÉTICO A LA NAVEGACIÓN POR SATÉLITE.**

MCGRAW-HILL. MADRID, 1998.

NEBE, WOLF
[NEBE-98]

MANUAL DE NAVEGACION ASTRONÓMICA.

CÚPULA. BARCELONA, 1998.

RUDOLF F. GRAF
[GRAF-99]

CIRCUITOS DE MEDIDA. EDITORIAL PARANINFO. MADRID
1999.

RUDOLF F. GRAF
[RUDOLF-99]

CIRCUITOS OSCILADORES. EDITORIAL PARANINFO.
MADRID 1999.

IAN RIDPATH
[IAN-99]

ESTRELLAS Y PLANETAS. Guía visual del cielo nocturno de los hemisferios norte y sur. EDICIONES OMEGA, S.A. BARCELONA 1999

BROWN'S
[BROWN'S-001]

BROWN'S NAUTICAL ALMANAC.
BROWN, SON & FERGUSON, LTD. GLASGOW, 2001.

MINISTERIO DE DEF.
[ALMANC-001]

ALMANAQUE NÁUTICO 2001.
REAL INSTITUTO Y OBSERVATORIO DE LA ARMADA.
SAN FERNANDO, 2001.

FERNÁNDEZ F. F.
[FERNÁNDEZ-001]

CURSO DE ASTRONOMÍA NÁUTICA Y NAVEGACIÓN
MAXTOR. VALLADOLID, 2001

ABAD, ALBERTO
J.A. DOCOBO
ANTONIO ELIPE
[DOCOBO-002]

CURSO DE ASTRONOMÍA.
Prensas Universitarias de Zaragoza
ZARAGOZA, 2002.

RIDPATH, IAN
[RIDPATH-002]

ESTRELLAS Y PLANETAS
OMEGA. BARCELONA, 2002.

TIRION, WIL.
[TIRION-002]

ATLAS ESTELAR CAMBRIDGE
CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. MADRID, 2002.

BIBLIOGRAFÍA

(Índice alfabético)

Referencia	Autor-Título-Editorial.
[ABETTI-80]	ABETTI, GIORGIO. HISTORIA DE LA ASTRONOMÍA FONDO DE CULTURA ECONÓMICA. BARCELONA , 1980
[ALMANAC-92]	ALMANAQUE NÁUTICO 1992 REAL INSTITUTO Y OBSERVATORIO DE LA ARMADA. SAN FERNANDO, 1992.
[ALMANAC-001]	ALMANAQUE NÁUTICO 2001 MINISTERIO DE DEFENSA REAL INSTITUTO Y OBSERVATORIO DE LA ARMADA. SAN FERNANDO, 2001
[ALTIMIRAS-87]	ALTIMIRAS, JORGE. NAVEGACIÓN ASTRONÓMICA SIMPLIFICADA NORAY. BARCELONA, 1987
[ALLER-48]	ALLER, RAMÓN M. ASTRONOMÍA A SIMPLE VISTA ; facsimile da edición 1948. SERVICIO DE PUBLICACIONES DA UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA.

- [ANDREWS-96] WILLIAM D. H. ANDREWES
THE QUEST FOR LONGITUDE
THE PROCEEDINGS OF THE LONGITUDE SYMPOSIUM.
HARVARD UNIVERSITY-CAMBRIDGE-MASSACHUSETTS.
NOVEMBER 4-6, 1993.
EDITED BY: WILLIAM D. H. ANDREWES
PUBLISHER: BULLETIN OF HISTORICAL SCIENTIFIC
INSTRUMENTS, 1996.
ISBN: 0-9644329-0-0
- [ARANA-75] ARANA, L.I.
**EJERCICIOS, TEMAS Y PROBLEMAS DE
TOPOGRAFÍA, GEODESIA Y ASTRONOMÍA DE
POSICIÓN.**
Urmo S.A. de editores. BILBAO, 1975.
- [ASÍN-79] MARTÍN ASÍN, F.
ASTRONOMÍA
PARANINFO. MADRID, 1979
- [ASÍN-90] MARTÍN ASÍN, F.
ASTRONOMÍA
3ª EDICIÓN. PARANINFO. MADRID, 1980
- [ASÍN-94] MARTÍN ASÍN, F.
EL CAMINO DEL SOL POR EL ZODIACO
F. MARTÍN D.L. MADRID, 1955
- [AUPÍ-98] AUPÍ, VICENTE
ATLAS DEL FIRMAMENTO: De la Osa Mayor a las nubes de
Magallanes. Atlas de las estrellas y mapas celestes de Juan Conejero
Gil. GEO PLANETA. BARCELONA, 1998

- [BAKER-87] BAKER, DAVID
GUÍA DE ASTRONOMÍA
OMEGA. BARCELONA, 1987
- [BARBUDO-51] BARBUDO, E.
GARCÍA DE PAREDES, J.
ASTRONOMÍA GENERAL Y NÁUTICA
CADIZ, 1951
- [BOURGE-96] BOURGE, PIERRE
EL CIELO A SIMPLE VISTA Y CON PRISMÁTICOS
OMEGA. BARCELONA, 1956
- [BOWDITCH-66] NATHANIEL BOWDITCH, LL.D.
AMERICAN PRACTICAL NAVIGATOR
AN EPITOME OF NAVIGATION. 1966 - Corrected Print.
USA NAVAL OCEANOGRAPHIC OFFICE.
WASHINGTON: 1966
- [BROWN'S-92] **BROWN'S NAUTICAL ALMANAC**
BROWN, SON & FERGUSON, LTD. GLASGOW, 1992
- [BROWN'S-001] **BROWN'S NAUTICAL ALMANAC**
BROWN, SON & FERGUSON, LTD. GLASGOW, 2001
- [BRUCE-86] BRUCE BAUER
THE SEXTANT HADBOOK. Adjustment, Repair, Use and
History.
International Marine Publishing Company. Camden, Maine
04843. 1986

- [CALVÉ-70] LE CALVÉ, A.
**COURS DE NAVIGATION: A L'USAGE DES CANDIDATS
AUX EXAMENS DE LA MARINE MARCHANDE ET DES
PALISANCIERS**
EDITIONS MARITIMES D'OUTRE-MER. PARÍS, 1970
- [CALVÉ-78] A. LE CALVÉ
COURS D'ASTRONOMIE NAUTIQUE
Editions Maritimes et d'Outre-Mer. PARIS, 1978
- [CAILLOU-89] CAILLOU, MICHEL
TRAITÉ DE NAVIGATION
MASSON. PARIS-BARCELONA, 1989.
- [CAMBLOR-95] CAMBLOR O. ABEL
TEORÍA DE ASTRONOMÍA
COMME D.L. MADRID, 1985
- [CAPASSO-81] IDEALE CAPASSO - SERGIO FEDE
NAVIGAZIONE
EDITORE ULRICO HOEPLI MILANO. SETTIMA EDIZIONE
AGGIORNATA ED AUMENTATA. MILANO, 1981
- [CORBASÍ-98] CORBASÍ ORTÍN, ÁNGEL
**SISTEMAS DE NAVEGACIÓN: DESDE EL COMPÁS
MAGNÉTICO A LA NAVEGACIÓN POR SATÉLITE.**
MCGRAW-HILL. MADRID, 1998
- [COTTER-68] COTTER, CHARLES H.
A HISTORY OF NAUTICAL ASTRONOMY
HOLLIS & CARTER, LTD. LONDON, 1968
- [COTTER-69] **THE COMPLETE NAUTICAL ASTRONOMER**
HOLLIS & CARTER, LTD. LONDON, 1968

- [COTTER-77] COTTER, CHARLES H.
THE ELEMENTS OF NAVIGATION AND NAUTICAL ASTRONOMY
BROWN, SON & FERGUSON. GLASGOW, 1977.
- [COTTER-83] COTTER, CHARLES H.
A HISTORY OF THE NAVIGATOR'S SEXTANT
NAUTICAL PRESS, BROWN, SON & FERGUSON LTD. FIRST EDITION, 1983.
- [CUENIN-72] RENE CUENIN
CARTOGRAPHIE GÉNÉRALE
Tome 1, Notions générales et principes d'élaboration.
ÉDITIONS EYROLLES. PARÍS 1972.
- [CURBERA-72] MOREU CURBERA - MARTÍNEZ JIMÉNEZ
ASTRONOMÍA Y NAVEGACIÓN. TOMOS I, II Y III.
"LIBRERÍA SAN JOSE". VIGO, 1972
- [CURBERA-73] MOREU CURBERA, J.M.
ASTRONOMÍA Y NAVEGACIÓN
"LIBRERÍA SAN JOSÉ". VIGO, 1973
- [CURBERA-82] MOREU CURBERA, J.M.
ASTRONOMÍA NÁUTICA Y NAVEGACIÓN
HIJOS DE E. MINUESA. MADRID, 1982.[6ª ED.]
- [DEREK-97] DEREK HOWSE
GREENWICH TIME AND LONGITUDE
PHILLIP WILSON PUBLISHERS LIMITED.
LONDON, 1997. ISBN: 0-85667-468-0

- [DIXON-85] DIXON, CONRAD
NAVEGACIÓN ASTRONÓMICA BÁSICA
PARANINFO. MADRID, 1985
- [DOCOBO-ELIPE-83] J.A. DOCOBO DURÁNTEZ - A. ELIPE SÁNCHEZ
ASTRONOMÍA
280 problemas resueltos
Imprenta de la Universidad de Santiago, 1983
- [DOCOBO-002] J.A. DOCOBO - ABAD, ALBERTO - ANTONIO ELIPE
CURSO DE ASTRONOMÍA
Prensas universitarias de Zaragoza. ZARAGOZA, 2002
- [EGT-72] **CURSO DE ASTRONOMÍA GEODÉSICA**
Fascículo primero. Elementos de Cosmografía.
Servicio Geográfico del Ejército. MADRID, 1972
- [FERGUSON-77] **BROWN'S STAR ATLAS SHOWING ALL THE BRIGHT STARS WITH FULL INSTRUCTIONS HOW TO FIND AND USE THEM FOR NAVIGATIONAL PURPOSES AND DEPARTMENT OF TRADE EXAMINATION.**
BROWN, SON & FERGUSON. GLASGOW, 1977.
- [FERNÁNDEZ-001] FERNÁNDEZ F. F.
CURSO DE ASTRONOMÍA NÁUTICA Y NAVEGACIÓN
MAXTOR. VALLADOLID, 2001
- [FLAMMARION-63] FLAMMARION, C.
ASTRONOMÍA POPULAR
MUNTANER Y SIMÓN. BARCELONA, 1963
- [FLORA-82] FERDINANDO FLORA
ASTRONOMIA NAUTICA
(NAVIGAZIONE ASTRONOMICA). QUINTA EDIZIONE.
EDITORE ULRICO HOEPLI. MILANO, 1982

- [FLORENT-81] FLORENT, ROGER
GUIDE PRATIQUE DE NAVIGATION ASTRONOMIQUE
EDITIONS DU PEN DUICK. PARÍS, 1981
- [FONTECHA-04] FERNÁNDEZ FONTECHA
CURSO DE ASTRONOMÍA NÁUTICA Y NAVEGACIÓN
LITOGRAFÍA Y TIPOGRAFÍA DE F. RODRÍGUEZ DE SILVA.
5ª EDICIÓN. CÁDIZ - 1904
- [FOSSI-49] FOSSI GUTIÉRREZ, I.
TRATADO DE NÁUTICA
DOSSAT. MADRID, 1949
- [FRANCO-47] GRACÍA FRANCO, S.
HISTORIA DEL ARTE Y CIENCIA DE NAVEGAR
DESENVOLVIMIENTO HISTÓRICO DE "LOS CUATRO
TÉRMINOS" DE LA NAVEGACIÓN. TOMOS I Y II.
INSTITUTO HISTÓRICO DE LA MARINA. MADRID, 1947
- [FRANOLIC-97] FRANOLIC, PETAR
INTRODUCCIÓN A LA NAVEGACIÓN ASTRONÓMICA
ALIANZA. MADRID, 1997
- [GANDARIAS-56] VICENTE GANDARIAS
GEODESIA E HIDROGRAFÍA
Editorial DOSSAT, S.A. MADRID, 1956
- [GRAF-99] RUDOLF F. GRAF
CIRCUITOS OSCILADORES
EDITORIAL PARANINFO. MADRID, 1956
- [HARRIS-89] HARRIS, MIKE J.
ASTRONAVIGATION BY POCKET COMPUTER
ADLARD COLES. LONDON, 1989

- [HERRMANN-84] HERRMANN, JOACHIM
ATLAS DE ASTRONOMÍA
ALIANZA. MADRID, 1984
- [HERRMANN-90] HERRMANN, JOACHIM
ESTRELLAS
BLUME. BARCELONA, 1990
- [HOBBS-92] HOBBS, RICHARD R.
MARINE NAVIGATION
NAVAL INSTITUTE PRESS. ANNAPOLIS (USA), 1992
- [HUGHES-57] HUGHES, A. J.
THE BOOK OF THE SEXTANT WHIT Ancient and Modern
Instruments of Navigation.
NAUTICAL PRESS. *New Edition 1957*
- [IAN-99] IAN RIDPATH
ESTRELLAS Y PLANETAS. Guía visual del cielo nocturno de
los hemisferios norte y sur.
EDICIONES OMEGA, S.A. BARCELONA, 1999
- [LORIA-Z] GINO LORIA
CURVE SGHEMBE SPECIALI
NICOLA ZACHINELLI. BOLOGNA
- [MALONEY-85] MALONEY, ELBERT S.
DUTTON'S NAVIGATION AND PILOTING
S.L. 1985
- [MARTÍNEZ-78] MARTÍNEZ JIMÉNEZ
MANUAL DE NAVEGACIÓN
HIJOS DE E. MINUESA. MADRID, 1978

- [MEDINA-78] MEDINA PERALTA, M.
ELEMENTOS DE ASTRONOMÍA DE POSICIÓN
EDITORIAL LIMUSA. MEXICO 1978
- [MENZEL-90] MENZEL, DONALD H.
GUÍA DE CAMPO DE LAS ESTRELLAS Y LOS PLANETAS DE LOS HEMISFERIOS NORTE Y SUR
OMEGA. BARCELONA, 1990
- [MILLIGAN-74] MILLIGAN, JOHN E.
CELESTIAL NAVIGATION
MARYLAND CORNELL MARITIME PRESS.
CENTREVILLE, 1974
- [MIR-82] I. BRONSHTEIN - K. SEMENDIAVEV
MANUAL DE MATEMÁTICAS PARA INGENIEROS Y ESTUDIANTES.
EDITORIAL·MIR·MOSCU. 4ª edición
- [MONPAL-70] G. MONSALVE, M.
TRAZADO GEOMÉTRICO
MANUEL SIUROT, 3. SEVILLA, 1970
- [MUELLER-69] MUELLER, I.
SPHERICAL AND PRACTICAL ASTRONOMY
Ungar Publications & Co. NEW YORK, 1969
- [NAVY.1-87] MINISTRY OF DEFENCE (NAVY)
ADMIRALTY MANUAL OF NAVIGATION
VOLUME I. New edition 1987
HER MAJESTY'S STATIONERY OFFICE. LONDON 1987

- [NAVY.2-92] MINISTRY OF DEFENCE (NAVY)
ADMIRALTY MANUAL OF NAVIGATION
VOLUME II. New edition 1973. *Fourth impression 1992*
London: HMSO.
- [NEBE-98] NEBE, WOLF
MANUAL DE NAVEGACIÓN ASTRONÓMICA
CÚPULA. BARCELONA, 1998
- [PAREDES-35] PAREDES Y CASTRO, J.
EL INDISPENSABLE DEL PILOTO
TIPOGRAFÍA CATALANA
- [PELLEQUER-98] PELLEQUER, BERNARD
GUÍA DEL CIELO
ALIANZA. MADRID, 1998
- [PIKE-95] PIKE, DAG
REED'S SEXTANT SIMPLIFIED
HAMPTON COURT THOMAS REDD, 1995
- [REY-70] REY PASTOR, J.
**LA CIENCIA Y LA TÉCNICA EN EL DESCUBRIMIENTO
DE AMÉRICA**
COLECCIÓN AUSTRAL. ESPASA CALPE, S.A. MADRID, 1970
- [RIBERA-07] RIBERA Y URUBURU
TRATADO DE NAVEGACION
IMP. Y EST. DE "EL CORREO GALLEGO". 2ª EDICIÓN
FERROL, 1907
- [RIDPATH-002] RIDPATH, IAN
ESTRELLAS Y PLANETAS
OMEGA. BACELONA, 2002

- [ROSSIGNOLI-76] JOSÉ LUIS ROSSIGNOLI JUST
**PROYECCIÓN UNIVERSAL TRANSVERSA DE
MERCATOR**
Talleres del Servicio Geográfico del Ejército. MADRID - 1976
- [ROTH-89] ROTH, GÜNTER D.
**GUÍA DE LAS ESTRELLAS Y LOS PLANETAS: SU
CONOCIMIENTO E IDENTIFICACIÓN**
OMEGA. BARCELONA, 1989
- [RUDOLF-99] RUDOLF F. GRAF
CIRCUITOS DE MEDIDA
EDITORIAL PARANINFO. MADRID, 1999
- [SACCHETTI-71] MARIO SACCHETTI
LA NAVIGAZIONE ASTRONOMICA
Manuale pratico per chi va per mare
U. MURSIA & C. MILANO. PRIMA EDIZIONE 1971
- [SELLÉS-92] MANUEL A. SELLÉS
ASTRONOMÍA Y NAVEGACIÓN EN EL SIGLO XVIII
AKAL D.L. TORREJÓN DE ARDOZ, 1992
- [SELLÉS-94] MANUEL A. SELLÉS
INSTRUMENTOS DE NAVEGACIÓN
Del Mediterráneo al Pacífico
Lunweg Editores. BARCELONA, 1994
- [SHUTE-44] WILLIAM G. SHUTE
**AN INTRODUCTION TO NAVIGATION AND NAUTICAL
ASTRONOMY**
THE MACMILLAN COMPANY. NEW YORK, 1944

- [SOBEL-98] DAVA SOBEL & WILLIAM J.H. ANDREWES
THE ILLUSTRATED LONGITUDE. The True Story of a Lone
Genius Who Solved the Greatest Scientific Problem of His Time.
Walker and Company. New York 1998
- [TIRION-002] TIRION, WIL.
ATLAS ESTELAR CAMBRIDGE
CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. MADRID, 2002
- [VIVES-71] TEODORO J. VIVES
ASTRONOMÍA DE POSICIÓN. ESPACIO Y TIEMPO.
EDITORIAL ALHAMBRA, S.A. PRIMERA EDICIÓN. MADRID,
1971
- [VORONTSOV-79] VORONTSOV - VELIAMINOV
**PROBLEMAS Y EJERCICIOS PRÁCTICOS DE
ASTRONOMÍA.**
EDITORIAL MIR. MOSCÚ, 1979

