UN PRIMER PLANTEAMIENTO DE ESTRUCTURAS DESPLEGABLES: EL CODICE I DE MADRID DE LEONARDO DA VINCI

Por JUAN PEREZ VALCARCEL
Catedrático E.T.S.A. de La Coruña
FELIX ESCRIG PALLARES
Profesor Titular E.T.S.A. de Sevilla

Cuando se plantea el problema de las estructuras desplegables se considera unánimemente como pionero de las mismas al arquitecto español Emilio Pérez Piñero. Ello es de justicia por la importantísima contribución del mismo, pero es posible encontrar algunas referencias anteriores. Incluso en la antigüedad es posible encontrar descripciones literarias de mecanismos que pudieran ser asimilados a estructuras desplegables de barras, pero en todo caso sin posibilidad de confirmación cierta.

Por ello el descubrimiento de una referencia clara de este sistema en uno de los Códices de Leonardo da Vinci permite retrotraer al Renacimiento la primera confirmación del diseño de dichas estructuras. En efecto, en el folio 24 verso del Códice I de Madrid, depositado en la Biblioteca Nacional, puede observarse un mecanismo plano de aspas (figura 1) con la siguiente leyenda «Rendimi ragione che forza debbe essere in m a llevare 4 libre in n» (Dame razón de la fuerza requerida en m para levantar 4 libras en n). En el folio 25 recto (situado a la derecha del anterior) puede observarse un interesante mecanismo de despliegue de una estructura tipo sombrilla (figura 2). Sin embargo ésta es una figura aislada dentro del manuscrito y carece de cualquier comentario, por lo que no pueden hacerse conjeturas sobre su significado.

Por último, en el folio 143 verso vuelve a reproducirse el mismo mecanismo de aspas (figura 3) bajo dos interesantes sistemas de engranaje con tornillo sinfin con dos pasos distintos al que nos referiremos posteriormente.

El mecanismo de elevación que describe Leonardo no es particularmente efectivo, pero es la primera referencia explícita de una estructura desplegable plana. Tiene por consiguiente un gran interés histórico, pero además puede proporcionarnos una serie de datos sobre los conocimientos de estática de los que disponía Leonardo.

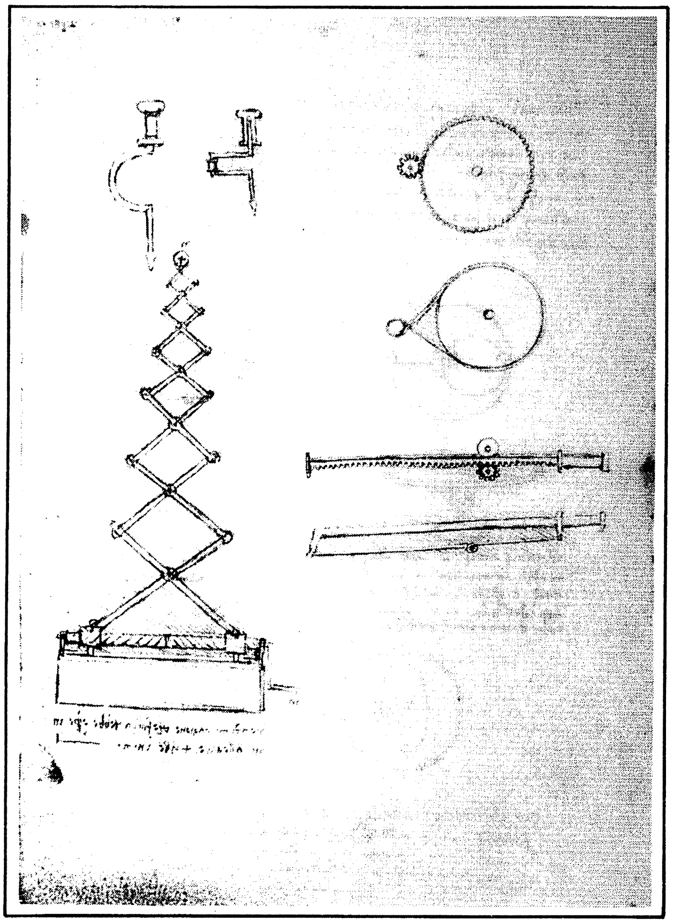


Fig. 1.—**Folio 24 verso:** MECANISMO PLANO DESPLEGABLE DE ASPAS QUE PUEDE ABRIRSE Y CERRARSE CON UN DOBLE TORNILLO.

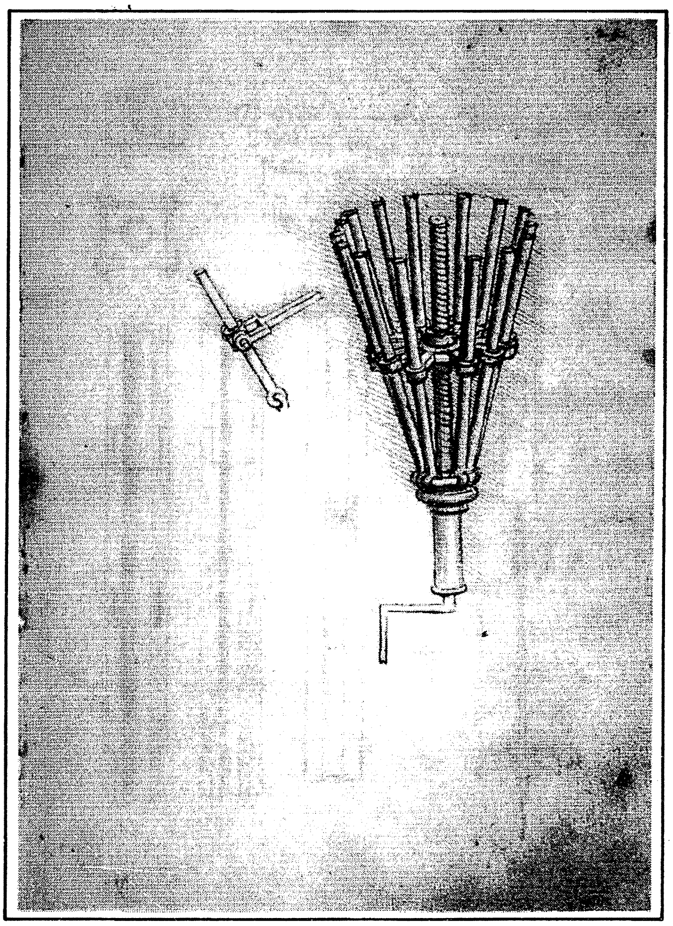


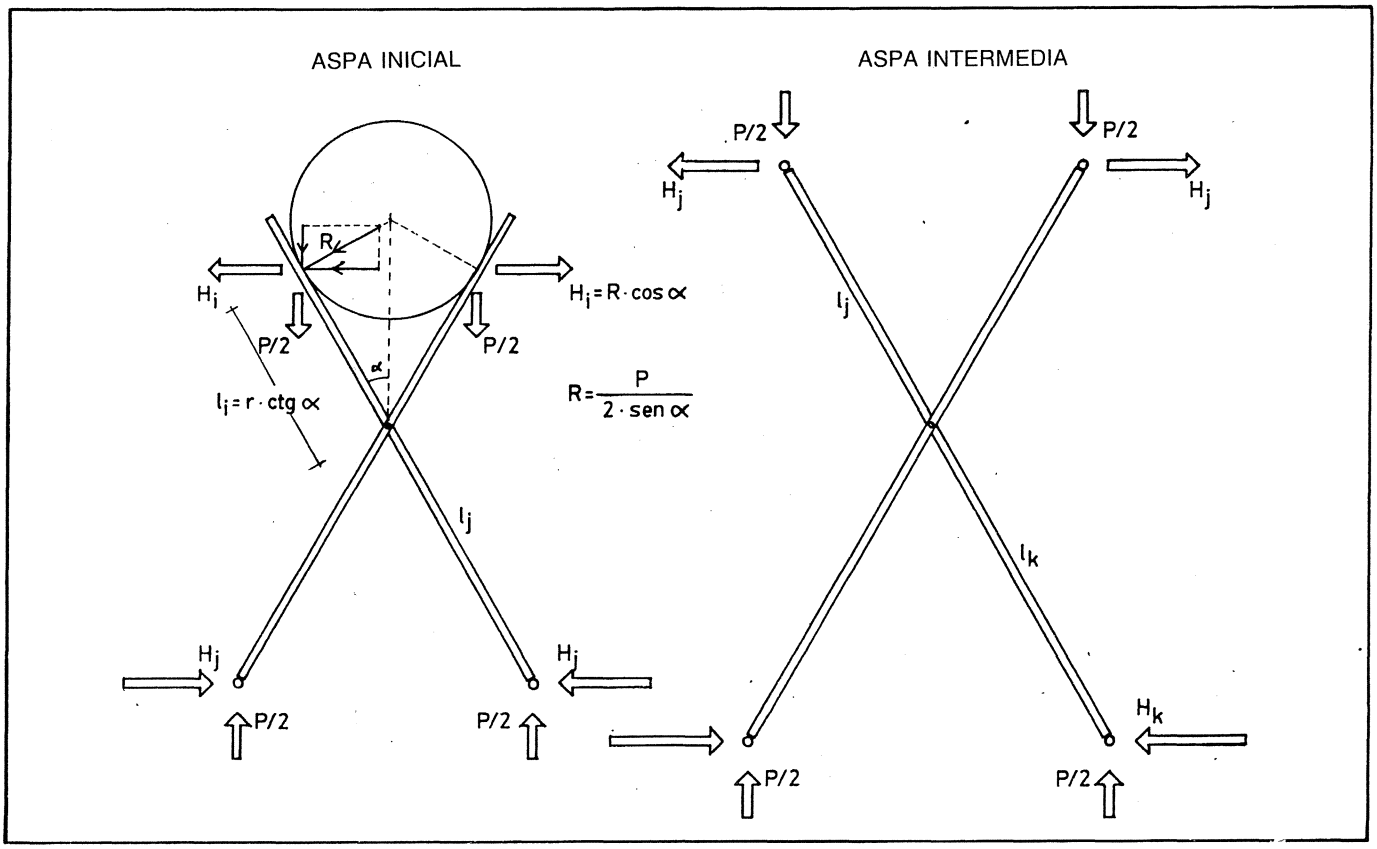
Fig. 2.—**Folio 25 recto:** MECANISMO DE DESPLIEGUE DE UNA ESTRUCTURA TIPO SOMBRILLA. LAS VARILLAS DESLIZAN SOBRE UNOS ANILLOS Y APARTE SE DA OTRA SOLUCION CON BIELAS QUE PROBABLEMENTE FUNCIONARIA MEJOR.

La primera consideración que debe hacerse es si realmente Leonardo sabía resolver el problema o se limitó a plantearlo a la espera de poderlo resolver en el futuro. Creemos que esta segunda posibilidad es la cierta. En otros lugares de este manuscrito se plantean cuestiones tan complejas como el cálculo de las flechas de vigas, un problema no resoluble con los recursos matemáticos de la época y sin embargo Leonardo aporta un notable avance, no analítico sino en la experimentación y hace constar expresamente los resultados de sus experiencias. Los abundantes estudios sobre equilibrio de pesos suspendidos de hilos a los que nos referiremos inmediatamente, están siempre resueltos numéricamente. Es interesante resaltar que en este Códice figuran casi exclusivamente resultados. Mientras en otros Códices como el Hammer figuran explicaciones y demostraciones y en otros como el Códice II de Madrid (con seguridad escrito en otra época) operaciones aritméticas pormenorizadas, en el que comentamos figuran sobre todo resultados, con explicaciones concisas y ajustadas. En este contexto es seguro que si Leonardo sabía la forma de resolución del problema lo hubiese indicado con los resultados del mismo o al menos con una nota aclaratoria.

La segunda consideración se refiere a si Leonardo realizó algún modelo experimental del citado mecanismo. Tampoco esto es probable. De haberlo hecho habría tenido que darse cuenta de la enorme diferencia de la fuerza a aplicar entre el instante en el que el mecanismo está plegado y el de completo despliegue. Creemos que en este caso no hubiera dejado de hacerlo notar. Sin embargo es curioso que el mecanismo esté dibujado en una posición de despliegue a 45°, que es la única de resolución sencilla.

Dando por supuesto que Leonardo no pudo resolver el problema, puede ser interesante tratar de resolverlo con los medios actuales, para poder estudiar las dificultades que presenta y que pudiesen ser insuperables en la época.

El mecanismo descrito por Leonardo recibe la carga por medio de una bola o rodillo. Considerando que la acción se ejerce en el punto de tangencia las ecuaciones de equilibrio serán:



Tomando momentos respecto a la articulación central

$$H_i\, l_i \cos\alpha \;+\; P/2\; l_i \operatorname{sen}\alpha \;+\; P/2 \operatorname{sen}\alpha \;-\; H_j\, l_j \cos\alpha \;=\; 0$$

Dado que el dibujo que citamos no presenta ninguna indicación de escala se han supuesto las siguientes longitudes de los sucesivos tramos de barras:

l_1 = 0,9125 m	l_2 = 0,700 m
l_3 = 0,550 m	l_4 = 0,425 m
l_5 = 0,3375 m	l_6 = 0,2625 m
l_7 = 0,200 m	l_8 = 0,1625 m

Tampoco se indica el material, pero la forma de las articulaciones sugiere una barra de sección cuadrada de hierro forjado, en la que se hubieran aplastado los extremos y la zona central y colocado pasadores. Consideramos como sección tipo la de 2 × 2 cm.

En estas condiciones se ha efectuado un cálculo por equilibrio, suponiendo diámetros del peso de 5, 10 y 15 cm. y separación variable de los apoyos. Dado que nuestras investigaciones en el terreno de las estructuras desplegables de barras, nos muestran que el efecto de las grandes flechas que se producen en las mismas puede tener cierta importancia, hemos repetido los cálculos considerando los efectos no lineales por el método matricial, pero limitándonos a un diámetro de bola de 10 cm., puesto que el cálculo por equilibrio muestra la escasa incidencia de esta variable, al menos en las proporciones de barras y bola que plantea Leonardo. El siguiente cuadro muestra los resultados de las reacciones horizontales sobre las articulaciones de apoyo, en función de la separación entre dichas articulaciones. El peso actuante se supone de 4 lb y las reacciones se obtienen en dicha unidad.

Fig. 3.—**Folio 143 verso:** NUEVO ESQUEMA DE MECANISMO CON ASPAS. ES MUY INTERESANTE LA FIGURA CENTRAL DERECHA QUE SUGIERE UNA SOLUCION AL PROBLEMA DE LAS REACCIONES DE UNA BOLA SOBRE UN PLANO INCLINADO. SIN EMBARGO, DE TRATARSE DE ELLO, SERIA INCORRECTA.

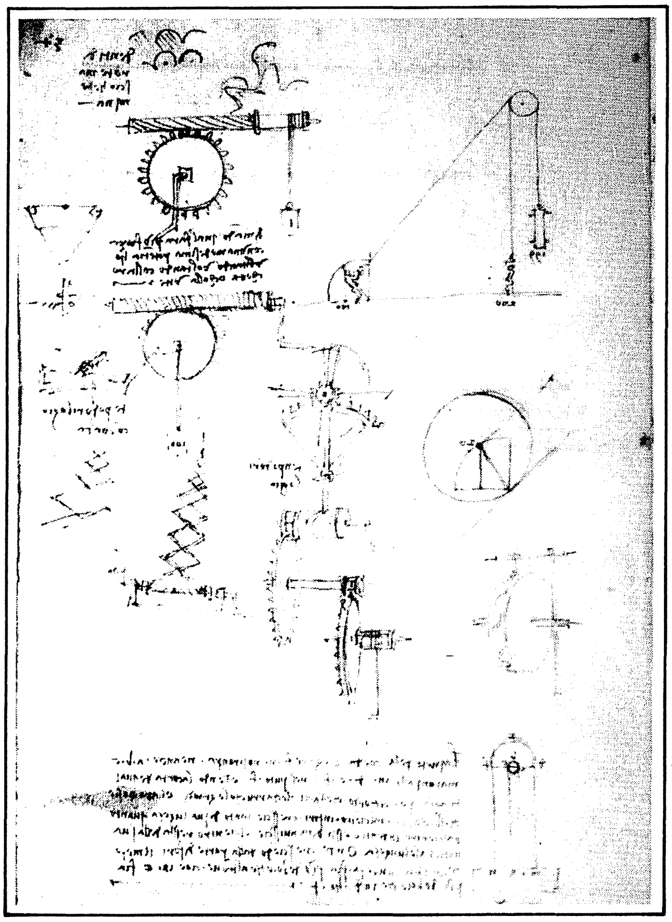
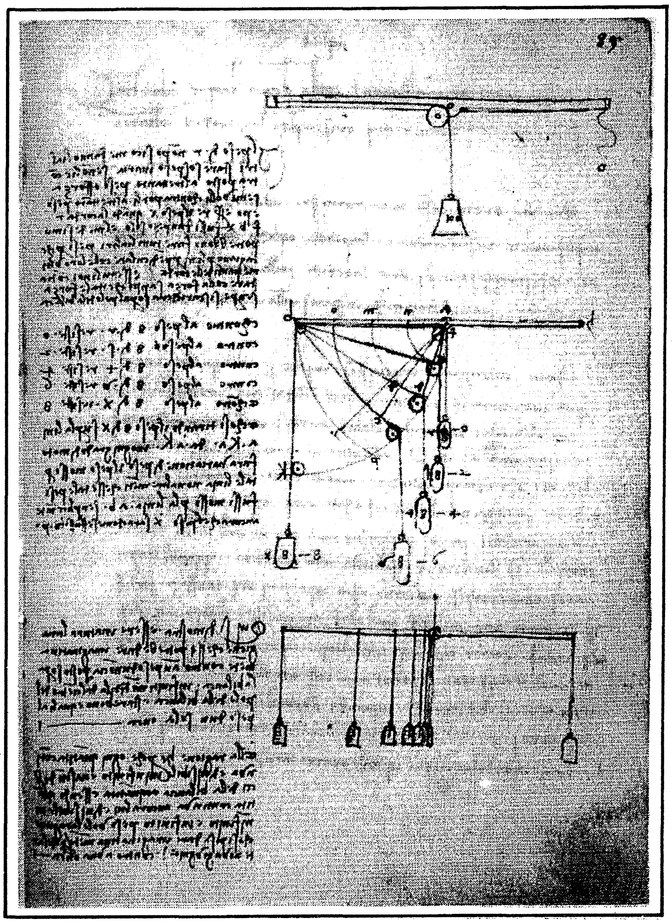


Fig. 4.—**Folio 89 recto:** SON ESTUDIOS TOTALMENTE CORRECTOS SOBRE LA LEY DE LA PALANCA.



	CALCULO LINEAL			CALCULO NO LINEAL
Separación apoyo	Ø = 5 cm.	Ø = 10 cm.	Ø = 15 cm.	Ø = 10 cm.
d = 1,8 m	76,94	77,05	77,16	78,1
d = 1,7 m	33,03	33,16	33,28	33,26
d = 1,6 m	23,56	23,70	23,84	23,71
d = 1,5 m	18,70	18,86	19,02	18,75
d = 1,4 m	15,55	15,73	15,92	15,62
d = 1,3 m	13,25	13,47	13,69	13,30
d = 1,2 m	11,46	11,72	11,97	11,52
d = 1,1 m	10,01	10,31	10,61	10,05
d = 1,0 m	8,78	9,14	9,51	8,83
d = 0,75 m	6,44	7,09	7,74	6,47

A la vista de estos resultados, la primera conclusión es la escasa efectividad del mecanismo. En efecto, en posición casi plegada es preciso un esfuerzo de aproximadamente 77 libras para levantar las 4 que proponía Leonardo. Este esfuerzo varía en función de la tangente a medida que el mecanismo se va desplegando. Por otra parte, puede observarse que los efectos no lineales, que en época de Leonardo eran totalmente desconocidos (aunque en este mismo Códice se dan algunas referencias cualitativas al fenómeno del pandeo), tienen, para las dimensiones y cargas supuestas, una escasa repercusión, por lo que un supuesto mecanismo construido por Leonardo apenas hubiera discrepado de los resultados de un cálculo por equilibrio, teóricamente posible.

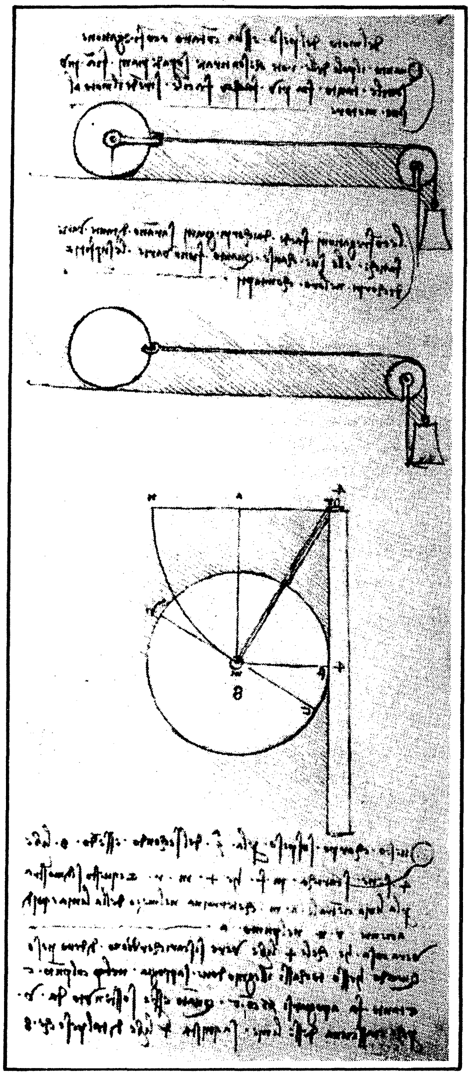
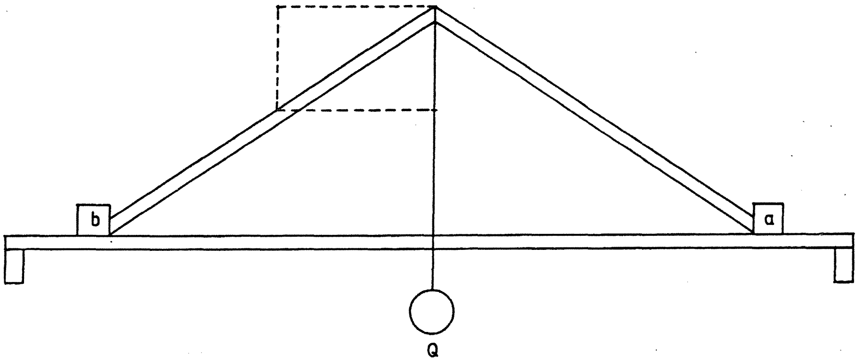


Fig. 5.—**Folio 65 recto:** LA FIGURA INFERIOR DA UNA SOLUCION INCORRECTA AL PROBLEMA DE LAS REACCIONES DE UNA BOLA. LAS DOS FIGURAS SUPERIORES MUESTRAN ASPECTOS DEL ROZAMIENTO.



Analicemos brevemente este cálculo por equilibrio a la luz de los conocimientos de la época. En nuestro razonamiento hemos utilizado una serie de conceptos, ahora habituales, pero que a principios del siglo XVI se suponen desconocidos: Descomposición de fuerzas en dos direcciones, ecuaciones de equilibrio y conceptos de trigonometría. Este último aspecto puede ser soslayado por medio de relaciones de semejanza, por lo que resulta irrelevante. Por otra parte, el mecanismo descrito se compone de una serie de palancas, cuyas leyes ya fueron establecidas por Arquímedes y que fueron sobradamente conocidas por los científicos medievales. En este Códice figuran numerosas figuras y mecanismos que prueban sin lugar a dudas la autoridad de Leonardo en la materia. Especialmente interesante es el folio 89 recto (figura 4) en el que se plantea de forma totalmente correcta el problema, incluso utilizando un razonamiento que hace pensar en el concepto actual de momento de una fuerza. Así pues, el uso de las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos puede en este caso sustituirse por la ley de la palanca, por lo que estaba claramente al alcance de Leonardo.

La consideración de un diámetro no puntual en el peso complica el problema, aun afectando poco a los resultados. El mismo Leonardo se planteó en este Códice el problema de las reacciones de una bola en distintos lugares del manuscrito. Especialmente interesante es la figura 5 correspondiente al folio 65 recto. El comentario es: «Este cuerpo suspendido por la 5.ª del segundo, como pesa 8 libras, 4 se descargan en f y 4 en r. Y eso se demuestra mediante la línea central am, que termina en el centro de la línea horizontal rn en el punto a...». Realmente es un párrafo poco afortunado: No sólo el resultado no es correcto sino que la demostración muestra una falta de claridad conceptual que se contradice con los estudios sobre el equilibrio de hilos que figuran en este mismo Códice, mucho más correctos y hace pensar que el problema de las cargas no puntuales no estaba muy avanzado en su resolución.

La consideración de la carga como puntual, que dada la escala del dibujo es lógica, permitiría resolver el problema sin más que descomponer la carga en las direcciones de las barras de la primera aspa y luego aplicar sucesivamente la ley de la palanca.

Por tanto, la única duda en el razonamiento anterior es si Leonardo conoció o no la regla del paralelogramo que permite descomponer una fuerza en dos direcciones. Respecto de este punto la crítica histórica es contradictoria. Se sabe con toda seguridad que Pierre Varignon formuló en 1725 la regla del paralelogramo en forma explícita. Hasta entonces parece que esta regla había sido intuida por muchos autores anteriores a él, uno de los cuales fue Leonardo. Basándose en la figura 6, que cita sin haber estudiado el manuscrito, Timoshenko afirma que con seguridad conocía dicha ley. Sin embargo, nuestras investigaciones en el Códice I de Madrid, que probablemente sea el más completo en esta materia, nos hacen ser cautos.

En la figura 7 se reproduce el folio 77 recto del Códice I y la figura 8 da su transcripción y la interpretación del dibujo. Aplicando las leyes de equilibrio a los hilos puede demostrarse (y por cierto de forma nada trivial) que las reglas que propone Leonardo «Experimentadas y es regla general» son totalmente correctas. Es realmente sorprendente por cuanto no da una explicación de la línea de razonamiento utilizada, son de difícil aplicación práctica y su demostración exige recursos matemáticos que con seguridad no estaban disponibles en esta época.

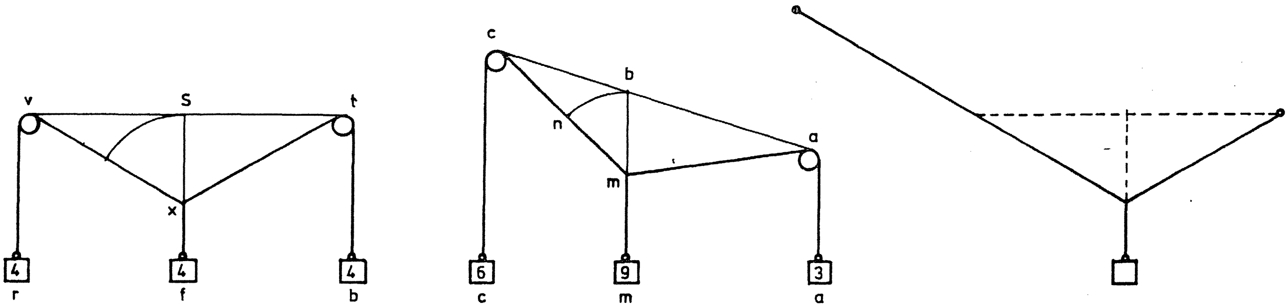


Fig. 8.—**Transcripción del folio 77 recto:**
Experimentadas y es regla general:
*Entre **tS** y **Sv** habrá la misma proporción que la que encontrarás que hay entre el peso **b** y el peso **r**. Y la proporción entre el peso **f** y los pesos **b** y **r** juntos será la misma que hay entre la distancia **xv** y la línea **Sx**.*

*Entre el peso **c** y el peso que actúa en **a** existirá la misma proporción que la que hay entre la distancia **ab** y la distancia **bc**. De la misma manera, la proporción que hay entre el peso **m** y los pesos **a c** juntos, será la misma que la que hay entre la línea **bm** y la línea **mc**.*

No olvides que las 2 cuerdas que sostienen el peso deben siempre ser iguales. Si una fuese infinitamente más larga que la otra, tomarás igualmente tu medida equidistante del lugar donde se une la cuerda al peso, y con tales medidas harás tus cálculos como te dije arriba y tendrás una regla general.

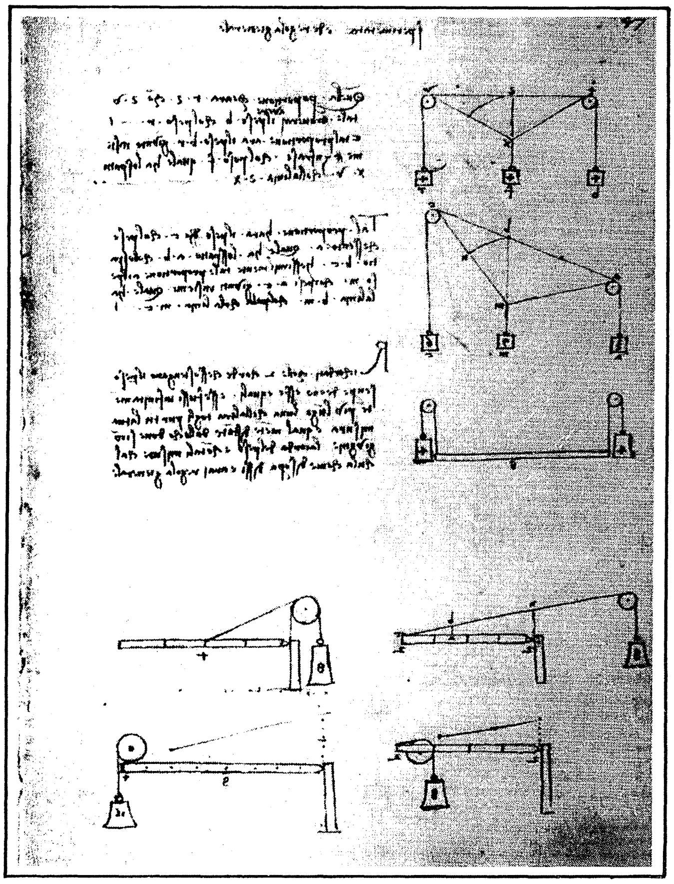


Fig. 7.—**Folio 77 recto:** LAS TRES FIGURAS SUPERIORES Y SU COMENTARIO DAN LA REGLA PARA CALCULAR LAS REACCIONES DE LOS HILOS. LAS FIGURAS INFERIORES SON EJEMPLOS DE PALANCAS.

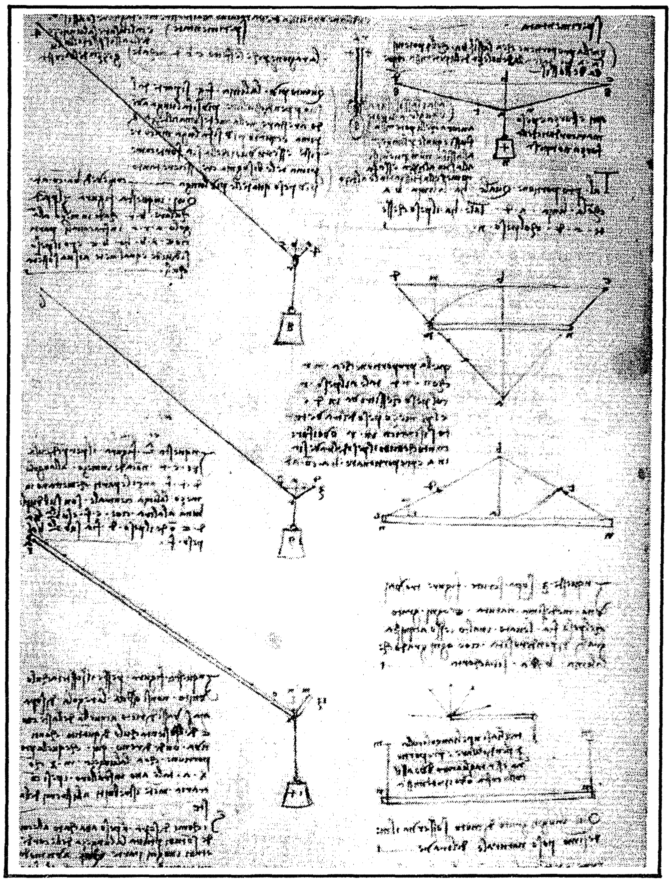


Fig. 9.—**Folio 77 verso:** DISTINTOS EJEMPLOS DEL CALCULO DE LAS TENSIONES EN HILOS.

En los siguientes folios 77 verso y 78 recto, reproducidos en las figuras 9 y 10, pueden verse distintas construcciones en las que se aplica este principio general.

Sin embargo, una vez conseguida esta notabilísima regla general, en el resto del Códice la aplica a una serie de casos particulares, los únicos que considera dignos de atención, que son aquellos que pueden ser resueltos con números enteros o fraccionarios sencillos. Es especialmente notable la construcción de la figura 11 (folio 156 recto). Representa un peso colgado de un hilo y equilibrado por otros dos que actúan a través de dos poleas. La construcción geométrica permite dibujar ángulos cuyo coseno sea un número fraccionario, en el caso de la figura $\cos \alpha = 3/4$. La tensión en el hilo y por tanto el contrapeso necesario sería 12,09, es decir, aproximadamente el valor que da Leonardo: 12 (por cierto escrito encima de otro resultado, supuestamente erróneo, inidentificable).

Pero lo más curioso del caso es que hay pocos valores racionales del coseno que permitan valores enteros o casi enteros. En un entorno razonable de valores sólo 3/5 y 4/5 que corresponden al triángulo egipcio, sobradamente conocido en la época, permiten valores enteros de la tensión. El valor señalado 3/4 permite un valor casi entero y es seguro que llamó tanto su atención que lo describe con un detalle que no repite en ningún otro. En cuanto a los ángulos de construcción geométrica sencilla sólo 30° permite valores enteros y 15° valores casi enteros. Pues bien, éstos son los casos que podemos encontrar en los folios de este Códice.

La conclusión es que efectivamente Leonardo realizó numerosos experimentos con hilos, que le permitieron incluso encontrar un caso difícilmente intuible como el que hemos citado. Prácticamente todos aquellos casos en los que era posible la solución entera pudo resolverlos correctamente. También fue capaz de lograr una regla general, admirable en cuanto al ingenio demostrado, pero

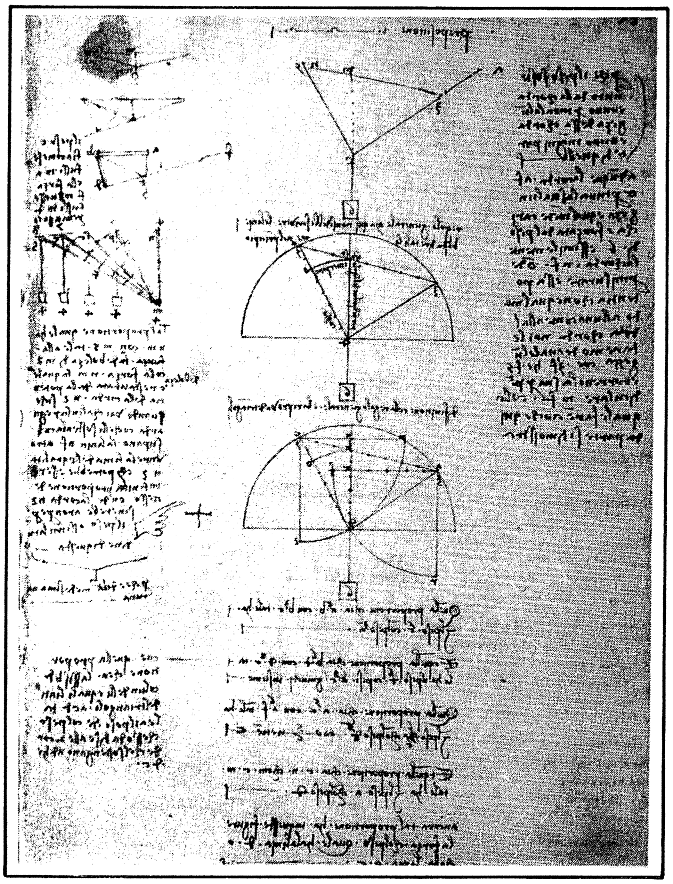


Fig. 10.—**Folio 78 recto:** DISTINTOS EJEMPLOS DE LA REGLA PROPUESTA PARA EL CALCULO DE TENSIONES EN HILOS.

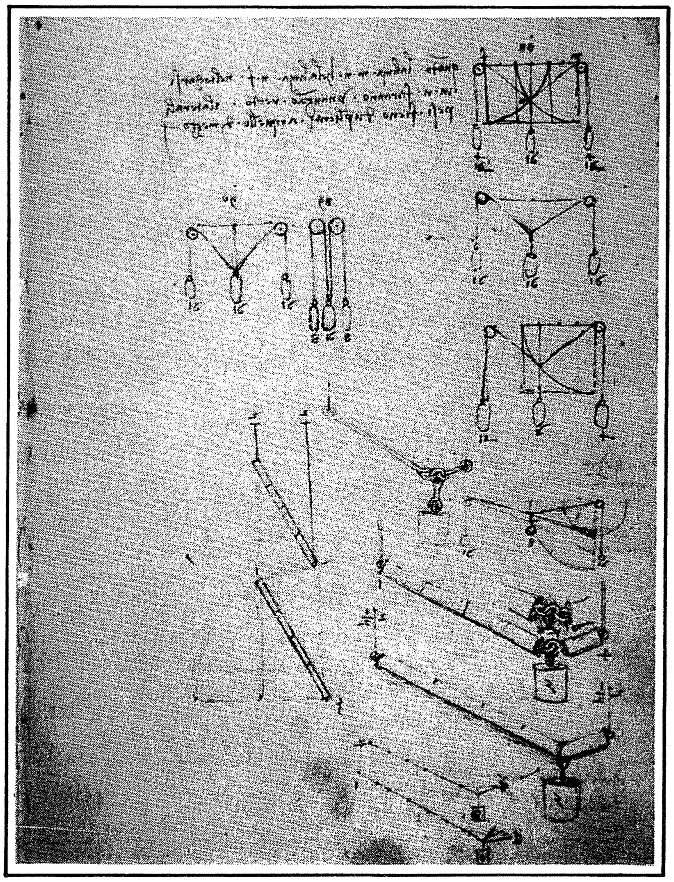


Fig. 11.—**Folio 156 recto:** LA FIGURA CITADA EN EL TEXTO ES LA SUPERIOR. HAY VARIOS EJEMPLOS EN LOS QUE LAS SOLUCIONES SON ENTERAS.

por desgracia de difícil aplicación. Con ella pudo resolver correctamente los problemas de equilibrio de hilos, pero no logró resolver el problema de las reacciones de un peso colgado, como ya hemos señalado. Curiosamente la solución estaba a su alcance, pero no hay indicios de que haya generalizado la descomposición de fuerzas cuando no están materializadas por hilos, que es el paso previo.

El resto del problema hubiera sido claramente abordable por Leonardo. En efecto, una vez conocida la fuerza precisa para levantar el mecanismo, la fuerza a aplicar en la manivela se podría determinar por dos leyes conocidas, la ley del torno y la ley del tornillo, cuya equivalencia con el plano inclinado parece ser conocida desde la Antiguëdad. Las figuras 12 y 13 muestran con todas claridad los conocimientos de Leonardo en la materia.

Todo lo anterior muestra que los conocimientos precisos para resolver el problema estaban disponibles, pero posiblemente la autolimitación de intentar soluciones enteras, por otra parte muy lógica en la época, impidió el avance por el camino correcto. La contestación a la pregunta-reto de Leonardo «rendimi ragione che forza debbe essere in m a llevare 4 libre in n» debiera ser «una fuerza variable con la razón entre la anchura y la altura de cada tramo de las aspas (tangente del ángulo) y que depende además del diámetro del peso, del paso del tornillo, del diámetro de la manivela y de una serie de efectos desconocidos en la época que son los efectos no lineales. Además sólo será entera para unos pocos ángulos que no son fácilmente construibles». Estamos seguros que a Leonardo no le hubiera gustado nuestra contestación.

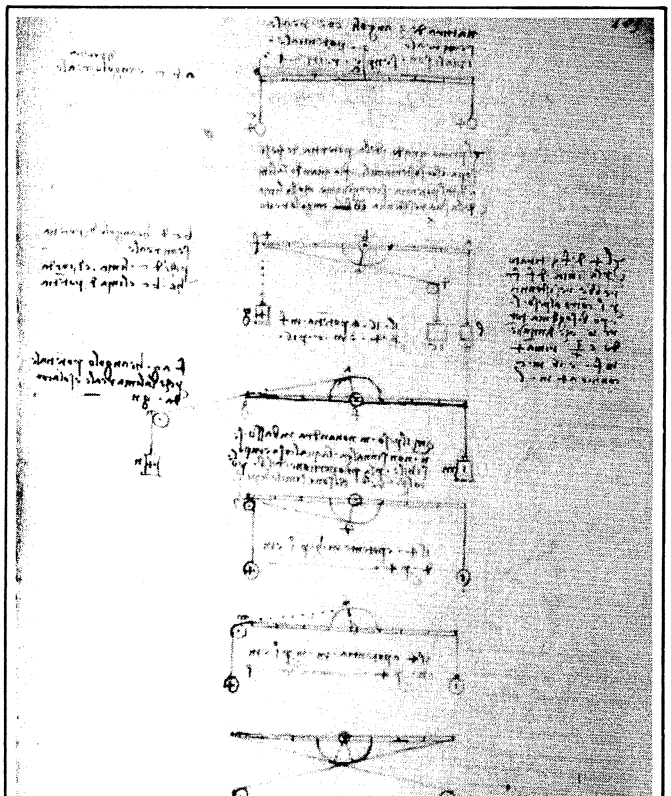


Fig. 12.—**Folio 109 recto:** DISTINTOS EJEMPLOS EN LOS QUE SE APLICA UN CONCEPTO EQUIVALENTE AL DE MOMENTO DE UNA FUERZA.

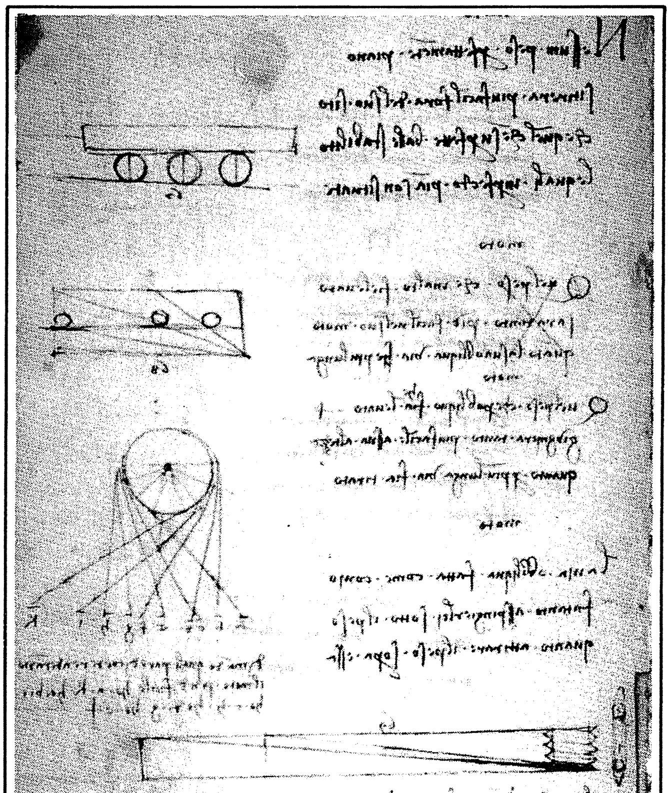


Fig. 13.—**Folio 156 verso:** EN LA FIGURA ANTERIOR SE PLANTEA LA EQUIVALENCIA ENTRE EL TORNILLO Y EL PLANO INCLINADO.