

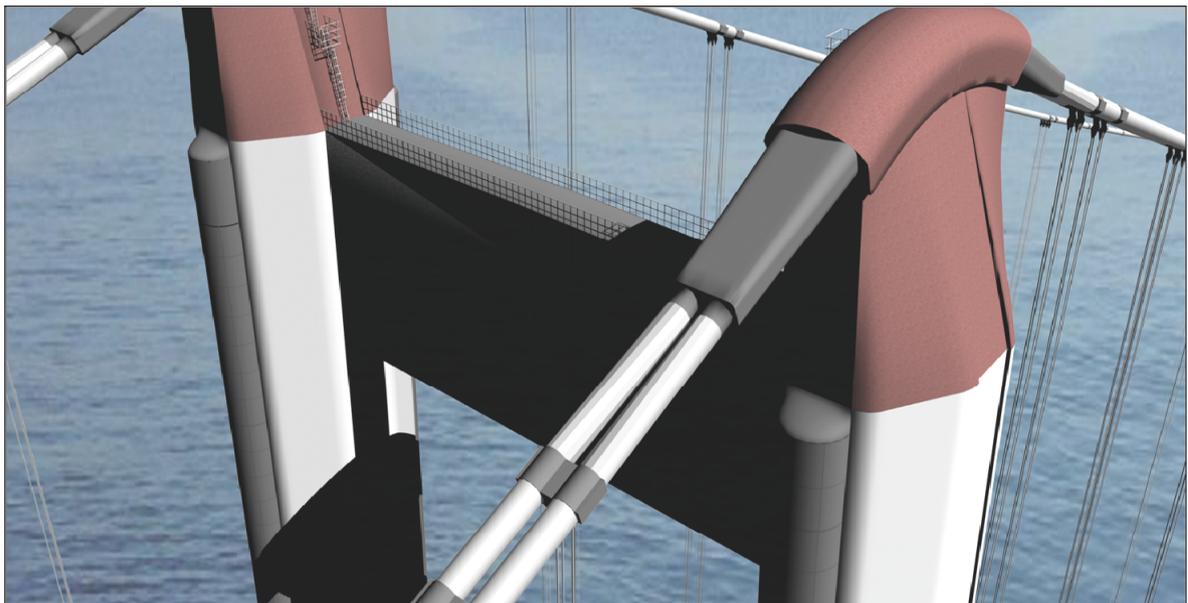


UNIVERSIDADE DA CORUÑA



**ESCOLA TÉCNICA SUPERIOR DE ENXEÑEIROS
DE CAMIÑOS, CANAIS E PORTOS**

**ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD Y OPTIMIZACIÓN
AEROELÁSTICA DE PUENTES COLGANTES EN
ENTORNOS DE COMPUTACIÓN DISTRIBUIDA**



Tesis Doctoral presentada por:

FÉLIX NIETO MOURONTE

Dirigida por:

SANTIAGO HERNÁNDEZ IBÁÑEZ

JOSÉ ÁNGEL JURADO ALBARRACÍN-MARTINÓN

A Coruña, Marzo de 2006

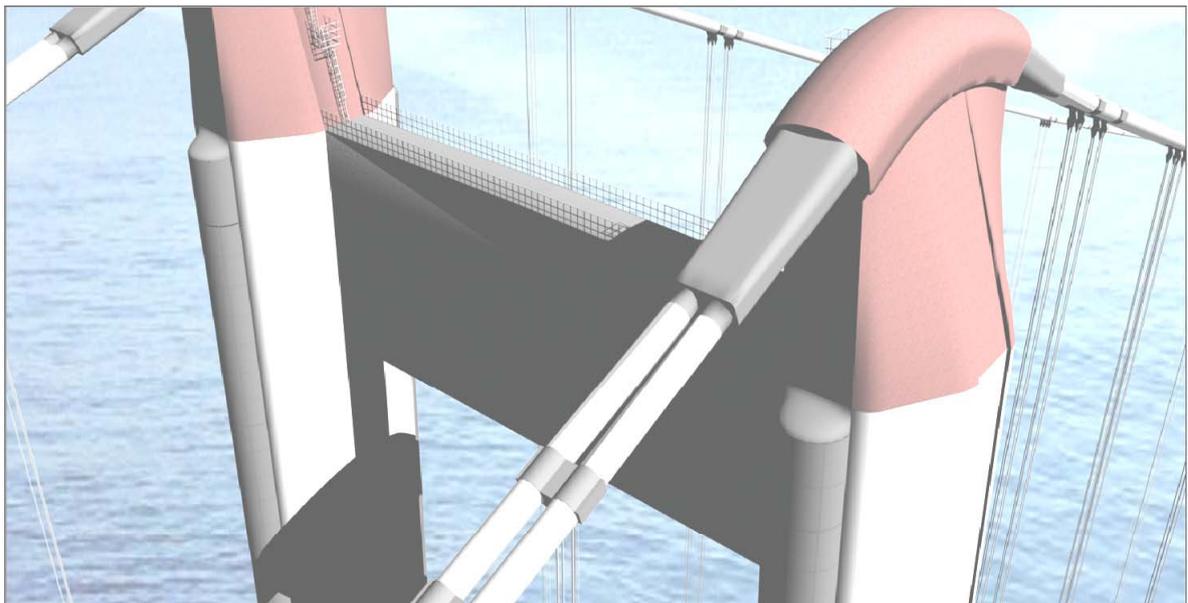


UNIVERSIDADE DA CORUÑA



**ESCOLA TÉCNICA SUPERIOR DE ENXEÑEIROS
DE CAMIÑOS, CANAIS E PORTOS**

**ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD Y OPTIMIZACIÓN
AEROELÁSTICA DE PUENTES COLGANTES EN
ENTORNOS DE COMPUTACIÓN DISTRIBUIDA**



Tesis Doctoral presentada por:

FÉLIX NIETO MOURONTE

Dirigida por:

SANTIAGO HERNÁNDEZ IBÁÑEZ

JOSÉ ÁNGEL JURADO ALBARRACÍN-MARTINÓN

A Coruña, Marzo de 2006

AGRADECIMIENTOS

A Santiago Hernández y José Ángel Jurado. El rigor y la honestidad intelectual que impregnan su labor científica y docente han sido un ejemplo impagable para mí. Sus enseñanzas me acompañarán toda la vida.

A Patricia, inseparable compañera desde hace tanto tiempo. Sin ella algunas cosas serían parecidas y otras muy distintas, pero, sin duda, todas ellas serían un poco peores. No se imagina hasta qué punto este trabajo también ha sido obra suya.

A mis padres, Manuel y Julia, por tantos años de desvelos, preocupaciones y cuidados. Y por los momentos dulces. Que no duden ni por un instante que ha merecido la pena.

A mi hermano Carlos, al que siendo el menor, quiero y admiro como a un hermano mayor.

A Alejandro Mosquera, compañero de promoción y de despacho, al que tan buenos consejos le debo. A Chiqui, Arturo y Jacobo, en los que siempre he encontrado compañerismo y ayuda.

A todos ellos les quiero expresar mi más profunda y sincera gratitud.

A Patricia

ÍNDICE

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD Y OPTIMIZACIÓN AEROELÁSTICA DE PUENTES COLGANTES EN ENTORNOS DE COMPUTACIÓN DISTRIBUIDA

CAPÍTULO 1

<i>INTRODUCCIÓN</i>	13
1.1 Motivación y objetivos.....	13
1.2 Organización de la Memoria-Tesis.....	18

CAPÍTULO 2

<i>EL FLAMEO EN PUENTES DE GRAN VANO</i>	21
2.1 Concepto de aeroelasticidad. Fenómenos aeroelásticos.....	21
2.2 Metodologías para el estudio del flameo.....	29
2.3 Métodos basados en CFD.....	34
2.4 Métodos experimentales.....	42
2.5 Métodos híbridos.....	48
2.5.1 Fase experimental. Ensayo de modelos seccionales de puentes...	48
2.5.1.1 Ensayo aerodinámico.....	50
2.5.1.2 Ensayo aeroelástico.....	55
2.5.2 Fase computacional. Cálculo de la velocidad de flameo.....	59
2.6 Referencias.....	74

CAPÍTULO 3
DISEÑO ÓPTIMO DE PUENTES INCLUYENDO SEGURIDAD

FRENTE A FLAMEO.....	83
3.1 Introducción.....	83
3.2 Metodología convencional de diseño.....	84
3.3 Análisis de sensibilidad.....	85
3.4 Mejora de los análisis de sensibilidad de los parámetros de flameo.....	88
3.5 Formulación del diseño óptimo en ingeniería.....	89
3.6 Optimización de puentes de cables incluyendo condiciones aeroelásticas	93
3.7 Métodos de optimización.....	100
3.7.1 Programación matemática. Problemas lineales.....	100
3.7.2 Programación matemática. Problemas no lineales.....	102
3.7.2.1 Métodos de la función penalty.....	102
3.7.2.2 Método de las direcciones eficientes.....	106
3.7.2.3 Métodos duales.....	107
3.7.2.4 Métodos basados en técnicas de aproximación.....	111
3.7.3 Algoritmos genéticos.....	111
3.7.4 Métodos de perturbaciones. Recocido simulado (<i>simulated annealing</i>).....	116
3.7.5 Método seleccionado.....	120
3.8 Referencias.....	122

CAPÍTULO 4
ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DEL FLAMEO CON MASA

VARIABLE.....	129
4.1 Introducción.....	129
4.1.1 Conceptos de cálculo matricial de estructuras.....	131
4.1.1.1 Teoría lineal.....	131
4.1.1.2 Teoría de segundo orden.....	135
4.1.2 Frecuencias naturales y modos propios de vibración.....	138

4.2	Análisis de sensibilidad de frecuencias y modos propios de vibración.....	144
4.2.1	Elección de las variables de diseño.....	149
4.2.2	Análisis de sensibilidad en teoría lineal.....	151
4.2.3	Análisis de sensibilidad en teoría de segundo orden.....	154
4.3	Análisis de sensibilidad de los parámetros de flameo de puentes de cables.....	159
4.3.1	Obtención de la velocidad de flameo.....	160
4.3.2	Análisis de sensibilidad.....	163
4.3.2.1	Variables de diseño.....	166
4.3.2.2	Obtención de $\partial A/\partial x$	168
4.3.2.3	Obtención de $\partial A/\partial U_f$	170
4.3.2.4	Obtención de $\partial A/\partial K_f$	172
4.3.3	Análisis de sensibilidad de la respuesta aeroelástica en estructuras con masa variable.....	175
4.3.4	Interpretación de los análisis de sensibilidad.....	179
4.4	Referencias.....	183

CAPÍTULO 5

CONCEPTOS DE PROGRAMACIÓN DISTRIBUIDA. CÓDIGO

	<i>DIOPTICA</i>	189
5.1	Introducción.....	189
5.2	Programación en paralelo frente a programación secuencial.....	198
5.3	Principios de diseño de algoritmos en paralelo.....	201
5.4	Tipos de computadoras en paralelo.....	202
5.5	Ordenadores interconectados formando una plataforma de computación o <i>clusters</i>	206
5.6	Potencial de aumento de la velocidad de computación.....	209
5.6.1	Factor de aceleración.....	209
5.6.2	Eficiencia.....	210

5.6.3	Valor máximo de la aceleración.....	210
5.7	El programa DIOPTICA.....	212
5.7.1	Programación distribuida en el programa DIOPTICA.....	233
5.8	Referencias.....	236

CAPÍTULO 6

EJEMPLOS DE ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE LA

RESPUESTA AEROELÁSTICA..... 241

6.1	Introducción.....	241
6.2	Ejemplo 1. Puente colgante sobre el estrecho del Great Belt.....	243
6.2.1	Análisis de la vibración libre.....	245
6.2.2	Análisis de sensibilidad de la vibración libre.....	253
6.2.3	Análisis aeroelástico.....	270
6.2.4	Análisis de sensibilidad de la respuesta aeroelástica.....	276
6.2.5	Estudio comparativo empleando un número de modos de vibración creciente.....	280
6.2.6	Interpretación de los análisis de sensibilidad.....	284
6.3	Ejemplo 2. Puente colgante sobre el estrecho de Messina.....	288
6.3.1	Análisis de la vibración libre.....	296
6.3.2	Análisis de sensibilidad de la vibración libre.....	303
6.3.3	Análisis aeroelástico.....	337
6.3.4	Análisis de sensibilidad de la respuesta aeroelástica respecto a las propiedades mecánicas de los cajones.....	344
6.3.5	Análisis de sensibilidad de la respuesta aeroelástica respecto a los espesores.....	353
6.4	Referencias.....	367

CAPÍTULO 7

EJEMPLO DE DISEÑO ÓPTIMO CONSIDERANDO

CONDICIONES AEROELÁSTICAS..... 369

7.1	Introducción.....	369
-----	-------------------	-----

7.2	Diseño óptimo del puente sobre el estrecho de Messina considerando condiciones aeroelásticas y cinemáticas.....	373
7.2.1	Formulación del problema de optimización.....	380
7.2.2	Problema C: Optimización considerando como variables de diseño los espesores del cajón central.....	382
7.2.3	Problema L: Optimización considerando como variables de diseño los espesores de los cajones laterales.....	388
7.2.4	Problema CL: Optimización considerando como variables de diseño los espesores del cajón central y de los cajones laterales...	392
7.3	Referencias.....	399

CAPÍTULO 8

	<i>CONCLUSIONES</i>	403
8.1	Conclusiones generales.....	403
8.2	Conclusiones relativas a los análisis de sensibilidad.....	406
8.2.1	Conclusiones metodológicas.....	406
8.2.2	Conclusiones relativas a los ejemplos de aplicación.....	407
8.3	Conclusiones relativas al diseño óptimo.....	408
8.4	Líneas de investigación futuras.....	409

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

“Writing a book such as this is like going on a journey of discovery...so I have credited the invaluable records of more...detailed and specific travellers....”

(David J. Brown, Bridges. Three Thousand Years of Defying Nature)

1.1 MOTIVACIÓN Y OBJETIVOS

Los puentes colgantes son testigos y parte de la historia de la humanidad desde hace siglos. Sin embargo, el concepto moderno de puente colgante arranca en el siglo XIX, durante la revolución industrial, gracias al ingenio de pioneros como Finley, Brown, Telford, Brunel, Roebling o Ellet. El tiempo transcurrido ha sido suficiente para que esta tipología estructural presente cicatrices, algunas de ellas ciertamente dolorosas, como los colapsos de los puentes de Brighton en 1836, del estrecho de Menai en 1839, de Wheeling en 1854 y el más conocido del puente sobre el estrecho de Tacoma en 1940. Todos los accidentes mencionados tienen un origen común: la acción del viento, que no pudo ser adecuadamente resistida por la estructura. El nivel científico y tecnológico que la ingeniería civil ha alcanzado permite en la actualidad garantizar la seguridad de este tipo de estructuras frente a las acciones ambientales, lo que es síntoma de un entendimiento profundo, que no total, de los fenómenos que entran en juego en estas estructuras.

La destrucción del puente sobre el estrecho de Tacoma dio lugar a un periodo de intensa actividad investigadora que representó el acta fundacional de la aeroelasticidad en la ingeniería civil. Es esta la disciplina que estudia el comportamiento de un cuerpo deformable inmerso en un medio fluido en movimiento y la relación entre las fuerzas

que ejerce el fluido y la deformación del cuerpo. Uno de los fenómenos aeroelásticos más peligrosos, debido a lo catastrófico de sus efectos, es el flameo o *flutter*, en inglés. Consiste en la aparición de oscilaciones de amplitud creciente en el tablero del puente a partir de una cierta velocidad crítica de viento. Estos movimientos conducen finalmente al colapso de la estructura. Las técnicas que permiten estudiar el flameo de un puente son variadas y en la actualidad están en pleno proceso de maduración, lo que pone de manifiesto la juventud de esta rama de la ciencia. En esta investigación se ha optado por utilizar la metodología híbrida del flameo multimodal, perfeccionada por diversos investigadores a partir de los trabajos publicados por Scanlan en 1971.

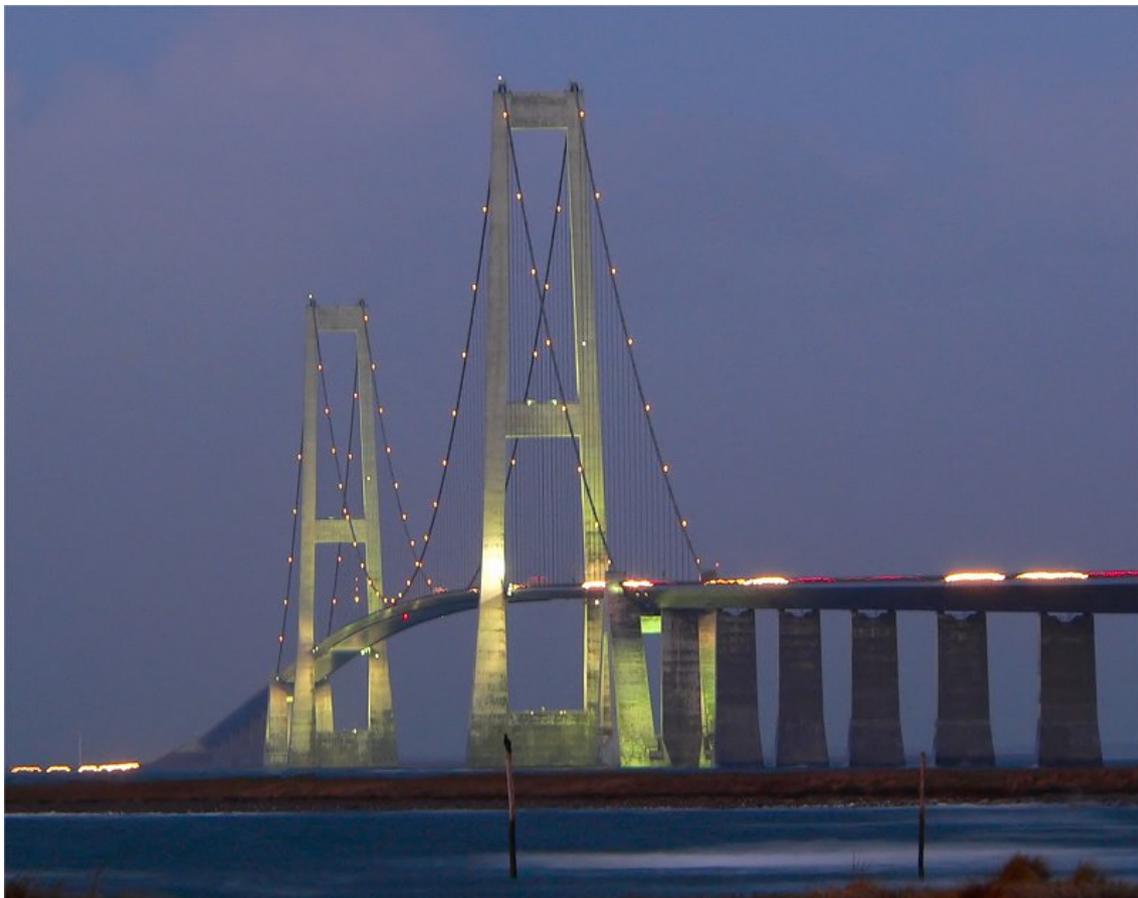


Figura 1.1. Puente sobre el estrecho del Great Belt.

Como consecuencia de las mejoras introducidas con el desarrollo de la ciencia de la aeroelasticidad desde los años 60 del siglo XX, los grandes puentes colgantes y atirantados salvan vanos cada vez mayores. Esto se debe en gran medida a los avances en los métodos de cálculo y la incorporación de técnicas innovadoras como los tableros en sección aerodinámica. La situación actual presenta un panorama más que

prometedor. En el momento de escribir estas líneas, los puentes con mayor longitud de vano del mundo son el Great Belt, con 1624 m y el puente sobre el estrecho de Akashi, con 1991 m de vano central. Pero el futuro próximo propone luces todavía mayores, como el puente sobre el estrecho de Messina, con 3300 m de vano central y un tablero formado por tres cajones aerodinámicos, el enlace de las Rías Altas, para el que se han propuesto dos puentes colgantes de 2016 m y 2198 m, o el enlace en el estrecho de Tsugaru en Japón, en el que se ha propuesto un puente colgante continuo de dos vanos principales de 4000 m y vanos laterales de 2000 m.

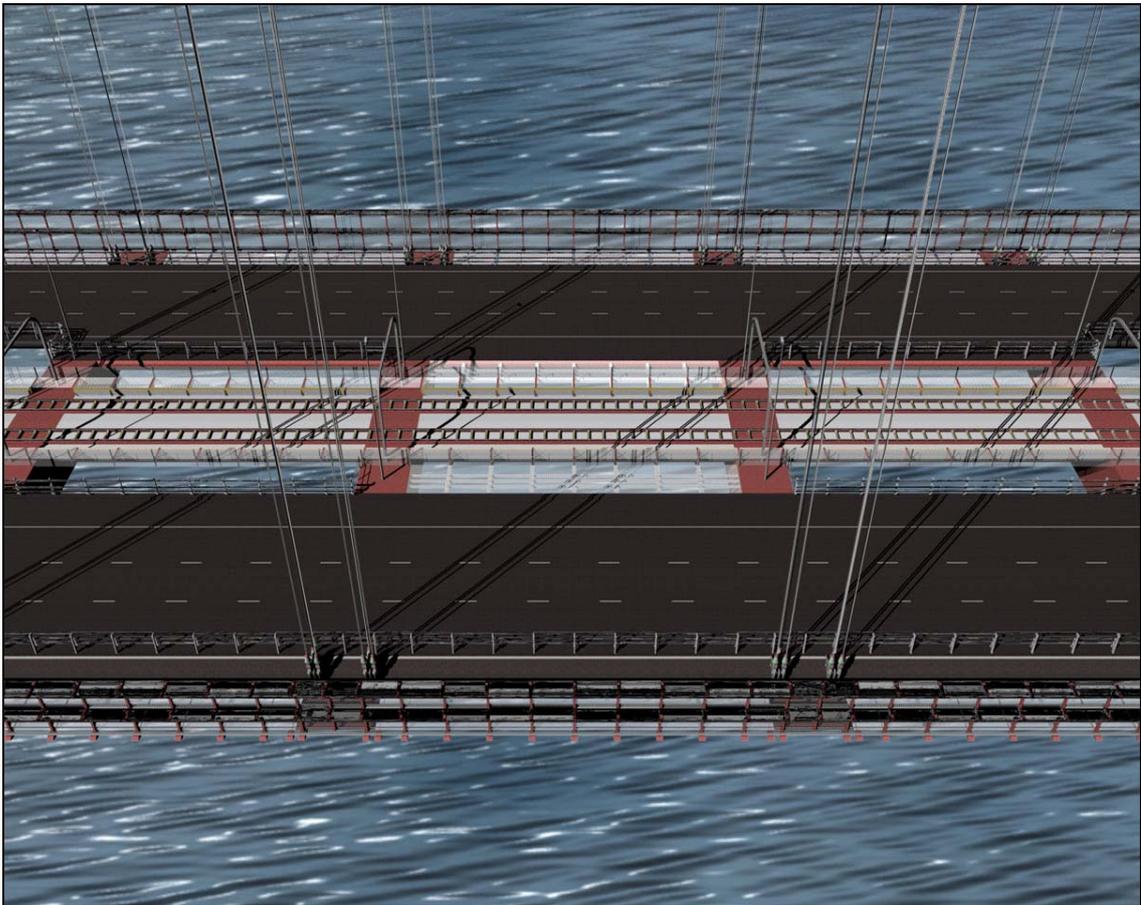


Figura 1.2. Imagen virtual del tablero con tres cajones aerodinámicos del puente de Messina.

En el momento actual, la ingeniería de estructuras es capaz de plantear propuestas tan ambiciosas como las que se acaban de indicar, garantizando por supuesto su seguridad estructural. Sin embargo hasta la fecha estos grandes puentes vienen siendo proyectados empleando técnicas de diseño convencional basadas en reglas heurísticas que desembocan en un laborioso y poco efectivo proceso de prueba y error. Para que estas hermosas y a la vez complejas estructuras alcancen el máximo esplendor que esta

tipología permite, es necesario alcanzar la madurez en los procesos de diseño. Para ello técnicas como los análisis de sensibilidad o la optimización estructural deben ser utilizadas de modo generalizado en la fase de proyecto. Estas técnicas han acreditado su impagable valía en campos estratégicos y sectores con un alto nivel de competitividad, como son las industrias aeroespacial y automovilística. Asumiendo que no existe justificación alguna para el aparente divorcio entre la ingeniería de puentes soportados por cables y las técnicas de diseño óptimo o basadas en análisis de sensibilidad, en este trabajo de investigación se presentan ejemplos de aplicación de las técnicas mencionadas a casos reales como el puente del Great Belt y el futuro puente sobre el estrecho de Messina.

Para alcanzar este objetivo se ha desarrollado la formulación analítica que permite calcular los análisis de sensibilidad de la respuesta aeroelástica cuando se considera la masa variable. Además, los análisis de sensibilidad proporcionan información muy útil durante la fase de diseño, ya que se conocen así las derivadas de la velocidad de flameo respecto a las variables de diseño consideradas. El signo de estas derivadas indica si es más conveniente aumentar o disminuir una cierta variable de diseño para mejorar la respuesta de la estructura, mientras que la magnitud de la derivada da una idea cuantitativa sobre cuál debe ser su modificación.

Para llevar a cabo el diseño óptimo de puentes de gran vano se ha planteado la utilización de métodos basados en los análisis de sensibilidad que son robustos y muy eficaces. El objetivo del proceso de optimización planteado ha sido el minimizar el peso del tablero. Además, se ha tenido especial cuidado en la elección de las variables de diseño y las condiciones de comportamiento, tanto aeroelásticas como cinemáticas.

Con los ejemplos de problemas de optimización del puente sobre el estrecho de Messina que se presentarán en esta memoria-tesis se quiere poner de manifiesto la eficacia de los procesos de diseño óptimo y la eficiencia de los recursos destinados a la realización del proyecto. Además, también se mejorará el producto resultante, ya que se logrará satisfacer las condiciones establecidas en el plan de necesidades con cantidades de material menores que las de partida, las cuales han sido establecidas empleando otras metodologías de diseño.

Las técnicas de optimización estructural suponen en este caso una combinación del análisis de estructuras en régimen no lineal y aeroelástico y de algoritmos de optimización matemática que permiten identificar la mejor de las soluciones en el problema de diseño. Esto implica programar procesos que tienen un altísimo coste computacional, tanto desde el punto de vista de los equipos informáticos necesarios, como del tiempo de computación consumido en resolverlos. El proceso de cálculo de la velocidad de flameo requiere de la evaluación previa de las frecuencias naturales y los modos propios de vibración del puente. Los análisis de sensibilidad de la respuesta aeroelástica requieren del cálculo previo de la sensibilidad del comportamiento en vibración libre respecto a las propiedades mecánicas del tablero. Además, para calcular los movimientos de la estructura son necesarios cálculos estáticos en régimen no lineal. Por tanto el proceso de diseño óptimo de puentes de gran vano es un problema que hasta fechas recientes no podía ser acometido con los ordenadores al alcance de la comunidad científica internacional. Es lo que se suele denominar un *Grand Challenge Problem*.

Por consiguiente, la resolución de este problema de optimización empleando técnicas de programación secuencial es inabordable, ya que el tiempo de cálculo necesario para alcanzar la solución de un ejemplo como los presentados en este trabajo puede ser de varias semanas. La optimización de puentes de cables planteada en este trabajo de investigación sólo puede ser llevada a cabo en la actualidad si se distribuyen ciertos subprocesos entre varios equipos informáticos que trabajen de modo coordinado. Hoy en día existen computadoras en paralelo con arquitecturas y potenciales muy diversos. De entre las posibilidades existentes, se ha optado por la utilización de un *cluster* de ordenadores. Este sistema presenta un coste económico muy competitivo y es especialmente adecuado para resolver problemas paralelizados. Durante la investigación ha sido necesario reprogramar el software secuencial de análisis desarrollado con anterioridad en el seno del grupo de investigación, así como codificar los módulos que constituyen el programa de optimización de puentes de gran vano, considerando condiciones aeroelásticas y cinemáticas. Sólo mediante la programación en paralelo ha sido posible obtener la solución optimizada en un tiempo razonable de unos pocos días.

La investigación realizada en torno a los análisis de sensibilidad y la optimización aeroelástica de puentes colgantes en entornos de computación distribuida se ha organizado en esta memoria-tesis de la manera que se indica a continuación.

1.2 ORGANIZACIÓN DE LA MEMORIA-TESIS

El capítulo 2 del presente documento se dedica a la descripción de los fenómenos aeroelásticos, y particularmente, del flameo en puentes de gran vano. Así, se define el concepto de aeroelasticidad y se describen los fenómenos aeroelásticos más significativos en ingeniería civil. Además se repasan las metodologías existentes en la actualidad para el estudio de los diversos fenómenos asociados a las acciones del viento sobre las estructuras. Por tanto se pasa revista a los métodos experimentales, a los basados en la mecánica de fluidos computacional y a la metodología híbrida, poniendo de manifiesto las capacidades de cada uno de ellos e indicando en ciertos casos las ventajas e inconvenientes asociados a algunas de las técnicas comentadas. Además se formula con detalle la obtención de la velocidad de flameo y la frecuencia reducida en puentes de gran vano.

En el tercer capítulo se plantea de modo general la metodología del diseño óptimo aplicado a puentes de cables, teniendo en cuenta la necesidad de garantizar la seguridad frente al flameo de la estructura. Se comienza describiendo el proceso de diseño convencional en ingeniería, el cual viene siendo empleado con carácter general hasta la fecha. A continuación se describe el proceso de diseño basado en los análisis de sensibilidad, destacando las mejoras que éste aporta frente al diseño convencional. El siguiente paso es describir el proceso de diseño óptimo y su formulación en el proyecto de puentes de gran vano, poniendo de manifiesto la potencia y eficiencia de estas técnicas. Para concluir se repasan algunos métodos de optimización tradicionales, como los de programación matemática, junto con otros más novedosos, como los algoritmos genéticos o los métodos de perturbaciones.

En capítulo número 4 se describe con detalle la formulación matemática requerida para la formulación de los análisis de sensibilidad del flameo considerando la masa del tablero como variable. Ello implica desarrollar los análisis de sensibilidad de las frecuencias naturales y modos propios de vibración en teoría de segundo orden considerando la masa variable. Con el fin de interpretar adecuadamente la información que ofrecen los análisis de sensibilidad mencionados se definen conceptos originales

como la velocidad de cambio o el ratio de cambio de la velocidad de flameo, entre otros.

En el capítulo quinto se repasan en primer lugar conceptos generales asociados a las técnicas de paralelización y programación distribuida y se describen los tipos principales de computadores en paralelo existentes. En la segunda parte del capítulo se describe el programa de optimización DIOPTICA (programación DIstribuida de la Optimización de PuenTes Incluyendo Condiciones Aeroelásticas) y los módulos que lo integran, indicando la formulación matemática implementada.

El capítulo 6 muestra los resultados obtenidos al aplicar la formulación de los análisis de sensibilidad, desarrollada en el capítulo 4, a dos puentes colgantes con tablero aerodinámico, el puente sobre el Great Belt y el puente sobre el estrecho de Messina. Para el puente del Great Belt se calculan las sensibilidades de la respuesta aeroelástica respecto a las propiedades mecánicas del tablero. En el puente sobre el estrecho de Messina se calculan las sensibilidades de la respuesta aeroelástica respecto a las propiedades mecánicas del cajón central y de los laterales y además, se calculan esas sensibilidades respecto a los espesores de las chapas que configuran dichos cajones.

El capítulo séptimo completa la investigación desarrollando y detallando la formulación del problema de optimización y presentando los resultados obtenidos al acometer el diseño óptimo del puente sobre el estrecho de Messina. Se imponen condiciones de comportamiento aeroelásticas y en movimientos. Se han resuelto tres problemas de diseño óptimo: El problema *C* minimiza el área de la sección transversal del cajón central, el problema *L* obtiene el área mínima para los cajones laterales y por último el problema *CL* acomete la optimización conjunta de los cajones, central y laterales.

Finalmente, en el capítulo 8 se presentan las conclusiones de esta tesis y se comentan las futuras líneas de investigación que han quedado abiertas a partir de ella.

CAPÍTULO 2

EL FLAMEO EN PUENTES DE GRAN VANO

“...how could a span designed to withstand 161 km/hr winds and a static horizontal wind pressure of 146 kg/m² succumb under a wind of less than half that velocity imposing a static force one-sixth the design limit...?”

(Scott, R., In the Wake of Tacoma)

2.1 CONCEPTO DE AEROELASTICIDAD. FENÓMENOS AEROELÁSTICOS

Un cuerpo que se encuentra en el seno de una corriente de aire está sometido a presiones provocadas por el flujo incidente que actúan sobre su superficie. Si el cuerpo se mueve de manera significativa bajo las presiones actuantes, las condiciones de contorno de la corriente de aire variarán, lo que provocará un cambio en las fuerzas ejercidas por el fluido, dando lugar a que se produzcan nuevos movimientos del cuerpo. Se puede definir la aeroelasticidad como la disciplina que estudia la interacción entre el flujo de aire y las fuerzas que provoca en un sólido deformable inmerso en él, teniendo en cuenta que los movimientos de éste modifican a aquellas. Otra definición similar puede encontrarse, entre otros, en Simiu^[S1] y Scanlan.

La aeroelasticidad es una disciplina que se desarrolla inicialmente en el ámbito de la ingeniería aeronáutica al principio de la década de 1920. Sin embargo, el colapso del antiguo puente sobre el estrecho de Tacoma que tuvo lugar el día 7 de noviembre de 1940 puso de manifiesto la necesidad de aplicar los conceptos propios de la aeroelasticidad a la ingeniería de puentes para poder comprender el comportamiento de

aquellos que tienen gran vano bajo la acción del viento. En la figura 2.1.1 se muestran los movimientos alcanzados por el tablero, previos al colapso del puente, mientras que en la figura 2.1.2 se observa el momento en que se produce la destrucción de éste.



Figura 2.1.1. Movimientos de puente sobre el estrecho de Tacoma antes del colapso.

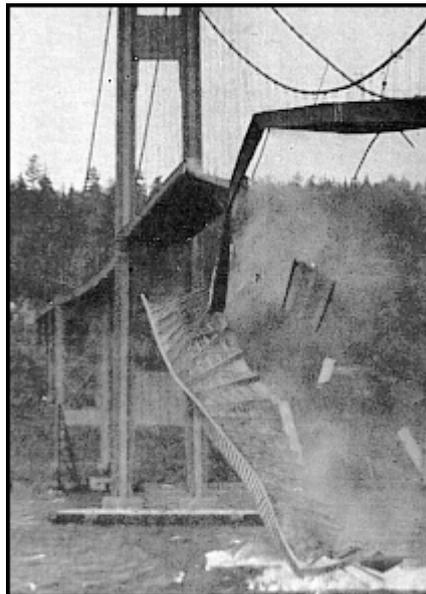


Figura 2.1.2. Colapso del tablero del puente sobre el estrecho de Tacoma.

La interacción fluido-estructura puede dar lugar a diversos fenómenos que reciben el nombre de aeroelásticos, los cuales pueden tener carácter oscilatorio y ser crecientes en el tiempo, en cuyo caso dan lugar a inestabilidades de carácter aeroelástico. Los fenómenos aeroelásticos más importantes descritos en ingeniería de estructuras según Simiu^[S1] y Scanlan, y Meseguer^[M1] et al. son:

- Desprendimiento de torbellinos o *vortex shedding* en terminología inglesa.
- Galope transversal o *galloping*.
- Galope inducido por una estela o *wake galloping*.
- Flameo o *flutter*.
- Bataneo o *buffeting*.

El fenómeno aeroelástico ocasionado por la generación y desprendimiento de torbellinos o *vortex shedding* se debe a la separación del flujo del aire por la presencia de un obstáculo, que en ingeniería de puentes será el tablero, y que se caracteriza por el desprendimiento periódico de torbellinos de sentido de rotación alternado llamados vórtices de Von Kármán, que se muestran en la figura 2.1.3. El mencionado desprendimiento de torbellinos genera unas fuerzas verticales sobre el tablero cuyo sentido se va alternando, las cuales son la causa de las vibraciones verticales típicas de este fenómeno aeroelástico. En la figura 2.1.4 se muestra un esquema de esta situación. Este tipo de vibraciones aparece a bajas velocidades de viento, dando lugar a problemas de servicio exclusivamente, véase Astiz^[A1]. Con el fin de evitar este fenómeno se pueden plantear dos posibles estrategias, según Morgenthal^[M2]: alterar la frecuencia natural de la estructura o aumentar el amortiguamiento de la misma. Una particularidad del desprendimiento de torbellinos es el fenómeno de *lock-in* que se produce cuando la frecuencia a la que se desprenden los torbellinos está próxima a la frecuencia natural de la estructura en la dirección transversal al flujo de aire. En esta situación, el desprendimiento de torbellinos pasa a estar controlado por la frecuencia mecánica y la amplitud de la oscilación es máxima, sin que por ello se alcancen situaciones de inestabilidad.



2.1.3. Generación y desprendimiento de vórtices de Von Kármán.

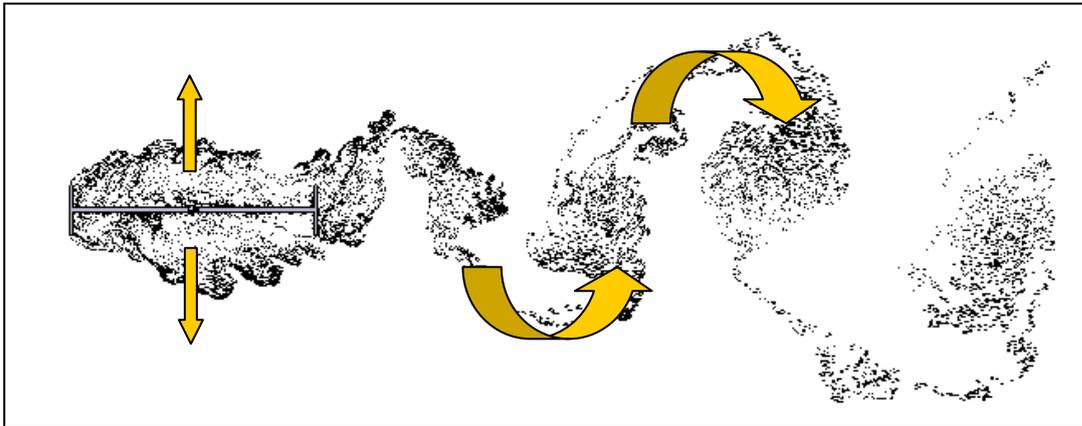


Figura 2.1.4. Oscilaciones verticales en un tablero de puente debido al desprendimiento de torbellinos.

Aunque los fenómenos aeroelásticos se han manifestado generalmente en puentes colgantes o atirantados, debido a su gran ligereza, recientemente se ha producido algún caso en puentes de otra tipología, que presentaban también gran flexibilidad. En el caso de *vortex shedding* merece la pena comentar los movimientos de esta naturaleza que sufre el puente Trans-Tokio Bay Crossing, los cuales han sido estudiados en detalle por Fujino^[F1]. Se trata de un puente que cruza la bahía de Tokio, el cual consiste en una viga continua en cajón realizada en acero. No se trata, por lo tanto, de un puente colgante o atirantado. Su longitud total es de 1630 m y los dos vanos de mayor longitud tienen 240 m cada uno, siendo la anchura total de la sección transversal de 22,9 m. En la figura 2.1.5 se muestra una fotografía del puente y en la figura 2.1.6 un esquema de la planta, alzado y secciones transversales más significativas.



Figura 2.1.5. Puente Trans-Tokio Bay Crossing.

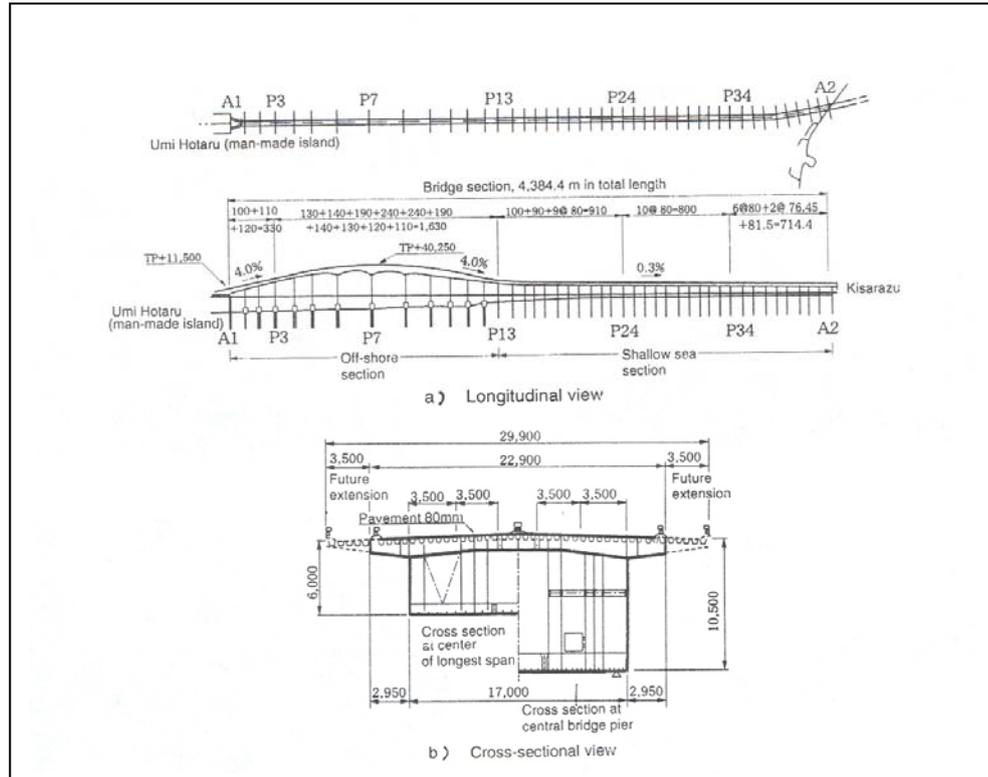


Figura 2.1.6. Planta, alzado y secciones del puente Trans-Tokio Bay Crossing.

Durante la fase de diseño se realizaron varios ensayos de modelos seccionales en túnel de viento, así como sobre un modelo del puente completo. Estos trabajos experimentales pusieron de manifiesto el previsible desarrollo de vibraciones verticales debido a la generación de torbellinos al tiempo que permitieron descartar la posibilidad de que se produjese el fenómeno de *galloping* en la estructura.

Con el fin de mitigar la vibración se consideraron dos posibles estrategias: control aerodinámico empleando *flaps* o añadiendo piezas que modificasen la geometría de la sección para lograr cambiar el flujo de aire alrededor del tablero, o bien, añadir capacidad de amortiguamiento mediante la instalación de TMD's (*tuned mass dampers*).

Algunos de los factores más importantes a considerar al decidir el método más adecuado para controlar las vibraciones inducidas por torbellinos son la estimación de la amplitud de la vibración, el establecimiento de una amplitud admisible y la selección del método de control de la vibración (Japan Road Association 1991). En concreto, el establecimiento de la amplitud de vibración admisible para el puente Trans-Tokio Bay

Crossing se realizó considerando tres estados límite: servicio, fatiga y plastificación de la viga cajón. Tras realizar detallados estudios se optó por instalar 16 TMD's para controlar las vibraciones asociadas con el 1^{er} y 2^o modos de vibración verticales. Las vibraciones asociadas con los modos de vibración de mayor orden fueron controladas aerodinámicamente instalando unas placas verticales fijadas a los postes de las barreras del puente.

Existen bastantes referencias de ejemplos de puentes que se han visto afectados por el fenómeno del desprendimiento de torbellinos. Según Vincent^[V1] el puente Golden Gate presentó oscilaciones torsionales que obligaron a aumentar su rigidez a torsión. Wardlaw^[W1] indica que el desprendimiento de torbellinos se dio también en los siguientes puentes colgantes: Mil Islas, Isla de Deer, Fykesund y el Bronx-Whitestone; así como en los puentes atirantados de Longs Creek y el de Kessock. Entre los puentes construidos recientemente el fenómeno ha sido evitado mediante TMD's en los vanos de aproximación del Gran Belt según Frandsen^[F2] y McRobie.

El galope transversal o *galloping* genera movimientos de gran amplitud según la dirección normal al flujo de aire, con frecuencias menores a las que se producirían en el caso de desprendimiento de torbellinos. Este fenómeno es característico de estructuras esbeltas con secciones transversales rectangulares o en forma de D, así como de cables de tendido eléctrico con hielo adherido. En ingeniería de puentes el fenómeno del galope transversal tiene importancia en el diseño de cables de gran longitud en puentes atirantados.

El galope inducido por una estela o *wake galloping* tiene lugar cuando existen dos obstáculos próximos de tal forma que uno de los cuerpos se encuentra en la estela del otro. Debido a la estela de torbellinos que genera el cuerpo aguas arriba del flujo de aire, el segundo cuerpo recibe una corriente incidente cuya intensidad y sentido variarán con el tiempo. Este fenómeno es típico de las catenarias de ferrocarril y de las líneas de transporte de energía eléctrica en las que los cables discurren agrupados en conjuntos formados por dos, cuatro, seis o más cables situados en paralelo y separados por espaciadores mecánicos en la dirección transversal.

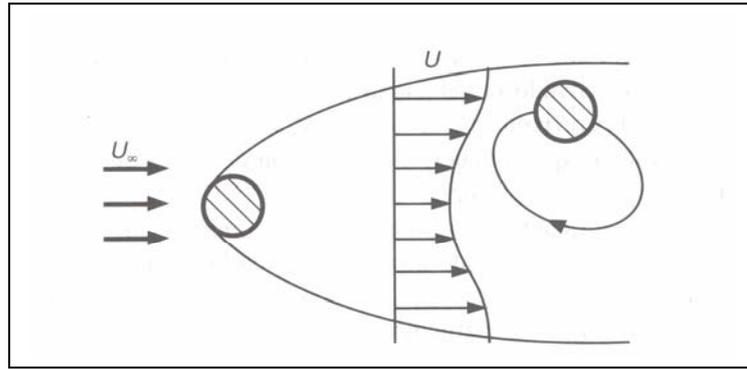


Figura 2.1.7. Trayectoria que tiende a seguir un cilindro situado en la estela de otro.

La inestabilidad aeroelástica provocada por el flameo, *flutter* en inglés, tiene lugar a partir de una cierta velocidad crítica de viento cuando las fuerzas que el flujo de aire provoca sobre el tablero de un puente en combinación con los movimientos del propio tablero dan lugar a amortiguamientos negativos en la estructura de tal manera que los movimientos del tablero se van amplificando hasta que, debido al elevado nivel de tensiones que alcanza el material, se produce el colapso. A este fenómeno aeroelástico se dedica gran parte del contenido de este trabajo.

La vibración por bataneo o *buffeting* se corresponde con el estudio de la influencia de la naturaleza turbulenta del viento, esto es, el efecto de las ráfagas u otras perturbaciones de la corriente, las cuales no han sido producidas por el obstáculo que las sufre. Se distinguen dos tipos de bataneo: el generado por la propia turbulencia de la corriente incidente y el debido a las perturbaciones causadas por algún otro obstáculo próximo, situado corriente arriba del obstáculo en consideración, el cual suele denominarse como bataneo de estela o interferencia. Un ejemplo típico de bataneo de estela se produce entre rascacielos próximos en áreas urbanas cuando la dirección del viento es tal que un edificio queda en la estela del otro. En la figura 2.1.8 se muestra un ejemplo de esta situación.

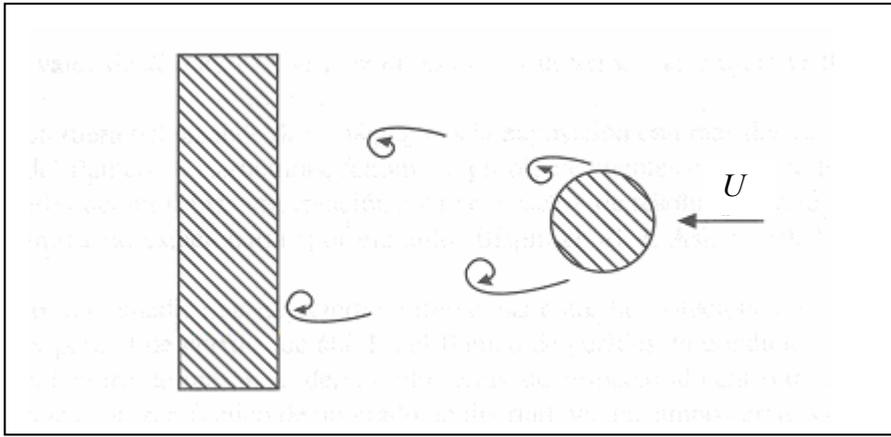


Figura 2.1.8. Ejemplo de bataneo de estela.

Otra situación típica de este tipo de bataneo es el que se produce cuando se tienen puentes situados en emplazamientos cercanos. En la figura 2.1.9 se muestra una imagen del puente colgante sobre el estrecho de Carquinez en California, situado en las inmediaciones de los puentes *cantilever* ya existentes anteriormente, mientras que la figura 2.1.10 se muestra el nuevo puente sobre el río Cooper en Carolina del Sur, actualmente en ejecución.

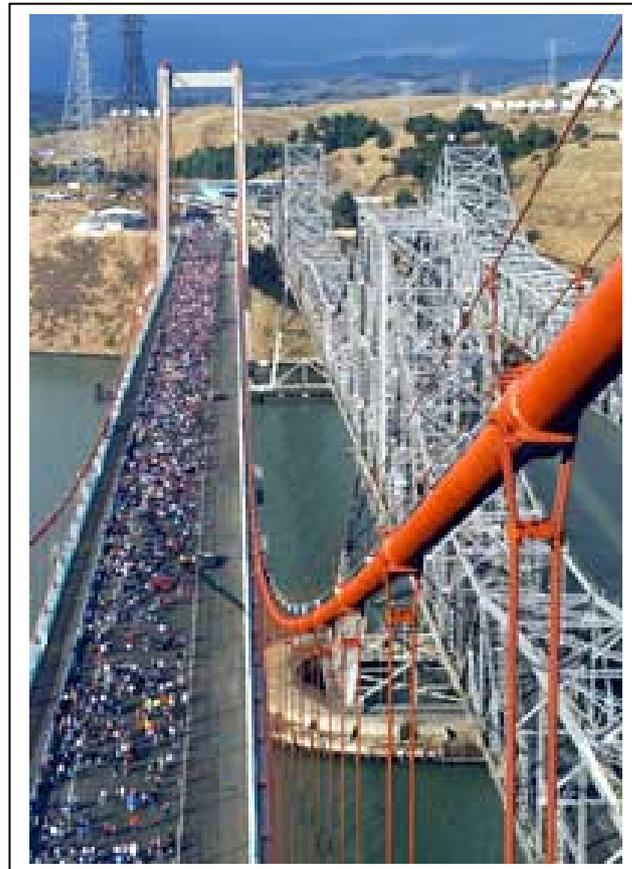


Figura 2.1.9 Puente sobre el estrecho de Carquinez.



Figura 2.1.10 Nuevo puente atirantado sobre el río Cooper.

2.2 METODOLOGÍAS PARA EL ESTUDIO DE FENÓMENOS AEROELÁSTICOS

La presente investigación se centra en el fenómeno del flameo por tratarse de la inestabilidad aeroelástica más relevante en puentes de gran vano.

Las metodologías fundamentales para el estudio del flameo se pueden clasificar en:

- Metodología experimental.
- Metodología computacional
- Metodología híbrida.

El enfoque exclusivamente experimental se basa en ensayos realizados sobre modelos reducidos de estructuras en túneles de viento con el fin de reproducir los efectos que el viento provoca sobre las estructuras.

Según Holmes^[H1], la primera referencia documentada de un túnel de viento para aplicaciones no aeronáuticas lo realizó, para medir la fuerza del viento sobre edificios, W. C. Kernot en Melbourne, Australia, en 1893. Con el montaje mostrado en la figura 2.2.1 Kernot estudió las fuerzas de viento sobre cubos, cilindros, e incluso cubiertas.

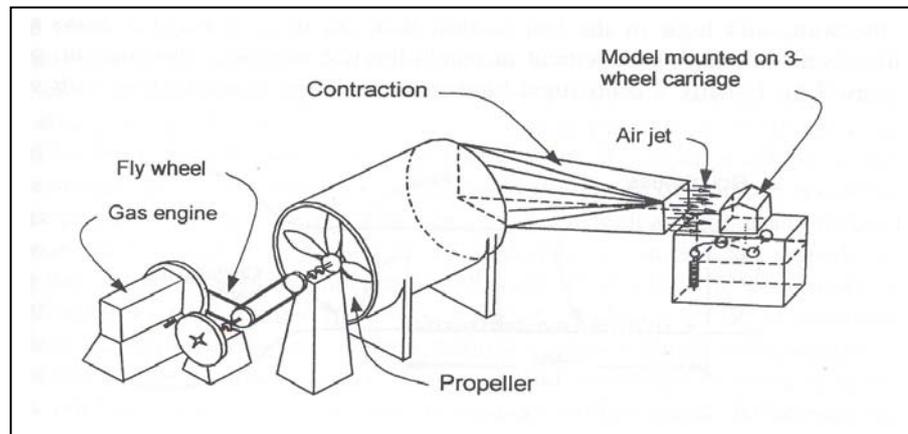


Figura 2.2.1. Esquema de la “máquina soplante” de Kernot.

Casi al mismo tiempo, según Larose^[L1] y Franck, J. O. V. Irminger en 1894 empleó el flujo de aire en el interior de una chimenea para estudiar las presiones ejercidas por el viento sobre algunos cuerpos simples.

En lo que se refiere a los antecedentes históricos relativos a la experimentación sobre puentes no se conoce ninguno significativo hasta los ensayos realizados por Farquharson^[F3] sobre el primer puente de Tacoma y el que lo sustituyó en 1950. La cronología de los hechos es la siguiente según el Washington State Department of Transportation^[W2]: A partir de mayo de 1940, al terminar los trabajos en el tablero, comenzaron a producirse vibraciones en dirección vertical. Con el fin de evitar estos movimientos se instalaron unos gatos hidráulicos con el fin de absorber los movimientos sin tener éxito. Inmediatamente, los responsables del puente contrataron al profesor F. B. Farquharson de la Universidad de Washington con el fin de realizar ensayos en túnel de viento y recomendar medidas correctoras. Farquharson construyó un modelo del puente completo a escala 1/200, así como un modelo a escala 1/20 de la sección del tablero del puente. Estos primeros estudios concluyeron el 2 de noviembre de 1940, es decir, antes del colapso del puente que tuvo lugar el 7 de noviembre de ese mismo año. Dos fueron las soluciones planteadas, realizar unos agujeros en el alma de las vigas laterales dispuestas a lo largo del tablero para permitir así el paso del aire a

través de ellas o darle una forma más aerodinámica a la sección transversal del tablero añadiendo unas piezas metálicas curvadas a los largo del canto. La segunda opción fue la escogida, y no pudo llevarse a cabo al ser destruido el puente cinco días después de terminados los estudios. Hasta este momento no se había realizado ningún trabajo científico relativo a los efectos dinámicos provocados por el viento sobre puentes. Como consecuencia beneficiosa del desastre de Tacoma, en 1942 se construyó un túnel de viento en la Universidad de Washington con el objeto de ensayar modelos tridimensionales de puentes. Además, se realizó un modelo completo del primer puente de Tacoma, estudiándose también un modelo que permitiese lograr un diseño seguro para el nuevo puente que se deseaba proyectar en el mismo emplazamiento. Los ensayos fueron realizados bajo la dirección general de C. E. Andrew, siendo el profesor Farquharson quien dirigió la construcción del túnel de viento y de los modelos, mientras que fue el Dr. T. Von Kármán quien supervisó los ensayos realizados. El trabajo experimental se prolongó durante casi cuatro años pero permitió fijar las bases de la metodología experimental para el estudio de puentes. En la figura 2.2.2 se muestra el túnel de viento construido en la Universidad de Washington en 1942. En la figura 2.2.3 se muestra el modelo realizado del primer puente de Tacoma, mientras que en la figura 2.2.4 se adjunta un gráfico de resultados obtenidos en enero de 1943. Estas tres figuras están tomadas de University of Washington Libraries Digital Collections^[U1].



Figura 2.2.2. Túnel de viento construido en la Universidad de Washington en 1942.



Figura 2.2.3. Modelo del puente sobre el estrecho de Tacoma en el túnel de viento de la Universidad de Washington.

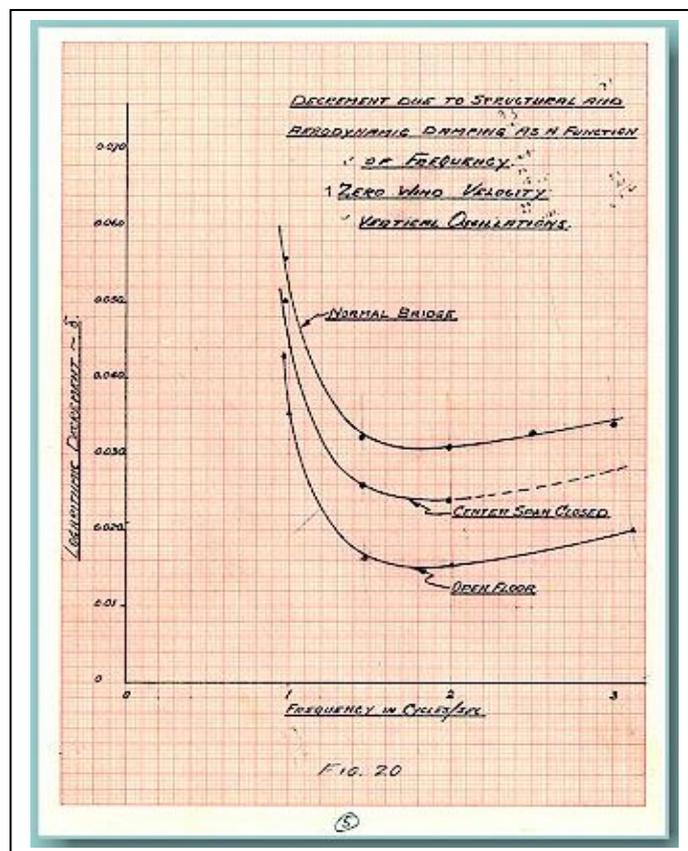


Figura 2.2.4. Resultados de los ensayos realizados, enero de 1943.

Por otro lado, la metodología puramente computacional aplicada a los problemas asociados con la ingeniería de viento viene siendo desarrollada fundamentalmente en los últimos quince años. Básicamente, se trata de adaptar los métodos numéricos que han sido desarrollados para otros campos de la mecánica de fluidos a los problemas propios de la ingeniería de puentes.

La razón de ser de estos métodos puramente numéricos radica en el ahorro económico y de tiempo que se lograría si se hiciesen innecesarios los ensayos en túnel de viento. Sin embargo, se debe tener presente que la eficiencia de la metodología numérica está inevitablemente unida a la eficacia de los métodos propuestos y a la gran capacidad de cálculo necesaria para poder aplicar estas técnicas. En la actualidad los resultados obtenidos son todavía limitados.

Los métodos numéricos más utilizados en la dinámica de fluidos computacional o *Computational Fluid Dynamics (CFD)* en inglés son (véase Morgenthal^[M3]):

- Métodos de volúmenes finitos o *Finite Volume Methods*.
- Métodos de los elementos finitos o *Finite Element Methods*.
- Métodos de las diferencias finitas o *Finite Difference Methods*.
- Métodos de partículas o *Particle (vortex) Methods*.

Finalmente, la metodología híbrida en el estudio de puentes de gran vano consta de dos etapas: una primera experimental en la que se obtienen las fuerzas aeroelásticas que actúan sobre el tablero mediante la identificación a través de ensayos de unos parámetros denominados coeficientes de flameo, y una segunda etapa en la que se realiza un cálculo dinámico que permite la determinación de los dos parámetros fundamentales que gobiernan el fenómeno del flameo, que son la velocidad crítica y la frecuencia de flameo. Dado que esta segunda metodología combina una primera parte experimental y una segunda computacional, recibe el nombre de híbrida.

2.3 MÉTODOS BASADOS EN CFD

Ya se ha indicado que la metodología puramente numérica empleada para resolver problemas aeroelásticos en el ámbito de la ingeniería de puentes tiene como característica la ausencia de requerimientos de datos cuyo origen sea experimental.

Como se ha comentado anteriormente, y a raíz del colapso del puente sobre el estrecho de Tacoma, la inestabilidad por flameo del tablero de un puente se ha convertido en uno de los fenómenos aeroelásticos más preocupantes en el ámbito de la ingeniería de puentes de gran vano. El flameo de puentes se formula matemáticamente a partir de las ecuaciones que proporciona la aeroelasticidad clásica. Dentro de la ingeniería aeronáutica esta disciplina se encarga de estudiar el comportamiento dinámico de los perfiles de alas de aeronaves, combinando las teorías de la mecánica de fluidos y la mecánica de sólidos deformables. En las primeras formulaciones analíticas desarrolladas en ese ámbito no era necesaria la determinación de parámetro alguno mediante ensayos experimentales. Entre las obras clásicas escritas en este campo se pueden citar el libro escrito por Fung^[F4], así como el escrito por Bisplinghoff^[B1], Ashley y Halfman. En estas obras se puede encontrar un desarrollo de las ecuaciones que rigen el fenómeno de inestabilidad debida al flameo en perfiles alares. En el ya mencionado libro de Fung se recoge el desarrollo completo de la teoría de Theodorsen^{[T1][T2]} para el flameo de una placa plana, que ha constituido la base matemática de toda la formulación analítica del flameo en puentes. Esta teoría considera un perfil plano, como el de la figura 2.3.1, sometido a un tipo de movimiento con dos grados de libertad: una traslación vertical h que provoca la flexión del ala y un giro α alrededor de un eje situado a una distancia a de la mitad de la cuerda del ala.

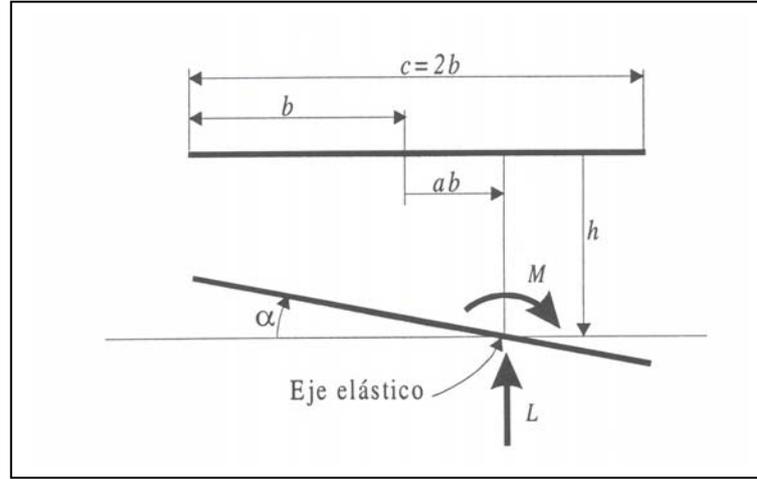


Figura 2.3.1. Movimientos y fuerzas considerados en una placa plana.

Se supone además, que el movimiento de la placa tiene carácter oscilatorio: $h = h_0 e^{i\omega t}$ y $\alpha = \alpha_0 e^{i\omega t}$, donde h_0 y α_0 son constantes complejas y ω es la frecuencia del movimiento. Si se considera la variable de tiempo adimensional $\tau = \frac{Ut}{b}$, los movimientos de la placa pueden expresarse como

$$\begin{aligned} h(\tau) &= h_0 e^{ik\tau} \\ \alpha(\tau) &= \alpha_0 e^{ik\tau} \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

siendo $k = \frac{\omega b}{U}$ la frecuencia adimensional.

Aplicando las reglas de derivación se obtienen las relaciones entre las derivadas de los movimientos respecto al tiempo y su variable adimensional τ

$$\begin{aligned} \dot{h} &= \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{U}{b} h' \\ \dot{\alpha} &= \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{U}{b} \alpha' \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Realizando diversas operaciones matemáticas se puede demostrar que las fuerzas aeroelásticas de levantamiento y de momento por unidad de longitud son función de los movimientos y de sus derivadas respecto a la variable tiempo adimensional según las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} L &= f(\alpha, h', \alpha', h'', \alpha'') \\ M &= g(\alpha, h', \alpha', h'', \alpha'') \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Con los movimientos de tipo oscilatorio que se han asumido para los grados de libertad h y α , las derivadas segundas h'' y α'' son proporcionales a los movimientos sin derivar, por lo que las fuerzas aeroelásticas por unidad de longitud pueden ser expresadas también como

$$\begin{aligned} L &= l(h, \alpha, h', \alpha') \\ M &= m(h, \alpha, h', \alpha') \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

relación que coincide con la planteada por Scanlan para tableros de puentes, como se verá más adelante.

Finalmente, las expresiones de las fuerzas aeroelásticas por unidad de longitud según la teoría de Theodorsen una vez realizados los desarrollos necesarios son

$$\begin{aligned} L &= 2\pi b \rho U^2 \left\{ (F+iG) \left[\alpha_0 + \frac{i}{b} k h_0 + \left(\frac{1}{2}-a\right) i k \alpha_0 \right] - \frac{1}{2} k^2 \left(\frac{h_0}{b} - a \alpha_0 \right) + \frac{1}{2} i k \alpha_0 \right\} e^{ikr} \\ M &= 2\pi b^2 \rho U^2 \left\{ \left(\frac{1}{2} + a \right) (F+iG) \left[\alpha_0 + \frac{i}{b} k h_0 + \left(\frac{1}{2}-a\right) i k \alpha_0 \right] - \frac{1}{2} k^2 a \left(\frac{h_0}{b} - a \alpha_0 \right) + \left(\frac{1}{2}-a\right) i k \alpha_0 + \frac{k^2}{8} \alpha_0 \right\} e^{ikr} \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

donde U es la velocidad media del viento incidente, ρ la densidad del aire y F y G son respectivamente la parte real y la parte imaginaria de la función de Theodorsen

$$C(k) = F(k) + iG(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)} = \frac{K_1(ik)}{K_0(ik) + K_1(ik)} \quad (2.3.6)$$

siendo H y K respectivamente las funciones de Hänkel y las funciones de Bessel modificadas.

En una primera aproximación la inestabilidad aeroelástica por flameo en tableros de puentes atirantados o colgantes se pretendió formular matemáticamente empleando las mismas ecuaciones que rigen el flameo de una placa plana. Sin embargo, la geometría

de las secciones de los tableros de puentes no puede considerarse semejante a la de una placa plana, por lo que no es posible plantear una formulación analítica completa análoga a la formulada por Theodorsen. Para salvar este inconveniente se recurrió inicialmente a expresar las fuerzas aeroelásticas que actúan sobre el tablero de un puente como funciones lineales de los mismos dos grados de libertad considerados en la teoría de Theodorsen^{[T1][T2]}, esto es, el movimiento vertical y el giro (w, ω_x), y sus primeras derivadas respecto al tiempo, multiplicados por unos coeficientes llamados coeficientes de flameo, *flutter derivatives* en inglés. En la figura 2.3.2 se indican los criterios de signos considerados.

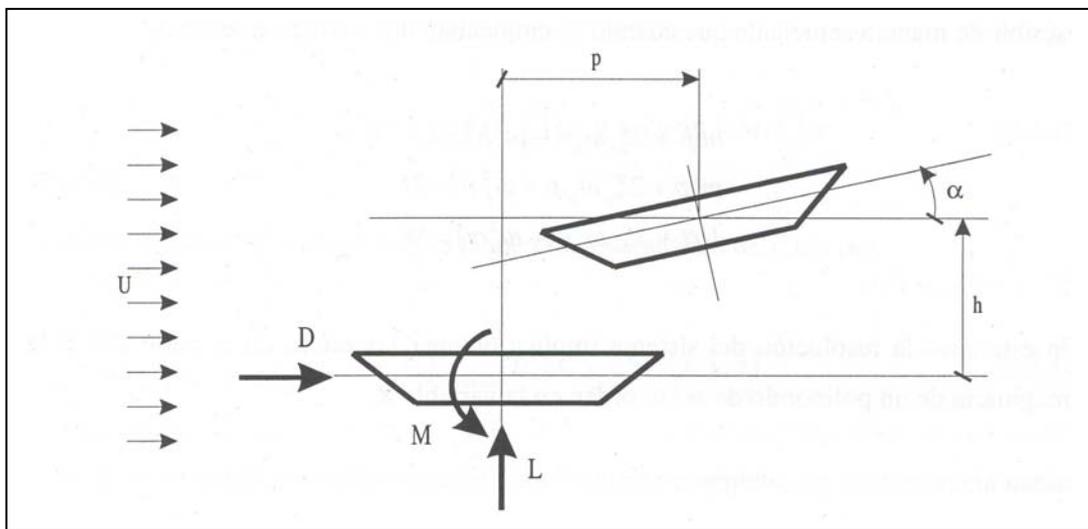


Figura 2.3.2. Criterio de signos considerando tres fuerzas aeroelásticas.

La primera formulación del flameo de puentes fue propuesta por Scanlan^[S2] y Tomko en el año 1971, considerando dos fuerzas aeroelásticas: la de elevación y la de giro.

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{2} \rho U^2 B \left(KH_1^* \frac{\dot{h}}{U} + KH_2^* \frac{B\dot{\alpha}}{U} + K^2 H_3^* \alpha + K^2 H_4^* \frac{h}{B} \right) \\
 M &= \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 \left(KA_1^* \frac{\dot{h}}{U} + KA_2^* \frac{B\dot{\alpha}}{U} + K^2 A_3^* \alpha + K^2 A_4^* \frac{h}{B} \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.3.7}$$

donde ρ es la densidad del aire, U es la velocidad del viento incidente, $K = B\omega/U$ es la frecuencia reducida y ω es la frecuencia angular, mientras que H_i^* y A_i^* , $i=1, \dots, 4$, son los coeficientes de flameo antes mencionados.

Posteriormente el modelo se extendió incluyendo la fuerza horizontal de arrastre D (*drag* en inglés) y su movimiento asociado v , así como su velocidad. De esta manera se llega a una formulación que requiere 18 coeficientes de flameo según la expresión siguiente

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{2} \rho U^2 B \left(KH_1^* \frac{\dot{h}}{U} + KH_2^* \frac{B\dot{\alpha}}{U} + K^2 H_3^* \alpha + K^2 H_4^* \frac{h}{B} + KH_5^* \frac{\dot{p}}{U} + K^2 H_6^* \frac{p}{B} \right) \\
 D &= \frac{1}{2} \rho U^2 B \left(KP_1^* \frac{\dot{p}}{U} + KP_2^* \frac{B\dot{\alpha}}{U} + K^2 P_3^* \alpha + K^2 P_4^* \frac{p}{B} + KP_5^* \frac{\dot{h}}{U} + K^2 P_6^* \frac{h}{B} \right) \\
 M &= \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 \left(KA_1^* \frac{\dot{h}}{U} + KA_2^* \frac{B\dot{\alpha}}{U} + K^2 A_3^* \alpha + K^2 A_4^* \frac{h}{B} + KA_5^* \frac{\dot{p}}{U} + K^2 A_6^* \frac{p}{B} \right)
 \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Lamentablemente los coeficientes A_i^* , H_i^* , P_i^* ($i=1, \dots, 6$) dependen de las características del tablero y su obtención debe realizarse, por lo tanto, experimentalmente, lo que impide una formulación totalmente analítica de esta metodología. Por ello el estudio del comportamiento aeroelástico del tablero de puentes se afrontó mediante una metodología híbrida que se describirá más adelante.

El desarrollo de los métodos numéricos de cálculo, su implementación en ordenadores digitales y la gran capacidad de cálculo proporcionada por éstos en la última década han hecho que se haya vuelto a intentar abordar el estudio de los fenómenos aeroelásticos mediante un planteamiento puramente numérico denominándose a esta técnica dinámica de fluidos computacional o CFD (*Computational Fluid Dynamics*) en inglés.

Uno de los aspectos clave en la metodología numérica es el lograr una adecuada modelización discreta del medio continuo. A continuación se comentan algunos aspectos referentes a dos metodologías de discretización (Morgenthal^[M3] y Walther^[W3]) que están dando resultados esperanzadores.

La primera de ellas es el método de los volúmenes finitos, el cual se basa en la discretización de las ecuaciones de Navier-Stokes. El dominio se discretiza en un número finito de volúmenes de control de tal manera que el flujo que sale de un volumen debe entrar en los volúmenes adyacentes a ése. De esta manera, al alcanzar el

régimen estacionario, no puede haber pérdidas de flujo. Si los flujos que entran y salen de cada volumen no son iguales, esto quiere decir que las condiciones en cada volumen están cambiando y, en consecuencia, el flujo no es estacionario. El mismo esquema conceptual puede aplicarse, por ejemplo, a la energía. Entre las ventajas de este método destacan la facilidad para extender su formulación de casos bidimensionales a tridimensionales y la posibilidad de emplear mallas no regulares, lo que hace el método muy adecuado para problemas con geometrías complicadas. En la figura 2.3.3 se muestra un detalle de la malla empleada en los cálculos realizados por Morgenthal del puente del Great Belt, mientras que en la figura 2.3.4 se muestran contornos de velocidad obtenidos estudiando el mismo puente.

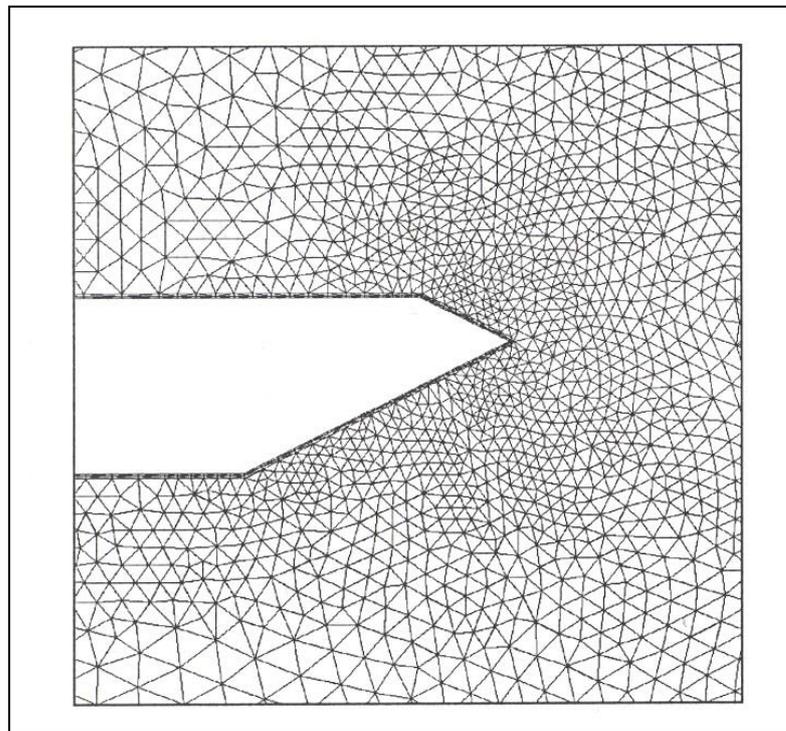


Figura 2.3.3. Malla de volúmenes finitos.

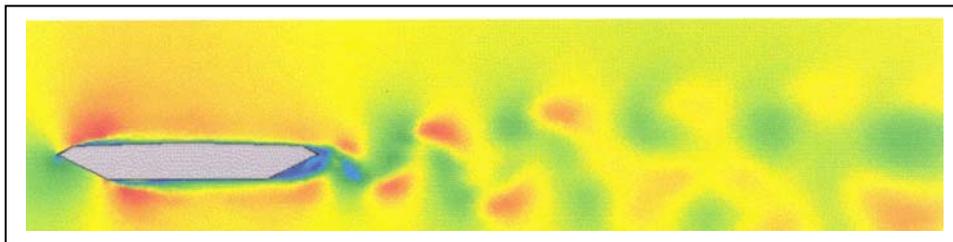


Figura 2.3.4. Contorno de velocidades obtenido mediante el método de los volúmenes finitos.

Una segunda metodología es la de partículas. Ésta se basa en la discretización de una ecuación integral equivalente a la ecuación en derivadas parciales. Un ejemplo concreto de este tipo de método es el de los vórtices discretos (*discrete vortex method*) que son, según Turkiyyah^[T3] y Reed, métodos lagrangianos de partículas, mostrándose en la figura 2.3.5 los resultados que pueden ser obtenidos.

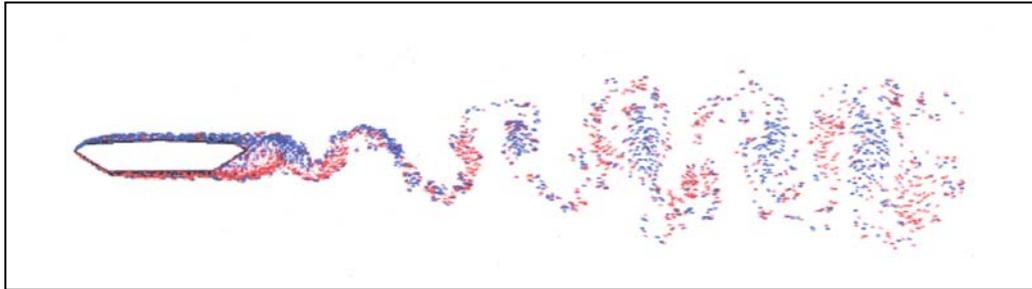


Figura 2.3.5. Desprendimiento de torbellinos producido por el puente del Great Belt.

Con el fin de conocer hasta qué punto son operativos los métodos completamente numéricos se comentan algunas de las investigaciones realizadas empleando esta técnica. Muchos de esos estudios se refieren al desprendimiento de torbellinos provocado por un cilindro ya que la solución a obtener es bien conocida y permite calibrar los métodos desarrollados.

Los primeros estudios numéricos del flujo de aire alrededor de un cilindro fueron llevados a cabo en 1969 por Son^[S3] y Hanratty. A su vez, Braza^[B2], Chassaing y Minh emplearon en 1986 el método de los volúmenes finitos para analizar el desprendimiento de torbellinos en cilindros con un número de Reynolds inferior a 1000. Por otro lado, Lecointe^[L2] y Piquet aplicaron diferencias finitas en los casos de flujo estacionario y no estacionario. Anagnostopoulos^[A2] empleó el método de los elementos finitos para analizar también el fenómeno de desprendimiento de torbellinos. En el año 1993 Dawes^[D1] empleó el método de los volúmenes finitos para resolver el mismo problema. Utilizó un método adaptativo incorporando la capacidad de refinar la malla en función de la solución obtenida, logrando así una solución computacionalmente económica.

Otros investigadores como Rodi^[R1] en 1997 estudiaron el fenómeno del desprendimiento de torbellinos en cuerpos no aerodinámicos (*bluff bodies*). Stegjel^[S4] y Rockliff emplearon a su vez el método de los vórtices discretos. Utilizando ese mismo método Larsen^[L3] y Larsen^[L4] y Walther calcularon para diferentes secciones

transversales parámetros aerodinámicos como los coeficientes de levantamiento y arrastre o el número de Strouhal.

Deteniéndose en las aplicaciones realizadas específicamente en el ámbito de la ingeniería civil podemos citar entre otros a Frandsen^{[F2],[F5]} y McRobie que emplearon el método de los elementos finitos con el propósito de investigar las vibraciones inducidas por torbellinos y el flameo en el puente de Great Belt. El fenómeno de lock-in fue capturado correctamente y la velocidad de flameo obtenida estuvo próxima a la propuesta por otros autores. Por otro lado, Larsen^[L3] y Larsen^[L5] y Walther aplicaron el método de los vórtices discretos para simular la interacción entre el fluido y la estructura, obteniendo la velocidad de flameo para varios puentes. Igualmente, Zhou^[Z1], Chen y Xiang calculan los coeficientes aerodinámicos y aeroelásticos para el segundo puente de Nanjing, el puente Runyang, el puente del Great Belt, el puente de Jinsha y el puente de Humen. Preidikman^[P1] y Mook usaron la misma técnica para diseñar sistemas pasivos de amortiguamiento para puentes de gran vano.

Morgenthal^[M3] empleó el método de los vórtices discretos y el de los volúmenes finitos aplicándolos de manera independiente al puente del Great Belt. Así, con la primera de las metodologías obtuvo el número de Strouhal, los coeficientes aerodinámicos, y la apariencia general de los coeficientes de flameo que son semejantes a los obtenidos experimentalmente, aunque existen diferencias en los valores cuantitativos. Además, se reprodujo el fenómeno de lock-in y se planteó un pseudomodelo en tres dimensiones. Los análisis realizados para el mismo puente considerando volúmenes finitos permitieron modelizar el fenómeno de desprendimiento de torbellinos, pero las presiones sobre el tablero resultaron ser excesivas y, en consecuencia, los coeficientes aerodinámicos obtenidos fueron muy altos. En esencia, los resultados de tipo aerodinámico son adecuados, mientras que los aeroelásticos ponen de manifiesto que el problema no puede ser resuelto con el mismo nivel de eficacia. Por ello, aunque el método puede ser considerado en principio adecuado, Morgenthal destaca que para lograr resultados concluyentes se debe disponer de una versión para ser ejecutada en paralelo del programa de cálculo debido al gran esfuerzo de computación requerido para analizar adecuadamente la interacción entre el fluido y la estructura.

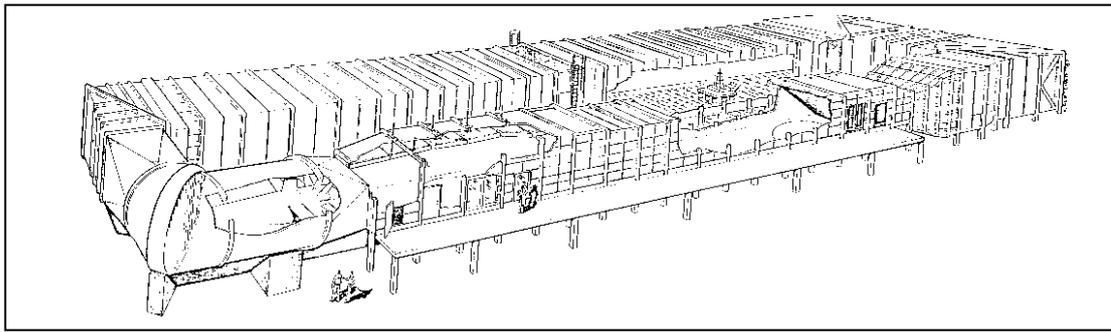
Otros autores como Lopes^[L6], Cunha y Simoes emplean la metodología numérica para analizar el fenómeno de lock-in y su relación con las condiciones de utilización de estructuras esbeltas con el fin de limitar los niveles de vibración. Para analizar el flujo de aire y su acción sobre la estructura estos investigadores emplean un método basado en la técnica de los volúmenes finitos mientras que el comportamiento dinámico de la estructura es calculado mediante el método de los elementos finitos.

En resumen, puede decirse que se trata de un campo de investigación muy activo en el que en un futuro deben esperarse resultados que dependan de la evolución de los métodos numéricos y de la arquitectura de los computadores.

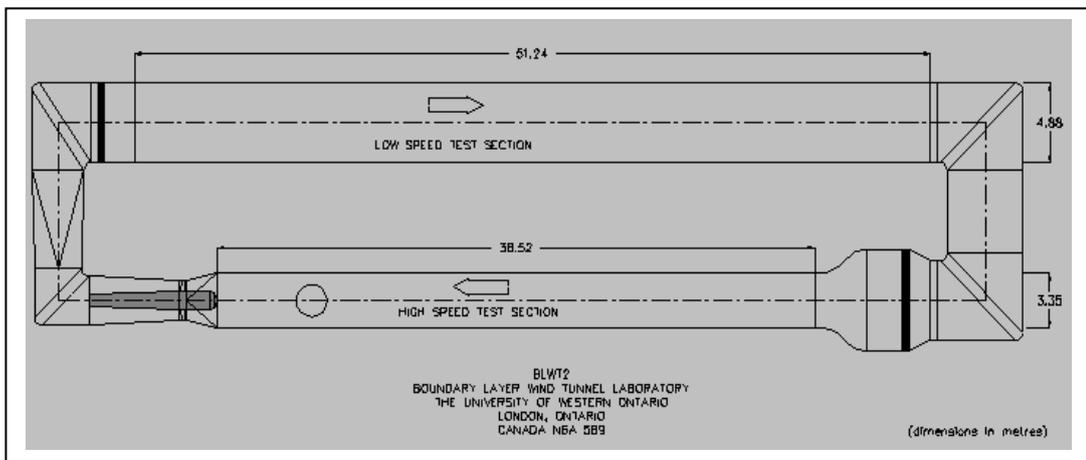
2.4 MÉTODOS EXPERIMENTALES

La metodología experimental consiste en intentar averiguar el comportamiento del puente real mediante los resultados obtenidos utilizando un modelo reducido de ese puente en un ensayo.

Los ensayos de modelos de puentes completos se llevan a cabo habitualmente en túneles de viento de capa límite, ya que éstos poseen generalmente secciones de ensayo de gran longitud con el fin de poder simular la capa límite atmosférica y evaluar así los efectos tridimensionales del viento sobre las estructuras. Así, una capa límite de entre 0.5 y 1 m de altura se desarrolla en un suelo rugoso por cada 20 ó 30 m de longitud. Ejemplos de este tipo de túneles de viento son los existentes en la Universidad de Western Ontario^[A3] en London, Canadá, donde el equipo creado por el profesor Davenport^[D2] ha ensayado muchos de los puentes más importantes construidos en el mundo. En la figura 2.4.1 se muestra un esquema de uno de los túneles de viento de capa límite de ese centro, mientras que en la figura 2.4.2 se muestra como se desarrolla la capa límite a lo largo de la cámara de ensayo en este tipo de túneles.



(I)



(II)

Figura 2.4.1. Túnel de Viento de capa límite de la Universidad de Western Ontario en London, Ontario, Canada. (I) Vista general del túnel BLWT2. (II) Esquema en planta del túnel BLWT2.

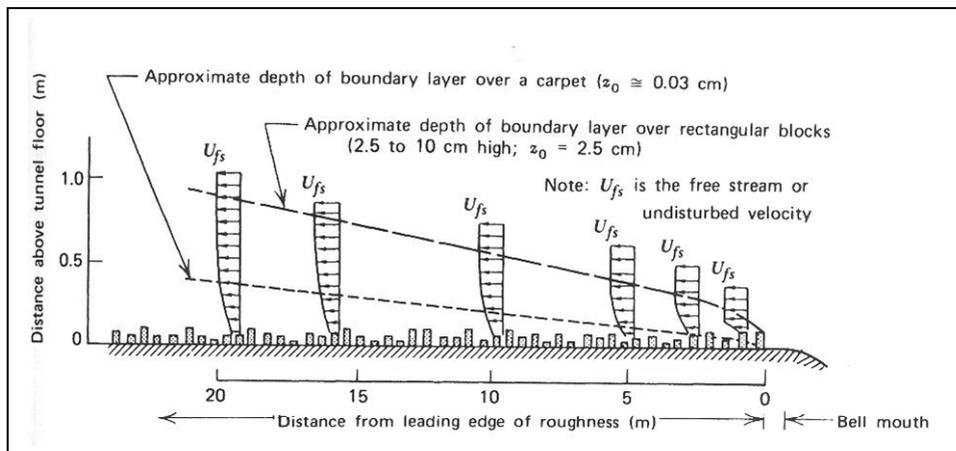


Figura 2.4.2. Desarrollo de la capa límite en la sección de ensayo de un túnel de capa límite.

En los ensayos realizados en este tipo de túneles se analiza en muchos casos la orografía de las zonas cercanas a la estructura, según Meseguer^[M1] et al. las escalas típicas en este tipo de ensayos oscilan entre 1/2000 y 1/5000. Si la escala escogida es baja, del orden de 1/5000 o inferior, los números de Reynolds asociados serán muy bajos por lo que la capa límite simulada puede presentar distorsiones significativas. Por ejemplo, en el proyecto del puente sobre el canal de Chacao, en Chile, se ha llevado a cabo un estudio sobre un modelo del terreno con el propósito de investigar el efecto de la topografía en el régimen de vientos de la zona. Así, se analizó un área de 4 km x 4 km, para realizar el modelo con una escala geométrica 1/2000. Los principales objetivos de este tipo de ensayos son conocer las condiciones del flujo de aire en el emplazamiento del puente y establecer relaciones correctas con las mediciones obtenidas de las estaciones meteorológicas de la zona. En la figura 2.4.3 se muestra el modelo del terreno realizado en el interior de la cámara de ensayo de 2,6 m de ancho por 1,8 m de alto del túnel de viento de capa límite de FORCE Technology^[F6] en Dinamarca.

Los túneles de viento de capa límite más adecuados para realizar ensayos de modelos de puentes completos son los denominados *extra-anchos*, que son aquellos en los que las cámaras de ensayo tienen grandes dimensiones como es el caso del *FORCE Technology's Very Wide Boundary-Layer Wind Tunnel* el cual tiene una cámara de ensayo de 13,6 m de ancho, 1,6 m de altura y 15 m de longitud. Este túnel también es conocido como *Martin Jensen Wind Tunnel*. Según Simiu^[S1] y Scanlan una escala geométrica empleada habitualmente en los modelos de puentes es 1/300, aunque en algunos casos se han empleado escalas del orden de 1/100. En la figura 2.4.4 se muestra una fotografía del modelo completo del puente sobre el canal de Chacao ensayado en el túnel de viento Martin Jensen. La escala geométrica empleada ha sido 1/215 y los estudios aeroelásticos han sido llevados a cabo tanto en flujo laminar como turbulento. Igualmente, en los ensayos se ha considerado un viento incidente según la perpendicular al eje longitudinal del puente, así como según un ángulo de 30° con esa misma perpendicular.



Figura 2.4.3. Modelo del terreno a escala 1/2000 realizado para el puente de Chacao en Chile.



Figura 2.4.4. Modelo completo del puente sobre el canal de Chacao

El ejemplo más impresionante dentro de los túneles de viento *extra-anchos* es el del *Construction Ministry's Public Works Research Institute* en Tskuba, Japón. Esta instalación cuenta con una cámara de ensayos de 30 m de longitud, 40 m de anchura y 4 m de altura en la que se llevaron a cabo los ensayos del puente sobre el estrecho de Akashi^[H2]. En las figuras 2.4.5 y 2.4.6 se muestran dos imágenes del modelo realizado para el puente sobre el estrecho de Akashi.



Figura 2.4.5. Modelo completo del puente sobre el estrecho de Akashi a escala 1/100

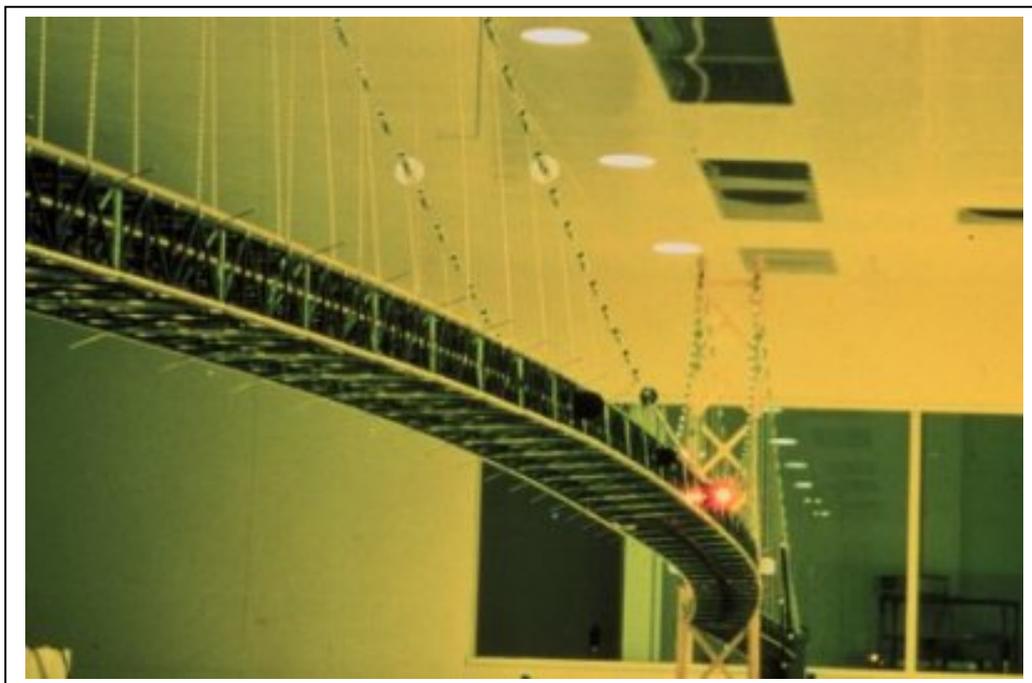


Figura 2.4.6. Ensayo en túnel de viento del puente sobre el estrecho de Akashi

El *Committee on Wind Effects* de la ASCE^[C1] señala las siguientes ventajas relativas al ensayo de modelos de puentes completos en túneles de capa límite:

- Permiten representar la interacción entre tablero, pilares, torres, estribos y cables.
- Se pueden reproducir las distorsiones del flujo de aire en diferentes partes del puente si además del propio puente se modela la topografía del terreno próximo.
- En algunos casos la escala del modelo es tal que permite reproducir adecuadamente la propia estructura turbulenta del viento.

Los principales inconvenientes pueden ser sintetizados en los siguientes:

- La construcción de los modelos es muy costosa.
- Los modelos a ensayar deben ser realizados considerando la escala geométrica y también dinámica.
- El modelo no puede ser modificado fácilmente si se comprueba que la configuración adoptada no es aceptable.

Mosquera^[M4] considera como ventajas a añadir a las citadas anteriormente que este tipo de ensayos permite la identificación de muchas de las respuestas de la estructura frente a las cargas de viento, como reacciones, movimientos, inestabilidades aeroelásticas; así como una clara visualización de la deformación del modelo. Además, debe tenerse muy presente el elevado coste de ejecución de las instalaciones necesarias y del propio ensayo.

Un aspecto que debe tenerse muy en cuenta es que en el futuro, a medida que vaya aumentando la longitud de los nuevos puentes proyectados, se deberá aumentar el tamaño de las instalaciones de los túneles de viento *extra-anchos*, pudiendo llegar a hacerse inviable la construcción de cámaras de ensayo de las dimensiones requeridas. Una posible solución consistiría en reducir la escala de los modelos pero a costa de disminuir la exactitud y fiabilidad de los resultados.

2.5 MÉTODOS HÍBRIDOS

La metodología híbrida es un planteamiento que nace de la necesidad de obtener experimentalmente los coeficientes de flameo requeridos en la formulación de las fuerzas aeroelásticas propuesta por Scanlan, según se ha indicado en el apartado 2.3. En consecuencia, este planteamiento permite obtener la velocidad de flameo de un puente en dos etapas sucesivas:

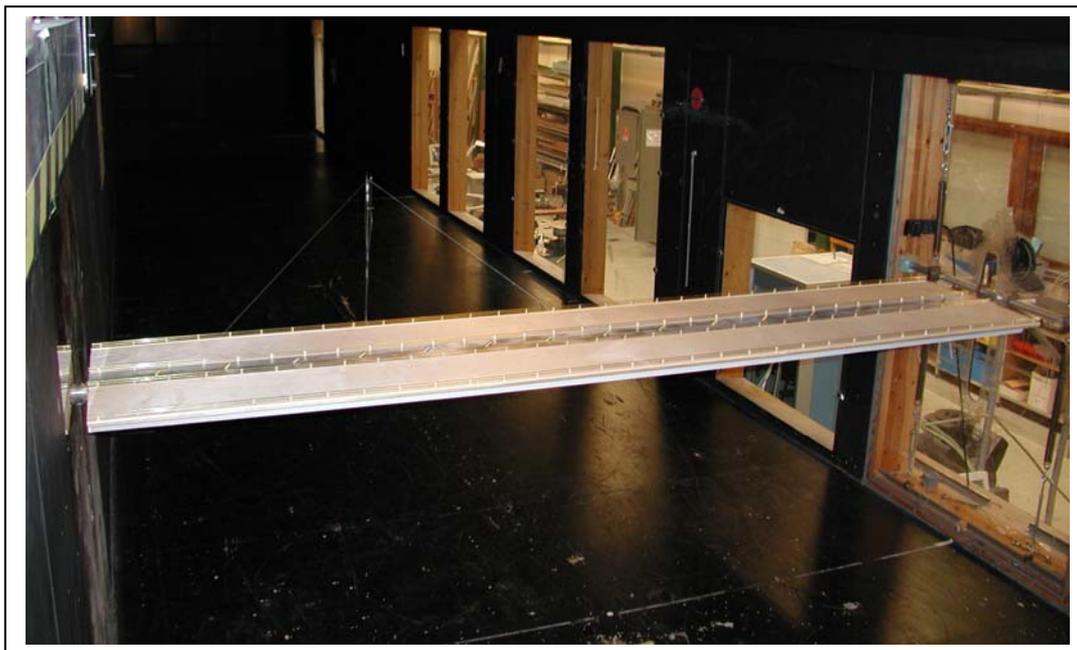
- Etapa experimental: en la que se obtiene la expresión de las fuerzas aeroelásticas L , M , D , tras la identificación de los coeficientes de flameo.
- Etapa computacional: en la que se lleva a cabo el análisis estructural del puente solicitado por las fuerzas aeroelásticas utilizando el método de los elementos finitos.

2.5.1 Fase experimental. Ensayo de modelos seccionales de puentes

Este tipo de modelos reducidos se elaboran a partir de una reproducción, a escala, de un segmento del tablero que se dispone en la cámara de ensayo. Véase Nieto^[N1], Jurado y Hernández. En la fotografía 2.5.1 se muestra el modelo seccional de puente Hong Kong-Shenzhen Western Corridor.

Sobre un modelo seccional se pueden realizar dos tipos de ensayos:

- Ensayo aerodinámico
- Ensayo aeroelástico



(I)



(II)

Figura 2.5.1. Modelo seccional de puente Hong Kong-Shenzhen Western Corridor. (I) Modelo instalado en la cámara de ensayo. (II) Detalle del modelo seccional.

2.5.1.1 Ensayo aerodinámico

En este caso el modelo reducido del tablero del puente está en la cámara de ensayo con todos sus movimientos impedidos. El objetivo que se persigue es identificar los coeficientes aerodinámicos que relacionan las fuerzas ejercidas por el flujo de aire sobre el tablero con el producto de la presión dinámica por la longitud de referencia o su cuadrado en el caso del momento. En la figura 2.5.2 se muestra el criterio de signos considerado.

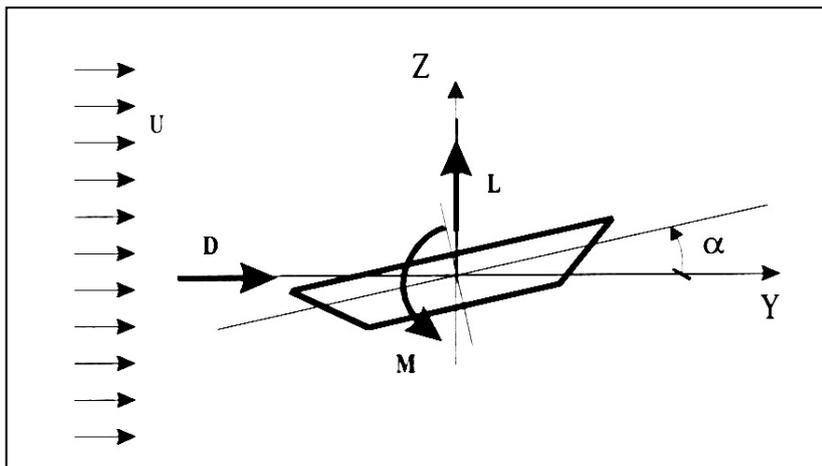


Figura 2.5.2. Esquema de una ensayo aerodinámico.

Los coeficientes aerodinámicos así definidos vienen dados por las expresiones siguientes:

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot B}; \quad C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot B}; \quad C_M = \frac{M}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot B^2} \quad (2.5.1)$$

donde D es la fuerza de empuje por unidad de longitud que actúa sobre el tablero, L es la fuerza de elevación por unidad de longitud y M es el momento según el eje longitudinal del puente por unidad de longitud de tablero. Estas fuerzas por unidad de longitud, que dependen del ángulo de ataque α como se muestra en la figura 2.5.3, quedan adimensionalizadas por el producto de la presión dinámica por la anchura del tablero B . En el ensayo, el flujo de aire debe generarse para distintos ángulos de ataque sobre el tablero, α .

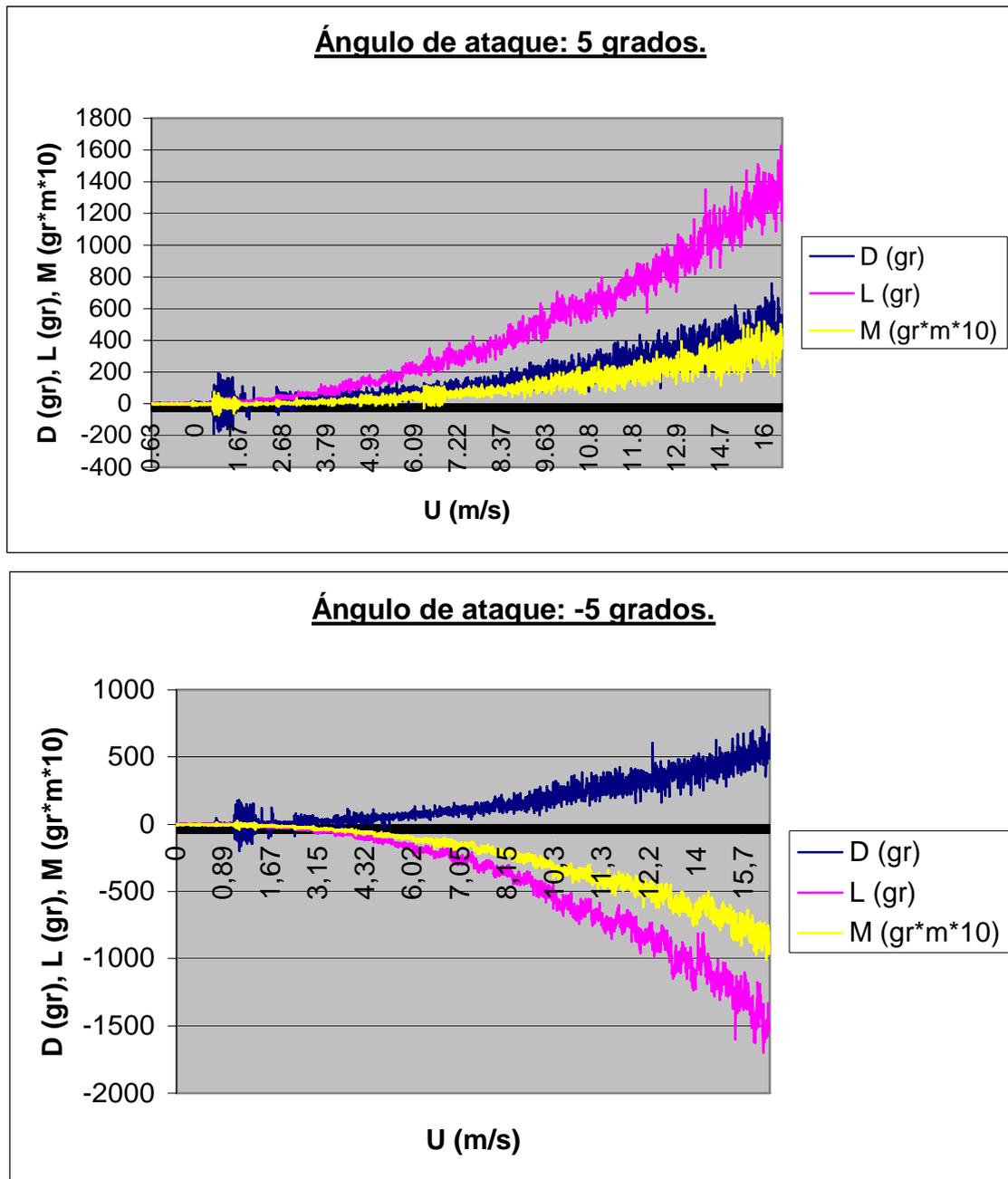
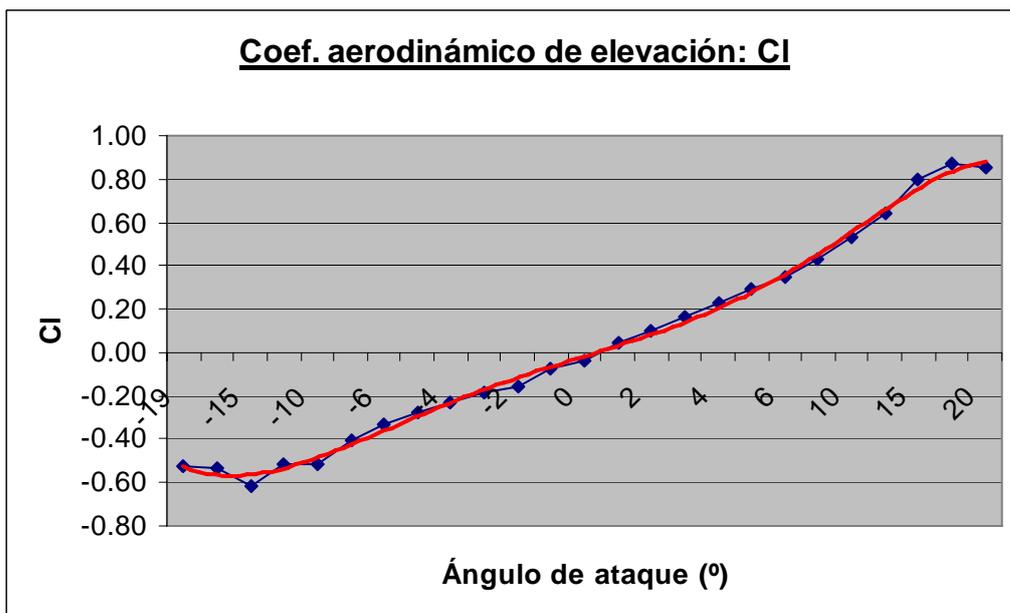
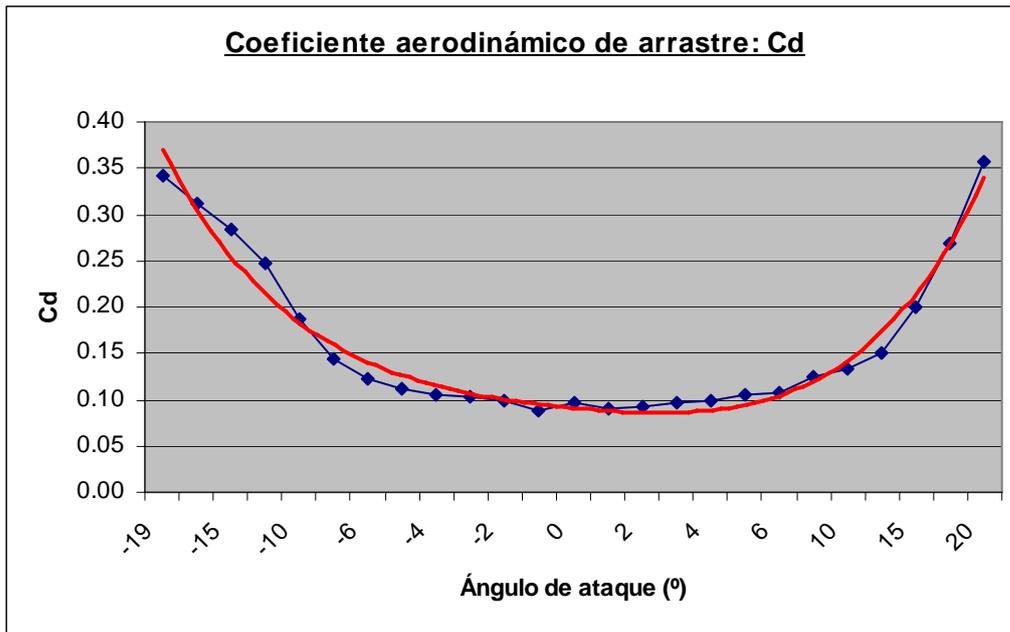


Figura 2.5.3. Fuerzas aerodinámicas medidas en un ensayo aerodinámico del tablero del puente del Great Belt para un ángulo de ataque de 5° y -5°.

Los valores de C_L , C_D y C_M obtenidos para cada valor del ángulo de ataque α , según (2.5.1) pueden ser ajustados a curvas según se indica en la figura 2.5.4, que muestra los resultados obtenidos para el tablero del puente del Great Belt según Rey^[R2], o los presentados para el tablero del puente de Tacoma por Simiu^[S1] y Scanlan en la figura 2.5.5.



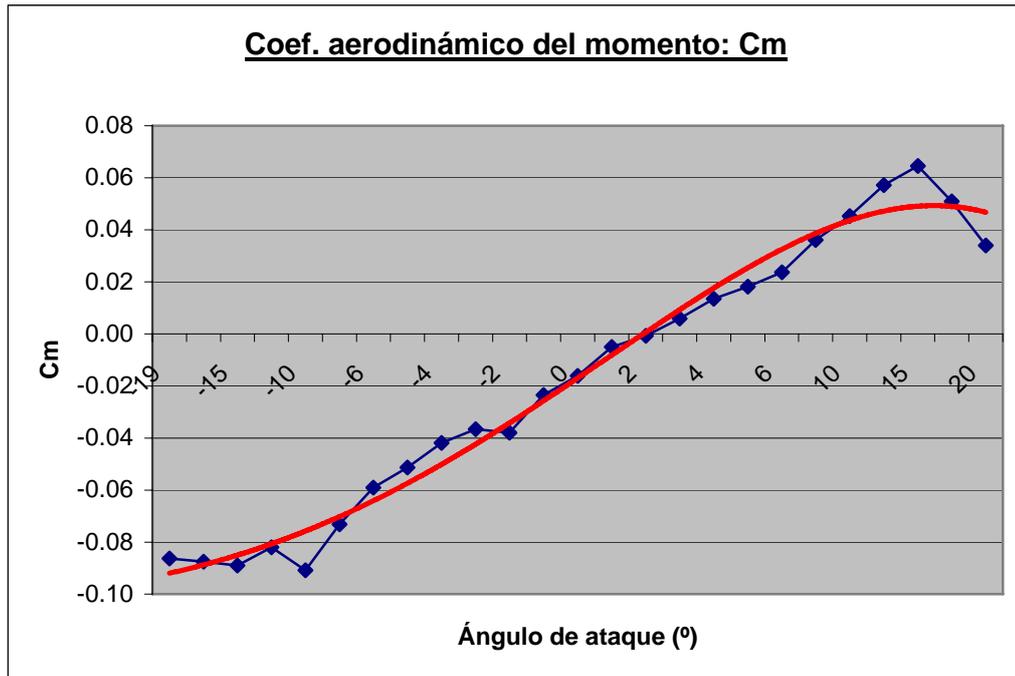


Figura 2.5.4. Coeficientes aerodinámicos del tablero del puente del Great Belt según Rey^[R2].

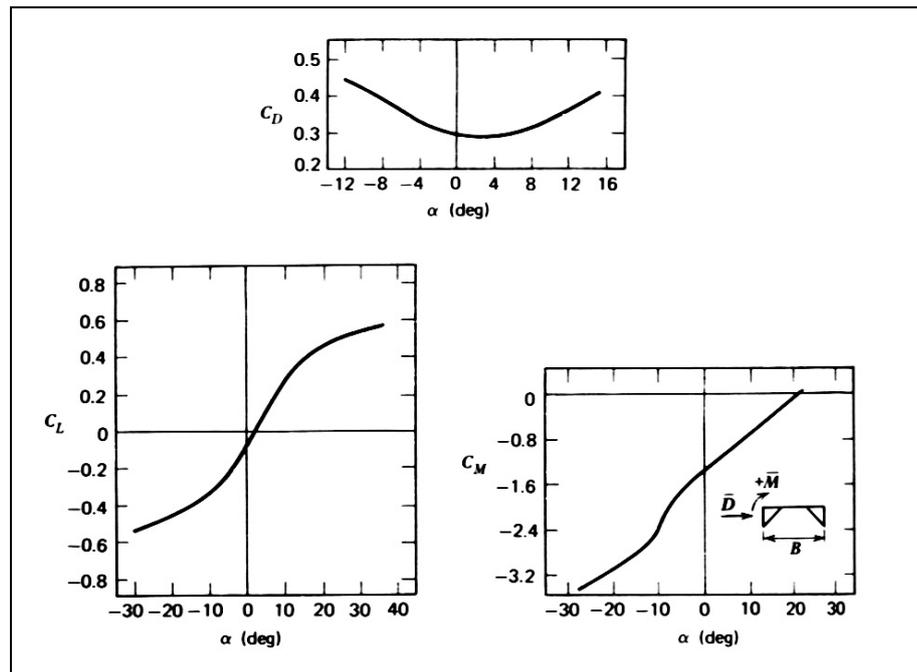


Figura 2.5.5. Coeficientes aerodinámicos del nuevo puente sobre el estrecho de Tacoma.

Los ensayos aerodinámicos suelen llevarse a cabo en instalaciones de menores dimensiones que los túneles de viento de capa límite, como son los túneles aerodinámicos. Estos túneles pueden considerarse como los herederos de los túneles que

tradicionalmente se han venido usando en el ámbito de la ingeniería aeronáutica. Se caracterizan por que su cámara de ensayos es más corta que en el caso de los túneles de capa límite. En ellos se puede generar flujo laminar o turbulento, y para este último caso se utilizan sistemas de rejilla. Con el fin de generar flujos con diferentes intensidades de turbulencia se modifica la sección de las barras que constituyen la rejilla, así como la separación entre las mismas. Otro factor que también tiene influencia es la distancia existente entre la rejilla y el modelo a ensayar. En la figura 2.5.6 se muestra una imagen del túnel de viento aerodinámico del que dispone el Grupo de Mecánica de Estructuras de la Escola Técnica Superior de Enxeñeiros de Camiños, Canais e Portos de la Universidade da Coruña. En la figura 2.5.7 se muestra el esquema de una rejilla que permite la generación de flujo turbulento.



Figura 2.5.6. Túnel de viento aerodinámico de la E.T.S.E.C.C.P. de la Universidade da Coruña

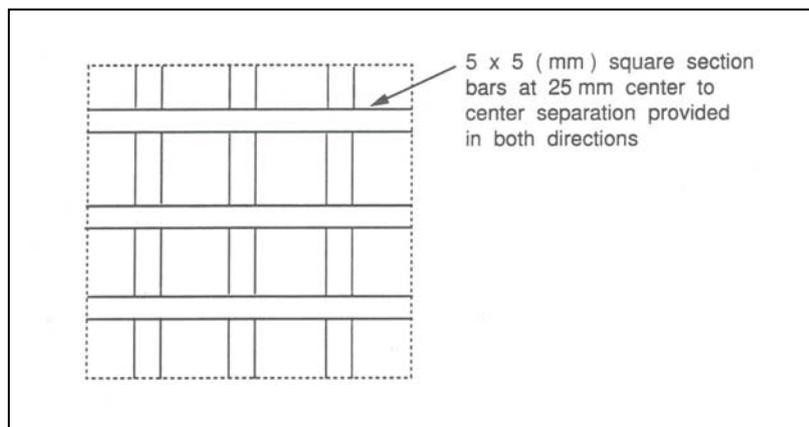


Figura 2.5.7. Dispositivo generador de turbulencia.

2.5.1.2 Ensayo aeroelástico

En este tipo de ensayo, el modelo seccional debe simular lo más exactamente posible las características dinámicas del prototipo. En consecuencia, se debe realizar un análisis dimensional y de semejanza de parámetros que permita determinar la masa apropiada para el modelo, así como la posición y rigidez de los muelles elásticos que lo soportan. En la figura 2.5.8 se muestra una fotografía de un modelo seccional del tablero del puente del Great Belt ensayado en el túnel de viento del Grupo de Mecánica de Estructuras de la Escola Técnica Superior de Enxeñeiros de Camiños, Canais e Portos de la Universidade da Coruña.

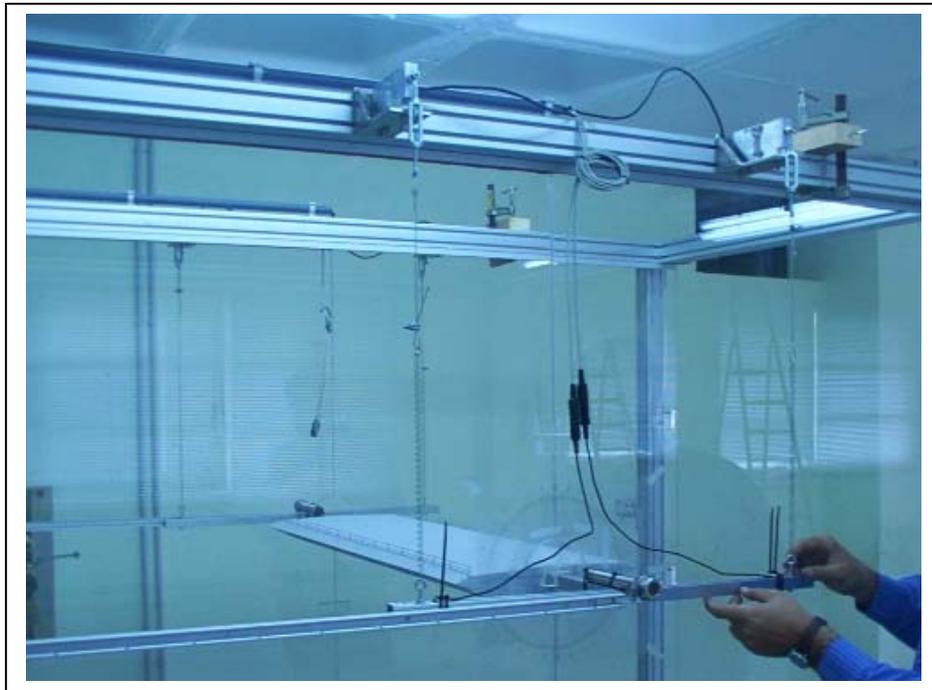


Figura 2.5.8. Modelo seccional del Gran Belt preparado para realizar un ensayo aeroelástico

El objetivo final de este tipo de ensayos es determinar los coeficientes de flameo, *flutter derivatives* en inglés, que relacionan las fuerzas aeroelásticas y los movimientos del tablero. Como se verá más adelante estas expresiones son de la forma siguiente:

$$D = \frac{1}{2} \rho U^2 B \left(KP_1^* \frac{\dot{v}}{U} + KP_2^* \frac{B\dot{\varphi}_x}{U} + K^2 P_3^* \varphi_x + K^2 P_4^* \frac{v}{B} + KP_5^* \frac{\dot{w}}{U} + K^2 P_6^* \frac{w}{B} \right) \quad (2.5.2)$$

$$L = \frac{1}{2} \rho U^2 B \left(KH_1^* \frac{\dot{w}}{U} + KH_2^* \frac{B\dot{\phi}_x}{U} + K^2 H_3^* \phi_x + K^2 H_4^* \frac{w}{B} + KH_5^* \frac{\dot{v}}{U} + K^2 H_6^* \frac{v}{B} \right) \quad (2.5.3)$$

$$M = \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 \left(KA_1^* \frac{\dot{w}}{U} + KA_2^* \frac{B\dot{\phi}_x}{U} + K^2 A_3^* \phi_x + K^2 A_4^* \frac{w}{B} + KA_5^* \frac{\dot{v}}{U} + K^2 A_6^* \frac{v}{B} \right) \quad (2.5.4)$$

donde D , L y M son las tres componentes de la fuerza aeroelástica mientras que los valores H_i^* , A_i^* , P_i^* $i=1, \dots, 6$ representan a los 18 coeficientes de flameo. Además, K es la frecuencia reducida, $K = B\omega/U$; siendo ω la frecuencia de la respuesta. En la figura 2.5.9 se representa el criterio de signos utilizado.

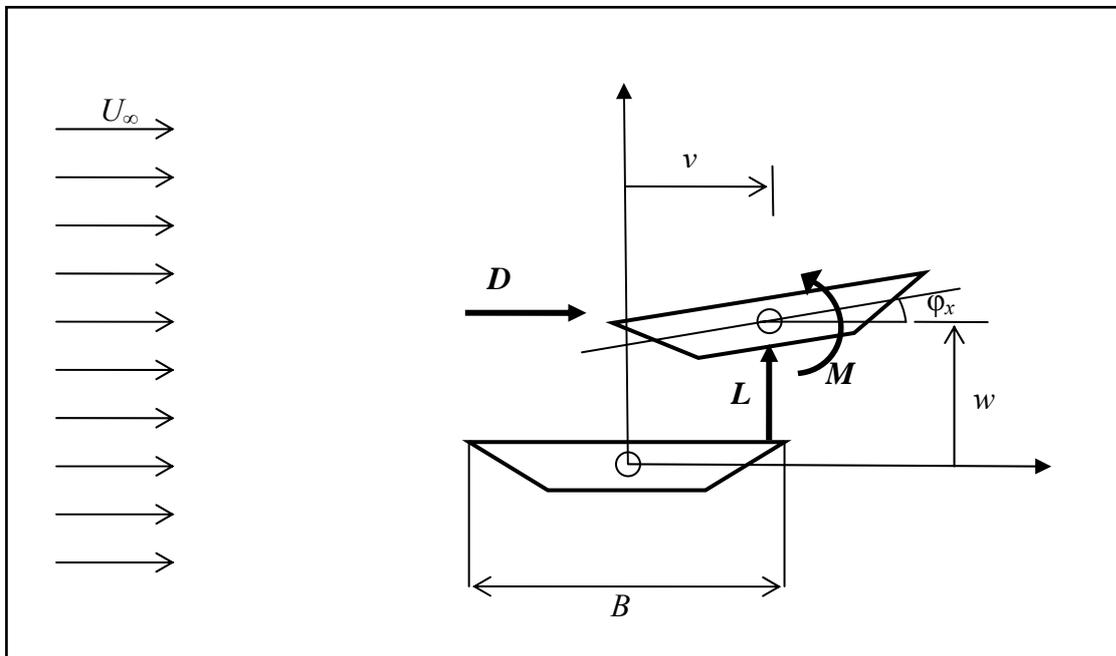


Figura 2.5.9 Fuerzas y movimientos en el ensayo aeroelástico.

En la figura 2.5.10 se adjuntan los gráficos de algunos de los coeficientes de flameo obtenidos para diversos puentes, así como los de un perfil alar, en los que U es la velocidad del viento incidente, B el ancho del tablero y n la frecuencia de oscilación. Además, en la figura 2.5.11 se muestra un posible esquema de sustentación del modelo seccional para realizar ensayos aeroelásticos.

Este tipo de ensayos fue propuesto por primera vez por Scanlan^[S2] y Tomko en 1971. Sin embargo, al emplear solamente dos grados de libertad, el giro según el eje longitudinal del tablero y el movimiento vertical, no era posible obtener todos los

coeficientes de flameo. En el año 1977 Ibrahim^[11] y Mikulcik desarrollan un método numérico con el que se analizan los resultados de sistemas con respuestas que se amortiguan exponencialmente. Basándose en este método, Sarkar^[55] y Jones pusieron a punto en 1994 una metodología para obtener simultáneamente los 18 coeficientes de flameo. Asimismo, Jurado^[11], León y Hernández también han trabajado en la obtención del conjunto completo de coeficientes de flameo.

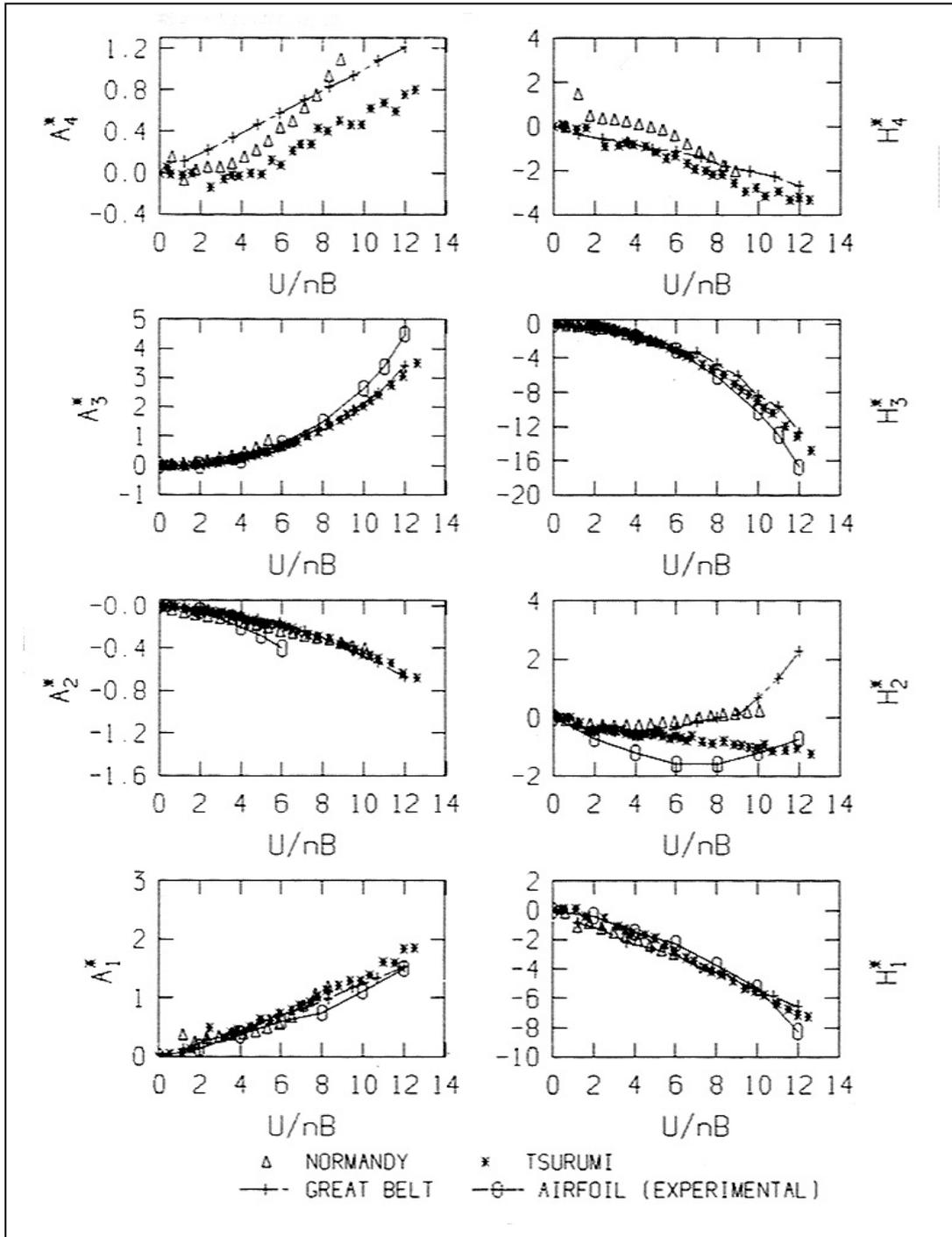


Figura 2.5.10. Ejemplos de coeficientes aeroelásticos

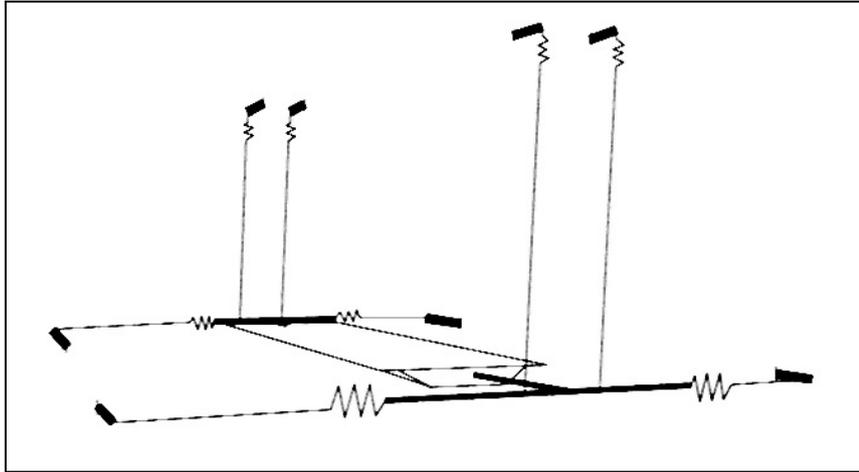


Figura 2.5.11. Esquema de sustentación en un ensayo aeroelástico

Las ventajas que el *Committee on Wind Effects* de la ASCE^[C1] destaca en relación con los ensayos sobre modelos seccionales son:

- Bajo coste de los modelos seccionales.
- La escala a la que se construye el modelo suele ser lo suficientemente grande como para reproducir pequeños detalles de la geometría de la sección con precisión.
- Tanto las propiedades geométricas y dinámicas del modelo seccional como el sistema de soporte pueden modificarse fácilmente.

En lo que se refiere a los principales inconvenientes se citan los siguientes:

- El modelo no permite reproducir el comportamiento real del puente en las proximidades de estribos y torres. Sin embargo, en estos puntos lo habitual es que el tablero esté coaccionado o que las posibles distorsiones sean de pequeña relevancia.

La metodología híbrida también permite el estudio del fenómeno del bataneo; para ello se definen las fuerzas por unidad de longitud del tablero debidas a la turbulencia del viento como sigue:

$$\begin{aligned}
L_b &= \frac{1}{2} \rho U^2 B \left[2C_L \frac{u_y}{U} + \left(\frac{dC_L}{d\alpha} + C_D \right) \frac{u_z}{U} \right] \\
D_b &= \frac{1}{2} \rho U^2 B \left[2C_D \frac{u_y}{U} + \left(\frac{dC_D}{d\alpha} \right) \frac{u_z}{U} \right] \\
M_b &= \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 \left[2C_M \frac{u_y}{U} + \left(\frac{dC_M}{d\alpha} \right) \frac{u_z}{U} \right]
\end{aligned} \tag{2.5.5}$$

donde el subíndice b hace referencia al fenómeno del bataneo, α representa el ángulo de ataque del viento incidente, $u_y(x,t)$ y $u_z(x,t)$ representan la variación respecto a la velocidad media del viento incidente según la componente transversal y vertical al tablero respectivamente, mientras que los coeficientes C_L , C_D y C_M se obtienen experimentalmente, igual que en el caso del flameo. Por último, se debe realizar el análisis estructural del puente bajo la acción conjunta de las fuerzas de flameo y de bataneo.

2.5.2 Fase computacional. Cálculo de la velocidad de flameo

Desde la década de los años 60, el profesor Robert H. Scanlan desarrolló junto a numerosos investigadores como Tomko^[S2], Sabzevari^[S6], Gade^[S7], Lin^[S8], Huston^[S9], Kumarasena^[K1] o Singh^[S10], entre otros, toda una serie de investigaciones sobre la modelización matemática de las inestabilidades aeroelásticas en puentes de gran vano. Scanlan puede ser considerado por tanto, el padre de la aeroelasticidad en el ámbito de la ingeniería civil. En la actualidad su testigo ha sido tomado por el profesor Nicholas P. Jones^[J2], actualmente investigador principal en este campo en la Johns Hopkins University en Baltimore, Maryland, USA.

En el año 1995 Jain^[J3] desarrolló junto a Scanlan y Jones una ampliación de esta teoría, añadiendo, a los dos grados de libertad clásicos del flameo (w , ω_x), el grado de libertad correspondiente al movimiento horizontal en el sentido de la dirección del viento v , y su primera derivada temporal \dot{v} . La inclusión de este grado de libertad en el análisis del flameo tiene una importancia capital ya que los tableros de puentes de gran vano presentan una gran flexibilidad en esa dirección debido a su gran longitud. Tanto es así,

que puentes como el del Great Belt, o el puente sobre el estrecho de Akashi, presentan modos laterales entre sus primeros modos de vibración, y con frecuencias menores que los modos de torsión.

El análisis multimodal consiste en expresar los movimientos de una estructura como una combinación lineal de un conjunto de los modos naturales de vibración de la misma. Éste método fue aplicado en el problema del flameo de puentes por Jain^[J3], quien expresó los movimientos del tablero como una combinación lineal de los m primeros modos naturales de vibración.

Seguidamente se presenta la formulación del flameo multimodal siguiendo la notación establecida por Jurado^[J4] y Hernández. Esta notación se adecua a la empleada habitualmente en ingeniería de estructuras, y difiere de la empleada tradicionalmente por otros autores como Scanlan^[S7], Jones^[J2] o Jain^[J3], que siguen la notación acuñada en el ámbito de la ingeniería aeronáutica. Autores como Dyrbye^[D3] y Hansen emplean notaciones diferentes de las dos antedichas que no añaden claridad. Igualmente, se pasa revista a la metodología matricial que permite formular el problema del flameo multimodal ya empleada por investigadores como Astiz^[A4], Katsuchi^[K2], Jurado^[J4] y Hernández, Mendes^[M5] o Chen^[C2] y Kareem.

El análisis aeroelástico de un tablero de un puente es un análisis dinámico en el que las fuerzas actuantes son dependientes de los movimientos del propio tablero dentro del flujo de viento.

Los modelos de cálculo habitualmente utilizados en este tipo de estructuras, tanto puentes atirantados como puentes colgantes, son modelos estructurales tridimensionales de elementos barra, como el que se muestra en la figura 2.5.12 Cabe destacar que en éstos el tablero se modela como elementos barra tridimensionales a flexión, por lo que los nudos poseen 6 grados de libertad, tres desplazamientos y tres giros, y 6 esfuerzos, esfuerzo axial, dos esfuerzos cortantes, dos momentos flectores y un momento torsor. La compatibilización de movimientos entre los movimientos del tablero y las péndolas y cables principales, se realiza mediante la definición de una serie de barras ficticias transversales a dicho tablero, que conectan a éste con los extremos de dichas péndolas o tirantes en el caso de puentes atirantados. Este tipo de modelo estructural puede ser

hallado en multitud de trabajos. Algunos de ellos son los realizados por Larsen^[L7], Cobo^[C3], Namini^[N2] y Aldbrecht, Astiz^[A4], Jurado^[J5] et al., Semião^[S11] y Mendes o Miyata^[M6] et al.

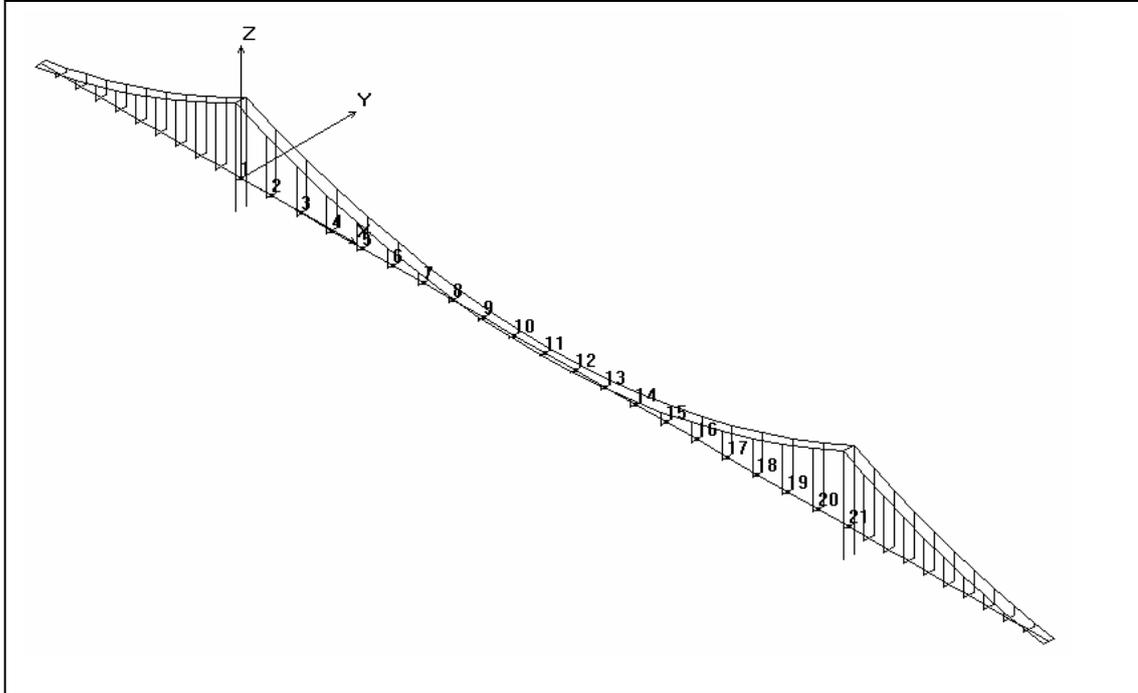


Figura 2.5.12. Modelo estructural tridimensional de un puente colgante

Las fuerzas aeroelásticas que ejerce el viento sobre el tablero se descomponen en tres acciones por unidad de longitud:

- Una fuerza de arrastre, “*drag*”, que produce una flexión lateral del tablero en el plano XY. Esta fuerza en la notación de Scanlan se denominaba como D , la notación aquí utilizada será p_y .
- Una fuerza de elevación, “*lift*”, que produce una flexión vertical del tablero en el plano XZ. Esta fuerza en la notación de Scanlan se denominaba como L , siguiendo la notación aquí utilizada será p_z .
- Un momento, “*moment*”, alrededor del eje X del tablero que produce movimientos de tipo torsional a lo largo del mismo. Esta fuerza en la notación de Scanlan se denominaba como M , la notación aquí utilizada será m_x .

Los movimientos de un nudo cualquiera de la estructura, siguiendo la notación tradicional de cálculo de estructuras estarán definidos mediante el vector

$$\mathbf{u} = (u, v, w, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)^T \quad (2.5.6)$$

cuyas componentes representan los tres desplazamientos y tres giros de cada uno de los nudos de la barra. Con esta notación las expresiones de las fuerzas aeroelásticas, véase la figura 2.5.13, resultan

$$p_y = D = \frac{1}{2} \rho U^2 B \left(KP_1^* \frac{\dot{v}}{U} + KP_2^* \frac{B\dot{\varphi}_x}{U} + K^2 P_3^* \varphi_x + K^2 P_4^* \frac{v}{B} + KP_5^* \frac{\dot{w}}{U} + K^2 P_6^* \frac{w}{B} \right) \quad (2.5.7)$$

$$p_z = L = \frac{1}{2} \rho U^2 B \left(KH_1^* \frac{\dot{w}}{U} + KH_2^* \frac{B\dot{\varphi}_x}{U} + K^2 H_3^* \varphi_x + K^2 H_4^* \frac{w}{B} + KH_5^* \frac{\dot{v}}{U} + K^2 H_6^* \frac{v}{B} \right) \quad (2.5.8)$$

$$m_x = M = \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 \left(KA_1^* \frac{\dot{w}}{U} + KA_2^* \frac{B\dot{\varphi}_x}{U} + K^2 A_3^* \varphi_x + K^2 A_4^* \frac{w}{B} + KA_5^* \frac{\dot{v}}{U} + K^2 A_6^* \frac{v}{B} \right) \quad (2.5.9)$$

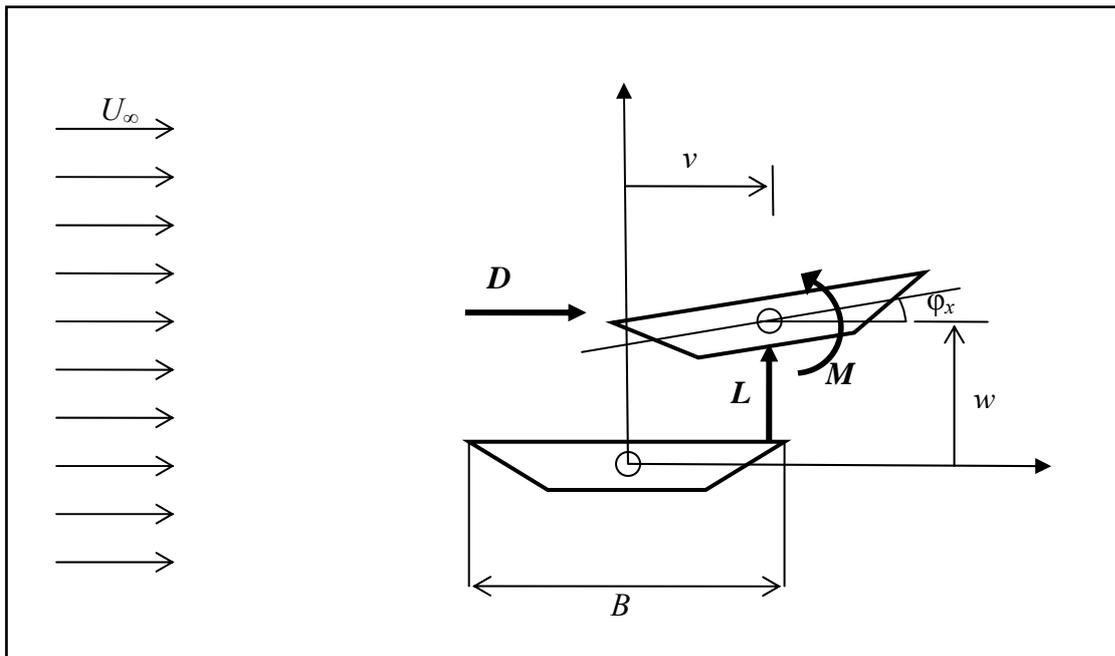


Figura 2.5.13. Movimientos y fuerzas aeroelásticas en el tablero

Dado que estas fuerzas aeroelásticas son una combinación lineal de los movimientos y velocidades de oscilación, trabajando con un modelo estructural de puente con el tablero discretizado en elementos barra, se puede definir de forma matricial un vector de cargas actuando en cada elemento barra e de la forma

$$\mathbf{f}_{ae} = \mathbf{K}_{ae} \mathbf{u}_e + \mathbf{C}_{ae} \dot{\mathbf{u}}_e \quad (2.5.10)$$

donde el subíndice a hace referencia al origen aeroelástico de los términos. Las fuerzas en los dos nudos extremos de cada barra están relacionadas con sus movimientos y velocidades por las ecuaciones (2.5.7), (2.5.8), (2.5.9), llevándose cada uno de ellos la mitad de la carga distribuida sobre el elemento. De este modo se puede establecer la expresión matricial siguiente para cada uno de los nudos $i=1,2$ en los extremos de barra

$$\mathbf{f}_{ai} = \mathbf{K}_{ai} \mathbf{u}_i + \mathbf{C}_{ai} \dot{\mathbf{u}}_i \quad (2.5.11)$$

que desarrollada queda

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \frac{l_e}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ p_y \\ p_z \\ m_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{l_e}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & pK^2 P_4^* & pK^2 P_6^* & pBK^2 P_3^* & 0 & 0 \\ 0 & pK^2 H_6^* & pK^2 H_4^* & pBK^2 H_3^* & 0 & 0 \\ 0 & pBK^2 A_6^* & pBK^2 A_4^* & pB^2 K^2 A_3^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \phi_{xi} \\ \phi_{yi} \\ \phi_{zi} \end{pmatrix} + \frac{l_e}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & pBKP_1^*/U & pBKP_5^*/U & pB^2 KP_2^*/U & 0 & 0 \\ 0 & pBKH_5^*/U & pBKH_1^*/U & pB^2 KH_2^*/U & 0 & 0 \\ 0 & pB^2 KA_5^*/U & pB^2 KA_1^*/U & pB^3 KA_2^*/U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{v}_i \\ \dot{w}_i \\ \dot{\phi}_{xi} \\ \dot{\phi}_{yi} \\ \dot{\phi}_{zi} \end{pmatrix} \quad (2.5.12)$$

donde l_e es la longitud del elemento y $p = \rho U^2 / 2$ es la presión dinámica del viento a velocidad U . Con esta notación matricial, el vector de fuerzas aeroelásticas para un elemento barra del tablero según la ecuación (2.5.10) resulta

$$\mathbf{f}_{ae} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{a1} \\ \mathbf{f}_{a2} \end{pmatrix} = \mathbf{K}_{ae} \mathbf{u}_e + \mathbf{C}_{ae} \dot{\mathbf{u}}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{a1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{a2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{a1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{a2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}_1 \\ \dot{\mathbf{u}}_2 \end{pmatrix} \quad (2.5.13)$$

Ensamblando para todos los elementos que constituyen el tablero, se obtiene el vector global de fuerzas aeroelásticas \mathbf{f}_a , así como las matrices globales aeroelásticas \mathbf{K}_a y \mathbf{C}_a , que cumplen

$$\mathbf{f}_a = \mathbf{K}_a \mathbf{u} + \mathbf{C}_a \dot{\mathbf{u}} \quad (2.5.14)$$

siendo la dimensión de los vectores \mathbf{f}_a y \mathbf{u} , el número de grados de libertad en el tablero $n=6N$, siendo N el número de nudos en que se ha discretizado el tablero, y la dimensión de las matrices aeroelásticas \mathbf{K}_a y \mathbf{C}_a de $6N \times 6N$, aunque observando sus desarrollos en (2.5.12) sólo poseen $3N \times 3N$ términos no nulos en general.

Con esta notación matricial, el sistema de ecuaciones que gobierna el comportamiento dinámico de un tablero sometido a unas fuerzas de origen aeroelástico es

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}_a = \mathbf{K}_a \mathbf{u} + \mathbf{C}_a \dot{\mathbf{u}} \quad (2.5.15)$$

siendo \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del tablero. Pasando los términos de las fuerzas aeroelásticas al lado izquierdo de la igualdad resulta

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + (\mathbf{C} - \mathbf{C}_a)\dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{K} - \mathbf{K}_a)\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.5.16)$$

que representa el movimiento de un sistema amortiguado en vibración libre, en el que las matrices de rigidez y amortiguamiento han sido modificadas por las fuerzas aeroelásticas inducidas por el viento.

Aplicando el análisis modal a los movimientos del tablero, la solución del problema definido en la ecuación anterior puede ser aproximada como una combinación lineal de los m modos más significativos

$$\mathbf{u} = \sum_{r=1}^m \phi_r q_r = \Phi \mathbf{q} \quad (2.5.17)$$

donde los modos de vibración ϕ_r pueden ser calculados para el puente completo, en teoría lineal o teniendo en cuenta la no linealidad geométrica propia de los puentes de gran vano, y sólo incluyen los términos correspondientes a los grados de libertad del tablero. Φ es la matriz modal de orden $n \times m$, siendo n el número de grados de libertad del tablero y m el número de modos de vibración considerado, definida del siguiente modo:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_{1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \phi_{1,m} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \phi_{n,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \phi_{n,m} \end{pmatrix} \quad (2.5.18)$$

y cada elemento del vector \mathbf{q} representa la participación de cada uno de los modos de vibración en el vector de movimientos \mathbf{u} .

Introduciendo la ecuación (2.5.17) en (2.5.16) y premultiplicando por Φ^T se obtiene:

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{q}} + \Phi^T (\mathbf{C} - \mathbf{C}_a) \Phi \dot{\mathbf{q}} + \Phi^T (\mathbf{K} - \mathbf{K}_a) \Phi \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (2.5.19)$$

Definiendo las siguientes matrices reducidas de dimensión $m \times m$

$$\mathbf{M}_R = \Phi^T \mathbf{M} \Phi \quad \mathbf{C}_R = \Phi^T (\mathbf{C} - \mathbf{C}_a) \Phi \quad \mathbf{K}_R = \Phi^T (\mathbf{K} - \mathbf{K}_a) \Phi \quad (2.5.20)$$

y teniendo en cuenta que los modos de vibración se normalizan con respecto a la masa, de modo que la matriz de masas reducida coincide con la matriz unitaria ($\mathbf{M}_R = \mathbf{I}$), la expresión (2.5.19) resulta

$$\mathbf{I} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_R \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_R \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (2.5.21)$$

donde las componentes de las matrices \mathbf{C}_R y \mathbf{K}_R , suponiendo un amortiguamiento tipo Rayleigh^[H7], verifican para $i, j=1, \dots, m$

$$\begin{aligned}
C_{R,ij} &= -\sum_{r=1}^n \phi_{ri} \left(\sum_{s=1}^n C_{a,rs} \phi_{sj} \right) \text{ con } i \neq j \\
C_{R,ii} &= 2\xi_i \omega_i - \sum_{r=1}^n \phi_{ri} \left(\sum_{s=1}^n C_{a,rs} \phi_{si} \right) \\
K_{R,ij} &= -\sum_{r=1}^n \phi_{ri} \left(\sum_{s=1}^n K_{a,rs} \phi_{sj} \right) \text{ con } i \neq j \\
K_{R,ii} &= \omega_i^2 - \sum_{r=1}^n \phi_{ri} \left(\sum_{s=1}^n K_{a,rs} \phi_{si} \right)
\end{aligned} \tag{2.5.22}$$

siendo ω_i y ϕ_i la frecuencia natural de vibración y el coeficiente de amortiguamiento clásico del modo ϕ_i , respectivamente.

Para resolver el problema formulado en (2.5.21) para la respuesta aeroelástica del tablero, se supone una oscilación amortiguada en el tiempo de modo que

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{w} e^{\mu t} \tag{2.5.23}$$

por lo que la ecuación (2.5.21) puede ser reformulada como

$$\left(\mu^2 \mathbf{I} \mathbf{w} + \mu \mathbf{C}_R \mathbf{w} + \mathbf{K}_R \mathbf{w} \right) e^{\mu t} = \mathbf{0} \tag{2.5.24}$$

Utilizando la identidad siguiente

$$-\mu \mathbf{I} \mathbf{w} + \mu \mathbf{I} \mathbf{w} = \mathbf{0} \tag{2.5.25}$$

y combinando ambas expresiones se obtiene

$$\left[\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu^2 \mathbf{w} \\ \mu \mathbf{w} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{C}_R & \mathbf{K}_R \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu \mathbf{w} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} \right] e^{\mu t} = \mathbf{0} \tag{2.5.26}$$

Definiendo

$$\mathbf{w}_\mu = \begin{pmatrix} \mu \mathbf{w} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\mathbf{C}_R & -\mathbf{K}_R \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.5.27)$$

la ecuación (2.5.26) puede escribirse del modo siguiente

$$(\mathbf{A} - \mu \mathbf{I}) \mathbf{w}_\mu e^{\mu t} = \mathbf{0} \quad (2.5.28)$$

que constituye un problema no lineal de valores y vectores propios.

La solución de este problema de valores propios al que conduce el análisis del comportamiento aeroelástico de un tablero de puente afectado por un viento de velocidad genérica U , proporciona en general $2m$ valores propios complejos de la forma

$$\mu_j = \alpha_j + i\beta_j \quad j = 1, \dots, m \quad (2.5.29)$$

y además, si un valor propio es complejo, también es valor propio su complejo conjugado

$$\bar{\mu}_j = \alpha_j - i\beta_j \quad j = 1, \dots, m \quad (2.5.30)$$

A cada par de valores propios complejos conjugados le corresponde un par de vectores propios complejos conjugados entre sí, de dimensión $2m$

$$\mathbf{w}_\mu = \mathbf{w}_{\mu R} + i\mathbf{w}_{\mu I} \quad \bar{\mathbf{w}}_\mu = \mathbf{w}_{\mu R} - i\mathbf{w}_{\mu I} \quad (2.5.31)$$

Cada pareja de vectores propios conjugados junto con sus correspondientes valores propios conjugados, define una forma de oscilación amortiguada del tablero, que se expresa como

$$\mathbf{u} = \Phi \mathbf{w} e^{\mu_j t} = \Phi (\mathbf{w}_R + i\mathbf{w}_I) e^{(\alpha_j + i\beta_j)t} \quad (2.5.32)$$

donde \mathbf{w} es un vector de dimensión m que es parte de la definición de \mathbf{w}_μ , ya indicada anteriormente

$$\mathbf{w}_\mu = \begin{pmatrix} \mu \mathbf{w} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} \quad (2.5.33)$$

Si se separan las partes real e imaginaria de (2.5.32) se obtiene:

$$\mathbf{u} = \Phi \left[\mathbf{w}_R \cos(\beta_j t) - \mathbf{w}_I \sin(\beta_j t) \right] e^{\alpha_j t} + i \Phi \left[\mathbf{w}_R \sin(\beta_j t) + \mathbf{w}_I \cos(\beta_j t) \right] e^{\alpha_j t} \quad (2.5.34)$$

expresión que puede ser comparada con la que define las vibraciones libres amortiguadas de un oscilador lineal con un grado de libertad:

$$u(t) = \left[A \cos(\omega_a t) - B \sin(\omega_a t) \right] e^{-\xi_a \omega t} \quad (2.5.35)$$

en la que A y B son constantes que dependen de las condiciones iniciales de la oscilación, ω es la frecuencia natural, $\omega_a = \omega \sqrt{1 - \xi_a^2}$ es la frecuencia de la respuesta amortiguada y φ_a es el amortiguamiento. Comparando estas dos últimas expresiones, (2.5.34) y (2.5.35), se puede establecer el siguiente paralelismo: La parte imaginaria de los valores propios β_j juega el papel de la frecuencia amortiguada ω_a en el oscilador lineal, mientras que la parte real α_j se asocia al producto $(-\xi_a \omega)$, quedando así definidos, en un tablero excitado con cargas aeroelásticas, los parámetros característicos de la respuesta del sistema: la frecuencia de respuesta j -ésima, $\omega_{aj} = \beta_j$ y el coeficiente

de amortiguamiento j -ésimo, $\xi_{aj} = \frac{-\alpha_j}{\sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2}}$.

- *Paso 1: Resolución del problema de autovalores para una velocidad de viento U*

La resolución del problema de valores propios $(\mathbf{A} - \mu \mathbf{I}) \mathbf{w}_\mu = \mathbf{0}$ en busca de las m parejas de valores propios conjugados $\mu_j = \alpha_j \pm i \beta_j$ ha de realizarse siguiendo un proceso iterativo, puesto que en la construcción de la matriz \mathbf{A} intervienen los coeficientes de flameo, que son función de la frecuencia reducida del sistema $K = B \omega_a / U$. Pero la frecuencia asociada a cada modo $\omega_{aj} \equiv \beta_j$ no se conoce hasta que se ha resuelto el problema de valores propios. Un ejemplo de técnica iterativa que

resuelve este problema se puede encontrar en Jurado^[J6]. En la figura 2.5.14 se muestra un diagrama de flujo en el que queda recogido el procedimiento iterativo propuesto. Los significados de los valores de β utilizados son:

β_{jp} : Valor de partida para la frecuencia de vibración del modo j .

β_l : Parte imaginaria de uno cualquiera de los $2m$ valores propios obtenidos con

$$\left[\mathbf{A}(\beta_{jp}) - \mu \mathbf{I} \right] \mathbf{w}_\mu = \mathbf{0}$$

β_{md} : Parte imaginaria del valor propio que hace mínima la diferencia $|\beta_{jp} - \beta_l|$.

β_j : Frecuencia de respuesta del modo j obtenida después de la convergencia. Este valor

cumple: $\left[\mathbf{A}(\beta_{jp}) - (\alpha_j \pm \beta_j) \mathbf{I} \right] \mathbf{w}_\mu = \mathbf{0}$.

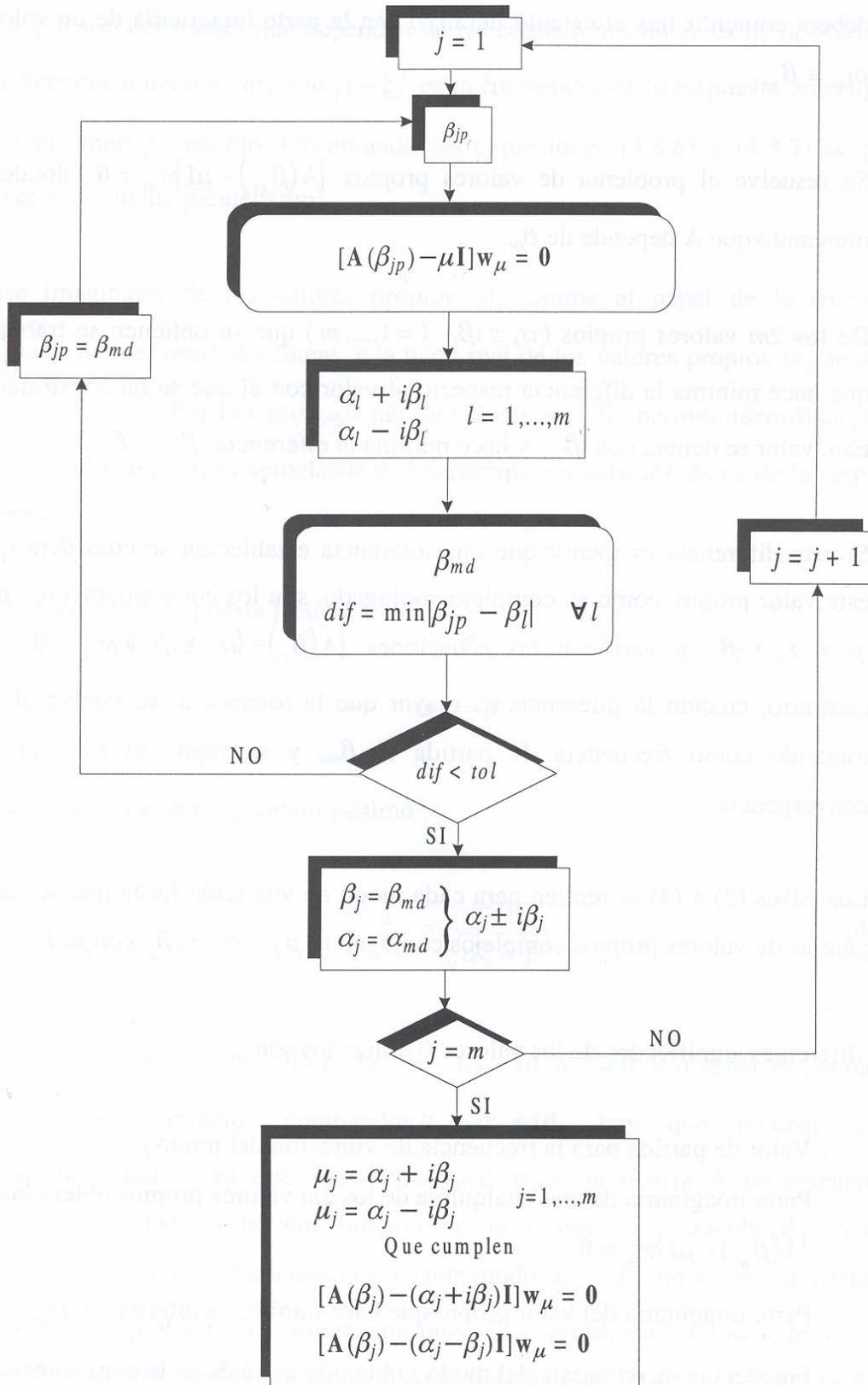


Figura 2.5.14. Diagrama de flujo para la obtención de la respuesta aeroelástica.

- *Paso 2: Obtención de la velocidad crítica de flameo*

Atendiendo a la ecuación (2.5.34), si para una determinada velocidad de viento U , son negativas todas las partes reales α_j de cada uno de los valores propios complejos obtenidos tras la resolución del problema de valores propios definido en (2.5.28), el amortiguamiento efectivo del tablero será siempre positivo, y se obtiene una respuesta aeroelástica que se atenúa exponencialmente con el tiempo, tendiendo a la estabilidad. Por lo tanto la condición crítica de flameo incipiente se produce para la velocidad más baja de viento con la que se obtiene un valor propio complejo con parte real nula, es decir, la transición entre amortiguamientos positivos (oscilaciones atenuadas) y amortiguamientos negativos (oscilaciones de amplitud creciente). Por tanto,

$$\alpha_j = 0 \quad \xi_{min} = \min(\xi_{aj}) = \min\left(\frac{-\alpha_j}{\sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2}}\right) = 0 \quad (2.5.36)$$

identifica la condición crítica de flameo, donde además la parte imaginaria de dicho valor propio β_j es la frecuencia de vibración con la que se producen las oscilaciones en la situación de flameo.

De nuevo, el proceso de búsqueda de la velocidad de flameo se convierte en un proceso iterativo, en el que se parte de una velocidad de viento U suficientemente baja, de modo que $\alpha_j < 0 \quad j=1, \dots, m$. El proceso prosigue incrementando progresivamente la velocidad U hasta que se verifica la condición de flameo definida en (2.5.36). Dicha velocidad de viento U_f producirá la inestabilidad por flameo en el tablero. En la figura 2.5.15 se adjunta el diagrama de flujo en el que se muestra el proceso a seguir para determinar la velocidad de flameo elaborado por Jurado^[16].

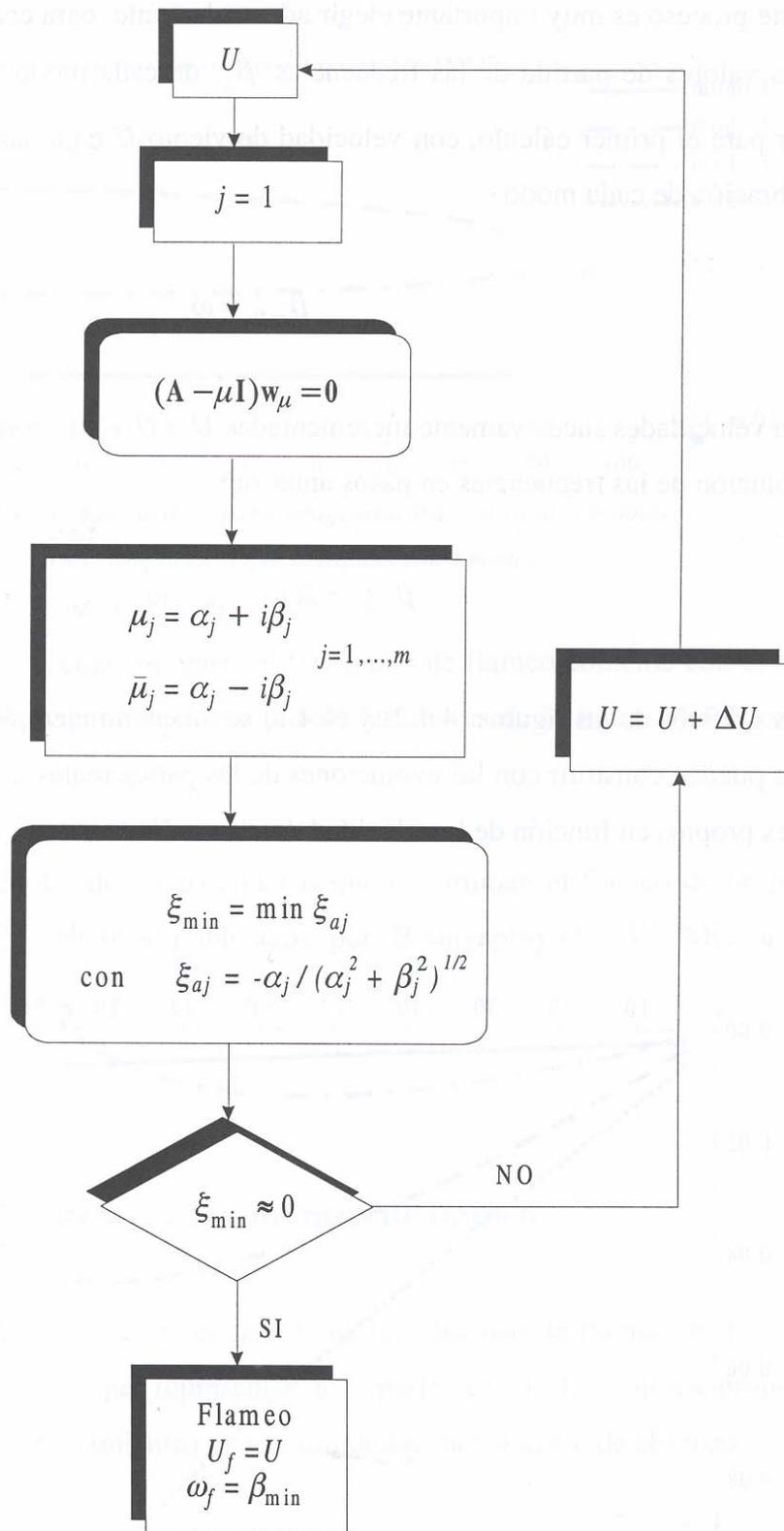


Figura 2.5.15. Diagrama de flujo para la obtención de la velocidad de flameo.

La metodología en la que se combina el empleo de ensayos aeroelásticos en túneles de viento aerodinámicos, con la formulación propia de la aeroelasticidad computacional que se ha desarrollado, es una metodología híbrida, puesto que se debe recurrir a datos experimentales para la identificación de los coeficientes de flameo que permiten el cálculo numérico de los parámetros aeroelásticos de cada puente. Esta metodología presenta ventajas e inconvenientes con respecto a la completamente experimental descrita con anterioridad. Entre las ventajas se encuentra el hecho de que las instalaciones y el ensayo en sí son más baratos en términos económicos, pero se pierde la clara visualización de las deformaciones del modelo que se observan en los ensayos de los modelos de puentes completos en túneles de viento de capa límite. Este problema ha sido solucionado por Hernández^{[H3][H4][H5][H6]}, Jurado y Mosquera al transferir los resultados de la deformación del puente obtenidos de los estudios aeroelásticos usando una metodología híbrida, a un modelo digital del puente completo. Véase la figura 2.5.16 en la que utilizando los resultados aeroelásticos que arroja la metodología híbrida, y por medio de un modelo digital de gran realismo del puente completo, se visualiza el comportamiento dinámico y aeroelástico del mismo.

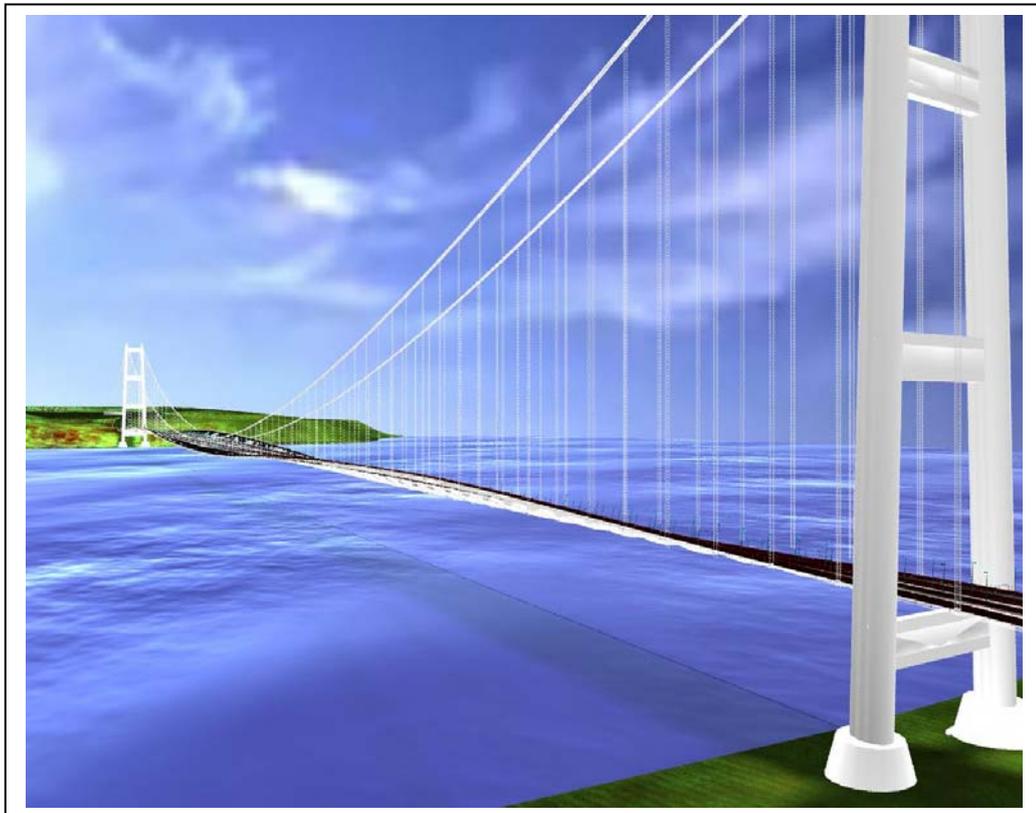


Figura 2.5.16. Imagen digital de la deformación aeroelástica del puente sobre el estrecho de Messina.

La metodología híbrida descrita en este apartado presenta una serie de ventajas que merece la pena resaltar:

- Requiere instalaciones de bajo coste en su fase experimental, con los beneficiosos efectos que se comentaron en apartados anteriores.
- La fase computacional se ve favorecida por el actual desarrollo de las capacidades de los ordenadores digitales, lo que permite hacer cada vez modelos estructurales más refinados con análisis multimodales en los que se considera un elevado número de modos.
- Permite un enfoque multidisciplinar incorporando otros ámbitos científicos como la visualización avanzada, ya indicada anteriormente, o la aplicación de técnicas de programación distribuida u optimización numérica.

Por todos estos aspectos, esta metodología ha sido la utilizada en esta investigación y algunos de los nuevos enfoques indicados han sido implementados satisfactoriamente.

2.6 REFERENCIAS

[A1] Astiz M. A. [1996] *Wind Related Behaviour of Alternative Suspension Systems*. 15th IABSE Congress Report, Copenhagen, pp. 1079-1090.

[A2] Anagnostopoulos P. [1997] *Computer-aided Flow Visualization and Vorticity Balance in the laminar Wake of a Circular Cilinder*. Journal of Fluids and Structures, Vol 11, pp 33-72.

[A3] Alan G. Davenport Wind Engineering Group, The Boundary Layer Wind Tunnel Laboratory and The University of Western Ontario, London, Ontario, Canada. [2004] <http://blow.blwtl.uwo.ca/blwtlhom.htm>

[A4] Astiz M. A. [1999] *Flutter Stability of Very Long Suspension Bridges*. Journal of Bridge Engineering, Vol. 3, N° 3, August, pp.132-139.

[B1] Bisplinghoff R. L., Ashley H., Halfman R. L. [1996] *Aeroelasticity*. Dover Publications, Inc. New York.

[B2] Braza M., Chassaing P., Minh H. H. [1986] *Numerical Study and Physical Analysis of the Pressure and Velocity fields in the near Wake of a Circular Cylinder*. Journal of Fluid Mechanics, Vol 165, pp. 79-130.

[C1] Committee on Wind Effects of the Committee on Dynamic Effects of the Structural Division of the American Society of Civil Engineers [1987] *Wind Loading and Wind-Induced Structural Response*. American Society of Civil Engineers (ASCE).

[C2] Chen X., Kareem A. [2002] *Advanced Analysis of Coupled Buffeting Response of Bridges: a Complex Modal Decomposition Approach*. Probabilistic Engineering Mechanics. Vol 17, N° 2, pp. 201-213.

[C3] Cobo del Arco D. [1998] *An analysis of wind stability. Improvements to the response of suspension bridges*. Tesis doctoral de la Universitat Politècnica de Catalunya. Escola Tècnica Superior D'Enginyers de Camins, Canals i Ports. (Director: Prof. Àngel Aparicio)

[D1] Dawes W. N. [1993] *Simulating Unsteady Turbomachinery Flows on Unstructured Meshes wich adap both in Time and Space*. International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exposition, Cincinnati, Ohio. 1993.

[D2] Davenport A. G., Isyumov N. [1968] *The application of the boundary-layer wind tunnel to the prediction of wind loading*. Proceedings of the International Research Seminar on Wind Effects on Buildings and Structures. Univ. of Toronto Press, Toronto, pp.201-230.

[D3] Dyrbye C., Hansen S. O. [1996] *Wind Loads on Structures*. John Wiley & Sons.

[F1] Fujino Y., Yoshida Y. [2002] *Wind-Induced Vibration and Control of Trans-Tokyo Bay Crossing Bridge*. Journal of Structural Engineering. Vol. 128, N° 8, August, pp. 1012-1025.

[F2] Frandsen J. B., McRobie F. A. [2004] *Bridge Deck Aeroelasticity using FE*. <http://www.fsi.lsu.edu/~frandsen/approach.html>

[F3] Farquharson F. B., Smith F. C. Vincent G. S. [1949-1954] *Aerodynamic Stability of Suspension Bridges with special reference to the Tacoma Narrows Bridge*. University of Washington Engineering Experiment Station. Bulletin nº 116, Parts I to V.

[F4] Fung Y. C. [1955] *An Introduction to the Theory of Aeroelasticity*. Dover Publication, Inc. New York.

[F5] Frandsen J. B., McRobie F. A. [1999] *Computational Aeroelastic Modelling to guide long-span Bridge cross-section Design*. 10th International Conference on Wind Engineering. Copenhagen. 1999.

[F6] Force Technology home page. [2004] <http://www.force.dk/gb/default.htm>

[H1] Holmes J. D., [2001] *Wind Loading of Structures*. Spon Press. London.

[H2] Honshu-Shikoku Bridge Authority home page. [2004] <http://www.hsba.go.jp/bridge/akdesign.htm>

[H3] Hernández S. [2001] *Virtual Visualization of Aeroelastic Behaviour of Suspension Bridges*. IABSE Conference in Cable Supported Bridges. Challenging Technical Limits. Seoul, 12-14 Junio 2001.

[H4] Hernández S., Jurado J. A., Mosquera A. [2002] *Multidisciplinary and multiobjective aeroelastic design of long span bridges*. In-Vento 2002. International Workshop on Long Span Bridge Aerodynamics. Milan, September 15-18, 2002.

[H5] Hernández S. Jurado J. Á., Mosquera A. [2003] *Virtual Wind Tunnels for Aeroelastic Design of Cable Supported Bridges*. 11th International Conference on Wind Engineering. Lubbock, Texas, USA. 2-5 Junio 2003.

- [H6] Hernández S., Jurado J. Á. [2004] *Computer Animations of the Aeroelastic Behaviour of the Proposed Messina Bridge*. In-Vento 2004. 5° Convegno Nazionale di Ingegneria del Vento. Reggio Calabria. 21-23 Junio 2004.
- [H7] Hart G. C., Wong K. [2000] *Structural Dynamics for Structural Engineers*. John Wiley & Sons, Inc.
- [I1] Ibrahim S. R., Mikulcik E. C. [1977] *A method for the direct identification of vibration parameters from the free response*. The Shock and Vibration Bull. 47, (Part 4).
- [J1] Jurado J.Á., León A., Hernández S. [2005] *Wind Tunnel Control Software for Identification of Flutter Derivatives on Bridge Section Tests*. The fourth European & African Conference on Wind Engineering. Prague, 11-15 July. Paper #108.
- [J2] Jones N. P., Jain A., Katsuchi H. [1998] *Advances (and challenges) in the prediction of long-span bridges response to wind*. Bridge Aerodynamics. Edit. By Larsen A. & Soren E. A. A. Balkema/Rotterdam/Brookfield.
- [J3] Jain A. [1996] *Multi-Mode Aeroelastic and Aerodynamic Analysis of Long-Span Bridges*. A dissertation submitted to The Johns Hopkins University in conformity with the requirements for the degree of Doctor of Philosophy.
- [J4] Jurado J. A., Hernández S. [1999] *Design of Ultra-Long Span Bridges With Aeroelastic Constraints*. Optimization in Industry II, Junio, Banff, (Alberta) Canada.
- [J5] Jurado J. Á., Mosquera A., Nieto F., Hernández S. [2004] *Configuraciones Óptimas de Cables en Puentes Atirantados según Análisis de Sensibilidad de su Comportamiento Aeroelástico*. Congresso de Métodos Computacionais em Engenharia. Lisboa, Portugal. 31 Mayo-2 Junio 2004.
- [J6] Jurado J. A. [2001] *Análisis Aeroelástico y de Sensibilidad del Fenómeno de Flameo en Puentes Soportados por Cables*. Tesis doctoral de la Universidade da Coruña. Escola Técnica Superior de Enxeñeiros de Camiños, Canais e Portos.

[K1] Kumarasena T. [1989] *Wind response prediction of long-span bridges*. PhD thesis, The Johns Hopkins University, Baltimore, MD, USA.

[K2] Katsuchi H., Saeki S., Miyata T., Sato H. [1998] *Analytical assessment in wind resistant design of long-span bridges in Japan*. Proceedings of the international symposium on advances in bridge aerodynamics. Copenhagen (Denmark), 10-13 May. Pp87-98.

[L1] Larose G. L., Franck N. [1997] *Early Wind Engineering experiments in Denmark*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 72: 493-9

[L2] Lecointe, Y., Piquet J. [1989] *Flow Structure in the Wake of an Oscillating Cylinder*. Journal of Fluid Engineering. Vol 111, pp. 139-148.

[L3] Larsen A. [1998] *Advances in Aeroelastic Analyses of Suspension and Cable-stayed Bridges*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. Vol 74-76, pp. 73-90.

[L4] Larsen A., Walther J. H. [1998] *Discrete Vortex Simulation of Flow around Five generic Bridge Deck Sections*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, Vol 77-78, pp. 591-602.

[L5] Larsen A., Walther J. H. [1996] *Aeroelastic Analysis of Bridge Girder Sections based on Discrete Vortex Simulations*. 2nd International Conference on Computational Wind Engineering. Colorado, USA. 1996

[L6] Lopes A. V., Cunha A., Simoes L. M. C. [2004] *Modelo Computacional de Análise Aeroelástica das Condições de Utilização de Estruturas Esbeltas*. Congresso de Metodos Computacionais em Engenharia. 31 Mayo-2 Junio. Lisboa, Portugal.

[L7] Larsen A. [1993] *Aerodynamic aspects of the final design of the 1624 m suspension bridge across the Great Belt*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 48, pp.261-285.

- [M1] Meseguer J., Sanz A., Perales J. M., Pindado S. [2001] *Aerodinámica Civil. Cargas de Viento en las Edificaciones*. McGraw-Hill/Interamericana de España, S. A. U. Madrid.
- [M2] Morgenthal G. [2000] *Fluid-Structure Interaction in Bluff-Body Aerodynamics and Long-Span Bridge Design: Phenomena and Methods*. Technical Report. University of Cambridge, Department of Engineering.
- [M3] Morgenthal G. [2000] *Comparison of Numerical Methods for Bridge-Deck Aerodynamics*. Thesis submitted to the University of Cambridge in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Philosophy.
- [M4] Mosquera A., [2003] *Sensibilidad Analítica de la Vibración Libre y del Flameo en Puentes Colgantes de Gran Vano en Servicio y en Fase Constructiva*. Tesis doctoral de la Universidade da Coruña. Escola Técnica Superior de Enxeñeiros de Camiños, Canais e Portos.
- [M5] Mendes P. [1997] *Estabilidade Aerodinâmica de Pontes*. Cálculo da Velocidade Crítica de Flutter. Relatório ICIST, DT N°19/97.
- [M6] Miyata T., Yamada H., Katsuchi H. [2003] *Comparative Analysis of Messina Bridge – International Benchmark study*. 11th International Conference on Wind Engineering. Lubbock, Texas, USA. 2-5 Junio 2003.
- [N1] Nieto F., Jurado J. Á., Hernández S. [2002] *Ensayos Aeroelásticos de Modelos Seccionales de Tableros de Puentes*. Universidade da Coruña. Escola Técnica Superior de Enxeñeiros de Camiños, Canais e Portos. Ed.: Hernández S.
- [N2] Namini A., Aldbrecht P. [1992] *Finite Element-Based Flutter Analysis of Cable Suspended Bridges*. Journal of Structural Engineering. Vol. 118, N° 6, June, pp.1509-1526.

- [P1] Preidikman S., Mook D. T. [1998] *On the Development of a Passive-Damping System for Wind-Excited Oscillations fo Long-Span Bridges*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. Vol 77, pp. 443-456.
- [R1] Rodi W. [1997] *Comparison of LES and RANS calculations of the flow around bluff bodies*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. Vol 69-71, pp 55-75.
- [R2] Rey J. [2000] *Puesta a Punto de un Túnel de Viento y Realización de Ensayos Aerodinámicos de Tableros de Puentes*. Proyecto Técnico. Universidade da Coruña. Escola Técnica Superior de Enxeñeiros de Camiños, Canais e Portos.
- [S1] Simiu E., Scanlan R. H. [1996] *Wind Effects on Structures: Fundamentals and applications to Design*. (3rd Ed.). John Wiley & Sons, Inc.. New York.
- [S2] Scanlan R. H., Tomko J. J. [1971] *Airfoil and Bridge Deck Flutter Derivatives*. J. Eng. Mech. Div., ASCE, 97, N° EM6, Diciembre, pp1717-1737.
- [S3] Son J. S., Hanratty T. J. [1969] *Numerical Solution for the Flow around a Cylinder at Reynolds Number of 40, 200, 500*. Journal of Fluid Mechanics. Vol 35, pp. 369-386.
- [S4] Steggel N., Rockliff N. [1997] *Simulations of the Effects of Body Shape on Lock-in Characteristics in Pulsating Flow by the Discrete Vortex Method*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. Vol 69-71, pp. 317-329.
- [S5] Sarkar P. P., Jones N. P., Scanlan R. H. [1994] *Identification of aeroelastic parameter of flexible bridges*. J. Eng. Mech. Vol. 120, N° 8, August, pp.1718-1742.
- [S6] Scanlan R. H., Sabzevari A. [1969] *Experimental aerodynamic coefficients in the analytical study of suspension bridge flutter*. J. Eng. Mech. Vol. 11, N° 3, pp.234-242.
- [S7] Scanlan R. H., Gade R. H. [1977] *Motion of suspended bridge spans under gusty wind*. J. Str. Div., ASCE. Vol.103, N° 9, pp.1867-1883.

- [S8] Scanlan R. H., Lin W. H. [1978] *Effects of turbulence on bridge flutter derivatives*. J. Eng. Mech., Vol. 104, N° 4, pp.719-733.
- [S9] Scanlan R. H., Huston D. [1985] *Sensitivity of Bridge Decks to Turbulent Wind*. Proc., Asia Pacific Sym. On Wind Eng., University of Roorkee, India, pp.167-172.
- [S10] Singh L. [1997] *Experimental Determination of Aeroelastic and Aerodynamic Parameters of Long-Span Bridges*. A dissertation submitted to The Johns Hopkins University in conformity with the requirements for the degree of Doctor of Philosophy. Baltimore, Maryland, USA.
- [S11] Semião C., Mendes P. [1998] *Avaliação das condições de estabilidade aerodinâmica em pontes*. Jornadas portuguesas de engenharia de estruturas. Lisboa, Portugal.
- [T1] Theodorsen T. [1935] *General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter*. NACA Rept. 496.
- [T2] Theodorsen T., Garrick I. E. [1940] *Mechanism of Flutter, a Theoretical and Experimental Investigation of the Flutter Problem*. NACA. Rept. 685.
- [T3] Tukiyyah G. M., Reed D. A. [1998] *3D Discrete Vortex Methods and Their Parallel Implementation*. Bridge Aerodynamics, Larsen A. & Søren E. (Ed.). Balkema, Rotterdam.
- [U1] University of Washington. *University of Washington Libraries Digital Collections*. www.lib.washington.edu/specialcoll/tnb/default.html
- [V1] Vincent G. S. [1958] *Golden Gate Bridge Vibrational Studies*. Journal of the Structural Division, ASCE, paper 1817.
- [W1] Wardlaw R. L. [1992] *The Improvement of Aerodynamic Performance*. Aerodynamics of Large Bridges, Larsen A. (Ed.). Balkema, Rotterdam.

[W2] Washington State Department of Transportation home page. www.wsdot.wa.gov

[W3] Walther J. H., [1998] *Discrete Vortex Methods in Bridge Aerodynamics and prospects for parallel computing techniques*. Bridge Aerodynamics, Larsen A. & Søren E. (Ed.). Balkema, Rotterdam.

[Z1] Zhou Z., Chen A., Xiang H. [2003] *Identification of Aeroelastic Parameter of Flexible Bridge Decks by Random Discrete Vortex Method*. 11th International Conference on Wind Engineering. 2-5 June. Lubbock, Texas. USA.

CAPÍTULO 3

DISEÑO ÓPTIMO DE PUENTES INCLUYENDO SEGURIDAD FRENTE A FLAMEO

“Reducing weight involves reducing materials, which, in turn, means reducing cost as well.”

(Henry Ford, 1923, www.vrand.com)

3.1 INTRODUCCIÓN

El proceso de diseño de una estructura en general, y de un puente en particular, pasa por varias etapas. A lo largo de las mismas la estructura va alcanzando un grado de definición cada vez mayor, hasta convertirse en un objeto físico totalmente definido. En cada etapa se deben tomar una serie de decisiones que permiten descartar las alternativas que no son adecuadas. Estas alternativas pueden ser el tipo de material a utilizar, la forma de unión de los elementos de la estructura o la ubicación y número de apoyos sobre el terreno. El proceso concluye cuando se ha obtenido una solución que resulta eficiente desde el punto de vista del proyectista.

A grandes rasgos el proceso de diseño puede dividirse en tres etapas principales:

- Plan de necesidades: Establece los objetivos que debe cumplir la estructura al entrar en servicio. Normalmente abarca algunas características fijas del diseño: Altura del tablero de un puente para permitir la navegación, tráfico de vehículos que debe ser absorbido, velocidad mínima del viento para que se produzcan fenómenos de inestabilidad aeroelástica, etc. Esta etapa puede servir en ocasiones para definir algunas características como el tipo de material a utilizar.

- Selección y cálculo de la estructura: El plan de necesidades puede ser satisfecho habitualmente mediante soluciones distintas, por ello, en esta etapa, resulta necesario elegir el material, si no se ha hecho anteriormente, la tipología de la estructura, el tipo de cimentación, etc. A tal efecto, es habitual plantear varias alternativas basadas en otras situaciones anteriores que sean similares, llevándose a cabo un cálculo aproximado o exacto de cada una de ellas. El comportamiento que muestren las distintas alternativas permite realizar las modificaciones que parezcan convenientes y reducir el abanico de posibilidades a una única solución. Con posterioridad, esa solución puede ser refinada para lograr un funcionamiento más eficaz.
- Diseño de detalles: Sirve para definir aquellos aspectos como uniones o nudos que tienen un interés muy localizado y que no afectan al diseño general de la estructura.

De las tres etapas indicadas, es la intermedia la que requiere un mayor número de decisiones por parte del proyectista. El proceso suele darse por concluido cuando la solución más actualizada muestra una eficacia suficiente.

3.2 METODOLOGÍA CONVENCIONAL DE DISEÑO

El diseño convencional o tradicional de estructuras, cuyo diagrama de flujo conceptual puede ser observado en la figura 3.2.1, se apoya en el uso de una serie de reglas heurísticas, basadas en la experiencia, intuición o capacidad del ingeniero, para modificar un diseño inicial hasta que se verifiquen una serie de condiciones y se estime por tanto que el diseño es correcto.

Entre los principales problemas que presenta este tipo de diseño se encuentra la posibilidad de que las modificaciones introducidas en algún momento del proceso “empeoren” los resultados, de modo que no se asegura que todo diseño modificado sea mejor que el anterior. Otro punto crítico lo constituye la definición de los parámetros o variables de diseño a modificar en cada iteración. Así mismo, una vez decidido el diseño final, siempre cabe la duda de que existan algunas características que podrían haberse variado y hubiesen conducido a un resultado mejor, pero que no se han considerado en las modificaciones.

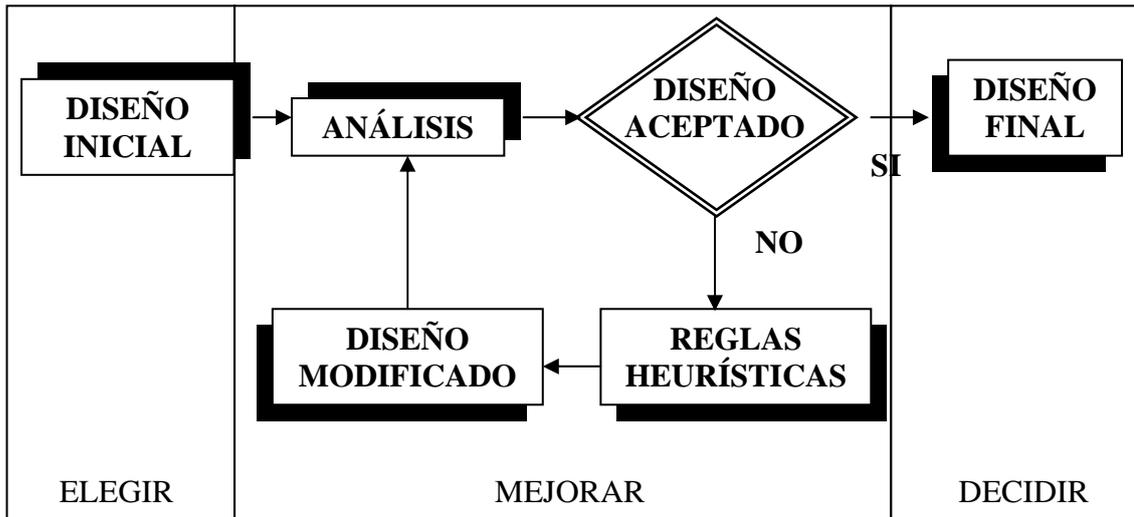


Figura 3.2.1. Proceso de diseño convencional

Podría decirse que el proceso de diseño convencional se caracteriza por su carácter subjetivo, y su resultado final depende de los criterios y eficacia del equipo proyectista. El objetivo buscado podría definirse como una solución, que cumpliendo los requisitos existentes, sea lo suficientemente correcta. Es fácil imaginarse lo complicado que podría llegar a ser el definir una solución válida para un problema en el que el proyectista no tuviese ningún tipo de experiencia previa, o que fuese en sí mismo muy complejo como es el caso del diseño de puentes de gran vano.

3.3 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

El cálculo de la sensibilidad estructural responde al cambio que se infiere, en busca de una solución mejor, a las variables de diseño durante el proceso de diseño. Incluso si no se realiza un eventual proceso de optimización estructural, los análisis de sensibilidad aportan una información muy valiosa, puesto que indican qué variables de diseño deben ser modificadas y en qué sentido para mejorar la respuesta de la estructura que está siendo estudiada. Matemáticamente, la sensibilidad se obtiene mediante el cálculo de las derivadas de la respuesta estructural que está siendo estudiada en cada caso con respecto a la característica del puente que está siendo considerada.

En los puentes de gran vano es imprescindible garantizar la estabilidad de la estructura frente a las cargas dinámicas de viento. Un ejemplo claro de inestabilidad debida al viento la constituye, como ya se ha comentado, la inestabilidad aeroelástica por flameo del tablero. El análisis de sensibilidad del fenómeno de flameo en tableros de puentes proporciona la variación de dicha velocidad crítica de flameo con respecto a las características de diseño consideradas.

Los análisis de sensibilidad aportan por sí mismos una valiosa información al proyectista. Si por ejemplo se calcula la derivada de la velocidad de flameo de un puente respecto de una característica variable del puente x , pueden darse tres resultados:

$$\frac{\partial U_f}{\partial x} > 0 \quad (3.3.1)$$

$$\frac{\partial U_f}{\partial x} \approx 0 \quad (3.3.2)$$

$$\frac{\partial U_f}{\partial x} < 0 \quad (3.3.3)$$

En el primero de los casos un aumento de la variable causa un incremento en la velocidad de flameo, mientras que el último representa lo contrario. El segundo caso, ecuación (3.3.2), refleja que una modificación de la variable no afecta a la velocidad de flameo. La magnitud de las derivadas dará una idea de lo sensible que es el comportamiento del modelo, en este caso la velocidad de flameo, con respecto a una variación de dicha variable. El signo de las mismas indica si se ha de aumentar o disminuir el valor de la variable en el diseño modificado para aumentar la velocidad de flameo.

Estos datos son por sí solos de gran valor, pero además aportan algo quizás más importante, y es el hecho de que mejoran la comprensión del comportamiento de la estructura por parte del proyectista. A partir de ellos, el diagrama de flujo presentado en la metodología de diseño convencional (figura 3.2.1) puede modificarse sustituyendo las reglas heurísticas, que son subjetivas y sin seguridad de que sean certeras, por los análisis de sensibilidad, que dan resultados seguros y sirven de guía cierta al proyectista

en el camino de mejorar la calidad del dimensionado del problema en estudio. De esta manera el nuevo diagrama de flujo se muestra en la figura 3.3.1.

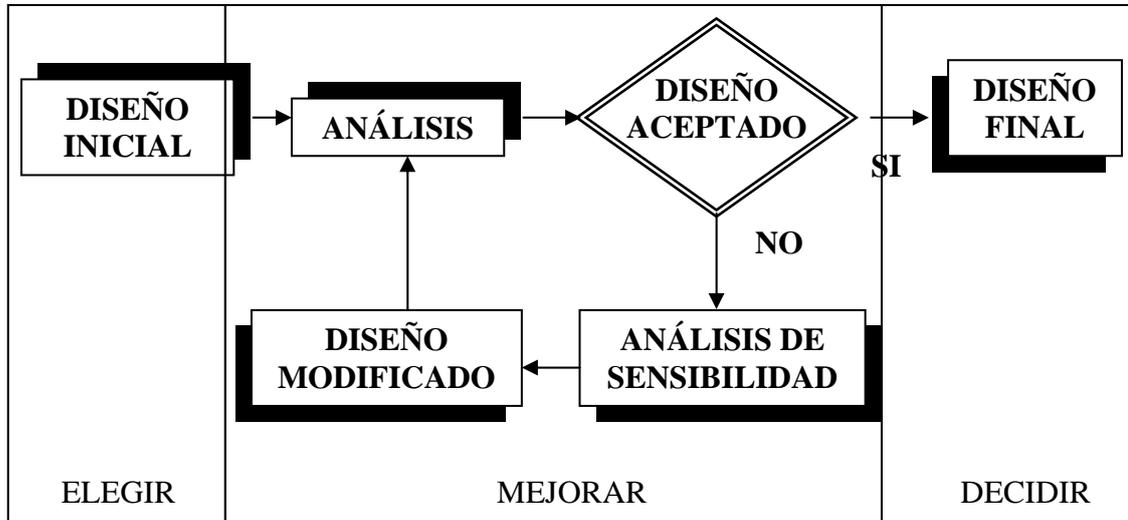


Figura 3.3.1. Proceso de diseño empleando análisis de sensibilidad

El conocimiento de las sensibilidades permite además, evaluar de modo aproximado la velocidad crítica que tendrá el puente al modificar las variables de diseño. Si se trabaja con una sola variable de diseño, la velocidad de flameo modificada U_{fm} podrá obtenerse por la siguiente aproximación lineal

$$U_{fm} \approx U_f + \frac{\partial U_f}{\partial x} \Delta x \quad (3.3.4)$$

Y si se trabaja con n variables

$$U_{fm} \approx U_f + \sum_{i=1}^n \frac{\partial U_f}{\partial x_i} \Delta x_i \quad i = 1, \dots, n \quad (3.3.5)$$

El hecho de conocer aproximadamente cómo va a ser la respuesta del puente cuando se modifiquen las variables de diseño, permite evitar modificaciones infructuosas en el mismo, obviamente ahorrar tiempo, y mejorar la comprensión por parte del proyectista del comportamiento del puente.

3.4 MEJORA DE LOS ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE LOS PARÁMETROS DE FLAMEO

El grupo de mecánica de estructuras de la E.T.S. de Enxeñeiros de Camiños, Canais e Portos de la Universidade da Coruña ha venido trabajando durante los últimos años en la obtención de los análisis de sensibilidad de la velocidad de flameo y la frecuencia reducida de puentes de gran vano. En las publicaciones de Jurado^[J1], Jurado et al.^{[J2][J3]}, Mosquera^[M1] y Mosquera^[M2] y Hernández se han considerado como variables respecto a las que evaluar las sensibilidades de la respuesta aeroelástica las inercias a flexión del tablero, I_y e I_z , así como la inercia a torsión, J , tanto para puentes en servicio como en construcción. Sin embargo, profundizando en este campo, esta investigación pretende avanzar en dos aspectos importantes que son: la reducción de los tiempos de cálculo necesarios y la ampliación del conjunto de variables respecto a las que calcular las sensibilidades.

Un primer inconveniente que tiene *per se* el cálculo de las sensibilidades de la velocidad de flameo y de la frecuencia reducida respecto a las variables de diseño es el elevado tiempo de cálculo necesario para evaluar esas sensibilidades. Los tiempos de cálculo pueden mantenerse en límites razonables si se utiliza la metodología analítica. Sin embargo, si se desea que los tiempos de cálculo no aumenten con el número de variables de diseño consideradas en el problema o con el número de modos de vibración utilizados en el análisis aeroelástico, se puede apelar a los recursos que pone a nuestro alcance la programación distribuida. Una posible estrategia consistiría en que cada uno de los equipos de una serie de ordenadores conectados en red calculase las sensibilidades respecto a una sola de las variables de diseño consideradas. El objetivo es que todos los ordenadores realicen de modo simultáneo los cálculos que tienen asignados con lo que el tiempo total empleado sería aproximadamente igual al necesario para calcular la sensibilidad respecto a una única variable de diseño.

Un segundo aspecto a tener en cuenta es que en muchas ocasiones el objetivo perseguido al realizar los análisis de sensibilidad es aprovechar los resultados para mejorar el diseño del puente. Es habitual que el objetivo buscado en el ámbito de la ingeniería de estructuras tenga como finalidad disminuir el peso de una estructura con el

fin de utilizar la menor cantidad de material posible y, en consecuencia, reducir todo lo posible el coste económico de la misma. Si se desea, por tanto, minimizar el peso del tablero de un puente de gran vano es evidente que se debe considerar que durante el proceso de diseño la masa de ese tablero irá disminuyendo. En consecuencia, en la formulación analítica del cálculo de las sensibilidades de los parámetros de flameo del puente habrá que considerar la masa del tablero como variable. Por lo tanto, se hace necesario añadir una nueva variable de diseño a las consideradas hasta ahora, que es el área de la sección transversal del tablero del puente, ya que la masa está directamente relacionada con el área de la sección transversal a través de la densidad del material y la longitud del tablero.

En los análisis de sensibilidad realizados hasta ahora se han considerado como variables los tres momentos de inercia de la sección, porque proporcionan una información muy útil al proyectista. Sin embargo, éstos no son independientes del área del tablero, y por tanto, será necesario relacionar estas variables entre sí. Ello depende de la tipología de la sección transversal. En la investigación que ha dado lugar a esta Memoria-Tesis se ha avanzado en los dos aspectos, es decir, el uso de la programación distribuida y la introducción del área del tablero como una variable de diseño. En los capítulos correspondientes se describen los resultados obtenidos.

3.5 FORMULACIÓN DEL DISEÑO ÓPTIMO EN INGENIERÍA

El diseño óptimo, basado en métodos de optimización numérica, se diferencia del diseño tradicional en la fase de modificación del diseño. Para ello se aplica una formulación matemática rigurosa en lugar de reglas heurísticas, basadas simplemente en el criterio del proyectista. Los métodos de optimización más eficaces operan según la información aportada por los análisis de sensibilidad. Según esto, se podría establecer el diagrama de flujo conceptual que se muestra en la figura 3.5.1 para describir el proceso de diseño óptimo.

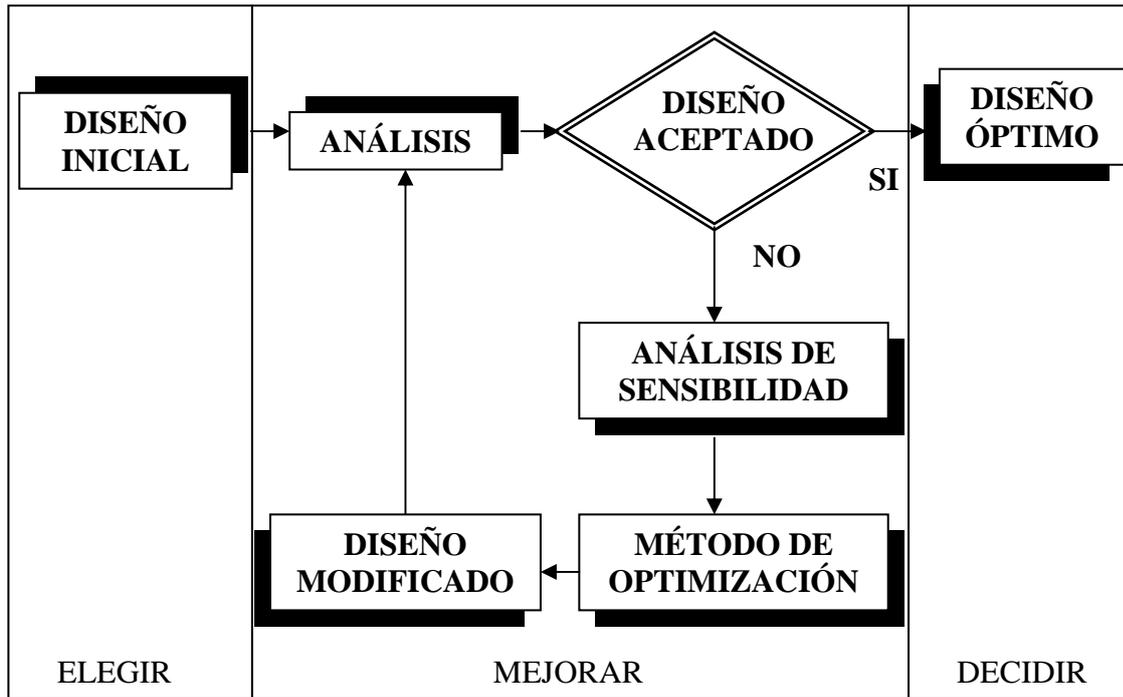


Figura 3.5.1. Proceso de diseño óptimo

El diseño óptimo se viene empleando con éxito y de modo habitual desde hace bastantes años en otras ramas de la ingeniería como la aeronáutica y la del automóvil. En el ámbito de la ingeniería civil cabe destacar publicaciones como las de Hernández^[H1], Hernández^[H2] y Fontán, Ohkubo^[O1] y Taniwaki o Navarrina^[N1], Navarrina^[N2] et al. O Perezán^[P1]. Las dos ventajas fundamentales que aporta este tipo de diseño frente al convencional son:

- El diseño obtenido tras una iteración nunca es peor que el anterior.
- Cuando se alcanza una solución, puede garantizarse que ésta es la mejor de las posibles, dado que la condición de óptimo puede ser comprobada utilizando la condición de Kuhn-Tucker^[K1].

Matemáticamente, un problema de optimización se plantea de modo general de la manera siguiente:

Se debe minimizar, o maximizar en su caso, una función objetivo F , por ejemplo el peso de la estructura, la cual depende de una serie de variables de diseño contenidas en un vector \mathbf{x} , es decir se debe obtener:

$$\min F(\mathbf{x}) \quad (3.5.1)$$

sujeto a una serie de condiciones de diseño:

$$g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j=1, \dots, l \quad (3.5.2)$$

Con las fórmulas (3.5.1) y (3.5.2) se ha expresado en terminología matemática lo que de alguna manera hace el proyectista en un proceso de diseño convencional. Así, los conceptos que en el proceso de diseño se considera que pueden sufrir modificaciones, serán las variables de diseño contenidas en el vector \mathbf{x} . De la misma manera, el plan de necesidades de una estructura contiene una serie de condiciones que en ningún caso pueden incumplirse, y que en muchas ocasiones vienen establecidas por las normativas, como son las relativas a las tensiones que puede alcanzar el material, los movimientos admisibles o la velocidad de flameo. Se trata, por tanto, de las condiciones de diseño que la estructura debe satisfacer, y que matemáticamente pueden ser expresadas mediante las condiciones $g_j(\mathbf{x})$. Por último, si el proyectista percibe nítidamente la propiedad que pretende perfeccionar en el diseño, su expresión matemática se denomina función objetivo, $F(\mathbf{x})$.

Una representación de un problema de minimización con dos variables de diseño se muestra en la figura 3.5.2 donde la región de diseño está limitada por la zona sombreada y la función objetivo está representada por líneas rectas que contienen diseños con igual valor de ésta.

Comenzando con un dimensionado inicial \mathbf{x}_1 , el proceso de diseño convencional puede llevar a una nueva solución \mathbf{x}_2 , que mejora el anterior, pero también puede suceder que al proseguir el proceso se obtenga \mathbf{x}_3 que es peor que el previo. Así mismo, llegado a un diseño \mathbf{x}_4 también es posible que el siguiente \mathbf{x}_5 , no altere la calidad del diseño, como se indica en la figura al estar situado en la misma recta de la función objetivo. Estas soluciones muestran el carácter incierto de esta metodología de diseño.

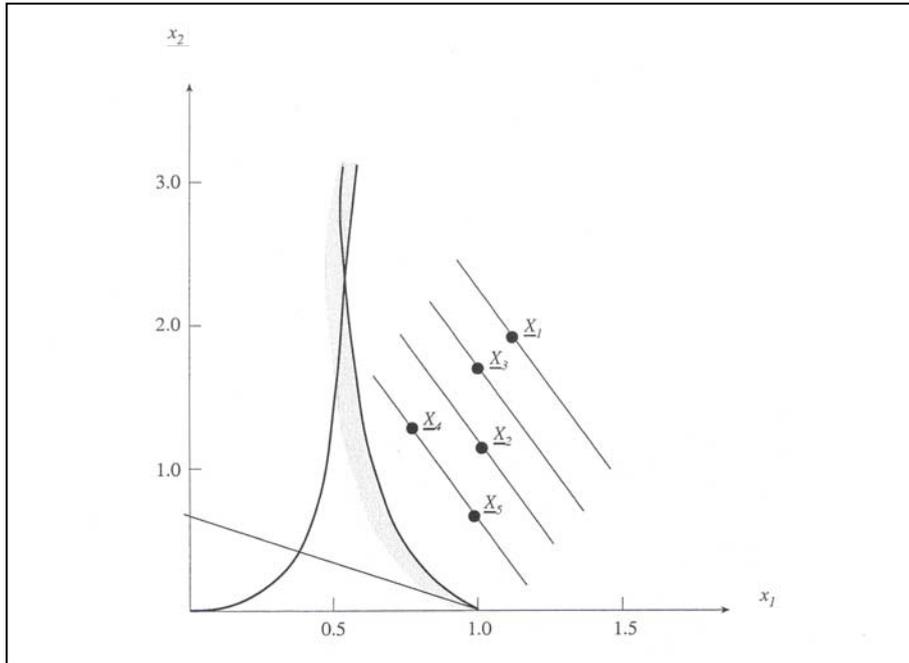


Figura 3.5.2. Proceso de diseño convencional.

En la figura 3.5.3 se muestra un esquema de un proceso de diseño óptimo. En ella se observa que comenzando igualmente por el diseño x_1 , los siguientes dimensionados obtenidos durante el proceso mejoran siempre la calidad del anterior, hasta llegar finalmente al diseño óptimo.

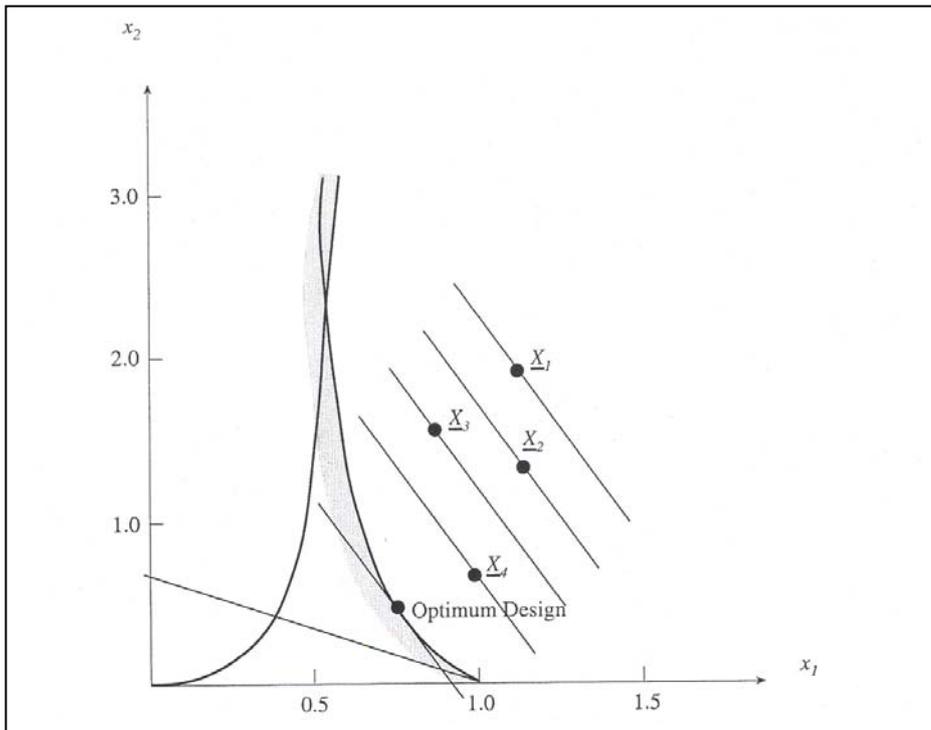


Figura 3.5.3. Proceso de diseño óptimo.

3.6 OPTIMIZACIÓN DE PUENTES DE CABLES INCLUYENDO CONDICIONES AEROELÁSTICAS.

Como se ha comentado anteriormente, las técnicas de diseño óptimo en ingeniería, tras madurar como tema de investigación, han encontrado ámbitos de aplicación industrial en sectores de ingeniería donde se requiere un alto nivel tecnológico y los requisitos de competitividad son muy acuciantes. Por ello, sectores como el aeroespacial, el automovilístico o la industria mecánica han estado haciendo uso de estos métodos desde hace tiempo. Sin embargo, en otros sectores no ha penetrado tan rápidamente este planteamiento y por ello existen foros internacionales de encuentro entre investigadores e ingenieros proyectistas donde se ha debatido esta situación y se ha reiterado la utilidad y las capacidades de la optimización del diseño. Los textos de Belegundu^{[B1][B2]} y Mistree dan muestra de los esfuerzos realizados en este sentido. En el contexto de la ingeniería de puentes, y especialmente en el de puentes de cables de gran vano, las técnicas de optimización no han penetrado en absoluto. Quiere esto decir que, aunque efectivamente el proyecto de estas grandes estructuras se lleva a cabo utilizando las capacidades de simulación que permiten los túneles de viento, o las prestaciones de cálculo que facilitan los ordenadores, actualmente las decisiones de alterar elementos de un puente durante el proyecto se llevan a cabo basadas en la experiencia y habilidad del proyectista como se ha indicado en el diagrama de flujo del diseño convencional mostrado en la figura 3.2.1.

En otras palabras, proyectos como los del puente del Great Belt, Akashi o Messina, cuyo dimensionado pone a prueba la pericia del ingeniero más avezado no se han apoyado, en absoluto, en técnicas de optimización, que es difícil pensar que no hubieran producido mejoras, tanto técnicas como económicas, en el proyecto y en el comportamiento de esas construcciones. En las figuras 3.6.1(I) a 3.6.1(III) se muestran imágenes de esos tres puentes que son el presente y futuro próximo de los puentes soportados por cables.



Figura 3.6.1(I). Puente del Great Belt.



Figura 3.6.1(II). Puente sobre el estrecho de Akashi.



Figura 3.6.1(III). Imagen virtual del futuro puente sobre el estrecho de Messina.

Aceptada la innegable experiencia que los veteranos proyectistas de puentes poseen, en una obra de gran envergadura deberá utilizarse toda la tecnología existente, la cual indudablemente servirá de ayuda al ingeniero. Sin embargo, ello no sucede en la actualidad, con el consiguiente coste de oportunidad que comporta.

En consecuencia, abordar el tema de la optimización de puentes de cables supone un trabajo pionero a nivel mundial que ha parecido no sólo interesante, sino primordial, debido a la intensa actividad que existe relacionada con la ejecución de estas estructuras en el período histórico reciente.

Dado que una de las grandes exigencias en los puentes de gran vano es el comportamiento aeroelástico, resulta lógico que, al plantear el problema de optimización de este tipo de puentes, se haya incluido alguna condición relativa a la velocidad de flameo en la formulación del mismo.

Junto a las condiciones aeroelásticas resulta necesario incluir condiciones de estado límite de servicio, y dado que el tablero en los grandes puentes de cables es metálico iban a ser más condicionantes los valores de los movimientos producidos por las cargas que la tensión en el material, lo que conduce a considerar también en el problema el límite establecido por las normas técnicas para el movimiento vertical en el centro del

vano. Como función objetivo ha parecido conveniente definir el área del tablero, que se pretende minimizar a fin de reducir el coste económico del mismo. Como variables de diseño, es decir, las características del tablero que podrían modificarse, se han elegido el área A y los momentos de inercia en los tres ejes: a flexión, I_y , I_z y a torsión J . No obstante, dado que la morfología de los tableros estudiados está constituida por secciones en cajón simétricas, las propiedades mecánicas de la sección transversal del tablero pueden ponerse en función de los tres espesores de las chapas que conforman el tablero junto con las dimensiones de anchura superior, inferior y la altura del cajón. Debe tenerse en cuenta que las dimensiones exteriores de la sección son conocidas y se consideran invariables en el proceso de diseño óptimo que se ha planteado, ya que así los coeficientes de flameo de la sección no sufren modificaciones. Por consiguiente, las variables de diseño del problema de optimización pasan a ser los tres espesores equivalentes de las chapas que conforman la sección transversal en cajón simétrico del tablero, como se indica en la figura 3.6.2.

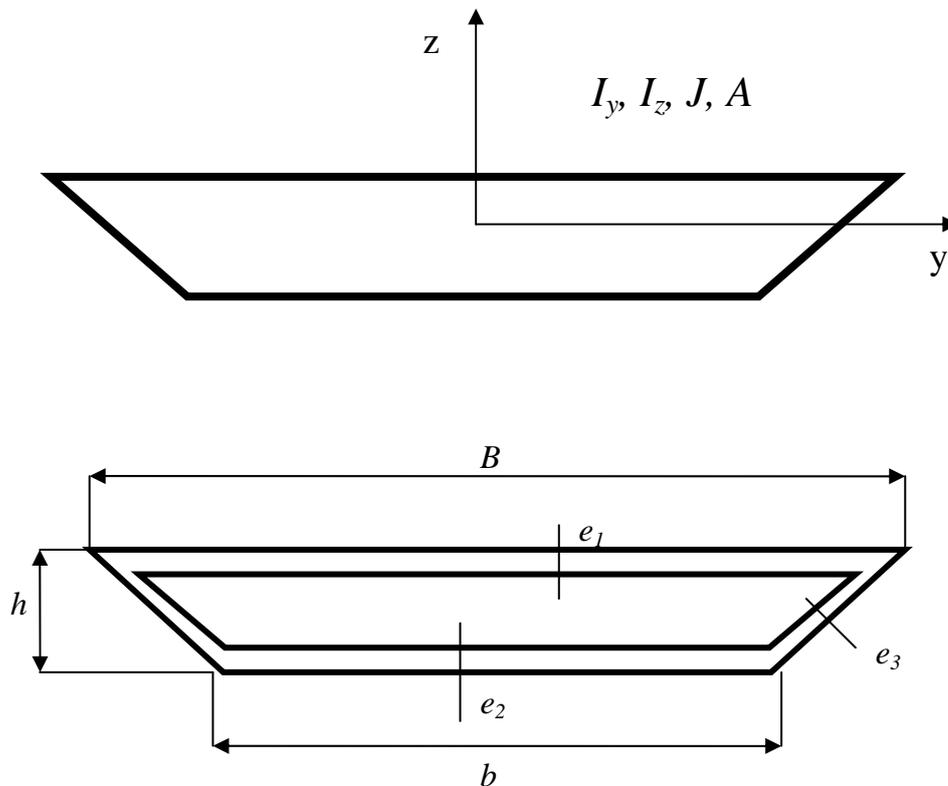


Figura 4. Conjunto de variables de diseño.

A continuación se establecen las relaciones existentes, para un cajón monocelular, entre las cuatro propiedades mecánicas de la sección transversal (I_y , I_z , J y A) y las seis variables que definen la geometría de la sección en cajón (B , b , h , e_1 , e_2 y e_3) de las cuales, sólo los tres espesores (e_1 , e_2 y e_3) serán las variables de diseño consideradas en el proceso de optimización del tablero de un puente.

En primer lugar se definen cuatro variables auxiliares que son función de las seis variables geométricas fundamentales, de tal modo que las expresiones subsiguientes puedan ser escritas de una manera más compacta:

$$s = \frac{B-b}{2} \quad (3.6.1)$$

$$t = h - e_1 - e_2 \quad (3.6.2)$$

$$q = \frac{ts}{h} = \frac{(h - e_1 - e_2)(B-b)}{2h} \quad (3.6.3)$$

$$r = B - \frac{1}{h} \left[(h - e_2)(b - h) + e_3 \sqrt{(B-b)^2 + 4h^2} \right] \quad (3.6.4)$$

Con las cuatro variables auxiliares que acaban de ser definidas y las seis variables geométricas principales pueden establecerse las relaciones siguientes para el centro de gravedad y las propiedades mecánicas de la sección transversal del tablero.

$$z_g = \frac{\left[\frac{Bh^2}{2} - \frac{sh^2}{3} - qt \left(e_2 + \frac{2}{3}t \right) - rt \left(e_2 + \frac{t}{2} \right) \right]}{[(B-s)h - (q+r)t]} \quad (3.6.5)$$

$$A = Bh - sh - qt - rt \quad (3.6.6)$$

$$I_y = \frac{1}{12} Bh^3 + Bh \left(z_g - \frac{h}{2} \right)^2 - 2 \left[\frac{1}{36} sh^3 + \frac{1}{2} sh \left(z_g - \frac{h}{3} \right)^2 + \frac{1}{36} qt^3 + \frac{1}{2} qt \left(e_2 + \frac{2}{3}t - z_g \right)^2 \right] - \left[\frac{1}{12} rt^3 + rt \left(e_2 + \frac{1}{2}t - z_g \right)^2 \right] \quad (3.6.7)$$

$$I_z = \frac{1}{12} hB^3 - 2 \left[\frac{1}{36} hs^3 + \frac{1}{2} hs \left(\frac{B-s}{2} - \frac{s}{3} \right)^2 + \frac{1}{36} tq^3 + \frac{1}{2} tq \left(\frac{r}{2} + \frac{q}{3} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} tr^3 \quad (3.6.8)$$

$$J = \frac{\left[(B-s)h - \frac{1}{2} Be_1 - \frac{1}{2} be_2 - e_3 \sqrt{s^2 + h^2} \right]}{\left(\frac{B}{e_1} + \frac{b}{e_2} + \frac{2\sqrt{s^2 + h^2}}{e_3} \right)} \quad (3.6.9)$$

En consecuencia, y tras lo expuesto, el problema de optimización de puentes de cables estudiado en esta investigación ha sido obtener el mínimo de la expresión (3.6.6), que se indica abreviadamente

$$\min F = A(e_1, \dots, e_n) \quad (3.6.10)$$

considerando como variables los espesores equivalentes e_i ($i = 1, \dots, n$) necesarios para definir el tablero.

Estando la función que se desea minimizar sujeta a las siguientes condiciones:

- Que la velocidad de flameo sea al menos, igual a un valor crítico definido.

$$U_f \geq U_{f,cr} \quad (3.6.11)$$

- Que el movimiento vertical en el centro del vano debido a la sobrecarga de uso no sea superior a un determinado valor.

$$w_c \leq w_{c,max} \quad (3.6.12)$$

- Que las variables de diseño estén dentro de un rango de valores válido.

$$e_{\min} \leq e_i \leq e_{\max} \quad i = 1, \dots, n \quad (3.6.13)$$

A pesar del reducido número de variables de diseño y de condiciones, el problema de optimización planteado es de gran complejidad dado lo siguiente:

1) La obtención de la velocidad de flameo conlleva la resolución encadenada de varios tipos de análisis estructural.

- Análisis estático no lineal considerando el peso propio.

$$(\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G)\mathbf{u} = \mathbf{p} \quad (3.6.14)$$

De esta forma se obtienen los esfuerzos axiles en los elementos del modelo estructural que son necesarios para la etapa siguiente.

- Cálculo de frecuencias y modos naturales de vibración en teoría no lineal.

$$[\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G - \omega_n^2 \cdot \mathbf{M}] \cdot \boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{0} \quad (3.6.15)$$

Estos valores son necesarios en el cálculo aeroelástico subsiguiente

- Cálculo de la velocidad de flameo.

Esto se lleva a cabo en dos etapas. En la primera, se resuelve el problema no lineal de autovalores.

$$(\mathbf{A} - \mu\mathbf{I})\mathbf{w}_\mu = \mathbf{0} \quad (3.6.16)$$

para una velocidad fija U del flujo de viento. Las soluciones son pares complejos en la forma

$$\mu_j = \alpha_j \pm i\beta_j \quad (3.6.17)$$

Dada la no linealidad, la resolución requiere un esquema iterativo hasta identificar correctamente los autovalores. Una vez resuelto el problema, se realiza de nuevo incrementando la velocidad U hasta que para un determinado valor se anula algún valor de α_j .

2) Obtención de la flecha estática w_c lo que requiere nuevamente la resolución de un problema estático no lineal para las cargas de servicio \mathbf{p}_s .

$$(\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G)\mathbf{u} = \mathbf{p}_s \quad (3.6.18)$$

3) La obtención de los análisis de sensibilidad de la velocidad de flameo, que es un problema abordado por primera vez por Jurado^[J1] y Mosquera^[M1] y que en esta investigación se ha paralelizado, al igual que el cálculo de la velocidad de flameo a fin de acortar los tiempos de cálculo.

4) La obtención del análisis de sensibilidad analítico de la flecha estática, que fue abordada pioneramente por Perezán^[P1].

Por todo ello y dada su dificultad, no es extraño que haya sido un sugerente tema para llevar a cabo esta investigación. La forma de llevar a cabo la solución de este problema de optimización es muy variada de acuerdo con los algoritmos existentes, que se describen a continuación.

3.7 MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN

Seguidamente, se pasa revista a una clasificación general de los métodos de optimización más importantes. Véase, entre otros, Perezán^[P1], Hernández^[H1], Vanderplaats^[V1], Haftka^[H3], Gürdal y Kamat, Arora^[A1], así como Belengundu^[B3] y Chandrupatla.

3.7.1 Programación matemática. Problemas lineales

Los problemas lineales son un caso particular de la formulación general expresada mediante las ecuaciones (3.5.1) y (3.5.2) en el que tanto $F(\mathbf{x})$ como $g_j(\mathbf{x})$ son polinomios de primer grado. En esta situación los problemas tienen generalmente solución única. El mínimo que se obtiene para la función objetivo es el mínimo global y se produce en el contorno de la región de diseño, siendo activas una o varias de las condiciones del problema planteado. Estos métodos son de gran interés ya que pueden ser aplicables en la resolución de problemas no lineales como se explicará más adelante. Se comentan brevemente los métodos Simplex y de Karmarkar.

El método Simplex es el más popular y extensamente utilizado de los algoritmos de programación lineal. Fue propuesto en 1963 por Dantzig^[D1]. Para poder emplear este método, el problema lineal debe formularse de la manera siguiente

$$\begin{aligned} \text{Min } F(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i \\ \text{sujeto a} \\ \sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot x_i &= b_j \quad j = 1, \dots, m \\ x_j &\geq 0 \quad i = 1, \dots, n \\ b_j &\geq 0 \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.7.1)$$

La formulación anterior tiene un carácter completamente general ya que cualquier problema lineal puede ser expresado en la forma indicada realizando las transformaciones correspondientes. Así, cuando existan condiciones que se expresen mediante desigualdades, habrá que convertir estas últimas en igualdades, sumando lo que se denominan variables de holgura o *slack variables*, o restando variables suplementarias o *surplus variables*, según cual sea el sentido de la desigualdad.

Para poder iniciar el procedimiento, una vez planteado el problema en la forma expresada por (3.7.1), es necesario disponer de lo que se denomina solución básica inicial válida. Esta última es siempre un vértice del poliedro que delimita la región de diseño. Una vez que se dispone de ella, la idea fundamental del método simplex es ir disminuyendo continuamente el valor de la función objetivo, pasando de una solución básica válida a otra contigua a lo largo de uno de los lados del poliedro anterior, hasta que se alcance el valor mínimo de la función objetivo. Una característica importante del algoritmo es que cuando se alcanza el óptimo, el propio algoritmo da la información necesaria para saber que así ha sido. También informa de la situación en que un problema no tenga una cota inferior para el valor de la función objetivo, lo que supondría el tener un problema mal planteado.

El método de Karmarkar^[K2] permite evitar uno de los problemas del método simplex, el cual consiste en que el número de iteraciones que deben realizarse crece exponencialmente con el tamaño del problema. Para solucionar este inconveniente se

pensó en la posibilidad de escoger, en forma análoga a como se hace en muchos de los métodos existentes para problemas no lineales, como dirección de movimiento una dirección por el interior de la región de diseño para no limitar tanto la magnitud del cambio. De todas formas, aunque la dirección indicada puede provocar un rápido descenso, para los valores de la función objetivo, hacia el óptimo, esto se producirá normalmente a través de puntos intermedios que no son vértices.

3.7.2 Programación matemática. Problemas no lineales

Lo más habitual al enfrentarse con un problema de optimización es que tanto la función objetivo como las condiciones no sean polinomios de primer grado, por lo que en general será necesario resolver un problema no lineal que en ocasiones será altamente no lineal.

En este tipo de problemas los tres métodos más relevantes son

- Función penalty.
- Direcciones eficientes.
- Métodos duales.

3.7.2.1 Métodos de la función penalty

Esta técnica consiste en transformar el problema de optimización definido por la función objetivo y el conjunto de condiciones en otro que sólo tiene función objetivo, es decir, una optimización incondicionada. Ello se basa en que la función objetivo del nuevo problema lleva incorporadas las condiciones en la forma que se indica en la expresión siguiente:

$$\phi(\mathbf{x}, r) = F(\mathbf{x}) + r \cdot \sum_{j=1}^m P(g_j) \quad (3.7.2)$$

En la expresión anterior r es un parámetro de control que suele tomar diferentes valores a lo largo del proceso que permite determinar el óptimo, mientras que $P(g_j)$ es la función penalty. Existen dos variantes para definir esta función penalty según se realice

la optimización desde el exterior de la región de diseño (método de la función penalty exterior) o desde el interior de la misma (método de la función penalty interior). En cualquiera de las dos alternativas vistas es necesario resolver una sucesión de problemas de minimización incondicionada que se resuelven siguiendo el proceso iterativo esquematizado en la figura 3.7.1.

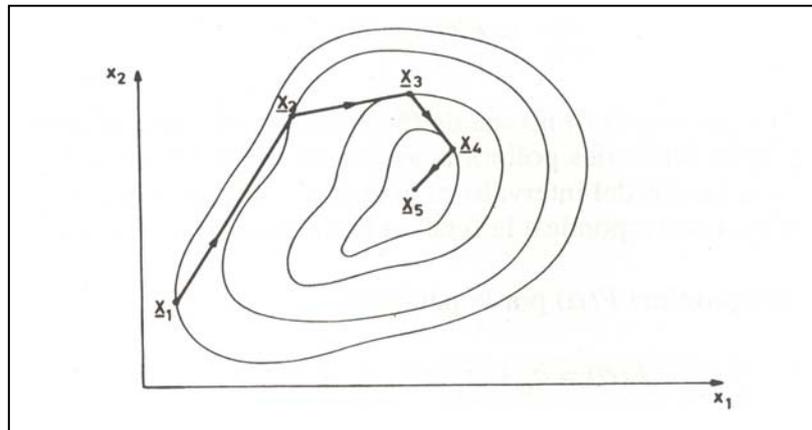


Figura 3.7.1. Proceso iterativo en la optimización incondicionada.

El proceso de obtención de la solución óptima comienza con un diseño \mathbf{x}_1 , a partir del cual se van obteniendo, de modo iterativo, diseños intermedios \mathbf{x}_k , que disminuyen sucesivamente el correspondiente valor de la función objetivo hasta que finalmente se alcanza la solución del problema.

En cada iteración la mejora del diseño \mathbf{x}_k se consigue mediante una modificación del mismo según una dirección \mathbf{s}_k , denominada dirección de búsqueda. Así, el diseño mejorado es

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \cdot \mathbf{s}_k \quad (3.7.3)$$

Los diferentes métodos que existen se caracterizan por la forma de definir la dirección de búsqueda. A continuación se comentan los algoritmos más importantes.

- Métodos de orden cero.
- Métodos de orden uno o de gradiente.
- Métodos de orden dos.

Los métodos de orden cero se caracterizan por requerir únicamente la evaluación de la función objetivo para diferentes diseños. Uno de los más populares es el de las direcciones conjugadas enunciado por Powell^[P2]. El método requiere disponer de un conjunto de direcciones conjugadas. Éstas son conjugadas respecto a una matriz \mathbf{A} simétrica y definida positiva cuando verifican

$$\mathbf{s}_i^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{s}_j = 0 \quad \text{siendo } i \neq j \quad (3.7.4)$$

El método comienza minimizando la función objetivo sucesivamente según las direcciones de los ejes coordenados y establece un método para obtener un conjunto de direcciones conjugadas en el que tan solo es necesario evaluar la función objetivo. Cuando ya se dispone del conjunto de direcciones conjugadas, se minimiza sucesivamente la función objetivo según ese conjunto de direcciones conjugadas. En general, es necesario repetir el proceso de cálculo del conjunto de direcciones conjugadas y minimizar según esas direcciones las veces que sea necesario hasta alcanzar el óptimo. El mayor inconveniente que tiene este método es el gran número de evaluaciones de la función objetivo que puede ser necesario, sin embargo, resulta muy útil cuando la información acerca de las derivadas sea difícil de calcular o computacionalmente costosa.

El segundo grupo lo constituyen los métodos de orden uno. Estos métodos requieren el cálculo del gradiente de la función objetivo para la definición de la dirección de búsqueda en cada una de las iteraciones.

La primera alternativa consiste en tomar la dirección del gradiente, pero en sentido contrario, como dirección de búsqueda, produciendo la mayor disminución del valor de la función objetivo (*steepest descent method*). Sin embargo, este método produce descensos muy rápidos en las primeras iteraciones y muy lentos en las últimas, cuando se está en las proximidades del diseño óptimo. Este inconveniente es reducido en gran medida empleando la técnica del gradiente conjugado (Fletcher^[F1] y Reeves) según la cual la dirección de búsqueda se define como una combinación lineal del gradiente de la función objetivo en el diseño actual y la dirección de búsqueda de la iteración anterior. La técnica recibe el nombre de gradiente conjugado ya que se puede demostrar que el

conjunto de direcciones así definido son conjugadas, lográndose alcanzar el óptimo más rápidamente.

El tercer y último grupo está compuesto por los métodos de orden dos. Éstos también son conocidos como métodos de Newton y requieren el cálculo de la matriz hessiana $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ además de la evaluación de la función objetivo y del vector gradiente.

En cada iteración la dirección de búsqueda viene definida por

$$\mathbf{s}_k = -\mathbf{H}_k^{-1} \cdot \nabla F_k \quad (3.7.5)$$

siendo el valor correspondiente de α , de la ecuación (3.6.3), la unidad.

Para el caso de una función cuadrática el mínimo puede conseguirse en una sola etapa, pero en el caso general en que no lo sea, serán necesarias varias iteraciones, pudiéndose mejorar el método si se calcula el valor de α que minimiza la función objetivo en la dirección de búsqueda.

En ciertas ocasiones, la evaluación analítica de la matriz hessiana indicada anteriormente puede resultar difícil, por lo que sería necesario recurrir a su cálculo numérico y esto, a su vez, podría resultar muy costoso en términos computacionales, o incluso imposible. Por esta razón este tipo de métodos no pueden ser aplicados con total generalidad a todos los problemas. Una alternativa consiste en emplear los métodos conocidos como quasi-Newton que consisten en aproximar la matriz hessiana por otra matriz que pueda ser calculada sin dificultad. Ejemplos de estos métodos son el DFP (Davidon, Fletcher y Powell) y el BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb y Shanno).

3.7.2.2 Método de las direcciones eficientes

El método de las direcciones eficientes o *feasible directions method*, en inglés, se caracteriza por que la elección de la dirección de búsqueda depende de la posición del diseño \mathbf{x}_k . Véase la figura 3.7.2. Si este diseño se encuentra en el interior de la región de diseño, se elige como dirección de búsqueda la contraria del gradiente de la función objetivo, por lo tanto en la fórmula (3.7.3) se tiene

$$\mathbf{s}_k = -\nabla F_k \quad (3.7.6)$$

En caso contrario, cuando el diseño se encuentra sobre el contorno de la región de diseño, la dirección de búsqueda debe cumplir dos características. La primera es que la dirección conduzca a disminuir la función objetivo, y puesto que es interesante que la disminución sea lo más pronunciada posible, \mathbf{s}_k conviene que permanezca dentro del recinto en un entorno del punto de partida. Esta última característica consiste en que la dirección no lleve hacia el exterior de la región de diseño, al menos en una cierta longitud de la dirección para que el recorrido según ella no se vea truncado muy pronto al alcanzarse de nuevo un contorno de la región de diseño. Debido a esta otra característica, la dirección debe apuntar hacia el interior de la región de diseño y cuanto más se aleje del contorno se obtienen mejores resultados.

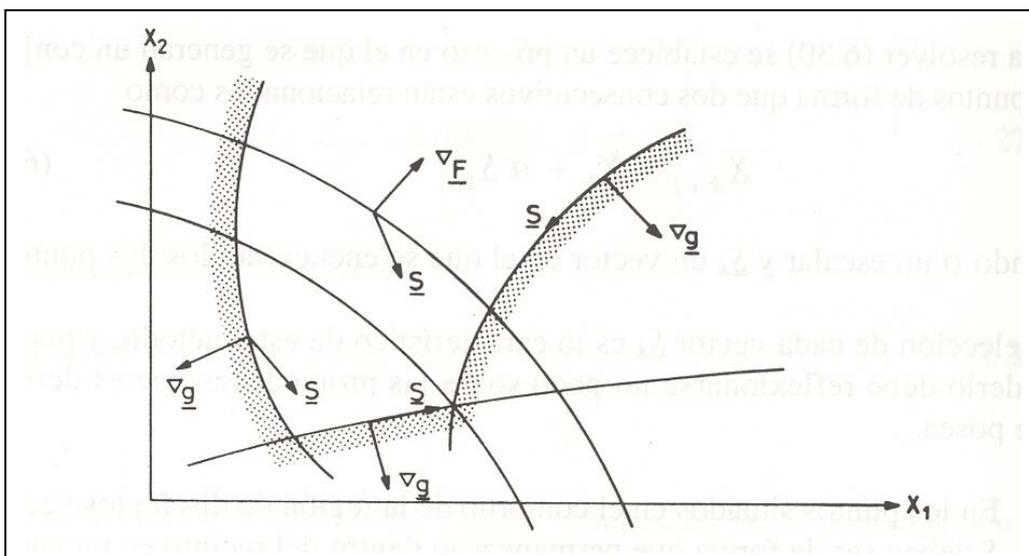


Figura 3.7.2. Posibles direcciones de búsqueda.

Se debe resolver, por tanto, el siguiente problema de maximización

$$\max \beta \quad (3.7.7)$$

sujeto a

$$\mathbf{s}^T \cdot \nabla g_j + \theta_j \beta \leq 0 \quad j=1, \dots, J \quad (3.7.8)$$

$$\mathbf{s}^T \cdot \nabla F + \beta \leq 0 \quad (3.7.9)$$

$$|s_i| \leq 1 \quad i=1, \dots, n \quad (3.7.10)$$

Las condiciones $g_j(\mathbf{x})$, $j=1, \dots, J$ son todas aquellas que contienen al último diseño. Para los escalares θ_j se asume generalmente $\theta_j = 1$. El subíndice $i=1, \dots, n$ identifica las componentes del vector \mathbf{s} . El problema así definido, para determinar la dirección de búsqueda, es lineal por lo que puede ser resuelto mediante el método simplex.

Una vez definida la dirección de búsqueda hay que determinar el valor α_k de la fórmula (3.7.3), que define la magnitud de cambio de diseño en la dirección de búsqueda. Para ello se efectúa una minimización con una sola variable, α_k , y se pueden emplear diversos métodos como ajuste a funciones polinómicas, método de la razón áurea, ... etc. El nuevo diseño \mathbf{x}_{k+1} puede estar situado en el interior de la región de diseño o sobre el contorno, por lo que para continuar el proceso de optimización se repetirá el proceso indicado hasta alcanzar el óptimo.

3.7.2.3 Métodos duales

Estos métodos permiten aproximar el problema general de optimización a otro más sencillo y fueron enunciados por vez primera por Fleury^[F2] y Sander y Fleury^[F3] a finales de los años 70.

Inicialmente, el método abordaba solamente funciones objetivo relativas al peso de una estructura con condiciones en movimientos y tensiones, considerando que éstas eran función lineal de un conjunto de variables \mathbf{x} . En consecuencia, podía ser aplicado para

minimizar el peso de estructuras de nudos articulados o membranas sin flexión. La formulación del problema es la siguiente:

$$\begin{aligned} \min F &= \sum_{i=1}^n c_i x_i \quad i = 1, \dots, n \\ \text{sujeto a } u_{jl} &\leq u_{jM} \quad j = 1, \dots, m \\ \sigma_{kl} &\leq \sigma_{kM} \quad k = 1, \dots, n \\ x_{im} &\leq x_i \leq x_{iM} \end{aligned} \quad (3.7.11)$$

El significado de los diversos términos es el siguiente:

c_i : constante asociada al peso del elemento i-ésimo.

x_i : variable asociada al elemento i-ésimo.

u_{jl} ($l = 1, \dots, c$) : movimiento j-ésimo de la estructura en el caso de carga l-ésimo.

σ_{kl} ($l = 1, \dots, c$) : tensión en el elemento k-ésimo en caso de carga l-ésimo.

x_{im}, x_{iM} : límites inferior y superior de variación de la variable i-ésima.

Aplicando el método de la carga virtual y realizando diversas transformaciones el problema general puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \min F &= \sum_{i=1}^n c_i x_i \quad i = 1, \dots, n \\ \text{sujeto a } \sum_{i=1}^n \frac{u_{ijl}}{x_i} &\leq u_{jM} \\ \sum_{i=1}^n \frac{t_{ikl}}{x_i} &\leq \sigma_{kM} \end{aligned} \quad (3.7.12)$$

Cabe destacar que las expresiones obtenidas son idénticas a las que plantean los métodos de asignación de criterios. Si no se supone a priori ningún tipo de condición activa, el problema anterior puede resolverse mediante procedimientos generales aplicando funciones lagrangianas. Sin embargo, si se introducen unas nuevas variables

$$\alpha_i = \frac{1}{x_i} \quad (3.7.13)$$

el problema de optimización anterior puede formularse de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 \min F &= \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{\alpha_i} \\
 \text{sujeto a } &\sum_{i=1}^n u_{ijl} \alpha_i \leq u_{jM} \\
 &\sum_{i=1}^n t_{ikl} \alpha_i \leq \sigma_{kM} \\
 &\alpha_{im} \leq \alpha_i \leq \alpha_{iM}
 \end{aligned} \tag{3.7.14}$$

Este último problema puede formularse más brevemente como

$$\begin{aligned}
 \min F &= \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{\alpha_i} \\
 \text{sujeto a } g_h(\alpha) &= \sum_{i=1}^n g_{ihl} \alpha_i \leq g_{hM} \quad h = 1, \dots, H \\
 &\alpha_{im} \leq \alpha_i \leq \alpha_{iM}
 \end{aligned} \tag{3.7.15}$$

siendo $H = (m+n)c$

La gran ventaja de este planteamiento es que, debido al carácter lineal de las condiciones, la región de diseño será convexa y existirá un solo mínimo de este problema.

Se puede establecer el lagrangiano $L(\underline{\alpha}, \underline{\lambda})$ siguiente, teniendo en cuenta que la raya horizontal indica que las variables correspondientes son vectores

$$L(\underline{\alpha}, \underline{\lambda}) = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{\alpha_i} + \sum_{h=1}^H \lambda_h (g_h(\underline{\alpha}) + s_h^2) \tag{3.7.16}$$

Para resolver el problema Fleury^[F4] y Schmit plantean el esquema iterativo siguiente: Se elige un diseño inicial $\alpha_{i,1}$ ($i=1, \dots, n$) y con él se entra en el espacio dual de las variables $\underline{\lambda}$ maximizando la función

$$L(\underline{\lambda}) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{\alpha_{i,1}} + \sum_{h=1}^H \lambda_h g_h(\underline{\alpha}_1) \quad (3.7.17)$$

sujeta únicamente a las condiciones $\lambda_h \geq 0$ ($h = 1, \dots, H$)

Una vez obtenido el vector $\underline{\lambda}_1$ los nuevos valores de $\underline{\alpha}_2$ serán

$$\begin{aligned} \alpha_{i,2} &= \alpha_{im} \text{ si } (\alpha_{im})^2 \geq (\alpha_{i,2})^2 \\ \alpha_{i,2} &= \alpha_{i,2} \text{ si } (\alpha_{im})^2 \leq (\alpha_{i,2})^2 \leq (\alpha_{iM})^2 \\ \alpha_{i,2} &= \alpha_{iM} \text{ si } (\alpha_{i,2})^2 \geq (\alpha_{iM})^2 \end{aligned} \quad (3.7.18)$$

obteniéndose $\alpha_{i,2}$ ($i = 1, \dots, n$) mediante la expresión

$$(\alpha_{i,2})^2 = \frac{c_i}{\sum_{h=1}^H \lambda_{h,1} \frac{\partial g_h}{\partial \alpha_i}} \quad (3.7.19)$$

Tras estos cálculos se maximiza nuevamente (3.7.17) con los nuevos valores de $\alpha_{i,2}$ ($i = 1, \dots, n$) y se repite el proceso de nuevo hasta alcanzar la convergencia.

Los métodos duales han tenido un notable éxito en el diseño estructural pues presentan algunas ventajas destacables:

- El carácter algebraico del problema primal permite formular un problema dual explícitamente.
- Aunque la optimización del problema dual es condicionada, no presenta complicaciones dada la sencillez de la condición.
- El conjunto de condiciones que pueden ser activas se va reduciendo conforme avanza el proceso, por lo que la dimensión del espacio dual suele ser pequeña.
- Se han desarrollado extensiones del método que permiten tratar con condiciones más amplias.

3.7.2.4 Métodos basados en las técnicas de aproximación

Estos métodos se caracterizan por que los algoritmos expresan el objetivo de la optimización y las condiciones de diseño mediante otras funciones diferentes a las del problema planteado con carácter general. La forma habitual de definir las nuevas funciones que han de sustituir a las originales es mediante un desarrollo en serie de Taylor considerando generalmente sólo dos o tres términos de este desarrollo. A continuación se emplean los métodos de programación matemática, algunos de los cuales ya se han comentado. En función del número de términos del desarrollo en serie que se consideren para aproximar las funciones se tienen los métodos siguientes:

- **Secuencia de problemas cuadráticos:** En la secuencia de problemas cuadráticos la función objetivo se aproxima mediante su desarrollo en serie de Taylor, considerando todos los términos hasta el segundo orden, y las funciones que expresan las condiciones se desarrollan considerando todos los términos de la serie hasta el orden primero. Una vez resuelto el problema, se tiene un nuevo diseño que se utiliza para realizar un nuevo desarrollo en serie, repitiendo el problema hasta alcanzar la convergencia.
- **Secuencia de problemas lineales:** En la secuencia de problemas lineales, tanto la función objetivo como las condiciones, se aproximan mediante desarrollos en serie considerando todos los términos hasta el orden lineal. Como en el caso anterior, resolviendo el problema aproximado, se obtiene un nuevo diseño que sirve como base para un nuevo desarrollo en serie, prosiguiendo el proceso hasta convergencia.

3.7.3 Algoritmos genéticos

Según el Computational Science Education Project^[C1] los algoritmos genéticos son un intento de recrear el fenómeno natural de la evolución de las especies que fue descrito por vez primera por Darwin. En el proceso evolutivo, cada especie procura adaptarse a un entorno cambiante. Al evolucionar, nuevas características son acumuladas en los cromosomas de ciertos individuos de una especie. Esta información genética cambia debido a mutaciones aleatorias, pero el verdadero motor del desarrollo evolutivo es la combinación e intercambio de cromosomas que se produce en la reproducción.

Aunque ha habido diversos intentos por incorporar estos principios en rutinas de optimización desde el principio de los años 60, los algoritmos genéticos se desarrollaron fundamentándose en una sólida base teórica gracias a los trabajos de Holland^[H4] publicados en 1975. Los dos axiomas fundamentales de esta nueva teoría son dos: En primer lugar que las estructuras complejas no biológicas pueden ser representadas por medio de cadenas de bits, y en segundo, que esas estructuras pueden experimentar mejoras aplicando transformaciones sencillas a esas cadenas de bits.

Los algoritmos genéticos se diferencian de los algoritmos tradicionales de optimización en cuatro aspectos fundamentales:

- Utilizan las variables de control convenientemente codificadas.
- El proceso de búsqueda se produce a través de conjuntos de soluciones (poblaciones), no a través de soluciones individuales.
- Se emplea solamente información de la función objetivo, y no de sus derivadas.
- El proceso de optimización está gobernado por reglas probabilistas, no deterministas.

En la figura 3.7.3 se muestra el diagrama de flujo básico de un algoritmo genético.

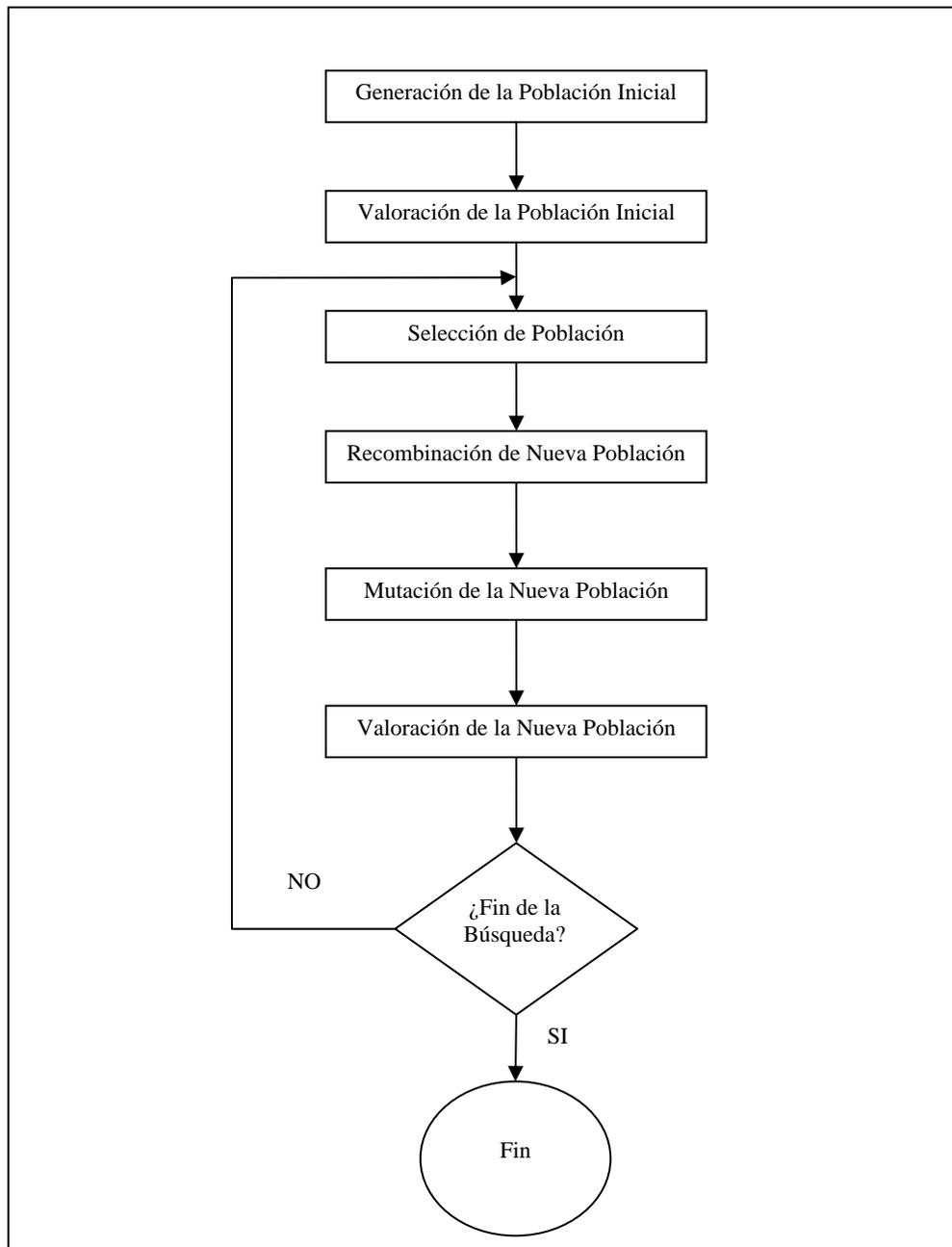


Figura 3.7.3. Estructura básica de un algoritmo genético

Una cuestión importante en los algoritmos genéticos es el representar o codificar adecuadamente la solución del problema. La aproximación tradicional en esta metodología es representar las soluciones mediante cadenas de bits, que reciben el nombre de cromosomas. Las variables enteras o de decisión se pueden codificar fácilmente de este modo, aunque esto no es tan sencillo cuando se trabaja con variables reales. En este caso, lo que se hace es aproximar estas variables por su valor equivalente empleando la numeración en base binaria.

Para comenzar el proceso de optimización empleando un algoritmo genético, se debe contar con una población inicial, escogida generalmente al azar, aunque en algunos casos puede ser adecuado emplear criterios heurísticos. En el propio algoritmo de optimización la selección de las poblaciones se basa en el principio de “supervivencia del más fuerte”. El procedimiento estándar consiste en evaluar la probabilidad de supervivencia de una solución i cuando se busca el máximo de una función objetivo f para lo que se puede aplicar la fórmula siguiente

$$P_{si} = \frac{f_i}{\sum_{i=1}^N f_i} \quad (3.7.20)$$

donde f_i es la “fuerza” (valor de la función objetivo) de la solución i , mientras que el denominador representa la fuerza total del conjunto de la población formada por N individuos.

En el caso de que se desee minimizar la función objetivo la probabilidad de supervivencia de una solución viene dada por la expresión

$$P_{si} = 1 - \frac{f_i}{\sum_{i=1}^N f_i} \quad (3.7.21)$$

Diversos autores como Barker^[B4] o De Jong^[D2] han propuesto diferentes estrategias para regular el proceso de selección en el seno de una población. En concreto, De Jong propuso un esquema de tipo “elitista” que garantiza que las poblaciones seleccionadas incluyan siempre la mejor de las soluciones alcanzadas, obteniéndose muy buenos resultados en aquellos problemas en los que existe un único máximo o mínimo. También se han estudiado procesos en los que se introduce algún tipo de criterio determinista en el proceso de selección, siendo el método conocido como *Stochastic Selection Without Replacement* el que ha ofrecido mejores resultados.

Debe tenerse en consideración que hasta ahora, independientemente del proceso de selección que se haya empleado, no se ha introducido ninguna nueva solución en la

población existente. De hecho, aquellas soluciones que hayan sobrevivido en el proceso de selección van a ser utilizadas como progenitores de una nueva generación. Por lo tanto, en esta fase de recombinación es en la que el algoritmo genera nuevas soluciones mejoradas combinando buenas soluciones existentes. Se han propuesto diversos métodos para programar la recombinación de poblaciones entre los que destacan los debidos a los investigadores Cavicchio^[C2], De Jong^[D2] o Brooker^[B5] entre otros. Para ciertos problemas de tipo práctico se han desarrollado operadores heurísticos que mejoran este proceso de recombinación o cruce. Davis^[D3] ha pasado revista a algunos logros recientes en este último aspecto.

Una de las posibilidades que presentan los algoritmos genéticos para manejar las restricciones del problema es aplicar el método de la función penalty, dando lugar a la expresión siguiente:

$$f_A(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + M^k \mathbf{w}^T \mathbf{c}_v(\mathbf{x}) \quad (3.7.22)$$

donde \mathbf{w} es un vector de coeficientes de ponderación no negativos, el vector \mathbf{c}_v evalúa la magnitud de las violaciones de las restricciones, M es el número de la generación considerada y k es un valor adecuado del exponente.

La eficiencia de los algoritmos genéticos depende en gran medida de los parámetros de control del propio algoritmo. Los parámetros de control más importantes son:

- El tamaño de la población: N
- La probabilidad de cruce: P_C
- La probabilidad de mutación: P_M

Diversos autores como De Jong^[D2] o Grenfenstette^[G1] han sugerido valores para estos parámetros con el fin de mejorar la eficiencia de los algoritmos.

Los algoritmos genéticos se caracterizan por su adecuación para ser implementados utilizando la programación en paralelo, ya que la evolución de la función objetivo y de las condiciones puede realizarse de manera independiente para cada individuo de la

población, al igual que el proceso de cruce y mutación. En estas condiciones el tiempo de cálculo de muchos problemas podría verse dividido prácticamente por N , siendo N el tamaño de la población.

3.7.4 Métodos de Perturbaciones. Recocido simulado (*simulated annealing*)

Según el Computational Science Education Project^[C1], tal y como indica su nombre, el algoritmo conocido como recocido simulado (*simulated annealing* en inglés o SA) se basa en la analogía que puede establecerse entre el proceso mediante el cual un metal se enfría y solidifica formando una estructura cristalina de mínima energía, y la búsqueda del mínimo de un problema.

Para el Metaheuristic Network Project^[M3] patrocinado por el Improving Human Potential Program de la Comisión Europea, el recocido simulado puede considerarse el más antiguo de los algoritmos metaheurísticos y de los primeros en implementar una estrategia explícita que permitiese evitar los mínimos locales. Otros procedimientos de tipo metaheurístico son el *Tabu Search* (véase Glover^[G2] y Laguna), *Iterated Local Search*, *Evolutionary Algorithms* y *Ant Colony Optimization* (véase Dorigo^[D4] y Stützle).

El algoritmo del recocido simulado se basa en el desarrollado por Metropolis^[M4] et al. en 1958 cuyo objetivo era determinar la configuración de equilibrio de un grupo de átomos a una temperatura dada. La aplicación de este algoritmo a problemas de optimización matemática fue planteada por vez primera por Pincus^[P3] en 1970. Fueron Kirkpatrick^[K3], Gerlatt y Vecchi quienes en 1983 propusieron y formularon sólidamente esta técnica para ser aplicada en problemas de optimización. El algoritmo emplea un método de búsqueda aleatoria y la idea fundamental es permitir que se acepten soluciones de peor calidad que la previa con el fin de evitar así los mínimos locales. La probabilidad de que esta situación se produzca se hace disminuir a medida que avanza el proceso de búsqueda del mínimo y una formulación propuesta para esa probabilidad es

$$p = \exp\left(-\frac{\delta f}{T}\right) \quad (3.7.23)$$

donde δf es la variación de la función objetivo y T es el parámetro de control que recibe el nombre de temperatura del sistema por analogía con el proceso de recocido.

En la figura 3.7.4 se muestra la estructura básica del algoritmo de recocido simulado.

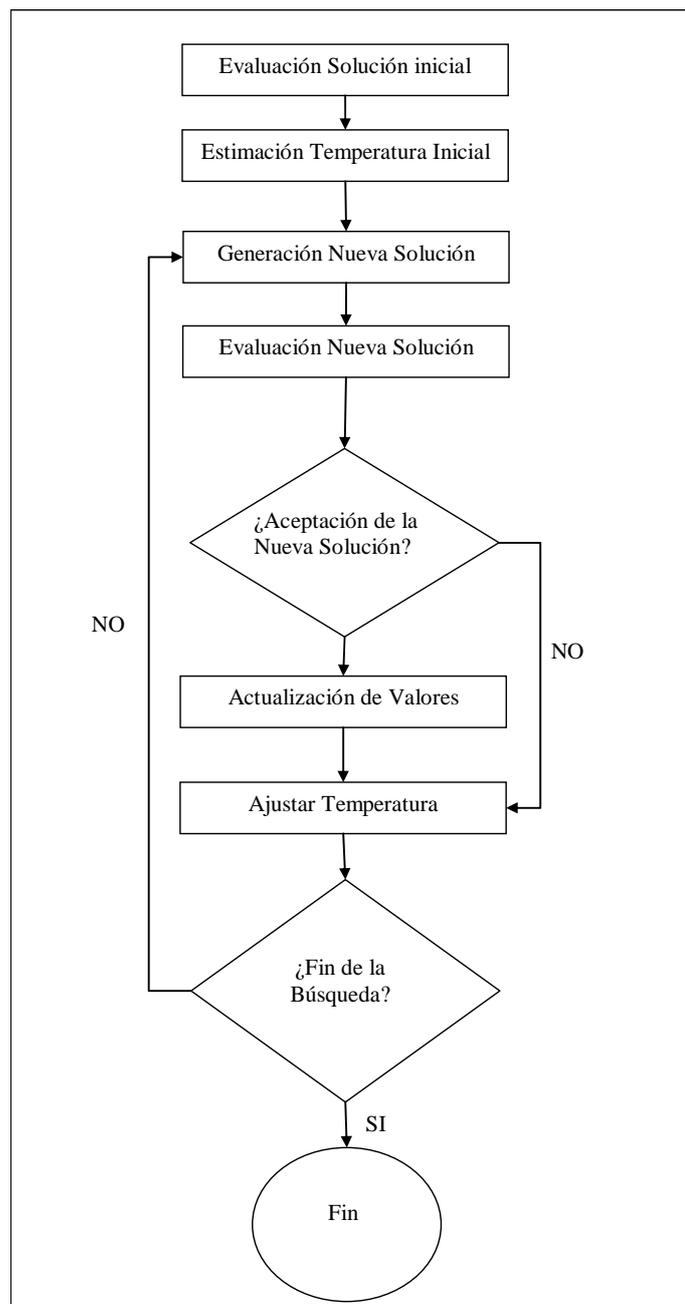


Figura 3.7.4 Estructura básica del algoritmo de recocido simulado

Los aspectos básicos a tener en cuenta en esta técnica, los cuales se ampliarán a continuación, son:

- Generación de modificaciones aleatorias en las soluciones.
- Evaluación de las funciones del problema.
- La planificación del recocido, es decir, la temperatura inicial y las reglas que hacen que la temperatura descienda al avanzar el proceso de minimización.

El proceso de generación de nuevas soluciones a partir de las existentes debe introducir pequeñas modificaciones aleatorias y permitir que puedan darse todas las soluciones posibles. Así, Vanderbilt^[V2] y Louie propusieron la generación de soluciones en problemas con variables de control continuas mediante la fórmula

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \mathbf{Q}\mathbf{u} \quad (3.7.24)$$

donde \mathbf{u} es un vector de números aleatorios en el intervalo $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, de manera que la media sea cero y la varianza la unidad. Por otro lado, \mathbf{Q} es una matriz que controla la distribución del tamaño del paso y debe ser recalculada al avanzar el proceso, con el consiguiente costo computacional.

Otra posible formación del mismo proceso es la planteada por Parks^[P4]:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (3.7.25)$$

donde, en este caso, \mathbf{u} es un vector de números aleatorios en el intervalo $(-1,1)$ y \mathbf{D} es una matriz diagonal que define la máxima variación permitida de cada variable y debe ser recalculada a lo largo del proceso.

En aquellos problemas en los que las variables de control son números enteros la obtención de nuevas soluciones puede realizarse empleando la siguiente fórmula

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \mathbf{u} \quad (3.7.26)$$

donde \mathbf{u} es un vector de números enteros aleatorios en el intervalo $(-1,1)$.

Uno de los aspectos que caracteriza el método del recocido simulado es que no requiere el cálculo de ninguna derivada. Sólo necesita la evaluación de la función objetivo para cada una de las soluciones de prueba que son generadas.

En lo que se refiere a las restricciones del problema, cuando las condiciones sean de igualdad o cuando haya regiones de diseño disjuntas, el problema debe transformarse en uno de optimización incondicionada aplicando el método de la función penalty, añadiendo las restricciones violadas a la función objetivo aplicando esta fórmula

$$f_A(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{T} \mathbf{w}^T \mathbf{c}_v(\mathbf{x}) \quad (3.7.27)$$

donde \mathbf{w} es un vector que contiene coeficientes de ponderación no negativos y \mathbf{c}_v cuantifica la magnitud de las violaciones de las condiciones.

El esquema o planificación del recocido determina el movimiento “pendiente arriba” que se permite durante el proceso de búsqueda, y por lo tanto, es uno de los aspectos críticos para garantizar un funcionamiento eficiente del algoritmo. El esquema conceptual es el siguiente: La temperatura inicial debe ser lo suficientemente alta como para que el sistema esté “fundido” en su totalidad y debe ir descendiendo hacia el punto de solidificación al ir progresando la búsqueda.

El procedimiento estándar empleado habitualmente en los algoritmos de recocido simulado consiste en la generación a temperaturas decrecientes de cadenas homogéneas de Markov de longitud finita. Estas cadenas de Markov son series de cambios aleatorios en las variables de control. Los parámetros que deben tenerse en cuenta son:

- Temperatura inicial.
- Temperatura final o criterio de terminación.
- Longitud de las cadenas de Markov.
- Regla para disminuir la temperatura.

Kirkpatrick^[K3], por ejemplo, propuso como temperatura inicial aquella para la que la probabilidad de que aumentase la función objetivo fuese del 80%.

Para establecer la temperatura final hay diversas alternativas: Fijar el número de valores de la temperatura a utilizar en el proceso, establecer a priori el número de soluciones a generar o terminar el algoritmo cuando no se mejore la solución según ciertos criterios.

El lo tocante a la longitud de las cadenas de Markov, lo habitual es que dependa del tamaño del problema y no del número de soluciones calculadas.

Por otro lado, la regla más simple para disminuir la temperatura es:

$$T_{k+1} = \alpha T_k \quad (3.7.28)$$

donde α es un valor constante menor que uno, pero próximo a él. Esta formulación recibe el nombre de esquema de enfriamiento exponencial (*Exponential Cooling Scheme* o ECS) y fue propuesto por vez primera por Kirkpatrick^[K4], Gerlatt y Vecchi tomando como valor $\alpha = 0.95$. Otros autores como Randelman^[R1] y Grest han propuesto otros esquemas que han ofrecido resultados similares al anterior.

Los procesos computacionales que permiten generar y aceptar nuevas soluciones son muy simples, por lo que el mayor coste computacional reside, generalmente, en la evaluación de la función objetivo y de las condiciones del problema. Para reducir los tiempos de cálculo se debe trabajar en la paralelización del proceso de evaluación de las funciones del problema.

3.7.5 Método seleccionado

En los apartados anteriores se ha pasado revista a la mayor parte de los algoritmos existentes actualmente para llevar a cabo problemas de optimización en ingeniería. En el pasado se han realizado estudios para poder concluir la eficacia comparativa entre unos y otros. Para ello se utilizaron un conjunto de problemas que servían de banco de pruebas los cuales debían resolverse con diferentes métodos y en distintas arquitecturas

de ordenadores. Algunas investigaciones en la línea que se acaba de indicar han sido las de Sandgren^[S1], Sandgren^[S2] y Ragsdell, Ragsdell^[R2], Sarma^[S3] et al. o Fattler^[F5]. et al. Aunque las conclusiones no eran completamente taxativas, sí que existía una orientación hacia una mayor eficacia de las técnicas basadas en gradientes debido a que lograban la convergencia del problema con menor número de iteraciones, lo que suponía menor cantidad de evaluaciones de la función objetivo y de las condiciones. A ello debe añadirse que el conocimiento de los vectores gradientes permite aplicar la condición de Kuhn-Tucker^[K5] que facilita confirmar si el diseño al que se ha convergido es un punto óptimo o no, algo que no es posible comprobar con otros algoritmos.

En la actualidad, la gran potencia de cálculo de los ordenadores posibilita que la mayoría de los problemas de optimización puedan resolverse utilizando incluso procedimientos que requieren un elevado número de obtenciones de la función objetivo y las condiciones, de manera que, en estos casos, desde el punto de vista práctico la eficacia relativa a los tiempos de cálculo pierde relevancia, aunque ello no debe hacer olvidar que desde el punto de vista teórico sigue siendo importante el requisito de que un algoritmo debe ser cuanto más rápido mejor.

En el problema analizado en esta investigación, la obtención de las condiciones consideradas, especialmente la velocidad de flameo, requiere una sucesión de cálculos estáticos y dinámicos muy laboriosos computacionalmente por lo que sigue siendo una de las situaciones en las que es muy importante llevar a cabo el menor número posible de evaluaciones, y por ello se ha decidido utilizar métodos de gradiente que presentan ventajas de rapidez computacional, como antes se ha mencionado.

En estos métodos el mayor esfuerzo de cálculo está asociado al cálculo de los gradientes si ello se lleva a cabo por diferencias finitas, por lo que resulta muy ventajoso eliminar esa tarea calculando los gradientes mediante las sensibilidades analíticas, lo que reduce cuantiosamente el tiempo de cálculo. Por ello en la investigación completada ha sido necesario elaborar la metodología correspondiente a la obtención analítica de las sensibilidades correspondientes.

Dentro de los métodos de gradiente se ha utilizado el método de las direcciones eficientes, en la modalidad modificada establecida por Vanderplaats^[V1]. Este algoritmo

está implementado en el código ADS^[V3], de gran implantación en universidades y centros de investigación académicos e industriales.

3.8 REFERENCIAS

[A1] Arora J. S. [2004] *Introduction to Optimum Design*. 2nd Edition, Amsterdam, Boston. Elsevier/Academic Press.

[B1] Belegundu A. D., Mistree F. [1997] *Optimization in Industry 1997*. American Society of Mechanical Engineers (ASME), March 23-27, Palm Coast, Florida, USA.

[B2] Belegundu A. D., Mistree F. [1999] *Optimization in Industry II 1999*. American Society of Mechanical Engineers (ASME), June 6-11, Banff, Alberta, Canada.

[B3] Belegundu A. D., Chandrupatla T. R. [1999] *Optimization Concepts and Applications in Engineering*. Prentice Hall. New Jersey.

[B4] Barker J. E. [1985] *Adaptative Selection Methods for Genetic Algorithms*. Proceedings of an International Conference on Genetic Algorithms and their Applications (J. J. Grefenstette, editor) pp. 101-111, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ.

[B5] Booker L. B. [1987] *Improving Search in Genetic Algorithms*. Genetic Algorithms and Simulated Annealing (L. Davis, editor) pp. 61-73. Pitman, London.

[C1] Computational Science Education Project [1994] Libro electrónico *Mathematical Optimization*.

[C2] Cavicchio D. J. [1970] *Adaptative Search Using Simulated Evolution*. Ph.D. Thesis, University of Michigan, Ann Arbor, MI.

[D1] Dantzig G. [1963] *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press.

[D2] De Jong K. A. [1975] *An Analysis of the Behaviour of a Class of Genetic Adaptive Systems*. Ph.D. Thesis, University of Michigan, Ann Arbor, MI.

[D3] Davis L. [1991] *Handbook of Genetic Algorithms*. Van Nostrand Reinhold, New York.

[D4] Dorigo M., Stützle T. [2004] *Ant Colony Optimization*. MIT Press, Cambridge.

[F1] Fletcher R., Reeves C. M. [1964] *Function Minimization by Conjugate Gradients*. Comput. J., Vol 7.

[F2] Fleury C., Sander G. [1977] *Relations between Optimality Criteria and Mathematical Programming in Structural Optimization*. Symposium on Applications of Computer Methods en Engineering. University of Southern California.

[F3] Fleury C. [1979] *Unified Approach to Structural Weight Minimization*. Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng. 20, pag 17-38.

[F4] Fleury C., Schmit L. A. [1980] *Dual Methods and Approximation Concepts in Structural Synthesis*. NASA CR 3226, 1, 26,27,28.

[F5] Fattler J.E., Sin Y.T., Root R.R., Ragsdell K.M., Reklaitis G.V. [1982] *On the Computational Utility of Posynomial Geometric Programming Solution Methods*. Mathematical Programming, 22, No 2.

[G1] Grefenstette J. J. [1986] *Optimization of Control Parameters for Genetic Algorithms*. IEEE Trans. Syst., Man, Cyber. SMC-16, 122-128.

[G2] Glover F., Laguna M. [1997] *Tabu Search*. Kluwer Academic Publishers.

[H1] Hernández S. [1990] *Métodos de diseño óptimo de estructuras*. Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Madrid.

[H2] Hernández S., Fontán A. [2002] *Practical Applications of Design Optimization*. WIT Press, Southampton.

[H3] Haftka R. T., Gürdal Z., Kamat M. P. [1990] *Elements of Structural Optimization*. Kluwer Academic Publishers, 2nd edition.

[H4] Holland J. H. [1998] *Adaptation in Natural and Artificial Systems: an Introductory Analysis with Applications to Biology, Control and Artificial Intelligence*. 5th printing. MIT Press, Cambridge.

[J1] Jurado J. A. [2001] *Análisis Aeroelástico y de Sensibilidad del Fenómeno de Flameo en Puentes Soportados por Cables*. Tesis doctoral de la Universidade da Coruña. Escola Técnica Superior de Enxeñeiros de Camiños, Canais e Portos.

[J2] Jurado J. Á., Mosquera A., Nieto F., Hernández S. [2004] *Configuraciones Óptimas de Cables en Puentes Atirantados según Análisis de Sensibilidad de su Comportamiento Aeroelástico*. Congreso de Métodos Computacionais em Engenharia. Lisboa, Portugal. 31 Mayo-2 Junio 2004.

[J3] Jurado J. A., Hernández S., Mosquera A., Nieto F. [2003] *Optimal Cable Arrangement in Cable Stayed Bridges Based in Sensitivity Analysis of Aeroelastic Behaviour*. ASCE Structures Congress, 29-31 May. Seattle, Washington.

[K1] Kuhn H. W. Tucker A. W. [1950] *Nonlinear Programming*. Proc. 2nd Berkeley Sump. Math. Stat. Prob. Berkeley, Cal. Pag 481-492.

[K2] Karmarkar N. [1984] *A New Polynomial-time Algorithm for Linear Programming*. Combinatóriaica 4.

[K3] Kirkpatrick S., Gerlatt C. D. Jr., Vecchi M. P. [1983] *Optimization by Simulated Annealing*. Science 220, 671-680.

[K4] Kirkpatrick S., Gerlatt C. D. Jr., Vecchi M. P. [1982] *Optimization by Simulated Annealing*. IBM Research Report RC 9355.

[K5] Kuhn H.W., Tucker A.W. [1951] *Nonlinear Programming*. Proceedings of 2nd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. University of California Press, pp. 481-490.

[M1] Mosquera A., [2003] *Sensibilidad Analítica de la Vibración Libre y del Flameo en Puentes Colgantes de Gran Vano en Servicio y en Fase Constructiva*. Tesis doctoral de la Universidade da Coruña. Escola Técnica Superior de Enxeñeiros de Camiños, Canais e Portos.

[M2] Mosquera, A., Hernández, S. [2002] *Linear and Non Linear Sensitivity Analysis of Eigenvalue Problems*. 9th AIAA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization. Atlanta, Georgia, USA. 4-6 September 2002

[M3] Metaheuristic Network Project home page www.metaheuristics.org

[M4] Metropolis N., Rosenbluth A. W., Rosenbluth M. N., Teller A. H., Teller E. [1958] *Equations of State Calculations by Fast Computing Machines*. J. Chem. Phys. 21, 1087-1092.

[N1] Navarrina F. [1987] *Una Metodología General para Optimización Estructural en Diseño Asistido por Ordenador*. ETS de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Cataluña.

[N2] Navarrina F., Valera A., París J., Colominas I., Casteleiro M. [2005] *Optimización de Torres de Alta Tensión mediante un Método de Programación Lineal Secuencial con Búsqueda Unidireccional Cuadrática*. Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería. 4-7 Julio, Granada, España.

[O1] Ohkubo S., Taniwaki H. [1991] *Shape and Sizing Optimization of Steel Cable-Stayed Bridges*. Optimization of Structural Systems and Industrial Applications. Computational Mechanics Publications co-published with Elsevier Applied Science.

[P1] Perezzán J. C. [1999] *Análisis de Sensibilidad y Optimización de Estructuras de Barras de Nudos Rígidos en Teoría Lineal y no Lineal*. Tesis doctoral de la Universidade da Coruña. Escola Técnica Superior de Enxeñeiros de Camiños, Canais e Portos.

[P2] Powell M.J.D. [1964] *An Efficient Method of Finding the Minimum of a Function of Several Variables without Calculating Derivatives*. Comput J., Vol 7.

[P3] Pincus M. [1970] *A Montecarlo Method for Approximate Solution of Certain Types of Constrained Optimization Problems*. Oper. Res. 18, 1225-1228.

[P4] Parks G. T. [1990] *An Intelligent Stochastic Optimization Routine for Nuclear Fuel Cycle Design*. Nucl. Technol. 89, 233-246.

[R1] Randelman R. E., Grest G. S. [1986] *N-City Traveling Salesman Problem – Optimization by Simulated Annealings*. J. Stat. Phys. 45, 885-890.

[R2] Ragsdell K.M. [1984] *The Utility of Non-linear Programming Methods for Engineering Design*. New Directions in Optimum Structural Design, (Atrek E., Gallagher R.M., Ragsdell K.M. & Zienkiewicz O.C. Eds.) John Wiley & Sons.

[S1] Sandgren E. [1977] *The Utility of Nonlinear Programming Algorithms*. Ph. D. Dissertation, Purdue University, University of Microfiche, Ann Arbor, Michigan. Document No 7813115.

[S2] Sandgren E., Ragsdell K.M. [1980] *The Utility of Nonlinear Programming Algorithms: A Comparative Study - Part 1 and 2*. Trans. ASME, Journal of Mechanical Design, 102, No 3, pp. 540-551.

[S3] Sarma P.V.L.N., Martens X.M., Reklaitis G.V., Rijckaert M.J. [1978] *A Comparison of Computational Strategies for Geometric Programs*. JOTA, 26 No 2, pp. 185-203.

[V1] Vanderplaats G. N. [2001] *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design: With Applications*. 3rd edition. Vanderplaats Research & Development, inc. Colorado Springs.

[V2] Vanderbilt D., Louie S. G. [1984] *A Monte Carlo Simulated Annealing Approach to Optimization over Continuous Variables*. J. Comput. Phys. 56, 259-271.

[V3] VMA Engineering [1988] *ADS – A Fortran Program for Automated Design Synthesis, Version 3.00*. Vanderplaats, Miura & Associates, Inc., Goleta, California, USA.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DEL FLAMEO CON MASA VARIABLE

“Then, it is essential to understand how any change in the physically identifiable design variable of the structural system...affects the response variable. When the structural engineer studies the relationship between the response variables and the design variables, it is possible to move the value of the response variable toward a desired (or target) value.”

(Hart G.C, Wong K.; Structural Dynamics for Structural Engineers).

4.1 INTRODUCCIÓN

Los puentes colgantes o atirantados son estructuras analizables adecuadamente mediante modelos de barras, y su estudio puede ser hallado en multitud de trabajos. Algunos recientes vinculados a cálculos aeroelásticos son los realizados por Larsen^[L1], Cobo^[C1], Namini^[N1] y Aldbrecht, Astiz^[A1], Jurado^[J1] et al., Miyata^[M1], Yamada y Katsuchi o Mosquera^[M2], Hernandez y Jurado. Por lo tanto, todo el desarrollo que a continuación se lleva a cabo se centra en estructuras tridimensionales de barras.

En el capítulo 3 se indicó cómo el proceso de diseño convencional basado en la aplicación de reglas heurísticas podía mejorarse haciéndolo más sistemático y racional aplicando técnicas como los análisis de sensibilidad en el ámbito, ya sea de un proceso de diseño mediante los propios análisis de sensibilidad, o bien de diseño óptimo.

En este capítulo se quiere profundizar en la metodología que permite calcular analíticamente las sensibilidades de los parámetros de flameo, es decir, velocidad crítica de flameo y frecuencia reducida, como parte de la resolución del problema general de diseño de un puente de gran vano que se pretende que sea lo más ligero posible ya que así, el coste de los materiales a emplear será mínimo, a la vez que se satisfacen las condiciones de diseño establecidas en el plan de necesidades, como por ejemplo que la velocidad de flameo sea mayor que un cierto valor o que el nivel de tensiones en cualquier punto de la estructura sea menor que una cierta tensión admisible.

El hecho de que se pretenda proyectar una estructura de peso mínimo significa que a lo largo del proceso de diseño la masa de los elementos que la forman irá siendo cada vez menor hasta obtener una estructura cuyo peso sea el menor posible, compatible a su vez con las condiciones de seguridad, o de otro tipo, establecidas en el plan de necesidades. Por lo tanto, se considera que la masa, o lo que es equivalente, el área de la sección transversal de los elementos tipo barra con los que se modela la estructura, es variable a lo largo del proceso de diseño. Al considerar la masa, es decir, el área de los elementos que constituyen la estructura, como susceptible de ser modificada se debe añadir una nueva variable de diseño, el área de la sección transversal A , al problema del cálculo de sensibilidades de los parámetros de flameo resuelto por Jurado^[J2] y por Mosquera^[M3] donde se ha considerado la masa como constante.

Como se ha indicado en el capítulo 2 al tratar sobre el flameo multimodal, el cálculo aeroelástico que permite predecir el comportamiento frente a cargas de viento de estructuras como puentes atirantados o colgantes, entre otras, hace necesario previamente el conocimiento de la vibración libre de dichas estructuras, esto es, el cálculo de sus frecuencias naturales y modos propios de vibración.

En el análisis de sensibilidad de la velocidad de flameo de una estructura de este tipo, se necesitan las sensibilidades de dichas frecuencias y modos propios de vibración, considerando variable la masa de los elementos tipo barra que constituyen la estructura. La utilidad de estos análisis de sensibilidad es obviamente mucho más amplia, y de hecho cualquier problema dinámico que incluya el análisis modal en su resolución, podrá utilizarlos. Debido a su gran trascendencia ha parecido adecuado describir y formular la obtención de las frecuencias y modos propios de vibración de una

estructura, así como el cálculo de sus sensibilidades de un modo completamente analítico, tanto en teoría lineal como teniendo en cuenta la no linealidad geométrica, lo que se denominará teoría de segundo orden. Véase Hernández^[H1], así como Chen^[C2] y Duan. Ésta se diferencia de la teoría lineal en que las leyes de esfuerzos interiores de la estructura se obtienen considerando la geometría deformada de la misma. Este es el planteamiento más adecuado para este tipo de estructuras soportadas por cables como los puentes colgantes, que en su interacción con el viento son el objeto de este trabajo.

Como se verá en los próximos apartados, la metodología analítica propuesta para calcular los análisis de sensibilidad de la respuesta aeroelástica de puentes de cables con masa variable es muy costosa computacionalmente. Sin embargo, muchos de los procesos de cálculo son susceptibles de ser ejecutados simultáneamente en equipos informáticos diferentes, con lo que aplicando un esquema de programación mediante procesamiento distribuido se logra reducir notablemente los tiempos de cálculo.

4.1.1 Conceptos de cálculo matricial de estructuras

El desarrollo del análisis matricial de estructuras de barras por el método del equilibrio o de los movimientos, Samartín^[S1], Hernández^[H1], Livesley^[L2], Saez-Benito^[S2], conduce a la expresión

$$\mathbf{p} = \mathbf{K}\mathbf{u} \quad (4.1.1)$$

donde \mathbf{p} representa el vector de cargas en nudos, \mathbf{u} el vector de movimientos nodales y \mathbf{K} es la matriz de rigidez de la estructura.

4.1.1.1 Teoría lineal

En teoría lineal, la matriz de rigidez de la estructura resulta

$$\mathbf{K}_{\text{lin}} = \mathbf{IE}(\mathbf{K}_{\text{E}}^{\text{b}}) \quad (4.1.2)$$

en la que \mathbf{IE} representa la operación de ensamblaje de la matriz de rigidez para todas las barras, siendo \mathbf{K}_E^b la matriz de rigidez elemental elástica para cada barra b , en ejes globales, y \mathbf{K}_{in} la matriz de rigidez de la estructura completa en teoría lineal.

Sea una barra como la que se representa en la figura 4.1.1, la cual se encuentra situada en un espacio tridimensional y cuyos ejes locales son $\{x, y, z\}$ en un sistema global tridimensional definido por los ejes $\{x_g, y_g, z_g\}$. A nivel elemental de la barra, y trabajando en ejes locales, se verifica

$$\mathbf{p}^b = \mathbf{K}_E^{b,l} \cdot \mathbf{u}^b \tag{4.1.3}$$

donde \mathbf{p}^b es el vector de cargas en los nudos en ejes locales de la barra, el cual tiene 12 componentes, es decir, tres fuerzas y tres momentos por nudo; \mathbf{u}^b es el vector de movimientos en ejes locales de la barra con tres traslaciones y tres giros por nudo, y $\mathbf{K}_E^{b,l}$ es la matriz de rigidez elástica de la barra en ejes locales, de dimensión 12x12.

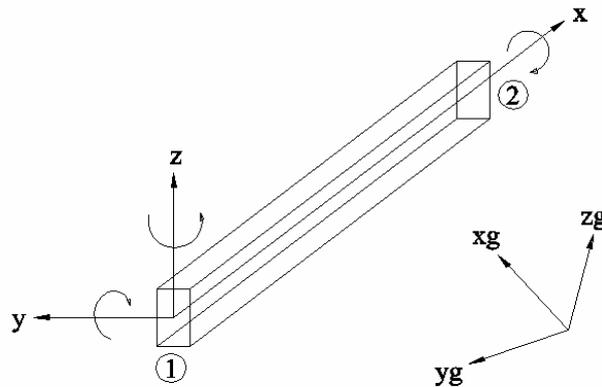


Figura 4.1.1 Elemento barra. Ejes y criterio de signos positivo.

La matriz de rigidez elástica de la barra suele expresarse subdividida por cajas del siguiente modo

$$\mathbf{K}_E^{b,l} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix} \tag{4.1.4}$$

estando \mathbf{K}_{11} , \mathbf{K}_{12} , \mathbf{K}_{21} , \mathbf{K}_{22} , definidas como a continuación se expone

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{pmatrix} \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I_y}{L^3} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G \cdot J}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I_y}{L^2} & 0 & \frac{4 \cdot E \cdot I_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4 \cdot E \cdot I_z}{L} \end{pmatrix} \quad (4.1.5)$$

$$\mathbf{K}_{12} = \mathbf{K}_{21}^T = \begin{pmatrix} -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I_y}{L^3} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{G \cdot J}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I_y}{L^2} & 0 & \frac{2 \cdot E \cdot I_y}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2 \cdot E \cdot I_z}{L} \end{pmatrix} \quad (4.1.6)$$

$$\mathbf{K}_{22} = \begin{pmatrix} \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I_y}{L^3} & 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G \cdot J}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I_y}{L^2} & 0 & \frac{4 \cdot E \cdot I_y}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4 \cdot E \cdot I_z}{L} \end{pmatrix} \quad (4.1.7)$$

Se define la matriz de transporte, \mathbf{T} , de paso a ejes globales como sigue

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos \alpha(x_g, x) & \cos \alpha(x_g, y) & \cos \alpha(x_g, z) & 0 & 0 & 0 \\ \cos \alpha(y_g, x) & \cos \alpha(y_g, y) & \cos \alpha(y_g, z) & 0 & 0 & 0 \\ \cos \alpha(z_g, x) & \cos \alpha(z_g, y) & \cos \alpha(z_g, z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha(x_g, x) & \cos \alpha(x_g, y) & \cos \alpha(x_g, z) \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha(y_g, x) & \cos \alpha(y_g, y) & \cos \alpha(y_g, z) \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha(z_g, x) & \cos \alpha(z_g, y) & \cos \alpha(z_g, z) \end{pmatrix}$$

(4.1.8)

siendo $\alpha(i,j)$, el ángulo que forma el eje i con el eje j .

Se obtiene finalmente la matriz de rigidez elástica elemental de la barra en ejes globales del siguiente modo

$$\mathbf{K}_E^b = \begin{pmatrix} \mathbf{T} \cdot \mathbf{K}_{11} \cdot \mathbf{T}^T & \mathbf{T} \cdot \mathbf{K}_{12} \cdot \mathbf{T}^T \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{K}_{21} \cdot \mathbf{T}^T & \mathbf{T} \cdot \mathbf{K}_{22} \cdot \mathbf{T}^T \end{pmatrix} \quad (4.1.9)$$

quedando definida la ecuación (4.1.2) en la que se procede al ensamblaje para todas las barras, y pudiéndose así resolver el sistema de ecuaciones dado por la ecuación (4.1.1) tras la imposición de las pertinentes condiciones de contorno, y habiéndose obtenido y ensamblado previamente el vector de cargas en los nudos en coordenadas globales.

4.1.1.2 Teoría de segundo orden

En teoría de segundo orden, considerando la modificación de la geometría de los cables del sistema de suspensión del puente, la formulación resultante en el método de equilibrio según Przemieniecki^[P1], Hernández^[H1] o Chen^[C2] y Duan , conduce a la expresión siguiente

$$\mathbf{p} = \mathbf{K}_{\text{nolin}} \cdot \mathbf{u} \quad (4.1.10)$$

donde \mathbf{p} representa el vector de cargas en nudos, \mathbf{u} el vector de movimientos nodales y $\mathbf{K}_{\text{nolin}}$ es la matriz de rigidez de la estructura en teoría no lineal o de segundo orden, siendo

$$\mathbf{K}_{\text{nolin}} = \mathbf{K}_{\text{lin}} + \mathbf{K}_{\text{G}} \quad (4.1.11)$$

donde \mathbf{K}_{G} es la matriz de rigidez geométrica para la estructura completa, de modo que

$$\mathbf{K}_{\text{G}} = \mathbf{IE} \left(\mathbf{N}_b \cdot \mathbf{K}_{\text{G}}^b \right) \quad (4.1.12)$$

en la que \mathbf{N}_b es el esfuerzo axial de tracción para la barra b y \mathbf{K}_{G}^b es la matriz de rigidez geométrica a nivel elemental de la barra en ejes globales.

Cada matriz \mathbf{K}_{G}^b se obtiene a partir de la matriz de rigidez geométrica en ejes locales de la barra $\mathbf{K}_{\text{G}}^{b,l}$ y de la matriz de transporte \mathbf{T} definida en (4.1.8), siendo

$$\mathbf{K}_{\text{G}}^{b,l} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{\text{G}11} & \mathbf{K}_{\text{G}12} \\ \mathbf{K}_{\text{G}21} & \mathbf{K}_{\text{G}22} \end{pmatrix} \quad (4.1.13)$$

donde cada una de las submatrices resulta

$$\mathbf{K}_{G11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5 \cdot L} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{6}{5 \cdot L} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{2 \cdot L}{15} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{2 \cdot L}{15} \end{pmatrix} \quad (4.1.14)$$

$$\mathbf{K}_{G12} = \mathbf{K}_{G21}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5 \cdot L} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{5 \cdot L} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{L}{30} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{30} \end{pmatrix} \quad (4.1.15)$$

$$\mathbf{K}_{G22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5 \cdot L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{6}{5 \cdot L} & 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & \frac{2 \cdot L}{15} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{2 \cdot L}{15} \end{pmatrix} \quad (4.1.16)$$

en las que L es la longitud de la barra, y por tanto cada matriz \mathbf{K}_G^b , ya en ejes globales resulta finalmente

$$\mathbf{K}_G^b = \begin{pmatrix} \mathbf{T} \cdot \mathbf{K}_{G11} \cdot \mathbf{T}^T & \mathbf{T} \cdot \mathbf{K}_{G12} \cdot \mathbf{T}^T \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{K}_{G21} \cdot \mathbf{T}^T & \mathbf{T} \cdot \mathbf{K}_{G22} \cdot \mathbf{T}^T \end{pmatrix} \quad (4.1.17)$$

Por otro lado, el axil positivo de tracción N_b en cada barra b , se obtiene en función de los movimientos en los nudos según la expresión

$$N_b = \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{u}^b \quad (4.1.18)$$

en la que \mathbf{u}^b es el vector que contiene los doce grados de libertad del elemento barra en coordenadas globales (tres traslaciones y tres rotaciones en cada nudo), y \mathbf{w} es el vector que los relaciona con el esfuerzo axil, y tiene la siguiente expresión.

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -\frac{E \cdot A}{L} \cdot \cos \alpha(x_g, x) \\ -\frac{E \cdot A}{L} \cdot \cos \alpha(y_g, x) \\ -\frac{E \cdot A}{L} \cdot \cos \alpha(z_g, x) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{E \cdot A}{L} \cdot \cos \alpha(x_g, x) \\ \frac{E \cdot A}{L} \cdot \cos \alpha(y_g, x) \\ \frac{E \cdot A}{L} \cdot \cos \alpha(z_g, x) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.1.19)$$

De esta forma quedan completamente definidos todos los elementos de la ecuación (4.1.12). Después de realizar el ensamblaje de $\mathbf{K}_{\text{nolin}}$ y de \mathbf{p} , y tras imponer las correspondientes condiciones de contorno, se resuelve el sistema expresado en (4.1.10).

4.1.2 Frecuencias naturales y modos propios de vibración

La obtención de las frecuencias y modos naturales de vibración de una estructura es necesaria para la resolución de múltiples y variados problemas de análisis dinámico.

Sea una estructura tridimensional de barras en la que se formula el problema dinámico de la vibración libre sin amortiguamiento, véase Hart^[H2] y Wong, Chopra^[C3], o Craig^[C4], del siguiente modo

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (4.1.20)$$

donde \mathbf{M} es la matriz de masas de la estructura y \mathbf{K} es la matriz de rigidez de la estructura. Esta expresión debe contener únicamente los grados de libertad de la estructura con masa asociada, por lo que anteriormente se ha debido realizar la condensación estática, véase Chopra^[C3].

Se puede suponer que la solución de la ecuación (4.1.20) es de la manera siguiente

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_N(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \vdots \\ \alpha_N(t) \end{Bmatrix} \cos(\omega t) + \begin{Bmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \\ \vdots \\ \beta_N(t) \end{Bmatrix} \sin(\omega t) = \mathbf{a} \cos(\omega t) + \mathbf{b} \sin(\omega t) \quad (4.1.21)$$

donde N es el número de grados de libertad de la estructura que tienen masa asociada.

Si se calcula la derivada segunda respecto al tiempo del vector \mathbf{u} definido en (4.1.21) se obtiene

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\mathbf{a}\omega^2 \cos(\omega t) - \mathbf{b}\omega^2 \sin(\omega t) = -\omega^2 \mathbf{u} \quad (4.1.22)$$

y sustituyendo (4.1.21) y (4.1.22) en (4.1.20) se tiene

$$(-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K}) \cdot (\mathbf{a} \cos(\omega t) + \mathbf{b} \sin(\omega t)) = \mathbf{0} \quad (4.1.23)$$

que también puede escribirse como

$$\left(-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K}\right) \cdot \mathbf{a} \cos(\omega t) + \left(-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K}\right) \mathbf{b} \sin(\omega t) = \mathbf{0} \quad (4.1.24)$$

Dado que tanto la función seno como la función coseno varían con el tiempo, su valor no puede ser nulo para cualquier valor de t , y en consecuencia para que la expresión anterior sea idénticamente nula debe verificarse

$$\left(-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K}\right) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (4.1.25a)$$

$$\left(-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K}\right) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (4.1.25b)$$

Una posible solución de la ecuación (4.1.25) es $\mathbf{a}=\mathbf{b}=\mathbf{0}$, lo que significa que el valor del vector de movimientos es $\mathbf{u}(t)=\mathbf{0}$, obteniéndose por tanto la solución trivial. Otra posible solución se alcanza igualando a cero el determinante de los términos que están entre paréntesis en la ecuación (4.1.25)

$$\left|-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K}\right| = 0 \quad (4.1.26)$$

Al ser las matrices \mathbf{M} y \mathbf{K} definidas positivas habrá siempre N soluciones reales para ω^2 , es decir $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_N^2$, donde cada valor de ω_n $n=1, \dots, N$ es la frecuencia natural n -ésima de la estructura. Cada una de esas frecuencias naturales está relacionada con el modo de vibración n -ésimo de la estructura, ϕ_n $n=1, \dots, N$, a través del problema de autovalores siguiente

$$\left[\mathbf{K} - \omega_n^2 \cdot \mathbf{M}\right] \cdot \phi_n = \mathbf{0} \quad (4.1.27)$$

En el problema de autovalores y autovectores planteado interviene la matriz de rigidez de la estructura, cuya obtención ha sido explicada en el apartado precedente (4.1.1) y sobre la que se volverá más adelante, y la matriz de masas que puede calcularse como

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}\mathbf{E}(\mathbf{M}^b) \quad (4.1.28)$$

donde \mathbf{M}^b es la matriz de masas de cada barra en ejes globales. El cálculo de la matriz de masas de barra en ejes globales se calcula a partir de la matriz de masas en ejes locales de barra ($\mathbf{M}^{b,l}$) teniendo en cuenta la expresión (4.1.8) de la matriz de transporte \mathbf{T} .

La matriz de masas de una barra en ejes locales suele expresarse subdividida en submatrices del modo siguiente:

$$\mathbf{M}^{b,l} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix} \quad (4.1.29)$$

Concentrando la mitad de la masa de la barra, tanto a traslación como a rotación, en los nudos de la misma (*lumped mass method*) se obtiene una matriz diagonal donde los términos m_x , m_y , m_z son las masas a traslación según los tres ejes locales x , y , z , mientras que los términos m_{φ_x} , m_{φ_y} , m_{φ_z} son las masas a rotación según los mismos tres ejes locales.

$$\mathbf{M}_{11} = \mathbf{M}_{22} = \begin{pmatrix} m_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{\varphi_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{\varphi_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{\varphi_z} \end{pmatrix} \quad (4.1.30)$$

Por tanto, la matriz de masas de barra en ejes globales queda

$$\mathbf{M}^b = \begin{pmatrix} \mathbf{T}\mathbf{M}_{11}\mathbf{T}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}\mathbf{M}_{22}\mathbf{T}^T \end{pmatrix} \quad (4.1.31)$$

En una estructura cualquiera, como un puente colgante o atirantado, el número de grados de libertad del modelo de cálculo adoptado puede ser de varios miles. En

consecuencia, es deseable disminuir el número de grados de libertad a considerar en el problema dinámico. Uno de los métodos que pueden ser aplicados con este propósito es el de la *condensación estática*, véase Hart^[H2] y Wong, y Chopra^[C3]. El método se utiliza para eliminar aquellos grados de libertad cuya masa asociada es nula o despreciable. En el caso de tableros de puentes, las masas a rotación según los ejes locales transversales pueden despreciarse, con lo que la matriz de masas en ejes locales para el tablero de un puente queda

$$\mathbf{M}_{11} = \mathbf{M}_{22} = \begin{pmatrix} m_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{\varphi_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1.32)$$

En el análisis se consideran los siguientes parámetros mecánicos:

- Masa a traslación del cable principal por unidad de longitud: La masa a traslación por unidad de longitud del cable principal viene dada por la expresión siguiente

$$\underline{m}_x = \underline{m}_y = \underline{m}_z = \rho_c A_c \quad (4.1.33)$$

donde el subrayado permite diferenciar el concepto de masa por unidad de longitud en la dirección de los ejes locales del de masa concentrada en los nudos de la barra, mientras que ρ_c es la densidad del cable y A_c es el área de la sección transversal del mismo.

- Momento polar de inercia del cable principal por unidad de longitud según el eje longitudinal del mismo: La masa a rotación en los cables se considera nula.

Por otro lado, para el caso de tableros de puentes con sección simétrica en cajón aerodinámico pueden plantearse las relaciones siguientes:

- Masa a traslación del tablero por unidad de longitud:

$$\underline{m}_x = \underline{m}_y = \underline{m}_z = \rho A + \underline{m}^{ne} \quad (4.1.34)$$

donde \underline{m}_x , \underline{m}_y , \underline{m}_z es la masa a traslación por unidad de longitud según los tres ejes locales, ρ es la densidad del material del tablero, A es el área de la sección transversal del tablero y \underline{m}^{ne} es la masa no estructural por unidad de longitud, la cual representa la contribución que a la masa a traslación total del tablero aportan elementos no estructurales como los rigidizadores del tablero, el asfalto de la capa de rodadura del puente, las farolas o las barandillas.

- Momento polar de inercia del tablero por unidad de longitud según el eje longitudinal del mismo:

$$\underline{m}_{\phi x} = \rho I_o + \underline{m}_{\phi x}^{ne} = \rho(I_y + I_z) + \underline{m}_{\phi x}^{ne} \quad (4.1.35)$$

donde I_o es el momento de inercia polar de la sección, mientras que I_y e I_z son respectivamente el momento de inercia a flexión vertical y lateral de la sección transversal del tablero, siendo $\underline{m}_{\phi x}^{ne}$ la contribución al momento de inercia polar por unidad de longitud del tablero de los elementos no estructurales. Debe tenerse en cuenta que el momento polar de inercia por unidad de longitud del tablero según los ejes locales transversales se considera nulo.

Tanto la masa a traslación como el momento polar de inercia no estructurales definidos para las ecuaciones (4.1.34) y (4.1.35) se toman como constantes ya que se asume que no experimentan modificaciones en el proceso de diseño estructural.

Además, en el caso considerado, los términos de las masas concentradas en los nudos según los ejes locales de las barras que constituyen el cable principal y el tablero, contenidos en la matrices \mathbf{M}_{11} , \mathbf{M}_{22} , se pueden evaluar como se explica a continuación.

Para los cables que soportan el tablero la masa a traslación se evalúa concentrando la masa de cada barra en los nudos, de la manera siguiente, a partir de la ecuación (4.1.33):

$$m_x = m_y = m_z = \underline{m}_x \frac{l_b}{2} = \underline{m}_y \frac{l_b}{2} = \underline{m}_z \frac{l_b}{2} = \rho_c A_c l^b / 2 \quad (4.1.36)$$

donde ρ_c es la densidad del cable, A_c el área de la sección transversal y l^b la longitud de la barra considerada.

Para el tablero, las masas a traslación se calculan a partir de la ecuación (4.1.34) mediante la expresión:

$$m_x = m_y = m_z = \underline{m}_x \frac{l_b}{2} = \underline{m}_y \frac{l_b}{2} = \underline{m}_z \frac{l_b}{2} = (\rho A + \underline{m}^{ne}) l^b / 2 \quad (4.1.37)$$

donde ρ es la densidad del material del tablero, A es el área de la sección transversal del tablero, \underline{m}^{ne} es la masa “no estructural” por unidad de longitud de tablero (barandillas o asfalto de la capa de rodadura del puente, por ejemplo), y l^b es la longitud de la barra considerada.

Igualmente, el momento de inercia polar del tablero según el eje longitudinal del mismo se puede calcular a partir de la expresión (4.1.35) como

$$m_{\varphi x} = \underline{m}_{\varphi x} \frac{l_b}{2} = (\rho I_o + \underline{m}_{\varphi x}^{ne}) l^b / 2 = \left[\rho (I_y + I_z) + \underline{m}_{\varphi x}^{ne} \right] l^b / 2 \quad (4.1.38)$$

donde I_o es el momento de inercia polar de la sección, suma de los momentos de inercia a flexión vertical y lateral; $\underline{m}_{\varphi x}^{ne}$ es el momento de inercia polar no estructural por unidad de longitud de tablero.

Conviene tener presente que en el caso de calcular las frecuencias y modos naturales de vibración de una estructura considerando teoría lineal, la matriz de rigidez \mathbf{K} empleada en la ecuación (4.1.27) es la matriz \mathbf{K}_{lin} definida por las ecuaciones (4.1.2) y (4.1.4) a

(4.1.9). De igual modo, si se adopta la formulación propia de la teoría de segundo orden la matriz de rigidez de la ecuación (4.1.27) debe ser la matriz $\mathbf{K}_{\text{nolin}}$ definida por las ecuaciones que van de la (4.1.11) a la (4.1.19). Se tendrá que resolver por tanto uno de los dos problemas de autovalores siguientes

$$\left[\mathbf{K}_{\text{lin}} - \omega_n^2 \cdot \mathbf{M} \right] \cdot \phi_n = \mathbf{0} \quad (4.1.39a)$$

$$\left[\mathbf{K}_{\text{nolin}} - \omega_n^2 \cdot \mathbf{M} \right] \cdot \phi_n = \mathbf{0} \quad (4.1.39b)$$

4.2 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE FRECUENCIAS Y MODOS PROPIOS DE VIBRACIÓN

El cálculo de la sensibilidad estructural estudia el cambio que se infiere, en busca de una solución mejor, a las variables de diseño durante el proceso de optimización. Con frecuencia, el análisis de sensibilidad resulta el proceso con mayor coste computacional en la optimización, siendo necesario disponer de algoritmos eficientes para evaluar las derivadas.

Una parte importante de problemas en ingeniería está asociada a la obtención de valores propios, por ello tiene gran importancia el estudio de los procedimientos para llevar a cabo en ellos análisis de sensibilidad. Sin embargo este hecho había pasado prácticamente desapercibido en la literatura técnica. Únicamente un libro de cálculo dinámico publicado en el año 2000 por Hart^[H2] y Wong dedica algo de atención al cálculo de sensibilidades en cada tipo de problema dinámico.

Existen diversas maneras de afrontar los análisis de sensibilidad en problemas de valores propios. Adelman^[A2] y Haftka establecen una clasificación muy clara de los diversos métodos, distinguiendo básicamente:

- Aproximación por diferencias finitas
- Métodos analíticos

- Métodos semianalíticos

La aproximación por diferencias finitas es la técnica más simple que permite calcular derivadas de la respuesta respecto a las variables de diseño. Véase Carnahan^[C5], Luther y Wilkes. Esta técnica es computacionalmente cara, pero a cambio es muy fácil de formular y por tanto muy conocida. La formulación por diferencias finitas para aproximar derivadas conduce a dos tipos de errores: a) Error de truncamiento, el cual se produce al desprestigiar términos en el desarrollo en serie de Taylor y b) Error de condición, que es la diferencia entre la evolución numérica de la función y su valor exacto. En general el método presenta problemas de exactitud, fundamentalmente por el conocido “dilema del tamaño de paso”, pues tomar tamaños de paso muy pequeños para reducir el error de truncamiento conduce a la obtención de mayores errores de condición. Esta última circunstancia obliga a realizar comprobaciones de los resultados obtenidos empleando diferentes tamaños de paso.

Los métodos analíticos de análisis de sensibilidad están basados en la derivación, respecto a las variables de diseño, de las ecuaciones que rigen el problema estructural; de modo que una vez obtenida la solución del mismo, si ésta se introduce en las ecuaciones derivadas analíticamente, se obtiene directamente la sensibilidad, es decir, la variación de la solución respecto a las citadas variables de diseño.

Por su parte, los métodos semianalíticos son aquellos que aún siguiendo una formulación analítica para la derivación del problema, utilizan en algún momento los cálculos por diferencias finitas para evaluar la derivada de alguno de sus términos.

Un ejemplo claro de análisis de sensibilidad semianalíticos son los que se llevan a cabo en problemas de vibraciones estructurales en los que se deben calcular las frecuencias y modos propios de vibración de la estructura. Programas comerciales de optimización estructural como Génesis^[G1], Nastran, Ansys o Cosmos/M^[C6], obtienen en teoría lineal las derivadas de dichas frecuencias y modos por formulaciones semianalíticas, puesto que evalúan la derivada de la matriz de rigidez \mathbf{K} por diferencias finitas, y no abordan el análisis de sensibilidad cuando el problema ha de ser resuelto teniendo en cuenta efectos de segundo orden. De hecho, éste último aspecto, es decir, el análisis de sensibilidad analítico de frecuencias naturales y modos propios de vibración en teoría de segundo

orden, era un problema no resuelto hasta la publicación de los trabajos de Mosquera^[M3] y Mosquera^{[M4][M5]} y Hernández, que lo abordaron para el caso de barras en las que la masa es considerada invariable.

El cálculo de puentes soportados por cables, como por ejemplo los puentes colgantes, debe llevarse a cabo teniendo en cuenta la no linealidad geométrica de los cables, esto es, la rigidización por esfuerzo axial en los mismos, véase por ejemplo Kanok-Nukulchai^[K1], Yiu y Brotton, Abbas^[A3] y Scordelis, Schrefler^[S3], Odorizzi y Wood, Arzoumanidis^[A4] y Bieniek o Ge^[G2] y Tanaka, de modo que los análisis de sensibilidad en teoría de segundo orden teniendo en cuenta dicha no linealidad geométrica se hacen de vital importancia si se quiere tener una alternativa a los cálculos por diferencias finitas.

La formulación que a continuación se expone soluciona éste problema cuando se trata con variables de diseño de tamaño en estructuras tridimensionales de barras rectas de sección constante a lo largo de la directriz de la barra y masa variable.

Considérese una estructura tridimensional de barras de sección constante a lo largo de la directriz de las mismas, en la que se toma una variable de diseño genérica x . Definido el problema de la vibración libre por la expresión $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0}$, y su solución por $[\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}]\boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{0}$ según se trate de teoría lineal o de segundo orden, los modos de vibración se suelen normalizar con una matriz definida positiva, que habitualmente es la matriz de masas \mathbf{M} de forma que

$$\boldsymbol{\phi}_n^T \cdot \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\phi}_n = 1 \quad (4.2.1)$$

diciéndose que los modos se encuentran normalizados a la masa, y verificándose dicha condición para todos y cada uno de ellos.

Derivando analíticamente este problema de valores propios, véase Adelman^[A2] y Haftka, o Haftka^[H3], Gürdal y Kamat, respecto a una variable de diseño genérica se obtiene

$$\frac{\partial (\omega_n^2)}{\partial x} = \frac{\phi_n^T \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} - \omega_n^2 \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right) \cdot \phi_n}{\phi_n^T \cdot \mathbf{M} \cdot \phi_n} \quad (4.2.2)$$

donde ω_n es la n-ésima frecuencia natural de vibración con $n=1, \dots, N$, ϕ_n es el vector que contiene el modo n-ésimo de vibración, \mathbf{K} la matriz de rigidez de la estructura en teoría lineal o de segundo orden y \mathbf{M} la matriz de masas.

Según la ecuación (4.2.2) la evaluación de estas sensibilidades sobre las frecuencias naturales de vibración requiere el cálculo de las derivadas de la matriz de rigidez y de masas con respecto a una variable de diseño genérica x .

Por su parte, las derivadas de los modos propios de vibración se obtienen tras derivar el problema de valores propios según la expresión siguiente

$$\left(\mathbf{K} - \omega_n^2 \cdot \mathbf{M} \right) \cdot \frac{\partial \phi_n}{\partial x} = \frac{\partial (\omega_n^2)}{\partial x} \cdot \mathbf{M} \cdot \phi_n - \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} - \omega_n^2 \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right) \cdot \phi_n \quad (4.2.3)$$

que es un sistema de ecuaciones para cada frecuencia y modo propio, que posee como incógnitas las sensibilidades de dichos modos propios de vibración.

Debe tenerse especial cuidado en la resolución de éste último sistema de ecuaciones debido a su singularidad, véase por ejemplo Jurado^[J2]. Una de las técnicas de solución más usadas, y que es la que se ha implementado en este trabajo, es debida a Nelson^[N2]. Éste método reemplaza las condiciones de normalización de la ecuación (4.2.1) por la condición de que la componente más grande del vector propio sea igual a uno. Denominando al vector propio normalizado de ésta forma $\bar{\phi}$, y asumiendo que su componente mayor es la m-ésima y que vale uno, se puede reemplazar la ecuación (4.2.1) por

$$\bar{\phi}^m = 1 \quad (4.2.4)$$

y por tanto se puede asumir que

$$\frac{\partial \bar{\phi}^m}{\partial x} = 0 \quad (4.2.5)$$

Entonces la ecuación (4.2.3) es válida si se reemplaza ϕ por $\bar{\phi}$, teniendo en cuenta que la ecuación (4.2.5) se utiliza para reducirla en un orden eliminando la fila y la columna m . De este modo el sistema así reducido ya no es singular, y se puede resolver por técnicas estándar para cada una de las N parejas $(\omega_n^2, \bar{\phi}_n)$.

Para calcular la derivada del vector propio con la normalización original de la ecuación (4.2.1) se procede de la siguiente manera: Se deriva dicha ecuación y reordenando los términos resulta

$$\phi^T \cdot \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{1}{2} \cdot \phi^T \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \cdot \phi \quad (4.2.6)$$

Recordando la expresión $\phi = \phi^m \cdot \bar{\phi}$ y derivando se obtiene

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi^m}{\partial x} \cdot \bar{\phi} + \phi^m \cdot \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \quad (4.2.7)$$

y $\frac{\partial \phi^m}{\partial x}$ puede calcularse sustituyendo la ecuación (4.2.7) en la ecuación (4.2.6),

obteniéndose

$$\frac{\partial \phi^m}{\partial x} = -(\phi^m)^2 \cdot \phi^T \cdot \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} - \frac{\phi^m}{2} \cdot \phi^T \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \cdot \phi \quad (4.2.8)$$

quedando completamente definida la ecuación (4.2.7) que permite obtener la derivada de cada modo propio de vibración con la normalización a la masa.

Existen otras alternativas al método de Nelson^[N2] aquí descrito, por medio de adjuntos o técnicas modales como proponen Rogers^[R1] o Wang^[W1], o generalizaciones del método de Nelson como proponen Ojalvo^[O1], Mills-Curran^[M6] o Dailey^[D1]. De nuevo la

evaluación de estas sensibilidades sobre los modos propios de vibración requiere el cálculo de las derivadas de la matriz de rigidez y de masas con respecto a una variable de diseño genérica x .

4.2.1 Elección de las variables de diseño

Después de plantear de manera general el análisis de sensibilidad de las frecuencias y modos propios de vibración de una estructura, se ha considerado una variable de diseño genérica x respecto a la que se calculan las sensibilidades.

Un aspecto de capital importancia es la determinación de cuáles son las variables de diseño respecto a las que se deben calcular las sensibilidades cuando se tenga una estructura tridimensional de barras de sección constante a lo largo de su directriz considerando la masa como variable.

La obtención de las frecuencias naturales y modos propios de vibración se realiza resolviendo el problema dinámico de la vibración libre sin amortiguamiento que conduce a un problema de valores y vectores propios cuya formulación ya ha sido presentada en (4.1.39a) y (4.1.39b) según se considere teoría lineal o de segundo orden. Es este, por lo tanto, el problema que debe ser derivado para calcular analíticamente las sensibilidades.

Se podrá determinar cuales son las variables de diseño respecto a las que calcular las sensibilidades si se puede establecer de manera rigurosa cuales son los parámetros de los que depende la resolución del problema de autovalores y autovectores planteado.

Las frecuencias naturales ω_n , $n=1, \dots, N$; siendo N el número de grados de libertad de la estructura con masa asociada, y los modos de vibración ϕ_n , $n=1, \dots, N$; dependen de la matriz de rigidez \mathbf{K} y de masas \mathbf{M} de la estructura considerada.

La matriz de rigidez de una estructura de barras es función, a su vez, de los parámetros mecánicos siguientes, según las ecuaciones (4.1.4) a (4.1.9) y (4.1.11) a (4.1.19):

I_y : momento de inercia a flexión vertical de la barra.

I_z : momento de inercia a flexión lateral de la barra.

J : momento de inercia a torsión de la barra.

A : área de la sección de la barra.

Conviene recordar que el área no se ha considerado como constante ya que se está planteando el análisis de sistemas estructurales de masa variable.

Cabe reflexionar a continuación si la matriz de masas \mathbf{M} de una estructura depende de parámetro mecánico alguno o si, por el contrario, las masas a traslación y el momento polar de inercia son variables independientes en sí mismas ya que se está considerando que la masa de la estructura es variable. La respuesta depende del problema que se pretenda resolver; sin embargo, en estructuras convencionales es evidente la relación de proporcionalidad directa que existe entre ciertos parámetros mecánicos, como el área o la inercia a flexión, con la masa. La función que relaciona la masa a traslación y el momento polar de inercia con ciertos parámetros mecánicos puede ser compleja, e incluso muy difícil de establecer, sin embargo, para el caso de tableros de puentes con sección simétrica en cajón aerodinámico, como es el caso del puente sobre el estrecho del Great Belt o el puente Tsing Ma, han podido plantearse las relaciones (4.1.37) y (4.1.38) con lo que se pueden establecer las dependencias siguientes:

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= \mathbf{K}(I_y, I_z, J, A) \\ \mathbf{M} &= \mathbf{M}(I_y, I_z, A)\end{aligned}\tag{4.2.9}$$

En consecuencia, tanto las frecuencias naturales como los modos propios de vibración dependen de los siguientes cuatro parámetros mecánicos de la sección del tablero: I_y, I_z, J, A que son las variables respecto a las cuales se deben calcular sus sensibilidades.

4.2.2 Análisis de sensibilidad en teoría lineal

Considérese una estructura tridimensional de barras de sección constante a lo largo de su directriz, en la que se toma como vector \mathbf{x} de variables de diseño de las barras, $\mathbf{x} = (I_x, I_y, I_z, A)$, siendo $I_x=J$, I_y , I_z , los momentos de inercia con respecto a los tres ejes locales de las mismas, es decir, el momento de inercia a torsión y los dos momentos de inercia a flexión mientras que A es el área de la sección transversal de la barra.

Para calcular las sensibilidades de las frecuencias naturales y modos propios de vibración de una estructura en teoría lineal según las ecuaciones (4.2.2) y (4.2.3) se debe calcular tanto la derivada de la matriz de rigidez como la derivada de la matriz de masas.

Derivando la ecuación (4.1.2) con respecto a la variable de diseño x_i se obtiene la derivada de la matriz de rigidez de la estructura en teoría lineal del siguiente modo

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{\text{lin}}}{\partial x_i} = \mathbf{IE} \left(\frac{\partial \mathbf{K}_{\text{E}}^b}{\partial x_i} \right) \quad (4.2.10)$$

En consecuencia, para cada una de las matrices elementales de barra \mathbf{K}_{E}^b , presentadas en las expresiones (4.1.4) a (4.1.9), puede suceder que contengan o no, en alguno de sus términos, la variable de diseño respecto a la que se pretende derivar. Si dicha variable es inexistente la derivada será nula. En caso contrario, en cada término $k_{i,j}^b$ de la matriz podrá suceder:

- Que $k_{i,j}^b$ sea nulo, entonces $\frac{\partial k_{i,j}^b}{\partial x_i} = 0$
- Que $k_{i,j}^b$ no dependa de x_i , verificándose, por tanto que $\frac{\partial k_{i,j}^b}{\partial x_i} = 0$
- Que $k_{i,j}^b$ dependa linealmente de x_i , por lo que $\frac{\partial k_{i,j}^b}{\partial x_i} = \frac{k_{i,j}^b}{x_i}$

Tras realizar el conjunto de derivadas, el ensamblaje se realiza de la forma indicada en (4.2.10).

Por otra parte, la derivada de la matriz de masas se evalúa realizando el ensamblaje de la derivada de la matriz de masas elemental en ejes globales de cada barra que constituye la estructura y que contenga a la variable de diseño considerada.

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} = \mathbf{IE} \left(\frac{\partial \mathbf{M}^b}{\partial x_i} \right) \quad (4.2.11)$$

La derivada de la matriz de masas de una barra en ejes globales se calcula a partir de la derivada de la matriz de masas de una barra en ejes locales la cual se calcula mediante la siguiente expresión

$$\frac{\partial \mathbf{M}^{bl}}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{M}_{11}}{\partial x_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{M}_{22}}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad (4.2.12)$$

siendo

$$\frac{\partial \mathbf{M}_{11}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{M}_{22}}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial m_x}{\partial x_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial m_y}{\partial x_i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial m_z}{\partial x_i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial m_{\varphi x}}{\partial x_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial m_{\varphi y}}{\partial x_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial m_{\varphi z}}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad (4.2.13)$$

Finalmente

$$\frac{\partial \mathbf{M}^b}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{M}_{11}}{\partial x_i} \mathbf{T}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{M}_{22}}{\partial x_i} \mathbf{T}^T \end{pmatrix} \quad (4.2.14)$$

En un caso general, los términos que componen cada una de las submatrices de masas en ejes locales (4.1.30) se pueden calcular a partir de fórmulas semejantes a las planteadas de (4.1.36) a (4.1.38). Para calcular la derivada de cada una de las matrices elementales de barra \mathbf{M}^b , presentadas en las expresiones (4.1.29) a (4.1.31), puede suceder que contengan o no en alguno de sus términos la variable de diseño respecto a la que se pretende derivar. Si dicha variable es inexistente la derivada será nula. En caso contrario, con cada término $m_{i,j}^b$ de la matriz podrá suceder:

- Que $m_{i,j}^b$ sea nulo, entonces $\frac{\partial m_{i,j}^b}{\partial x_i} = 0$
- Que $m_{i,j}^b$ no dependa de x_i , verificándose, por tanto que $\frac{\partial m_{i,j}^b}{\partial x_i} = 0$
- Que $m_{i,j}^b$ dependa de x_i , por lo que $\frac{\partial m_{i,j}^b}{\partial x_i} \neq 0$

En el caso concreto en que se pretenda calcular la derivada de la matriz de masas de un puente respecto a las variables de diseño del tablero indicadas al principio de este apartado, se deben tener en cuenta las expresiones que permiten obtener los términos de las submatrices que constituyen la matriz de masas en ejes locales de cada barra.

El cálculo de la derivada de la matriz de masas de un puente, cuyo tablero esté compuesto por una sección simétrica en cajón aerodinámico, se puede realizar fácilmente a partir de las derivadas de los términos que constituyen las submatrices \mathbf{M}_{11} , \mathbf{M}_{22} en ejes locales. Para ello no hay más que derivar analíticamente las expresiones (4.1.30) a (4.1.32) respecto a las variables de diseño consideradas. Así tenemos que para las barras del tablero

$$\begin{aligned}\frac{\partial m_x}{\partial I_y} &= \frac{\partial m_y}{\partial I_y} = \frac{\partial m_z}{\partial I_y} = 0 \\ \frac{\partial m_{\varphi x}}{\partial I_y} &= \rho l^b / 2\end{aligned}\quad (4.2.15)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial m_x}{\partial I_z} &= \frac{\partial m_y}{\partial I_z} = \frac{\partial m_z}{\partial I_z} = 0 \\ \frac{\partial m_{\varphi x}}{\partial I_z} &= \rho l^b / 2\end{aligned}\quad (4.2.16)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial m_x}{\partial J} &= \frac{\partial m_y}{\partial J} = \frac{\partial m_z}{\partial J} = 0 \\ \frac{\partial m_{\varphi x}}{\partial J} &= 0\end{aligned}\quad (4.2.17)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial m_x}{\partial A} &= \frac{\partial m_y}{\partial A} = \frac{\partial m_z}{\partial A} = \rho l^b / 2 \\ \frac{\partial m_{\varphi x}}{\partial A} &= 0\end{aligned}\quad (4.2.18)$$

Las derivadas de los términos de la matriz de masas correspondientes a los cables respecto a variables de diseño del tablero son, evidentemente, nulas.

4.2.3 Análisis de sensibilidad en teoría de segundo orden

Considérese, en teoría de segundo orden, esto es, teniendo en cuenta la no linealidad geométrica de la estructura, una estructura tridimensional de barras cuya sección a lo largo de su directriz es constante, en la que se toma el mismo vector \mathbf{x} de variables de diseño que en el apartado anterior, $\mathbf{x} = (I_x, I_y, I_z, A)$, siendo $I_x=J$, I_y, I_z , los momentos de inercia de la barra con respecto a los tres ejes locales de la misma, es decir, el momento de inercia a torsión y los dos momentos de inercia a flexión, mientras que A es el área de la sección transversal. Derivando la ecuación (4.1.11) con respecto a la variable de diseño x_i , véase Mosquera^[M4] y Hernández, se obtiene la derivada de la matriz de rigidez de la estructura en teoría no lineal del siguiente modo

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{\text{no lin}}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{K}_{\text{lin}}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{K}_G}{\partial x_i} \quad (4.2.19)$$

donde la derivada de la matriz de rigidez lineal de la estructura \mathbf{K}_{lin} ya se ha obtenido en el punto anterior, y la derivada de la matriz de rigidez geométrica de la estructura \mathbf{K}_G , siguiendo la metodología expuesta por Perezzán^[P2], se obtiene haciendo uso de la ecuación (4.1.12) de la manera que se indica

$$\frac{\partial \mathbf{K}_G}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathbf{IE} \left(N_b \cdot \mathbf{K}_G^b \right) \right) = \mathbf{IE} \left(\mathbf{K}_G^b \cdot \frac{\partial N_b}{\partial x_i} \right) \quad (4.2.20)$$

Nótese que en esta ecuación (4.2.20) las derivadas de las matrices geométricas elementales de barra definidas en las ecuaciones (4.1.13) a (4.1.16), \mathbf{K}_{Gij} , son nulas pues únicamente contienen parámetros geométricos, en concreto la longitud de la barra, y no parámetros mecánicos de las mismas.

Por otro lado, el esfuerzo axil N_b en cada una de las barras se obtiene según la ecuación (4.1.18), por lo que la ecuación anterior (4.2.20) puede ser desarrollada del siguiente modo

$$\frac{\partial \mathbf{K}_G}{\partial x_i} = \mathbf{IE} \left(\mathbf{K}_G^b \cdot \mathbf{w}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^b}{\partial x_i} \right) + \mathbf{IE} \left(\mathbf{K}_G^b \cdot \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial x_i} \cdot \mathbf{u}^b \right) \quad (4.2.21)$$

donde la derivada del vector \mathbf{u}^b , esto es, la derivada del vector de movimientos nodales en el problema no lineal, con respecto a la variable de diseño, todavía no es conocida.

Para su obtención se plantea el problema estático en teoría de segundo orden definido por la ecuación (4.1.10)

$$\mathbf{p} = (\mathbf{K}_{\text{lin}} + \mathbf{K}_G) \cdot \mathbf{u} \quad (4.2.22)$$

donde \mathbf{p} representaba el vector de cargas en nudos, y \mathbf{u} el vector de movimientos nodales. El vector de cargas \mathbf{p} estará formado por las cargas correspondientes al estado de carga considerado en la estructura para el cálculo de las frecuencias y modos propios, que en general será el peso propio. Por lo tanto, se obtendrá concentrando los pesos de las barras en los nudos. Derivando esta expresión respecto a la variable de diseño x_i , se obtiene

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{K}_{\text{lin}} \cdot \mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{K}_G \cdot \mathbf{u}) \quad (4.2.23)$$

por medio de la ecuación (4.1.12) se tiene que el último sumando del segundo miembro de esta ecuación resulta

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{K}_G \cdot \mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\mathbf{IE} (N_b \cdot \mathbf{K}_G^b \cdot \mathbf{u}) \right] \quad (4.2.24)$$

expresión que puede ser convenientemente modificada del siguiente modo

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{K}_G \cdot \mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\mathbf{IE} (\mathbf{K}_G^b \cdot \mathbf{u}^b \cdot N_b) \right] \quad (4.2.25)$$

Realizando las derivadas se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{K}_G \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{IE} \left(\frac{\partial \mathbf{K}_G^b}{\partial x_i} \cdot \mathbf{u}^b \cdot N_b + \mathbf{K}_G^b \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^b}{\partial x_i} \cdot N_b + \mathbf{K}_G^b \cdot \mathbf{u}^b \cdot \frac{\partial N_b}{\partial x_i} \right) \quad (4.2.26)$$

y sustituyendo N_b de la ecuación (4.1.18), resulta

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{K}_G \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{K}_G \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} + \mathbf{IE} (\mathbf{K}_G^b \cdot \mathbf{u}^b \cdot \mathbf{w}^T) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} + \mathbf{IE} \left(\mathbf{K}_G^b \cdot \mathbf{u}^b \cdot \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial x_i} \cdot \mathbf{u}^b \right) \quad (4.2.27)$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación (4.2.23), se llega a la expresión

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{K}_{\text{lin}}}{\partial x_i} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{K}_{\text{lin}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} + \mathbf{K}_G \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} + \mathbf{IE}(\mathbf{K}_G^b \cdot \mathbf{u}^b \cdot \mathbf{w}^T) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} + \mathbf{IE} \left(\mathbf{K}_G^b \cdot \mathbf{u}^b \cdot \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial x_i} \cdot \mathbf{u}^b \right) \quad (4.2.28)$$

que reordenando y agrupando términos convenientemente puede ser formulada como

$$\left[\mathbf{K}_{\text{lin}} + \mathbf{K}_G + \mathbf{IE}(\mathbf{K}_G^b \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}^T) \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}_{\text{lin}}}{\partial x_i} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{IE} \left(\mathbf{K}_G^b \cdot \mathbf{u}^b \cdot \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial x_i} \cdot \mathbf{u}^b \right) \quad (4.2.29)$$

que resulta ser un sistema lineal de ecuaciones en el que las incógnitas son las derivadas de los movimientos \mathbf{u} en los nudos, que eran necesarias en la ecuación (4.2.21).

Nótese que dependiendo de la variable de diseño respecto a la que se esté calculando

la sensibilidad, el término $\frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial x_i}$ toma diferentes valores:

- Si $x_i = J, I_y, I_z$ entonces $\frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial J} = \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial I_y} = \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial I_z} = \mathbf{0}$ en todas las barras de la

estructura ya que el vector \mathbf{w}^T no depende de la inercia a torsión ni a flexión vertical o lateral.

- Si $x_i = A$ entonces $\frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial A} = \frac{\mathbf{w}^T}{A}$ en aquellas barras que contienen la variable de

diseño considerada, ya que los términos que componen el vector \mathbf{w}^T dependen linealmente del área de la sección transversal de la barra. En aquellas barras que no contienen la variable de diseño la derivada será nula.

Si nos centramos en la derivada del vector de cargas, que en general será el peso propio, también se pueden dar dos posibilidades:

- Si $x_i = J, I_y, I_z$ entonces $\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial J} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial I_y} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial I_z} = \mathbf{0}$ para todas las barras de la estructura,

ya que el peso propio no depende de las inercias a torsión ni a flexión vertical o lateral.

- Como en general el peso es función del área de la sección transversal, si $x_i = A$ entonces $\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial A} = \mathbf{IE} \left(\frac{\partial \mathbf{p}^b}{\partial A} \right)$, en aquellas barras que contienen la variable de diseño,

siendo \mathbf{p}^b el vector que contiene el peso de la barra aplicado en los nudos de la misma en ejes globales. En aquellas barras que no contienen la variable de diseño la derivada será nula. La expresión general del vector \mathbf{p}^b es:

$$\mathbf{p}^b = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{m}_z \frac{l_b}{2} g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \underline{m}_z \frac{l_b}{2} g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.2.30)$$

donde \underline{m}_z es la masa por unidad de longitud según la dirección vertical, l_b es la longitud de la barra y g es la aceleración de la gravedad.

Por último, introduciendo estos resultados en la ecuación (4.2.19), la derivada de la matriz de rigidez considerando la no linealidad geométrica, esto es, en teoría de segundo orden, resulta

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{\text{nolin}}}{\partial x_i} = \mathbf{IE} \left(\frac{\partial \mathbf{K}_E^b}{\partial x_i} \right) + \mathbf{IE} \left(\mathbf{K}_G^b \cdot \mathbf{w}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^b}{\partial x_i} \right) + \mathbf{IE} \left(\mathbf{K}_G^b \cdot \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial x_i} \cdot \mathbf{u}^b \right) \quad (4.2.31)$$

de este modo las derivadas de las frecuencias naturales y de los modos propios de vibración dados por las ecuaciones (4.2.2) y (4.2.3) pueden ser obtenidas analíticamente siguiendo la formulación expuesta.

4.3 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE LOS PARÁMETROS DE FLAMEO DE PUENTES DE CABLES

Como en cualquier proceso de optimización numérica, en el proceso de optimización de puentes soportados por cables, deben de efectuarse cambios en los valores de las variables de diseño, para buscar una solución mejorada de la estructura. Los resultados del nuevo diseño variarán, siendo necesario comprobar que se satisfacen las condiciones a las que está sujeta la respuesta estructural del puente. Entre las condiciones habrá restricciones en los movimientos, en tensiones, en frecuencias, etc.

El cálculo de la sensibilidad estructural responde al cambio que se infiere, en busca de una solución mejor, a las variables de diseño durante el proceso de optimización. Incluso si no se realiza un eventual proceso de optimización estructural, los análisis de sensibilidad aportan una información muy valiosa, puesto que indican qué variables de diseño deben ser modificadas y en qué sentido, con el fin de mejorar la respuesta en estudio de la estructura. La sensibilidad se obtiene con el cálculo de las derivadas de la respuesta estructural que está siendo analizada con respecto a cualquier variable de diseño x .

En los puentes de gran vano es imprescindible garantizar la estabilidad de la estructura frente a las cargas dinámicas de viento. Un ejemplo claro de inestabilidad debida al viento la constituye, como ya se ha comentado en el capítulo 2, la inestabilidad aeroelástica por flameo del tablero. El análisis de sensibilidad del fenómeno de flameo en tableros de puentes proporciona la variación de dicha velocidad crítica de flameo con

respecto a modificaciones de las variables de diseño consideradas y también la variación de la frecuencia reducida con respecto a las mismas variables.

A continuación, se repasa en primer lugar el problema de valores propios al que conduce el cálculo de la velocidad crítica de flameo de un puente y seguidamente se desarrolla la formulación analítica del análisis de sensibilidad del fenómeno de flameo en tableros de puente.

4.3.1 Obtención de la velocidad de flameo

Siguiendo la formulación desarrollada en el capítulo 2 de esta Memoria-Tesis, al analizar el fenómeno del flameo se desemboca en la resolución de un problema no lineal de valores y vectores propios que se formula de la manera siguiente

$$(\mathbf{A} - \mu \mathbf{I}) \mathbf{w}_\mu e^{\mu t} = \mathbf{0} \quad (4.3.1)$$

En la expresión (4.3.1) la matriz \mathbf{A} se construye a partir de las matrices de rigidez y amortiguamiento de la estructura, modificadas por las fuerzas aeroelásticas que ejerce el viento y reducidas mediante la aplicación del análisis modal, de manera que trabajando con m modos de vibración \mathbf{A} resulta una matriz no simétrica de dimensión $2m \times 2m$. Por lo tanto, se obtienen en general m parejas de valores propios complejos conjugados de la forma

$$\mu_j = \alpha_j \pm i\beta_j \quad j = 1, \dots, m \quad (4.3.2)$$

La parte real de estos valores propios está relacionada con el amortiguamiento de la respuesta ξ_a , de forma que

$$\alpha_j = -\xi_{aj} \omega_j = -\xi_{aj} \sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2} \quad (4.3.3)$$

mientras que la parte imaginaria del autovalor está relacionada con la frecuencia de la respuesta del sistema.

$$\beta_j = \omega_{aj} \quad (4.3.4)$$

Como ya se ha explicado en el capítulo 2, el problema debe resolverse de forma iterativa ya que la matriz \mathbf{A} depende de las matrices aeroelásticas \mathbf{K}_a y \mathbf{C}_a , que a su vez dependen de la frecuencia reducida $K = B\omega_a/U$, y ésta no es conocida hasta que se resuelve el problema de valores propios. Una vez que se han calculado los $2m$ valores propios que verifican la ecuación

$$[\mathbf{A}(\beta_j) - (\alpha_j - i\beta_j)\mathbf{I}]\mathbf{w}_\mu = \mathbf{0} \quad (4.3.5)$$

se realizan cálculos sucesivos aumentando la velocidad de viento U , hasta que en la solución del problema se pasa de obtener partes reales de valores propios negativas a positivas, es decir, se pasa de amortiguamientos positivos a negativos. El valor crítico U_f , con el que empieza a producirse el fenómeno de flameo se alcanza, por tanto, con la solución en la que un valor propio tiene su parte real nula por vez primera.

$$\alpha_j = 0 \quad (4.3.6)$$

En las figuras 4.3.1 y 4.3.2 se representan las evoluciones de las partes real e imaginaria de los valores propio para un ejemplo en el que se han utilizado dos modos de vibración. Si se observa la gráfica 4.3.1 se observa como una de las partes reales se anula para un valor próximo a 90 m/s. , que será la velocidad crítica de flameo U_f .

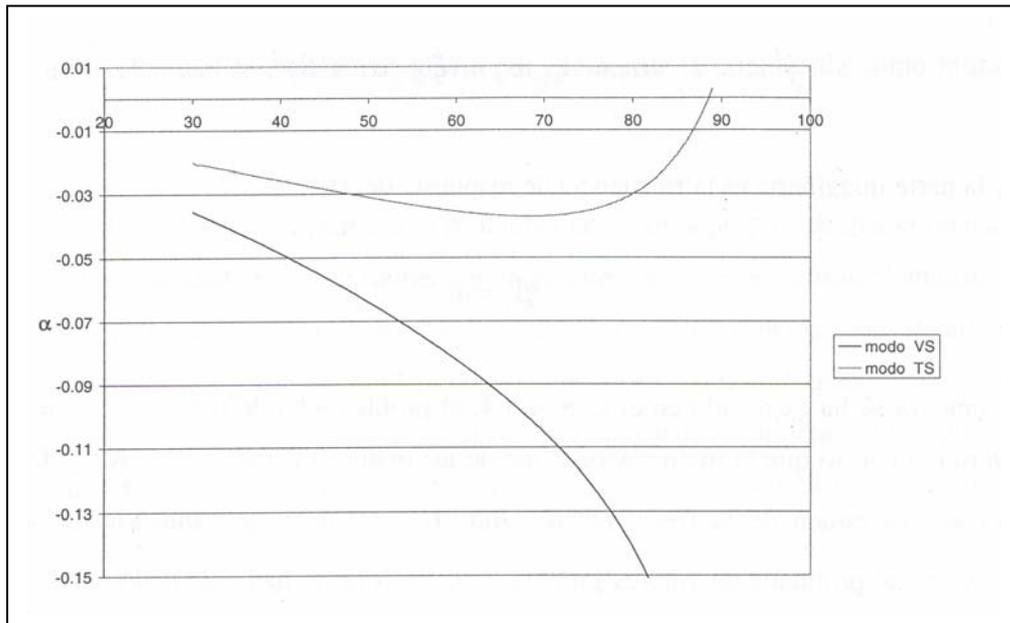


Figura 4.3.1. Evolución de la parte real α frente a U .

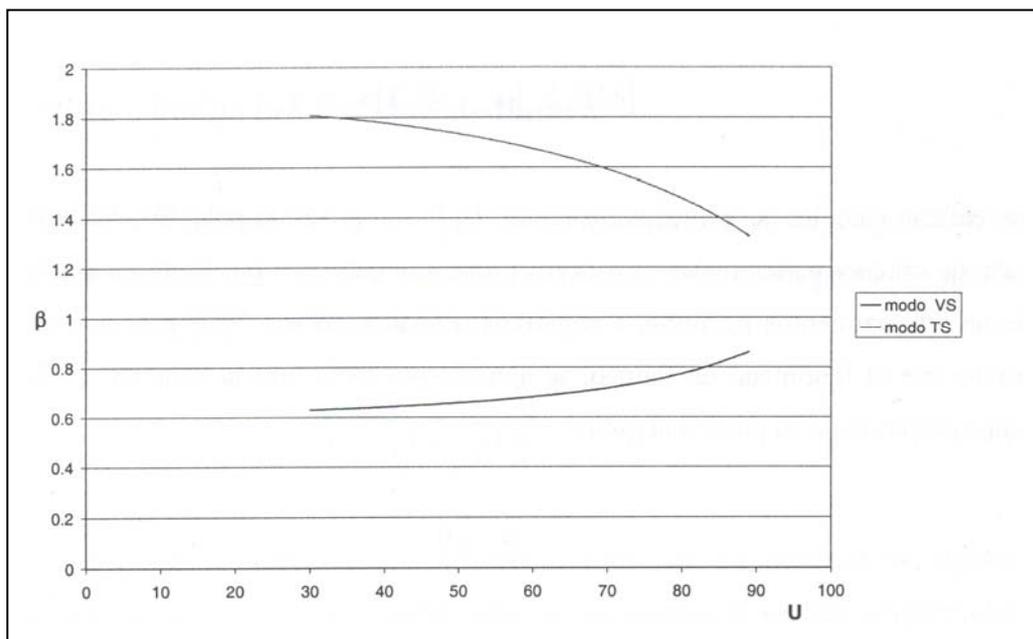


Figura 4.3.2. Evolución de la parte imaginaria β frente a U .

4.3.2 Análisis de sensibilidad

El análisis del comportamiento aeroelástico del tablero de un puente conducía a la resolución del problema de valores propios planteado en (4.3.1). Descomponiendo el valor propio en su parte real e imaginaria, $\mu_j = \alpha_j - i\beta_j$ se tiene

$$\left[\mathbf{A} - (\alpha_j - i\beta_j) \mathbf{I} \right] \mathbf{w}_\mu = \mathbf{0} \quad (4.3.7)$$

La matriz \mathbf{A} , definida en (2.5.27), se construye a partir de las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez de la estructura, y por tanto depende de las propiedades estructurales del puente, esto es, de las posibles variables de diseño a considerar en un problema de optimización estructural. Además, en la construcción de \mathbf{A} también aparecen las matrices de rigidez y amortiguamiento aeroelásticas, que dependen de la velocidad del viento incidente U y de la frecuencia reducida de respuesta K . Con lo que se puede establecer que

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, U, K) \quad (4.3.8)$$

donde se ha denominado \mathbf{x} al vector que contiene las variables de diseño x_i con $i = 1, \dots, n$.

En la situación de flameo, para una determinada velocidad de viento U_f , la parte real α_j de alguno de los autovalores se hace nula y la frecuencia reducida K_f verifica la relación

$$K_f = \frac{B\beta_j}{U_f} \quad (4.3.9)$$

siendo β_j la parte imaginaria de dicho valor propio cuya parte real α_j es nula. En dicha situación de flameo incipiente se está verificando la siguiente ecuación

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, U_f, K_f) \mathbf{w}_\mu + \frac{K_f U_f}{B} i \mathbf{I} \mathbf{w}_\mu = \mathbf{0} \quad (4.3.10)$$

El análisis de sensibilidad comienza por la diferenciación de la ecuación (4.3.10). Véase Jurado^{[J3],[J4]} y Hernández.

$$d \left[\mathbf{A}(\mathbf{x}, U_f, K_f) \mathbf{w}_\mu + \frac{K_f U_f}{B} i \mathbf{I} \mathbf{w}_\mu \right] = \mathbf{0} \quad (4.3.11)$$

$$d\mathbf{A} \mathbf{w}_\mu + \mathbf{A} d\mathbf{w}_\mu + \frac{i}{B} (U_f dK_f + K_f dU_f) \mathbf{I} \mathbf{w}_\mu + \frac{K_f U_f}{B} i d\mathbf{w}_\mu = \mathbf{0} \quad (4.3.12)$$

Igual que se obtiene en (4.3.10) un autovector por la derecha \mathbf{w}_μ , se puede obtener uno por la izquierda. La expresión es

$$\mathbf{v}_\mu^T \mathbf{A} + \frac{K_f U_f}{B} i \mathbf{v}_\mu^T \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (4.3.13)$$

Multiplicando (4.3.12) por el vector propio por la izquierda \mathbf{v}_μ^T que se acaba de definir, se llega a

$$\mathbf{v}_\mu^T d\mathbf{A} \mathbf{w}_\mu + \mathbf{v}_\mu^T \left(\mathbf{A} + \frac{K_f U_f}{B} i \mathbf{I} \right) d\mathbf{w}_\mu + \mathbf{v}_\mu^T \left[\frac{i}{B} (U_f dK_f + K_f dU_f) \mathbf{I} \right] \mathbf{w}_\mu = 0 \quad (4.3.14)$$

Recordando que

$$d\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial U_f} dU_f + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial K_f} dK_f \quad (4.3.15)$$

y que

$$dU_f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U_f}{\partial x_i} dx_i \quad (4.3.16)$$

$$dK_f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial K_f}{\partial x_i} dx_i \quad (4.3.17)$$

se llega a la condición que debe cumplirse para cada una de las variables de diseño x , eliminándose el subíndice i para mayor claridad en la notación

$$\mathbf{v}_\mu^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \mathbf{w}_\mu + \mathbf{v}_\mu^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial U_f} \mathbf{w}_\mu \frac{\partial U_f}{\partial x} + \mathbf{v}_\mu^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial K_f} \mathbf{w}_\mu \frac{\partial K_f}{\partial x} + \frac{i}{B} \left(U_f \frac{\partial K_f}{\partial x} + K_f \frac{\partial U_f}{\partial x} \right) \mathbf{v}_\mu^T \mathbf{I} \mathbf{w}_\mu = 0 \quad (4.3.18)$$

Se deben definir a continuación los números complejos siguientes

$$h_{Ax} = \mathbf{v}_\mu^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \mathbf{w}_\mu, \quad h_{AU} = \mathbf{v}_\mu^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial U_f} \mathbf{w}_\mu, \quad h_{AK} = \mathbf{v}_\mu^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial K_f} \mathbf{w}_\mu \quad (4.3.19)$$

con lo que (4.3.18) queda

$$h_{Ax} + \frac{\partial U_f}{\partial x} \left[h_{AU} + \frac{iK_f}{B} \mathbf{v}_\mu^T \mathbf{I} \mathbf{w}_\mu \right] + \frac{\partial K_f}{\partial x} \left[h_{AK} + \frac{iU_f}{B} \mathbf{v}_\mu^T \mathbf{I} \mathbf{w}_\mu \right] = 0 \quad (4.3.20)$$

Si se definen dos números complejos más

$$\mathbf{g}_U = h_{AU} + \frac{iK_f}{B} \mathbf{v}_\mu^T \mathbf{I} \mathbf{w}_\mu \quad (4.3.21)$$

$$\mathbf{g}_K = h_{AK} + \frac{iU_f}{B} \mathbf{v}_\mu^T \mathbf{I} \mathbf{w}_\mu \quad (4.3.22)$$

la ecuación (4.3.20) puede ser escrita de forma más condensada como

$$\mathbf{g}_U \frac{\partial U_f}{\partial x} + \mathbf{g}_K \frac{\partial K_f}{\partial x} = -h_{Ax} \quad (4.3.23)$$

donde $\frac{\partial U_f}{\partial x}$ y $\frac{\partial K_f}{\partial x}$ son números reales. Multiplicando la ecuación (4.3.23) por el complejo conjugado de \mathbf{g}_U , que se denota como $\overline{\mathbf{g}_U}$, se obtiene

$$|g_U|^2 \frac{\partial U_f}{\partial x} + \bar{g}_U g_k \frac{\partial K_f}{\partial x} = -\bar{g}_U h_{Ax} \quad (4.3.24)$$

e igualando las partes imaginarias de esta última ecuación es posible despejar $\frac{\partial K_f}{\partial x}$

$$\frac{\partial K_f}{\partial x} = \frac{-\text{Im}(\bar{g}_U h_{Ax})}{\text{Im}(\bar{g}_U g_k)} \quad (4.3.25)$$

donde *Im* hace referencia a la parte imaginaria del número complejo.

De la manera similar, multiplicando la ecuación (4.3.23) por \bar{g}_K , complejo conjugado de g_K , se obtiene la derivada de la velocidad crítica de flameo respecto a la variable de diseño considerada.

$$\frac{\partial U_f}{\partial x} = \frac{-\text{Im}(\bar{g}_K h_{Ax})}{\text{Im}(\bar{g}_K g_U)} \quad (4.3.26)$$

Con las expresiones (4.3.25) y (4.3.26) se obtiene la variación, respecto a la variable de diseño x , de los dos parámetros que definen la inestabilidad aeroelástica por flameo del tablero de un puente: U_f y K_f .

En los apartados siguientes se eligen las variables de diseño, se describe la obtención analítica de las derivadas $\partial \mathbf{A} / \partial x$, $\partial \mathbf{A} / \partial U_f$, $\partial \mathbf{A} / \partial K_f$, y se profundiza en la interpretación de los análisis de sensibilidad.

4.3.2.1 Variables de diseño

Las variables de diseño que intervienen en la definición de una estructura tan compleja como es un puente soportado por cables, bien sea colgante o atirantado, son, obviamente, numerosas. Su comportamiento dinámico y aeroelástico, y por tanto la velocidad crítica de flameo, se verá afectado por multitud de parámetros, desde

geométricos hasta característicos de los materiales, pasando por las propiedades mecánicas de sus elementos: torres, tablero, cables, etc. Uno de los objetivos de este trabajo es sentar las bases para llevar a cabo la optimización de puentes de grandes vanos en régimen aeroelástico utilizando análisis de sensibilidad con formulación analítica. Trabajos como los de Jurado^[J2], Jurado y Hernández^{[J3][J4]}, así como Mosquera^[M3] y Mosquera^{[M4][M5]} y Hernández llevaban a cabo esta tarea, pero a lo realizado por ellos se ha añadido la consideración de la masa del tablero como una variable de diseño de la estructura al realizar el análisis de sensibilidad del comportamiento dinámico de la misma, ésto es, de las frecuencias naturales y modos propios de vibración teniendo en cuenta la no linealidad geométrica o teoría de segundo orden. Siguiendo la misma metodología de dichos trabajos, a las variables de diseño escogidas en ellos se les debe añadir el área de la sección transversal del tablero con el fin de considerar la masa del mismo como una variable de diseño más:

- Momento de inercia a flexión vertical del tablero: $x=I_y$
- Momento de inercia a flexión lateral del tablero: $x=I_z$
- Momento de inercia a torsión del tablero: $x=J$
- Área de la sección transversal del tablero: $x=A$

Estos parámetros son fundamentales en la definición de una estructura de este tipo, tanto para soportar las cargas permanentes, como las sobrecargas a las que se vea solicitado, y además pertenecen al elemento estructural, el tablero, en el que se da la inestabilidad aeroelástica por flameo.

Como se ha visto en el punto anterior, el problema requiere la obtención de las siguientes derivadas: $\partial\mathbf{A}/\partial x$, $\partial\mathbf{A}/\partial U_f$, $\partial\mathbf{A}/\partial K_f$, que se desarrollan a continuación.

4.3.2.2 Obtención de $\partial\mathbf{A}/\partial x$

La matriz \mathbf{A} , de dimensión $2m \times 2m$, siendo m el número de modos propios de vibración considerados, es según (2.5.27):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\mathbf{C}_R & -\mathbf{K}_R \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.3.27)$$

Derivando respecto a x , se obtiene

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \mathbf{C}_R}{\partial x} & -\frac{\partial \mathbf{K}_R}{\partial x} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.3.28)$$

donde \mathbf{C}_R y \mathbf{K}_R son las matrices de amortiguamiento y rigidez reducidas por los m modos de vibración definidas del siguiente modo

$$\mathbf{C}_R = \Phi^T (\mathbf{C} - \mathbf{C}_a) \Phi \quad \mathbf{K}_R = \Phi^T (\mathbf{K} - \mathbf{K}_a) \Phi \quad (4.3.29)$$

o lo que es lo mismo, separando los términos

$$\mathbf{C}_R = \mathbf{C}_{e,R} - \mathbf{C}_{a,R} = \Phi^T \mathbf{C} \Phi - \Phi^T \mathbf{C}_a \Phi \quad (4.3.30)$$

$$\mathbf{K}_R = \mathbf{K}_{e,R} - \mathbf{K}_{a,R} = \Phi^T \mathbf{K} \Phi - \Phi^T \mathbf{K}_a \Phi$$

en las que \mathbf{C} y \mathbf{K} son las matrices de amortiguamiento y rigidez de la estructura, y \mathbf{C}_a y \mathbf{K}_a son las matrices aeroelásticas. Las matrices $\mathbf{C}_{e,R}$ y $\mathbf{K}_{e,R}$ son las matrices reducidas de \mathbf{C} y \mathbf{K} , mientras que $\mathbf{C}_{a,R}$ y $\mathbf{K}_{a,R}$ son las reducidas de las matrices aeroelásticas. Las matrices $\mathbf{C}_{e,R}$ y $\mathbf{K}_{e,R}$ son diagonales de dimensión m (número de modos), que verifican, si se considera un amortiguamiento de la estructura de tipo Rayleigh^[H2]

$$\mathbf{C}_{e,R,ii} = 2\zeta_i \omega_i \quad ; \quad \mathbf{K}_{e,R,ii} = \omega_i^2 \quad (4.3.31)$$

donde ω_i y ξ_i son respectivamente la frecuencia natural y el amortiguamiento asociados a cada modo. El amortiguamiento estructural de cada modo se considera constante, y en puentes soportados por cables se suelen adoptar valores de entre el 1% y el 5% de decremento logarítmico $\delta = 2\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}$, con lo cual su derivada, $\partial\xi_i/\partial x$ es nula y no influye en la derivada de la expresión (4.3.28), obteniéndose

$$\frac{\partial \mathbf{C}_{e,R,ii}}{\partial x} = 2\xi_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial \mathbf{K}_{e,R,ii}}{\partial x} = 2\omega_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \quad (4.3.32)$$

y por su parte las derivadas de las matrices aeroelásticas reducidas en la ecuación (4.3.30) resultan

$$\frac{\partial \mathbf{C}_{a,R}}{\partial x} = \mathbf{\Phi}^T \frac{\partial \mathbf{C}_a}{\partial x} \mathbf{\Phi} + \frac{\partial \mathbf{\Phi}^T}{\partial x} \mathbf{C}_a \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Phi}^T \mathbf{C}_a \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial x} \quad (4.3.33)$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{a,R}}{\partial x} = \mathbf{\Phi}^T \frac{\partial \mathbf{K}_a}{\partial x} \mathbf{\Phi} + \frac{\partial \mathbf{\Phi}^T}{\partial x} \mathbf{K}_a \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Phi}^T \mathbf{K}_a \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial x}$$

en las que las derivadas de las matrices aeroelásticas, tanto de amortiguamiento \mathbf{C}_a como de rigidez \mathbf{K}_a , con respecto a las variables de diseño elegidas son nulas y en consecuencia los primeros sumandos de las expresiones (4.3.33) valen cero. Recuérdese su formación según la expresión (2.5.12).

Se observa por tanto, que la evaluación de (4.3.28) implica la obtención de las derivadas de las frecuencias naturales (expresiones (4.3.32)) y de los modos propios de vibración (ecuación (4.3.33)) de la estructura con respecto a las variables de diseño indicadas. Este problema, que corresponde al del análisis de sensibilidad de las frecuencias naturales y modos propios de vibración de una estructura, se ha realizado hasta el presente trabajo por medio de la utilización de los cálculos por diferencias finitas o analíticos, pero sin considerar la masa del tablero como variable. La formulación completamente analítica que resuelve este problema, ha sido presentada al principio de este capítulo, teniendo en cuenta las variables de diseño definidas, y la teoría de

segundo orden de aplicación necesaria a este tipo de estructuras para tener en cuenta la no linealidad geométrica de las mismas.

Una formulación alternativa a la planteada en este trabajo de investigación, consiste en evaluar la derivada de la matriz \mathbf{A} respecto a la variable de diseño considerada mediante diferencias finitas. El grave inconveniente de esta metodología reside en el elevado coste computacional ya que se debe evaluar la totalidad de los elementos de la matriz \mathbf{A} para los valores de la variable de diseño perturbada al menos dos veces y calcular las diferencias finitas correspondientes. Por otro lado esta metodología es muy fácil de programar y en ese hecho se basa la popularidad de las diferencias finitas.

4.3.2.3 Obtención de $\partial\mathbf{A}/\partial U_f$

Derivando (4.3.27) se obtiene

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial U_f} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial\mathbf{C}_R}{\partial U_f} & -\frac{\partial\mathbf{K}_R}{\partial U_f} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.3.34)$$

Como en el apartado anterior, conviene hacer la descomposición

$$\mathbf{C}_R = \mathbf{C}_{e,R} - \mathbf{C}_{a,R} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{C} \mathbf{\Phi} - \mathbf{\Phi}^T \mathbf{C}_a \mathbf{\Phi} \quad (4.3.35)$$

$$\mathbf{K}_R = \mathbf{K}_{e,R} - \mathbf{K}_{a,R} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi} - \mathbf{\Phi}^T \mathbf{K}_a \mathbf{\Phi}$$

donde los términos de las matrices reducidas de amortiguamiento y rigidez estructural

$$\mathbf{C}_{e,R,ii} = 2\zeta_i \omega_i \quad ; \quad \mathbf{K}_{e,R,ii} = \omega_i^2 \quad (4.3.36)$$

no dependen explícitamente de la velocidad de flameo U_f . Sin embargo, las matrices aeroelásticas \mathbf{C}_a y \mathbf{K}_a si que dependen de la velocidad de flameo. En el capítulo 2 se ha

mostrado como esas matrices se construyen ensamblando en cada nudo del tablero las matrices \mathbf{C}_{ai} y \mathbf{K}_{ai} , que tienen la forma siguiente

$$\mathbf{K}_{ai} = \frac{l_e}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & pK^2 P_4^* & pK^2 P_6^* & pBK^2 P_3^* & 0 & 0 \\ 0 & pK^2 H_6^* & pK^2 H_4^* & pBK^2 H_3^* & 0 & 0 \\ 0 & pBK^2 A_6^* & pBK^2 A_4^* & pB^2 K^2 A_3^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.37)$$

$$\mathbf{C}_{ai} = \frac{l_e}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & pBKP_1^*/U & pBKP_5^*/U & pB^2 KP_2^*/U & 0 & 0 \\ 0 & pBKH_5^*/U & pBKH_1^*/U & pB^2 KH_2^*/U & 0 & 0 \\ 0 & pB^2 KA_5^*/U & pB^2 KA_1^*/U & pB^3 KA_2^*/U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.38)$$

donde $p = 0.5\rho U^2$ es la presión dinámica del viento. A partir de (4.3.37) y (4.3.38) se pueden calcular las derivadas de las matrices aeroelásticas respecto de U_f , quedando

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{K}_a}{\partial U_f} &= \frac{2\mathbf{K}_a}{U_f} \\ \frac{\partial \mathbf{C}_a}{\partial U_f} &= \frac{\mathbf{C}_a}{U_f} \end{aligned} \quad (4.3.39)$$

Si se observa la descomposición de \mathbf{C}_R y \mathbf{K}_R en la ecuación (4.3.35), y la ecuación (4.3.36), y puesto que ni los modos propios ni sus frecuencias naturales asociadas dependen de la velocidad crítica de flameo U_f , resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{K}_R}{\partial U_f} &= -\Phi^T \frac{\partial \mathbf{K}_a}{\partial U_f} \Phi \\ \frac{\partial \mathbf{C}_R}{\partial U_f} &= -\Phi^T \frac{\partial \mathbf{C}_a}{\partial U_f} \Phi \end{aligned} \quad (4.3.40)$$

Sustituyendo (4.3.39) en (4.3.40) se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{K}_R}{\partial U_f} &= -\Phi^T \frac{2\mathbf{K}_a}{U_f} \Phi \\ \frac{\partial \mathbf{C}_R}{\partial U_f} &= -\Phi^T \frac{\mathbf{C}_a}{U_f} \Phi\end{aligned}\quad (4.3.41)$$

Basta sustituir (4.3.41) en (4.3.34) para calcular $\partial \mathbf{A} / \partial U_f$.

4.3.2.4 Obtención de $\partial \mathbf{A} / \partial K_f$

Análogamente a como se acaba de realizar, se obtiene

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial K_f} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \mathbf{C}_R}{\partial K_f} & -\frac{\partial \mathbf{K}_R}{\partial K_f} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi^T \frac{\partial \mathbf{C}_a}{\partial K_f} \Phi & \Phi^T \frac{\partial \mathbf{K}_a}{\partial K_f} \Phi \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\quad (4.3.42)$$

puesto que nuevamente, ni los modos propios ni sus frecuencias naturales asociadas dependen de la frecuencia reducida de respuesta en el flameo K_f , por lo tanto

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial K_f} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial K_f} = \mathbf{0}\quad (4.4.43)$$

Si se analizan las expresiones (4.3.37) y (4.3.38) se ve como las matrices aeroelásticas dependen explícitamente de la frecuencia reducida K . Además, todos los coeficientes de flameo (H_i^* , A_i^* , P_i^* con $i=1, \dots, 6$) son también funciones de K . Derivando dichas expresiones respecto a K se obtienen las matrices siguientes

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{ai}}{\partial K_f} = \frac{l_e}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2pKP_4^* + pK^2 \frac{\partial P_4^*}{\partial K_f} & 2pKP_6^* + pK^2 \frac{\partial P_6^*}{\partial K_f} & 2pBKP_3^* + pBK^2 \frac{\partial P_3^*}{\partial K_f} & 0 & 0 \\ 0 & 2pKH_6^* + pK^2 \frac{\partial H_6^*}{\partial K_f} & 2pKH_4^* + pK^2 \frac{\partial H_4^*}{\partial K_f} & 2pBKH_3^* + pBK^2 \frac{\partial H_3^*}{\partial K_f} & 0 & 0 \\ 0 & 2pBKA_6^* + pBK^2 \frac{\partial A_6^*}{\partial K_f} & 2pBKA_4^* + pBK^2 \frac{\partial A_4^*}{\partial K_f} & 2pB^2KA_3^* + pB^2K^2 \frac{\partial A_3^*}{\partial K_f} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.44)$$

$$\frac{\partial \mathbf{C}_{ai}}{\partial K_f} = \frac{l_e}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(pBP_1^* + pBK \frac{\partial P_1^*}{\partial K_f} \right) / U & \left(pBP_5^* + pBK \frac{\partial P_5^*}{\partial K_f} \right) / U & \left(pB^2P_2^* + pB^2K \frac{\partial P_2^*}{\partial K_f} \right) / U & 0 & 0 \\ 0 & \left(pBH_5^* + pBK \frac{\partial H_5^*}{\partial K_f} \right) / U & \left(pBH_1^* + pBK \frac{\partial H_1^*}{\partial K_f} \right) / U & \left(pB^2H_2^* + pB^2K \frac{\partial H_2^*}{\partial K_f} \right) / U & 0 & 0 \\ 0 & \left(pB^2A_5^* + pB^2K \frac{\partial A_5^*}{\partial K_f} \right) / U & \left(pB^2A_1^* + pB^2K \frac{\partial A_1^*}{\partial K_f} \right) / U & \left(pB^3A_2^* + pB^3K \frac{\partial A_2^*}{\partial K_f} \right) / U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.45)$$

Como ya se puso de manifiesto en el capítulo 2, los coeficientes de flameo se obtienen experimentalmente mediante ensayos seccionales del tablero del puente estudiado. Por tanto, no se conocen expresiones matemáticas para las funciones que relacionan cada coeficiente con la frecuencia reducida. Esto significa que el único modo de calcular las derivadas de los coeficientes de flameo respecto de la frecuencia reducida ($\partial H_i^* / \partial K_f$, $\partial A_i^* / \partial K_f$, $\partial P_i^* / \partial K_f$, $i = 1, \dots, 6$) sea utilizando aproximaciones mediante diferencias finitas. En la figura 4.3.3 se muestran los coeficientes de flameo de una de las secciones transversales analizadas durante la fase de diseño del puente sobre el estrecho de Akashi, en Japón, obtenidos experimentalmente.

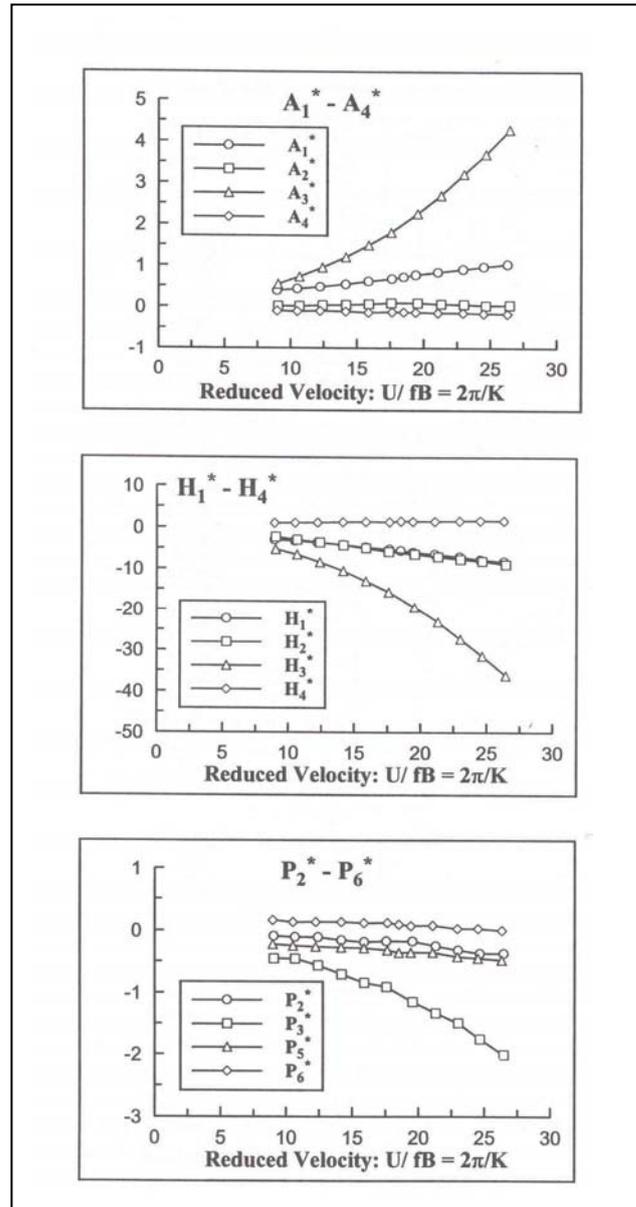


Figura 4.3.3. Coeficientes de flameo de una de las secciones transversales analizadas para el puente sobre el estrecho de Akashi.

Después de construir las matrices (4.3.44) y (4.3.45) se ensamblan para todos los nudos del tablero, obteniéndose $\frac{\partial \mathbf{K}_a}{\partial K_f}$ y $\frac{\partial \mathbf{C}_a}{\partial K_f}$. Sustituyendo estas dos matrices en (4.3.42) se obtiene la derivada buscada, $\partial \mathbf{A} / \partial K_f$.

Una vez evaluados los términos: $\partial \mathbf{A} / \partial x$, $\partial \mathbf{A} / \partial U_f$ y $\partial \mathbf{A} / \partial K_f$, se pueden obtener las derivadas de los parámetros de flameo U_f y K_f , con respecto a las variables x de diseño

elegidas (I_y, I_z, J, A) sin más que realizar las operaciones indicadas de (4.3.19) a (4.3.26), que son simples operaciones con números complejos. Como se ha visto, la formulación del análisis de sensibilidad presentada, con la inclusión de la formulación desarrollada en el Capítulo 2, es completamente analítica, salvo obviamente en la parte experimental, esto es, la obtención, para cada caso concreto de tablero de puente, de los coeficientes de flameo y sus derivadas con respecto a la frecuencia reducida.

4.3.3 Análisis de sensibilidad de la respuesta aeroelástica en estructuras con masa variable

En el apartado anterior, 4.3.3, se ha desarrollado la formulación que permite calcular las sensibilidades de la respuesta aeroelástica cuando se consideran como variables de diseño cuatro propiedades mecánicas de la sección transversal del tablero del puente que esté siendo estudiado, en concreto el momento de inercia a flexión vertical I_y , el momento de inercia a flexión lateral I_z , la inercia a torsión J y el área de la sección A . Sin embargo, esas cuatro variables de diseño no son independientes entre sí, sino que son función de la geometría de la sección transversal del tablero. De hecho, si se considera un caso en el que la sección transversal del tablero sea un cajón aerodinámico, los cuatro parámetros mecánicos I_y, I_z, J y A varían si se modifica, por ejemplo, el espesor de las paredes laterales de la sección. En esencia, en un caso como el que se acaba de plantear, la velocidad de flameo y la frecuencia reducida del tablero del puente dependen en última instancia de los espesores del material de la sección transversal, asumiendo que no se produce modificación alguna en la geometría del perímetro exterior de la sección, ya que en ese caso se alterarían los valores de los coeficientes de flameo.

El poner de manifiesto el hecho de que la respuesta aeroelástica de un puente, como el de este ejemplo, es función de los espesores del material que constituye su sección transversal, permite una aproximación más intuitiva al problema de optimización de un puente soportado por cables. Se trataría, por tanto, de minimizar el peso del tablero

$$\min F(e_1, e_2, \dots, e_n) \quad (4.3.46)$$

donde F es la función objetivo, en este caso el peso del tablero, y e_1, e_2, \dots, e_n son los espesores de los elementos que conforman la sección transversal del tablero del puente.

Sujeto a una serie de condiciones:

$$g_j = g_j(e_1, e_2, \dots, e_n) \quad j = 1, \dots, m \quad (4.3.47)$$

siendo m el número total de condiciones del problema de optimización.

Como es lógico, resolviendo el problema de optimización se determinan unos valores concretos de los espesores que verifican los condicionantes de diseño impuestas y que además permiten que el peso de la estructura sea el mínimo posible compatible con esos condicionantes, entre los cuales estará que la velocidad de flameo sea superior a un cierto valor establecido a priori.

Según Perezán^[P2] los algoritmos de optimización más eficientes están basados en métodos de programación no lineal, y entre ellos los que alcanzan la solución en un menor número de iteraciones son los que utilizan información de los gradientes de la función objetivo y de las condiciones del problema. En consecuencia, se hace necesario el conocer la sensibilidad de los parámetros de flameo respecto a los espesores de la sección transversal del tablero, en el caso de que ésta sea un cajón aerodinámico. El problema práctico que se plantea en este punto consiste en determinar cómo evaluar esas sensibilidades una vez conocidas las derivadas de la velocidad de flameo y de la frecuencia reducida respecto a los parámetros mecánicos de la sección transversal indicados al principio de este apartado, es decir, I_y, I_z, J y A .

Hasta ahora se ha establecido la dependencia de los parámetros de flameo del puente respecto de las propiedades mecánicas de la sección transversal del tablero:

$$\begin{aligned} U_f &= U_f(I_y, I_z, J, A) \\ K_f &= K_f(I_y, I_z, J, A) \end{aligned} \quad (4.3.48)$$

Esas propiedades mecánicas son función explícita, a su vez, de los espesores del material a través de unas funciones que deben calcularse para cada sección del tablero en particular.

$$\begin{aligned}
 I_y &= I_y(e_1, e_2, \dots, e_n) \\
 I_z &= I_z(e_1, e_2, \dots, e_n) \\
 J &= J(e_1, e_2, \dots, e_n) \\
 A &= A(e_1, e_2, \dots, e_n)
 \end{aligned}
 \tag{4.3.49}$$

Se puede escribir, por tanto

$$\begin{aligned}
 U_f &= U_f(I_y(e_1, e_2, \dots, e_n), I_z(e_1, e_2, \dots, e_n), J(e_1, e_2, \dots, e_n), A(e_1, e_2, \dots, e_n)) \\
 K_f &= K_f(I_y(e_1, e_2, \dots, e_n), I_z(e_1, e_2, \dots, e_n), J(e_1, e_2, \dots, e_n), A(e_1, e_2, \dots, e_n))
 \end{aligned}
 \tag{4.3.50}$$

Se tienen, por tanto, dos funciones U_f y K_f en las cuales la dependencia de las mismas respecto a las variables independientes (e_1, e_2, \dots, e_n) es implícita. Los diferenciales de esas funciones pueden ser calculados como:

$$\begin{aligned}
 dU_f &= \frac{\partial U_f}{\partial I_y} dI_y + \frac{\partial U_f}{\partial I_z} dI_z + \frac{\partial U_f}{\partial J} dJ + \frac{\partial U_f}{\partial A} dA \\
 dK_f &= \frac{\partial K_f}{\partial I_y} dI_y + \frac{\partial K_f}{\partial I_z} dI_z + \frac{\partial K_f}{\partial J} dJ + \frac{\partial K_f}{\partial A} dA
 \end{aligned}
 \tag{4.3.51}$$

Además, los diferenciales de las propiedades mecánicas de la sección las cuales dependen explícitamente de los espesores pueden escribirse como

$$\begin{aligned}
 dI_y &= \frac{\partial I_y}{\partial e_1} de_1 + \frac{\partial I_y}{\partial e_2} de_2 + \dots + \frac{\partial I_y}{\partial e_n} de_n \\
 dI_z &= \frac{\partial I_z}{\partial e_1} de_1 + \frac{\partial I_z}{\partial e_2} de_2 + \dots + \frac{\partial I_z}{\partial e_n} de_n \\
 dJ &= \frac{\partial J}{\partial e_1} de_1 + \frac{\partial J}{\partial e_2} de_2 + \dots + \frac{\partial J}{\partial e_n} de_n \\
 dA &= \frac{\partial A}{\partial e_1} de_1 + \frac{\partial A}{\partial e_2} de_2 + \dots + \frac{\partial A}{\partial e_n} de_n
 \end{aligned}
 \tag{4.3.52}$$

Las sensibilidades de la velocidad de flameo y la frecuencia reducida respecto a un espesor genérico e_i serán:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_f}{\partial e_i} &= \frac{\partial U_f}{\partial I_y} \frac{\partial I_y}{\partial e_i} + \frac{\partial U_f}{\partial I_z} \frac{\partial I_z}{\partial e_i} + \frac{\partial U_f}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial e_i} + \frac{\partial U_f}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial e_i} \\ \frac{\partial K_f}{\partial e_i} &= \frac{\partial K_f}{\partial I_y} \frac{\partial I_y}{\partial e_i} + \frac{\partial K_f}{\partial I_z} \frac{\partial I_z}{\partial e_i} + \frac{\partial K_f}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial e_i} + \frac{\partial K_f}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial e_i} \end{aligned} \quad (4.3.53)$$

donde los términos $\frac{\partial U_f}{\partial I_y}$, $\frac{\partial U_f}{\partial I_z}$, $\frac{\partial U_f}{\partial J}$, $\frac{\partial U_f}{\partial A}$, $\frac{\partial K_f}{\partial I_y}$, $\frac{\partial K_f}{\partial I_z}$, $\frac{\partial K_f}{\partial J}$ y $\frac{\partial K_f}{\partial A}$ son precisamente las sensibilidades calculadas en el apartado anterior, el 4.3.3, mientras que $\frac{\partial I_y}{\partial e_i}$, $\frac{\partial I_z}{\partial e_i}$, $\frac{\partial J}{\partial e_i}$ y $\frac{\partial A}{\partial e_i}$ con $i=1, \dots, n$ deben calcularse para cada sección transversal en particular con la que se esté trabajando.

Se puede plantear la relación matricial siguiente para calcular las sensibilidades respecto a los espesores de la velocidad de flameo

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial U_f}{\partial e_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial U_f}{\partial e_n} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial I_y}{\partial e_1} & \frac{\partial I_z}{\partial e_1} & \frac{\partial J}{\partial e_1} & \frac{\partial A}{\partial e_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial I_y}{\partial e_n} & \frac{\partial I_z}{\partial e_n} & \frac{\partial J}{\partial e_n} & \frac{\partial A}{\partial e_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial U_f}{\partial I_y} \\ \frac{\partial U_f}{\partial I_z} \\ \frac{\partial U_f}{\partial J} \\ \frac{\partial U_f}{\partial A} \end{Bmatrix} \quad (4.3.54)$$

y esta otra expresión, similar a la anterior, para las sensibilidades de la frecuencia reducida

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial K_f}{\partial e_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial K_f}{\partial e_n} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial I_y}{\partial e_1} & \frac{\partial I_z}{\partial e_1} & \frac{\partial J}{\partial e_1} & \frac{\partial A}{\partial e_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial I_y}{\partial e_n} & \frac{\partial I_z}{\partial e_n} & \frac{\partial J}{\partial e_n} & \frac{\partial A}{\partial e_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial K_f}{\partial I_y} \\ \frac{\partial K_f}{\partial I_z} \\ \frac{\partial K_f}{\partial J} \\ \frac{\partial K_f}{\partial A} \end{Bmatrix} \quad (4.3.55)$$

Además, estas dos últimas expresiones (4.3.54) y (4.3.55) pueden escribirse de una manera más compacta utilizando vectores gradiente y la matriz jacobiana, como se indica a continuación

$$\nabla_{\mathbf{e}} U_f = \mathbf{J} \cdot \nabla_{\mathbf{I}} U_f \quad (4.3.56)$$

$$\nabla_{\mathbf{e}} K_f = \mathbf{J} \cdot \nabla_{\mathbf{I}} K_f \quad (4.3.57)$$

donde \mathbf{e} representa un vector que contiene los espesores de la sección transversal empleados como variables de diseño e \mathbf{I} es un vector compuesto por los parámetros mecánicos de la sección.

Queda formulada, por tanto, la obtención de las sensibilidades de los parámetros de flameo respecto a los espesores de la sección transversal de un tablero en cajón aerodinámico.

4.3.4 Interpretación de los análisis de sensibilidad

Una de las cuestiones principales a considerar en un trabajo de investigación que verse sobre análisis de sensibilidad es cómo lograr extraer una información que sea fácilmente interpretable y que además sea en sí misma significativa.

La definición clásica del concepto de sensibilidad da una idea sobre cual es la tasa de variación de una determinada respuesta respecto a la variable de diseño escogida. Según esto último, se puede aproximar el valor de una respuesta estructural al modificar una

variable de diseño respecto del valor asignado a la misma en el diseño inicial mediante la expresión

$$\psi_m = \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} \Delta x \quad (4.3.58)$$

donde ψ es el valor de la respuesta obtenida en el diseño inicial, ψ_m es el nuevo valor de la misma (valor modificado), $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ es la sensibilidad respecto de la variable de diseño x , mientras que Δx es el incremento considerado de la variable de diseño. Se puede establecer la relación siguiente entre la variable de diseño y su incremento

$$\Delta x = rx \quad \text{siendo } 0 \leq r \leq 1 \quad (4.3.59)$$

con lo que la expresión 4.3.58 puede ser escrita como

$$\psi_m = \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} rx \quad (4.3.60)$$

Con el fin de captar adecuadamente qué variables de diseño tienen más influencia en las modificaciones de una cierta respuesta estructural se introducen dos conceptos, que si se asocian a la sensibilidad de la velocidad de flameo reciben los nombres de *velocidad de cambio* y *ratio de cambio* de la velocidad de flameo, mientras que si se aplican a la sensibilidad de la frecuencia reducida se llaman *frecuencia reducida de cambio* y *ratio de cambio* de la frecuencia reducida. Estos conceptos se pueden generalizar para cualquier análisis de sensibilidad y se evalúan a partir de la ecuación (4.3.60) tomando $r=1$ es decir, considerando un incremento de la variable de diseño de un 100 %.

La velocidad de cambio se calcula a partir de la expresión (4.3.60) cuando se adopta como respuesta estructural la velocidad de flameo.

$$U_{fm} = U_f + \frac{\partial U_f}{\partial x} rx, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (4.3.61)$$

$$U_{fr}^x = U_{fm} - U_f = \frac{\partial U_f}{\partial x} rx, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (4.3.62)$$

Se define la velocidad de cambio (U_f^x) como el incremento de la velocidad de flameo cuando la variable de diseño considerada x se modifica en una proporción $r = 1$. Las unidades de la velocidad de cambio son m/s. También se podría definir la velocidad de cambio asociada a una variación del 10 % de la variable de diseño x como

$$U_{f0.1}^x = \frac{\partial U_f}{\partial x} 0.1x$$

Se puede introducir el concepto de ratio de cambio de la velocidad de flameo como el cociente entre la velocidad de cambio y el valor previo de la velocidad de flameo. Este parámetro según la expresión (4.3.62) se obtendría a través del cociente

$$\frac{U_{fm} - U_f}{U_f} = \frac{\partial U_f}{\partial x} \frac{rx}{U_f} \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (4.3.63)$$

siendo el ratio de cambio de la velocidad de flameo cuando es $r = 1$ (λ_U^x)

$$\lambda_U^x = \frac{\partial U_f}{\partial x} \frac{rx}{U_f} = \frac{U_f^x}{U_f} \quad (4.3.64)$$

Como se ha puesto de manifiesto, una vez conocidos los valores de las sensibilidades, las variaciones que se producen en la respuesta cuya sensibilidad ha sido calculada dependen, en gran medida, del valor de la propia variable de diseño en el diseño inicial. En consecuencia, para determinar qué modificación o modificaciones en dichas variables provocarán una mayor alteración en el valor de la respuesta estructural, es necesario determinar, en el caso de la velocidad de flameo, la velocidad de cambio (U_f^x) o el ratio de cambio de la velocidad de flameo (λ_U^x).

Si se analiza la sensibilidad de la frecuencia reducida, la frecuencia reducida de cambio (K_f^x) se calcula a partir de la expresión siguiente haciendo $r = 1$

$$K_f^x = K_{fm} - K_f = \frac{\partial K_f}{\partial x} rx, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (4.3.65)$$

A su vez, el ratio de cambio de la frecuencia reducida se evalúa según una ecuación, similar a (4.3.64) tomando $r=1$

$$\lambda_K^x = \frac{\partial K_f}{\partial x} \frac{rx}{K_f} = \frac{K_f^x}{K_f} \quad (4.3.66)$$

Con las expresiones que van de la (4.3.61) a la (4.3.66) no se pretende dar al proyectista una herramienta con la que estimar directamente las variaciones de las respuestas aeroelásticas al incrementar un 100 % una variable de diseño ya que las sensibilidades aproximan la pendiente de una función sólo en el entorno del diseño inicialmente considerado, es decir, para valores de r suficientemente pequeños como por ejemplo $r=0.1$. Con conceptos tales como la velocidad de cambio o el ratio de cambio de la velocidad de flameo se persigue explicitar qué variables de diseño provocan mayores alteraciones en una determinada respuesta estructural cuando aquellas se modifican en un mismo porcentaje. Esto permite introducir alteraciones sólo en aquellas variables que van a permitir mejorar el diseño inicial. En el caso de que se desee estimar el valor de la respuesta estructural modificada se debe evaluar la velocidad de cambio o la frecuencia reducida de cambio tomando valores pequeños de r que se encuentren en el entorno del diseño inicial, por ejemplo $r=0.05$ ó 0.1 , los cuales se corresponden con incrementos de la variable de diseño de 5 % y del 10 % respectivamente.

4.4 REFERENCIAS

[A1] Astiz M. A. [1999] *Flutter Stability of Very Long Suspension Bridges*. Journal of Bridge Engineering, Vol. 3, N° 3, August, pp.132-139.

[A2] Adelman H. M., Haftka R. T. [1992] *Sensitivity Analysis of Discrete Systems*. Structural Optimization Status and Promise. Vol. 150 Progress in Aeronautics and Astronautics AIAA, Boulder, Colorado, 291-315.

[A3] Abbas S., Scordelis A. [1994] *Non-linear Analysis of Cable-stayed Bridges*. International Conference A.I.P.C. – F.I.P. on Cable-Stayed and Suspension Bridges, Deauville, Vol. 2, pp.195-210.

[A4] Arzoumanidis S. G., Bieniek M. P. [1985] *Finite Element Analysis of Suspension Bridges*. Computers and Structures, Vol. 21, No 6, pp. 1237-1253.

[C1] Cobo del Arco D. [1998] *An analysis of wind stability. Improvements to the response of suspension bridges*. Tesis doctoral de la Universitat Politècnica de Catalunya. Escola Tècnica Superior D'Enginyers de Camins, Canals i Ports. (Director: Prof. Àngel Aparicio)

[C2] Chen W. F., Duan, L., [2000] *Bridge Engineering Handbook*. CRC Press. Cap 36.

[C3] Chopra A. K., [1995] *Dynamics of Structures. Theory and Applications to Earthquake Engineering*. Prentice Hall International, Inc.

[C4] Craig R. R., [1981] *Structural Dynamics. An Introduction to Computer Methods*. John Wiley & Sons, Inc.

[C5] Carnahan, B., Luther H. A., Wilkes J., [1979] *Cálculo Numérico. Métodos, Aplicaciones*. John Wiley & Sons, Inc.

[C6] COSMOS/M [2003] *User's Manual, 2.8 version*. Structural Research & Analysis Corp. Santa Mónica, California.

[D1] Dailey R. L. [1989] *Eigenvector Derivatives with Repeated Eigenvalues*. AIAA Journal, Vol. 27, No. 4, pp. 486-491.

[G1] GENESIS [2004] *Manuals of GENESIS Version 7.5*. Vanderplaats Research & Development, Inc. Colorado Springs, CO, USA.

[G2] Ge Y. J., Tanaka H. [2000] *Aerodynamic Stability of Long-Span Suspension Bridges under Erection*. Journal of Structural Engineering. Vol. 126, No. 12, December 2000, pp.1404-1412.

[H1] Hernández S. [1997] *Análisis Lineal y No Lineal de Estructuras de Barras*. Servicio de Reprografía de la Universidad de La Coruña.

[H2] Hart G. C., Wong K. [2000] *Structural Dynamics for Structural Engineers*. John Wiley & Sons, Inc.

[H3] Haftka R. T., Gürdal Z., Kamat M. P. [1990] *Elements of Structural Optimization*. Kluwer Academic Publishers, 2nd edition.

[J1] Jurado J. Á., Mosquera A., Nieto F., Hernández S. [2004] *Configuraciones Óptimas de Cables en Puentes Atirantados según Análisis de Sensibilidad de su Comportamiento Aeroelástico*. Congresso de Métodos Computacionais em Engenharia. Lisboa, Portugal. 31 Mayo-2 Junio 2004.

[J2] Jurado J. A. [2001] *Análisis Aeroelástico y de Sensibilidad del Fenómeno de Flameo en Puentes Soportados por Cables*. Tesis doctoral de la Universidade da Coruña. Escola Técnica Superior de Enxeñeiros de Camiños, Canais e Portos.

[J3] Jurado J. A., Hernández S. [1999] *Design of Ultra-Long Span Bridges With Aeroelastic Constraints*. Optimization in Industry II, Junio, Banff, (Alberta) Canada.

- [J4] Jurado J. A., Hernández S. [2000] *Sensitivity Analysis of Flutter Speed of Bridges*. Structures Congress ASCE. Philadelphia, USA.
- [K1] Kanok-Nukulchai W., Yiu P. K. & Brotton D. M. [1992] *Mathematical Modelling of cable-stayed Bridges*. Structural Engineering International, IABSE, pp. 108-113.
- [L1] Larsen A. [1993] *Aerodynamic aspects of the final design of the 1624 m suspension bridge across the Great Belt*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 48, pp.261-285.
- [L2] Livesley R. K. [1970] *Métodos Matriciales para Cálculo de Estructuras*. Editorial Blume.
- [M1] Miyata T., Yamada H., Katsuchi H. [2003] *Comparative Analysis of Messina Bridge – International Benchmark study*. 11th International Conference on Wind Engineering. Lubbock, Texas, USA. 2-5 Junio 2003.
- [M2] Mosquera A., Hernández S., Jurado J. A. [2003] *Analytical Sensitivity Analysis of Aeroelastic Performance of Suspension Bridges Under Construction*. 11th International Conference on Wind Engineering. Lubbock, Texas, USA. 2-5 Junio 2003.
- [M3] Mosquera A., [2003] *Sensibilidad Analítica de la Vibración Libre y del Flameo en Puentes Colgantes de Gran Vano en Servicio y en Fase Constructiva*. Tesis doctoral de la Universidade da Coruña. Escola Técnica Superior de Enxeñeiros de Camiños, Canais e Portos.
- [M4] Mosquera, A., Hernández, S. [2002] *Linear and Non Linear Sensitivity Analysis of Eigenvalue Problems*. 9th AIAA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization. Atlanta, Georgia, USA. 4-6 September 2002
- [M5] Mosquera A., Hernández S. [2004] *Sensibilidad analítica de respuestas dinámicas de estructuras en teoría lineal y de segundo orden*. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 20, nº 2, pp. 169-185.

[M6] Mills-Curran W. C. [1988] *Calculation of Eigenvector Derivatives for Structures with Repeat Eigenvalues*. AIAA Journal, Vol. 26, No. 7, pp. 567-871.

[N1] Namini A., Aldbrecht P. [1992] *Finite Element-Based Flutter Analysis of Cable Suspended Bridges*. Journal of Structural Engineering. Vol. 118, N° 6, June, pp.1509-1526.

[N2] Nelson R. B. [1976] *Simplified Calculation of Eigenvector Derivatives*. AIAA Journal, Vol. 14, pp. 1201-1205.

[O1] Ojalvo I. U. [1987] *Efficient Computation of Mode-Shape Derivatives for Large Dynamic Systems*. AIAA Journal, Vol. 25, No. 10, pp. 1386-1390.

[P1] Przemieniecki J.S. [1968] *Theory of Matrix Structural Analysis*. Dover Publications, Inc.

[P2] Perezán J. C. [1999] *Análisis de Sensibilidad y Optimización de Estructuras de Barras de Nudos Rígidos en Teoría Lineal y No Lineal*. Tesis doctoral de la Universidad de La Coruña. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.

[R1] Rogers L. C. [1970] *Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors*. AIAA Journal, Vol. 8, No. 5, pp. 943-944.

[S1] Samartín A., González de Cangas J.R. [2001] *Cálculo matricial de estructuras*. Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Servicio de publicaciones – Colección Escuelas. Madrid.

[S2] Saez-Benito J. [1975] *Cálculo Matricial de Estructuras Formadas por Piezas Prismáticas*. Fondo Editorial de Ingeniería Naval.

[S3] Schrefler B. A., Odorizzi S., Wood R. D. [1983] *A Total Lagrangian Geometrically Non-linear Analysis of Combined Beam and Cable Structures*. Computers and Structures, Vol. 17, No 1, pp.115-127.

[W1] Wang B. P. [1991] *Improve Approximate Methods for Computing Eigenvector Derivatives in Structural Dynamics*. AIAA Journal, Vol. 29, No 6, pp. 1018-1120.

CAPÍTULO 5

CONCEPTOS DE PROGRAMACIÓN DISTRIBUIDA CÓDIGO DIÓPTICA

(Programación Distribuida de la Optimización de Puentes Incluyendo Condiciones Aeroelásticas)

“There is a continual demand for greater computational power from computer systems than is currently possible... Computations must be completed within a reasonable time period. In the manufacturing realm, engineering calculations and simulations must be achieved within seconds or minutes if possible. A simulation that takes two weeks to reach a solution is usually unacceptable in a design environment, because the time has to be short enough for the designer to work effectively. As systems become more complex, it takes increasingly more time to simulate them.”

(Wilkinson B., Allen M., Parallel Programming)

5.1 INTRODUCCIÓN

Si se analiza detalladamente el proceso de maduración y desarrollo del mundo de la informática desde mediados del siglo XX, se constata como se ha demandado continuamente a los sistemas de ordenadores mayor capacidad de la que éstos han sido capaces de ofrecer en cada momento histórico. Esta circunstancia obedece a una causa

clara según Wilkinson^[W1] y Allen: hay un gran número de problemas que requieren de una enorme cantidad de operaciones repetitivas que son llevadas a cabo con grandes cantidades de datos, y los cálculos deben realizarse en un periodo de tiempo razonable. Además, a medida que los modelos son más complejos con el fin de reproducir con mayor fidelidad la realidad, aumenta el tiempo necesario para calcular la solución del problema planteado.

Esos grandes problemas a los que se ha hecho mención en el párrafo anterior reciben en terminología anglosajona el nombre de *Grand Challenge Problems*, y se corresponden con problemas que no pueden ser resueltos en un tiempo razonable con los ordenadores disponibles en un determinado momento histórico. Algunos ejemplos actuales de este tipo de problemas son, según Grama^[G1], Gupta, Karypis y Kumar y también, el Maui High Performance Computing Center^[M1], Hawai, USA (Maui HPCC de ahora en adelante):

- Modelización climática global
- Problemas de optimización en ingeniería
- Mecánica de fluidos en régimen turbulento
- Dinámica molecular
- Dispersión de contaminantes
- El genoma humano
- Modelos de semiconductores
- Modelos de superconductores

Una forma de incrementar la velocidad computacional para poder acometer la resolución de problemas como los citados es usar múltiples procesadores en un ordenador o múltiples computadores que trabajen resolviendo simultáneamente un único problema. Escribir programas para esta forma de computación recibe el nombre de programación en paralelo.

En la bibliografía existente se hace referencia tanto a sistemas en paralelo como a sistemas distribuidos y también a programación en paralelo o distribuida. A continuación se van a definir de modo preciso los dos conceptos.

Según el Maui HPCC el paralelismo no es más que una estrategia para resolver de un modo rápido problemas largos y complejos. El paralelismo se alcanza dividiendo el problema global en otros más pequeños que son asignados a múltiples ordenadores que trabajan de modo simultáneo y coordinado. Por otro lado, Coulouris^[C1], Dollimore y Kindberg definen un sistema distribuido como aquel en el que los componentes localizados en computadores, conectados en red, comunican y coordinan sus acciones únicamente mediante el paso de mensajes. Se deduce de las definiciones anteriores que el concepto de paralelismo hace referencia a una filosofía de resolución de problemas, mientras que el de sistema distribuido hace referencia a una disposición concreta de ordenadores conectados de una cierta manera y que emplean una técnica determinada para la comunicación y coordinación entre procesos. Por lo tanto, podría decirse que la programación distribuida y su consecuente computación en diferentes ordenadores simultáneamente es una modalidad de las técnicas de paralelización. Y es precisamente la que se ha utilizado en este trabajo. En lo que sigue, cuando se traten conceptos globales, se hablará de paralelización en general y cuando se describa el código desarrollado, se hará constar que es una aplicación de la variante de programación distribuida.

Un aspecto crucial que debe ser tenido en cuenta, es que las continuas mejoras en la velocidad de los procesadores no cuestionan la utilidad de las técnicas de resolución de problemas en paralelo, ya que esas mejoras tecnológicas hacen que las computadoras en paralelo sean aun más rápidas. Además, múltiples procesadores u ordenadores permiten a menudo resolver un problema de mayor tamaño, obtener una solución más precisa o resolver un problema en un tiempo menor (véase el trabajo de Venkataraman^[V1] y Haftka en relación con la evolución histórica de los costes y tiempos de computación en el ámbito del diseño óptimo). En la misma línea de razonamiento cabe apuntar, que siempre habrá *Grand Challenge Problems* que no podrán ser resueltos con los ordenadores disponibles en un momento histórico concreto. La preponderancia que las arquitecturas en paralelo están alcanzando en los últimos años para la resolución de grandes problemas ha sido puesta de manifiesto por Foster^[F1]. En la figura 5.1.1 se muestra el número de operaciones en coma flotante por segundo de algunos de los supercomputadores más rápidos durante el periodo 1945-1995, distinguiendo entre uniprosesores, computadoras en paralelo con entre 4 y 16 procesadores y computadoras en paralelo con cientos o miles de procesadores. En esta figura los

significados de los símbolos empleados son los siguientes: “o” Uniprocesadores; “+” Ordenadores en paralelo con 4-16 procesadores; “x” Computadores en paralelo con cientos o miles de procesadores.

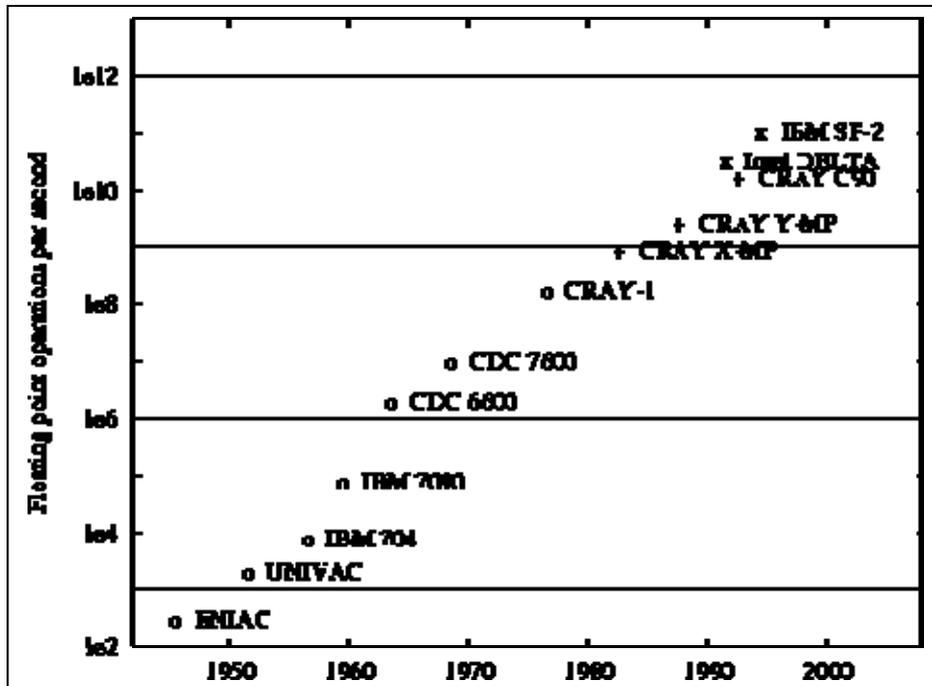


Figura 5.1.1. Evolución del número de operaciones en coma flotante por segundo de algunos de los supercomputadores más rápidos durante el periodo 1945-1995.

La eficiencia de un ordenador depende directamente del tiempo que necesita para llevar a cabo una operación básica y de la cantidad de esas operaciones básicas que puede realizar de modo simultáneo. El tiempo necesario para llevar a cabo una de esas operaciones básicas está limitado por el ciclo de reloj del procesador, es decir, el tiempo necesario para acometer la operación más sencilla. En la actualidad el tiempo de ciclo de reloj está disminuyendo de modo muy lento y aparentemente está alcanzando sus límites físicos. Sin embargo, sí que es posible actuar aumentando el número de procesadores de la computadora. En la figura 5.1.2 se muestra la evolución de los tiempos de ciclo de reloj entre 1975 y 1995 en algunos supercomputadores. El significado de los símbolos que aparecen en la figura es el siguiente: “o” Supercomputadores vectoriales convencionales; “+” Microprocesadores RISC.

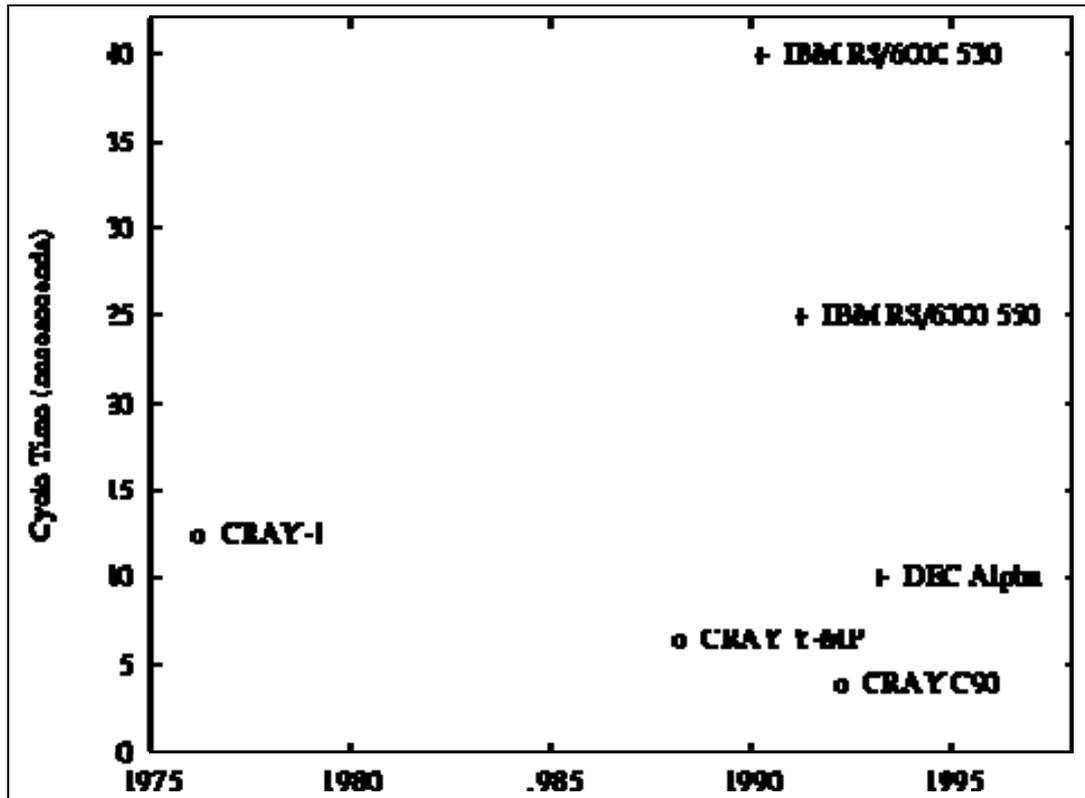


Figura 5.1.2. Evolución de los tiempos de ciclo de reloj entre 1975 y 1995.

En la figura anterior, RISC (*Reduced Instruction Set Computer*) significa computadora con conjunto de instrucciones reducido. La razón de ser de estos microprocesadores RISC es el diseño de CPU's que utilicen conjuntos de instrucciones pequeños simples que requieren menor tiempo para ejecutarse y posibilitan el paralelismo en la ejecución de instrucciones. Otro posible diseño de microprocesadores es el CISC (*Complex Instruction Set Computer*), que significa computadora con conjunto complejo de instrucciones. En este tipo de microprocesadores el conjunto de instrucciones se caracteriza por ser muy amplio y permitir operaciones complejas entre operandos, dificultando por tanto el paralelismo entre instrucciones.

Desde el año 1995, la tecnología informática ha evolucionado de un modo muy notable. En la actualidad, los supercomputadores son mucho más poderosos que sus predecesores de los años 90 del pasado siglo. Desde el año 1993 se viene confeccionando una lista conocida con el nombre de TOP500^[1] en la que se recogen las 500 supercomputadoras más rápidas del momento, actualizándose este ranking cada 6 meses. La última clasificación disponible en el momento de escribir estas líneas es la

publicada el 3 de junio de 2005 y de ella pueden extraerse datos muy interesantes, los cuales permiten esbozar el panorama de la supercomputación en nuestros días.

El primer puesto de la mencionada lista es ocupado, a 3 de junio de 2005, por el BlueGene/L system desarrollado por IBM^[11] y la Administración Nacional de Seguridad Nuclear del Departamento de Estado de los Estados Unidos, que se encuentra instalado en el Livermore National Laboratory situado en California. Este supercomputador que ya ocupaba el primer puesto en la lista TOP500 publicada seis meses antes, ha sido capaz de mantener esta posición de privilegio ya que en ese tiempo ha multiplicado por dos su tamaño, lo que le ha permitido alcanzar una velocidad de 136.8 Teraflops por segundo (siendo 1 Teraflop aproximadamente igual a 1 billón de operaciones). En la figura 5.1.3 se muestran dos fotografías de este supercomputador



Figura 5.1.3. BlueGene/L system.

En España se encuentra el supercomputador que actualmente ocupa el puesto número 5 en la lista TOP500. Se trata del MareNostrum, cluster desarrollado por IBM el cual se encuentra en el centro de Supercomputación de Barcelona y su velocidad es de 27.91 Tflop/s. En la figura 5.1.4 se muestra una imagen de este equipo.



Figura 5.1.4. Supercomputador MareNostrum.

Además, las mejoras e innovaciones en el campo de la supercomputación no se ralentizan. La mitad de los supercomputadores que ocupaban los 10 primeros puestos en la lista TOP500 en noviembre de 2004 ya no se encuentran en esas posiciones de privilegio. Además, los últimos 201 supercomputadores que se encontraban en la lista en noviembre de 2004 ya no figuran entre los 500 más rápidos en junio de 2005.

El análisis de la lista TOP500 permite extraer información interesante referente a la tecnología utilizada en el momento presente en los supercomputadores. Así, 330 de los 500 supercomputadores de la lista emplean procesadores Intel, 77 utilizan procesadores Power de IBM, 36 usan los PA Risc de Hewlett-Packard, mientras que 25 emplean procesadores AMD. En la figura 5.1.5 se muestra un gráfico con la distribución de los diferentes tipos de procesadores. Por otro lado, la arquitectura más común es la tipo Cluster, a la que pertenecen 304 de los 500 supercomputadores.

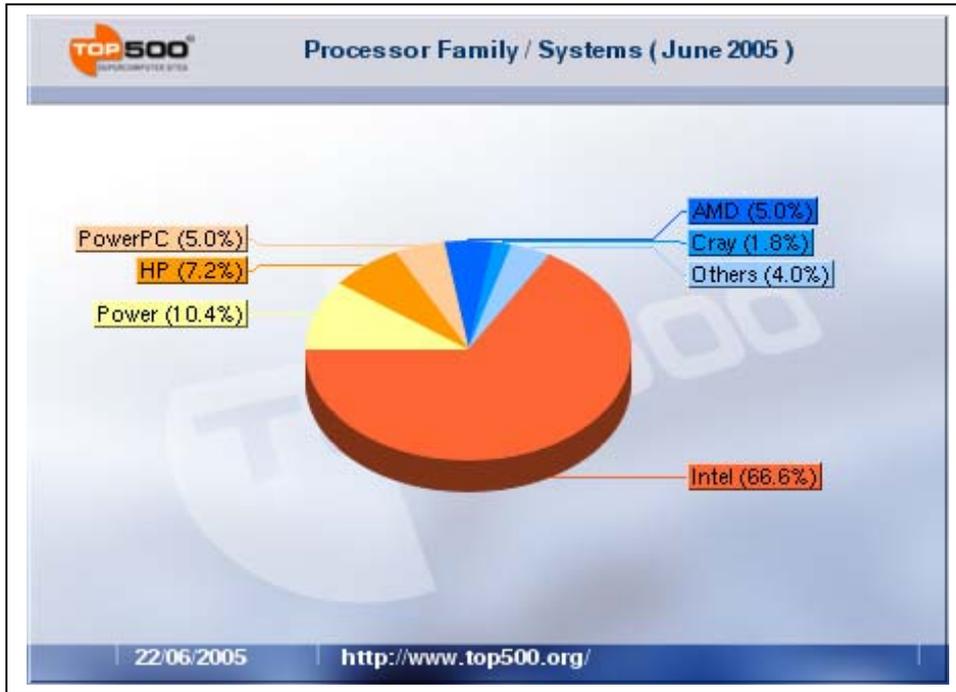


Figura 5.1.5. Tipos de procesadores entre los supercomputadores del TOP500.

En la figura 5.1.6 se muestra como ha evolucionado la velocidad de los supercomputadores situados en los puestos 1 y 500 del TOP500 entre los años 1993 y 2005.

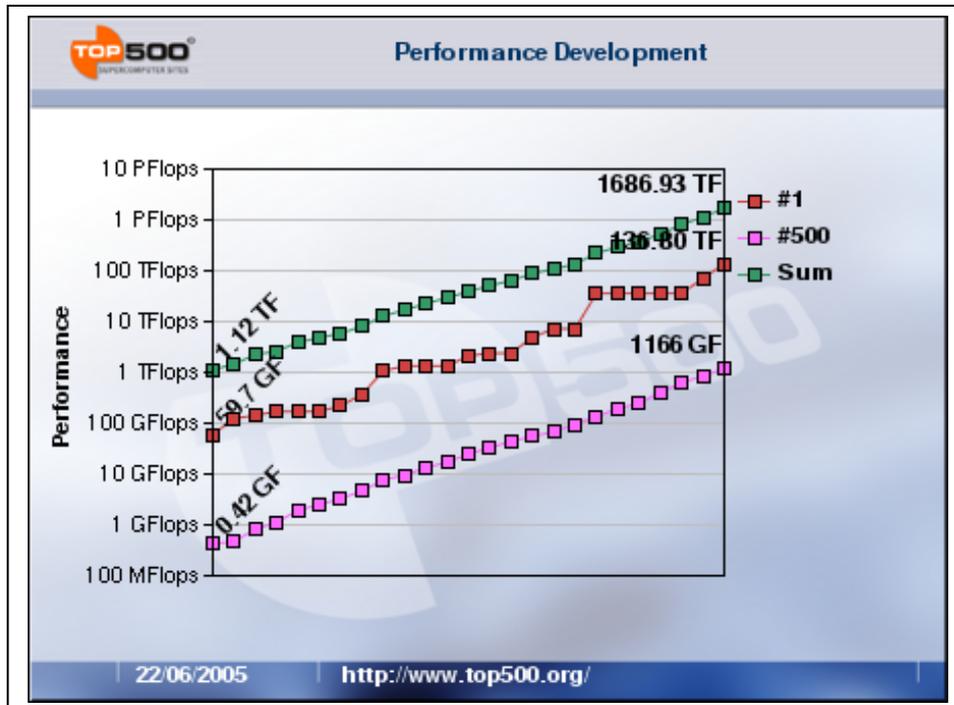


Figura 5.1.6. Velocidad de los supercomputadores del TOP500 1993-2005.

En la figura 5.1.7 se muestra la proyección prevista hasta el año 2017 en la mejora de la velocidad de los supercomputadores.

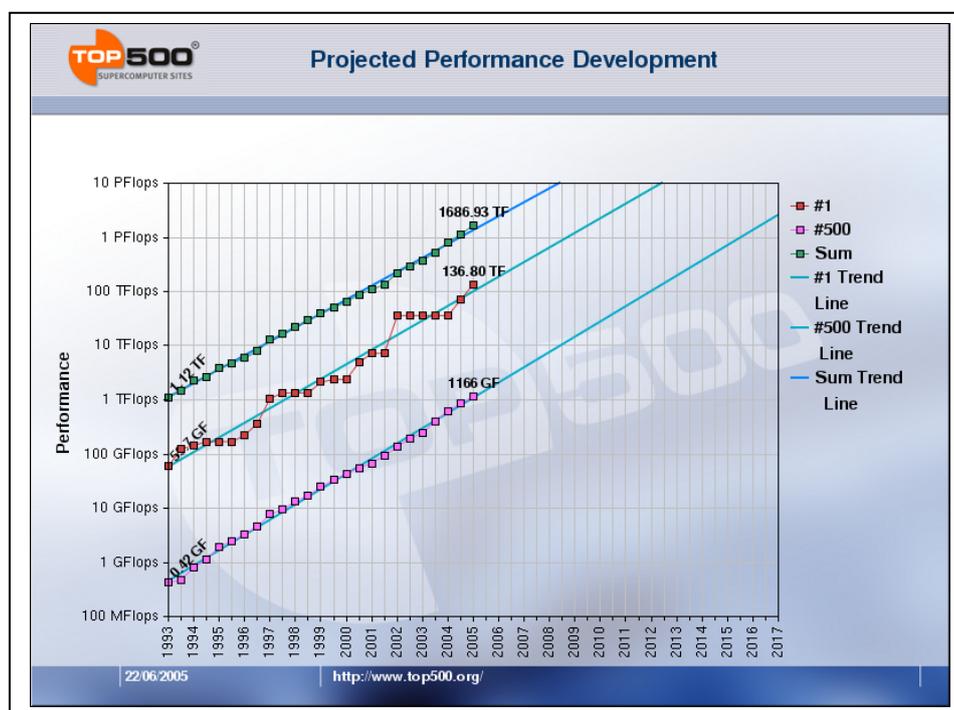


Figura 5.1.7. Previsión de la velocidad de los supercomputadores hasta 2017.

Otra importante cuestión, que explica la tendencia cada vez más fuerte hacia el desarrollo de la computación en paralelo, es el gran desarrollo tecnológico que han experimentado las redes de conexión entre ordenadores, alcanzándose a finales de 2005 velocidades de transmisión de datos del orden de Gbits por segundo. Debido a ello los grupos de varios ordenadores o *clusters* en terminología inglesa, han alcanzado un notable desarrollo, ya que se basan en el concepto de utilizar recursos físicamente distribuidos en varios ordenadores como si fuesen parte de un único ordenador.

La programación en paralelo no es una idea nueva, aunque sus aplicaciones prácticas sí lo sean. Gill^[G2] ya publicó sobre el tema en una fecha tan lejana como 1958, al igual que Holland^[H1] que lo hizo en 1959. Sin embargo, el concepto de paralelismo, fuera del ámbito de la informática, se ha venido aplicando en diversos campos de la ingeniería desde muchos años antes. Así, la fabricación de automóviles es un buen ejemplo de paralelismo. Es imposible pensar que un solo trabajador es el encargado de fabricar el motor, a continuación los faros, seguidamente el sistema electrónico, y así hasta haber fabricado la totalidad de las piezas que constituyen un automóvil, para a continuación

ensamblarlas y obtener el producto final. En la realidad los componentes de un coche son fabricados simultáneamente en diferentes factorías, que entregan sus productos de manera coordinada, para ensamblar el producto final que, en general, se hace de modo simultáneo en varias líneas de montaje. El mismo proceso es el que se aplica en programación distribuida, con el fin de poder resolver problemas complejos en un tiempo razonable.

Para cerrar este apartado introductorio se reproduce la máxima expuesta por Flynn^[F2] y Rudd: *“The continued drive for higher – and higher – performance systems...leads us to one simple conclusion: the future is parallel.”*

5.2 PROGRAMACIÓN EN PARALELO FRENTE A PROGRAMACIÓN SECUENCIAL

Partiendo de la base de que se está tratando con problemas que exigen grandes tiempos de computación para alcanzar una solución, existen dos herramientas desde el punto de vista de la tecnología hardware que pueden ser utilizadas: Superordenadores secuenciales y Superordenadores en paralelo. Se comentan a continuación algunas ventajas y desventajas de ambos según el Maui HPCC.

Superordenadores Secuenciales

- Ventajas
 - Se emplea programación secuencial, que es la utilizada por la mayor parte de los programadores.
 - Existe una experiencia de más de cuarenta años en el desarrollo de compiladores y diversas herramientas.
 - La entrada y salida de datos es relativamente simple.
- Desventajas:
 - Los procesadores individuales de gran rendimiento son extremadamente caros.
 - Se requieren sistemas de refrigeración especiales.
 - El desarrollo de procesadores de altas prestaciones está alcanzando su capacidad límite.

Superordenadores o *Clusters* en paralelo:

- Ventajas:
 - Posibilidad de resolver de modo eficiente problemas imposibles de acometer empleando ordenadores tradicionales.
 - Utilización de procesadores, memoria, discos y sistemas de almacenamiento convencionales.
 - Posibilidad de incorporar nuevos equipos y nuevos desarrollos de hardware para mantener los equipos actualizados tecnológicamente.
 - Coste económico muy inferior a los superordenadores secuenciales.
- Desventajas:
 - Se trata de una tecnología nueva. Los programadores informáticos que no tienen conocimientos específicos no saben como acometer la programación en paralelo.
 - Los programas secuenciales no funcionan en este tipo de ordenadores.
 - Tanto los compiladores como ciertas herramientas no han madurado suficientemente y por consiguiente pueden ocasionar problemas en ciertas ocasiones.
 - La entrada y salida de datos es compleja.

En la presente tesis se ha optado por emplear un cluster de varios ordenadores personales en paralelo por diversas razones, entre las cuales sobresale la económica. Seguidamente se va a profundizar en diversas cuestiones asociadas a la paralelización de un problema general. Así, la computación en paralelo requiere las siguientes tecnologías y herramientas:

- Múltiples procesadores u ordenadores.
- Una red que posibilite la unión entre procesadores.
- Un entorno en el cual desarrollar el procesamiento en paralelo. Este concepto abarca el sistema operativo (windows XP en el presente trabajo), un paradigma para la programación en paralelo (Message Passing en este caso) y un programa en paralelo que ha sido, precisamente, uno de los objetivos a alcanzar en la presente tesis.

Uno de los aspectos claves a la hora de resolver un *Grand Challenge Problem* es el desarrollar correctamente el programa en paralelo que permita resolver el problema en un tiempo razonable. La programación en paralelo, con carácter general, requiere:

- Descomponer en varias partes el algoritmo de resolución y/o los datos del problema.
- Descomponer el problema en problemas parciales que son resueltos por varios procesadores de modo simultáneo.
- Se debe tener en consideración la arquitectura paralela empleada, así como el tipo de comunicaciones entre procesadores que será utilizada.

Existen diversos tipos de computadoras en paralelo, una explicación exhaustiva de los distintos tipos y prototipos desarrollados en los últimos años puede encontrarse en Wilkinson^[W1] y Allen. En este apartado se va a explicar, muy brevemente, en que consiste un *cluster* de ordenadores y algunas de sus ventajas, ya que es el tipo de computador en paralelo empleado para obtener los resultados que se presentan en esta tesis. Los primeros trabajos con un grupo de ordenadores personales o workstations conectados en red fueron llevados a cabo a finales de los años 80 y principios de los años 90 del siglo pasado por diversas universidades como el proyecto NOW (Networks of Workstations) desarrollado por Anderson^[A1], Culler y Patterson en la universidad de Berkeley. Rápidamente se puso de manifiesto uno de sus principales atractivos: el bajo coste económico en comparación con los superordenadores, tanto secuenciales como en paralelo. Se pueden citar las siguientes ventajas desde un punto de vista técnico.

- Ordenadores personales de gran eficacia pueden ser adquiridos a un coste bajo.
- Los nuevos procesadores que van saliendo al mercado pueden incorporarse fácilmente al sistema. Además, el sistema puede crecer añadiendo nuevos ordenadores, discos duros,...etc.
- El software desarrollado previamente puede ser utilizado nuevamente sin ninguna modificación o modificaciones de alcance muy limitado.

5.3 PRINCIPIOS DE DISEÑO DE ALGORITMOS EN PARALELO

Un algoritmo secuencial es una sucesión de operaciones básicas las cuales permiten resolver un problema utilizando una computadora secuencial. Por otro lado, un algoritmo en paralelo permite resolver un cierto problema usando múltiples procesadores. Sin embargo, diseñar un algoritmo en paralelo requiere algo más que especificar las operaciones a realizar. En particular, un algoritmo en paralelo posee la característica de la concurrencia, por tanto el programador debe especificar qué conjuntos de operaciones pueden ser llevadas a cabo de modo simultáneo. En la práctica, el diseño de un algoritmo en paralelo lleva aparejado todas o parte de las siguientes acciones según Grama^[G1], Gupta, Karypis y Kumar:

- Identificar aquellas partes del problema que pueden resolverse de modo simultáneo.
- Distribuir las partes concurrentes del programa en procesos múltiples ejecutables en paralelo.
- Planificar la entrada y salida de datos del programa.
- Organizar el acceso a los datos compartidos por varios procesadores.
- Sincronizar los procesos en varios niveles de la ejecución del programa en paralelo.

En general, ciertos subprocesos pueden necesitar datos que han sido calculados mediante otros subprocesos distintos, y por tanto deben aguardar hasta que esos otros subprocesos hayan concluido.

En número y tamaño de los subprocesos en los que puede dividirse un problema determina la granulometría de la descomposición. Si la descomposición se ha realizado en un número grande de pequeños subprocesos se dice que es de grano fino. Por el contrario, si ésta se ha realizado en un pequeño número de subprocesos grandes se dice que es de grano grueso. Un concepto íntimamente relacionado con el de granulometría de la descomposición es el de grado de concurrencia.

El máximo grado de concurrencia es el mayor número de subprocesos que pueden ser llevados a cabo de modo simultáneo en un programa en paralelo. En la mayoría de los

casos el máximo grado de concurrencia es inferior al número de subprocesos debido a las relaciones de dependencia que pueden darse entre esos subprocesos.

Un indicador de mayor utilidad es el grado de concurrencia medio, que es el número medio de subprocesos que pueden ser llevados a cabo de modo simultáneo durante la ejecución del programa. En general, tanto los grados máximo y medio de concurrencia, aumentan cuanto mayor es la granulometría del programa.

5.4 TIPOS DE COMPUTADORAS EN PARALELO

Según la documentación del curso de introducción a la computación en paralelo del laboratorio Ames, elaborada por Turner^[12], que pertenece al Departamento de Energía de los Estados Unidos de América, hoy en día existen muchos tipos de computadoras disponibles en el mercado, desde ordenadores escalares, es decir, dotados de un único procesador, hasta computadoras masivamente paralelas que cuentan con miles de microprocesadores. A continuación se van a destacar algunas de las características más importantes de los tipos fundamentales de computadoras existentes.

- Ordenadores Escalares (*Scalar Computers*):

Los típicos ordenadores personales o las estaciones de trabajo son computadoras escalares ya que disponen de un único procesador. Los ordenadores escalares pueden tener procesadores muy diferentes y también emplear una gran variedad de sistemas operativos. Algunos ejemplos de procesadores que han sido utilizados son: Intel Pentium, AMD athlons, IBM Power3, Sun Ultra Sparc3 o Motorota G4. Algunos de los sistemas operativos empleados en computadoras escalares han sido: Linux, MS windows, FreeBSD, NetBSD, Alx, Solaris y Apple Macintosh OS entre otros.

- Procesadores Vectoriales en Paralelo (*Parallel Vector Processors*)

Las grandes supercomputadoras utilizadas en décadas pasadas se construyeron tomando como base los procesadores vectoriales, que fueron desarrollados por Seymour Cray. Actualmente son muy pocas las computadoras que utilizan procesadores vectoriales y todas ellas contienen procesadores vectoriales en paralelo. Algunos ejemplos de

computadoras con procesadores vectoriales en paralelo son: Cray SV1, que cuenta con 100 procesadores y Fujitsu VSX4 que dispone de 64 procesadores.

Los procesadores vectoriales se caracterizan por operar con grandes vectores de datos de modo simultáneo. En este tipo de máquinas el compilador vectorializa automáticamente las tareas en bloques siempre que esto es posible. Por tanto, dado que los compiladores hacen la mayor parte de la paralelización de modo automático, el programador sólo debe concentrarse en aquellas partes del problema en las cuales el compilador no es capaz de sectorizar las operaciones necesarias.

- Multiprocesadores de Memoria Compartida (*Shared-memory Multiprocessors*)

Los sistemas de multiprocesadores de memoria compartida, también llamados SMP, que son las siglas de su nombre en inglés, disponen de más de un procesador secuencial, de modo que todos los procesadores comparten la misma memoria y el mismo bus de memoria. En esta categoría de ordenadores puede incluirse casi cualquier cosa, desde un ordenador personal Intel con doble procesador, hasta una computadora Origin3000 con 256 procesadores.

En un sistema tipo SMP que esté diseñado correctamente, el bus de memoria debe ser lo suficientemente rápido como para mantener el flujo de datos a todos los procesadores. Además, también se requieren grandes memorias “cache” para permitir que cada procesador almacene datos en la memoria local mientras los otros procesadores usan el bus de memoria.

Los compiladores disponibles para este tipo de máquinas permiten la paralelización automática de algunos programas, aunque esto no es muy frecuente por lo que la alternativa más recomendable es que el usuario programe él mismo el código paralelo, operación que es ciertamente compleja en este tipo de sistemas.

- Procesador Masivamente Paralelo de Memoria Distribuida (*Distributed Memory Massively Parallel Processor*)

Este tipo de computadoras se caracteriza por estar constituido por un número importante de nodos individuales, cada uno de los cuales es, en lo esencial, una computadora

independiente: cada nodo debe contener al menos un procesador, su propia memoria y una conexión a la red que une todos los nodos.

Los procesadores masivamente paralelos tradicionalmente están compuestos por cientos o miles de nodos individuales. Algunos ejemplos de este tipo de sistemas son: Cray T3E que tiene 1000 nodos, el IBM SP con 512 nodos y el Intel Paragon que está constituido por 1836 nodos.

Estas supercomputadoras son programadas usando librerías de paso de mensajes específicas para cada equipo o las MPI (*message passing interface*) estándar. El uso de librerías MPI facilita la portabilidad de las aplicaciones de un equipo a otro, aunque en general, el uso de estas últimas, hace que las aplicaciones se ejecuten significativamente más despacio que cuando se emplean las librerías específicamente desarrolladas para cada equipo.

- *Clusters* de Ordenadores (*Cluster Computers*)

Las computadoras con memoria distribuida también pueden ser construidas utilizando estaciones de trabajo u ordenadores personales. Su principal característica es su menor coste económico frente a los equipos que usan procesadores masivamente paralelos.

Algunos ejemplos de *clusters* de ordenadores son: *Octopus*^[01] que consta de 16 nodos Pentium III, *Alice* que está configurado por 64 nodos con doble procesador Pentium e *IBM Cluster*^[12] que está compuesto por 52 procesadores Power3 de IBM. En la figura 5.4.1 se muestra una fotografía del *IBM Cluster*

Los clusters de ordenadores presentan unos tiempos de comunicación y de latencia mayores que los sistemas tradicionales de procesadores masivamente paralelos. Esto es debido a que es necesario el transporte de información a través de la red que conecta los nodos, lo cual consume cierta cantidad de tiempo. El tiempo empleado en la comunicación de un mensaje entre dos nodos (ordenadores) de una red es la suma del tiempo empleado en preparar el mensaje para ser transmitido más el tiempo empleado por el propio mensaje para llegar a su destino a través de la red. Los parámetros fundamentales que determinan la latencia de las comunicaciones son los siguientes:

- Tiempo de arranque: tiempo necesario para manejar un mensaje en los nudos emisor y receptor. Esto incluye el tiempo necesario para preparar el mensaje, para ejecutar el algoritmo de enrutamiento y, finalmente, para establecer la unión entre el nodo y el enrutador.
- Tiempo de viaje: cuando un mensaje parte desde un nodo, emplea una cierta cantidad de tiempo en alcanzar el nodo siguiente. Este tiempo también recibe el nombre de latencia de nodo.
- Tiempo de transferencia por palabra: si el ancho de banda del canal es de r palabras por segundo, cada palabra emplea $1/r$ segundos en pasar a través de la red.



Figura 5.4.1. IBM Cluster, Iowa State University.

- Computación en Red (*Network Computing*)

La computación en red o a través de internet se realiza utilizando una mezcla heterogénea de diferentes estaciones de trabajo que se encuentran en localizaciones geográficas distintas. La idea que subyace bajo este tipo de técnica es la de aprovechar los tiempos durante los cuales los ordenadores personales o las estaciones de trabajo se encuentran inactivos. Desafortunadamente, estas técnicas sólo pueden utilizarse en un número reducido de aplicaciones debido a la baja velocidad de comunicación en internet, las grandes latencias y la diferente potencia de las CPU's. Actualmente, la Comisión Europea financia el proyecto EGEE^{[C2][E1]} (Enabling Grids for E-science) en

el que una red *grid* de 19000 CPU's distribuidas entre más de 200 localizaciones están las 24 horas del día a disposición de la comunidad científica y empresarial.

- Metacomputación (*Metacomputing*)

Es una idea similar a la anterior pero menos ambiciosa. El propósito que se persigue es utilizar supercomputadores que se encuentran en distintas ubicaciones geográficas para ejecutar conjuntamente el mismo programa.

5.5 ORDENADORES INTERCONECTADOS FORMANDO UNA PLATAFORMA DE COMPUTACIÓN O *CLUSTERS*

A continuación se comentan, más detalladamente que en el apartado precedente, algunos aspectos relativos a la génesis de los *clusters* de ordenadores, así como a sus principales características. El motivo de la profundización en este tipo de computadoras en paralelo reside en que éste ha sido el tipo de computador empleado para la realización de los cálculos de la presente tesis.

A finales de los años 80 y principios de los 90 del pasado siglo algunas universidades empezaron a trabajar en la realización de una plataforma de bajo coste para la realización de cálculos en paralelo. Con esa finalidad se emplearon grupos de ordenadores conectados en red para formar un *cluster of workstations (COW's)* o una *network of workstations (NOW's)*. Véase el trabajo llevado a cabo en la universidad de Berkeley por Anderson^[A1], Culler y Pattersen. Esta idea de usar ordenadores personales conectados mediante una red para hacer computación en paralelo era, y es, una idea muy atractiva ya que se trata de unos equipos que se usan de modo sistemático en la computación general.

La utilización de ordenadores personales conectados en red tiene una serie de ventajas sobre las plataformas diseñadas específicamente para realizar computación en paralelo. Algunas de ellas son las siguientes, como ya se ha mencionado anteriormente:

- Ordenadores personales de gran eficacia pueden ser adquiridos a un coste bajo.

- Los nuevos procesadores que van saliendo al mercado pueden incorporarse fácilmente al sistema. Además, el sistema puede crecer añadiendo nuevos ordenadores, o discos duros, por ejemplo.
- El software desarrollado previamente puede ser utilizado nuevamente sin ninguna modificación o con modificaciones de alcance muy limitado.

En los años en que se estaban desarrollando este tipo de plataformas se creó la necesidad de un software que permitiese el uso de los ordenadores personales de modo conjunto. En consecuencia se desarrolló la técnica de transferencia de mensajes (*message-passing*). El proyecto más importante dedicado al intercambio de mensajes en aquellos años fue *Parallel Virtual Machine (PVM)*, que permitió la definición del interfaz estándar de intercambio de mensajes (*Message-Passing Interface*). En las plataformas que funcionan de esta manera, las interacciones entre los procesos que son ejecutados en los distintos equipos deben coordinarse mediante mensajes. Este intercambio de mensajes es utilizado para transferir datos o para sincronizar las acciones de los diferentes procesadores.

Normalmente, el método empleado para la comunicación entre ordenadores conectados en red ha sido el de tipo Ethernet, que originalmente consistía en un único cable a través del cual estaban unidas todas las computadoras. Actualmente ese único cable ha sido sustituido por una serie de switches, manteniéndose el protocolo de Ethernet. Un switch proporciona conexiones directas entre ordenadores para permitir conexiones múltiples simultáneas.

En una conexión de tipo Ethernet la transferencia de datos entre origen y destino se lleva a cabo mediante series de paquetes (un bit tras otro, a través del mismo cable). Cada paquete contiene la dirección del emisor, la dirección del destino y los datos. El formato Ethernet básico se muestra a continuación.

Frame check sequence (32 bits)	Data (variable)	Type (16 bits)	Source address (48 bits)	Destination address (48 bits)	Preamble (64 bits)
--------------------------------------	--------------------	-------------------	-----------------------------	----------------------------------	-----------------------

El preámbulo mostrado en el esquema anterior tiene como finalidad la sincronización. El tamaño máximo de los datos es de 1,5 Kbytes, aunque existen técnicas, como la llamada *jumbo frames* desarrollada por Alteron Networks, que permiten aumentar ese tamaño hasta 9 Kbytes. Si los datos a enviar superan el tamaño máximo se subdividen en varios paquetes, cada uno con su dirección de origen y destino. Se debe tener presente que la latencia de mensaje cuando se emplea Ethernet es significativa.

Una cuestión que también es importante es el de los protocolos empleados en las comunicaciones entre ordenadores. TCP/IP (*Transmission Control Protocol/Internet Protocol*) es el estándar que establece las reglas que emplean los ordenadores conectados en red para la transmisión de datos. Cada ordenador tiene asignada una dirección para su identificación. TCP/IP define el formato de esas direcciones como un número de 32 bits dividido en cuatro números de 8 bits. La información relativa a las direcciones IP de los equipos es muy importante para configurar un cluster de ordenadores adecuadamente ya que son estas direcciones las que habitualmente se emplean para la comunicación entre equipos.

Conviene hacer mención, en el marco de este repaso general a los cluster de ordenadores, de un tipo concreto llamado *Beowulf*. Se ha tratado de un proyecto modesto, pero que ha tenido gran influencia. El proyecto Beowulf fue desarrollado en el NASA Goddard Space Flight Center en 1993 y su objetivo fundamental era crear un cluster de ordenadores económico para lo que se emplearon sólo componentes disponibles en el mercado convencional de equipos y de coste bajo, véase Sterling^{[S1][S2]}. Habitualmente se utiliza Linux como sistema operativo para este tipo de plataformas, aunque últimamente se está empezando a emplear Windows como sistema operativo.

5.6 POTENCIAL DE AUMENTO DE LA VELOCIDAD DE COMPUTACIÓN

Hasta ahora se ha puesto de manifiesto que una de las formas más solventes para resolver problemas que requieren gran poder de computación en un tiempo razonable es la aplicación de técnicas de paralelización, empleando para ello computadores en paralelo. Sin embargo, con el fin de apreciar la potencia de las técnicas de paralelización en su justa medida, conviene tener una idea certera acerca de qué disminución de tiempos de cálculo es razonable esperar.

5.6.1 Factor de aceleración

Cuando se plantea un esquema de resolución de un determinado problema en paralelo la pregunta habitual es cuánto más rápido se va a resolver el problema en consideración. Para contestar a esa pregunta se debe realizar una comparación entre el mejor esquema secuencial que permite resolver el problema planteado y el esquema equivalente en paralelo. El factor de aceleración^[W1] $S(p)$, siendo p el número de procesadores disponibles, permite cuantificar la mejora relativa, y se define de la manera siguiente:

$$S(p) = \frac{\text{tiempo de ejecución utilizando el mejor esquema secuencial}}{\text{tiempo de ejecución utilizando el esquema en paralelo con } p \text{ procesadores}} \quad (5.6.1)$$

Se denota el tiempo de ejecución con el mejor algoritmo secuencial como t_s , mientras que t_p es el tiempo de ejecución utilizando programación en paralelo. Por tanto:

$$S(p) = \frac{t_s}{t_p} \quad (5.6.2)$$

Conviene tener en cuenta que el algoritmo empleado en la programación en paralelo no tiene necesariamente que ser el mismo que el utilizado en la programación secuencial.

La máxima aceleración que puede ser conseguida es p , siendo p el número de procesadores disponibles (aceleración lineal). Esta aceleración máxima se consigue

cuando el problema puede ser dividido en procesos de igual duración, de tal modo que cada proceso es ejecutado por uno de los procesadores sin que se consuma tiempo en ninguna otra operación. Por consiguiente:

$$\text{máx } S(p) = \frac{t_s}{t_s/p} = p \quad (5.6.3)$$

5.6.2 Eficiencia

Un segundo concepto, de gran importancia, es el de la eficiencia, E , del sistema, que permite conocer la duración de los procesos empleados. Se define del modo siguiente:

$$E = \frac{\text{tiempo de ejecución mediante programación secuencial}}{\text{tiempo de ejecución mediante programación en paralelo} \times \text{n}^\circ \text{ de procesadores}} \quad (5.6.4)$$

que también puede escribirse

$$E = \frac{t_s}{t_p \times p} = \frac{S(p)}{p} \leq 1 \quad (5.6.5)$$

5.6.3 Valor máximo de la aceleración

Existen diversos factores que consumen tiempo en un programa en paralelo, los cuales limitan la aceleración que puede llegar a alcanzarse respecto a la programación secuencial. Esos factores se relacionan a continuación:

- Existen periodos de tiempo durante los cuales algunos de los procesadores están inactivos.
- En ocasiones es necesario realizar cálculos en la versión en paralelo que no se requieren en el programa secuencial.
- Tiempo necesario para las comunicaciones entre procesadores.

Se asume por tanto que hay ciertas partes del problema que no pueden ser descompuestas en procesos concurrentes y que en consecuencia deben ser llevadas a

cabo secuencialmente. Si la fracción del tiempo de computación que no puede ser objetos de paralelización es f y no existen otros consumos de tiempo, el tiempo necesario para resolver el problema empleando p procesadores es $ft_s + (1-f)t_s/p$, como puede apreciarse en la figura 5.6.1.

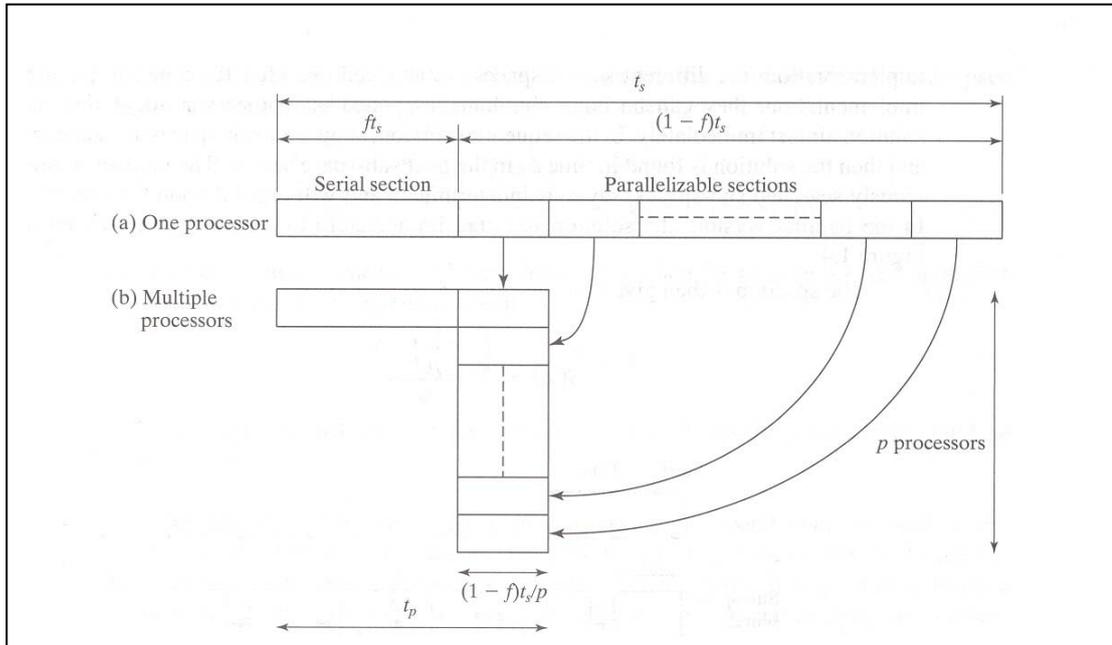


Figura 5.6.1. Paralelización de un problema secuencial.

Teniendo en cuenta las premisas anteriores, el factor de aceleración es:

$$S(p) = \frac{t_s}{ft_s + (1-f)t_s/p} = \frac{p}{1 + (p-1)f} \quad (5.6.6)$$

La ecuación anterior es conocida como la ley de Amdahl^[A2].

En la figura 5.6.2 se presenta el gráfico que relaciona el factor de aceleración $S(p)$ en función de p para distintos valores de f . Se observa que para que la aceleración sea significativa se requiere que la parte del problema susceptible de ser paralelizada debe ser también significativa. Se observa también como, incluso con un número infinito de procesadores, la máxima aceleración que puede ser alcanzada está limitada por el valor $1/f$, es decir:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} S(p) = \frac{1}{f} \quad (5.6.7)$$

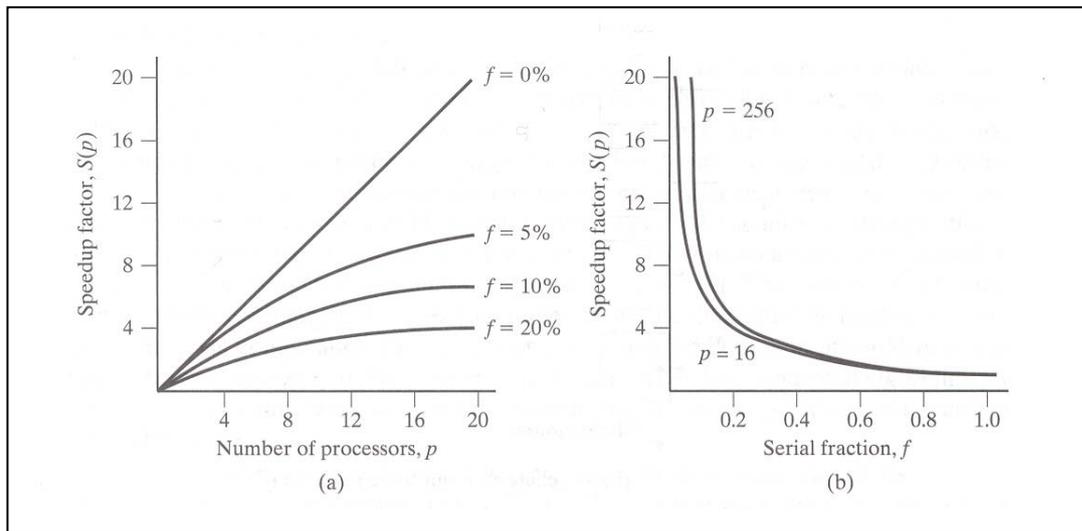


Figura 5.6.2. a) Aceleración en función del número de procesadores. b) aceleración en función de f .

5.7 EL PROGRAMA DIOPTICA

De acuerdo con todo lo expuesto anteriormente, en la investigación que ha conducido a la redacción de este documento se comenzaba estableciendo la formulación de los análisis de sensibilidad de la velocidad de flameo de puentes colgantes con secciones compuestas por uno o varios cajones, utilizando como variables de diseño los espesores de las mismas, y en consecuencia, considerando la masa del tablero variable. El problema de optimización planteado ha consistido en minimizar el área de la sección transversal del tablero en función de los espesores (e_i con $i = 1, \dots, n$) de las chapas que constituyen los cajones. La función objetivo se escribe en la forma:

$$\min F = A(e_1, \dots, e_n) \quad (5.7.1)$$

Mientras que las condiciones del problema son:

- Que los espesores de las chapas e_1, \dots, e_n estén en el interior de un cierto intervalo de valores, es decir:

$$e_{\min} \leq e_i \leq e_{\max} \quad (5.7.2)$$

- Que la velocidad de flameo sea mayor o igual que un cierto valor crítico, por lo tanto:

$$U_f \geq U_{f,cr} \quad (5.7.3)$$

- Que el incremento de la flecha en centro de vano debido a las sobrecargas de uso sea inferior o igual a una determinada magnitud:

$$w_c \leq w_{c,max} \quad (5.7.4)$$

Todo ello se deseaba llevar a cabo en un entorno de procesamiento distribuido ya que el problema planteado en estos términos puede ser considerado un *Grand Challenge Problem* y la utilización de técnicas de paralelización podría facilitar que los tiempos de computación necesarios para obtener la solución del problema se mantengan en intervalos razonables.

La herramienta informática elaborada para acometer el proceso de diseño óptimo consiste en un código de computador denominado DIOPTICA: programación Distribuida de la Optimización de PuenTes Incluyendo Condiciones Aeroelásticas. Dicho código, además de los módulos originales resultantes de la investigación realizada, contiene la actualización paralelizada del código FLAS desarrollado por Jurado^[1] que permite obtener la respuesta aeroelástica de puentes soportados por cables y las sensibilidades semianalíticas de la velocidad de flameo y de la frecuencia reducida respecto a las inercias a flexión y a torsión del tablero empleando programación secuencial. Asimismo se ha actualizado y paralelizado el programa ADISNOL3D, elaborado por Mosquera^[M2], el cual posibilita la obtención de las frecuencias y modos propios de vibración de una estructura en teoría de segundo orden, así como el cálculo analítico de las sensibilidades de las frecuencias y modos propios de vibración también en teoría de segundo orden. Ambos programas consideran las mismas variables de diseño, asumiendo la masa del tablero como constante. Utilizando las rutinas de FLAS y ADISNOL3D, DIOPTICA generaliza el problema del análisis de sensibilidad

incorporando el área de la sección transversal A como variable de diseño. Consecuentemente, ahora es posible considerar la masa del tablero como variable.

Por tanto, en DIOPTICA se ha implementado la formulación analítica presentada en los capítulos precedentes. Para desarrollar el código del programa se han integrado en una única aplicación dos lenguajes de programación, véase Nieto^[N1]. El interfaz de usuario, las comunicaciones, las estructuras de control principales y las llamadas al algoritmo de optimización de ADS se han programado mediante VISUAL BASIC, mientras que los algoritmos de cálculo más complejos han sido programados mediante DLL's (*Dynamic-Link Libraries*) en FORTRAN.

Para realizar la optimización se han empleado las rutinas del programa ADS^[V2] (*A Fortran Program for Automated Design Synthesis*) que han sido convertidas en DLL's (*Dynamic Link Libraries*) para ser ejecutadas desde el programa maestro escrito en Visual Basic. ADS es un programa de ordenador concebido para resolver secuencialmente problemas generales de optimización numérica. ADS debe ser invocado por un programa confeccionado por el usuario, y debe tenerse en cuenta que ADS en ningún caso realiza llamadas a subrutinas externas a su código. En concordancia con lo anterior, ADS devuelve el control al programa principal cada vez que requiere información de funciones o gradientes. La información requerida es evaluada en ese momento y a continuación se llama nuevamente a ADS si el proceso iterativo de optimización no ha concluido.

Los algoritmos programados en ADS son métodos basados en el gradiente, se requiere por tanto el cálculo de los gradientes, es decir las sensibilidades respecto a las variables de diseño consideradas, tanto de la función objetivo como de las condiciones. ADS tiene un cierto número de parámetros internos que controlan el proceso seguido en la optimización. Todos esos parámetros tienen asignados valores por defecto que pueden ser cambiados por el usuario si éste así lo desea. De entre los diversos métodos de optimización implementados en ADS se ha escogido el método de las direcciones eficientes modificado, propuesto por Vanderplaats^[V3].

Como se mostró en el punto 3.5, el proceso de diseño óptimo de una estructura sigue el diagrama que se reproduce en la figura 5.7.1.

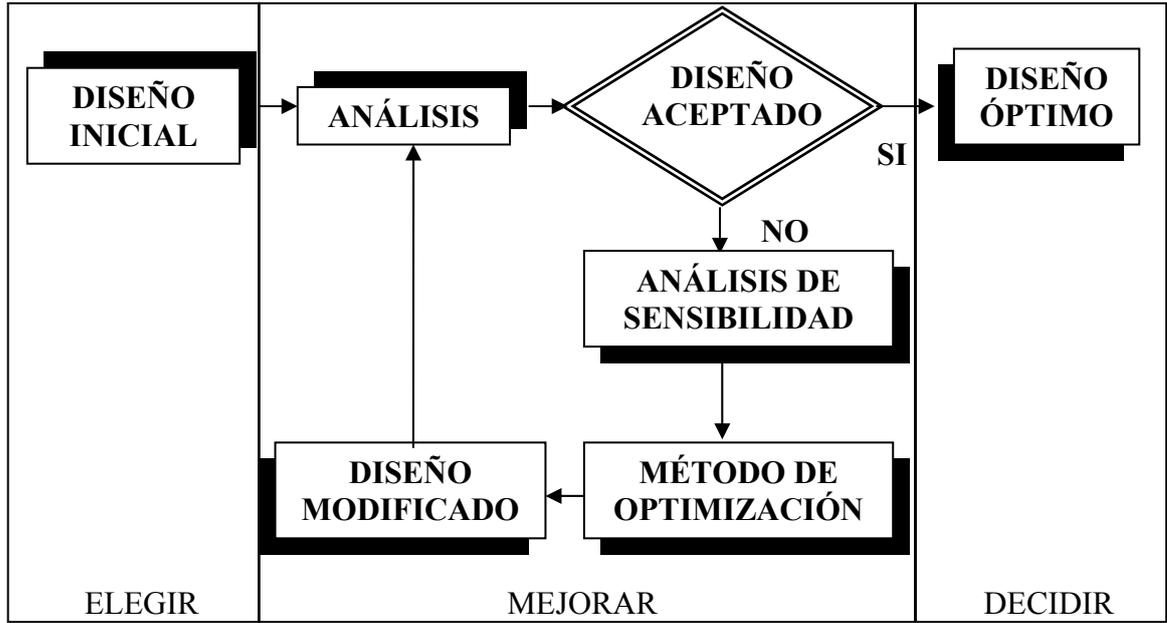


Figura 5.7.1. Proceso de diseño óptimo

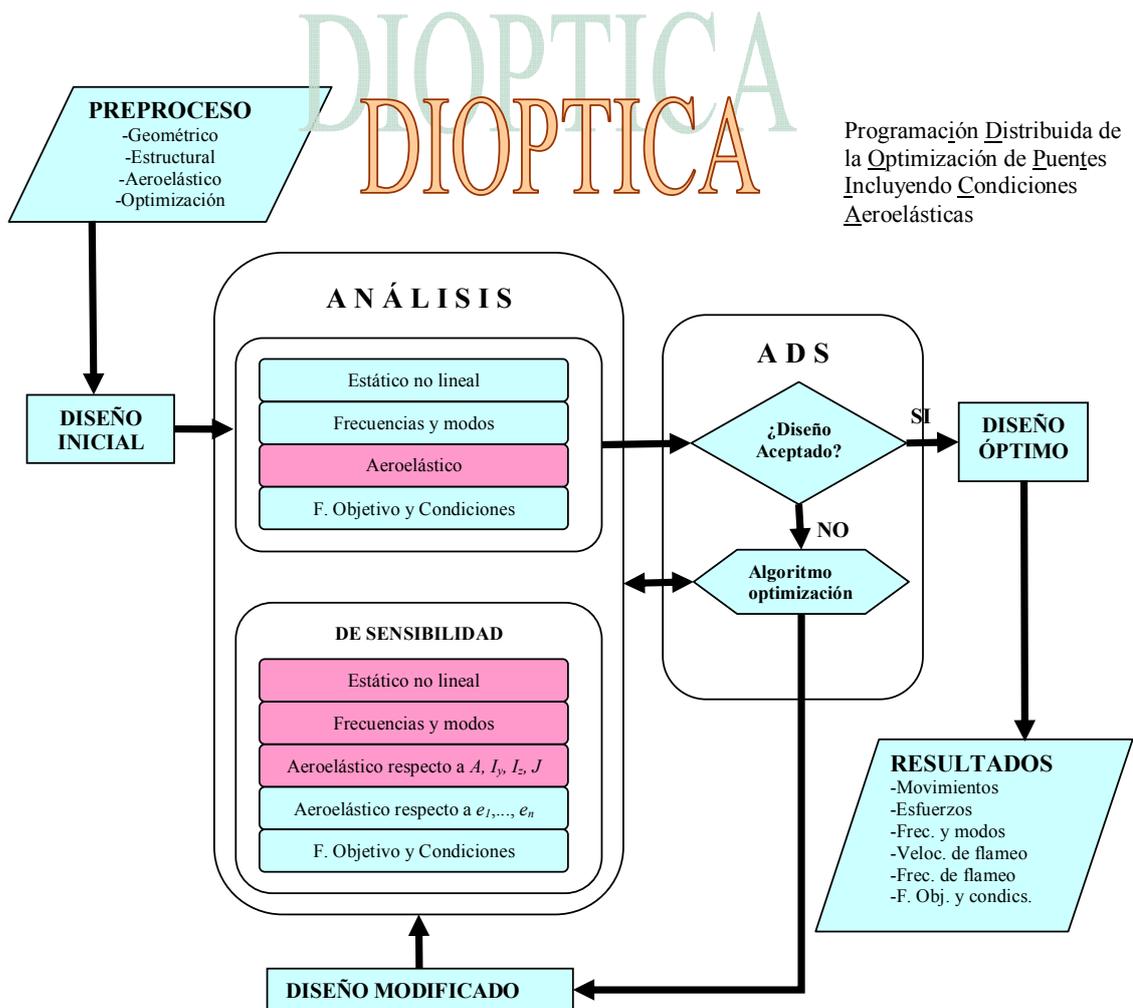


Figura 5.7.2. Diagrama de flujo programa DIOPTICA.

Siguiendo un esquema similar, en la figura 5.7.2 se muestra un diagrama de flujo en el que quedan recogidas las tareas fundamentales que son llevadas a cabo por el programa DIOPTICA para obtener el diseño óptimo de puentes considerando condiciones de tipo aeroelástico. En esa figura, los procesos que son llevados a cabo utilizando programación distribuida están marcados con color rosa.

El método de las direcciones eficientes, a lo largo del proceso de optimización, requiere en ocasiones la evaluación de la función objetivo y de las condiciones sin actualizar los gradientes, por lo que se debe realizar, entre otras operaciones, un análisis aeroelástico de la estructura. Sin embargo, en otras ocasiones se deben obtener los gradientes de la función objetivo y las condiciones, por lo que además de realizar el análisis aeroelástico, se deben calcular también las sensibilidades de la función objetivo y las condiciones respecto a las variables de diseño consideradas.

A continuación se pasa revista a los principales módulos que constituyen el programa. Debe tenerse en cuenta que (*S*) significa que el módulo considerado realiza operaciones secuenciales, mientras que (*P*) significa que las operaciones son llevadas a cabo en paralelo.

- *Módulo de preproceso (S)*

Para la generación de la geometría de los elementos barra de la estructura se emplea el preprocesador gráfico GEOSTAR del programa comercial de elementos finitos COSMOS/M^[C3]. Con ese programa se define también la orientación de las barras, el tipo de sección y material y las condiciones de contorno. Se realiza además un preproceso complementario del anterior para la definición de las propiedades de los materiales, tipos y características de las diferentes secciones, datos geométricos de la sección transversal, variables de diseño a considerar para el análisis de sensibilidad, datos aeroelásticos del puente y coeficientes de flameo. Como resultado queda definido el diseño inicial que se almacena en una serie de ficheros de texto.

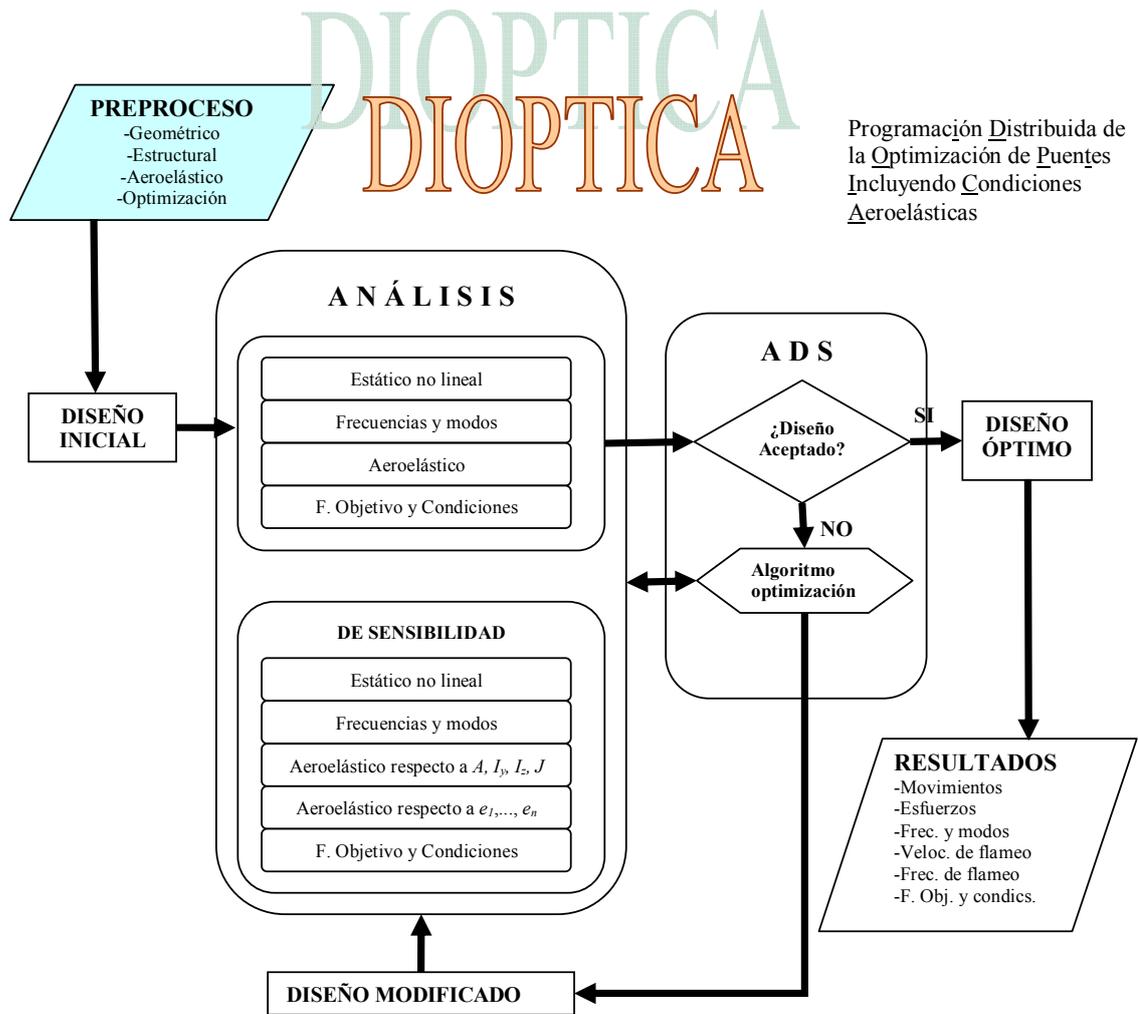


Figura 5.7.3. Ubicación del módulo de preprocesado en el diagrama general de flujo.

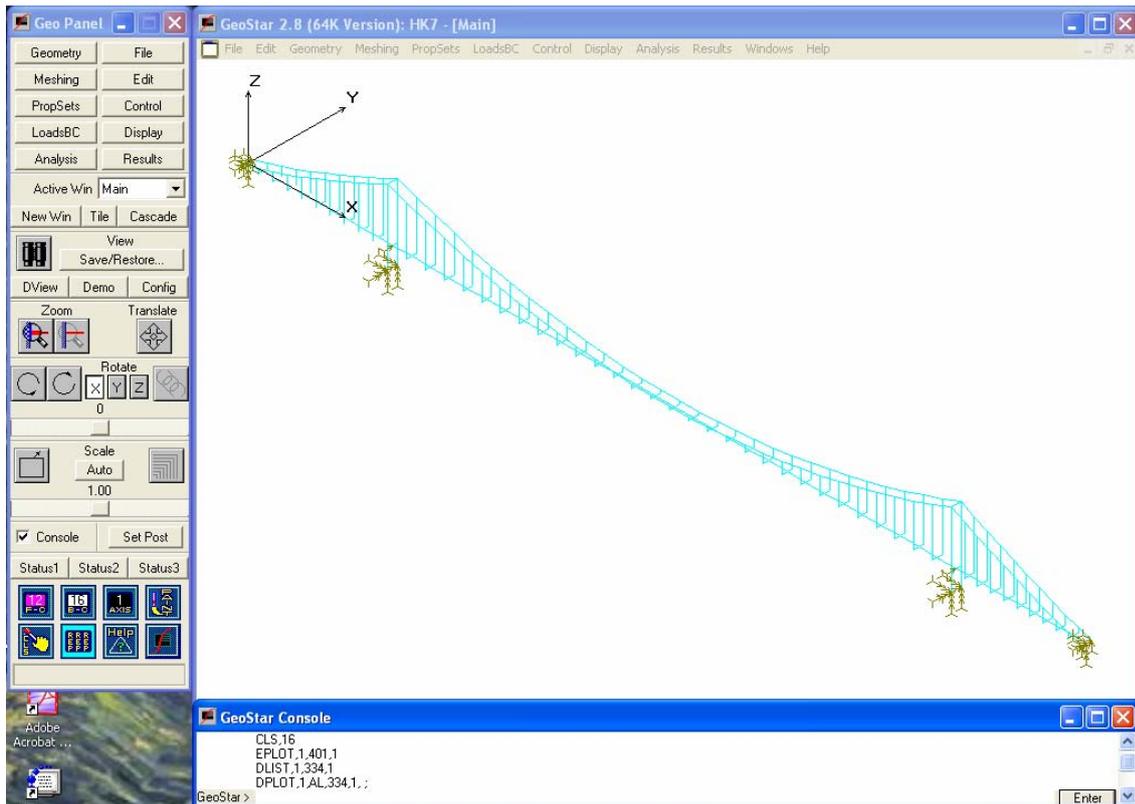


Figura 5.7.4. Modelo de elementos finitos de un puente colgante realizado con el preprocesador gráfico GEOSTAR.

- *Módulo de análisis estático no lineal (S)*

Este módulo permite resolver el problema estructural estático en teoría de segundo orden, teniendo en cuenta la no linealidad geométrica, definido por la ecuación

$$\mathbf{p} = \mathbf{K}_{\text{nolin}} \mathbf{u} \tag{5.7.5}$$

Donde \mathbf{p} representa el vector de cargas en nudos, \mathbf{u} es el vector de movimientos nodales y $\mathbf{K}_{\text{nolin}}$ es la matriz de rigidez en la que se tiene en cuenta la no linealidad geométrica. Para la resolución de los sistemas de ecuaciones se ha utilizado una factorización empleando el método de Cholesky y un algoritmo de resolución de sistemas de ecuaciones tipo SPOSL, véase Dongarra^[D1] et al. Los resultados que se obtienen son los esfuerzos en todas las barras y los movimientos en todos los nudos de la estructura, que se emplearán, entre otras cosas, para evaluar condiciones en movimientos durante el proceso de diseño óptimo. En la figura 5.7.5 se muestra la ubicación de este módulo en el diagrama de flujo general.

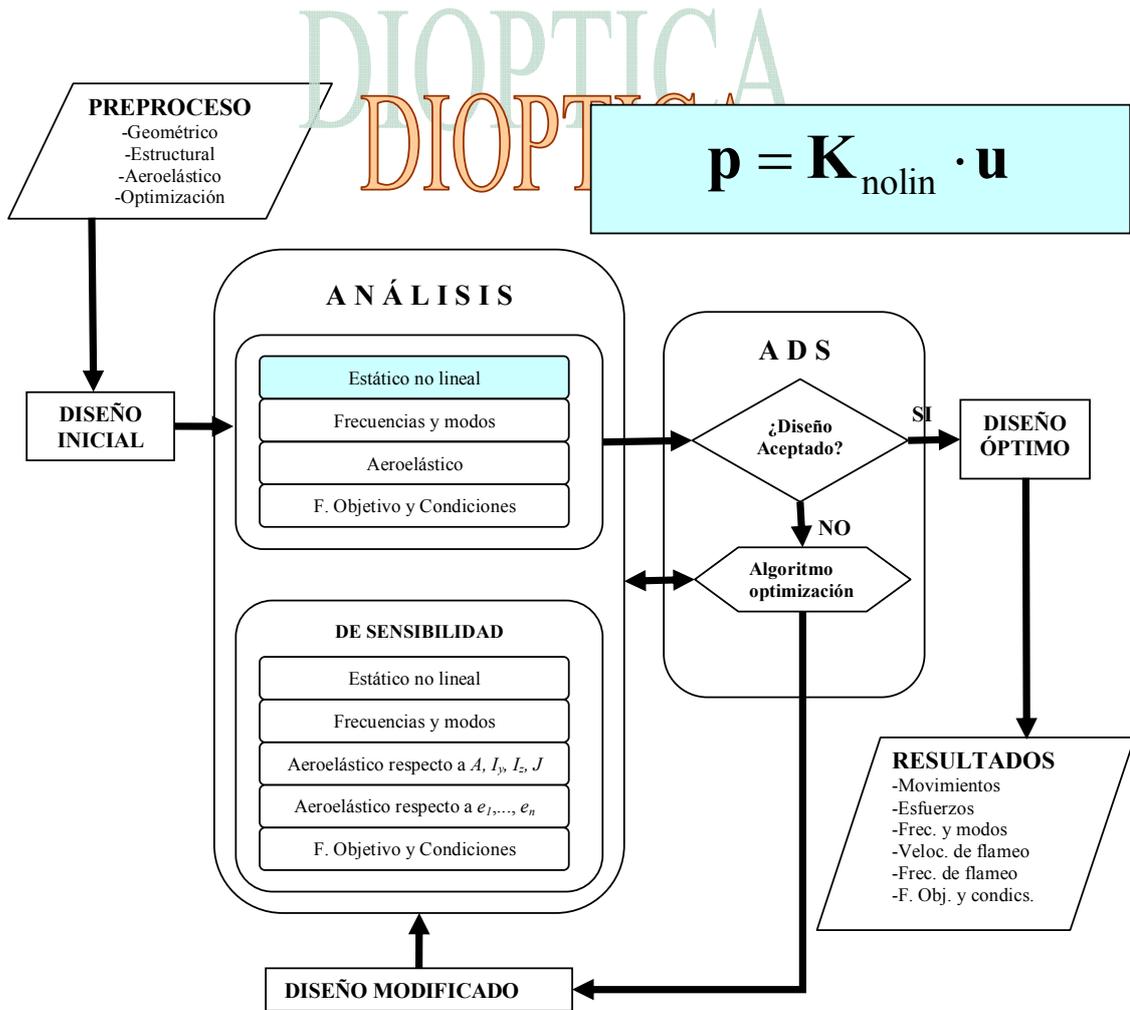


Figura 5.7.5. Ubicación del módulo de análisis estático no lineal en el diagrama general de flujo.

- *Módulo de análisis de frecuencias y modos (S)*

Permite la resolución del problema dinámico de la vibración libre a partir del cual se obtienen las frecuencias naturales ω_n y los modos propios de vibración ϕ_n de la estructura en teoría de segundo orden. El problema de valores propios que permite obtener estos datos dinámicos de la estructura es

$$[K_{nolin} - \omega_n^2 \cdot M] \cdot \phi_n = 0 \tag{5.7.6}$$

donde M es la matriz de masas de la estructura. Para la solución del problema de autovalores se utiliza un sistema de resolución basado en una factorización de Cholesky (véase Martin^[M3] y Wilkinson) seguido de un algoritmo matricial tipo QR (véase Smith^[S3] et al). Finalmente se obtienen las frecuencias naturales y todas las

componentes de los modos propios de vibración normalizados a la masa, tras descondensar el problema dinámico.

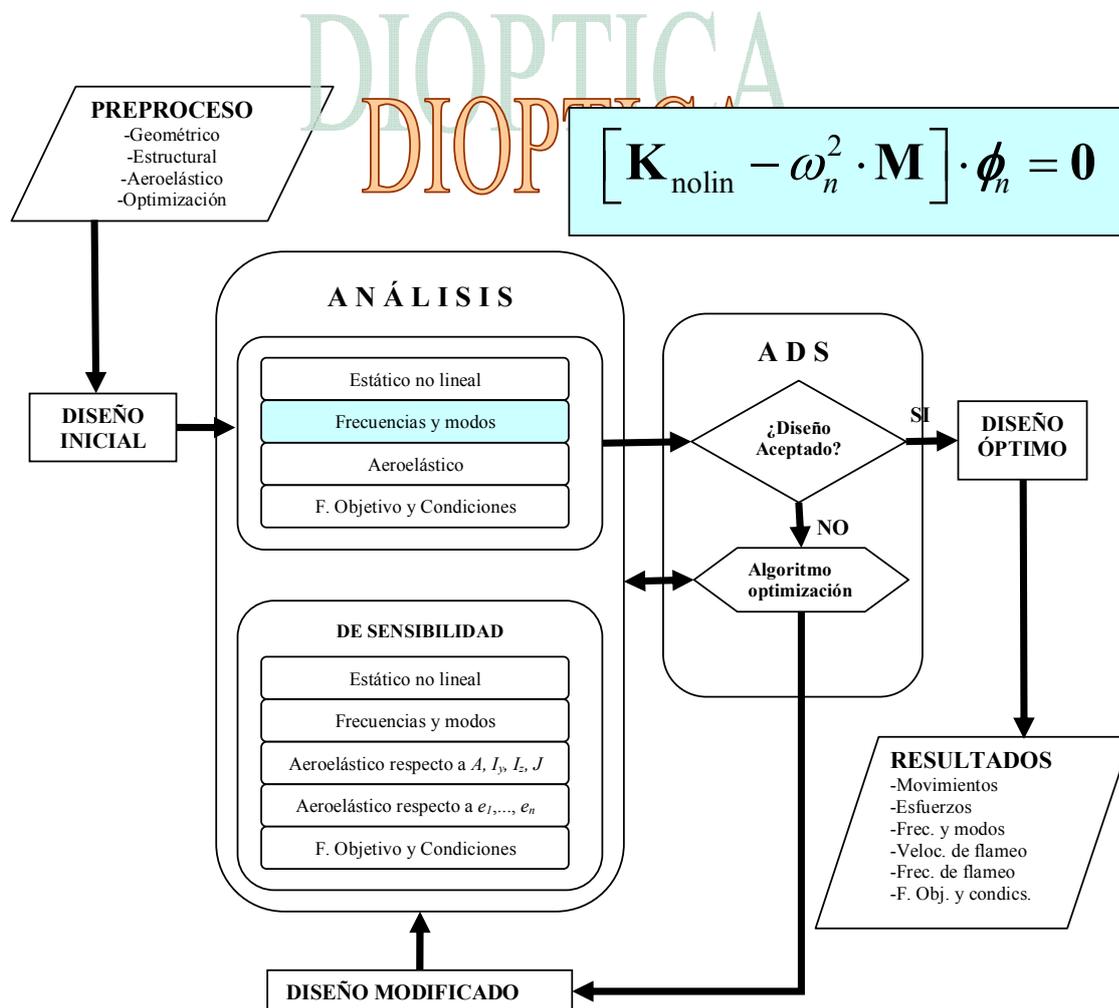


Figura 5.7.6. Ubicación del módulo de análisis de frecuencias y modos en el diagrama general de flujo.

- *Módulo de análisis aeroelástico (P)*

Esta parte del programa permite obtener la velocidad de flameo del tablero de un puente U_f , así como la frecuencia reducida K_f . El problema no lineal de valores y vectores propios que deber ser resuelto para cada velocidad de viento de cálculo se escribe en la forma:

$$(\mathbf{A} - \mu \mathbf{I}) \mathbf{w}_\mu = \mathbf{0} \tag{5.7.7}$$

Expresión que deriva de la ecuación de equilibrio dinámico:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}_a = \mathbf{K}_a\mathbf{u} + \mathbf{C}_a\dot{\mathbf{u}} \quad (5.7.8)$$

donde \mathbf{K}_a y \mathbf{C}_a son respectivamente la matriz de rigidez y la matriz de amortiguamiento aeroelásticas. Operando con la matriz modal Φ , se define la matriz \mathbf{A} y el vector propio \mathbf{w}_μ según:

$$\mathbf{I} = \Phi^T \mathbf{M} \Phi \quad \mathbf{C}_R = \Phi^T (\mathbf{C} - \mathbf{C}_a) \Phi \quad \mathbf{K}_R = \Phi^T (\mathbf{K} - \mathbf{K}_a) \Phi \quad (5.7.9)$$

$$\mathbf{w}_\mu = \begin{pmatrix} \mu \mathbf{w} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\mathbf{C}_R & -\mathbf{K}_R \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (5.7.10)$$

En este problema también se pueden emplear técnicas de paralelización con el consiguiente ahorro en tiempos de computación. Para resolver (5.7.7) se recurre a un proceso iterativo ya que, como ya se ha explicado en capítulos precedentes, en la construcción de la matriz \mathbf{A} intervienen los coeficientes de flameo, que son función de la frecuencia reducida del sistema $K = B\omega_a/U$, sin embargo, la frecuencia asociada a cada modo no se conoce hasta que el problema de valores propios ha sido resuelto. Para la obtención de los valores y vectores propios se reduce la matriz \mathbf{A} a la forma de Hessenberg superior. Los valores y vectores propios se obtienen empleando el método Q-R. Además, este módulo ofrece una salida gráfica de resultados en la que se incluyen la evolución de la parte real y de la parte imaginaria de los autovalores aeroelásticos con la velocidad de cálculo, así como la evolución del amortiguamiento asociado a cada autovector aeroelástico (véase la figura 5.7.8).

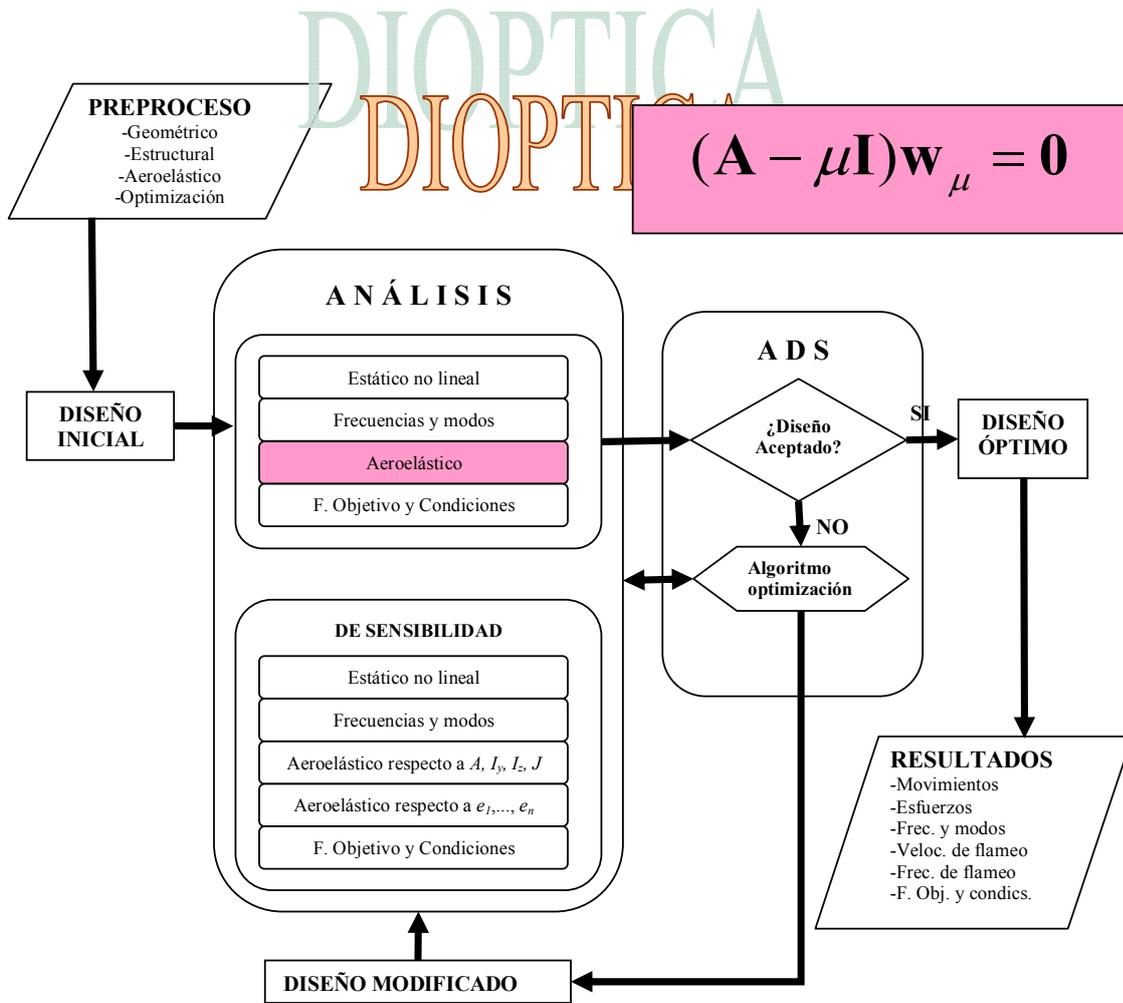
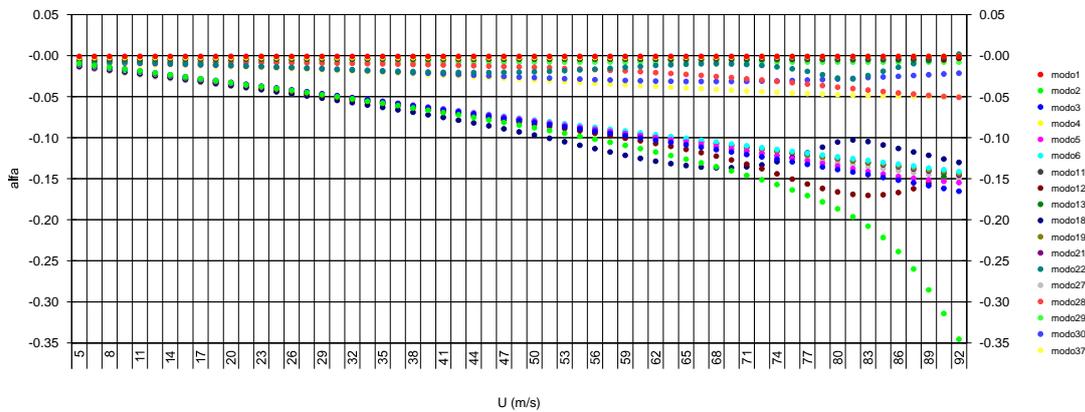


Figura 5.7.7. Ubicación del módulo de análisis de la respuesta aeroelástica en el diagrama general de flujo.



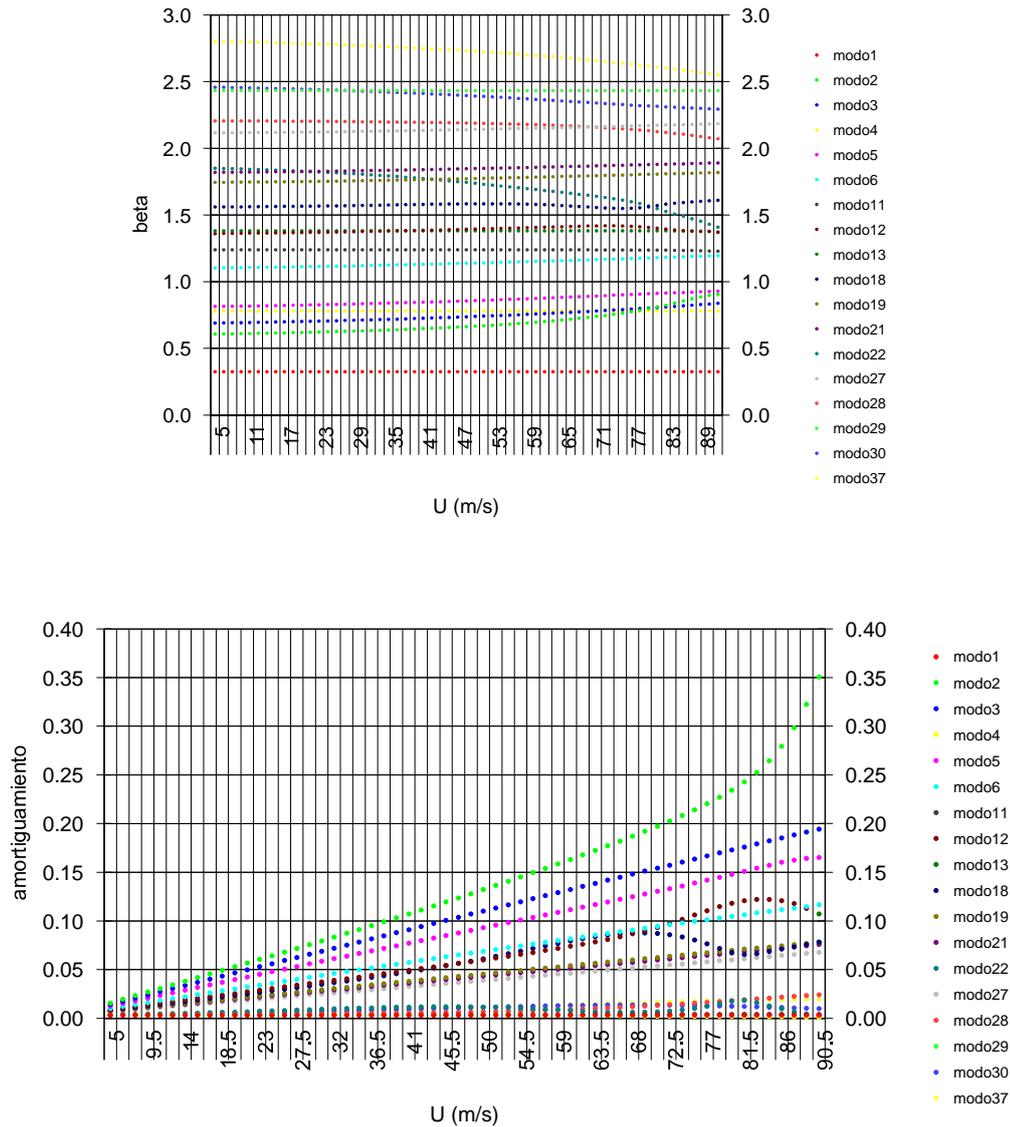


Figura 5.7.8. Resultados gráficos ofrecidos por el módulo de análisis aeroelástico.

- *Módulo de análisis de la función objetivo y las condiciones (S)*

Permite evaluar la función objetivo a minimizar, que en el presente caso es el área de la sección transversal del tablero expresada en función de los espesores de las chapas que lo conforman:

$$\min F = A(e_1, \dots, e_n) \tag{5.7.11}$$

y también las condiciones consideradas en el proceso de optimización:

$$e_{\min} \leq e_i \leq e_{\max} \quad i = 1, \dots, n \quad (5.7.12)$$

$$g_1 : \frac{U_{f,cr}}{U_f} - 1 \leq 0 \quad (5.7.13)$$

$$g_2 : \frac{w_c}{w_{c,max}} - 1 \leq 0 \quad (5.7.14)$$

donde las expresiones 5.7.13 y 5.7.14 son las condiciones de comportamiento normalizadas relativas a la velocidad de flameo y la flecha en centro de vano. En el problema estudiado se requiere, por lo tanto, haber determinado la velocidad de flameo, la cual ha sido calculada en el módulo de análisis aeroelástico, y el incremento de la flecha debida a las sobrecargas, que se obtuvo en el módulo de análisis estático no lineal.

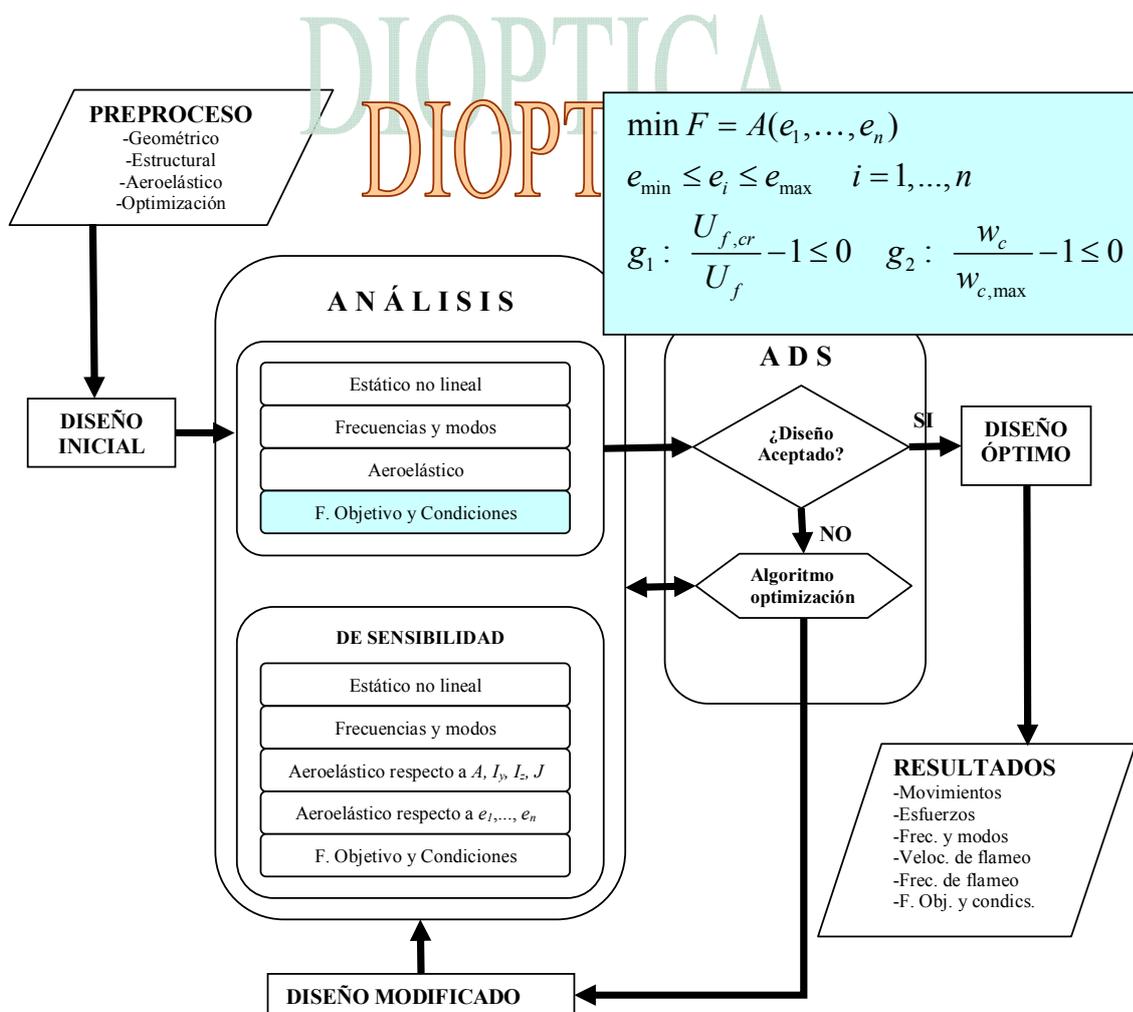


Figura 5.7.9. Ubicación del módulo de análisis de la función objetivo y las condiciones en el diagrama general de flujo.

- *Módulo de análisis de sensibilidad estático no lineal (P)*

En este módulo de cálculo se obtiene analíticamente la derivada del movimiento vertical en centro de vano debido a las sobrecargas de uso respecto a las propiedades mecánicas del tablero.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \quad x_i = I_y, I_z, J, A \quad (5.7.15)$$

Como se indica en el capítulo 4, estas sensibilidades se calculan mediante la resolución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left[\mathbf{K}_{\text{lin}} + \mathbf{K}_G + \mathbf{IE} \left(\mathbf{K}_G^b \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}^T \right) \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}_{\text{lin}}}{\partial x_i} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{IE} \left(\mathbf{K}_G^b \cdot \mathbf{u}^b \cdot \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial x_i} \cdot \mathbf{u}^b \right) \quad (5.7.16)$$

Donde \mathbf{K}_{lin} es la matriz de rigidez lineal, \mathbf{K}_G es la matriz de rigidez geométrica, \mathbf{IE} es la operación de ensamblaje, \mathbf{u} es el vector de movimientos nodales, \mathbf{w} el vector que permite relacionar axiles y movimientos nodales y \mathbf{p} es el vector de cargas nodales.

Estas derivadas son importantes ya que a partir de ellas se calcula el gradiente de la condición referida a movimientos en el problema de optimización. Las derivadas respecto a cada una de las cuatro propiedades mecánicas del tablero se calculan independientemente, por lo que pueden ser evaluadas de modo simultáneo por equipos distintos aplicando esquemas de programación distribuida.

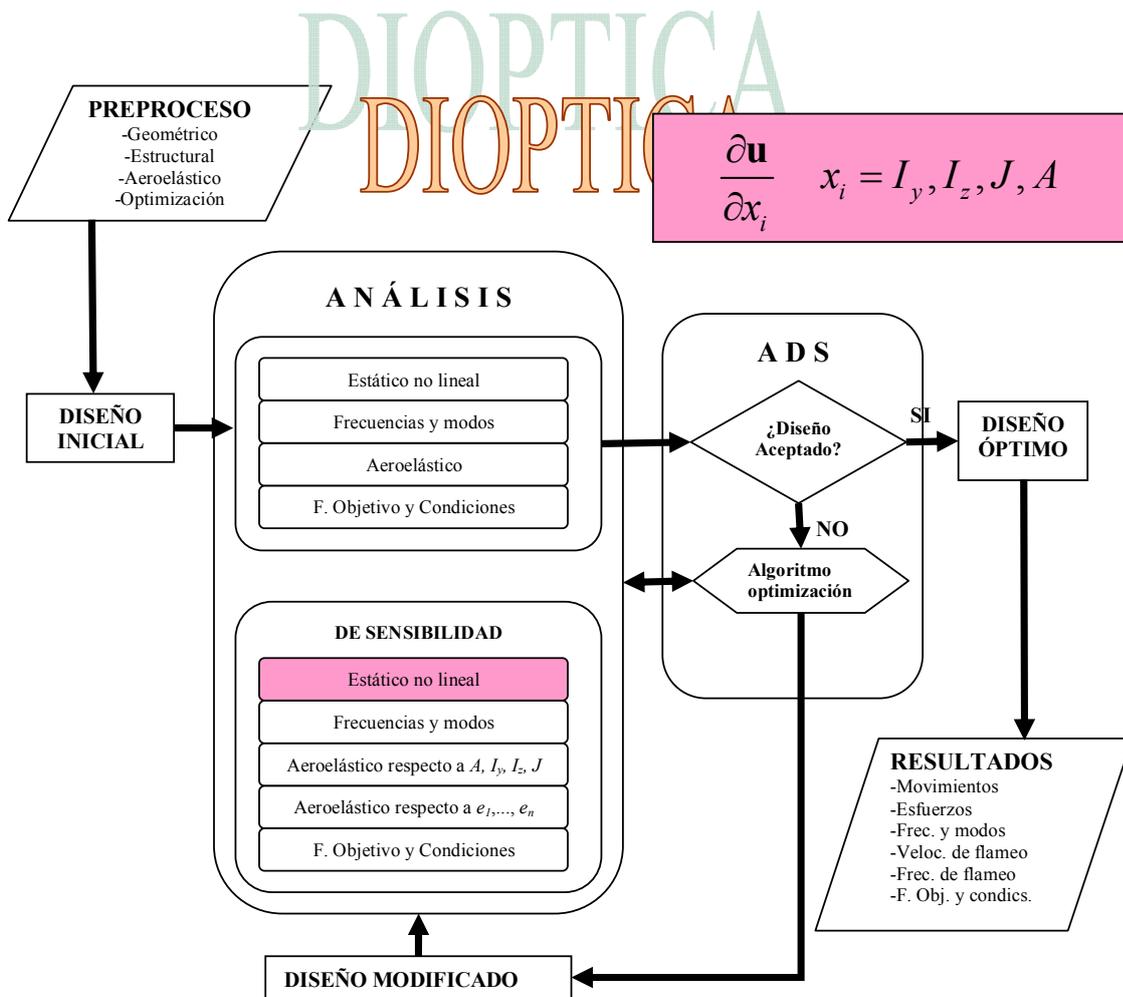


Figura 5.7.10. Ubicación del módulo de análisis de sensibilidad estático no lineal en el diagrama general de flujo.

- *Módulo de análisis de sensibilidad de frecuencias y modos (P)*

Este módulo permite la obtención de las sensibilidades de las frecuencias naturales y modos propios de vibración en teoría no lineal, considerando como variables de diseño las propiedades mecánicas de la sección transversal del tablero.

$$\frac{\partial(\omega_n^2)}{\partial x_i}, \frac{\partial \phi_n}{\partial x_i} \quad x_i = I_y, I_z, J, A \quad (5.7.17)$$

Para ello es necesario resolver las siguientes ecuaciones planteadas en el capítulo 4:

$$\frac{\partial(\omega_n^2)}{\partial x_i} = \frac{\phi_n^T \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} - \omega_n^2 \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \right) \cdot \phi_n}{\phi_n^T \cdot \mathbf{M} \cdot \phi_n} \quad (5.7.18)$$

$$(\mathbf{K} - \omega_n^2 \cdot \mathbf{M}) \cdot \frac{\partial \phi_n}{\partial x_i} = \frac{\partial(\omega_n^2)}{\partial x_i} \cdot \mathbf{M} \cdot \phi_n - \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} - \omega_n^2 \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \right) \cdot \phi_n \quad (5.7.19)$$

Para la resolución de los sistemas de ecuaciones de (5.7.19) se ha implementado una factorización tipo UDU^T , seguida de un algoritmo de resolución tipo SSISL (véase Dongarra^[D1] et al.). La determinación de los análisis de sensibilidad respecto a cada una de las variables de diseño es un proceso independiente, que puede ser llevado a cabo de modo aislado de los otros análisis de sensibilidad. Se trata, por tanto, de operaciones susceptibles de ser realizadas de modo simultáneo en un esquema de computación en paralelo. Sobre este último aspecto se profundizará más adelante.

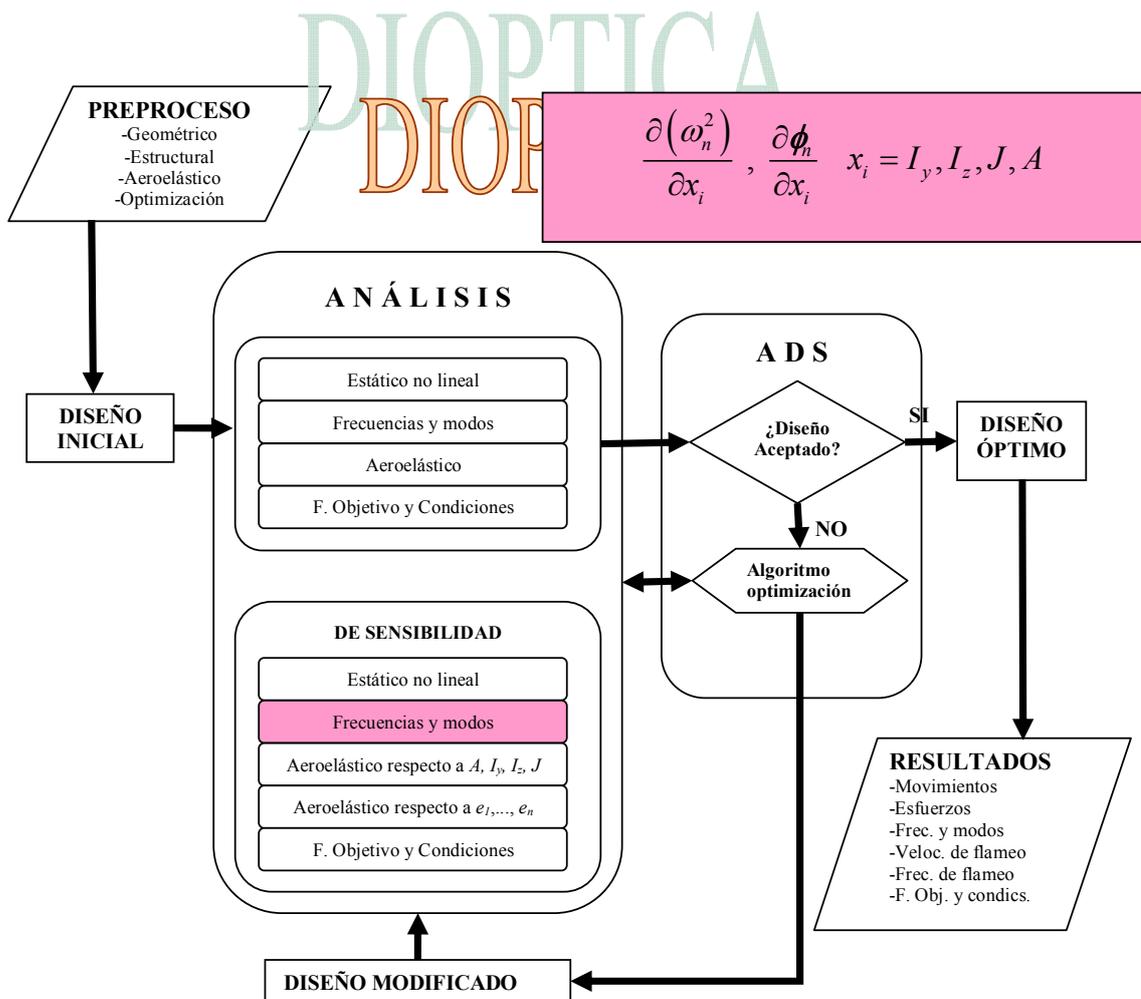


Figura 5.7.11. Ubicación del módulo de análisis de sensibilidad de frecuencias y modos.

- *Módulo de análisis de sensibilidad aeroelástico respecto a las propiedades mecánicas del tablero (P)*

Este módulo permite calcular las sensibilidades de la velocidad de flameo respecto a las propiedades mecánicas de la sección transversal del tablero.

$$\frac{\partial U_f}{\partial x_i} \quad x_i = I_y, I_z, J, A \quad (5.7.20)$$

Lo que se realiza según el procedimiento analítico descrito en el apartado 4.3. Las sensibilidades de la velocidad de flameo se obtienen a partir de la expresión:

$$\frac{\partial U_f}{\partial x} = \frac{-\text{Im}(\bar{g}_K h_{Ax})}{\text{Im}(\bar{g}_K g_U)} \quad (5.7.21)$$

donde los números complejos que intervienen se definen en las expresiones siguientes, deducidas con detalle en el capítulo 4:

$$g_U = h_{AU} + \frac{iK_f}{B} \mathbf{v}_\mu^T \mathbf{I} \mathbf{w}_\mu \quad (5.7.22)$$

$$g_K = h_{AK} + \frac{iU_f}{B} \mathbf{v}_\mu^T \mathbf{I} \mathbf{w}_\mu \quad (5.7.23)$$

$$h_{Ax} = \mathbf{v}_\mu^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \mathbf{w}_\mu, \quad h_{AU} = \mathbf{v}_\mu^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial U_f} \mathbf{w}_\mu, \quad h_{AK} = \mathbf{v}_\mu^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial K_f} \mathbf{w}_\mu \quad (5.7.24)$$

En las expresiones (5.7.22) a (5.7.24) la matriz \mathbf{A} y el autovector por la derecha \mathbf{w}_μ ya se han definido en (5.7.10), mientras que \mathbf{v}_μ es un autovector por la izquierda.

Los análisis de sensibilidad realizados respecto a cada una de las variables de diseño son independientes entre sí, por lo que cada uno de esos análisis puede ser llevado a cabo de modo independiente y simultáneo, con lo que el proceso de cálculo de estos análisis de sensibilidad puede ser paralelizado con el fin de hacer disminuir los tiempos de cálculo necesarios.

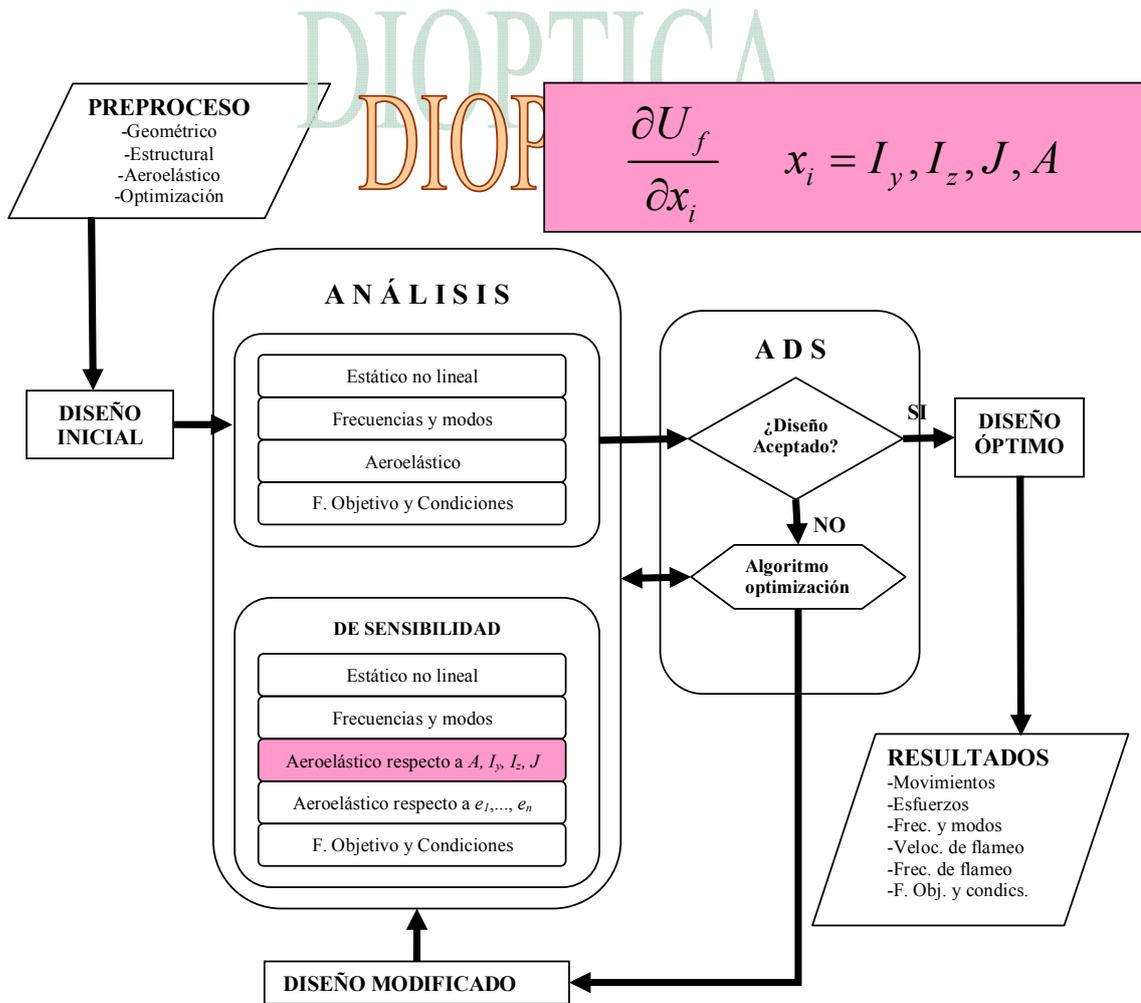


Figura 5.7.12. Ubicación del módulo de análisis de sensibilidad de la respuesta aeroelástica en el diagrama general de flujo.

- *Módulo de análisis de sensibilidad de la respuesta aeroelástica respecto a los espesores del tablero (S)*

Las variables de diseño consideradas en la optimización son los espesores de las chapas que conforman el tablero del puente. Partiendo de las sensibilidades de la velocidad de flameo respecto a las propiedades mecánicas del tablero y multiplicando por la matriz jacobiana, cuyos elementos son las derivadas de las propiedades mecánicas del tablero respecto a los espesores de la sección transversal, se obtienen las sensibilidades de la velocidad de flameo del puente respecto a los espesores.

$$\frac{\partial U_f}{\partial x_i} \quad x_i = e_1, \dots, e_n \quad (5.7.25)$$

Desarrollando la expresión anterior, según se explicó en el capítulo 4, se obtiene:

$$\nabla_{\mathbf{e}} U_f = \begin{Bmatrix} \frac{\partial U_f}{\partial e_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial U_f}{\partial e_n} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial I_y}{\partial e_1} & \frac{\partial I_z}{\partial e_1} & \frac{\partial J}{\partial e_1} & \frac{\partial A}{\partial e_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial I_y}{\partial e_n} & \frac{\partial I_z}{\partial e_n} & \frac{\partial J}{\partial e_n} & \frac{\partial A}{\partial e_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial U_f}{\partial I_y} \\ \frac{\partial U_f}{\partial I_z} \\ \frac{\partial U_f}{\partial J} \\ \frac{\partial U_f}{\partial A} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \nabla_{\mathbf{I}} U_f \quad (5.7.26)$$

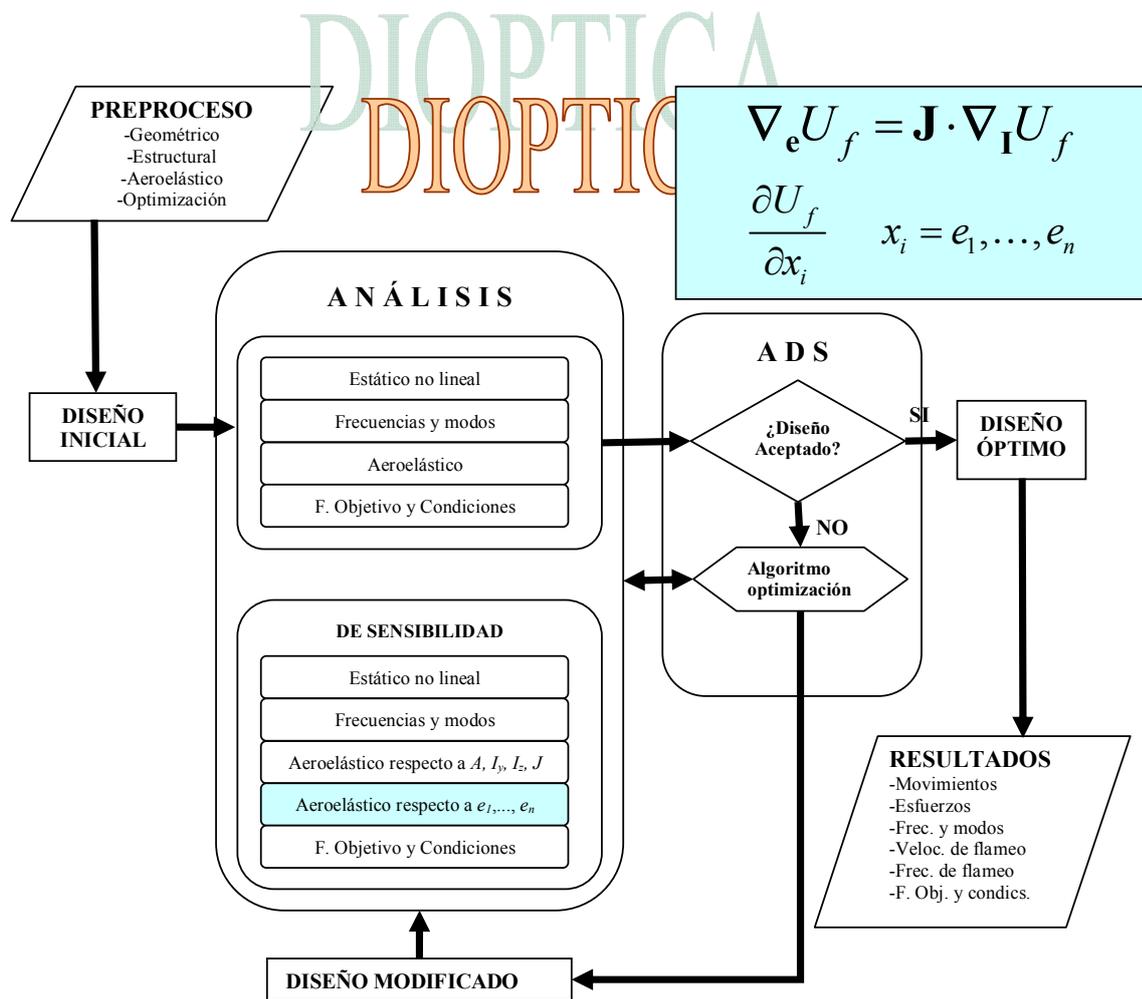


Figura 5.7.13. Ubicación del módulo de análisis de sensibilidad de la respuesta aeroelástica respecto a los espesores en el diagrama general de flujo.

- *Módulo de análisis de sensibilidad de la función objetivo y las condiciones (S)*

Tal y como se ha indicado para el módulo anterior las variables de diseño consideradas en el problema de optimización son los espesores de la sección transversal del tablero en cajón aerodinámico de un puente de gran vano. Como la relación entre los espesores de la sección transversal y las propiedades mecánicas de la misma es conocida, las sensibilidades de la función objetivo y de las condiciones F , g_1 y g_2 definidas en (5.7.11) a (5.7.14), pueden ser obtenidas operando de nuevo con el jacobiano de la transformación.

$$\nabla_e F = \mathbf{J} \cdot \nabla_I F \tag{5.7.27}$$

$$\nabla_e g_l = \mathbf{J} \cdot \nabla_I g_l \quad l=1,2 \tag{5.7.28}$$

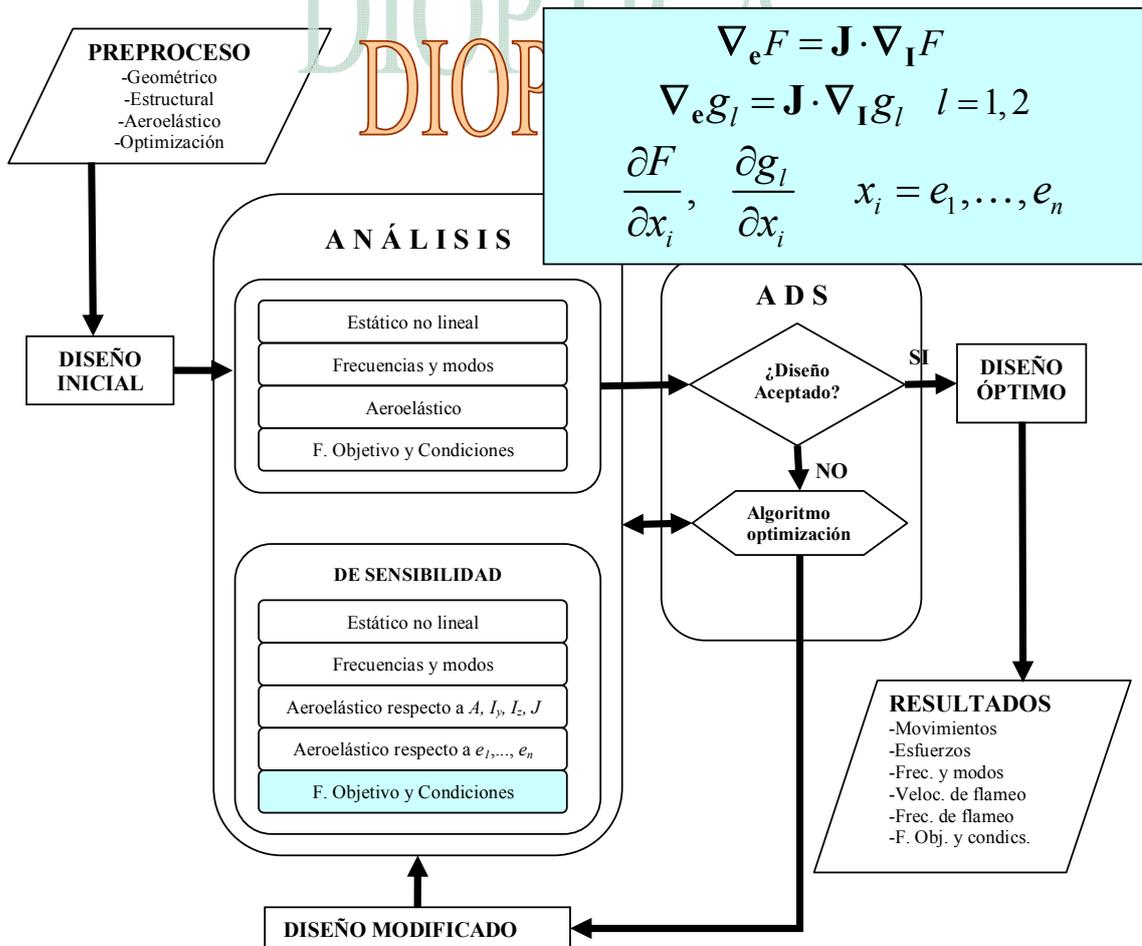


Figura 5.7.14. Ubicación del módulo de análisis de sensibilidad de la función objetivo y las condiciones en el diagrama general de flujo.

- *Módulo de salida de resultados (S)*

El resultado final del proceso de diseño óptimo de un puente de gran vano, tal y como se ha planteado en el presente trabajo, será el valor de los espesores de las chapas que conforman la sección transversal del tablero y que hacen que el peso del tablero sea el mínimo posible. Estos valores garantizan la satisfacción de las condiciones en movimientos y de tipo aeroelástico impuestas. Durante el proceso iterativo que conduce al óptimo se obtiene la evolución del valor de la función objetivo y de las condiciones.

Además, se obtienen toda una serie de resultados parciales cada vez que se evalúan la función objetivo y las condiciones, así como sus gradientes. Una parte de estos resultados se escriben en archivos, mientras que otra se presenta gráficamente. A continuación se enumera una lista de los resultados más importantes que son calculados.

Ficheros de resultados:

- Movimientos en nudos \mathbf{u} .
- Esfuerzos en barras \mathbf{p}^b .
- Frecuencias naturales de vibración ω_n .
- Modos propios de vibración ϕ_n .
- Sensibilidades de las frecuencias naturales respecto a las propiedades mecánicas de la sección transversal del tablero $\partial(\omega_n^2)/\partial x_i \quad x_i = I_y, I_z, J, A$.
- Sensibilidades de los modos propios de vibración respecto a las propiedades mecánicas de la sección transversal del tablero $\partial\phi_n/\partial x_i \quad x_i = I_y, I_z, J, A$.
- Velocidad de flameo U_f y frecuencia reducida K_f .
- Sensibilidad de la velocidad de flameo y la frecuencia reducida respecto a las propiedades mecánicas de la sección transversal del tablero $\partial U_f/\partial x_i, \partial K_f/\partial x_i \quad x_i = I_y, I_z, J, A$.
- Valor de la función objetivo y las condiciones en cada paso $\min F = A(e_1, \dots, e_n)$, $g_1: U_{f,cr}/U_f - 1 \leq 0$ y $g_2: w_c/w_{c,max} - 1 \leq 0$.
- Valor de las variables de diseño en cada paso e_1, \dots, e_n .
- Gradientes de la función objetivo y de las condiciones respecto a los espesores de las chapas que conforman la sección transversal del tablero $\nabla_e F$ y $\nabla_e g_l \quad (l = 1, 2)$.

- Valores de las variables, condiciones y función objetivo en el diseño óptimo $A^{opt}(e_1^{opt}, \dots, e_n^{opt})$ y g_l^{opt} , $l = 1, 2$.

5.7.1 Programación distribuida en el programa DIOPTICA

DIOPTICA ha sido diseñado para ser ejecutado en un cluster de ordenadores personales. En este caso concreto, el Grupo de Mecánica de Estructuras dispone de un cluster tipo Beowulf formado por un equipo *frontend* y varios equipos ubicados en un *rack*. En la figura 5.7.15 se muestra un imagen del *rack* de ordenadores utilizado.



Figura 5.7.15. Rack de ordenadores.

El funcionamiento de DIOPTICA sigue un esquema Maestro-Eslavo. En el equipo *frontend* se encuentra el programa Maestro que constituye el cuerpo principal del programa. Este programa Maestro realiza el proceso de optimización según el esquema presentado en la figura 5.7.2 y, además, gestiona las comunicaciones con los equipos que funcionan como esclavos a través del intercambio de mensajes.

Para la paralelización del problema se ha optado por una descomposición de grano grueso. Tal y como se ha indicado en el diagrama de flujo de la figura 5.7.2, cuatro son los módulos del programa que han sido paralelizados^[N2]:

- Módulo de análisis de sensibilidad estático no lineal.
- Módulo de análisis de sensibilidad de frecuencias y modos.
- Módulo de análisis aeroelástico.
- Módulo de análisis de sensibilidad aeroelástico.

Un aspecto que merece ser resaltado es que el disponer de gradientes analíticos en un proceso de optimización permite disminuir de modo notable los tiempos de cálculo frente a la evaluación de esos gradientes mediante diferencias finitas. En el problema estudiado, para calcular esos gradientes, se deben determinar previamente los análisis de sensibilidad de las frecuencias naturales de la estructura, de los modos propios de vibración y de la velocidad de flameo, los cuales requieren un esfuerzo de computación muy elevado. Además, la obtención de la velocidad de flameo también demanda tiempos de cálculo elevados. Son por tanto los subprocesos más costosos computacionalmente los que son paralelizados para lograr así reducir los tiempos de cálculo al evaluar los gradientes de las condiciones y las propias condiciones que dependen de la velocidad de flameo.

La paralelización de los análisis de sensibilidad se realiza distribuyendo el cálculo de las sensibilidades de las frecuencias naturales y los modos propios de vibración respecto a cada una de las propiedades mecánicas del tablero (I_y , I_z , J , y A) al correspondiente equipo de los que funcionan como esclavos. Si el número de ordenadores que trabajan en modo esclavo es igual a n , cuatro de ellos calculan las sensibilidades respecto a cada una de las variables de diseño, ya que esos subprocesos son independientes entre sí y pueden ser llevados a cabo de modo simultáneo, manteniéndose los $n-4$ restantes inactivos. El mismo proceso se sigue para calcular las sensibilidades de la velocidad de flameo y la frecuencia reducida respecto a las cuatro propiedades mecánicas del tablero del puente antes mencionadas.

En lo referente al problema no lineal de autovalores a resolver para velocidades

crecientes de viento que permite calcular la velocidad de flameo, para una velocidad de viento de cálculo dada, la asignación de manera simultánea del problema no lineal de autovalores a cada uno de los n esclavos se realiza de la manera siguiente: dado un modo de vibración genérico j se establece el cociente j/n que proporciona un resto k , este valor es el del número asignado al ordenador esclavo que realiza el cálculo del autovalor correspondiente al modo de vibración considerado. Esta situación contrasta con la programación secuencial, en la que se debe resolver el mismo problema para cada uno de los m modos de vibración, uno a continuación de otro. El número de modos de vibración que se utiliza actualmente en el análisis aeroelástico de puentes de gran vano puede ascender a 50 o incluso ser superior, como se comprueba en los documentos del estudio preliminar del puente sobre el estrecho de Messina^{[S4][S5]} o en trabajos de investigadores como Jones^[J2]. Por ello, según Schendel^[S6] la paralelización es una gran necesidad, al igual que el contar con un número de computadores igual o superior al de modos de vibración ya que así se aceleraría en gran medida el proceso de cálculo.

En la figura 5.7.16 se muestra de nuevo el diagrama de flujo del programa DIOPTICA explicitando los subprocesos llevados a cabo por el ordenador maestro y por los equipos esclavos. Así, el significado del código de colores utilizado es el siguiente: el color azul se asigna a aquellos módulos que son ejecutados por el computador maestro y el color rosa identifica los módulos del programa realizados por los esclavos. Se aprecia como los módulos ejecutados por los esclavos se corresponden con aquellos que han sido paralelizados en el ámbito de esta investigación.

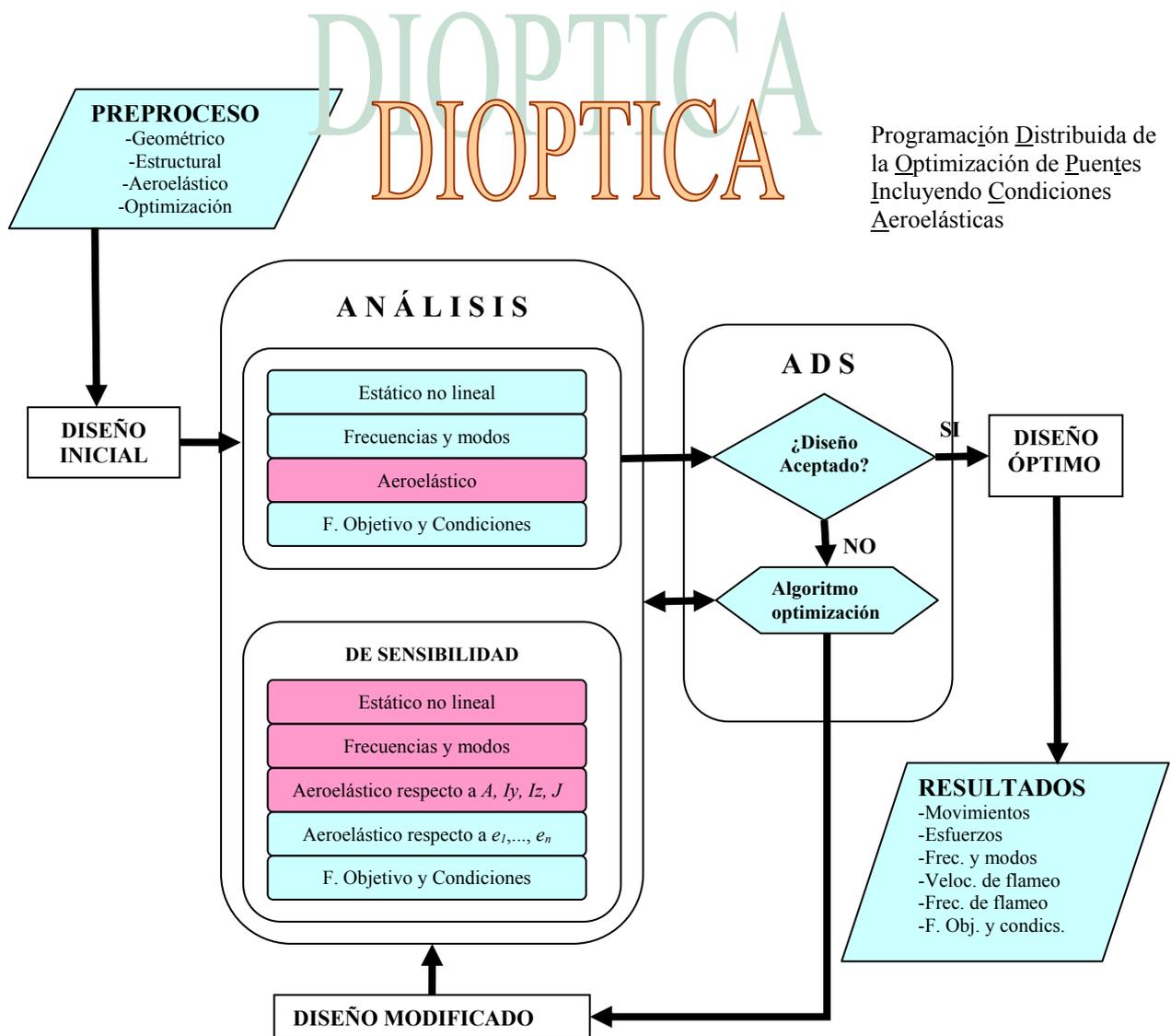


Figura 5.7.16. Procesos realizados por el equipo maestro y por los equipos esclavos en el programa DIOPTICA

5.8 REFERENCIAS

[A1] Anderson T. E., Culler D. E., Patterson D. [1995] *A Case for NOW (Networks of workstations)*. IEEE Micro, Vol. 15, nº 1, pp. 54-64.

[A2] Amdahl G. [1967] *Validity of the Single-Processor Approach to Achieving Large-Scale Computing Capabilities*. Proc. 1967 AFIPS Conference, Vol 30, pp. 483.

[C1] Colouris G., Dollimore J, Kindberg T. [2001] *Sistemas Distribuidos. Conceptos y diseño*. Pearson Educación, 3ª Edición.

[C2] Centro de Supercomputación de Galicia [2006] *Dezanove mil CPUs ao Dispor dos Usuarios*. Dixitos, Novas do Centro de Supercomputación de Galicia, xaneiro 2006.

[C3] COSMOS/M [2003] *User's Manual, 2.8 version*. Structural Research & Analysis Corp. Santa Mónica, California.

[D1] Dongarra J. J., Moler C. B., [1977] *EISPACK – A package for solving matrix eigenvalue problems*. Argonne National Laboratory, Argonne, Illinois, USA.

[E1] Enabling Grids for E-science Project, home page, <http://public.eu-gee.org/>

[F1] Foster I. [1995] *Designing and Building Parallel Programs (On line)*. Libro electrónico: <http://www-unix.mcs.anl.gov/dbpp/>. Addison-Wesley Inc., Argonne National Laboratory y NSF Center for Research on Parallel Computation.

[F2] Flynn M. J., Rudd K. W. [1996] *Parallel Arquitectures*. ACM Computing Surveys, Vol 28, nº 1, pp. 67-70.

[G1] Grama A., Gupta A., Karypis G., Kumar V. [2003] *Introduction to Parallel Computing*. Pearson Education Limited, 2ª Edición.

[G2] Gill S., [1958] *Parallel Programming*. Computer Journal, Vol 1, pp. 2-10.

[H1] Holland J. [1959] *A Universal Computer Capable of Executing an Arbitrary Number of Subprograms Simultaneously*. Proc. East Joint Computer Conference, Vol 16, pp. 108-113.

[I1] sitio web del proyecto BlueGene de IBM, USA [2005] <http://researchweb.watson.ibm.com/bluegene/>

[I2] sitio web IBM - Iowa State University Cluster, USA [2005]
<http://www.scl.ameslab.gov/Projects/IBMCluster/>

[J1] Jurado J. A. [2001] *Análisis Aeroelástico y de Sensibilidad del Fenómeno de Flameo en Puentes Soportados por Cables*. Tesis doctoral de la Universidade da Coruña. Escola Técnica Superior de Enxeñeiros de Camiños, Canais e Portos.

[J2] Jones N. P., Scanlan R. H., Jain A, Katsuchi H. [1998] *Advances (and challenges) in the prediction of long-span bridge response to wind*. Bridge Aerodynamics, Proceedings of the international symposium on advances in bridge aerodynamics. Copenhagen, Denmark, 10-13 may 1998.

[M1] Maui High Performance Computing Centre [2003] *Introduction to Parallel Programming*. Libro electrónico:
http://www.mhpcc.edu/training/workshop/parallel_intro/MAIN.html

[M2] Mosquera A. [2003] *Sensibilidad Analítica de la Vibración Libre y del Flameo en Puentes Colgantes de Gran Vano en Servicio y en Fase Constructiva*. Tesis doctoral de la Universidade da Coruña. Escola Técnica Superior de Enxeñeiros de Camiños, Canais e Portos.

[M3] Martin R. S., Wilkinson J. W. [1968] *Reduction of the symmetric eigenproblem $Ax=\lambda Bx$ and related problems to standard form*. Numerische Mathematik, 11, pp 99-119.

[N1] Nieto F., Jurado J. A., Hernández S. [2005] *Aplicación de la programación distribuida en la obtención de la velocidad de flameo y los análisis de sensibilidad del flameo en puentes de gran vano*. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol 21, 1, pp. 83-101.

[N2] Nieto F., Hernández S., Jurado J.A. [2005] *Distributed computing for the evaluation of the aeroelastic response and sensitivity análisis of flutter speed of the Messina Bridge*. Proceedings of Fluid Structure Interaction and Moving Boundary Problems, La Coruña, Spain, 19-23 september 2005.

[O1] Sitio web del proyecto Octopus, Iowa State University, USA [2005]
<http://gremlin2.zool.iastate.edu/>

[S1] Sterling T. (editor) [2002] *Beowulf Cluster Computing with Windows*. MIT Press, Cambridge, Massachusset, USA.

[S2] Sterling T. (editor) [2002] *Beowulf Cluster Computing with Linux*. MIT Press, Cambridge, Massachusset, USA.

[S3] Smith B. T., Boyle J. M., Dongarra J. J., Garbow B. S., Ikebe Y., Klema V. C., Moler C. B. [1976] *Matrix eigensystem routines – EISPACK Guide*, Springer-Verlag, New York, USA.

[S4] Ponte sullo Stretto di Messina [2003] *Studi e approfondimenti dell'opera di attraversamento. Approfondimento del comportamento aerodinamico e aeroelastico dell'impalcato. I Fase*. 27 de febrero de 2003.

[S5] Ponte sullo Stretto di Messina [2003] *Studi e approfondimenti dell'opera di attraversamento. Approfondimento del comportamento aerodinamico e aeroelastico dell'impalcato. II Fase*. 30 de julio de 2003.

[S6] Schendel U. [1984] *Introduction to Numerical Methods for Parallel Computers*. Ellis Horwood Limited, Chichester, UK.

[T1] TOP500 supercomputer sites. [2005] *25th Edition of TOP500 List of World's Fastest Supercomputers Released*. <http://www.top500.org>

[T2] Turner D., *Libro electrónico: Introduction to Parallel Computing*. Ames Laboratory, Departamento de Energía de los Estados Unidos de América, http://cmp.ameslab.gov/introduction_to_parallel_computing/

[V1] Venkataraman S., Haftka R.T. [2002] *Structural Optimization: What has Moore's Law Done For Us?* 43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Material Conference, 22-25 April, 2002, Denver, Colorado, USA.

[V2] VMA Engineering [1988] *ADS – A Fortran Program for Automated Design Synthesis, Version 3.00*. Vanderplaats, Miura & Associates, Inc., Goleta, California, USA.

[V3] Vanderplaats G. N. [2001] *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*. 3rd edition. Vanderplaats Research & Development Inc., Colorado Springs, USA.

[W1] Wilkinson B, Allen M. [2005] *Parallel Programming. Techniques and Applications Using Networked Workstations and Parallel Computers*. Pearson Education, Inc., 2nd edition, Upper Saddle River, NJ, USA.

CAPÍTULO 6

EJEMPLOS DE ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE LA RESPUESTA AEROELÁSTICA

As the twentieth century ends, the spans of the long-span suspension and cable-stayed bridges have been extended to new limits...The design of this bridge (Akashi strait bridge) was dominated by its aerodynamic characteristics.

(Holmes, J.D., Wind Loading of Structures)

6.1. INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo se aplica la formulación desarrollada en los capítulos 2, 3 y 4 a dos ejemplos de puentes colgantes: el puente sobre el Great Belt en Dinamarca y el puente sobre el estrecho de Messina, entre Sicilia y la península italiana. Por consiguiente, para cada uno de ellos se obtendrá la respuesta aeroelástica, es decir, la velocidad de flameo y la frecuencia reducida, así como las sensibilidades analíticas de dicha respuesta respecto a las variables de diseño elegidas. Para obtener estos resultados se han utilizado los módulos del programa DIOPTICA, explicados en detalle en el capítulo 5, los cuales utilizan los principios de programación distribuida. En los dos ejemplos comentados se han llevado a cabo las tareas que se indican a continuación:

- Cálculo dinámico de la respuesta estructural en vibración libre no amortiguada de cada uno de los puentes considerados. Se obtienen así las frecuencias naturales y los modos propios de vibración de la estructura en teoría de segundo orden, aplicando la formulación desarrollada en el capítulo 4.

- Análisis de sensibilidad analítico de las frecuencias naturales y los modos de vibración considerando la masa del tablero como variable. Igualmente, la formulación requerida ha sido desarrollada en el capítulo 4. Conviene recordar que las sensibilidades respecto a cada una de las variables de diseño consideradas ha sido llevada a cabo simultáneamente, pero de modo independiente, en los equipos de un cluster de ordenadores.
- Obtención de la respuesta aeroelástica considerando un número elevado de modos de vibración, aplicando la metodología híbrida desarrollada en el capítulo 2. Tal y como se ha explicado en el capítulo 5, esta tarea ha sido distribuida entre los equipos de un cluster de ordenadores personales con lo que los tiempos de cálculo se han reducido de manera notable.
- Análisis de sensibilidad de la velocidad de flameo y la frecuencia reducida respecto a las propiedades mecánicas del tablero, o en su caso, respecto a los espesores de las chapas que conforman la sección transversal del tablero, aplicando la formulación desarrollada en el capítulo 4. Al igual que sucedía con los análisis de sensibilidad de las frecuencias naturales y los modos propios de vibración, estos análisis de sensibilidad respecto a cada una de las variables de diseño consideradas son independientes entre sí y por lo tanto pueden ser resueltos de modo simultáneo por los equipos del cluster de computadoras.
- Comprobación y validación de los resultados de las sensibilidades obtenidas analíticamente con aproximaciones de esas mismas sensibilidades realizadas mediante diferencias finitas, empleando distintos tamaños de paso.

6.2. EJEMPLO 1. PUENTE COLGANTE SOBRE EL ESTRECHO DEL GREAT BELT

El Great Belt es un estrecho situado en Dinamarca, entre las islas de Funen y Zealand, y mide aproximadamente catorce kilómetros. El 14 de Junio de 1998 se abrió al tráfico esta vía de comunicación cuyo elemento más destacado es el puente colgante del sector Este. En la figura 6.2.1 se muestra la ubicación del puente, mientras que en la figura 6.2.2 se muestra una espléndida imagen del mismo.

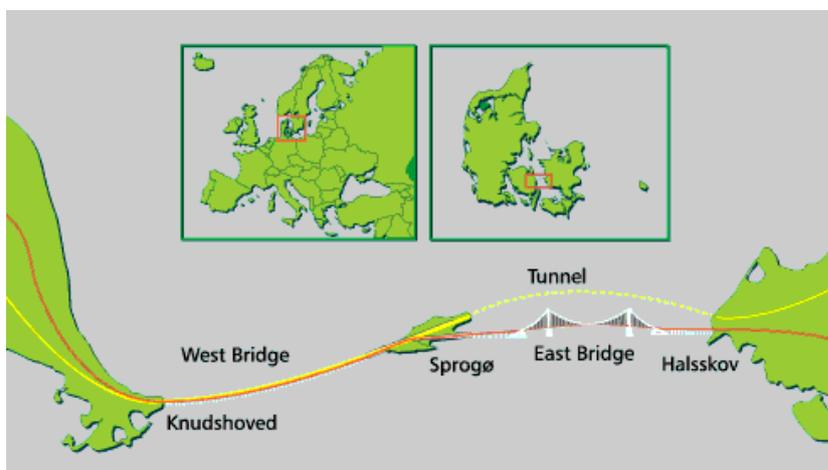


Figura 6.2.1. Ubicación del puente sobre el estrecho del Great Belt.



Figura 6.2.2. Puente del Great Belt.

El diseño del puente corrió a cargo de la empresa consultora COWI^[C1], caracterizándose por la continuidad del tablero bajo las torres, por una gran relación entre la flecha de los cables principales y la longitud del vano central ($1/9$), por la estudiada geometría del cajón en sección aerodinámica del tablero y, en general, por una especial atención al impacto ambiental. Dentro de los estudios aerodinámicos realizados sobre este puente, destacan los de Larsen^[L1] en 1993, previos al diseño final del tablero.

En la tabla 6.2.1, se adjuntan las principales características geométricas y mecánicas del puente, obtenidas de Mosquera^[M1], mientras que en la figura 6.2.3 se presentan algunas imágenes que permiten la definición geométrica de la estructura.

Longitud del vano central (<i>m</i>)	1624
Longitud de los vanos laterales (<i>m</i>)	535
Flecha de los cables principales (<i>m</i>)	180
Distancia entre los cables principales (<i>m</i>)	27
Anchura total del tablero (<i>m</i>)	31
Canto del tablero (<i>m</i>)	4.4
Sección de cada cable principal (<i>m</i> ²)	0.44
Masa de cada cable principal (<i>T/m</i>)	3.74
Momento de inercia a flexión vertical del tablero <i>I_y</i> (<i>m</i> ⁴)	4.0
Momento de inercia a flexión lateral del tablero <i>I_z</i> (<i>m</i> ⁴)	100.0
Momento de inercia a torsión del tablero <i>J</i> (<i>m</i> ⁴)	7.6
Masa del tablero (<i>T/m</i>)	15.26
Momento polar de inercia del tablero (<i>Tm</i> ² / <i>m</i>)	1106.8

Tabla 6.2.1. Propiedades geométricas y mecánicas del Great Belt.

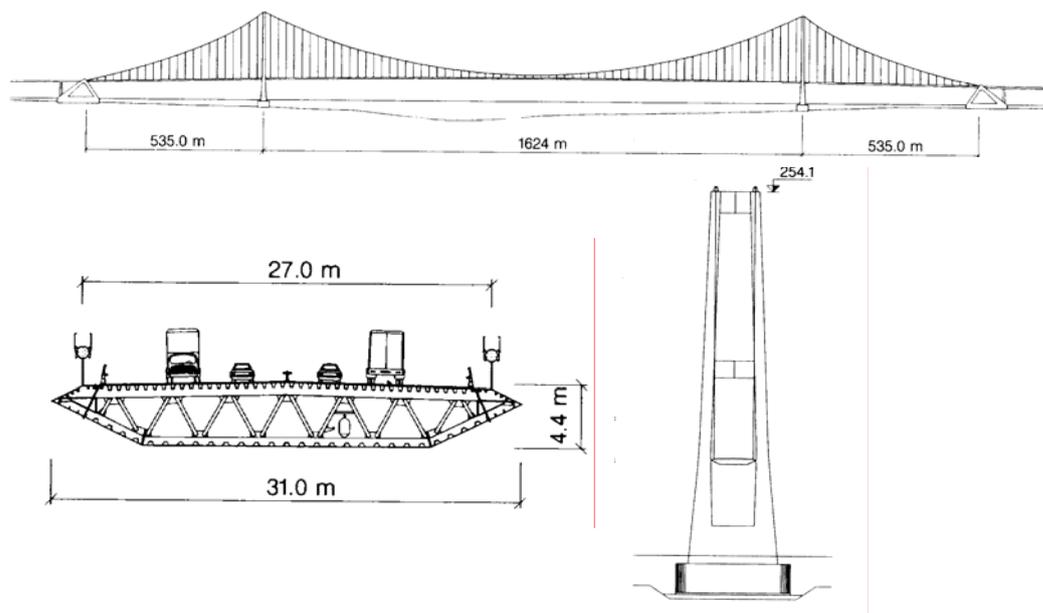


Figura 6.2.3. Alzado y secciones del puente del Great Belt.

Las propiedades mecánicas de la sección transversal consideradas en los cálculos han sido las siguientes:

$$A = 1.35003 \text{ m}^2$$

$$I_y = 4,0 \text{ m}^4$$

$$I_z = 100,0 \text{ m}^4$$

$$J = 7,6 \text{ m}^4$$

Además, se han tomado como valores de la masa a traslación y a torsión no estructurales del tablero por unidad de longitud los siguientes:

$$\underline{m}^{ne} = 4,6622645 \text{ T/m}$$

$$\underline{m}_{\varphi x}^{ne} = 290,40 \text{ Tm}^2 / \text{m}$$

Como material del tablero del puente se ha adoptado un acero de densidad $\rho = 7,85 \text{ T/m}^3$, con lo que la masa a traslación resultante por unidad de longitud de tablero aplicando la fórmula (4.1.34) es igual a la del puente real.

$$\underline{m}_x = \underline{m}_y = \underline{m}_z = 15,26 \text{ T/m}$$

Mientras que la masa a torsión del tablero por unidad de longitud según la fórmula (4.1.35) es también la del tablero real:

$$\underline{m}_{\varphi x} = 1106,8 \text{ Tm}^2 / \text{m}$$

6.2.1. Análisis de la vibración libre

Utilizando el preprocesador gráfico GEOSTAR^[C2] se ha realizado un modelo tridimensional de 286 elementos barra y 208 nudos, del que se adjunta el esquema gráfico en la figura 6.2.4. El cálculo de las frecuencias naturales y modos propios de vibración se ha realizado en teoría de segundo orden para tener en cuenta la no

linealidad geométrica en el comportamiento de esta estructura, tal y como se ha descrito en los apartados precedentes.

Se ha considerado la masa de los elementos barra, tanto del tablero como de los cables principales, y se han definido una serie de barras transversales ficticias de gran rigidez en el tablero y sin peso, para compatibilizar los movimientos del tablero con los extremos inferiores de las péndolas verticales.

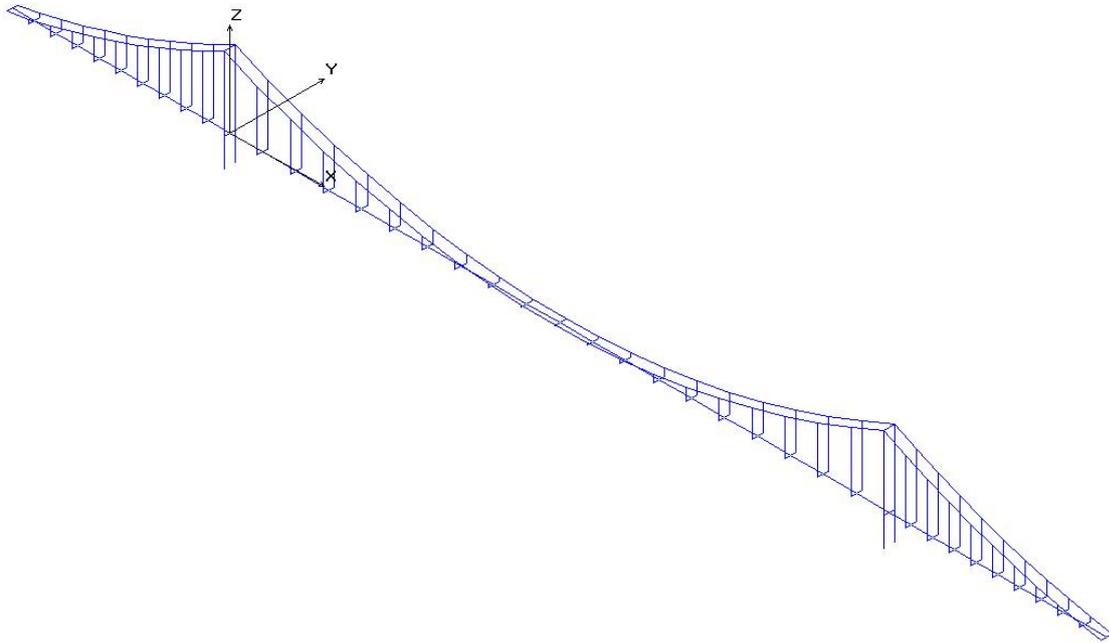


Figura 6.2.4. Modelo de barras del puente sobre el Great Belt.

La numeración de nudos a lo largo de los tres vanos del tablero es correlativa empezando en uno de los extremos con el nudo 1, concluyendo en el otro extremo con el nudo 41. Esto facilitará una rápida comprensión de los gráficos de los modos de vibración y sus sensibilidades que se muestran posteriormente.

A continuación se presentan los resultados obtenidos para las modos propios de vibración y las frecuencias naturales considerando teoría de segundo orden. Se muestran los resultados de los modos que posteriormente se utilizan para obtener el flameo multimodal.

nº	Tipo	frec. (rad/s)	frec (Hz)	Periodo (s)
1	LS	0.325	0.052	19.308
2	VS	0.606	0.096	10.374
3	VA	0.689	0.110	9.122
4	LA	0.782	0.124	8.037
5	VS	0.813	0.129	7.730
6	VA	1.103	0.175	5.699
10	VA	1.238	0.197	5.074
12	VS	1.361	0.217	4.618
13	LS	1.382	0.220	4.546
18	VS	1.559	0.248	4.030
19	VA	1.744	0.278	3.602
20	VS	1.796	0.286	3.499
21	VA	1.819	0.290	3.453
22	TS	1.855	0.295	3.386
27	VS	2.115	0.337	2.971
28	LTA	2.207	0.351	2.848
29	LS	2.433	0.387	2.582
30	TA	2.462	0.392	2.552

Tabla 6.2.2. Frecuencias naturales y modos de vibración del puente sobre el Great Belt.

En la tabla 6.2.3 se comparan los resultados obtenidos en este trabajo con los resultados ofrecidos por investigadores como Larsen^[L1] y Cobo^[C3].

nº	Tipo	Nieto	Larsen	Cobo
1	LS	0.325	0.326	0.328
2	VS	0.606	0.628	0.622
3	VA	0.689	0.723	0.712
4	LA	0.782	0.773	0.765
5	VS	0.813	0.848	0.832
6	VA	1.103		1.123
10	VA	1.238		1.189
12	VS	1.361		1.351
13	LS	1.382	1.175	1.251
18	VS	1.559		1.527
19	VA	1.744		
20	VS	1.796		
21	VA	1.819		
22	TS	1.855	1.747	1.730
27	VS	2.115		
28	LTA	2.207		
29	LS	2.433		
30	TA	2.462	2.406	2.216

Tabla 6.2.3. Frecuencias naturales (rad/s) y modos de vibración del puente sobre el Great Belt según diversos investigadores.

En las tablas anteriores se ha presentado el valor de las frecuencias naturales junto con el orden de los modos de vibración, así como el tipo de cada uno de ellos. Los significados de las letras empleadas en las tablas son los siguientes:

V: modo de vibración fundamentalmente vertical.

L: modo de vibración fundamentalmente lateral.

T: modo de vibración fundamentalmente torsional.

S: modo de vibración simétrico.

A: modo de vibración antimétrico.

La caracterización de un modo propio como vertical, lateral o torsional implica que los movimientos fundamentales de los modos propios son los indicados.

Del análisis de la tabla 6.2.3 se infiere una buena concordancia entre los resultados obtenidos para el puente del Great Belt en este estudio y los obtenidos por otros investigadores.

En las figuras 6.2.5 (I) a 6.2.5 (V) se presentan los 18 modos propios de vibración que han servido posteriormente como punto de partida para obtener la respuesta aeroelástica del puente y los análisis de sensibilidad de la misma.

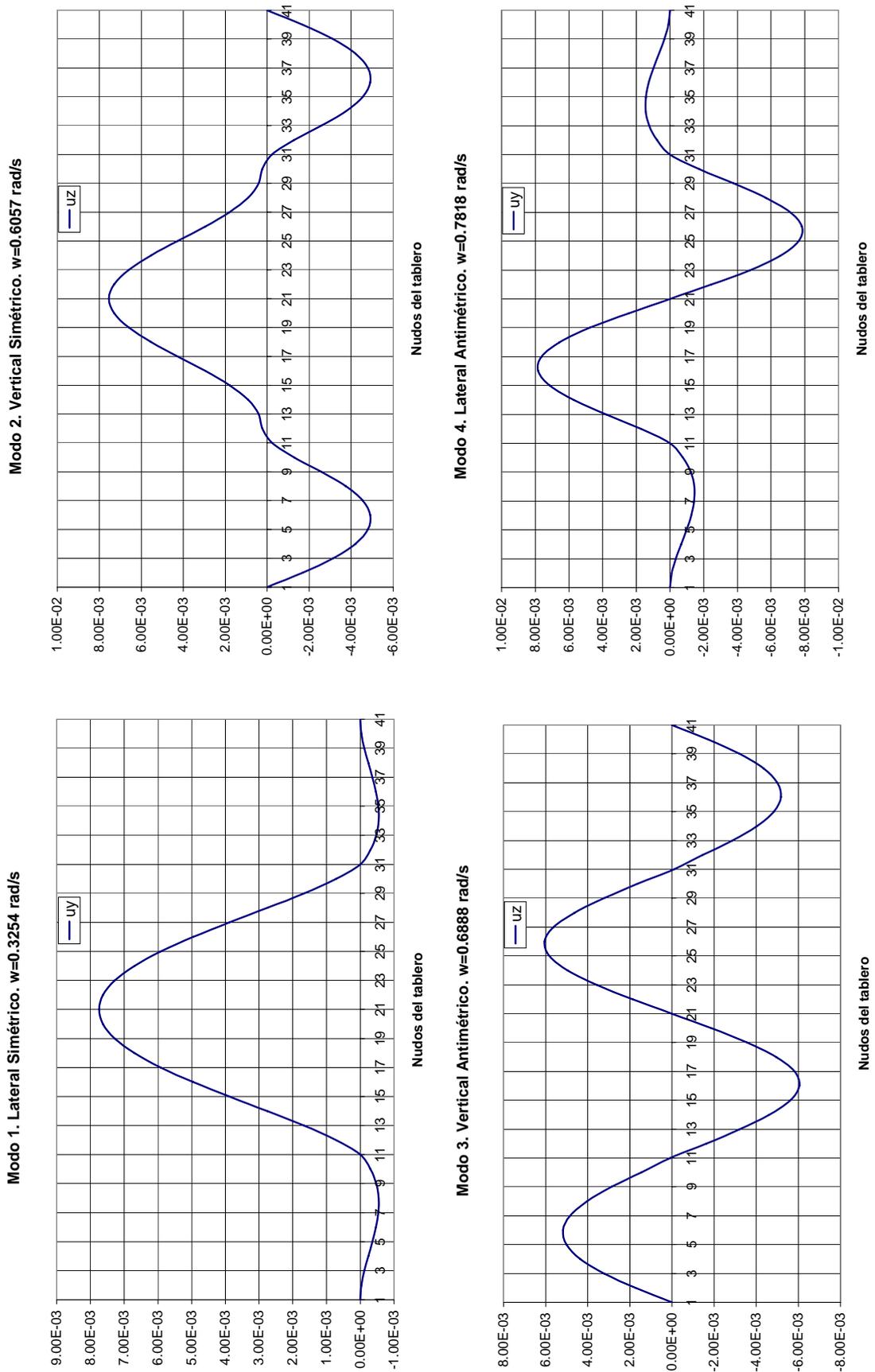


Figura 6.2.5 (I). Modos propios de vibración del puente sobre el Great Belt.

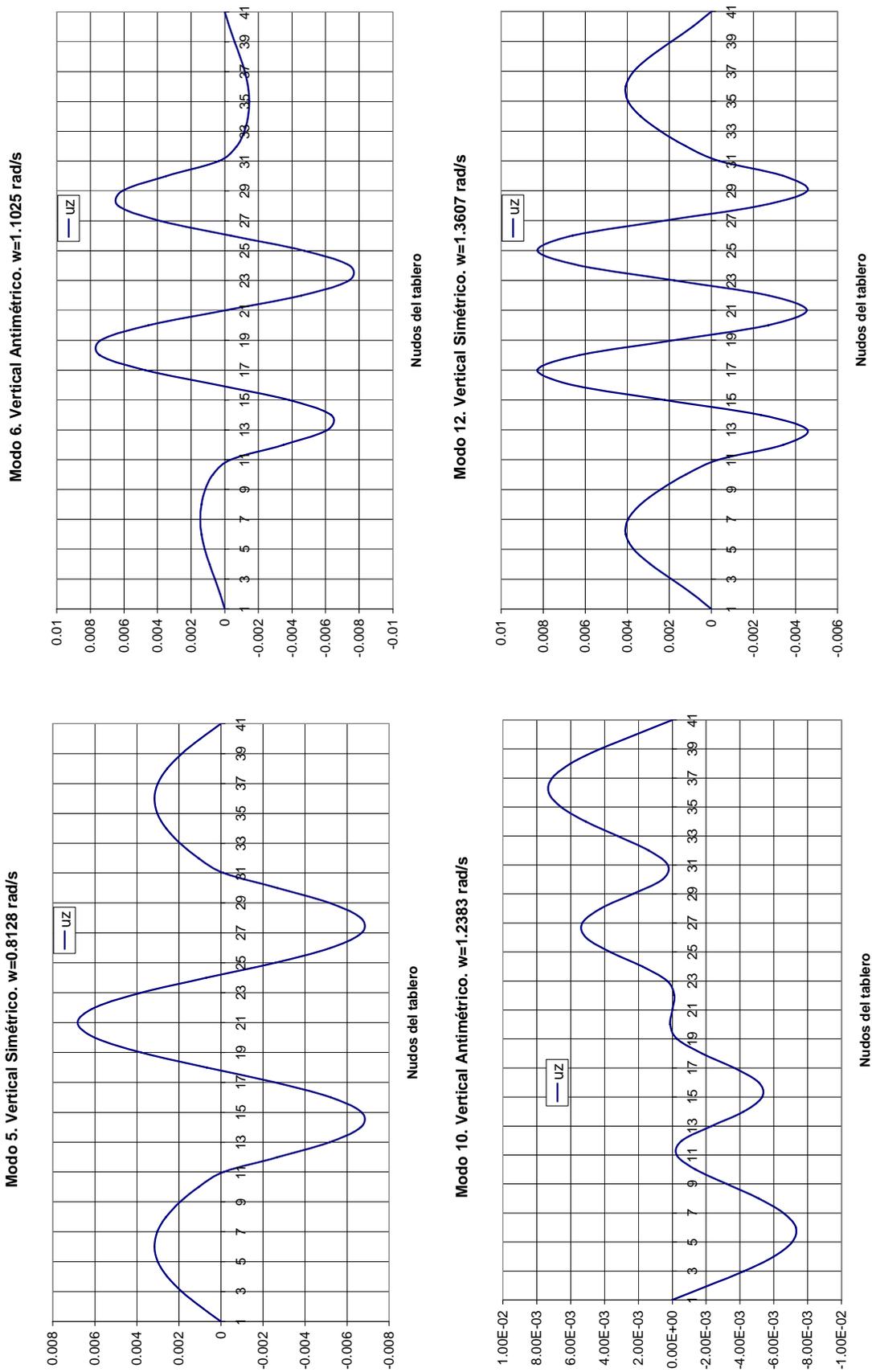


Figura 6.2.5 (II). Modos propios de vibración del puente sobre el Great Belt.

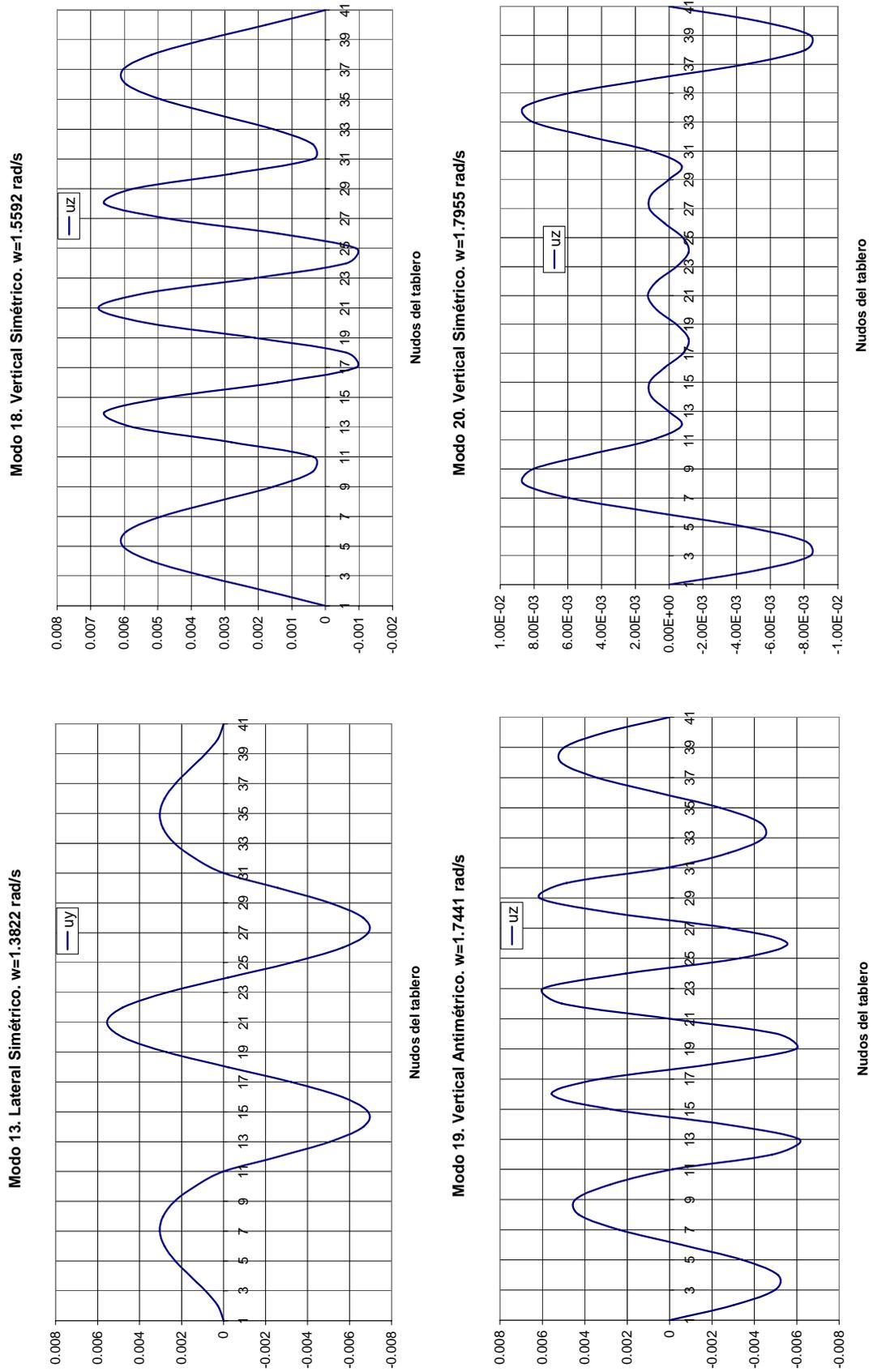


Figura 6.2.5 (III). Modos propios de vibración del puente sobre el Great Belt.

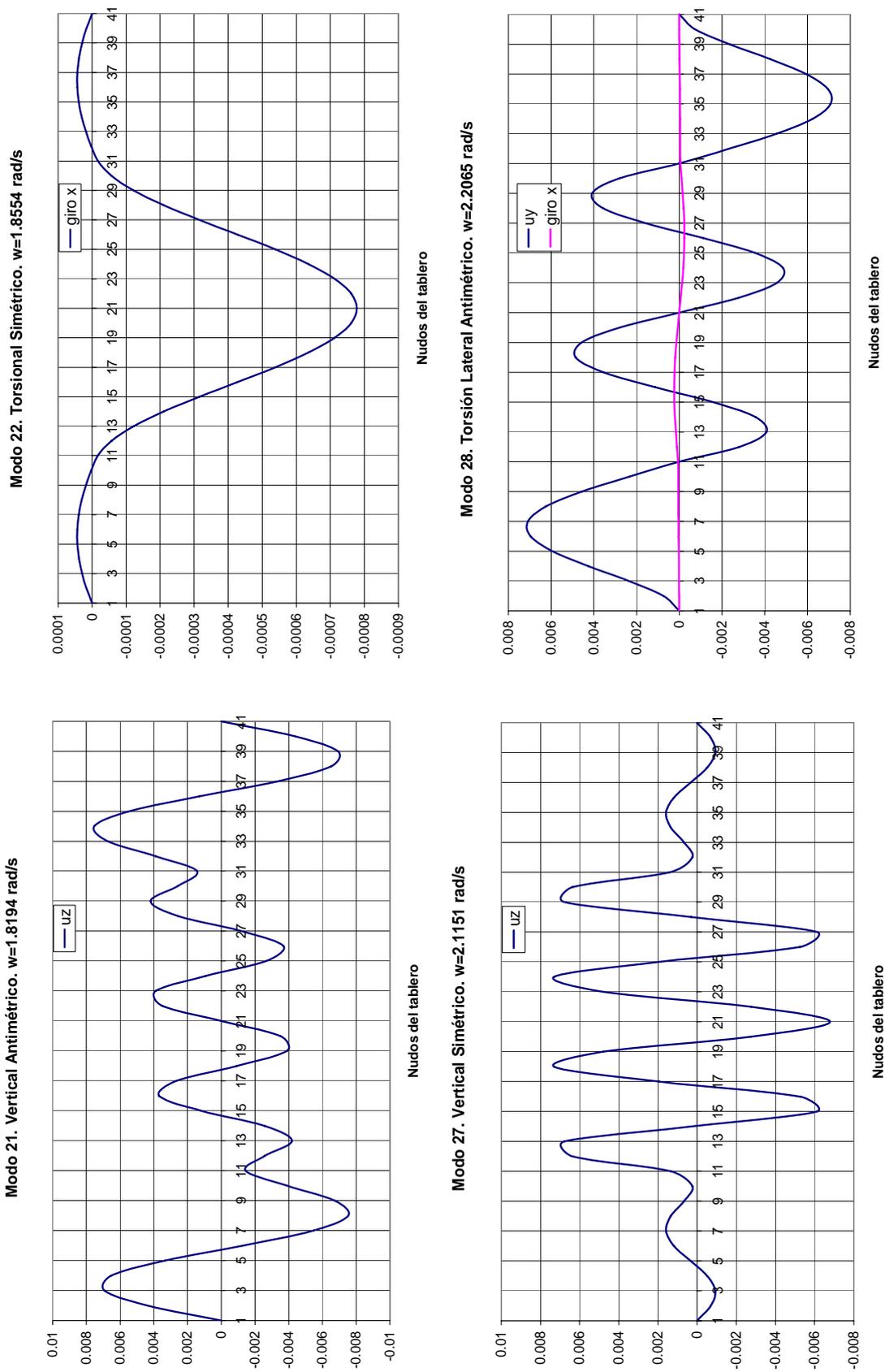


Figura 6.2.5 (IV). Modos propios de vibración del puente sobre el Great Belt.

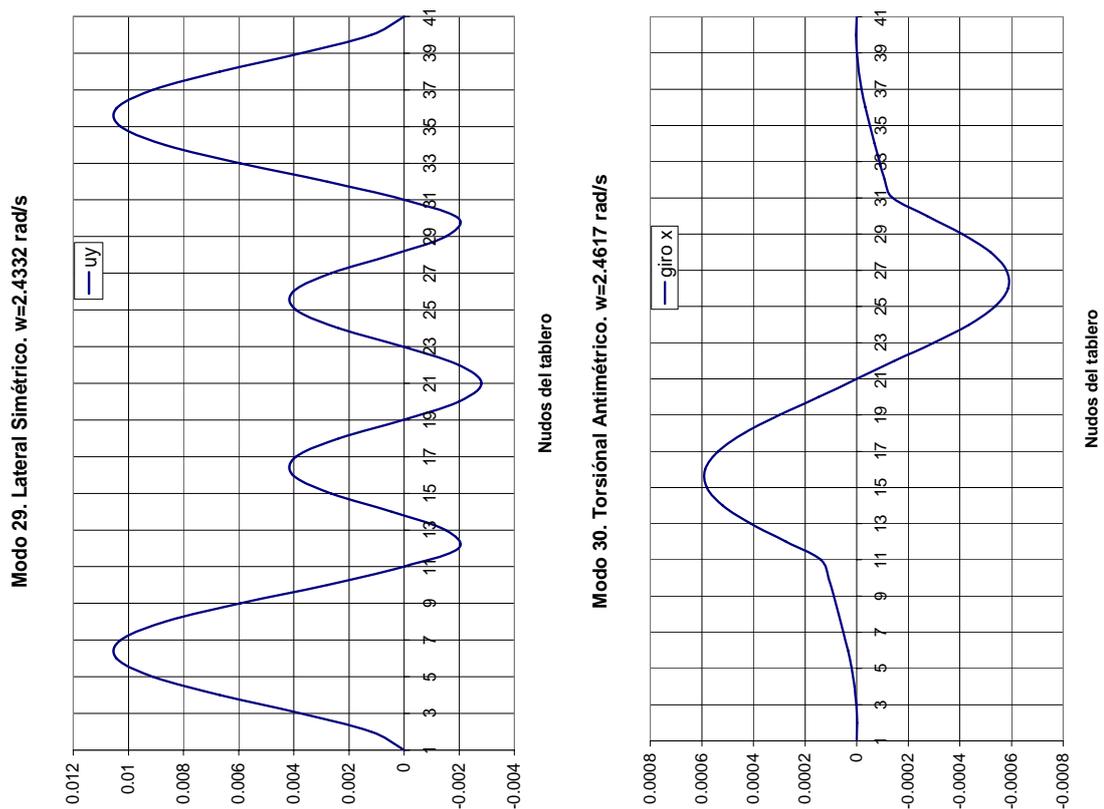


Figura 6.2.5 (V). Modos propios de vibración del puente sobre el Great Belt.

6.2.2. Análisis de sensibilidad de la vibración libre

Una vez conocidas las frecuencias naturales y los modos propios de vibración del puente sobre el estrecho del Great Belt, se han llevado a cabo los análisis de sensibilidad de esas frecuencias y modos propios de vibración, utilizando para ello el módulo correspondiente del programa DIOPTICA, en un entorno de ejecución distribuida.

Se han adoptado como variables de diseño, es decir, las variables respecto a las que se derivan las frecuencias naturales y modos propios de la estructura, las propiedades mecánicas de la sección transversal del tablero. Se han considerado, por tanto, las siguientes cuatro variables de diseño: el área de la sección transversal A , el momento de inercia a flexión vertical I_y , el momento de inercia a flexión lateral I_z y el momento de inercia a torsión J . Se han adoptado estas cuatro variables de diseño, ya que de ellas son función tanto la matriz de rigidez de la estructura como la de masas, por lo que determinan el comportamiento estructural del puente.

Actualmente no existe programa comercial alguno, ya sea de análisis de sensibilidad o de optimización, que permita obtener analíticamente los análisis de sensibilidad de frecuencias naturales y modos propios de vibración de una estructura en teoría de segundo orden, es decir, teniendo en cuenta la no linealidad geométrica. Por tanto, el único modo de contrastar los resultados analíticos que se van a exponer es mediante la obtención de las mismas sensibilidades mediante diferencias finitas, cuyos inconvenientes se expondrán más adelante.

A continuación se presentan los resultados de las sensibilidades de las frecuencias naturales del puente sobre el estrecho del Great Belt respecto a la inercia a flexión vertical I_y . En la tabla 6.2.4 se indica para cada modo de vibración la geometría que presenta y el valor de la sensibilidad respecto a la inercia a flexión vertical de la frecuencia natural asociada a ese modo propio. Además, se ofrecen los resultados de las sensibilidades obtenidas mediante las diferencias finitas centradas del 5%, 1% y 0.5%, así como el error relativo expresado en tanto por ciento entre el resultado analítico obtenido para cada sensibilidad y las aproximaciones mediante diferencias finitas. El análisis de los resultados mostrados permite afirmar que la concordancia entre los resultados analíticos obtenidos y las aproximaciones mediante diferencias finitas es muy buena. Los errores relativos son significativos sólo cuando los valores de las sensibilidades son muy bajos, manteniéndose los errores absolutos en esos casos en magnitudes muy pequeñas. Como es lógico, los valores menores de la sensibilidad se producen para aquellas frecuencias asociadas a modos de vibración que no presentan movimientos verticales y que, en consecuencia, se ven poco afectados por variaciones en la inercia a flexión vertical. En otro orden de cosas, se aprecia como el emplear tamaños de pasos menores no siempre mejora la precisión de los resultados numéricos.

n° y tipo modo	SENSIBIL. ANALITICA	DFC 5%	DFC 1%	DFC 0.5%	error rel. DFC 5%	error rel. DFC 1%	error rel. DFC 0.5%
1 LS	-6.072E-05	-6.089E-05	-6.079E-05	-6.078E-05	0.28	0.11	0.11
2 VS	4.810E-03	4.811E-03	4.810E-03	4.810E-03	0.01	0.00	0.00
3 VA	3.669E-03	3.669E-03	3.669E-03	3.669E-03	0.00	-0.01	-0.01
4 LA	-8.834E-05	-8.963E-05	-8.961E-05	-8.959E-05	1.47	1.44	1.42
5 VS	6.797E-03	6.797E-03	6.797E-03	6.797E-03	-0.01	-0.01	-0.01
6 VA	1.613E-02	1.613E-02	1.613E-02	1.613E-02	0.00	0.00	0.00
10 VA	8.823E-03	8.824E-03	8.823E-03	8.823E-03	0.01	-0.01	-0.01
12 VS	2.092E-02	2.092E-02	2.092E-02	2.092E-02	0.00	0.00	0.00
13 LS	-1.898E-04	-1.939E-04	-1.938E-04	-1.938E-04	2.13	2.11	2.11
18 VS	1.629E-02	1.629E-02	1.629E-02	1.629E-02	0.00	0.00	0.00
19 VA	4.708E-02	4.708E-02	4.708E-02	4.708E-02	0.00	0.00	0.00
20 VS	5.212E-02	5.212E-02	5.212E-02	5.212E-02	0.00	0.00	0.00
21 VA	5.530E-02	5.530E-02	5.530E-02	5.530E-02	0.01	0.00	0.00
22 TS	-2.950E-03	-2.951E-03	-2.951E-03	-2.951E-03	0.06	0.06	0.06
27 VS	7.561E-02	5.950E-02	7.561E-02	7.561E-02	-21.31	0.00	0.00
28 LTA	-7.276E-04	-7.514E-04	-7.513E-04	-7.513E-04	3.28	3.27	3.26
29 LS	-1.281E-04	-1.307E-04	-1.307E-04	-1.307E-04	2.09	2.07	2.07
30 TA	-3.057E-03	1.244E-03	-3.069E-03	-3.069E-03	-140.68	0.40	0.40

Tabla 6.2.4. Sensibilidades de las frecuencias naturales del puente sobre el estrecho del Great

Belt respecto a la inercia a flexión vertical del tablero I_y .

A continuación, en la tabla 6.2.5, se muestran los resultados de las sensibilidades de las frecuencias naturales respecto a la inercia a flexión lateral del tablero, I_z , del puente sobre el estrecho del Great Belt. La información mostrada es la misma que en la tabla 6.2.4, es decir, el número y tipo de modo de vibración, el resultado de la sensibilidad analítica, los resultados de las aproximaciones mediante diferencias finitas centradas del 5%, 1% y 0.5%, así como los errores relativos, expresados en porcentaje, entre el resultado analítico y las mencionadas aproximaciones mediante diferencias finitas. Analizando los resultados mostrados, puede apreciarse como las sensibilidades de las frecuencias naturales asociadas a modos de vibración verticales son nulas ya que esos modos presentan movimientos verticales que no dependen de la inercia a flexión lateral. En general, se aprecia una muy buena coincidencia entre los resultados obtenidos analíticamente y las aproximaciones mediante diferencias finitas centradas, especialmente para tamaños de paso pequeños.

n° y tipo modo	SENSIBIL. ANALITICA	DFC 5%	DFC 1%	DFC 0.5%	error rel. DFC 5%	error rel. DFC 1%	error rel. DFC 0.5%
1 LS	6.532E-04	6.532E-04	6.532E-04	6.532E-04	0.01	0.00	0.00
2 VS	2.551E-23	-5.283E-13	-2.413E-12	1.755E-11			
3 VA	2.677E-19	-3.173E-12	4.863E-10	1.979E-10			
4 LA	2.407E-03	2.407E-03	2.407E-03	2.407E-03	0.02	0.00	0.00
5 VS	2.367E-23	3.069E-13	3.350E-13	5.640E-13			
6 VA	2.087E-20	-1.920E-12	3.191E-10	1.294E-10			
10 VA	1.648E-17	-2.225E-11	3.646E-09	1.464E-09			
12 VS	6.447E-22	3.034E-04	-2.585E-12	4.998E-13			
13 LS	4.140E-03	3.626E-03	4.129E-03	4.137E-03	-12.41	-0.27	-0.07
18 VS	1.657E-23	-1.480E-13	-7.100E-13	2.600E-12			
19 VA	9.322E-20	-2.666E-12	4.849E-10	1.963E-10			
20 VS	-7.131E-23	-2.910E-13	-2.120E-12	4.330E-12			
21 VA	6.450E-20	-1.108E-12	2.042E-10	8.561E-11			
22 TS	-2.843E-03	-2.842E-03	-2.843E-03	-2.843E-03	-0.01	0.00	0.00
27 VS	1.876E-22	-2.150E-13	-9.850E-13	-1.560E-12			
28 LTA	5.779E-03	5.717E-03	5.777E-03	5.779E-03	-1.08	-0.04	-0.01
29 LS	1.083E-02	8.444E-03	1.083E-02	1.083E-02	-22.04	-0.01	0.00
30 TA	-1.206E-05	2.019E-03	-9.087E-06	-1.131E-05		-24.63	-6.16

Tabla 6.2.5. Sensibilidades de las frecuencias naturales del puente sobre el estrecho del Great

Belt respecto a la inercia a flexión lateral del tablero I_z .

Seguidamente, se presenta la tabla 6.2.6, la cual contiene los resultados obtenidos al calcular las sensibilidades de las frecuencias naturales respecto a la inercia a torsión del tablero, J . La estructura de la tabla de resultados es idéntica a las dos anteriores, y por lo tanto, contiene los resultados analíticos obtenidos, las aproximaciones realizadas mediante diferencias finitas centradas y los errores relativos expresados en tanto por ciento. Si se repasa la formulación desarrollada en el capítulo 4 se observa que para obtener las sensibilidades de las frecuencias naturales y los modos propios de vibración respecto a la inercia a torsión del tablero, varios términos, como por ejemplo la derivada de la matriz de masas o del vector de cargas debido al peso propio, no dependen de J , y por lo tanto son nulos. Esto significa que las sensibilidades de las frecuencias naturales y de los modos propios de vibración respecto a la inercia a torsión del tablero, obtenidas considerando la masa del tablero constante o variable, son idénticas. Al igual que sucedía en el caso anterior, las sensibilidades de las frecuencias asociadas a los modos de vibración verticales son nulas debido a que los movimientos verticales no dependen

de la inercia a torsión del tablero. En líneas generales, la concordancia entre los resultados obtenidos mediante diferencias finitas y los obtenidos analíticamente es muy buena.

nº y tipo modo	SENSIBIL. ANALITICA	DFC 5%	DFC 1%	DFC 0.5%	error rel. DFC 5%	error rel. DFC 1%	error rel. DFC 0.5%
1 LS	3.444E-06	3.433E-06	3.487E-06	3.444E-06	-0.34	1.25	0.00
2 VS	1.266E-24	1.985E-11	-1.015E-10	8.800E-11			
3 VA	1.815E-19	5.952E-11	-3.231E-09	-3.446E-09			
4 LA	9.440E-04	9.450E-04	9.441E-04	9.441E-04	0.10	0.00	0.00
5 VS	2.318E-24	1.472E-12	-4.300E-11	6.567E-11			
6 VA	7.983E-21	2.638E-11	-2.098E-09	-2.231E-09			
10 VA	1.258E-17	4.866E-10	-2.368E-08	-2.624E-08			
12 VS	6.061E-24	-7.316E-12	-2.829E-11	2.277E-11			
13 LS	2.665E-05	2.668E-05	2.666E-05	2.665E-05	0.10	0.02	0.00
18 VS	-6.193E-25	2.421E-12	-5.250E-11	9.474E-11			
19 VA	6.157E-20	4.804E-11	-3.199E-09	-3.383E-09			
20 VS	-3.943E-24	-5.908E-12	-1.168E-10	1.247E-10			
21 VA	4.542E-20	1.558E-11	-1.427E-09	-1.380E-09			
22 TS	3.737E-02	3.739E-02	3.737E-02	3.737E-02	0.06	0.00	0.00
27 VS	1.393E-22	-1.303E-11	-3.138E-11	5.434E-11			
28 LTA	9.995E-03	1.008E-02	9.998E-03	9.995E-03	0.81	0.03	0.01
29 LS	1.210E-04	1.215E-04	1.211E-04	1.211E-04	0.35	0.01	0.00
30 TA	5.363E-02	5.348E-02	5.363E-02	5.363E-02	-0.28	-0.01	0.00

Tabla 6.2.6. Sensibilidades de las frecuencias naturales del puente sobre el estrecho del Great Belt respecto a la inercia a torsión del tablero J .

Por último, en la tabla 6.2.7 se recogen los resultados obtenidos para las sensibilidades de las frecuencias naturales respecto al área, A , de la sección transversal del tablero. A diferencia de lo que sucedía en los dos casos anteriores, las frecuencias asociadas a todos los modos de vibración tienen valores de sensibilidad no nulos ya que todos los modos de vibración dependen del área de la sección transversal del tablero, o lo que es lo mismo, dependen de la masa del tablero. La información facilitada en la tabla que se muestra a continuación es la misma que en los tres casos precedentes. Se comprueba como los valores obtenidos analíticamente y los aproximados mediante diferencias finitas centradas son muy similares, especialmente para pequeños valores del tamaño de paso en las diferencias finitas. Se verifica que, en general, las sensibilidades de las

frecuencias naturales respecto al área de la sección transversal del tablero son varios órdenes de magnitud superiores a las sensibilidades respecto a las restantes variables de diseño, lo que debe hacer reflexionar sobre la gran importancia que tiene el considerar la masa del tablero como variable al acometer un proceso de optimización en este tipo de estructuras.

n° y tipo modo	SENSIBIL. ANALITICA	DFC 5%	DFC 1%	DFC 0.5%	error rel. DFC 5%	error rel. DFC 1%	error rel. DFC 0.5%
1 LS	-2.554E-02	-2.553E-02	-2.552E-02	-2.552E-02	-0.03	-0.06	-0.06
2 VS	-3.171E-02	-3.173E-02	-3.172E-02	-3.172E-02	0.04	0.02	0.02
3 VA	-1.563E-02	-1.563E-02	-1.564E-02	-1.564E-02	0.01	0.08	0.08
4 LA	-1.061E-01	-1.060E-01	-1.061E-01	-1.061E-01	-0.02	0.08	0.08
5 VS	-1.547E-02	-1.546E-02	-1.546E-02	-1.546E-02	-0.03	-0.05	-0.05
6 VA	-3.102E-02	-3.098E-02	-3.098E-02	-3.098E-02	-0.15	-0.16	-0.16
10 VA	-2.801E-02	1.163E-01	3.025E-03	-2.804E-02	-515.08	-110.80	0.11
12 VS	-8.213E-02	-8.211E-02	-8.209E-02	-8.209E-02	-0.02	-0.04	-0.05
13 LS	-1.167E-01	-8.894E-02	-1.154E-01	-1.166E-01	-23.77	-1.12	-0.11
18 VS	-1.746E-01	-1.746E-01	-1.746E-01	-1.746E-01	0.03	-0.01	-0.01
19 VA	-7.551E-02	-7.546E-02	-7.545E-02	-7.545E-02	-0.06	-0.07	-0.07
20 VS	-7.898E-02	-7.905E-02	-7.903E-02	-7.903E-02	0.09	0.06	0.06
21 VA	-9.062E-02	-9.064E-02	-9.062E-02	-9.062E-02	0.03	0.00	0.00
22 TS	3.591E-02	3.614E-02	3.614E-02	3.614E-02	0.62	0.64	0.64
27 VS	-1.348E-01	1.984E-02	-1.347E-01	-1.347E-01	-114.72	-0.07	-0.07
28 LTA	-2.088E-01	-2.081E-01	-2.107E-01	-2.108E-01	-0.32	0.93	0.97
29 LS	-5.351E-01	-5.153E-01	-5.351E-01	-5.352E-01	-3.70	0.00	0.02
30 TA	-6.664E-02	-8.513E-02	-6.790E-02	-6.786E-02	27.74	1.89	1.83

Tabla 6.2.7. Sensibilidades de las frecuencias naturales del puente sobre el estrecho del Great Belt respecto al área del tablero *A*.

A continuación se muestran los resultados obtenidos al evaluar las sensibilidades de los modos propios de vibración del puente del Great Belt respecto a las propiedades mecánicas del tablero utilizando el módulo correspondiente del programa DIOPTICA. Los resultados se presentan gráficamente, y junto con el resultado analítico, se muestran las aproximaciones realizadas mediante diferencias finitas centradas empleando diferentes tamaños de paso.

La metodología que se va seguir en la exposición de estos resultados únicamente muestra las sensibilidades o derivadas de los modos que sean significativas, esto es, aquellos modos en los que la variable de diseño o derivación tenga influencia. Por ejemplo, la derivada de un modo de vibración lateral con respecto a la inercia a flexión vertical del tablero resulta nula, por lo que no se muestra.

En las derivadas o sensibilidades de los modos de los que se adjuntan resultados, únicamente se muestran las componentes del modo con derivada significativa. A modo de ejemplo, en la derivada de un modo de vibración vertical se muestran las componentes de las sensibilidades del movimiento vertical del modo; el resto de sensibilidades o son nulas, o varios órdenes de magnitud inferiores.

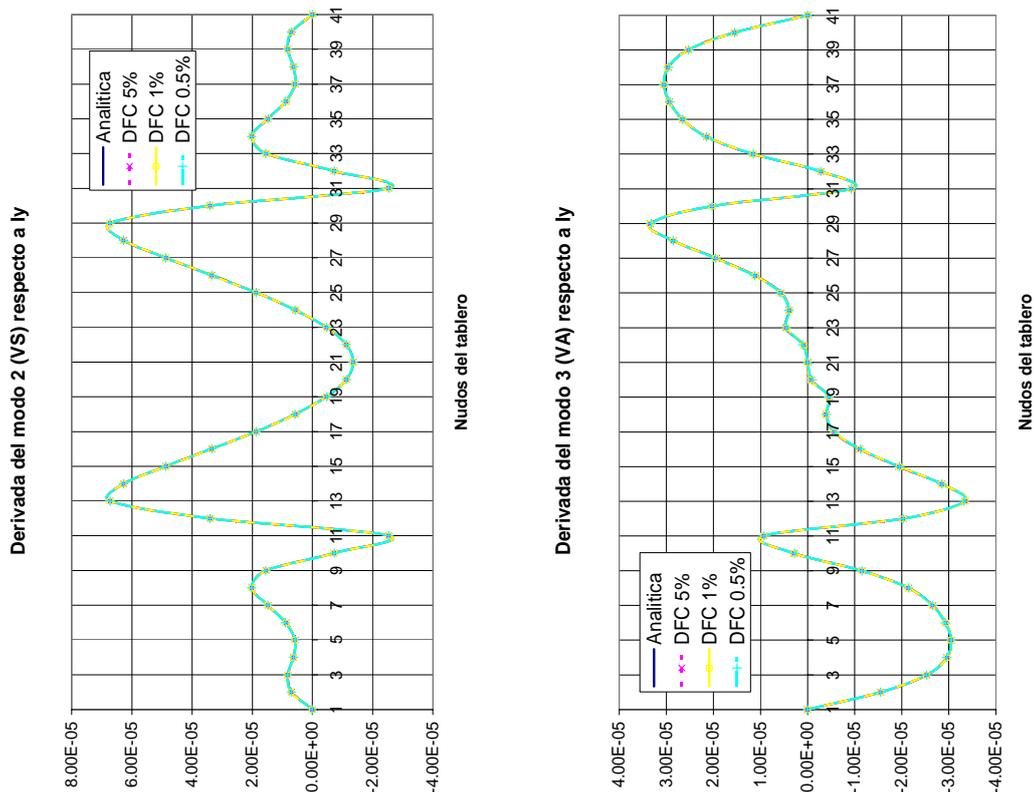


Figura 6.2.6 (I). Sensibilidades de los modos propios de vibración del puente sobre el Great Belt.

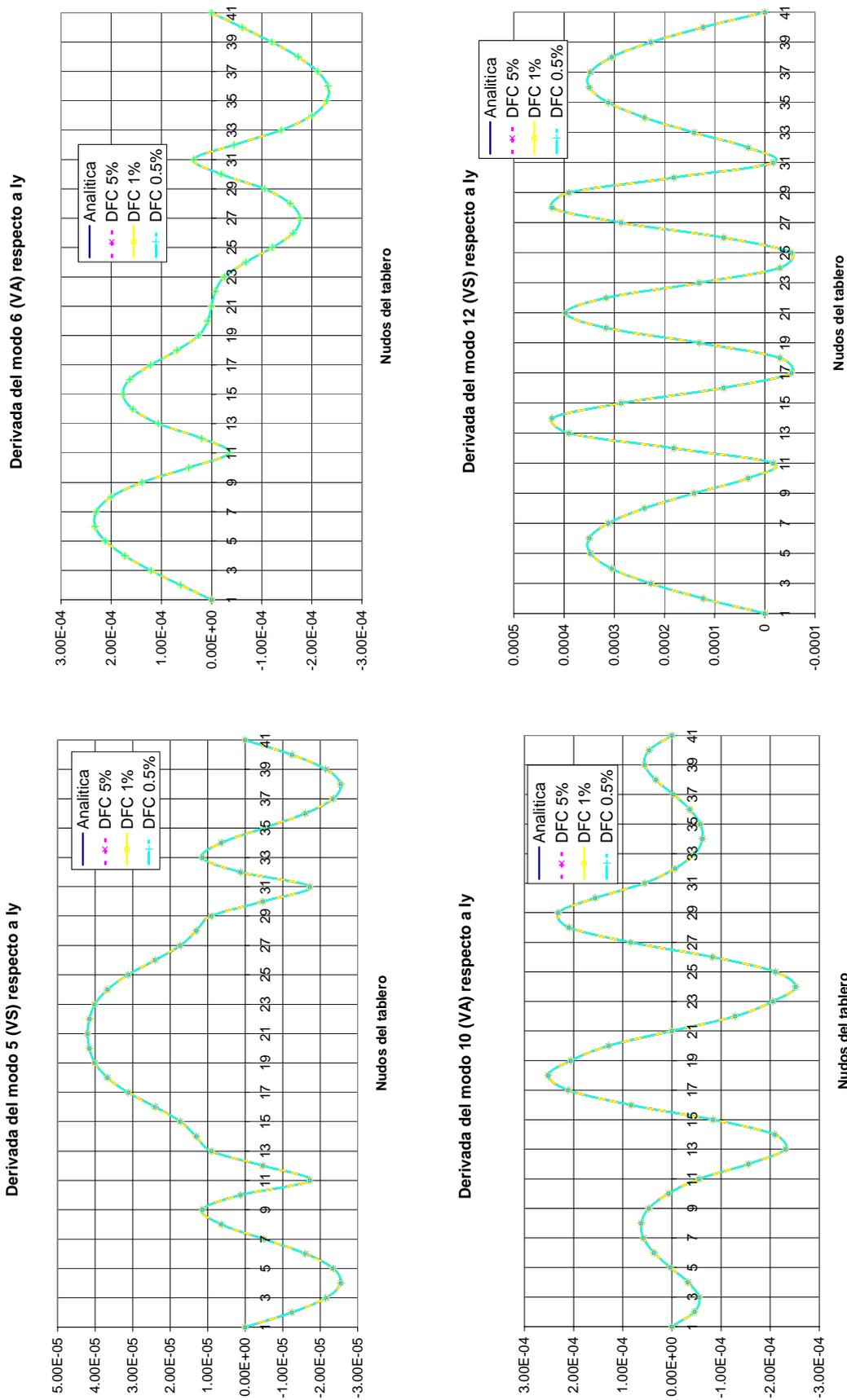


Figura 6.2.6 (II). Sensibilidades de los modos propios de vibración del puente sobre el Great Belt.

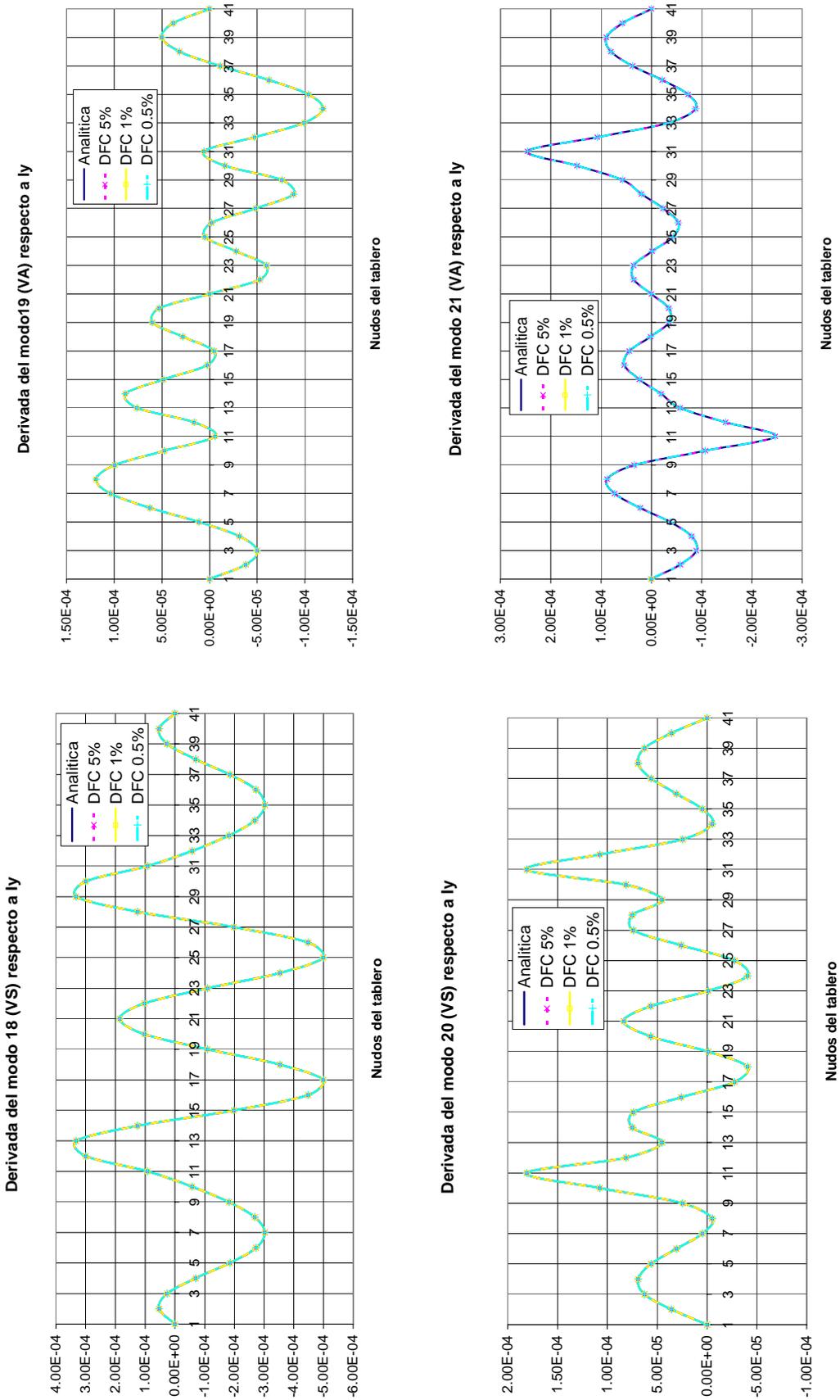


Figura 6.2.6 (III). Sensibilidades de los modos propios de vibración del puente sobre el Great Belt.

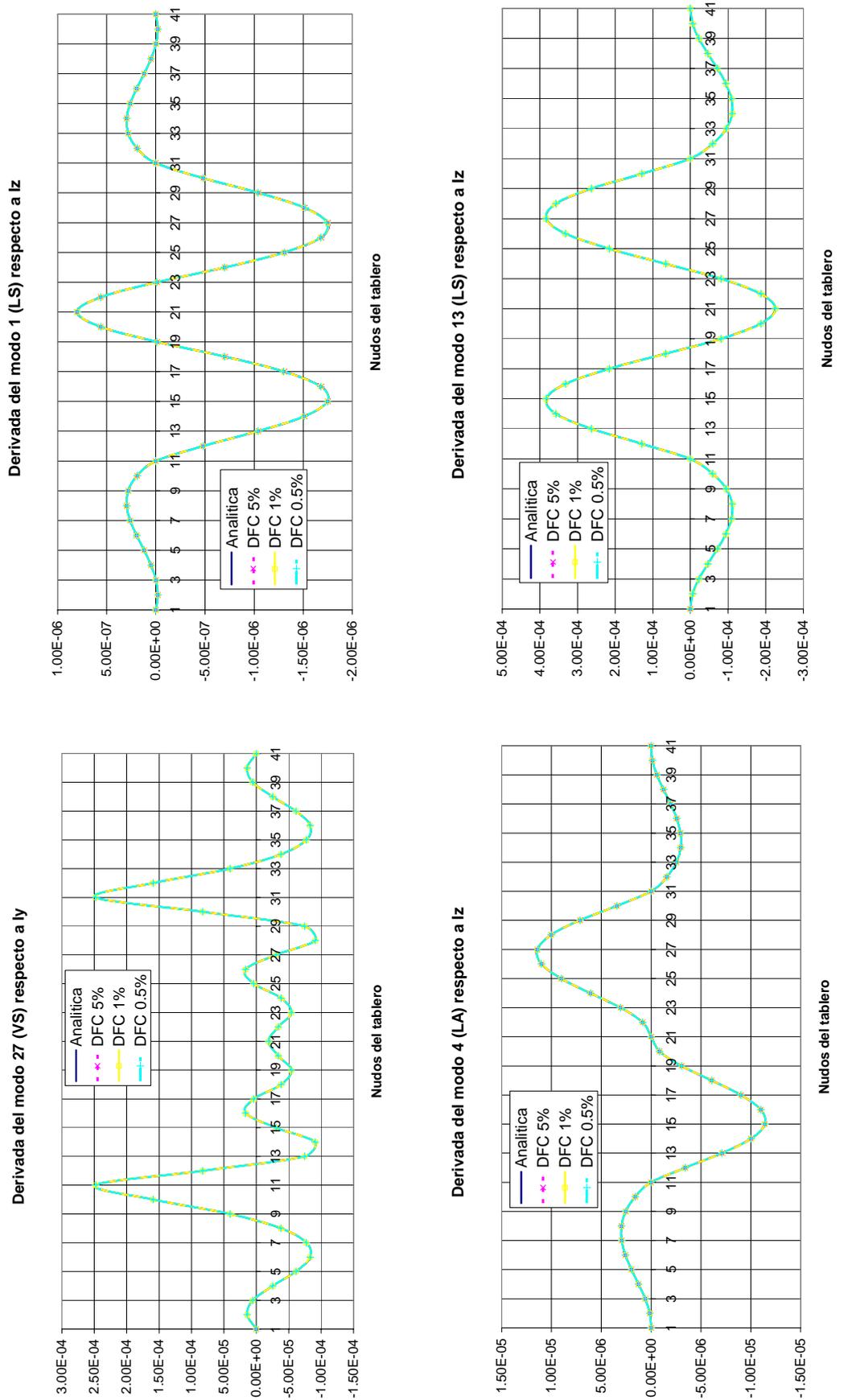


Figura 6.2.6 (IV). Sensibilidades de los modos propios de vibración del puente sobre el Great Belt.

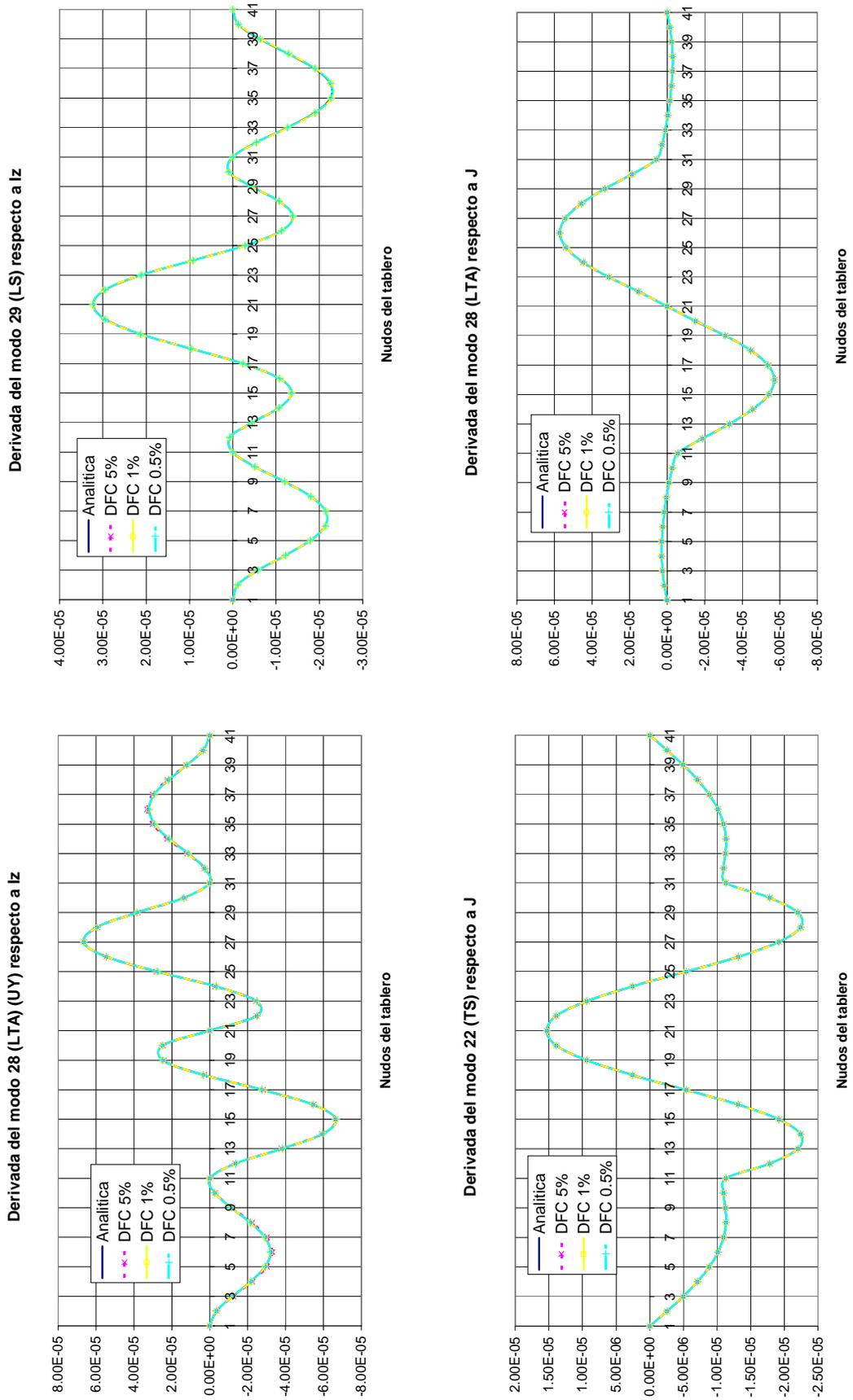


Figura 6.2.6 (V). Sensibilidades de los modos propios de vibración del puente sobre el Great Belt.

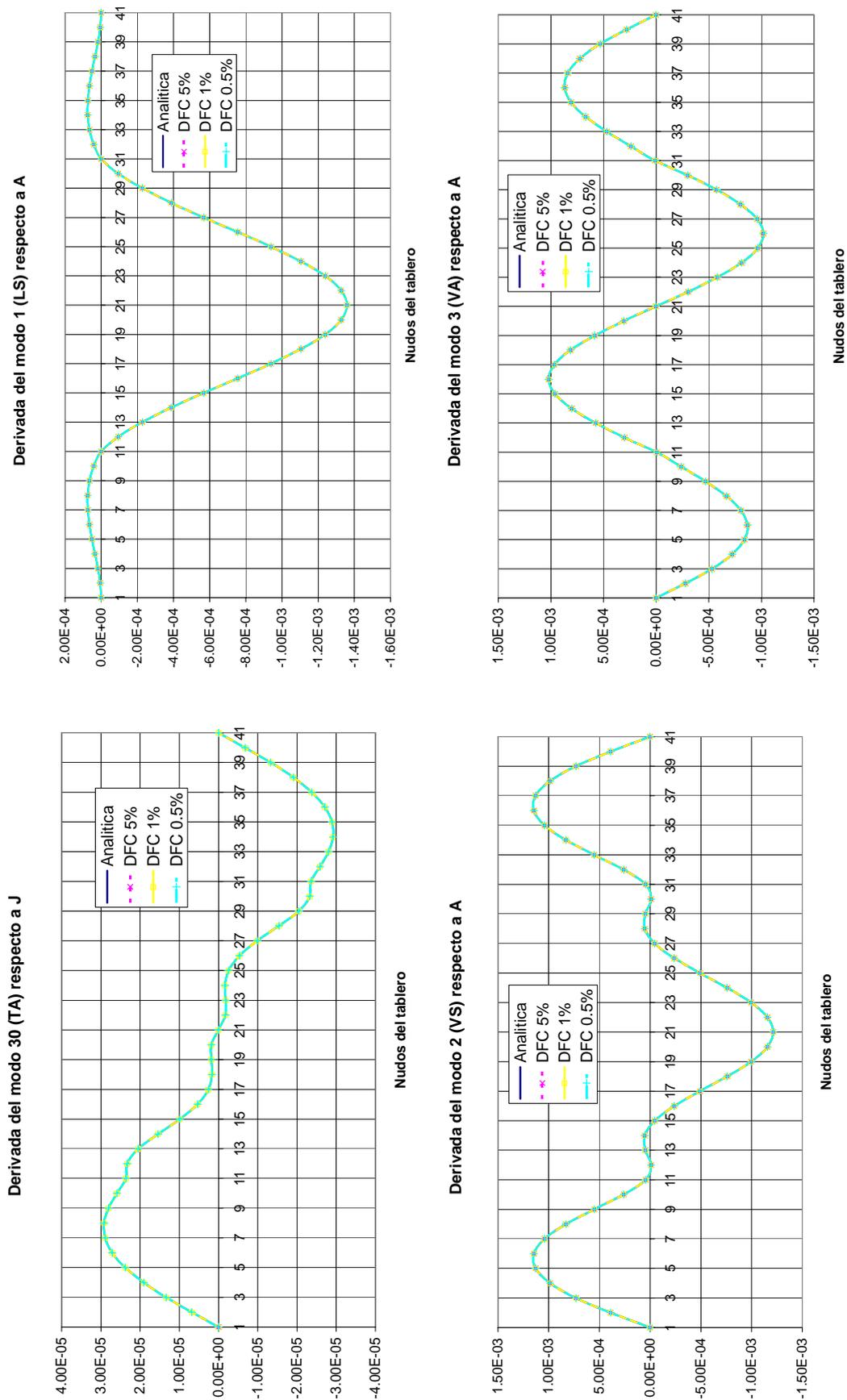
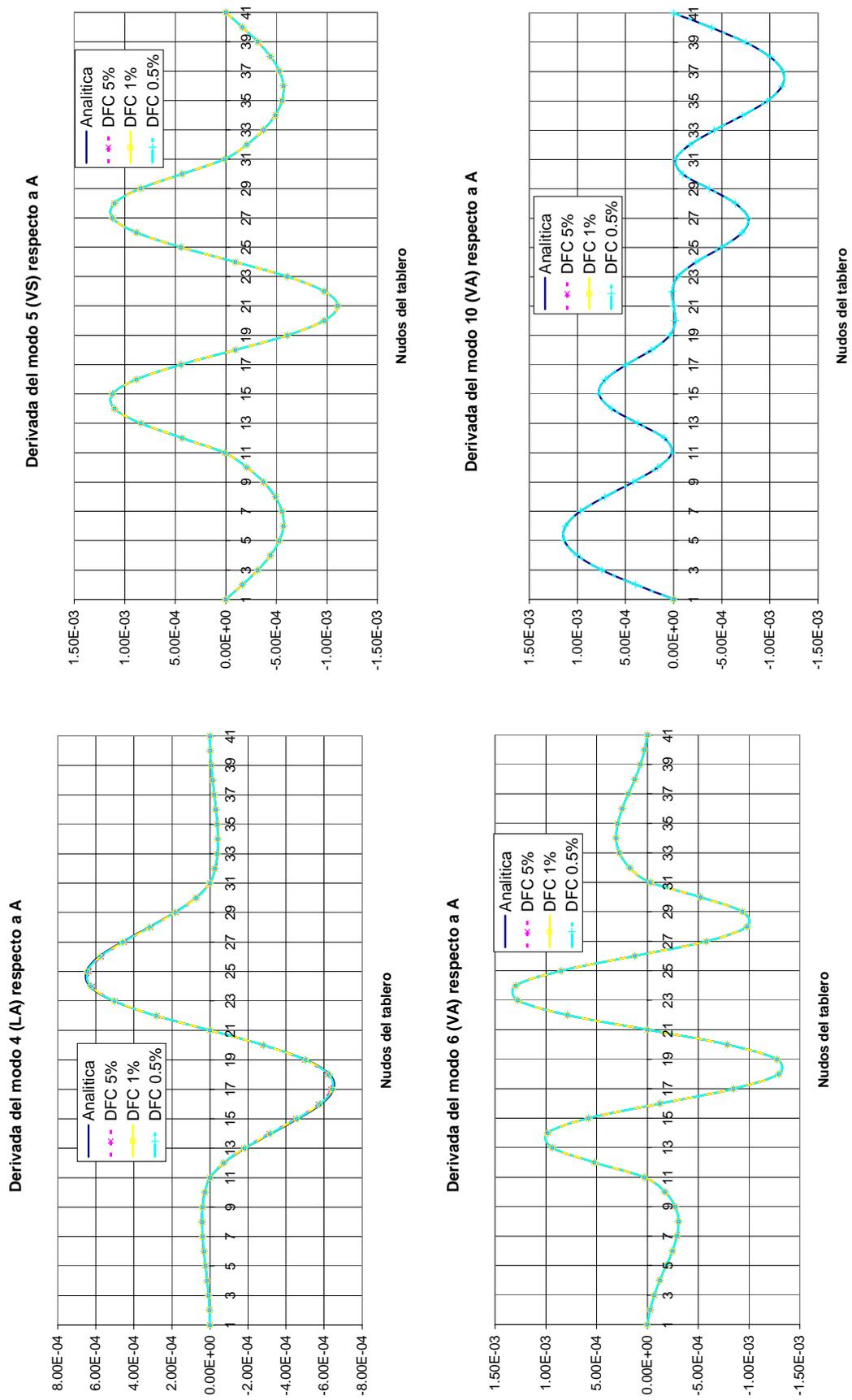


Figura 6.2.6 (VI). Sensibilidades de los modos propios de vibración del puente sobre el Great Belt



Figura

6.2.6 (VII). Sensibilidades de los modos propios de vibración del puente sobre el Great Belt

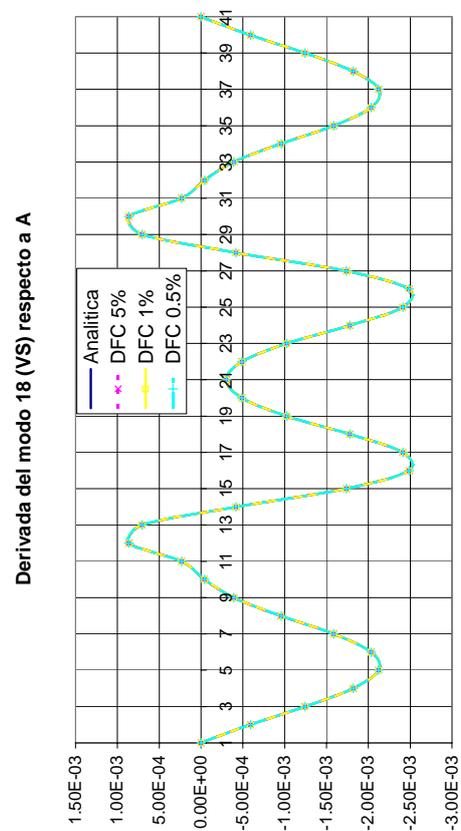
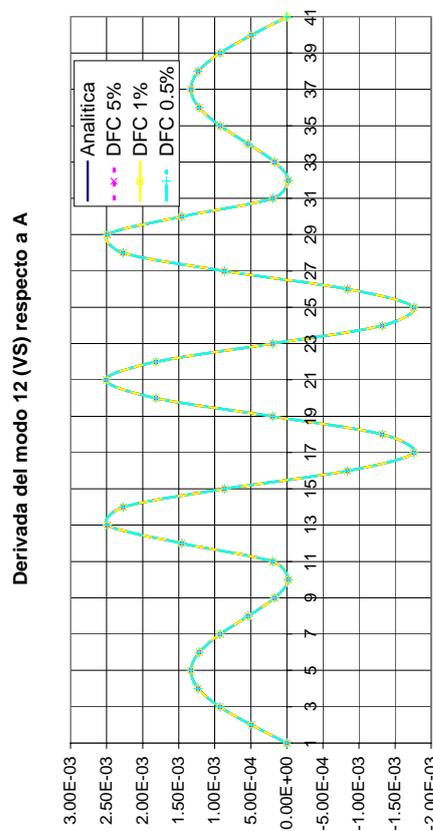
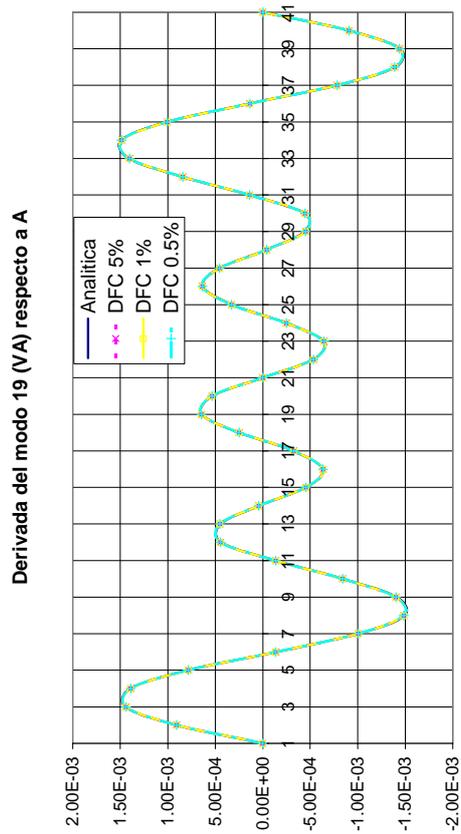
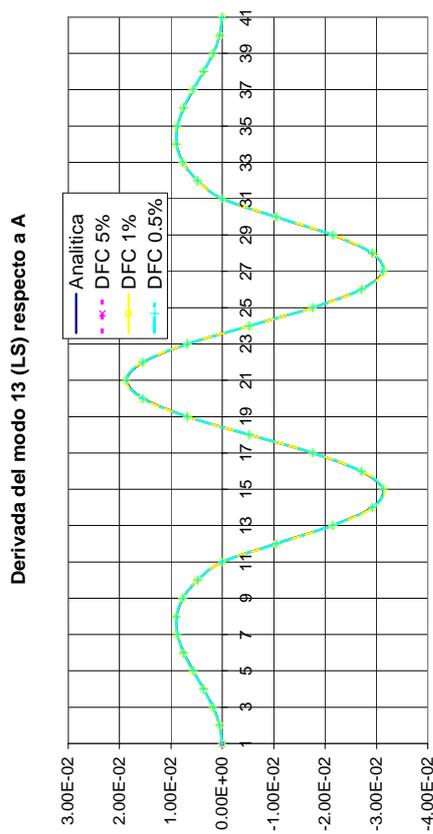


Figura 6.2.6 (VIII). Sensibilidades de los modos propios de vibración del puente sobre el Great Belt

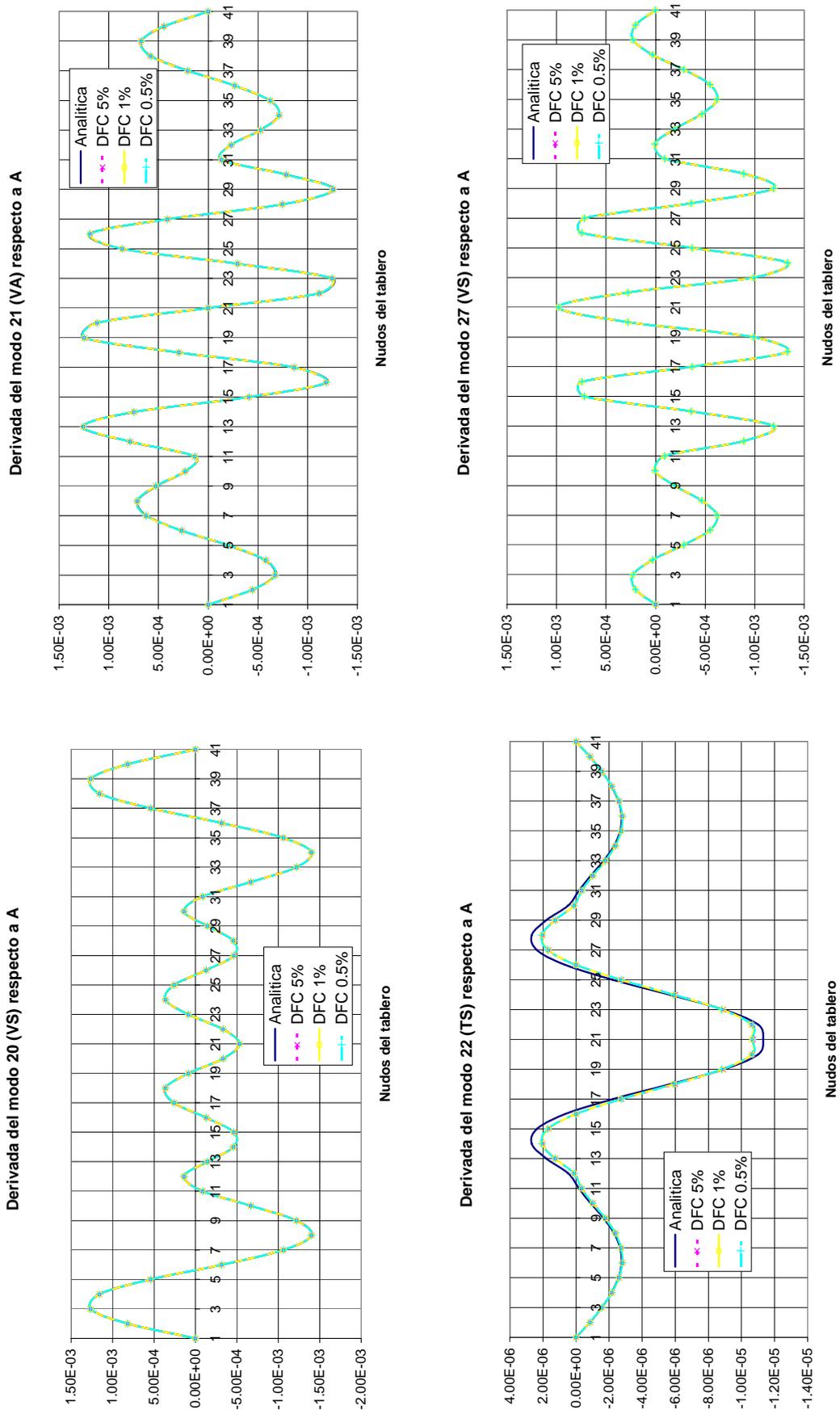


Figura 6.2.6 (IX). Sensibilidades de los modos propios de vibración del puente sobre el Great Belt

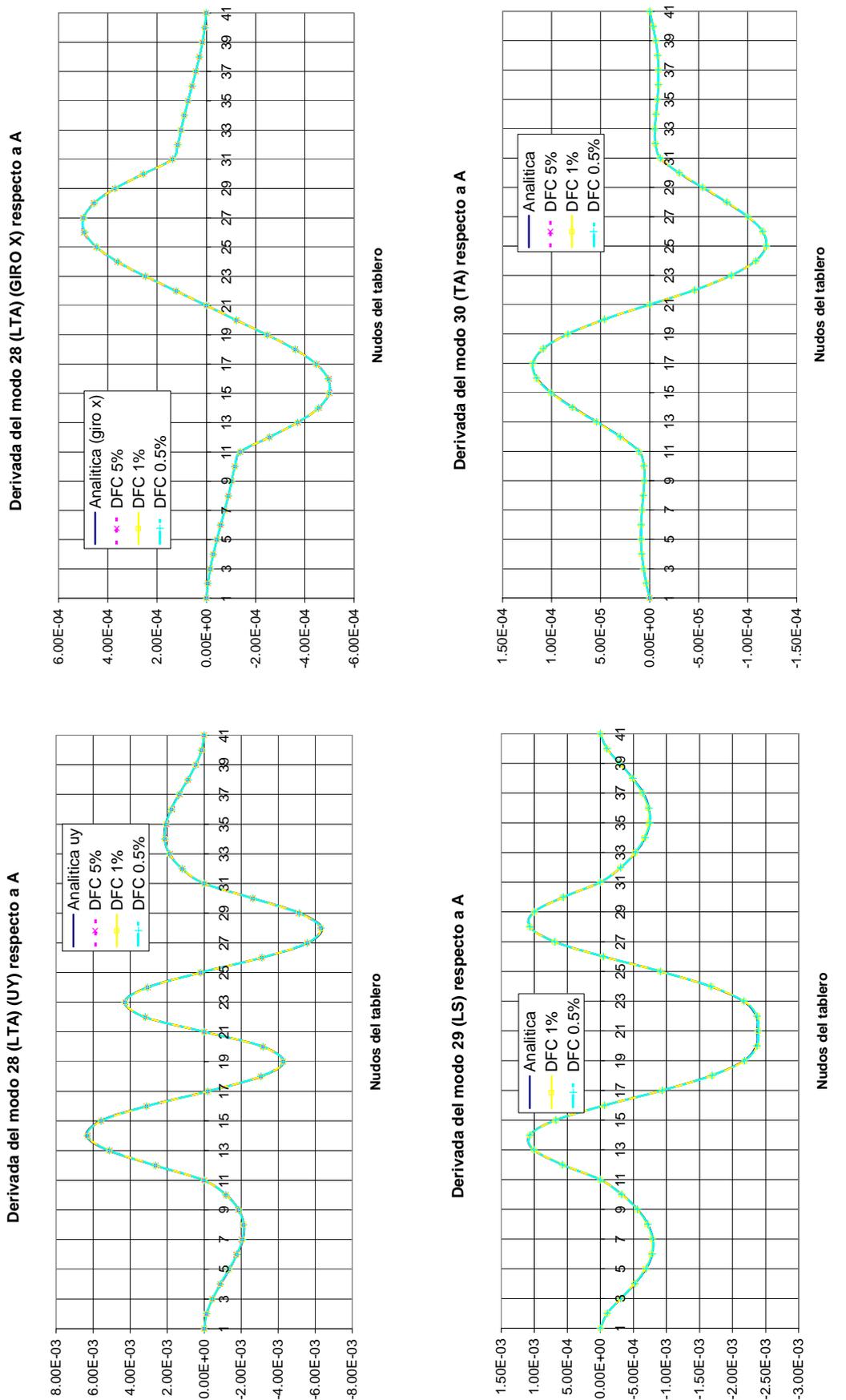


Figura 6.2.6 (X). Sensibilidades de los modos propios de vibración del puente sobre el Great Belt

Si se analizan los resultados obtenidos al realizar los análisis de sensibilidad de los modos propios del puente sobre el Great Belt se pueden extraer las siguientes conclusiones:

Con carácter general, los resultados analíticos coinciden con las aproximaciones realizadas mediante diferencias finitas centradas. Esta circunstancia permite, por tanto, validar tanto la formulación analítica planteada como su implementación en el programa DIOPTICA, que emplea un entorno de programación distribuida.

Al utilizar diferentes tamaños de paso para aproximar los análisis de sensibilidad por diferencias finitas, se obtiene menor dispersión y mayor exactitud en los modos propios de vibración, que al calcular las sensibilidades de las frecuencias naturales.

Como conclusión general, conviene explicitar la problemática aparejada a la evaluación de sensibilidades mediante diferencias finitas, ya que ello permite contextualizar la importancia de los análisis de sensibilidad obtenidos analíticamente. Efectivamente, los cálculos mediante diferencias finitas son generalmente fáciles de programar, sin embargo, los tiempos de cálculo son elevados ya que esta técnica obliga a resolver, si se utilizan diferencias finitas centradas, en el problema en estudio, con dos diseños modificados el problema de la vibración libre sin amortiguamiento de la estructura. Además, el postproceso necesario para obtener las sensibilidades es laborioso y presenta la dificultad añadida de que se deben detectar hipotéticos cambios en el orden en que se presentan los sucesivos modos propios de vibración si se quiere evitar la obtención de resultados erróneos. Por último, la incertidumbre referida al tamaño de paso más adecuado, hace que los resultados obtenidos mediante diferencias finitas deban ser analizados e interpretados muy cuidadosamente.

En contraste con la situación descrita para las diferencias finitas, los cálculos analíticos de sensibilidades requieren de una formulación matemática compleja y una programación cuidadosa. Sin embargo, permiten mantener los tiempos de cálculo en intervalos razonables, particularmente cuando se emplean técnicas de programación en paralelo, y obtener resultados más exactos, al tiempo que se eliminan las fuentes de incertidumbre características de los análisis de sensibilidad realizados mediante diferencias finitas.

6.2.3. Análisis aeroelástico

El análisis aeroelástico de este puente, es decir, el cálculo de la velocidad de flameo y la frecuencia reducida, ha sido llevado a cabo mediante el módulo correspondiente del programa DIOPTICA. En este programa está implementada la formulación que permite obtener la respuesta aeroelástica del puente, distribuyendo el esfuerzo de cálculo entre los equipos de un cluster de ordenadores. Para resolver este problema, las frecuencias naturales y los modos propios de vibración del puente deben ser conocidos, y su cálculo, así como los resultados obtenidos para este puente, ya han sido comentados en el apartado 6.2.1 de este capítulo. Además, los coeficientes de flameo del puente también deben ser facilitados al programa. En las figuras 6.2.7 (I) y (II) se muestran los ocho coeficientes empleados en este ejemplo, que han sido tomados de Mosquera^[M1]. Debe tenerse en cuenta que para este puente no se ha dispuesto de los coeficientes de flameo P_i^* ($i = 1, \dots, 6$) de la fórmula (2.5.7), que relaciona la fuerza aeroelástica D , en dirección del viento, con los movimientos y velocidades del tablero.

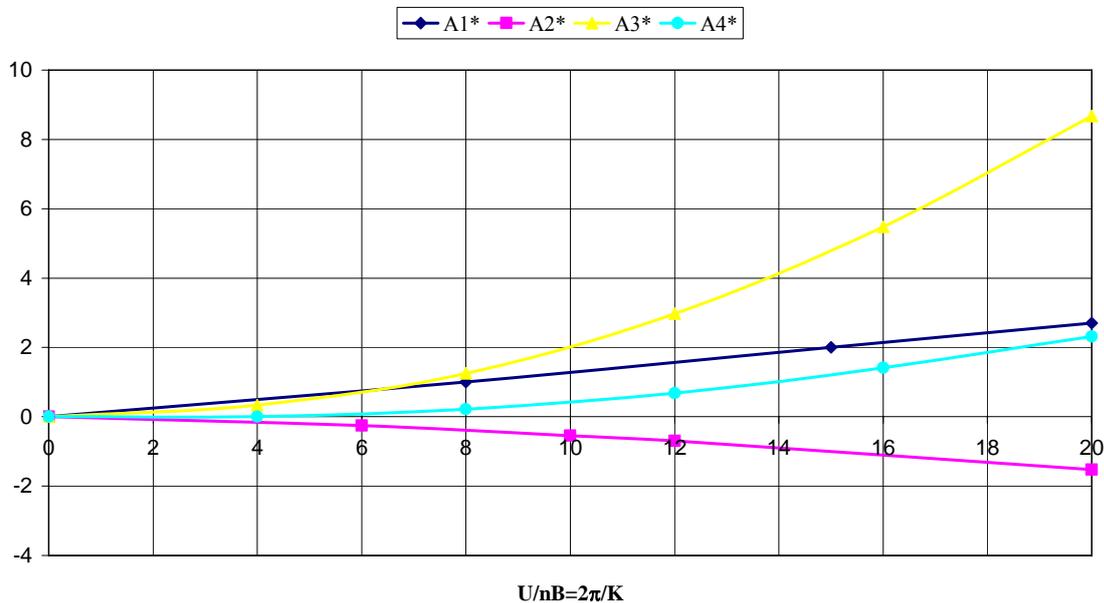


Figura 6.2.7 (I). Coeficientes de flameo A_i^* del puente sobre el Great Belt

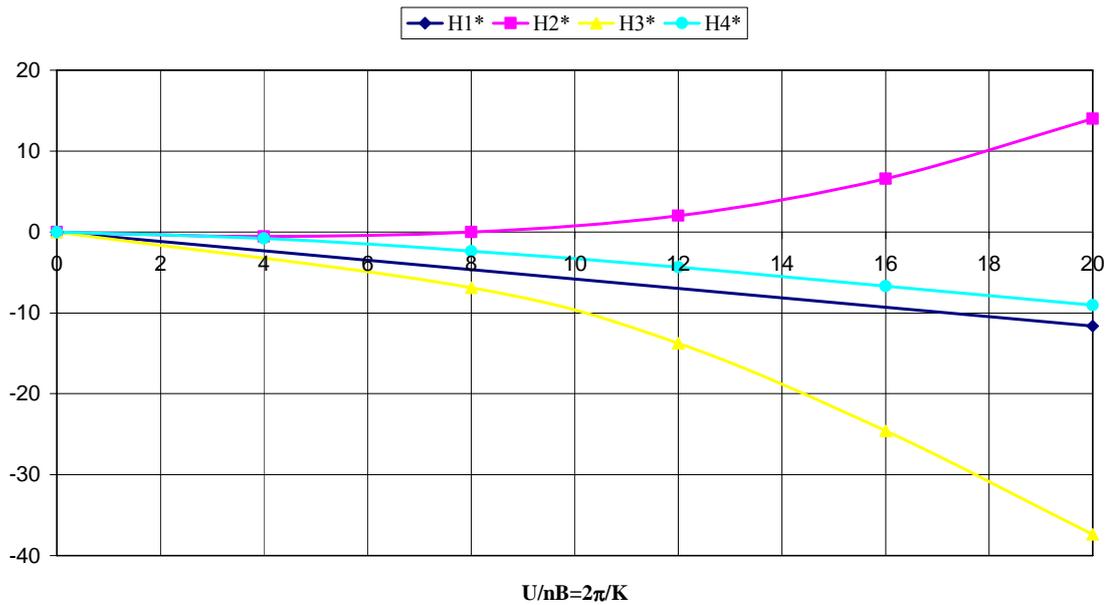


Figura 6.2.7 (II). Coeficientes de flameo H_i^* del puente sobre el Great Belt

Para este ejemplo se ha adoptado un amortiguamiento estructural de tipo viscoso, igual para todos los modos, de valor $\xi = 0.00318$ el cual corresponde con un nivel de decremento logarítmico del 2%.

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \approx 2\pi\xi = 0.02 \quad (6.2.1)$$

Este valor es el propuesto por la normativa japonesa para tableros en cajón y ha sido utilizado entre otros por Mosquera^[M2], Jurado^[J1] y Larsen^[L1].

Para representar adecuadamente el comportamiento frente al fenómeno del flameo de un puente de gran vano, se debe incluir un número de modos de vibración suficientemente elevado. Lejos quedan ya los tiempos en los que el flameo se calculaba utilizando sólo dos modos de vibración: el primero vertical y el primero de torsión, que ofrecían resultados inseguros, como ha sido puesto de manifiesto por Jurado^[J1]. En este ejemplo se han empleado 18 modos de vibración para obtener la respuesta aeroelástica del puente, lo que significa que se han considerado todos los modos propios de vibración significativos hasta alcanzar el tercer modo de torsión (30 TA). Es evidente que los tiempos de cálculo crecen fuertemente cuanto mayor es el número de modos de vibración considerados en el cálculo. El aplicar técnicas de programación distribuida

permite obtener resultados más precisos y que reflejan mejor el comportamiento de la estructura analizada ya que, en la medida en que el esfuerzo de cálculo se reparte entre los equipos de un cluster de ordenadores, los tiempos de computación decrecen y, en consecuencia, un mayor número de modos de vibración pueden ser incluidos en los cálculos.

En la figura 6.2.8 se muestra la evolución de la parte real de los autovalores aeroelásticos en función de la velocidad de viento. Se observa cómo la parte real del autovalor que deriva del modo 22 (TS) se hace cero indicando para la velocidad correspondiente el inicio del flameo incipiente.

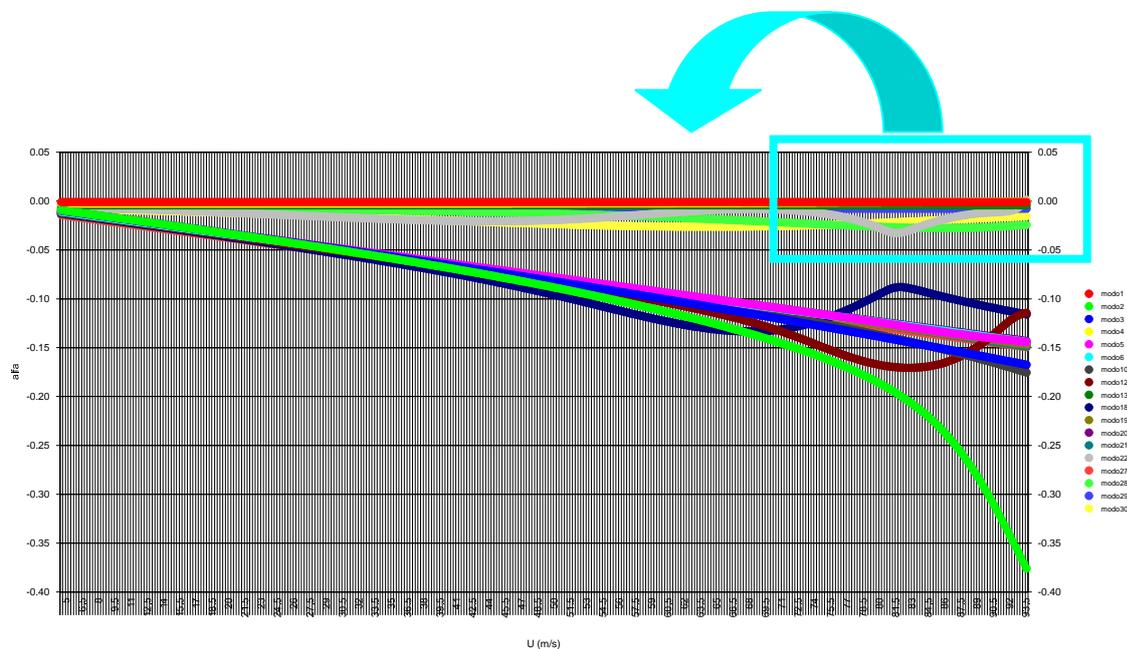


Figura 6.2.8. Evolución de la parte real α_r frente a U para el puente sobre el Great Belt

En la figura 6.2.9 se muestra un detalle de la gráfica anterior cuando se alcanza la situación de flameo.

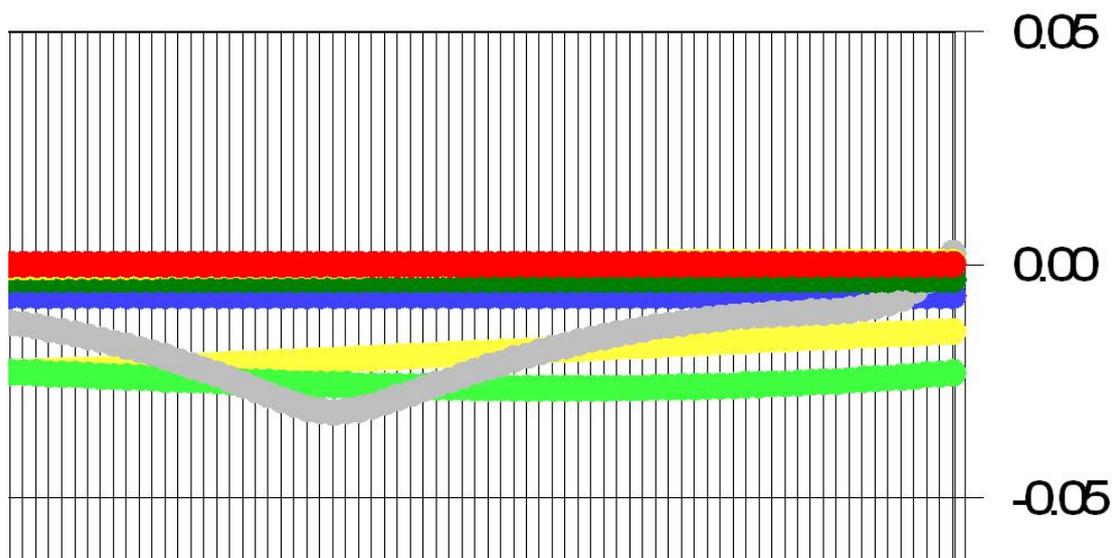


Figura 6.2.9. Detalle de la gráfica anterior cuando se alcanza el flameo

Por otro lado, en la figura 6.2.10, que se muestra a continuación, se representa la evolución de la parte imaginaria β_j de los autovalores aeroelásticos en función de la velocidad de viento. Observando esta gráfica se aprecia cómo la frecuencia que más altera su valor con velocidades de viento crecientes es la que se deriva del modo 22, de torsión simétrica.

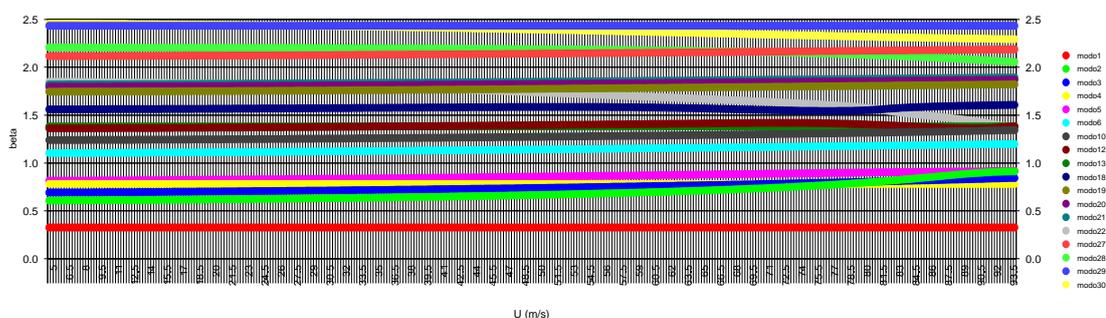


Figura 6.2.10. Evolución de la parte imaginaria β_j frente a U para el puente sobre el Great Belt

Finalmente, en la figura 6.2.11 se presenta la evolución de los amortiguamientos, que se evalúan como el cociente entre la parte real y la parte imaginaria de cada autovalor, es decir, $-\alpha_j / \beta_j$.

La expresión exacta que permite evaluar el amortiguamiento es:

$$\xi_{aj} = \frac{-\alpha_j}{\sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2}} \tag{6.2.2}$$

Teniendo en cuenta que el valor de la parte real de los autovalores, α_j es muy pequeño, especialmente en la proximidad de la inestabilidad debida a flameo, la fórmula anterior puede aproximarse por la expresión siguiente:

$$\xi_{aj} = \frac{-\alpha_j}{\beta_j} \tag{6.2.3}$$

Se aprecia cómo el flameo se inicia cuando un amortiguamiento se hace nulo, y por tanto existe un acoplamiento de modos en el que no es posible la atenuación de las oscilaciones. En la figura 6.2.12 se presenta un detalle de la gráfica 6.2.11.

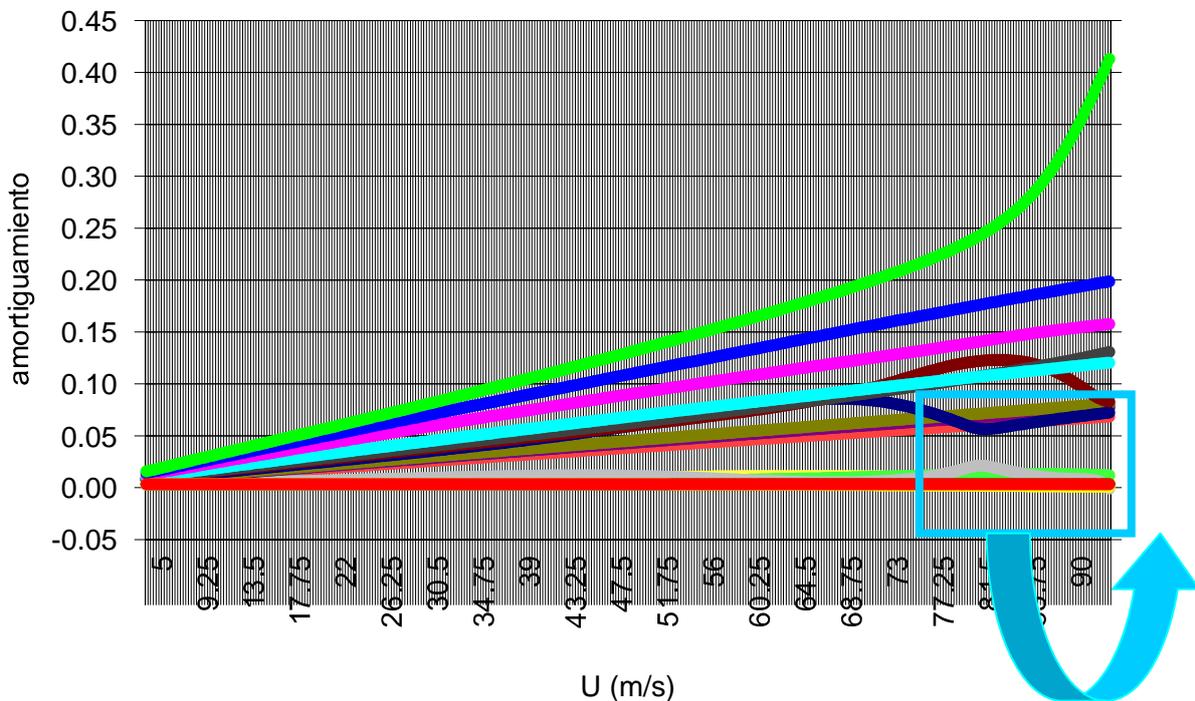


Figura 6.2.11. Evolución del amortiguamiento asociado a cada modo aeroelástico para el puente sobre el Great Belt

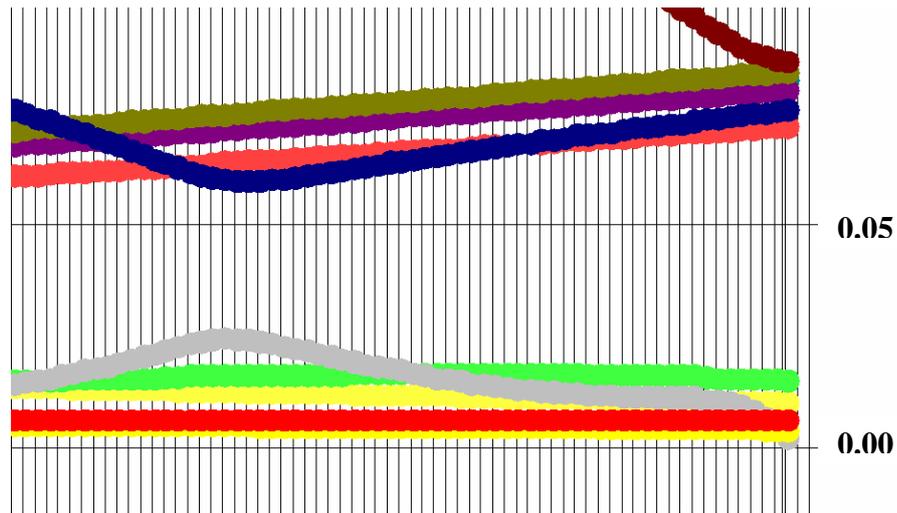


Figura 6.2.12. Detalle de la figura anterior cuando se alcanza la situación de flameo.

La velocidad crítica de flameo obtenida para este ejemplo es $U_f = 93.90925$ m/s, siendo la frecuencia reducida $K_f = 0.44726$. En la figura 6.2.13 se presenta la salida de resultados numéricos que ofrece el programa DIOPTICA, que incluye la respuesta aeroelástica del puente y los análisis de sensibilidad a los que se hará referencia un poco más adelante. Además, en la tabla 6.2.8 se muestran los resultados de la velocidad de flameo obtenidos en este trabajo y por otros autores que también han investigado este puente como Larsen^[L1], Cobo^[C3] y Mosquera^[M1].

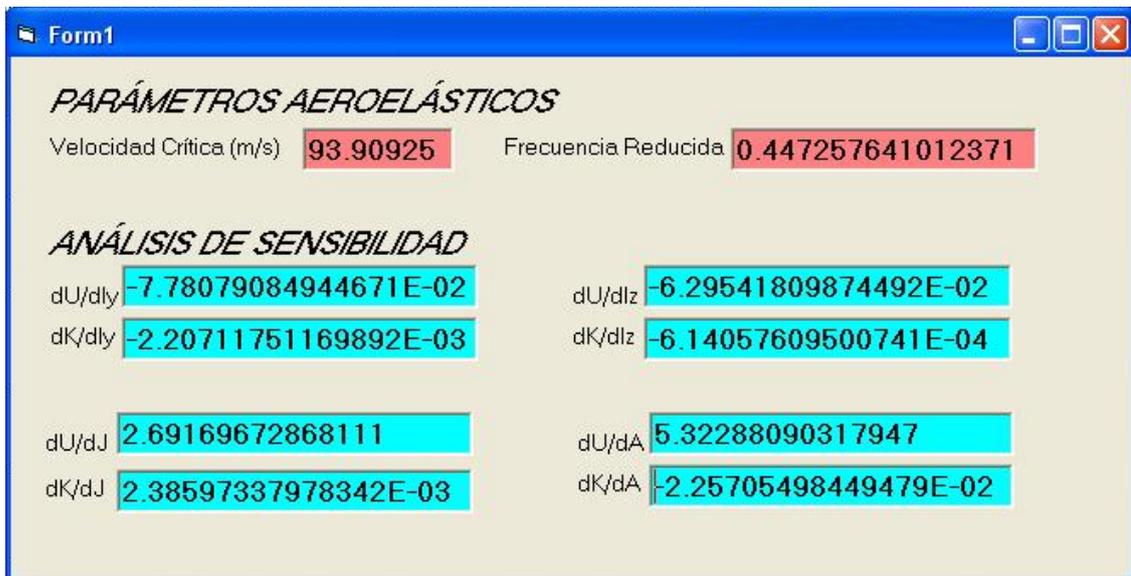


Figura 6.2.13. Resultados numéricos que ofrece DIOPTICA.

AUTOR	U_f (m/s)
Nieto, multimodal con 2 modos	88.10
Nieto, multimodal con 18 modos	93.91
Mosquera ^[M1] , multimodal con 2 modos	89.93
Mosquera ^[M1] , multimodal con 18 modos	62.02
Larsen ^[L1] , ensayo seccional	70 – 74
Larsen ^[L1] , ensayo de modelo completo	70 – 75
Larsen ^[L1] , multimodal con 9 modos	75
Cobo ^[C3] , multimodal con 2 modos	82.75
Cobo ^[C3] , multimodal con 4 modos	91.75
Cobo ^[C3] , multimodal con 6 modos	96.75

Tabla 6.2.8. Comparación de análisis aeroelásticos para el puente sobre el estrecho del Great Belt

El modelo de cálculo empleado en esta tesis es muy similar al empleado por Mosquera. La aparente diferencia en los resultados obtenidos para la velocidad de flameo entre el presente trabajo y los obtenidos por él está justificada si se tiene en cuenta que en los análisis aeroelásticos por él realizados se consideraba únicamente el vano central del tablero del puente. Tal y como indica Cobo^[C3] haciendo referencia a Larsen^[L1] y a Ostenfeld^[O1], el puente sobre el Great Belt fue diseñado con un tablero continuo, sin juntas de dilatación en la sección a la altura de las torres. Esto implica, que el hecho de considerar la totalidad del tablero del puente en el análisis aeroelástico mejora la respuesta del mismo frente a las posibles inestabilidades por flameo. Si se compara el resultado con los ofrecidos por Larsen o Cobo se puede decir que en general los resultados son concordantes, poniendo de manifiesto la seguridad del diseño. Se observa también como difieren los resultados en función del número de modos de vibración utilizados para calcular la velocidad de flameo.

6.2.4. Análisis de sensibilidad de la respuesta aeroelástica

Los análisis de sensibilidad de la velocidad de flameo y de la frecuencia reducida del puente sobre el Great Belt se han obtenido con los módulos correspondientes del programa DIOPTICA. Aplicando las técnicas propias de la programación distribuida, los análisis de sensibilidad respecto a cada una de las variables de diseño consideradas

han sido realizados de modo simultáneo e independiente por cuatro de los equipos del cluster de ordenadores disponible. En consecuencia, se ha invertido el mismo tiempo en obtener las sensibilidades respecto a las cuatro propiedades mecánicas del tablero, usando programación distribuida, que el que sería necesario para calcular la sensibilidad respecto a una única variable de diseño empleando programación secuencial.

Tal y como se detalló en el capítulo 4, las sensibilidades analíticas de la respuesta aeroelástica calculadas son las siguientes:

$$\frac{\partial U_f}{\partial I_y}, \frac{\partial K_f}{\partial I_y}, \frac{\partial U_f}{\partial I_z}, \frac{\partial K_f}{\partial I_z}, \frac{\partial U_f}{\partial J}, \frac{\partial K_f}{\partial J}, \frac{\partial U_f}{\partial A}, \frac{\partial K_f}{\partial A} \quad (6.2.4)$$

siendo I_y la inercia a flexión vertical del tablero, I_z la inercia a flexión lateral, J la inercia a torsión y A el área de la sección transversal.

El contraste de los resultados analíticos obtenidos para las derivadas indicadas en la expresión (6.2.4) sólo puede realizarse aproximando esas derivadas mediante diferencias finitas, de tal modo que la derivada de una función cualquiera u , respecto a una cierta variable x , puede evaluarse utilizando las tres formulaciones que se citan a continuación.

- Diferencias finitas hacia delante:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \quad (6.2.5)$$

- Diferencias finitas centradas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (6.2.6)$$

- Diferencias finitas hacia atrás:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x) - u(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (6.2.7)$$

Por lo tanto, cada comprobación por medio de las diferencias finitas requiere, además de la evaluación ya efectuada de $u(x)$, de uno o dos cálculos adicionales de la respuesta con la variable modificada en $\pm\Delta x$. Si se tiene en cuenta que, en este caso, las respuestas a evaluar son los parámetros de flameo U_f y K_f , fácilmente se entiende lo tedioso del proceso, puesto que cada comprobación por diferencias finitas requiere nuevos cálculos dinámicos y cálculos aeroelásticos adicionales.

A continuación se presentan los resultados de los análisis de sensibilidad de la respuesta aeroelástica del puente sobre el Great Belt empleando la formulación analítica descrita a lo largo del presente documento. Para realizar los cálculos se han tomado los 18 modos de vibración más importantes, listados en la tabla 6.2.2. Para la comprobación de las derivadas analíticas, y debido a la inherente inexactitud de los cálculos por diferencias finitas, se han tomado tres longitudes de paso para dichos cálculos: $\Delta x=0.005x$, $\Delta x=0.01x$ y $\Delta x=0.05x$. La comprobación del análisis de sensibilidad realizado por diferencias finitas se ha llevado a cabo en el caso del análisis con mayor número de modos, los 18 modos indicados en la tabla 6.2.2, dado que es el que presenta mayor dificultad numérica. En las tablas 6.2.9(I) y 6.2.9(II) se presentan los resultados analíticos obtenidos utilizando DIOPTICA, las aproximaciones realizadas mediante diferencias finitas y el error relativo en tanto por ciento.

	$\partial U_f / \partial I_y$	$\partial K_f / \partial I_y$	$\partial U_f / \partial I_z$	$\partial K_f / \partial I_z$
SENSIB. ANALITICA	-0.07781	-0.00221	-0.06295	-0.00061
DFC 0.5%	-0.07500	-0.00224	-0.06500	-0.00058
DFC 1%	-0.07812	-0.00220	-0.06500	-0.00058
DFC 5%	0.29812	0.00154	0.0279	0.00157
error rel. DFC 0.5%	3.61	-1.46	-3.25	5.65
error rel. DFC 1%	-0.41	0.21	-3.25	5.64
error rel. DFC 5%	483.16	169.84	144.32	355.94

Tabla 6.2.9(I). Sensibilidades de la velocidad de flameo y la frecuencia reducida del puente sobre el estrecho del Great Belt respecto a las inercias a flexión vertical y lateral del tablero.

	$\partial U_f / \partial J$	$\partial K_f / \partial J$	$\partial U_f / \partial A$	$\partial K_f / \partial A$
SENSIB. ANALITICA	2.69170	0.00239	5.32288	-0.02257
DFC 0.5%	2.69079	0.00237	5.49988	-0.02538
DF Adelante 1%			5.40729	-0.02376
DFC 1%	2.68750	0.00242	62.08195	1.31194
DFC 5%			15.71261	0.25455
error rel. DFC 0.5%	0.03	0.52	-3.33	-12.43
error rel. DF Adelante 1%			-1.58	-5.29
error rel. DFC 1%	0.16	-1.25	-1066.32	5912.60
error rel. DFC 5%			-195.19	1227.80

Tabla 6.2.9(II). Sensibilidades de la velocidad de flameo y la frecuencia reducida del puente sobre el estrecho del Great Belt respecto a la inercia a torsión y el área del tablero.

En general, existe una buena concordancia entre los valores de las sensibilidades obtenidas analíticamente utilizando el programa DIOPTICA y las aproximaciones realizadas mediante diferencias finitas con tamaños de paso pequeños como el 0.5% y el 1%. Esta circunstancia permite dar por buenos los resultados obtenidos analíticamente aplicando técnicas de computación en paralelo. Sin embargo las diferencias finitas del 5% en ningún caso ofrecen aproximaciones que puedan considerarse válidas.

En el caso concreto de la sensibilidad de la velocidad de flameo y la frecuencia reducida respecto al área de la sección transversal del tablero A , se observa que la aproximación mediante diferencias finitas centradas del 0.5% es buena mientras que la aproximación con tamaño de paso del 1% es muy imprecisa. Debido a ello se ha evaluado la diferencia finita hacia delante del 1%, que ofrece una aproximación incluso mejor que la diferencia finita centrada del 0.5%.

Se puede afirmar que los errores obtenidos al aproximar mediante diferencias finitas las sensibilidades de la frecuencia reducida son mayores que al aproximar las sensibilidades de la velocidad de flameo. Además las sensibilidades de la frecuencia reducida presentan en este ejemplo valores más bajos que las sensibilidades de la velocidad de flameo.

6.2.5. Estudio comparativo empleando un número de modos de vibración creciente

La coincidencia entre los resultados obtenidos analíticamente y los aproximados mediante diferencias finitas al evaluar los análisis de sensibilidad de la respuesta aeroelástica del puente del Great Belt para un caso complejo, en el que se han considerado 18 modos de vibración, como ha sido puesto de manifiesto en el apartado anterior, permite dar por validada la formulación y las técnicas de resolución empleadas. Consecuentemente, en el presente apartado se ha optado por no comprobar nuevamente los resultados de los análisis de sensibilidad mediante diferencias finitas. Con la metodología presentada en la presente tesis, la obtención de las respuestas aeroelásticas y sus análisis de sensibilidad pueden ser realizados de manera rápida y eficaz empleando los módulos correspondientes del programa DIOPTICA. La agilidad de esta herramienta de cálculo puede ser utilizada para comparar los análisis aeroelásticos y de sensibilidad considerando todas las posibilidades de inclusión de modos de vibración que se deseen. De esta manera, se han realizado los 17 análisis aeroelásticos y de sensibilidad que se comparan en las tablas 6.2.10(I) a 6.2.10(IV). En cada uno de los análisis realizados se ha ido añadiendo un nuevo modo de vibración, concretamente, el correspondiente a la frecuencia natural más baja de los modos naturales no empleados en el cálculo anterior. El objetivo último que se persigue presentando esta información es el determinar qué modos tienen mayor influencia en la velocidad de flameo y la frecuencia reducida del puente, así como en sus sensibilidades respecto a las propiedades mecánicas del tablero. La magnitud de alteraciones que provoque cada nuevo modo incorporado al análisis indicará la importancia del mismo.

Análisis y modos	$\omega(\text{rad/s})$	$U_f(\text{m/s})$	K_f	$\partial U_f / \partial I_y$	$\partial K_f / \partial I_y$
2 (VS) + 22 (TS)	0.606 / 1.855	88.10	0.4741625	-0.2372689	0.0018483
+1 (LS)	0.325	88.10	0.4741605	-0.2372700	0.0018483
+3 (VA)	0.689	88.10	0.4741605	-0.2372700	0.0018483
+4 (LA)	0.782	88.11	0.4741559	-0.2374560	0.0018476
+5 (VS)	0.813	87.93	0.4762859	-0.2629209	0.0021418
+6 (VA)	1.103	87.93	0.4762859	-0.2629204	0.0021418
+10 (VA)	1.238	87.93	0.4762861	-0.2629181	0.0021418
+12 (VS)	1.361	85.44	0.5240012	-0.0035446	0.0028885
+13 (LS)	1.382	85.43	0.5240884	-0.0067764	0.0029222
+18 (VS)	1.559	93.89	0.4476038	-0.0634328	-0.0023685
+19 (VA)	1.744	93.89	0.4476038	-0.0634329	-0.0023685
+20 (VS)	1.796	93.90	0.4475469	-0.0626693	-0.0023765
+21 (VA)	1.819	93.89	0.4475469	-0.0626691	-0.0023765
+27 (VS)	2.115	93.93	0.4471629	-0.0782062	-0.0022060
+28 (LTA)	2.207	93.93	0.4471629	-0.0782063	-0.0022060
+29 (LS)	2.433	93.91	0.4472577	-0.0778082	-0.0022071
+30 (TA)	2.462	93.91	0.4472576	-0.0778079	-0.0022071

Tabla 6.2.10(I). Respuesta aeroelástica y sensibilidades de puente sobre el estrecho del Great Belt respecto a I_y .

Análisis y modos	$\omega(\text{rad/s})$	$U_f(\text{m/s})$	K_f	$\partial U_f / \partial I_z$	$\partial K_f / \partial I_z$
2 (VS) + 22 (TS)	0.606 / 1.855	88.10	0.4741625	-0.0838385	0.0000776
+1 (LS)	0.325	88.10	0.4741605	-0.0838390	0.0000776
+3 (VA)	0.689	88.10	0.4741605	-0.0838390	0.0000776
+4 (LA)	0.782	88.11	0.4741559	-0.0838212	0.0000775
+5 (VS)	0.813	87.93	0.4762859	-0.0839583	0.0000776
+6 (VA)	1.103	87.93	0.4762859	-0.0839583	0.0000776
+10 (VA)	1.238	87.93	0.4762861	-0.0839581	0.0000776
+12 (VS)	1.361	85.44	0.5240012	0.1214312	-0.0020937
+13 (LS)	1.382	85.43	0.5240884	0.1199033	-0.0020768
+18 (VS)	1.559	93.89	0.4476038	-0.0616768	-0.0006331
+19 (VA)	1.744	93.89	0.4476038	-0.0616767	-0.0006331
+20 (VS)	1.796	93.90	0.4475469	-0.0618488	-0.0006310
+21 (VA)	1.819	93.89	0.4475469	-0.0618487	-0.0006310
+27 (VS)	2.115	93.93	0.4471629	0.0629664	-0.0006157
+28 (LTA)	2.207	93.93	0.4471629	-0.0629667	-0.0006157
+29 (LS)	2.433	93.91	0.4472577	-0.0629541	-0.0006141
+30 (TA)	2.462	93.91	0.4472576	-0.0629542	-0.0006141

Tabla 6.2.10(II). Respuesta aeroelástica y sensibilidades de puente sobre el estrecho del Great Belt respecto a I_z .

Análisis y modos	$\omega(\text{rad/s})$	$U_f(\text{m/s})$	K_f	$\partial U_f / \partial J$	$\partial K_f / \partial J$
2 (VS) + 22 (TS)	0.606 / 1.855	88.10	0.4741625	2.4358667	-0.0070264
+1 (LS)	0.325	88.10	0.4741605	2.4358524	-0.0070263
+3 (VA)	0.689	88.10	0.4741605	2.4358524	-0.0070263
+4 (LA)	0.782	88.11	0.4741559	2.4370068	-0.0070265
+5 (VS)	0.813	87.93	0.4762859	2.5367143	-0.0082303
+6 (VA)	1.103	87.93	0.4762859	2.5367141	-0.0082303
+10 (VA)	1.238	87.93	0.4762861	2.5367074	-0.0082302
+12 (VS)	1.361	85.44	0.5240012	-1.3517934	0.0320971
+13 (LS)	1.382	85.43	0.5240884	-1.3360606	0.0319186
+18 (VS)	1.559	93.89	0.4476038	2.6569211	0.0028263
+19 (VA)	1.744	93.89	0.4476038	2.6569207	0.0028263
+20 (VS)	1.796	93.90	0.4475469	2.6636143	0.0027539
+21 (VA)	1.819	93.89	0.4475469	2.6636138	0.0027539
+27 (VS)	2.115	93.93	0.4471629	2.6929231	0.0024041
+28 (LTA)	2.207	93.93	0.4471629	2.6929241	0.0024041
+29 (LS)	2.433	93.91	0.4472577	2.6917008	0.0023859
+30 (TA)	2.462	93.91	0.4472576	2.6916960	0.0023860

Tabla 6.2.10(III). Respuesta aeroelástica y sensibilidades de puente sobre el estrecho del Great Belt respecto a J .

Análisis y modos	$\omega(\text{rad/s})$	$U_f(\text{m/s})$	K_f	$\partial U_f / \partial A$	$\partial K_f / \partial A$
2 (VS) + 22 (TS)	0.606 / 1.855	88.10	0.4741625	7.4423315	-0.0753843
+1 (LS)	0.325	88.10	0.4741605	7.4424723	-0.0753844
+3 (VA)	0.689	88.10	0.4741605	7.4424724	-0.0753844
+4 (LA)	0.782	88.11	0.4741559	7.4512034	-0.0753959
+5 (VS)	0.813	87.93	0.4762859	7.4227452	-0.0751080
+6 (VA)	1.103	87.93	0.4762859	7.4227431	-0.0751080
+10 (VA)	1.238	87.93	0.4762861	7.4227271	-0.0751076
+12 (VS)	1.361	85.44	0.5240012	-10.7731700	0.1290516
+13 (LS)	1.382	85.43	0.5240884	-10.7056338	0.1288303
+18 (VS)	1.559	93.89	0.4476038	5.2819134	-0.0218835
+19 (VA)	1.744	93.89	0.4476038	5.2819130	-0.0218835
+20 (VS)	1.796	93.90	0.4475469	5.2824489	-0.0219232
+21 (VA)	1.819	93.89	0.4475469	5.2844743	-0.0219232
+27 (VS)	2.115	93.93	0.4471629	3.3123133	-0.0225135
+28 (LTA)	2.207	93.93	0.4471629	5.3123274	-0.0225137
+29 (LS)	2.433	93.91	0.4472577	5.3228923	-0.0225706
+30 (TA)	2.462	93.91	0.4472576	5.3228809	-0.0225705

Tabla 6.2.10(IV). Respuesta aeroelástica y sensibilidades de puente sobre el estrecho del Great Belt respecto a A .

Analizando los resultados presentados en las tablas anteriores, se observa como la velocidad de flameo, la frecuencia reducida y los análisis de sensibilidad cambian al introducir en el cálculo modos simétricos, mientras que la introducción de modos antimétricos prácticamente no produce alteraciones. Así, la introducción de los modos 12 (VS) o 18 (VS) alteran apreciablemente los valores de la velocidad crítica y de la frecuencia reducida, pero también las sensibilidades, que incluso llegan a cambiar de signo, como es el caso de las sensibilidades de la velocidad de flameo respecto a la inercia a flexión lateral I_z , la inercia a torsión J y el área de la sección transversal del tablero A .

Son bajos los valores de la sensibilidad, tanto de la velocidad de flameo como de la frecuencia reducida respecto a la inercia a flexión lateral I_z y a la inercia a flexión vertical I_y . Además, en ambos casos el signo de la sensibilidad de la velocidad de flameo es negativa, lo que significa que aumentos de la inercia a flexión vertical o lateral del tablero provocarían pequeñas disminuciones de la velocidad de flameo. Es decir, para mejorar el comportamiento del puente frente al viento se requiere menor inercia vertical, en contradicción con la exigencia que impone la resistencia frente a cargas gravitatorias. El mayor valor de la sensibilidad de la velocidad de flameo se produce respecto al área de la sección transversal. Esto pone de manifiesto la importancia que tiene el considerar la masa del tablero como variable al acometer el proceso de diseño de este tipo de puentes. El signo positivo indica que si se desea aumentar la velocidad de flameo del puente se debe aumentar el área del tablero, o lo que es lo mismo, su masa.

Para el ejemplo estudiado la sensibilidad de la velocidad de flameo respecto a la inercia a torsión es también alta y positiva, lo que indica que un incremento en el valor de esa propiedad mecánica traería aparejado un aumento apreciable de la velocidad de flameo del puente.

Si se comparan los resultados mostrados con los ofrecidos por otros investigadores como Mosquera^[M1] no se observan grandes diferencias en los signos de las sensibilidades o los órdenes de magnitud de las mismas. De hecho, la sensibilidad de la velocidad de flameo respecto a la inercia a torsión del tablero es muy similar.

No debe pasar desapercibido el hecho de que la variación de la velocidad de flameo obtenida con distintos números de modos de vibración empleados en el cálculo es pequeña, como máximo es de un 9%, mientras que las variaciones de las sensibilidades de la velocidad de flameo cambian en varios órdenes de magnitud. Por lo tanto, para este puente, el emplear un número de modos de vibración pequeño para calcular su respuesta aeroelástica no introduce grandes errores al calcular su velocidad de flameo. Sin embargo, los resultados de los análisis de sensibilidad pueden ser completamente erróneos si el número de modos de vibración empleados en el cálculo no es suficientemente grande.

6.2.6. Interpretación de los análisis de sensibilidad

En el capítulo 4, más concretamente en el apartado 4.3.5 dedicado a la interpretación de los análisis de sensibilidad, se introducían los conceptos de velocidad de cambio y ratio de cambio de la velocidad de flameo, así como los de frecuencia reducida de cambio y ratio de cambio de la frecuencia reducida. Como ya se puso de manifiesto en ese mismo apartado, lo que se pretende al evaluar las magnitudes indicadas es explicitar qué variables de diseño provocan mayores cambios en una respuesta estructural cuando son modificadas un mismo porcentaje. El objetivo último que se persigue con estos cálculos es que las modificaciones que se introduzcan en el proceso de diseño permitan mejorar siempre el diseño inicial, y no se entre en un proceso de prueba y error, característico del método clásico de diseño basado exclusivamente en la experiencia y habilidad del proyectista, en el que a veces se acierta y otras ocasiones se yerra.

Las expresiones correspondientes a las velocidades de cambio asociadas a las cuatro propiedades mecánicas del tablero cuando las variables de diseño se alteran el 100% son:

$$\begin{aligned}
 U_f^{I_y} &= \frac{\partial U_f}{\partial I_y} I_y \\
 U_f^{I_z} &= \frac{\partial U_f}{\partial I_z} I_z \\
 U_f^J &= \frac{\partial U_f}{\partial J} J \\
 U_f^A &= \frac{\partial U_f}{\partial A} A
 \end{aligned}
 \tag{6.2.8}$$

Por otro lado, los ratios de cambio de la velocidad de flameo asociados a la cuatro variables de diseño consideradas en el presente ejemplo son:

$$\begin{aligned}
 \lambda_U^{I_y} &= \frac{U_f^{I_y}}{U_f} = \frac{\partial U_f}{\partial I_y} \frac{I_y}{U_f} \\
 \lambda_U^{I_z} &= \frac{U_f^{I_z}}{U_f} = \frac{\partial U_f}{\partial I_z} \frac{I_z}{U_f} \\
 \lambda_U^J &= \frac{U_f^J}{U_f} = \frac{\partial U_f}{\partial J} \frac{J}{U_f} \\
 \lambda_U^A &= \frac{U_f^A}{U_f} = \frac{\partial U_f}{\partial A} \frac{A}{U_f}
 \end{aligned}
 \tag{6.2.9}$$

Del mismo modo, las expresiones que permiten evaluar la frecuencia reducida de cambio cuando las variables de diseño se alteran el 100% son las que se muestran seguidamente:

$$\begin{aligned}
 K_f^{I_y} &= \frac{\partial K_f}{\partial I_y} I_y \\
 K_f^{I_z} &= \frac{\partial K_f}{\partial I_z} I_z \\
 K_f^J &= \frac{\partial K_f}{\partial J} J \\
 K_f^A &= \frac{\partial K_f}{\partial A} A
 \end{aligned}
 \tag{6.2.10}$$

Finalmente, las ecuaciones para evaluar el ratio de cambio de la frecuencia reducida respecto a las variables de diseño son:

$$\begin{aligned}
 \lambda_K^{I_y} &= \frac{K_f^{I_y}}{K_f} = \frac{\partial K_f}{\partial I_y} \frac{I_y}{K_f} \\
 \lambda_K^{I_z} &= \frac{K_f^{I_z}}{K_f} = \frac{\partial K_f}{\partial I_z} \frac{I_z}{K_f} \\
 \lambda_K^J &= \frac{K_f^J}{K_f} = \frac{\partial K_f}{\partial J} \frac{J}{K_f} \\
 \lambda_K^A &= \frac{K_f^A}{K_f} = \frac{\partial K_f}{\partial A} \frac{A}{K_f}
 \end{aligned}
 \tag{6.2.11}$$

En las tablas 6.2.11(I) y(II) se muestran los resultados de los parámetros cuya formulación se acaba de explicitar, obtenidos a partir de las sensibilidades analíticas, para el puente sobre el Great Belt.

$U_f^{I_y}$	$U_f^{I_z}$	U_f^J	U_f^A
-0.311232	-6.295418	20.456895	7.186049
$\lambda_U^{I_y}$	$\lambda_U^{I_z}$	λ_U^J	λ_U^A
-0.003314	-0.067037	0.2178368	0.0765212

Tabla 6.2.11(I). Velocidad de cambio y ratio de cambio de la velocidad de flameo del puente sobre el estrecho del Great Belt.

$K_f^{I_y}$	$K_f^{I_z}$	K_f^J	K_f^A
-0.008828	-0.061406	0.0181334	-0.030471
$\lambda_K^{I_y}$	$\lambda_K^{I_z}$	λ_K^J	λ_K^A
-0.019739	-0.137296	0.0405442	-0.06813

Tabla 6.2.11(II). Frecuencia reducida de cambio y ratio de cambio de la frecuencia reducida del puente sobre el estrecho del Great Belt.

El repaso de las tablas mostradas permite extraer algunas conclusiones que se comentan a continuación:

Las mayores velocidades de cambio se producen para modificaciones en los valores de la inercia a torsión, y en menor medida del área y de la inercia a flexión horizontal, de la sección transversal del tablero del puente, aunque el signo de $U_f^{I_z}$ es opuesto a las otras dos velocidades de cambio, U_f^J y U_f^A . Por otro lado, la velocidad de cambio asociada a la inercia a flexión vertical, $U_f^{I_y}$, es un orden de magnitud inferior a las citadas anteriormente, siendo su signo negativo. Si se alteran en un mismo porcentaje todas las variables de diseño, es la inercia a torsión la que va a tener mayor influencia en la velocidad de flameo resultante, ya que U_f^J presenta el mayor valor. La alteración de la inercia a flexión lateral y el área también tienen una influencia significativa, aunque tienen signos opuestos. Como consecuencia práctica, si durante el diseño de este puente hubiese sido necesario dotarlo de una velocidad de flameo superior a la que tiene en su actual configuración, lo más adecuado sería aumentar la inercia a torsión del tablero, así como su área, intentando disminuir, o al menos no alterar, la inercia a flexión lateral.

Si se pasa revista a los resultados de las frecuencias reducidas de cambio, se observa como la frecuencia reducida de cambio respecto a la inercia a flexión vertical, $K_f^{I_y}$, es un orden de magnitud inferior comparada con las de las restantes variables de diseño. Además, es la inercia a flexión lateral, I_z , la que tiene una mayor influencia en la alteración de la frecuencia reducida. Por otro lado, los signos de las frecuencias reducidas de cambio respecto a las inercias a flexión, $K_f^{I_y}$ y $K_f^{I_z}$, así como el área de la sección transversal, K_f^A , son negativos, mientras que para la inercia a torsión, K_f^J , el signo es positivo. Si se incrementasen simultáneamente, en la misma proporción, las cuatro variables de diseño, la frecuencia reducida disminuiría ya que la disminución de la frecuencia reducida que se produce al aumentar los valores de las inercias a flexión y del área no llega a compensar el incremento en la frecuencia reducida que tiene lugar al aumentar la inercia a torsión.

6.3. EJEMPLO 2. PUENTE COLGANTE SOBRE EL ESTRECHO DE MESSINA

El inicio de las obras de construcción del puente sobre el estrecho de Messina^[P1], se espera que tenga lugar durante el año 2006. Se trata del puente con el vano de mayor luz proyectado hasta la fecha, y unirá la isla de Sicilia con la Italia peninsular. En la figura 6.3.1 se muestra una imagen de satélite sobre la que se ha dibujado el trazado del puente y parte de las vías de comunicación proyectadas.

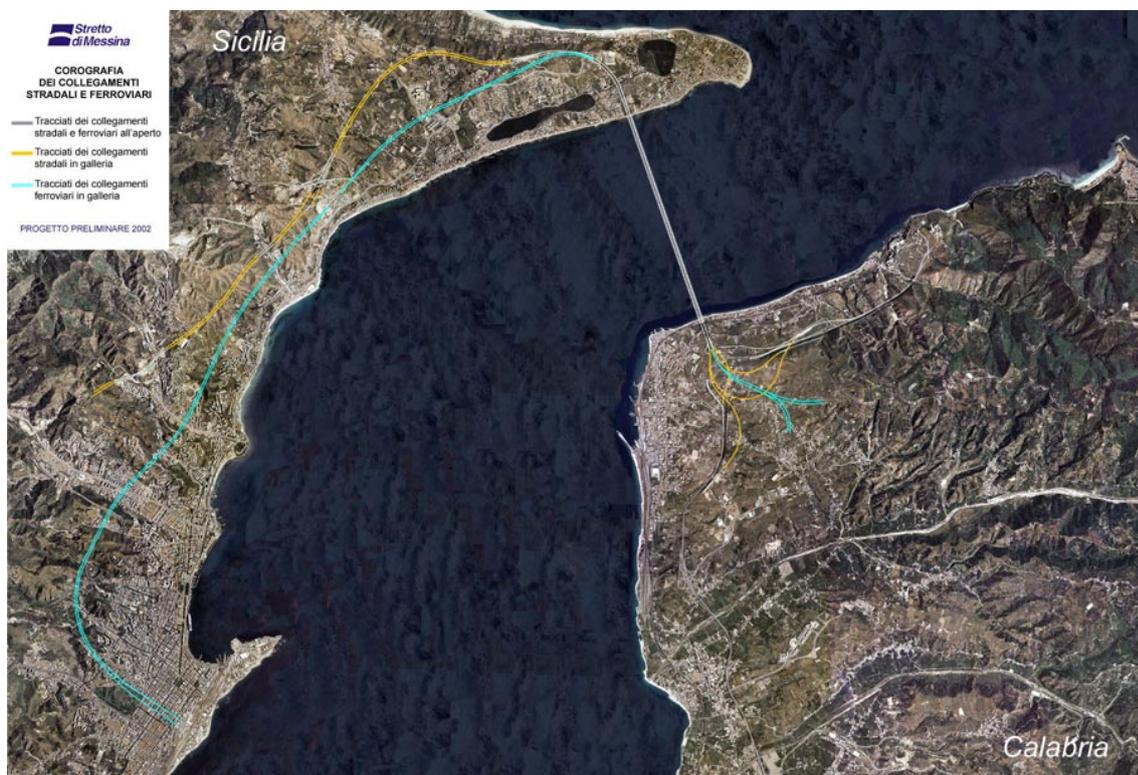


Figura 6.3.1. Localización del puente sobre el estrecho de Messina

El proyecto del puente sobre el estrecho de Messina no surge de la improvisación sino que se ha venido gestando desde hace varias décadas. Desde que el primer diseño provisional debido al ingeniero William C. Brown^[H1] fuese publicado hace más de veinte años, se han realizado numerosas modificaciones en el mismo con el fin de garantizar la seguridad de la estructura frente a la acción del viento.

Una de las características más destacadas de este puente es que el tablero está constituido por tres cajones independientes conectados entre sí mediante vigas

transversales dispuestas cada 30 m. Los dos cajones laterales se destinan al tráfico de vehículos automóviles, mientras que el cajón central soporta el tráfico ferroviario.

De los diversos diseños provisionales dados a conocer, dos han sido los fundamentales: el diseño propuesto en 1992 y la actualización del anterior publicada en 2002^[P2] que ha servido como base para el concurso de proyecto y obra convocado en el año 2004 por la Sociedad Pública italiana Stretto di Messina. Este último diseño provisional del año 2002 es el que se ha empleado para obtener los datos que permiten la caracterización estructural del puente. Las principales diferencias entre el diseño del año 1992 y el del 2002 están en que en el último se aumentó la anchura de los cajones laterales al mismo tiempo que se incluyeron unas barreras antiviento en las proximidades del cajón central. En la figura 6.3.2 se presentan las secciones transversales correspondientes a los dos diseños mencionados.

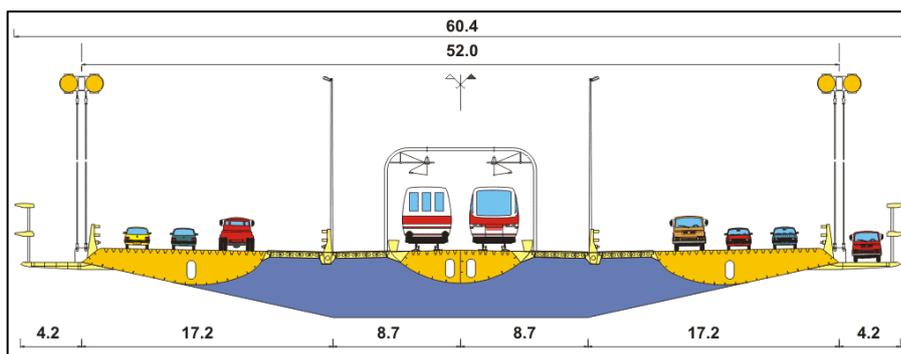


Figura 6.3.2 (I). Sección transversal según el diseño de 1992.

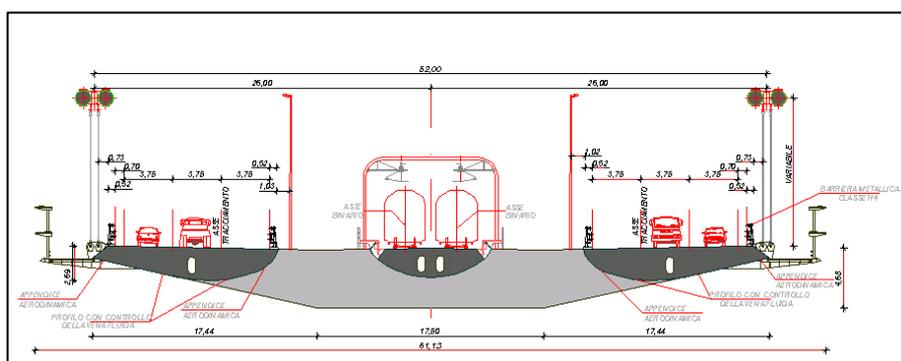


Figura 6.3.2 (II). Sección transversal según el diseño de 2002.

Las dimensiones de este puente, de acuerdo con el diseño del año 2002, son impresionantes ya que la longitud del vano central es de 3300 m, siendo la longitud total del puente 3666 m, dado que los vanos laterales son mucho más modestos. Es también destacable la altura de las torres del puente que es de 382.6 m. Las propiedades del

puente más significativas, y que han servido para realizar el modelo utilizado en este ejemplo, se presentan en la tabla 6.3.1.

Longitud total del tablero (m)	3666
Longitud del vano central (m)	3300
Longitud de los vanos laterales (m)	183
Distancia torre-anclaje lado Sicilia (m)	960
Distancia torre-anclaje lado Calabria (m)	810
Área cajón central (m^2)	0.39
Momento de inercia a flexión vertical del cajón central I_y (m^4)	0.301
Momento de inercia a flexión lateral del cajón central I_z (m^4)	2.12
Momento de inercia a torsión del cajón central J (m^4)	0.738
Masa por unidad de longitud del cajón central (T/m)	8.79
Momento de inercia polar por unidad de longitud del cajón central (Tm^2/m)	1112.93
Área cajones laterales (m^2)	0.495
Momento de inercia a flexión vertical de los cajones laterales I_y (m^4)	0.451
Momento de inercia a flexión lateral de los cajones laterales I_z (m^4)	8.404
Momento de inercia a torsión de los cajones laterales J (m^4)	1.039
Masa por unidad de longitud de los cajones laterales (T/m)	7.28
Momento de inercia polar por unidad de longitud de los cajones laterales (Tm^2/m)	590.34
Anchura entre cables (m)	52
Anchura total del tablero (m)	61.13

Tabla 6.3.1. Propiedades geométricas y mecánicas del puente de Messina

La apariencia y definición geométrica del puente de Messina pueden apreciarse en las imágenes que se muestran a continuación.

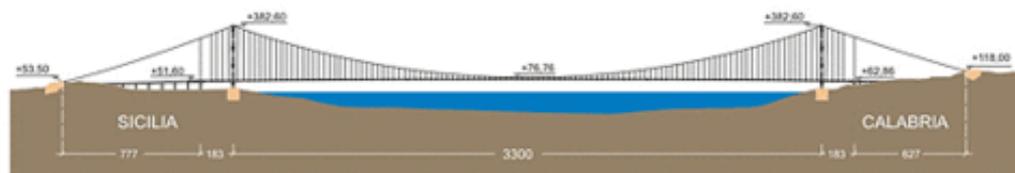


Figura 6.3.3 (I). Perfil longitudinal del puente de Messina.



Figura 6.3.3 (II). Imagen virtual del puente sobre el estrecho de Messina.

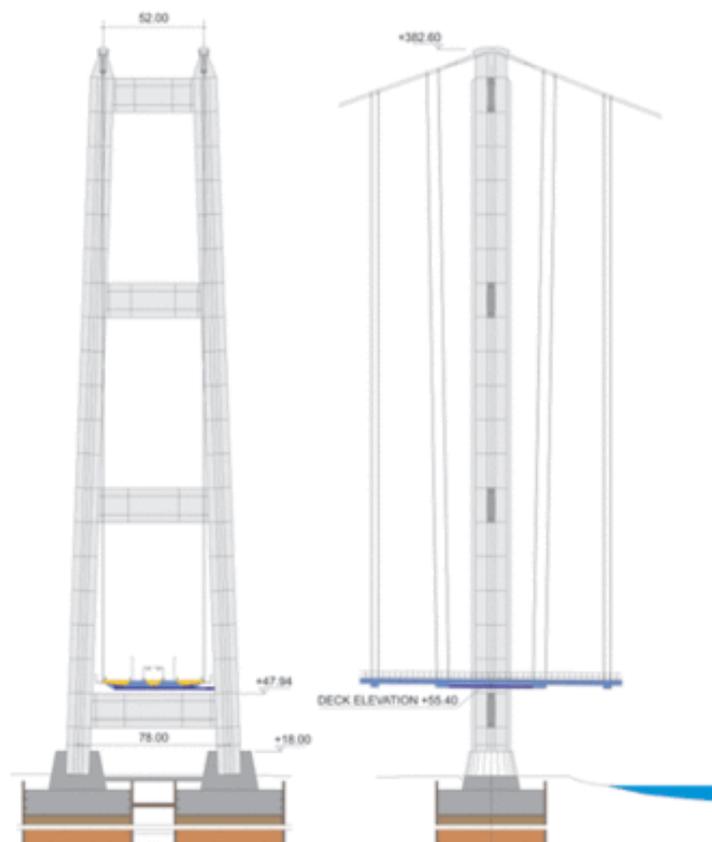


Figura 6.3.3 (III). Detalle de las torres del puente de Messina.



Figura 6.3.3 (IV). Imagen virtual de detalle de una de las torres del puente de Messina.

A partir de los datos presentados en la tabla 6.3.1 se pueden obtener los valores de la masa no estructural por unidad de longitud y del momento de inercia polar no estructural por unidad de longitud, tanto para el cajón central como para los cajones laterales, considerando una densidad para el material del tablero de 7.85 T/m^3 al tratarse de acero. Los resultados obtenidos para el cajón central son los siguientes:

$$\underline{m}^{ne} = 5.7288 \text{ T/m}$$

$$\underline{m}_{\phi x}^{ne} = 1093.924 \text{ Tm}^2 / \text{m}$$

Mientras que los resultados correspondientes a los tableros laterales son:

$$\underline{m}^{ne} = 3.39591 \text{ T/m}$$

$$\underline{m}_{\phi x}^{ne} = 520.82795 \text{ Tm}^2 / \text{m}$$

Tal y como se ha explicado en el apartado 6 del capítulo 3 del presente documento, el objetivo último de este trabajo de investigación es el acometer el diseño óptimo de puentes de gran vano considerando para ello, entre otras, condiciones de tipo aeroelástico. Las variables de diseño que han sido consideradas son los espesores de las chapas que conforman la sección transversal de un tablero en cajón simétrico equivalente a la sección aerodinámica del cajón o de cada uno de los cajones, como es

el caso del puente de Messina, que configuran el tablero del puente. En este capítulo 6, hasta el momento tan solo se ha hecho referencia a las propiedades mecánicas del tablero o de los cajones que constituyen el tablero del puente; sin embargo, al acometer la optimización tal y como se ha planteado, los espesores de las chapas de los cajones en el diseño inicial deben ser conocidos ya que las propiedades de la sección transversal dependen de ellos, lo que se ha explicitado en las ecuaciones (3.6.5) a (3.6.9). Una vez conocidos los espesores, es posible calcular las sensibilidades de la velocidad de flameo respecto a los espesores mediante la expresión (4.3.54) en la que interviene la matriz jacobiana, cuyos elementos son las derivadas de las propiedades mecánicas del tablero, o cajón considerado, respecto a los espesores. El diseño óptimo del puente de Messina se tratará con detalle en el capítulo 7, centrándose este capítulo 6 en los aspectos requeridos para la obtención de las sensibilidades de la velocidad de flameo respecto a los espesores.

Para determinar los espesores equivalentes de las chapas de una sección en cajón simétrica, que tenga las mismas propiedades mecánicas que cada uno de los cajones del puente de Messina se deben tener en cuenta los datos y relaciones que son conocidos:

- Cajón central

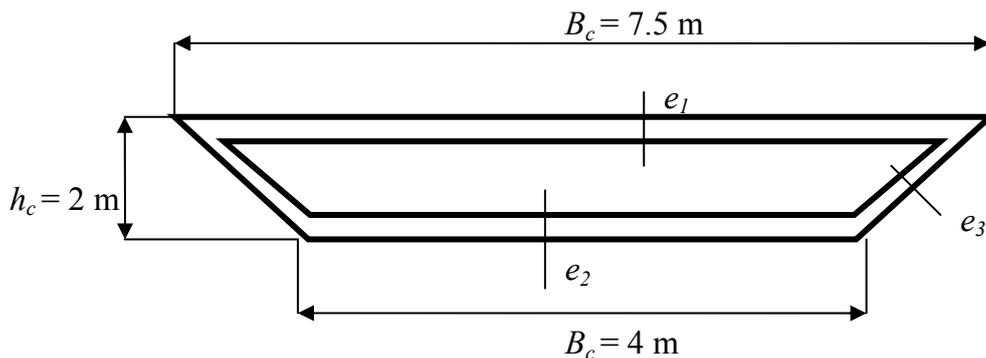


Figura 6.3.4. Sección en cajón equivalente al cajón central del puente de Messina.

Los valores de las propiedades mecánicas de la sección transversal del cajón central son conocidas.

$$A^c = A^c(B_c, b_c, h_c, e_1, e_2, e_3) = 0.39 \text{ m}^2 \quad (6.3.1)$$

$$I_y^c = I_y^c(B_c, b_c, h_c, e_1, e_2, e_3) = 0.301 \text{ m}^4 \quad (6.3.2)$$

$$I_z^c = I_z^c(B_c, b_c, h_c, e_1, e_2, e_3) = 2.12 \text{ m}^4 \quad (6.3.3)$$

$$J^c = J^c(B_c, b_c, h_c, e_1, e_2, e_3) = 0.738 \text{ m}^4 \quad (6.3.4)$$

- Cajones laterales

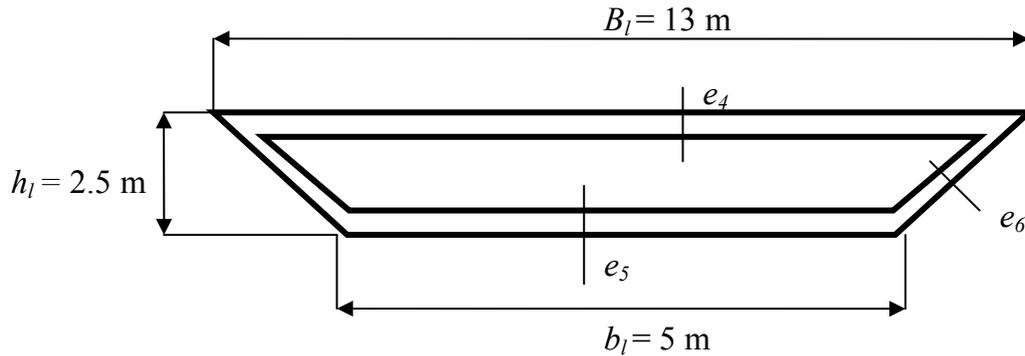


Figura 6.3.5. Sección en cajón equivalente a cada cajón lateral del puente de Messina.

Los valores de las propiedades mecánicas de cada uno de los cajones laterales también son conocidas:

$$A^l = A^l(B_l, b_l, h_l, e_4, e_5, e_6) = 0.495 \text{ m}^2 \quad (6.3.5)$$

$$I_y^l = I_y^l(B_l, b_l, h_l, e_4, e_5, e_6) = 0.451 \text{ m}^4 \quad (6.3.6)$$

$$I_z^l = I_z^l(B_l, b_l, h_l, e_4, e_5, e_6) = 8.404 \text{ m}^4 \quad (6.3.7)$$

$$J^l = J^l(B_l, b_l, h_l, e_4, e_5, e_6) = 1.039 \text{ m}^4 \quad (6.3.8)$$

Como se ha indicado en las figuras 6.3.4 y 6.3.5, las dimensiones exteriores han sido establecidas para cada cajón. Por lo tanto, para cada caso, debe resolverse un sistema no lineal de cuatro ecuaciones con tres incógnitas, que son los espesores de cada cajón. Imponiendo la condición de que la diferencia entre el área calculada con los espesores obtenidos como solución y el área dato sea el menor posible, se obtienen los resultados siguientes para el diseño inicial:

6.3.1 Análisis de la vibración libre

A partir de los datos indicados anteriormente se ha elaborado un modelo de elementos finitos empleando para ello el preprocesador GEOSTAR^[C2]. Teniendo en mente que una aplicación importante de la presente investigación era, no sólo, calcular las sensibilidades de este puente sino también obtener su diseño óptimo, se ha realizado un modelo no excesivamente grande, a la par que suficientemente preciso. El resultado ha sido un modelo tridimensional de 301 nudos y 476 elementos barra tipo BEAM, siendo el número de nudos dispuestos en cada uno de los tres cajones que conforman el tablero del puente de 45. En concreto, los nudos del cajón central están numerados consecutivamente del 1 al 45. Esto facilitará una rápida comprensión de los gráficos de los modos de vibración y sus sensibilidades que se muestran posteriormente. En las figuras 6.3.7 (I) y (II) se presentan dos imágenes del modelo de elementos finitos realizado. El cálculo de las frecuencias naturales y modos propios de vibración ha sido llevado a cabo en teoría de segundo orden, para tener en cuenta la no linealidad geométrica en el comportamiento de esta estructura, tal y como se ha descrito en los apartados precedentes.

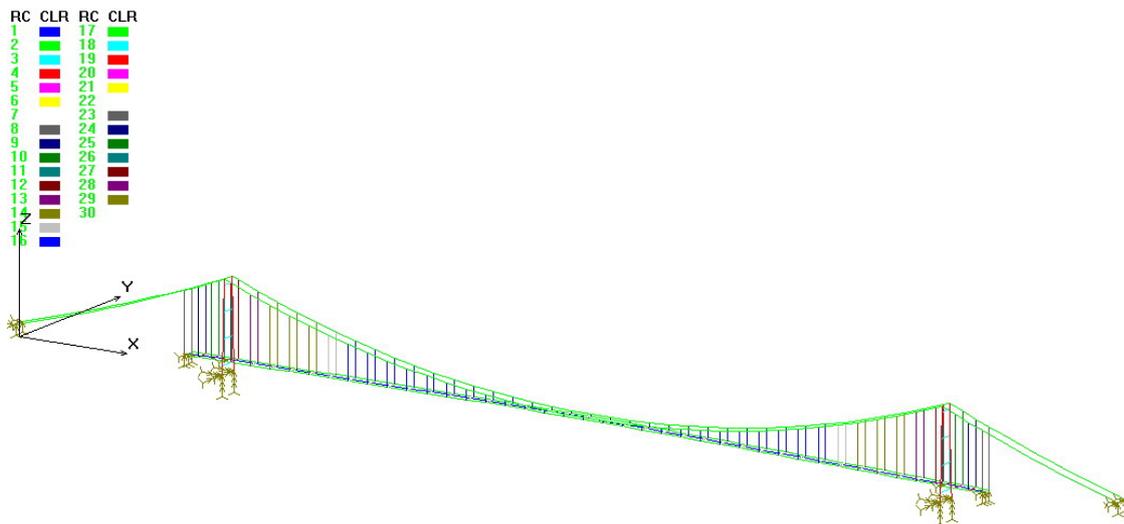


Figura 6.3.7 (I) Modelo de elementos finitos del puente de Messina.

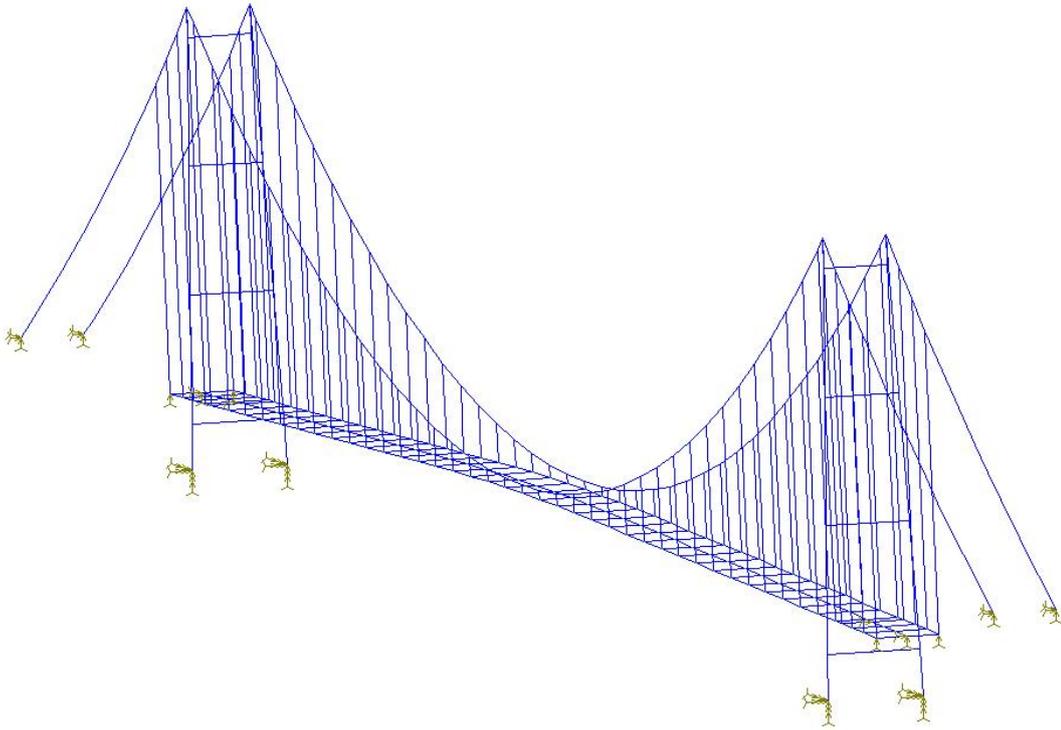


Figura 6.3.7 (II) Modelo de elementos finitos del puente de Messina.

A continuación, en la tabla 6.3.2, se presentan los resultados obtenidos para los modos propios de vibración y las frecuencias naturales considerando teoría de segundo orden, véase también Nieto^[N1], para lo que se ha empleado el módulo correspondiente del programa DIOPTICA. Se muestran únicamente los resultados de los modos que posteriormente se utilizan para obtener el flameo multimodal, es decir, los veinte primeros modos propios eliminando aquellos que no tienen influencia en el fenómeno del flameo. Además, en la tabla 6.3.3 se presenta una comparación entre los resultados obtenidos en la presente investigación y los ofrecidos por el Instituto Politécnico de Milán (Italia) y por la Universidad Nacional de Yokohama (Japón) (véase Miyata^[M3] et al.), con el fin de validar el modelo estructural realizado.

n°	tipo	frec (rad/s)	frec (Hz)	Periodo (s)
1	LS	0.2004	0.0319	31.35
2	VA	0.3682	0.0586	17.06
3	LA	0.4018	0.0639	15.64
4	VS	0.4838	0.0770	12.99
5	TA	0.5390	0.0858	11.66
6	LTS	0.5623	0.0895	11.17
9	LTS	0.6140	0.0977	10.23
10	VS	0.6422	0.1022	9.78
11	LTA	0.6637	0.1056	9.47
12	LA	0.6907	0.1099	9.10
13	VA	0.7642	0.1216	8.22
14	LTS	0.7850	0.1249	8.00
15	LA	0.7974	0.1269	7.88
18	LA	0.9030	0.1437	6.96
19	LTA	0.9181	0.1461	6.84
20	LTA	0.9308	0.1481	6.75

Tabla 6.3.2 Frecuencias naturales y modos propios de vibración del puente de Messina

Modo		PDM		UNY		Nieto UDC
Horizontal (1° sim.)	1	0.033	1	0.031	1	0.032
Horizontal (1° antim.)	2	0.059	2	0.059	3	0.064
Vertical (1° antim.)	3	0.061	3	0.064	2	0.059
Vertical (1° sim.)	4	0.08	5	0.078	4	0.077
Torsion (1° antim.)	5	0.081	4	0.076	5	0.086
Horizontal (2° sim.)	6	0.084	6	0.084	6	0.089
Torsion (1° sim.)	9	0.097	8	0.093	9	0.098
Vertical (2° sim.)	12	0.107	11	0.104	10	0.102
Vertical (2° antim.)	14	0.128	15	0.123	13	0.122
Torsion (2° sim.)	15	0.129	14	0.123	14	0.125

Tabla 6.3.3 Comparación de los resultados obtenidos por diversos autores para las frecuencias naturales y modos propios de vibración del puente de Messina

En la tabla 6.3.2, el significado de las letras que aparecen en la segunda columna es el mismo que en el ejemplo correspondiente al puente sobre el estrecho del Great Belt. Además, el análisis de la tabla 6.3.3 permite garantizar la existencia de una buena concordancia entre el modelo elaborado independientemente en esta investigación y los modelos desarrollados por otros equipos de investigación internacionales, que también han incluido en el modelo de elementos finitos los tres cajones del tablero.

En las figuras que van de la 6.3.8(I) a la 6.3.8(V) se presentan los 16 modos propios de vibración utilizados como base para determinar el comportamiento aeroelástico del puente empleando la metodología del flameo multimodal, así como los análisis de sensibilidad de la respuesta aeroelástica. La información gráfica que se presenta son los movimientos fundamentales en los nudos del cajón central asociados a cada uno de los modos naturales.

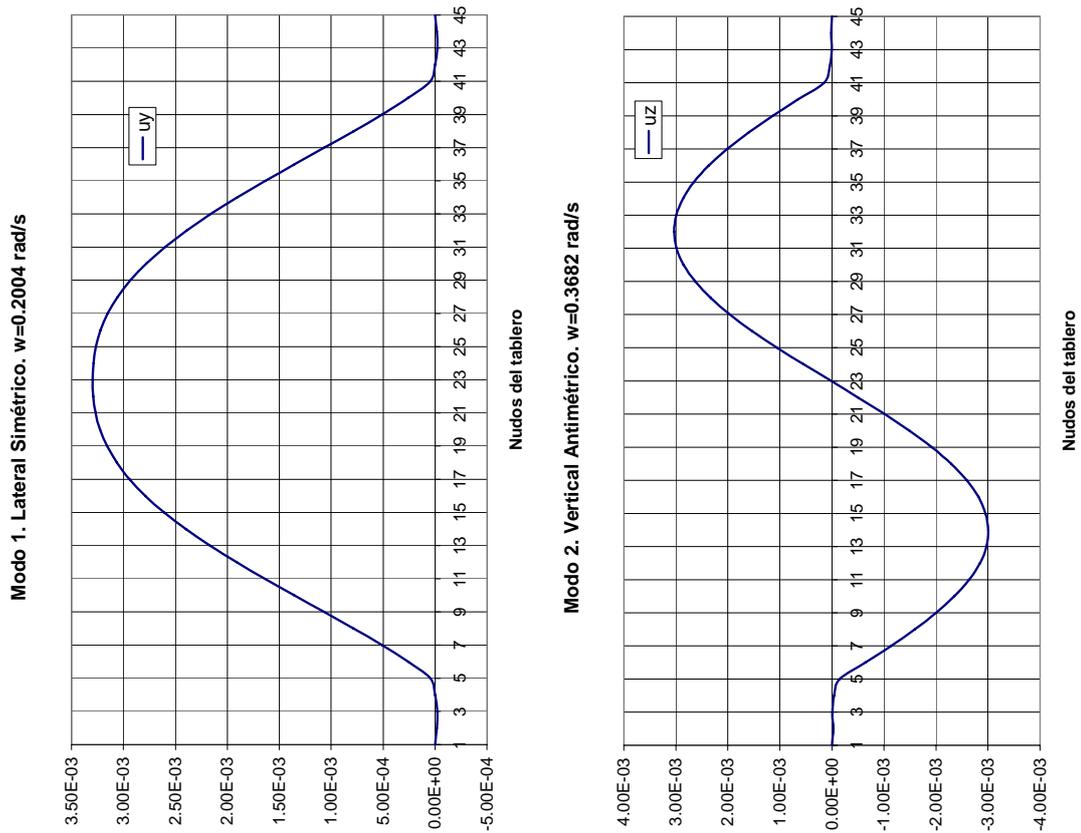


Figura 6.3.8(I). Modos propios de vibración del puente de Messina.

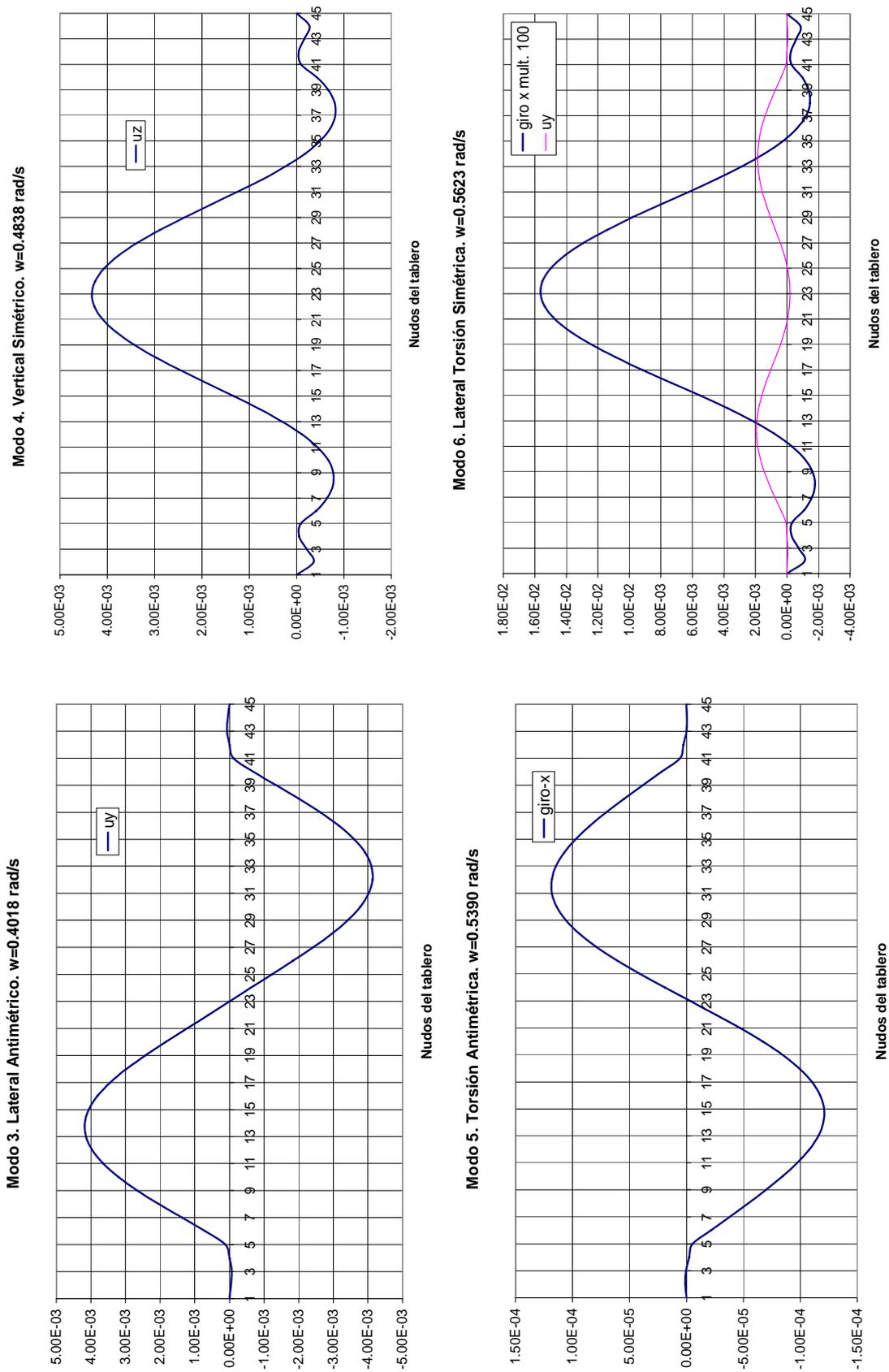


Figura 6.3.8(II). Modos propios de vibración del puente de Messina.

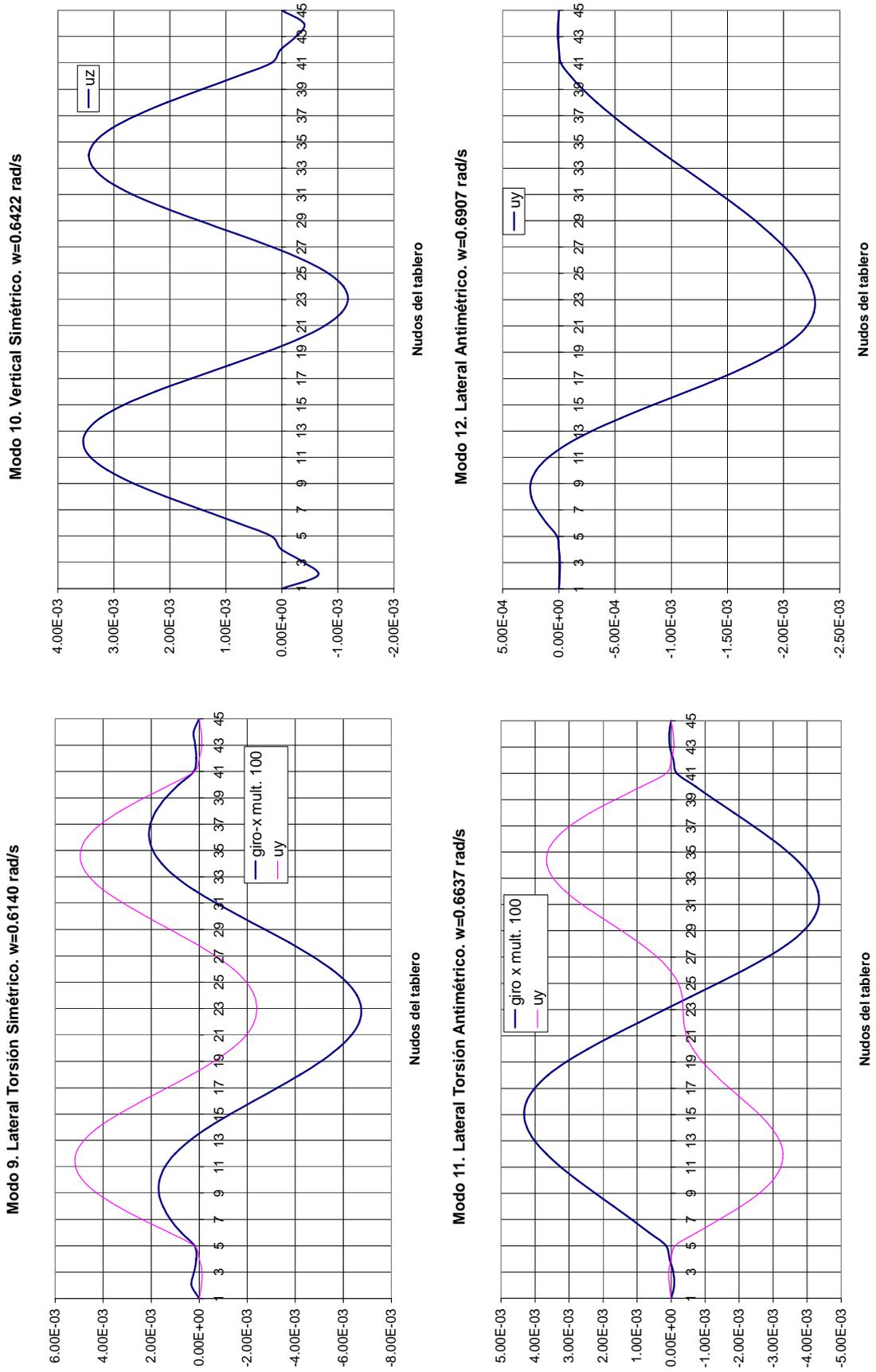


Figura 6.3.8(III). Modos propios de vibración del puente de Messina.

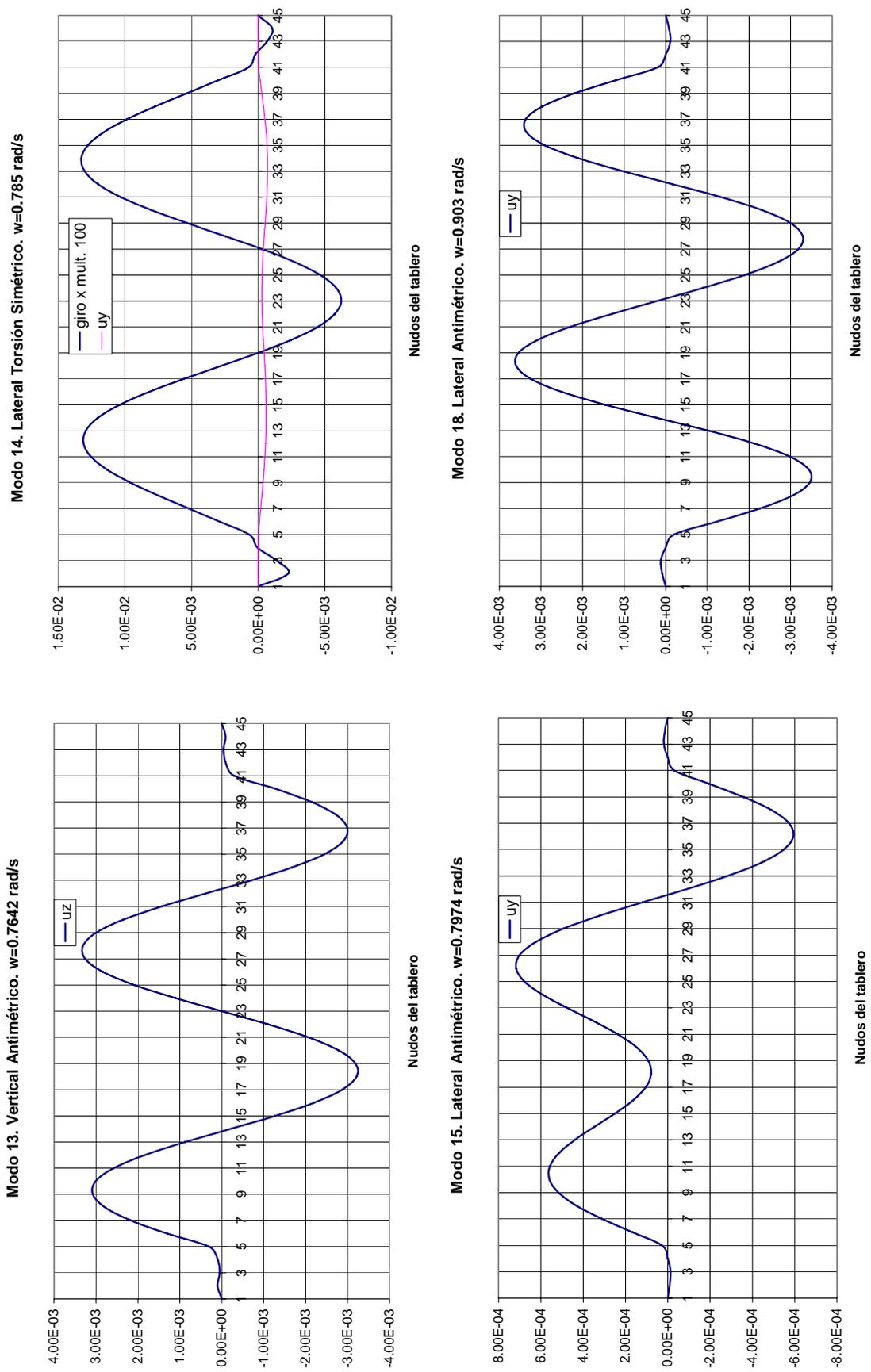


Figura 6.3.8(IV). Modos propios de vibración del puente de Messina.

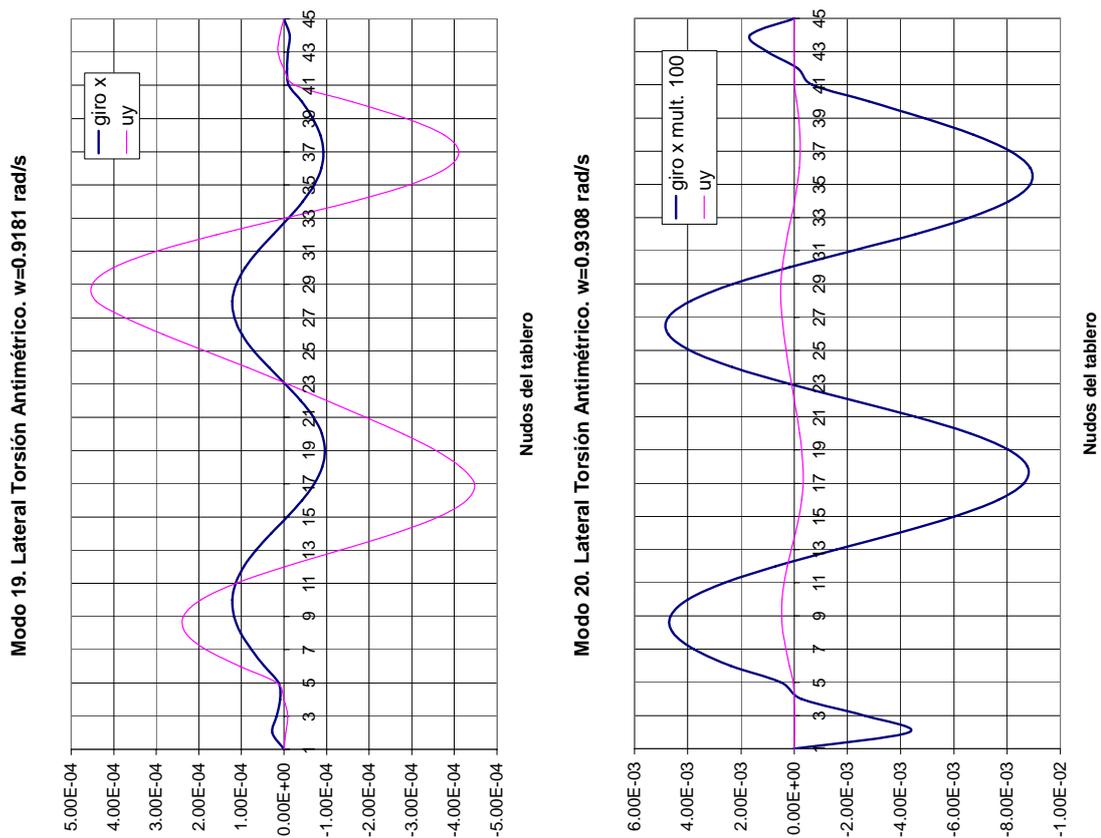


Figura 6.3.8(V). Modos propios de vibración del puente de Messina.

6.3.2 Análisis de sensibilidad de la vibración libre

Una vez conocidas las frecuencias naturales y los modos propios de vibración del puente sobre el estrecho de Messina, se han llevado a cabo los análisis de sensibilidad analíticos de esas frecuencias y modos propios de vibración, utilizando para ello el módulo correspondiente del programa DIOPTICA, aplicando técnicas de computación distribuida.

Se han adoptado como variables de diseño, es decir, las variables respecto a las que se derivan las frecuencias naturales y modos propios de la estructura, las propiedades mecánicas de las secciones transversales de los cajones central y laterales que conforman el tablero del puente. Se han considerado, por tanto, las siguientes cuatro variables de diseño, tanto para el cajón central como para los laterales: el área de la sección transversal, A , el momento de inercia a flexión vertical, I_y , el momento de inercia a flexión lateral, I_z , y el momento de inercia a torsión, J . Se han adoptado estas

ocho variables de diseño, ya que de ellas son función, tanto la matriz de rigidez de la estructura como la de masas, por lo que determinan el comportamiento estructural del puente.

A continuación se van a presentar los resultados de las sensibilidades analíticas de las frecuencias naturales y los modos propios de vibración agrupadas del modo siguiente: Primeramente se facilitan los análisis de sensibilidad respecto a las cuatro propiedades mecánicas fundamentales del cajón central y, finalmente, se muestran los resultados de los análisis de sensibilidad respecto a las propiedades mecánicas de los dos cajones laterales idénticos. Esta aproximación está justificada ya que la inercia a flexión vertical I_y , la inercia a flexión lateral I_z , la inercia a torsión J y el área A del cajón central y de cada uno de los cajones laterales son independientes entre sí y, en consecuencia, es ocho el número de variables de diseño independientes entre sí respecto a las que calcular las sensibilidades.

- *Sensibilidades respecto a las propiedades mecánicas del tablero central.*

Se presentan a continuación las sensibilidades de las frecuencias naturales del puente sobre el estrecho de Messina respecto a las propiedades mecánicas del tablero central. Los resultados se comprueban calculando las aproximaciones mediante diferencias finitas centradas del 5% y del 1%, mostrándose en las tablas que figuran a continuación los errores relativos, expresados en tanto por ciento, entre el resultado analítico y la aproximación mediante diferencias finitas. En la primera columna de cada una de las tablas se indica también el número y tipo de modo propio de vibración al que están asociadas las frecuencias naturales.

En la tabla 6.3.4 se muestran las sensibilidades de las frecuencias naturales respecto a la inercia a flexión vertical, I_y , del tablero central. El análisis de los resultados pone de manifiesto una adecuada concordancia entre los resultados analíticos y las aproximaciones mediante diferencias finitas realizadas con los dos tamaños de paso indicados en el párrafo anterior. Además, no se aprecian diferencias relevantes en la precisión de los resultados obtenidos empleando un tamaño de paso u otro. Por otro lado, los valores de las sensibilidades son bajos, siendo mayores, en general, para las frecuencias asociadas a modos propios de vibración verticales.

n° y tipo modo	SENSIBIL. ANALITICA	DFC 5%	DFC 1%	error rel. DFC 5%	error rel. DFC 1%
1 LS	-1.140E-05	-1.159E-05	-1.159E-05	1.70	1.69
2 VA	2.315E-04	2.311E-04	2.311E-04	-0.19	-0.19
3 LA	-1.426E-05	-1.453E-05	-1.453E-05	1.86	1.86
4 VS	8.556E-04	8.554E-04	8.553E-04	-0.03	-0.03
5 TA	-8.843E-05	-8.879E-05	-8.879E-05	0.40	0.40
6 LTS	-8.163E-05	-8.178E-05	-8.178E-05	0.18	0.18
9 LTS	-1.799E-05	-1.813E-05	-1.813E-05	0.77	0.77
10 VS	1.236E-03	1.236E-03	1.236E-03	-0.03	-0.03
11 LTA	-4.306E-05	-4.332E-05	-4.332E-05	0.60	0.60
12 LA	-5.261E-05	-5.317E-05	-5.317E-05	1.07	1.07
13 VA	8.926E-04	8.917E-04	8.917E-04	-0.10	-0.10
14 LTS	-1.483E-04	-1.486E-04	-1.486E-04	0.20	0.20
15 LA	-9.661E-05	-9.613E-05	-9.613E-05	-0.50	-0.50
18 LA	-4.169E-05	-4.190E-05	-4.190E-05	0.51	0.51
19 LTA	-1.909E-04	-1.913E-04	-1.913E-04	0.23	0.23
20 LTA	-1.641E-04	-1.639E-04	-1.639E-04	-0.13	-0.13

Tabla 6.3.4. Sensibilidades de las frecuencias naturales del puente sobre el estrecho de Messina respecto a la inercia a flexión vertical del cajón central del tablero I_y .

En la tabla 6.3.5 se muestran las sensibilidades de las frecuencias naturales respecto a la inercia a flexión lateral, I_z , del cajón central del puente. Al igual que en el caso precedente, las aproximaciones calculadas mediante diferencias finitas son muy similares al resultado analítico, que es considerado exacto. Puede apreciarse como las sensibilidades de las frecuencias naturales que corresponden a modos propios verticales son varios órdenes de magnitud menores que las de aquellas correspondientes a modos propios laterales. Por otro lado, ninguno de los dos tamaños de paso empleados para calcular las diferencias finitas ofrece globalmente mejores resultados que el otro.

n° y tipo modo	SENSIBIL. ANALITICA	DFC 5%	DFC 1%	error rel. DFC 5%	error rel. DFC 1%
1 LS	9.908E-04	9.916E-04	9.909E-04	0.08	0.00
2 VA	1.273E-09	1.256E-09	1.360E-09	-1.32	6.89
3 LA	5.049E-03	5.052E-03	5.049E-03	0.07	0.00
4 VS	3.646E-09	3.648E-09	3.596E-09	0.06	-1.37
5 TA	1.982E-04	1.985E-04	1.983E-04	0.12	0.00
6 LTS	1.260E-03	1.263E-03	1.260E-03	0.27	0.01
9 LTS	1.398E-02	1.399E-02	1.398E-02	0.04	0.00
10 VS	6.119E-09	6.117E-09	6.076E-09	-0.04	-0.71
11 LTA	4.587E-03	4.590E-03	4.587E-03	0.08	0.00
12 LA	1.943E-04	1.943E-04	1.943E-04	0.04	0.00
13 VA	5.725E-09	5.720E-09	5.682E-09	-0.08	-0.75
14 LTS	6.383E-07	6.617E-07	6.392E-07	3.67	0.15
15 LA	3.140E-04	3.145E-04	3.140E-04	0.16	0.01
18 LA	1.566E-02	1.567E-02	1.566E-02	0.07	0.00
19 LTA	1.889E-04	1.900E-04	1.890E-04	0.58	0.02
20 LTA	1.704E-04	1.704E-04	1.704E-04	0.02	0.00

Tabla 6.3.5. Sensibilidades de las frecuencias naturales del puente sobre el estrecho de Messina respecto a la inercia a flexión lateral del cajón central del tablero I_x .

De manera similar, en la tabla 6.3.6 se presentan las sensibilidades analíticas de las frecuencias naturales respecto a la inercia a torsión, J , del cajón central junto con las aproximaciones calculadas mediante diferencias finitas. Puede apreciarse como las sensibilidades de las frecuencias correspondientes a modos propios de vibración verticales son prácticamente nulas, ya que los movimientos verticales no dependen de la inercia a torsión. Como ya sucedía en los casos anteriores, las aproximaciones mediante diferencias finitas centradas son muy parecidas a los resultados obtenidos analíticamente. En este caso, el tamaño de paso del 1% ofrece resultados más precisos que el tamaño de paso del 5%.

nº y tipo modo	SENSIBIL. ANALITICA	DFC 5%	DFC 1%	error rel. DFC 5%	error rel. DFC 1%
1 LS	3.293E-07	3.294E-07	3.294E-07	0.04	0.03
2 VA	6.645E-12	5.160E-11	-4.023E-10		
3 LA	1.451E-04	1.451E-04	1.451E-04	0.00	0.00
4 VS	1.646E-12	2.724E-12	2.920E-11		
5 TA	6.238E-03	6.238E-03	6.238E-03	0.00	0.00
6 LTS	4.310E-03	4.310E-03	4.310E-03	0.00	0.00
9 LTS	1.140E-03	1.140E-03	1.140E-03	0.00	0.00
10 VS	3.063E-10	3.154E-10	2.491E-10		
11 LTA	6.577E-04	6.577E-04	6.577E-04	0.00	0.00
12 LA	5.238E-04	5.238E-04	5.238E-04	0.00	0.00
13 VA	7.966E-11	7.642E-11	1.409E-10		
14 LTS	8.754E-03	8.754E-03	8.754E-03	0.00	0.00
15 LA	2.146E-06	2.147E-06	2.146E-06	0.02	0.00
18 LA	5.647E-05	5.651E-05	5.648E-05	0.06	0.00
19 LTA	1.254E-02	1.254E-02	1.254E-02	-0.01	0.00
20 LTA	7.045E-03	7.046E-03	7.045E-03	0.02	0.00

Tabla 6.3.6. Sensibilidades de las frecuencias naturales del puente sobre el estrecho de Messina respecto a la inercia a torsión del cajón central del tablero J .

En la tabla 6.3.7 se presentan las sensibilidades de las frecuencias naturales respecto al área, A , del cajón central del tablero. Puede comprobarse como estas sensibilidades son, en general, de mayor magnitud que las sensibilidades de las frecuencias naturales respecto a las otras propiedades mecánicas del cajón central del tablero, circunstancia ésta que también ha sido puesta de manifiesto en el ejemplo presentado anteriormente. Además, las sensibilidades son en general altas, independientemente del tipo de modo propio de vibración al que esté asociada la frecuencia natural. Esto pone de manifiesto la influencia que esta propiedad mecánica tiene en el comportamiento estructural del puente. En otro orden de cosas, las aproximaciones mediante diferencias finitas centradas ofrecen buenos resultados con los dos tamaños de paso considerados. Puede observarse como las sensibilidades para las que el error relativo es mayor corresponden a las de menor orden de magnitud.

nº y tipo modo	SENSIBIL. ANALITICA	DFC 5%	DFC 1%	error rel. DFC 5%	error rel. DFC 1%
1 LS	-4.163E-03	-4.196E-03	-4.196E-03	0.80	0.80
2 VA	-3.179E-03	-3.255E-03	-3.255E-03	2.39	2.39
3 LA	-2.435E-02	-2.440E-02	-2.440E-02	0.19	0.19
4 VS	-1.265E-02	-1.270E-02	-1.270E-02	0.40	0.40
5 TA	3.938E-02	3.932E-02	3.932E-02	-0.16	-0.16
6 LTS	1.454E-02	1.451E-02	1.452E-02	-0.21	-0.18
9 LTS	-5.097E-02	-5.099E-02	-5.100E-02	0.04	0.05
10 VS	-1.154E-02	-1.160E-02	-1.160E-02	0.53	0.53
11 LTA	2.104E-02	2.099E-02	2.099E-02	-0.22	-0.21
12 LA	3.387E-02	3.377E-02	3.377E-02	-0.29	-0.29
13 VA	-3.907E-03	-4.064E-03	-4.064E-03	4.01	4.01
14 LTS	4.742E-02	4.737E-02	4.737E-02	-0.11	-0.11
15 LA	4.330E-02	4.335E-02	4.335E-02	0.12	0.12
18 LA	-3.800E-02	-3.800E-02	-3.803E-02	-0.02	0.08
19 LTA	5.279E-02	5.270E-02	5.271E-02	-0.17	-0.16
20 LTA	4.894E-02	4.895E-02	4.896E-02	0.02	0.04

Tabla 6.3.7. Sensibilidades de las frecuencias naturales del puente sobre el estrecho de Messina respecto al área del cajón central del tablero *A*.

Seguidamente se muestran los resultados de las sensibilidades analíticas de los modos propios de vibración del puente de Messina respecto a las propiedades mecánicas del tablero central, las cuales han sido obtenidas empleando el programa DIOPTICA. La información se presenta gráficamente, junto con las aproximaciones realizadas mediante diferencias finitas centradas del 1% y del 5%.

Al igual que en el ejemplo del puente del Great Belt, presentado anteriormente, sólo se muestran las sensibilidades de los modos en los que la variable de diseño tiene influencia. Del mismo modo, únicamente se muestran las componentes del modo con derivada significativa, es decir, si un modo propio es vertical se presentan las sensibilidades correspondientes a la componente vertical del movimiento de ese modo, ya que las sensibilidades de las restantes componentes son nulas o varios órdenes de magnitud inferiores.

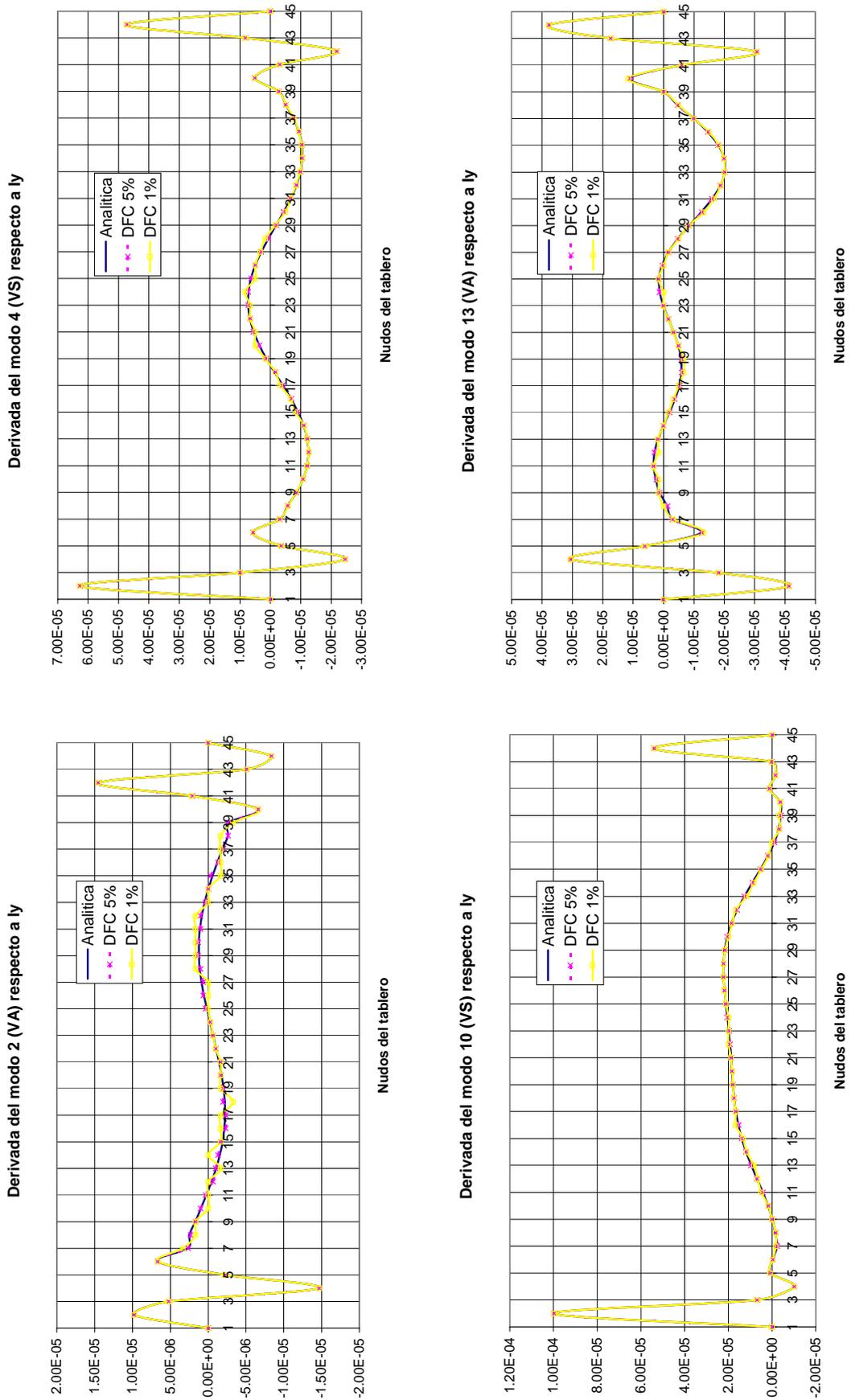


Figura 6.3.9(I). Sensibilidades de los modos propios de vibración del puente de Messina.

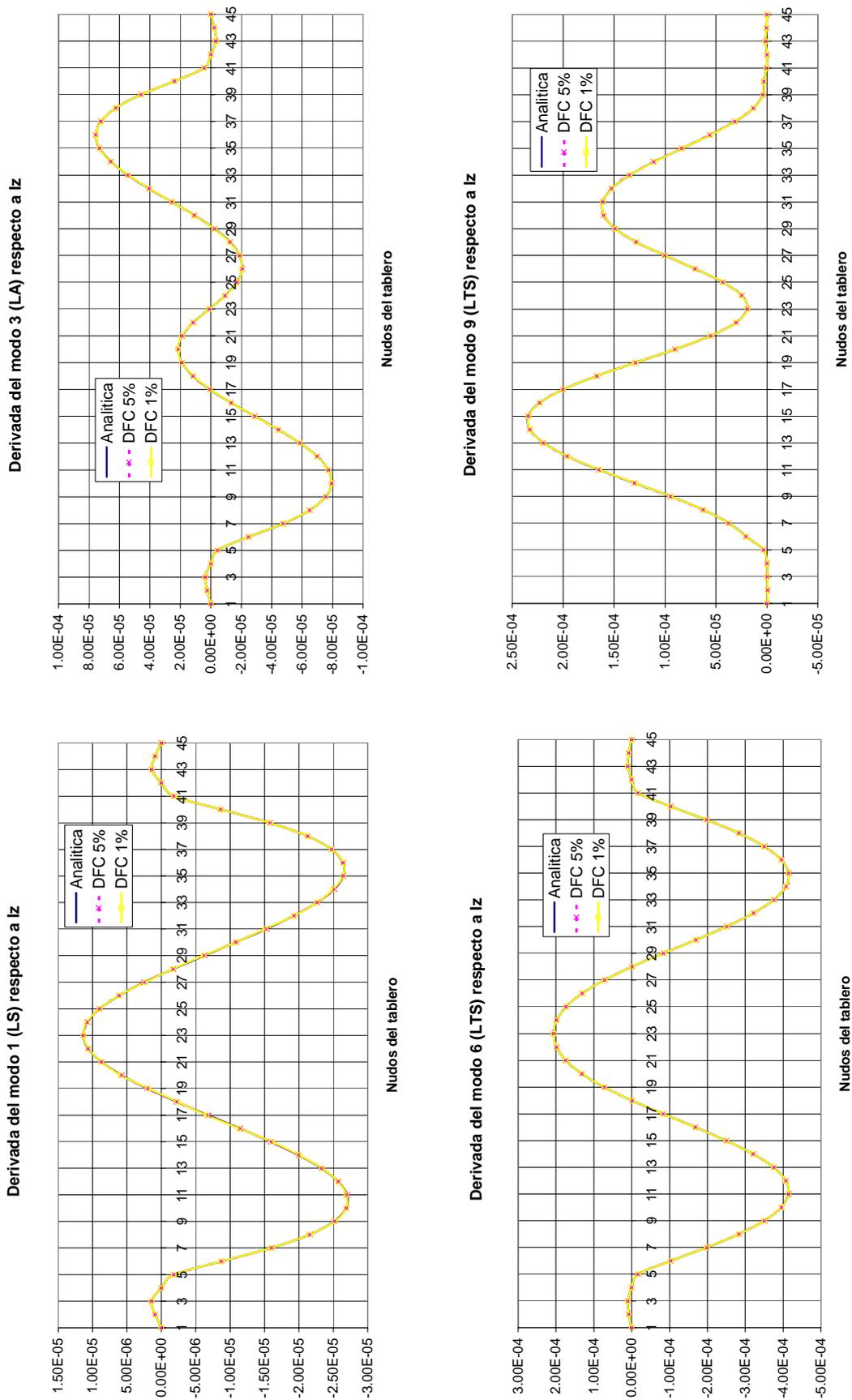


Figura 6.3.9(II). Sensibilidades de los modos propios de vibración del puente de Messina.

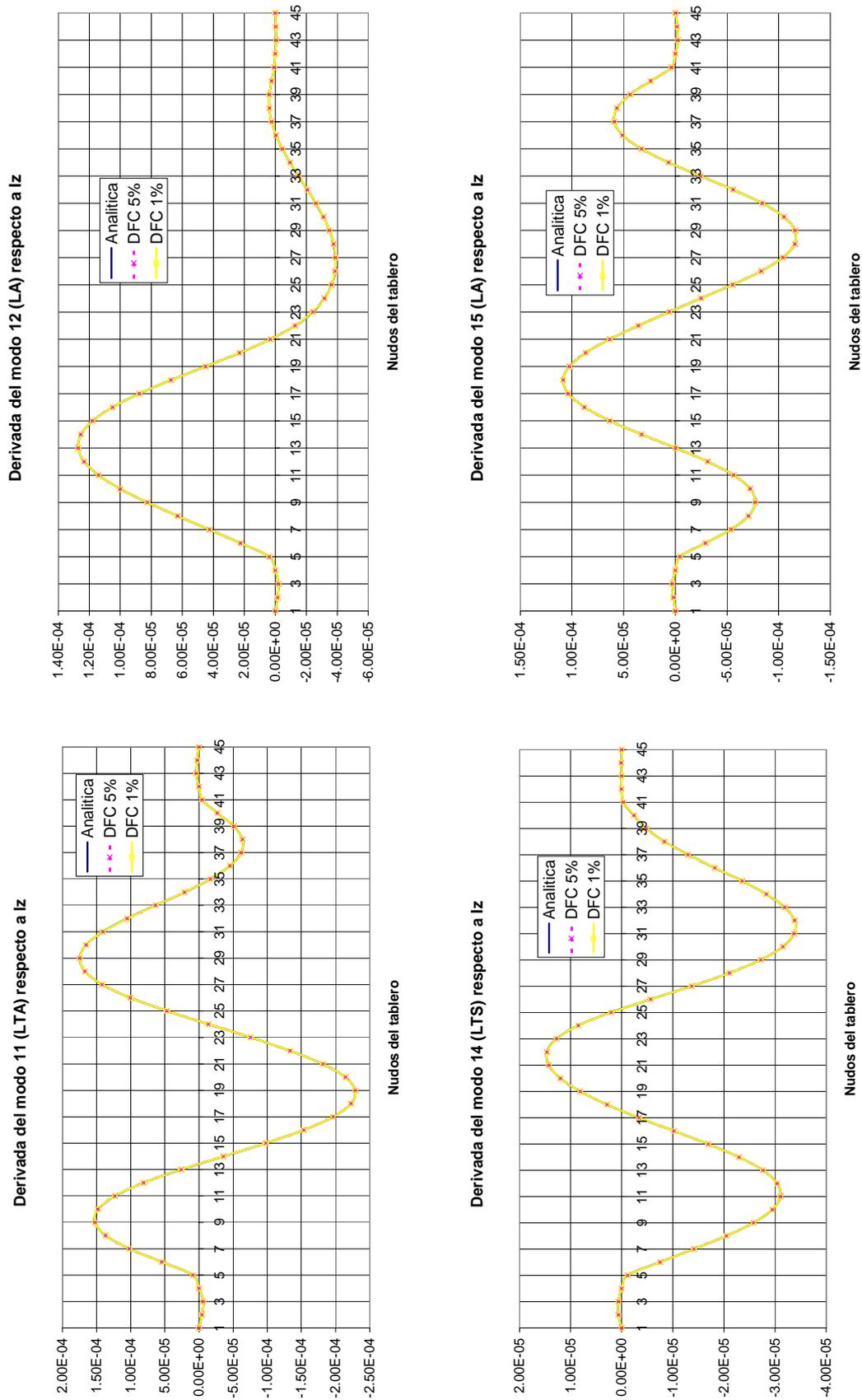


Figura 6.3.9(III). Sensibilidades de los modos propios de vibración del puente de Messina

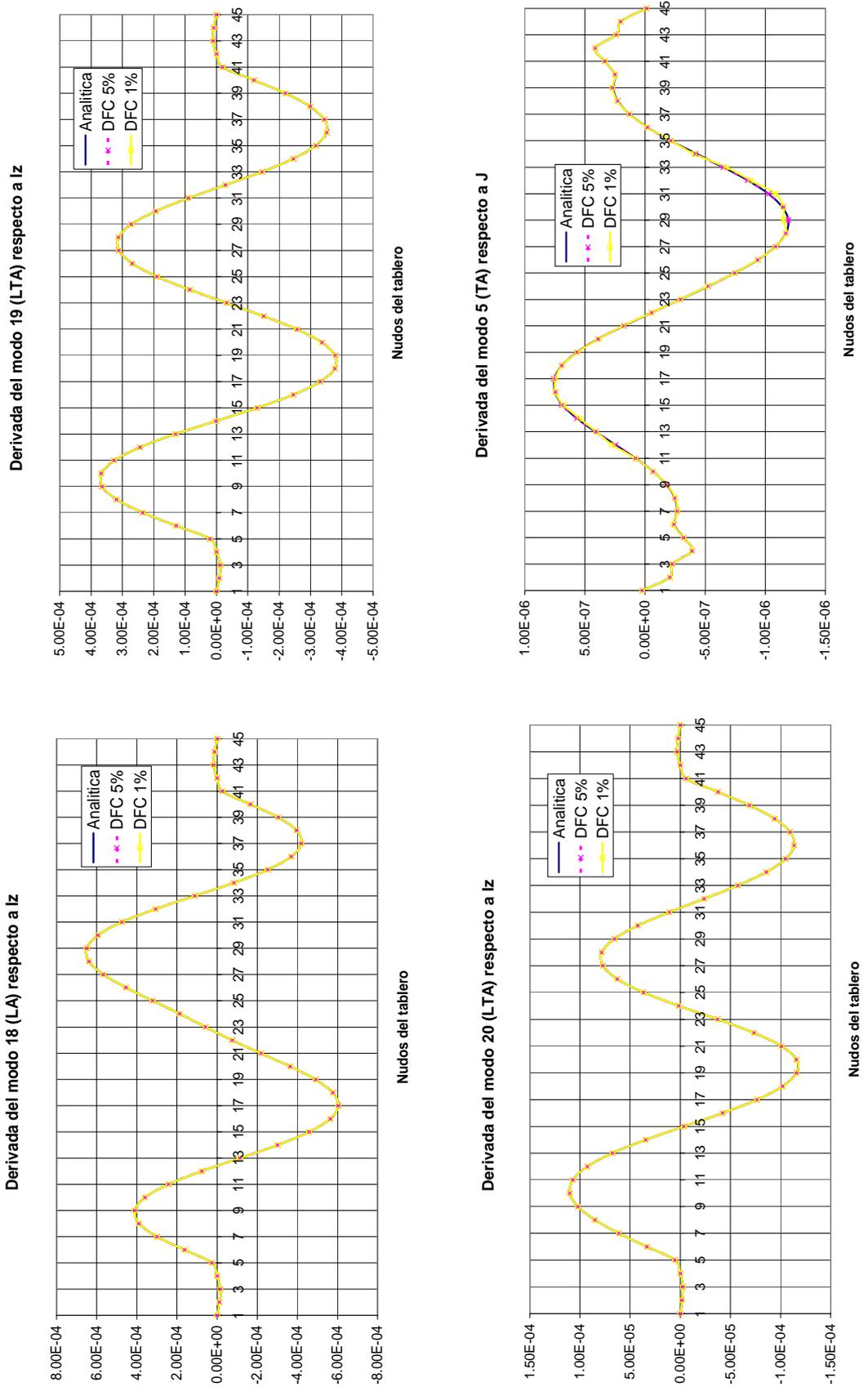


Figura 6.3.9(IV) Sensibilidades de los modos propios de vibración del puente de Messina

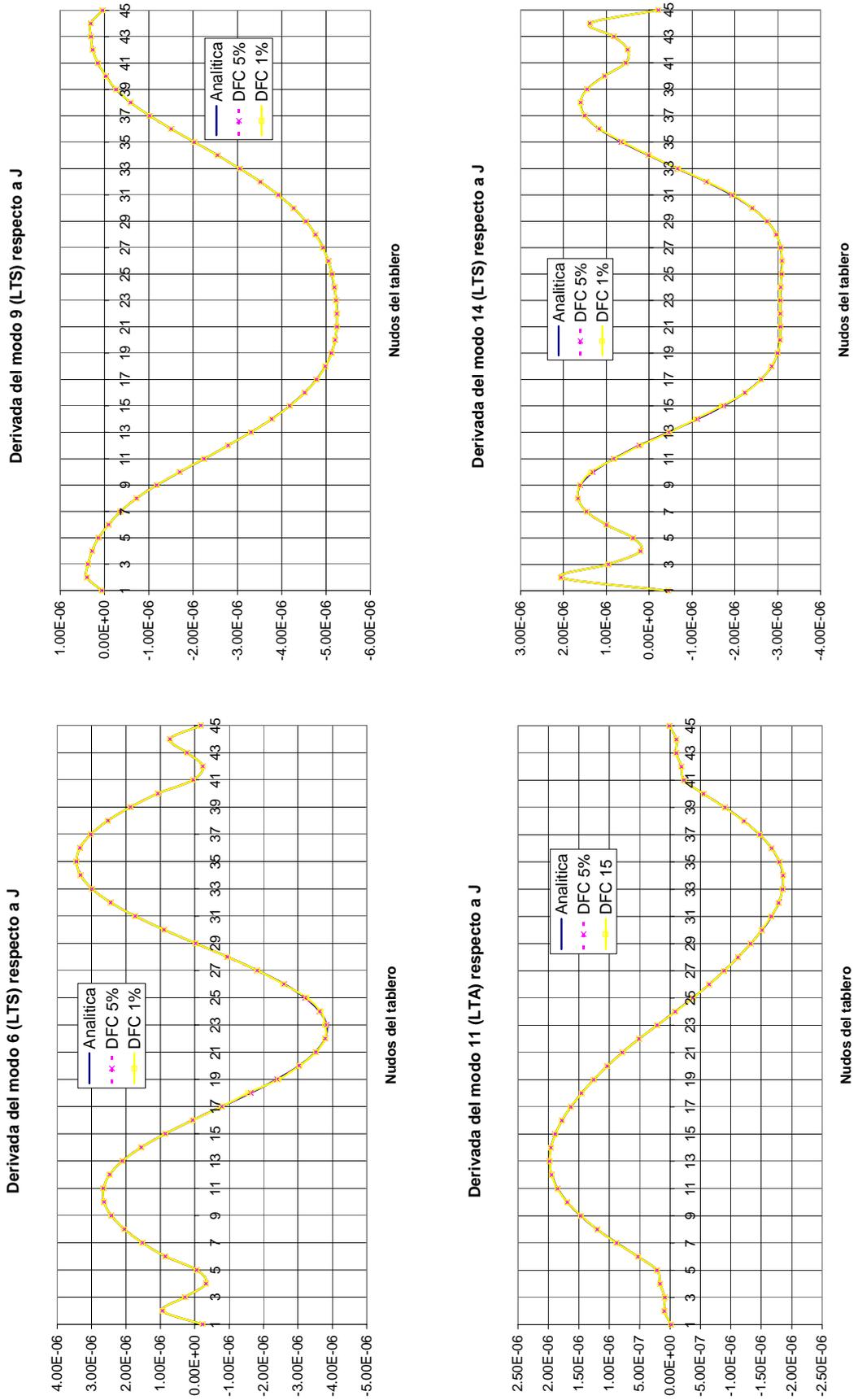


Figura 6.3.9(V). Sensibilidades de los modos propios de vibración del puente de Messina.

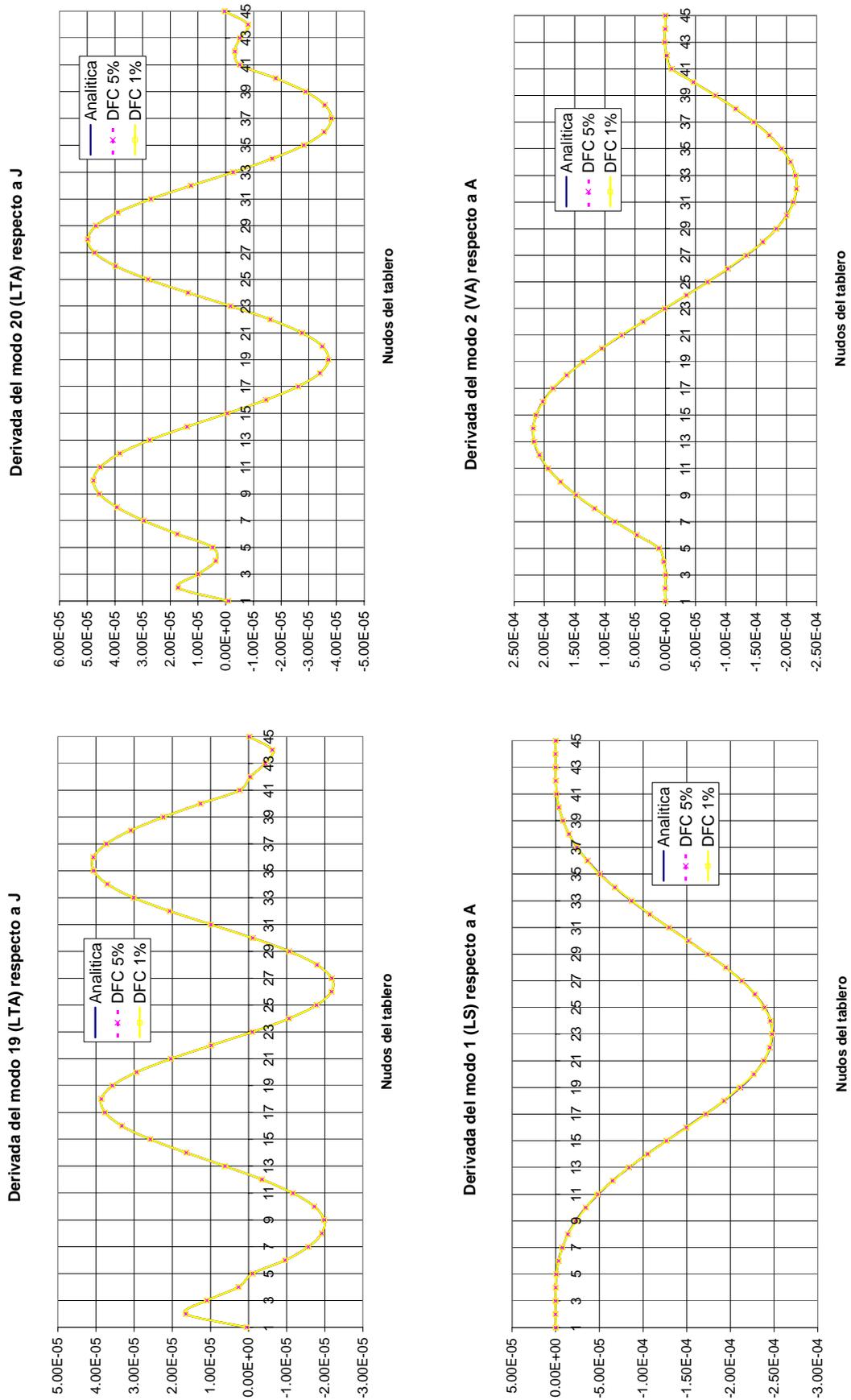


Figura 6.3.9(VI). Sensibilidades de los modos propios de vibración del puente de Messina.

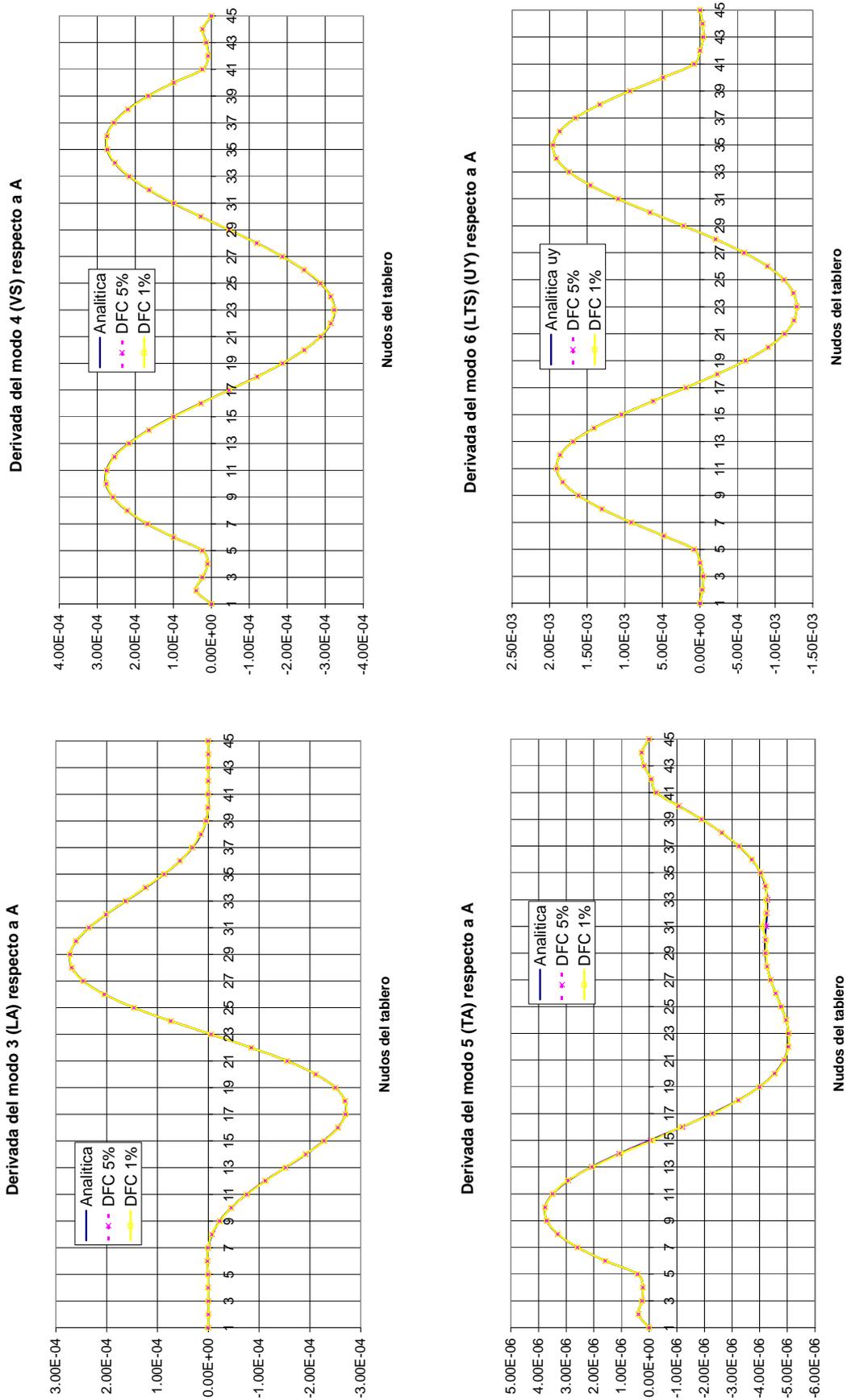


Figura 6.3.9(VII). Sensibilidades de los modos propios de vibración del puente de Messina.

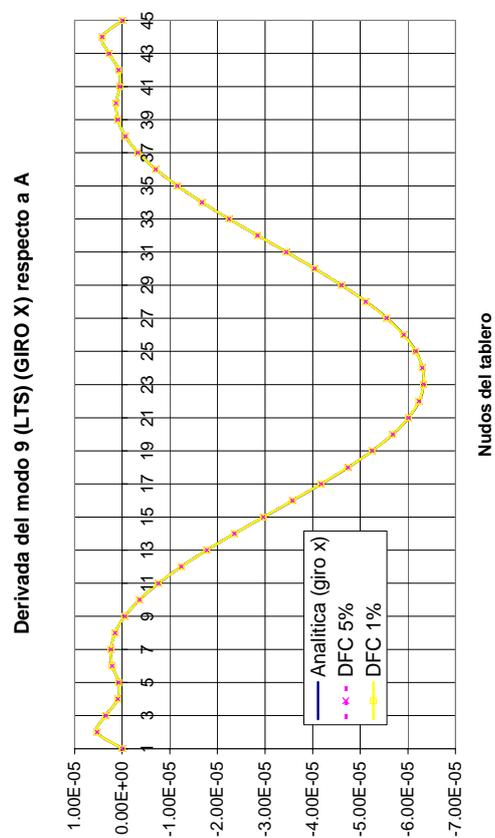
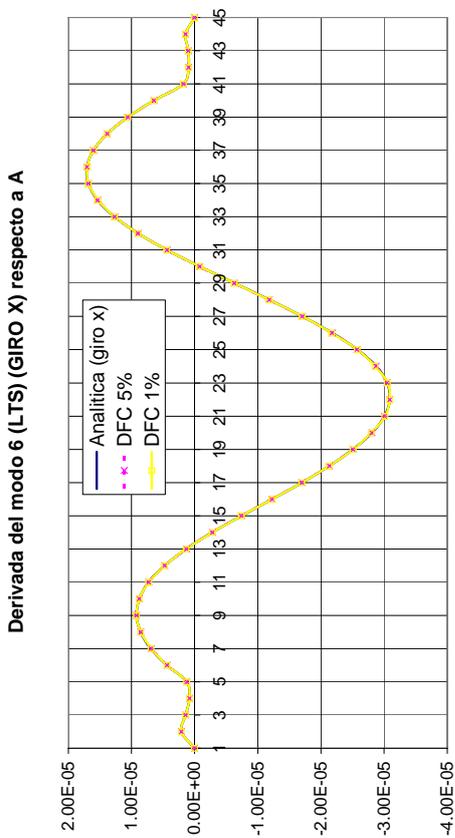
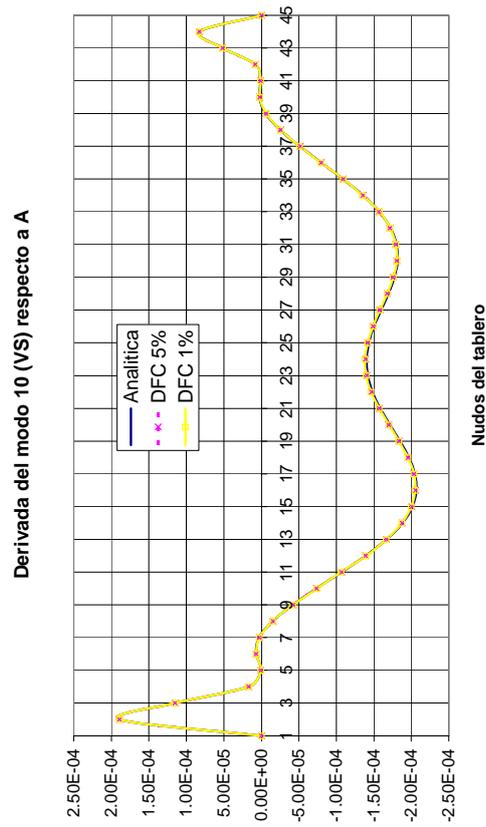
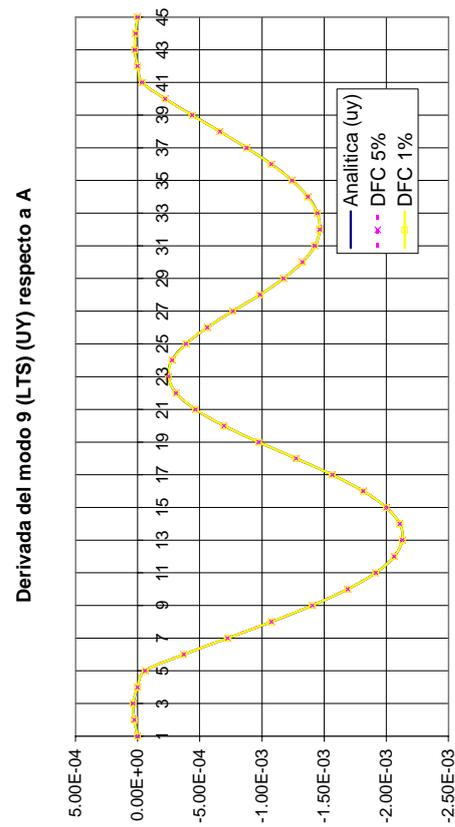


Figura 6.3.9(VIII). Sensibilidades de los modos propios de vibración del puente de Messina.

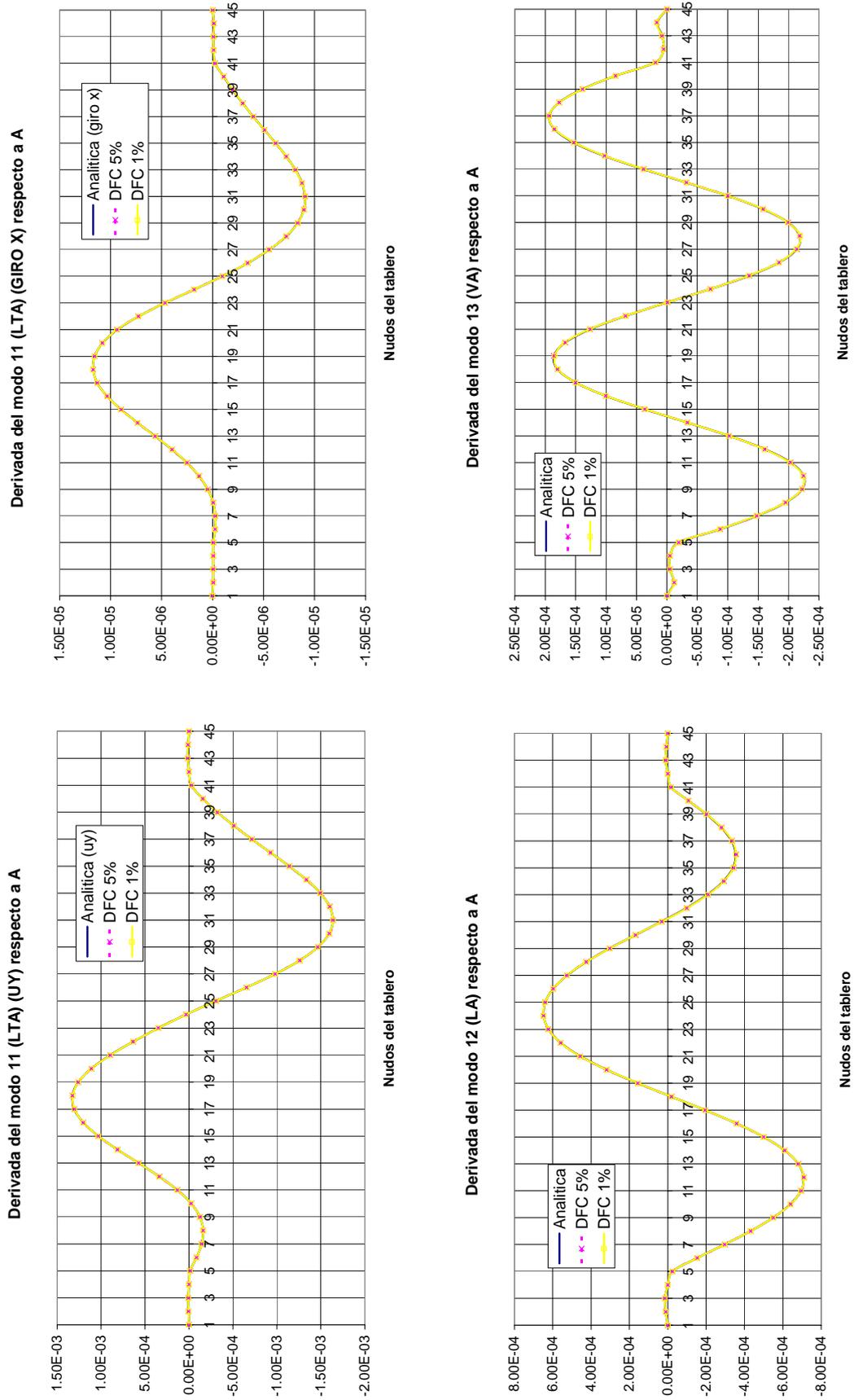


Figura 6.3.9(IX). Sensibilidades de los modos propios de vibración del puente de Messina.

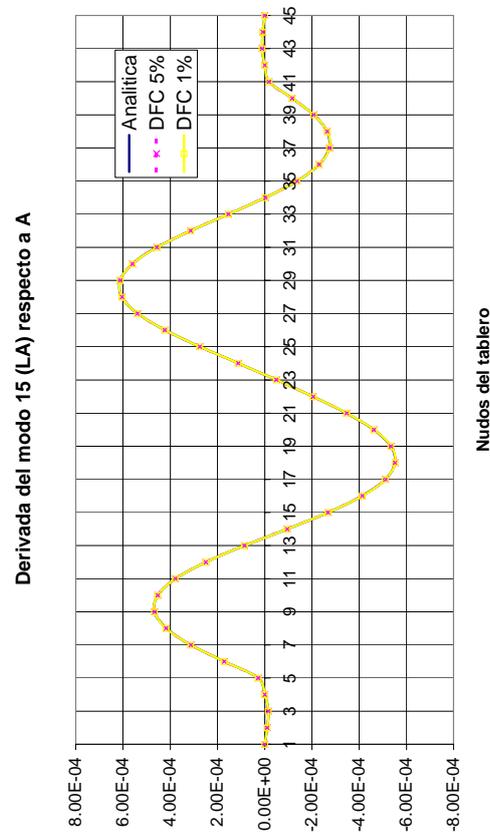
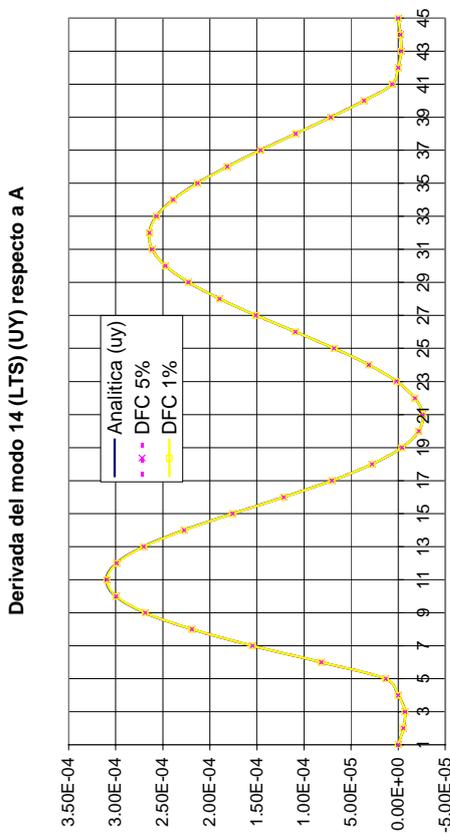
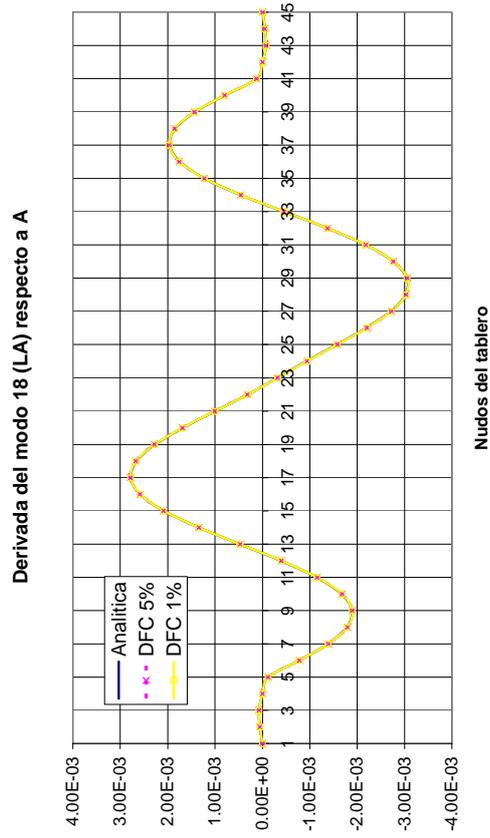
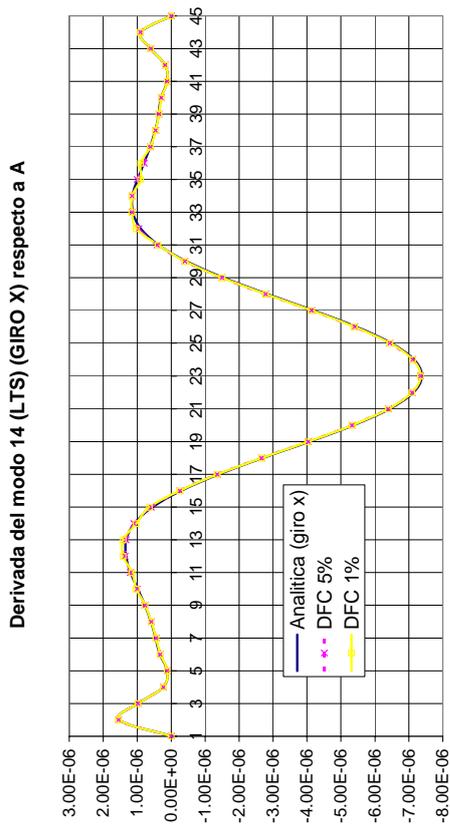


Figura 6.3.9(X). Sensibilidades de los modos propios de vibración del puente de Messina.

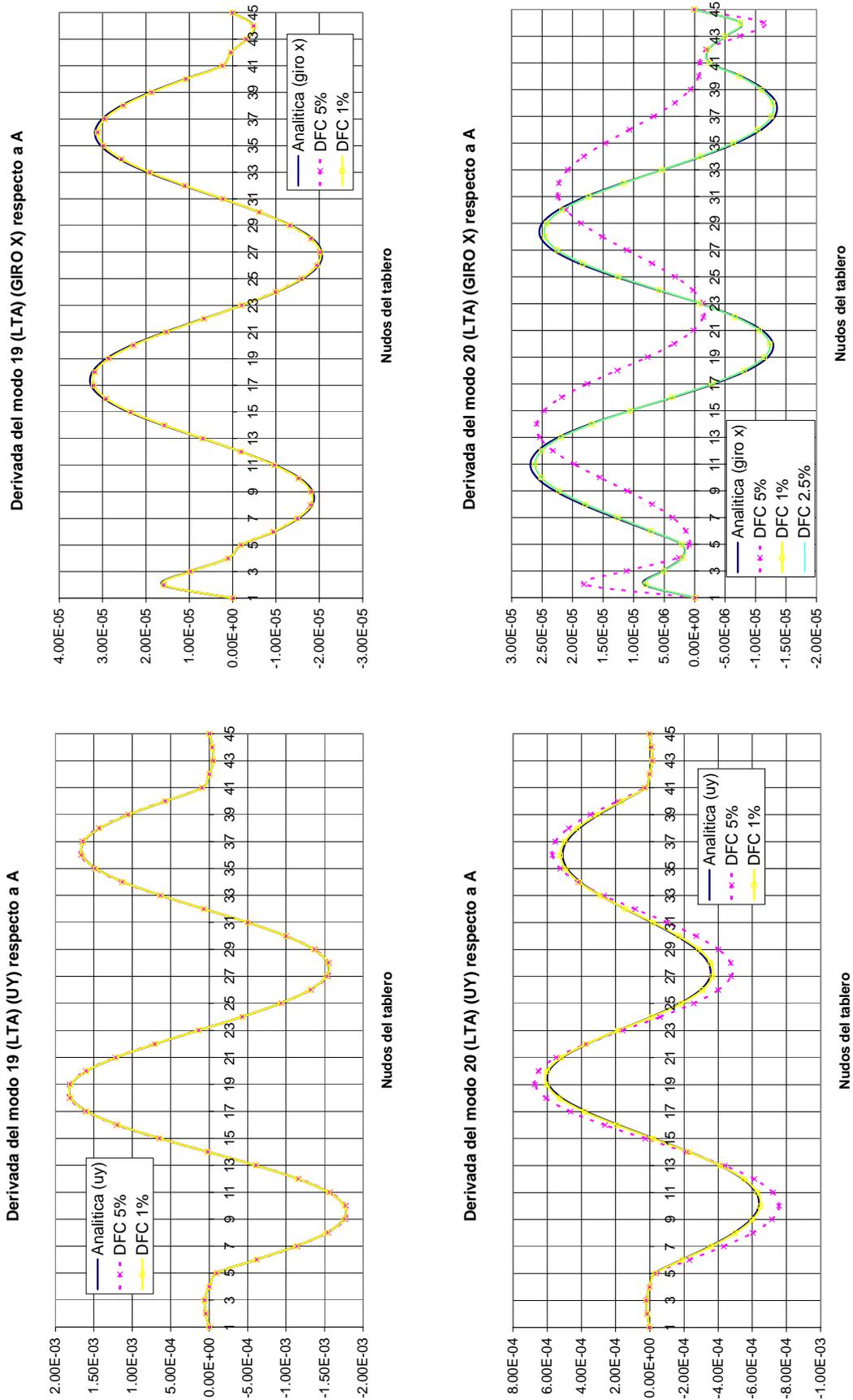


Figura 6.3.9(XI). Sensibilidades de los modos propios de vibración del puente de Messina.

En relación con los resultados mostrados, en aquellos modos propios en los que las componentes de movimiento lateral y de torsión son significativas (LTS o LTA) la sensibilidad respecto a la inercia a flexión lateral I_z es la correspondiente a los movimientos laterales, mientras que la sensibilidad respecto a la inercia a torsión J , es la correspondiente al giro a torsión. En el mismo orden de cosas, al presentar las sensibilidades de estos modos respecto al área de la sección transversal A , se muestran las sensibilidades, tanto de las componentes del movimiento lateral como del giro a torsión, lo que se indica en el título de cada uno de los gráficos.

De los resultados presentados pueden extraerse algunas conclusiones interesantes. Los resultados analíticos mostrados pueden considerarse correctos, ya que las aproximaciones realizadas mediante diferencias finitas centradas son muy semejantes. Los tamaños de paso elegidos, 1% y 5%, ofrecen valores muy parecidos a los analíticos al calcular las sensibilidades respecto a la inercia a flexión lateral, I_z , y la inercia a torsión, J . Sin embargo, al calcular las sensibilidades respecto a la inercia a flexión vertical, I_y , se comprueba como, en ocasiones, tamaños de paso grandes ofrecen aproximaciones más cercanas a los resultados analíticos que tamaños de paso más pequeños. Por último se comprueba como el tamaño de paso del 5% ofrece una aproximación muy mala de las sensibilidades del modo 20 (LTA) respecto al área de la sección transversal del cajón central del tablero, sobre todo al aproximar la derivada correspondiente al giro a torsión.

- *Sensibilidades respecto a las propiedades mecánicas de los tableros laterales.*

Se presentan a continuación las sensibilidades de las frecuencias naturales del puente sobre el estrecho de Messina respecto a las propiedades mecánicas de los tableros laterales, suponiendo que esas propiedades se alteran en los dos cajones laterales simultáneamente, de manera que el tablero en su conjunto mantiene la simetría. Los resultados se comprueban calculando las aproximaciones mediante diferencias finitas centradas del 5% y del 1%, mostrándose en las tablas que figuran a continuación los errores relativos, expresados en tanto por ciento, entre el resultado analítico y la aproximación mediante diferencias finitas. En la primera columna de las tablas se indica también el número y tipo de modo propio de vibración al que están asociadas las frecuencias naturales.

En la tabla 6.3.8 figuran las sensibilidades de las frecuencias naturales respecto a la inercia a flexión vertical, I_y , de los cajones laterales. Se aprecia como los resultados obtenidos mediante diferencias finitas son muy semejantes a los resultados exactos que proporciona la metodología analítica implementada en el programa DIOPTICA. Llama la atención el hecho de que la alteración de la inercia a flexión vertical de los tableros laterales no sólo provoca una sensibilidad alta de las frecuencias asociadas a modos propios verticales, si no que las frecuencias que se corresponden con ciertos modos del tipo LTA o LTS muestran sensibilidades elevadas.

nº y tipo modo	SENSIBIL. ANALITICA	DFC 5%	DFC 1%	error rel. DFC 5%	error rel. DFC 1%
1 LS	-2.269E-05	-2.307E-05	-2.307E-05	1.69	1.69
2 VA	4.852E-04	4.844E-04	4.843E-04	-0.17	-0.18
3 LA	1.826E-04	1.822E-04	1.821E-04	-0.20	-0.29
4 VS	1.756E-03	1.756E-03	1.756E-03	-0.02	-0.03
5 TA	6.312E-03	6.316E-03	6.311E-03	0.06	-0.01
6 LTS	5.507E-03	5.511E-03	5.507E-03	0.07	0.00
9 LTS	1.518E-03	1.519E-03	1.518E-03	0.05	-0.02
10 VS	2.525E-03	2.525E-03	2.525E-03	-0.02	-0.03
11 LTA	5.467E-04	5.466E-04	5.462E-04	-0.02	-0.09
12 LA	4.952E-04	4.946E-04	4.941E-04	-0.14	-0.22
13 VA	1.815E-03	1.814E-03	1.813E-03	-0.09	-0.10
14 LTS	1.103E-02	1.104E-02	1.103E-02	0.06	0.00
15 LA	-1.942E-04	-1.933E-04	-1.932E-04	-0.49	-0.50
18 LA	4.702E-05	4.683E-05	4.660E-05	-0.39	-0.88
19 LTA	1.731E-02	1.732E-02	1.731E-02	0.07	0.00
20 LTA	1.151E-02	1.152E-02	1.151E-02	0.06	0.01

Tabla 6.3.8. Sensibilidades de las frecuencias naturales del puente sobre el estrecho de Messina respecto a la inercia a flexión vertical de los cajones laterales del tablero I_y .

En la tabla 6.3.9 se muestran los resultados de las sensibilidades de las frecuencias naturales respecto a la inercia a flexión lateral, I_z , de los tableros laterales. Los resultados de las aproximaciones a la solución analítica obtenidos con los dos tamaños de paso considerados han sido buenos, aunque las diferencias finitas del 1% ofrecen una mayor exactitud, en este caso concreto. Las sensibilidades son bajas, siendo de mayor magnitud las sensibilidades asociadas a los modos laterales, como cabía esperar. También se aprecia como las sensibilidades de las frecuencias naturales correspondientes a modos propios de tipo vertical son varios órdenes de magnitud

inferiores a las sensibilidades de las frecuencias asociadas a otros tipos de modos propios, lo que indica la no dependencia de los movimientos verticales respecto a la inercia a flexión lateral.

nº y tipo modo	SENSIBIL. ANALITICA	DFC 5%	DFC 1%	error rel. DFC 5%	error rel. DFC 1%
1 LS	2.174E-04	2.176E-04	2.174E-04	0.10	0.00
2 VA	6.778E-08	6.770E-08	6.780E-08	-0.12	0.03
3 LA	1.143E-03	1.145E-03	1.143E-03	0.11	0.00
4 VS	1.341E-08	1.323E-08	1.341E-08	-1.29	-0.01
5 TA	-4.690E-05	-4.682E-05	-4.690E-05	-0.17	-0.01
6 LTS	1.960E-04	1.969E-04	1.960E-04	0.45	0.02
9 LTS	3.095E-03	3.097E-03	3.095E-03	0.09	0.00
10 VS	2.302E-08	2.279E-08	2.302E-08	-1.01	-0.03
11 LTA	1.035E-03	1.037E-03	1.035E-03	0.13	0.01
12 LA	3.761E-05	3.764E-05	3.761E-05	0.10	0.00
13 VA	4.495E-08	4.457E-08	4.494E-08	-0.84	-0.03
14 LTS	-1.217E-04	-1.217E-04	-1.217E-04	-0.01	0.00
15 LA	7.007E-05	7.022E-05	7.008E-05	0.21	0.01
18 LA	3.459E-03	3.464E-03	3.459E-03	0.15	0.01
19 LTA	-9.058E-05	-9.042E-05	-9.058E-05	-0.18	-0.01
20 LTA	-2.216E-05	-2.213E-05	-2.216E-05	-0.13	-0.01

Tabla 6.3.9. Sensibilidades de las frecuencias naturales del puente sobre el estrecho de Messina respecto a la inercia a flexión lateral de los cajones laterales del tablero I_x .

De manera semejante, en la tabla 6.3.10 se muestran las sensibilidades de las frecuencias naturales con respecto a la inercia a torsión, J , de los cajones laterales del puente de Messina. Se aprecia como las diferencias finitas ofrecen una buena aproximación al valor exacto, obtenido analíticamente, en todos los casos. Además, las sensibilidades que tienen mayor magnitud son las que corresponden a frecuencias propias asociadas a modos naturales en los que la componente de torsión es importante. Al igual que sucedía en el caso anterior, las sensibilidades de las frecuencias naturales asociadas a modos verticales son varios órdenes de magnitud inferiores a las de las frecuencias asociadas a los otros tipos de modos.

n° y tipo modo	SENSIBIL. ANALITICA	DFC 5%	DFC 1%	error rel. DFC 5%	error rel. DFC 1%
1 LS	6.182E-07	6.183E-07	6.177E-07	0.02	-0.07
2 VA	2.050E-07	2.052E-07	2.051E-07	0.05	0.02
3 LA	2.904E-04	2.904E-04	2.904E-04	0.00	0.00
4 VS	4.618E-07	4.619E-07	4.619E-07	0.02	0.01
5 TA	1.242E-02	1.242E-02	1.242E-02	0.00	0.00
6 LTS	8.499E-03	8.499E-03	8.499E-03	0.00	0.00
9 LTS	2.269E-03	2.269E-03	2.269E-03	0.00	0.00
10 VS	4.032E-07	4.032E-07	4.031E-07	-0.01	-0.02
11 LTA	1.302E-03	1.302E-03	1.302E-03	0.00	0.00
12 LA	1.043E-03	1.043E-03	1.043E-03	0.01	0.00
13 VA	5.527E-07	5.528E-07	5.527E-07	0.01	0.00
14 LTS	1.722E-02	1.722E-02	1.722E-02	0.00	0.00
15 LA	4.011E-06	4.018E-06	4.011E-06	0.18	0.01
18 LA	1.103E-04	1.109E-04	1.103E-04	0.53	0.02
19 LTA	2.463E-02	2.460E-02	2.463E-02	-0.09	0.00
20 LTA	1.348E-02	1.349E-02	1.348E-02	0.13	0.01

Tabla 6.3.10. Sensibilidades de las frecuencias naturales del puente sobre el estrecho de Messina respecto a la inercia a torsión de los cajones laterales del tablero J .

En la tabla 6.3.11 se presentan las sensibilidades de las frecuencias naturales del puente de Messina respecto al área de la sección transversal, A , de los cajones laterales del tablero. Las aproximaciones realizadas mediante diferencias finitas centradas del 1% y del 5% son, en general, buenas. El error relativo en la sensibilidad de la frecuencia natural asociada al modo 14 (LTS) que es superior al 10% puede ser considerado admisible, ya que la sensibilidad analítica es uno o dos ordenes de magnitud inferior a las restantes sensibilidades, lo que supone que el error absoluto sea muy pequeño. Los valores de las sensibilidades de las frecuencias naturales son en general altos, y superiores a las sensibilidades respecto a las restantes propiedades mecánicas de los cajones laterales del tablero. Esta última circunstancia, que ya había sido puesta de manifiesto en el ejemplo correspondiente al puente del Great Belt, debe hacer reflexionar un vez más sobre la trascendencia que tiene el considerar la masa del tablero de un puente como variable a la hora de determinar los análisis de sensibilidad.

nº y tipo modo	SENSIBIL. ANALITICA	DFC 5%	DFC 1%	error rel. DFC 5%	error rel. DFC 1%
1 LS	7.000E-03	6.944E-03	6.934E-03	-0.81	-0.94
2 VA	-6.329E-03	-6.481E-03	-6.481E-03	2.40	2.40
3 LA	3.109E-02	3.105E-02	3.100E-02	-0.11	-0.29
4 VS	-2.521E-02	-2.531E-02	-2.531E-02	0.40	0.40
5 TA	1.590E-02	1.578E-02	1.578E-02	-0.73	-0.77
6 LTS	-2.448E-02	-2.447E-02	-2.453E-02	-0.04	0.21
9 LTS	5.520E-02	5.527E-02	5.516E-02	0.14	-0.08
10 VS	-2.289E-02	-2.302E-02	-2.302E-02	0.53	0.54
11 LTA	7.327E-02	7.324E-02	7.319E-02	-0.05	-0.12
12 LA	6.744E-02	6.725E-02	6.725E-02	-0.29	-0.29
13 VA	-7.459E-03	-7.772E-03	-7.772E-03	4.20	4.20
14 LTS	8.799E-04	7.819E-04	7.718E-04	-11.13	-12.28
15 LA	8.936E-02	8.946E-02	8.946E-02	0.12	0.12
18 LA	6.827E-02	6.831E-02	6.821E-02	0.06	-0.09
19 LTA	1.164E-02	1.172E-02	1.149E-02	0.68	-1.33
20 LTA	5.497E-02	3.576E-02	5.500E-02	-34.94	0.06

Tabla 6.3.11. Sensibilidades de las frecuencias naturales del puente sobre el estrecho de Messina respecto al área de los cajones laterales del tablero *A*.

En las próximas páginas se presentan, gráficamente, los resultados obtenidos para las sensibilidades de los modos propios de vibración del puente sobre el estrecho de Messina respecto a las propiedades mecánicas de los cajones laterales del tablero del puente. Los resultados han sido calculados mediante el módulo correspondiente del programa DIOPTICA, y en las gráficas se muestran también las aproximaciones realizadas empleando diferencias finitas centradas del 1% y del 5%.

Al igual que en el ejemplo del puente del Great Belt, presentado con anterioridad, sólo se muestran las sensibilidades de los modos en los que la variable de diseño tiene influencia. De la misma manera, únicamente se muestran las componentes del modo con derivada significativa, es decir, si un modo propio es vertical se presentan las sensibilidades correspondientes a la componente vertical del movimiento de ese modo, ya que las sensibilidades de las restantes componentes son nulas o varios órdenes de magnitud inferiores.

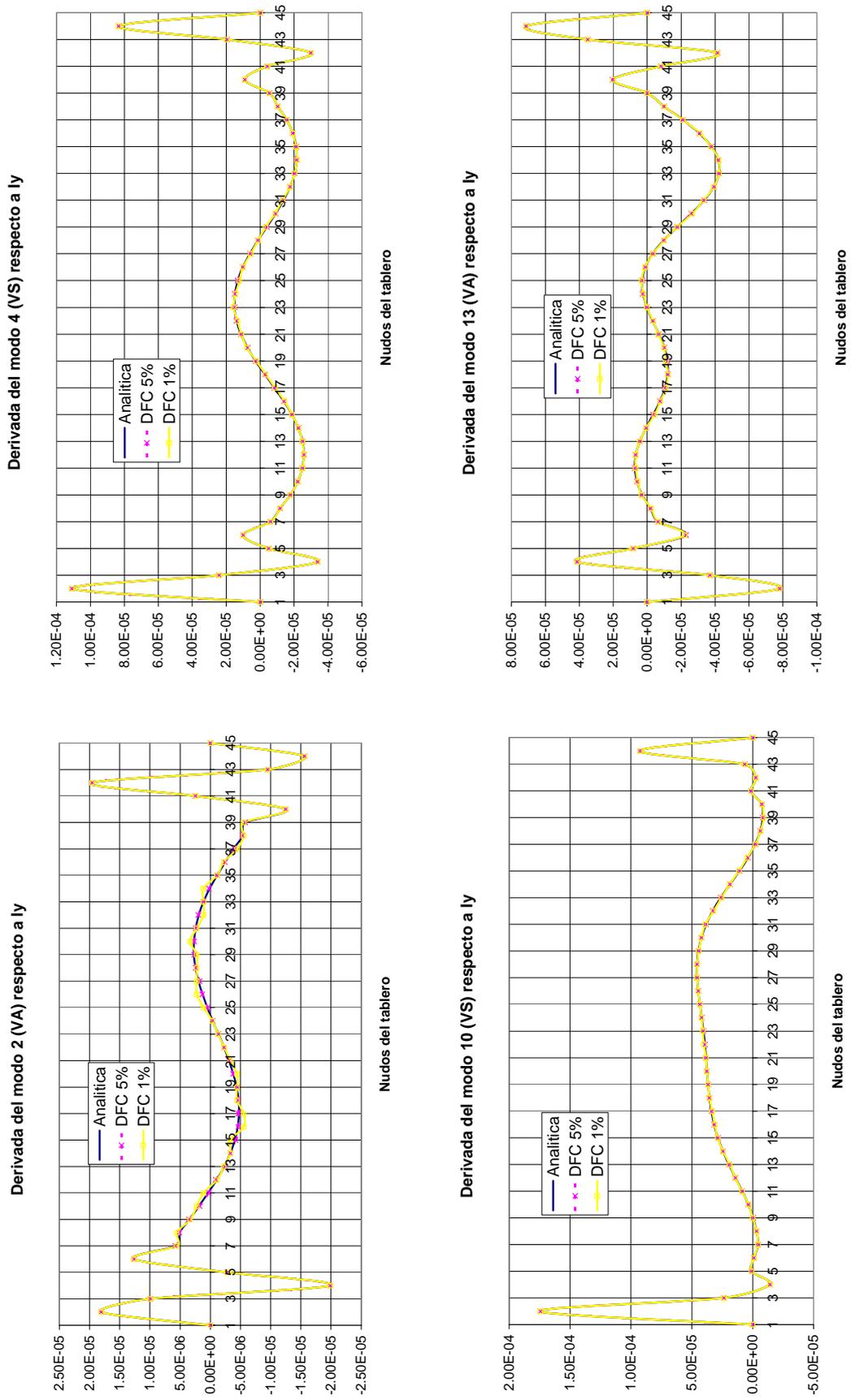


Figura 6.3.10(I). Sensibilidades de los modos propios de vibración del puente de Messina.

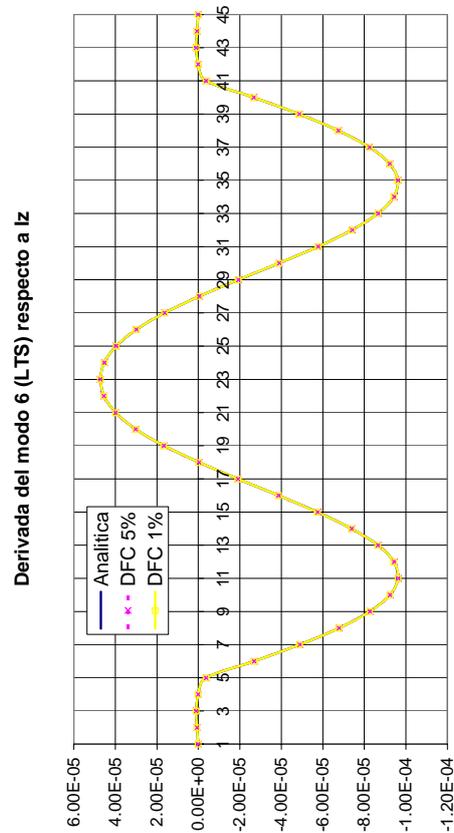
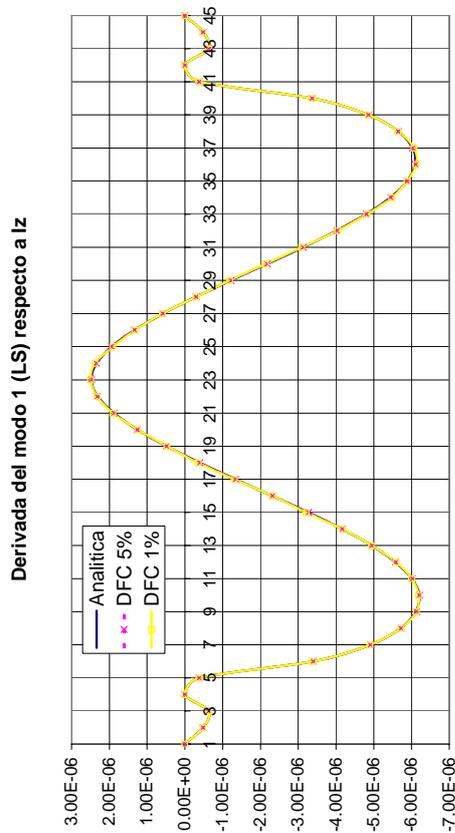
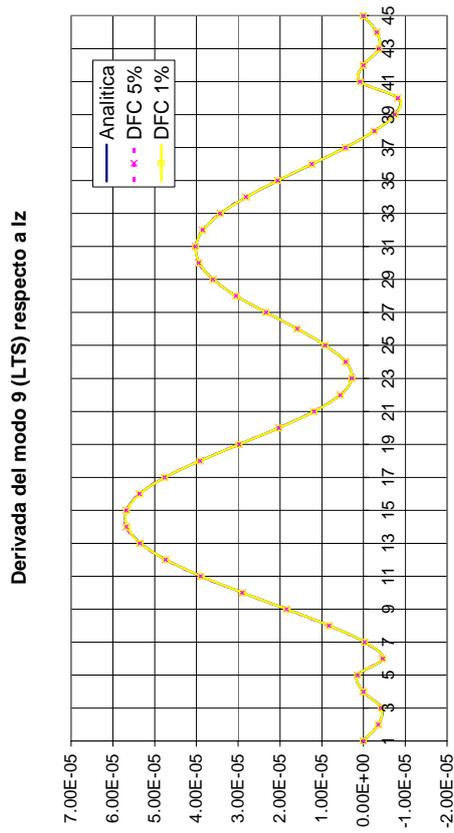
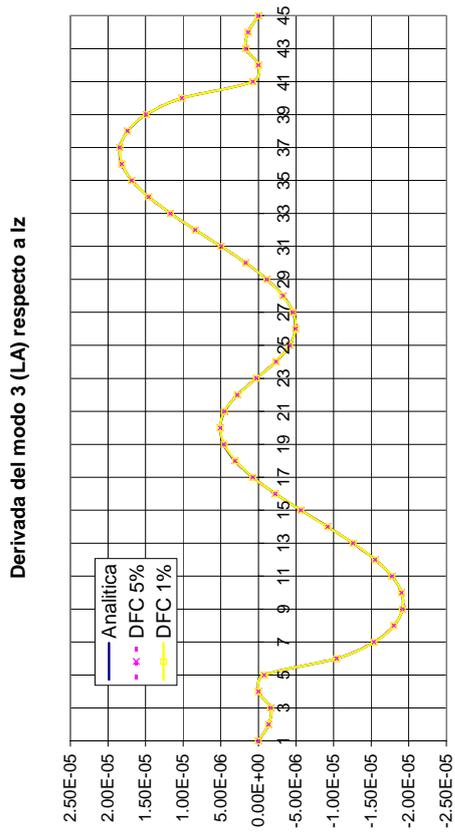


Figura 6.3.10(II). Sensibilidades de los modos propios de vibración del puente de Messina.

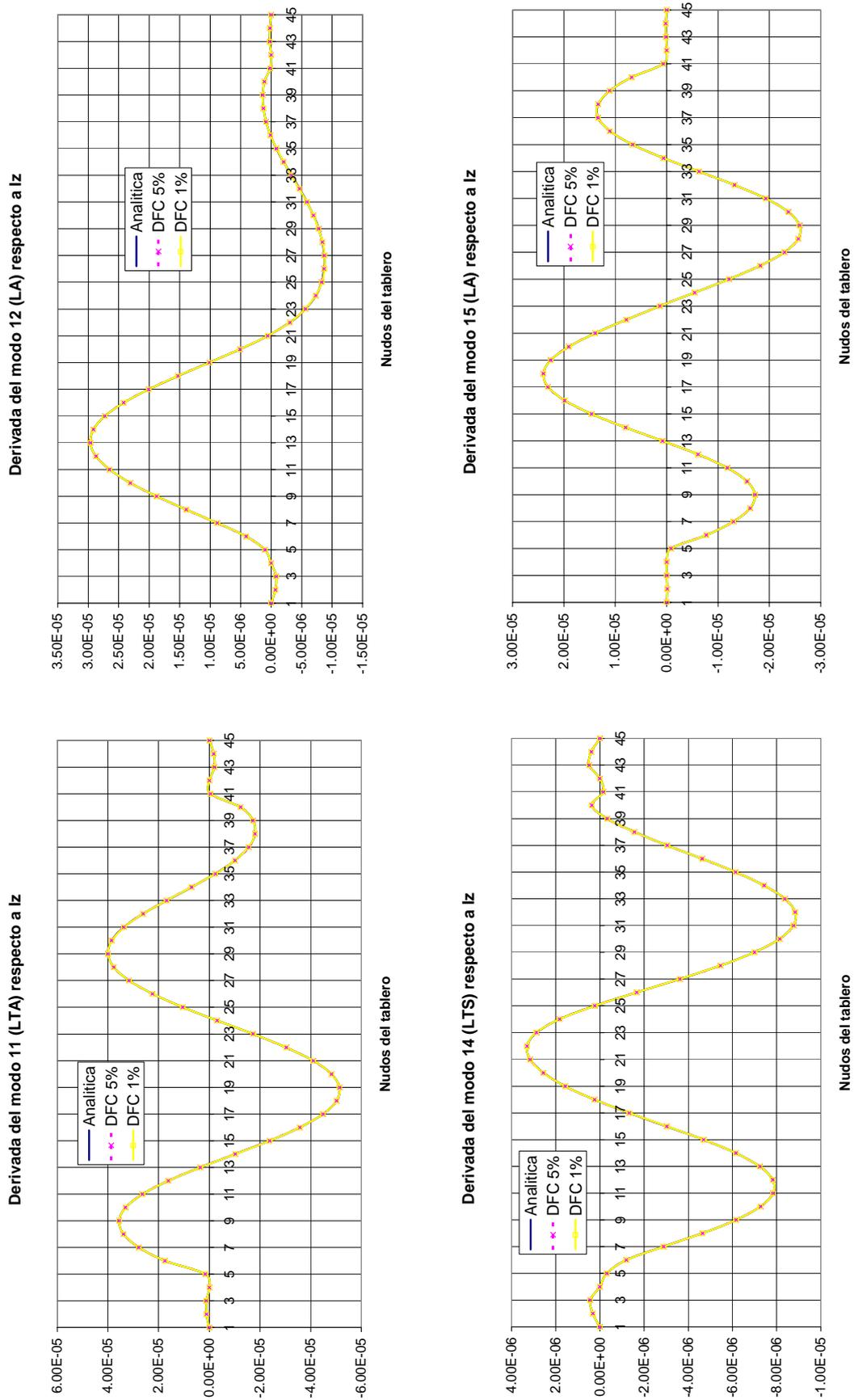


Figura 6.3.10(III). Sensibilidades de los modos propios de vibración del puente de Messina.

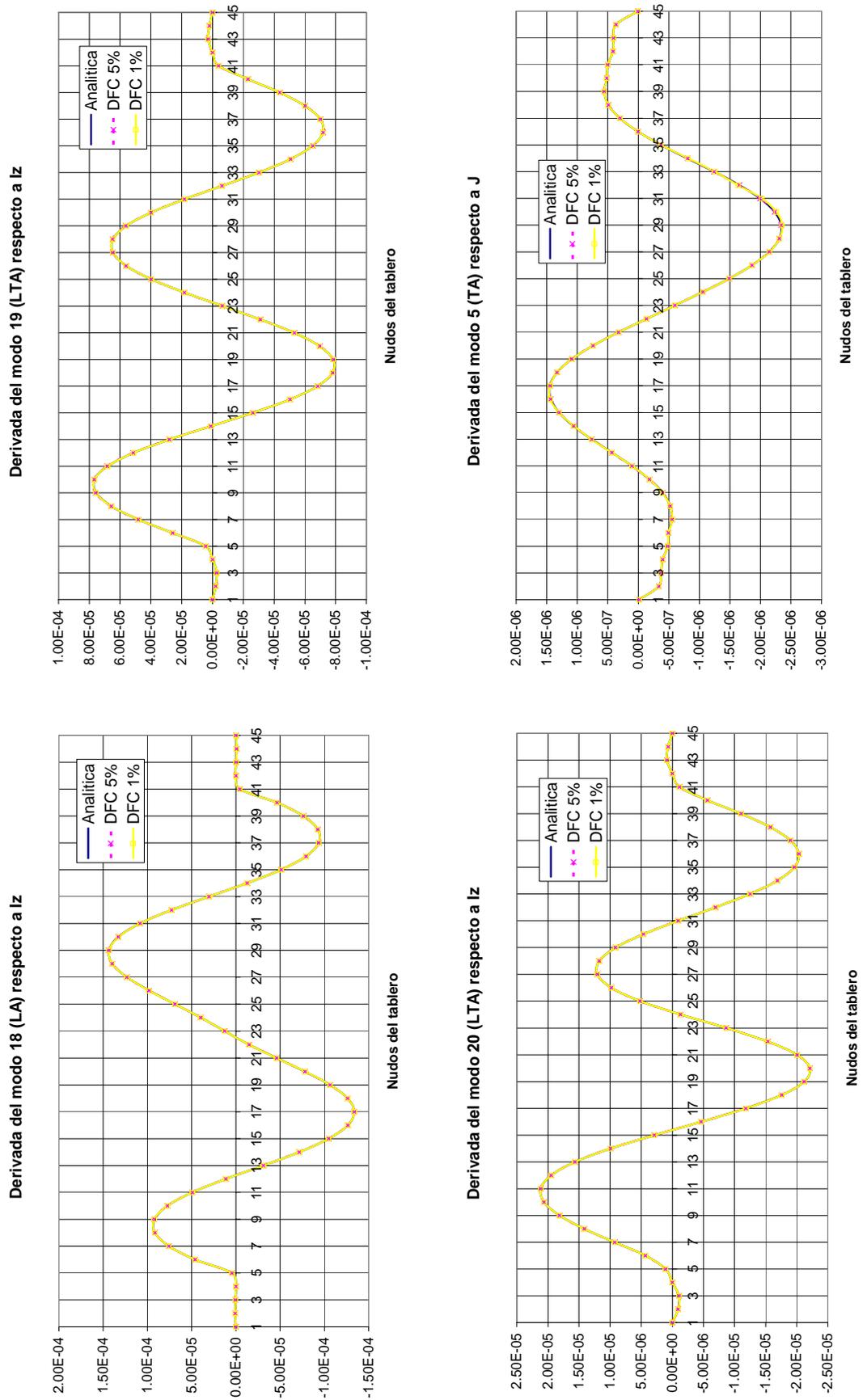


Figura 6.3.10(IV). Sensibilidades de los modos propios de vibración del puente de Messina.

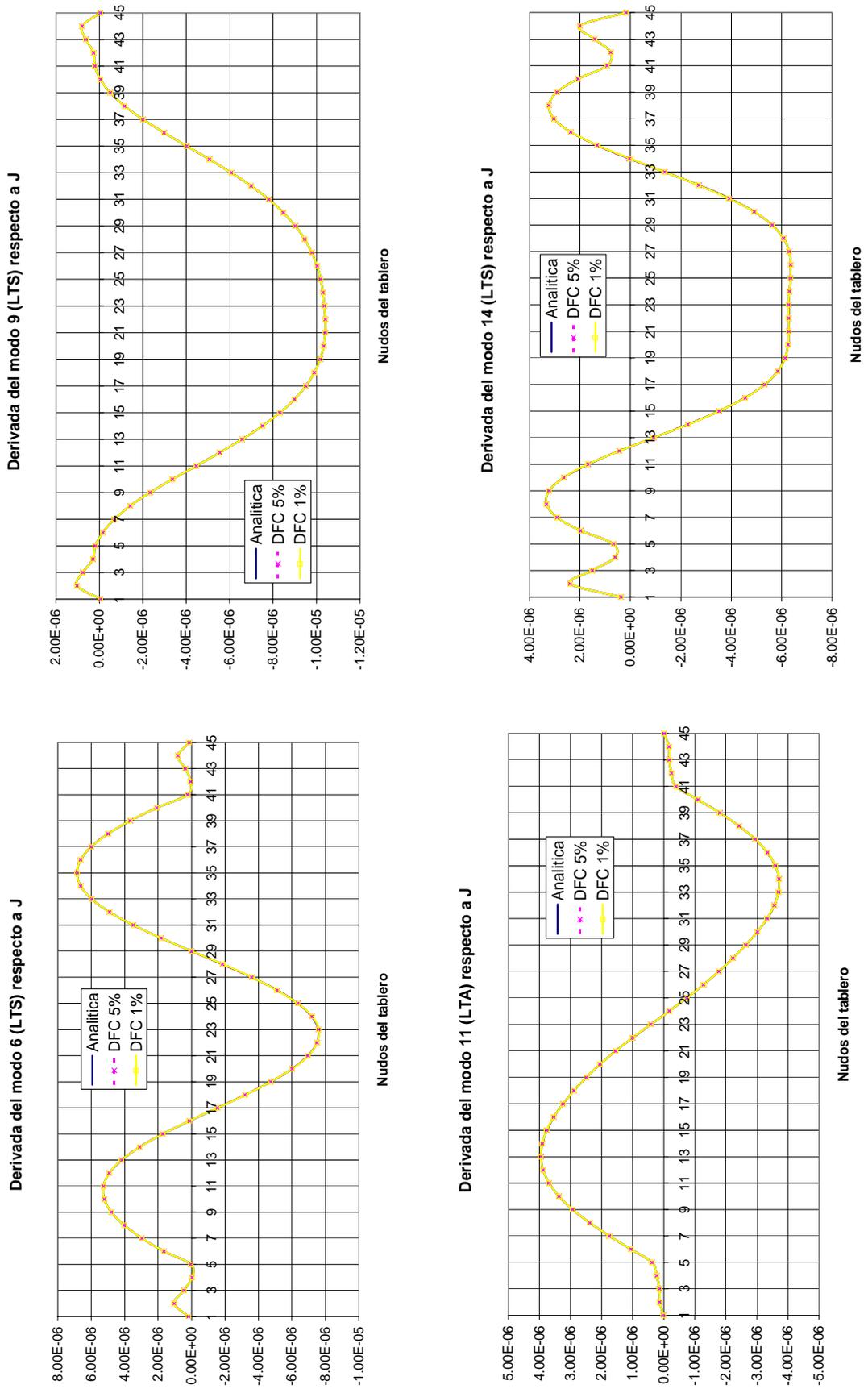


Figura 6.3.10(V). Sensibilidades de los modos propios de vibración del puente de Messina.

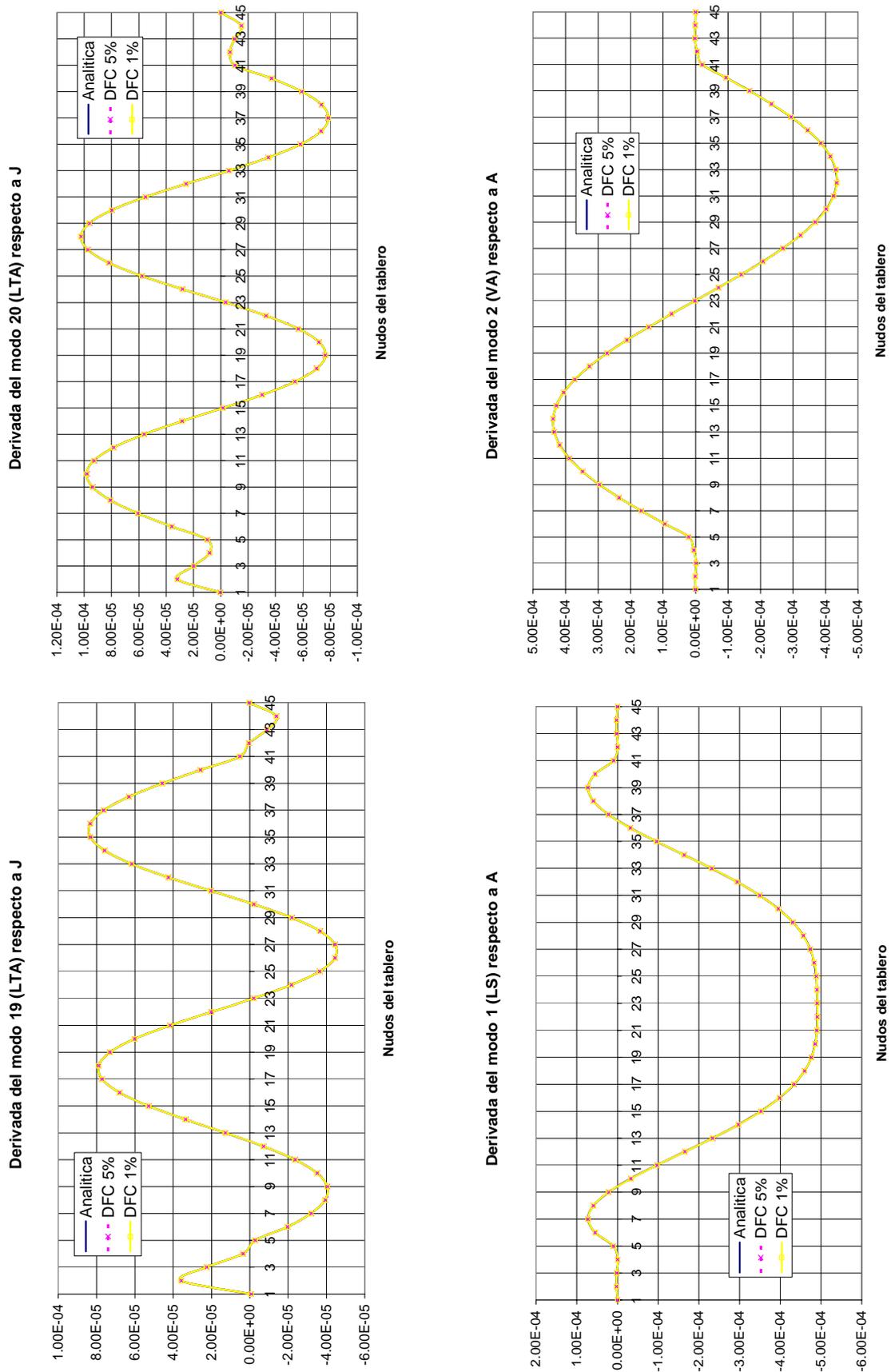


Figura 6.3.10(VI). Sensibilidades de los modos propios de vibración del puente de Messina.

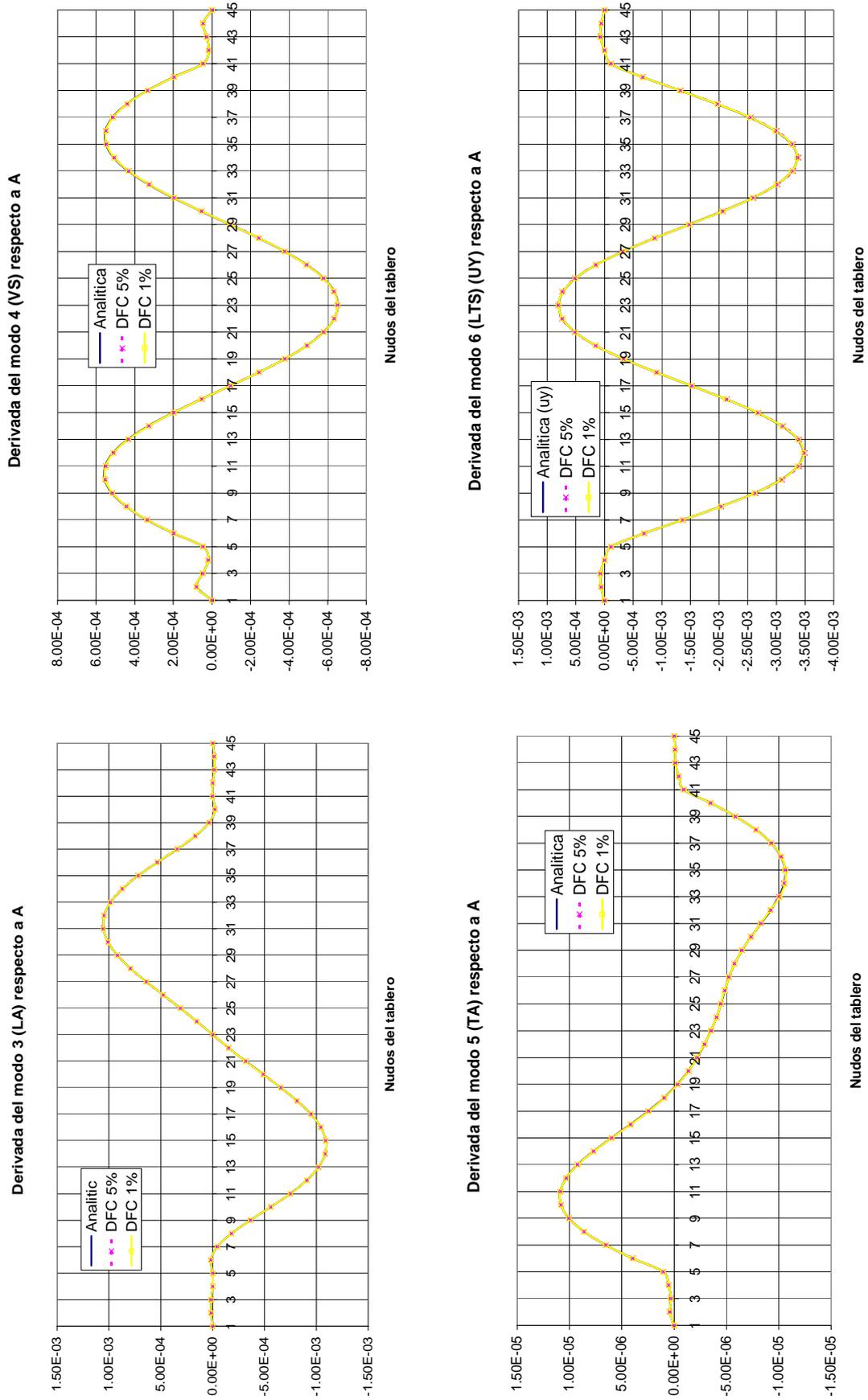


Figura 6.3.10(VII). Sensibilidades de los modos propios de vibración del puente de Messina

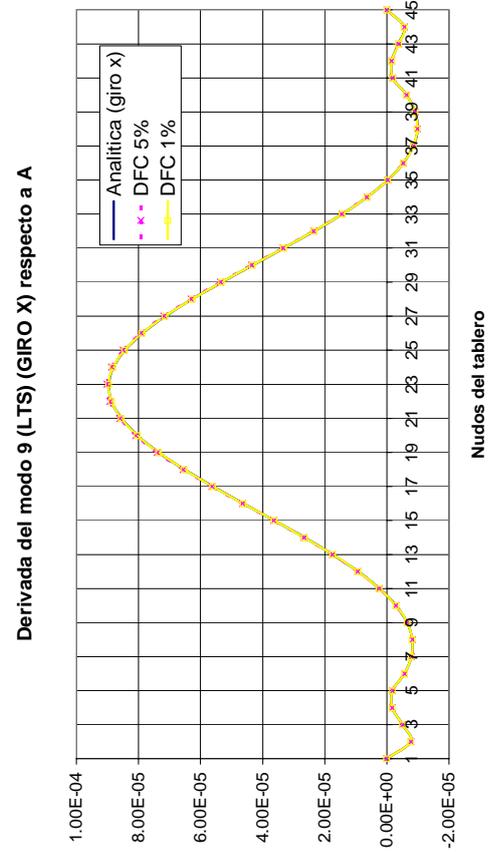
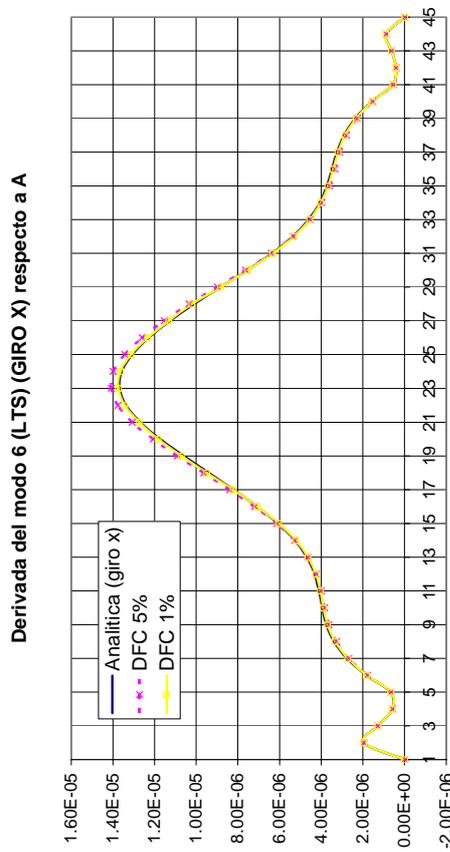
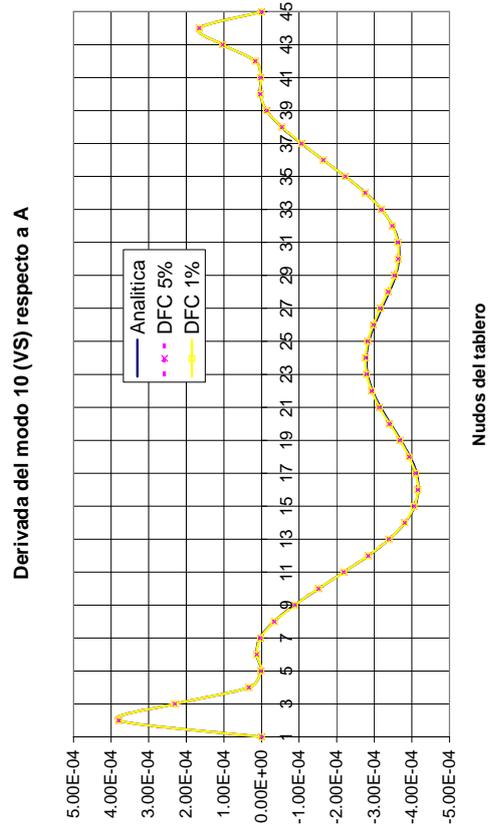
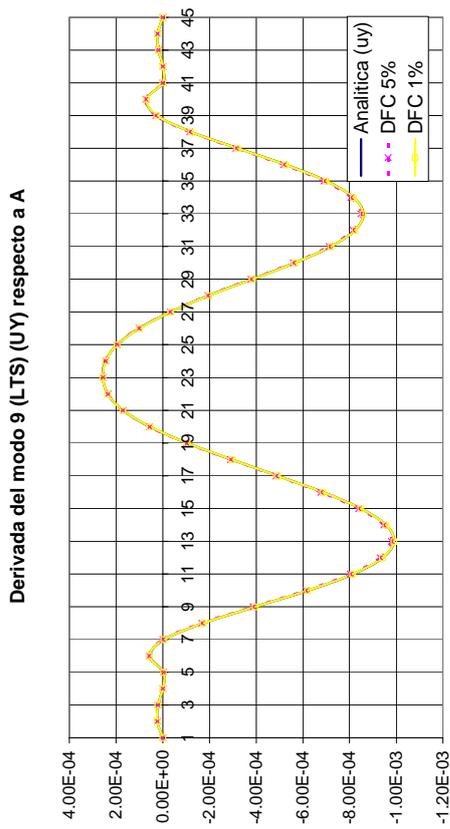


Figura 6.3.10(VIII). Sensibilidades de los modos propios de vibración del puente de Messina.

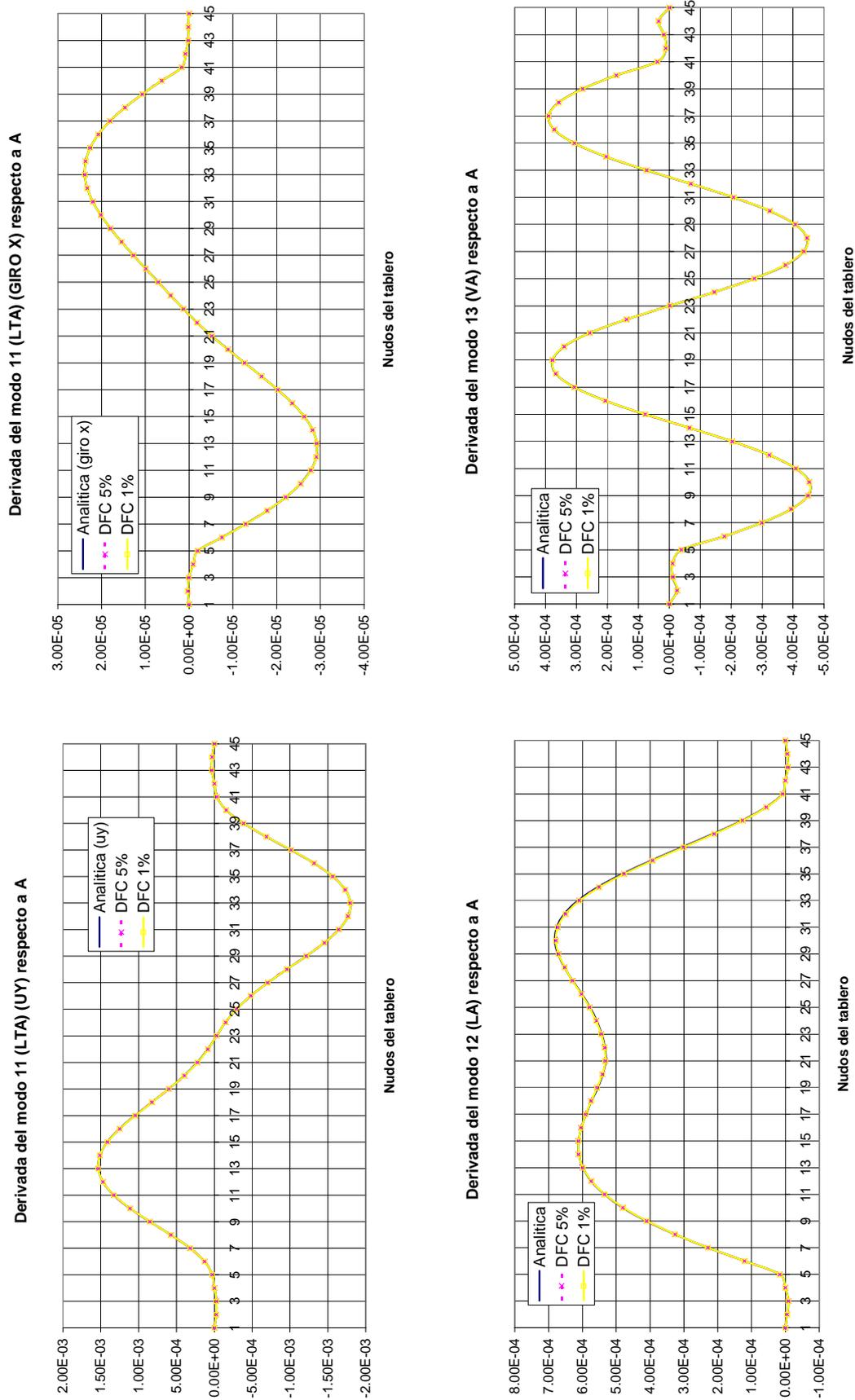


Figura 6.3.10(IX). Sensibilidades de los modos propios de vibración del puente de Messina.

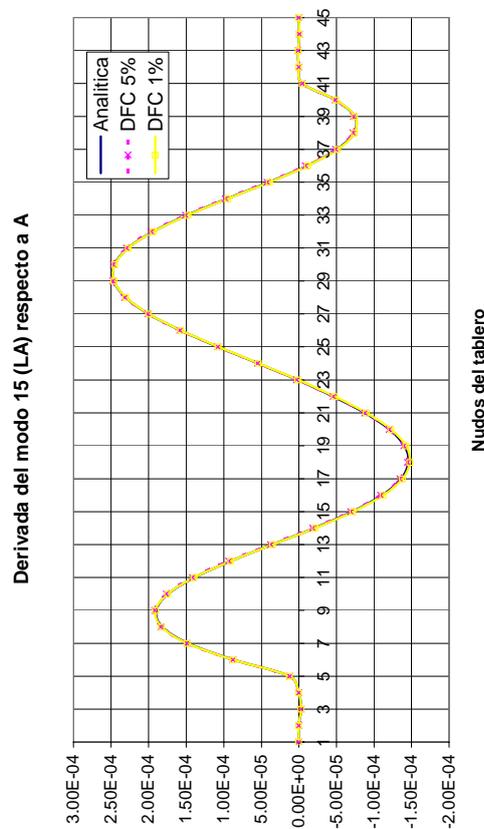
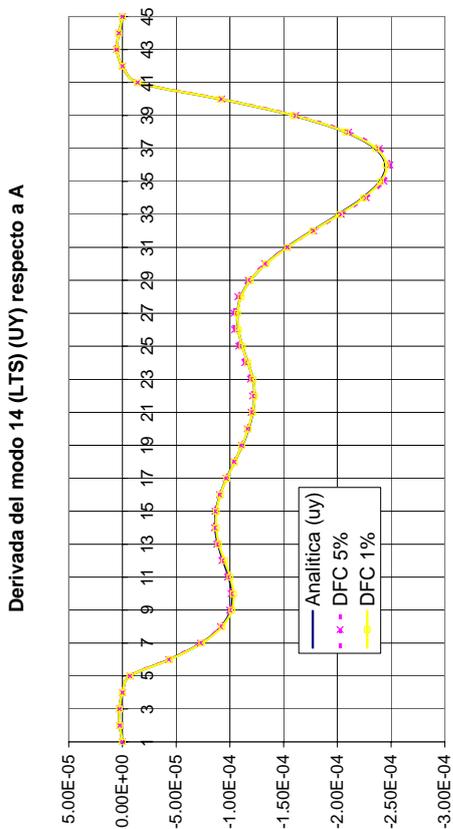
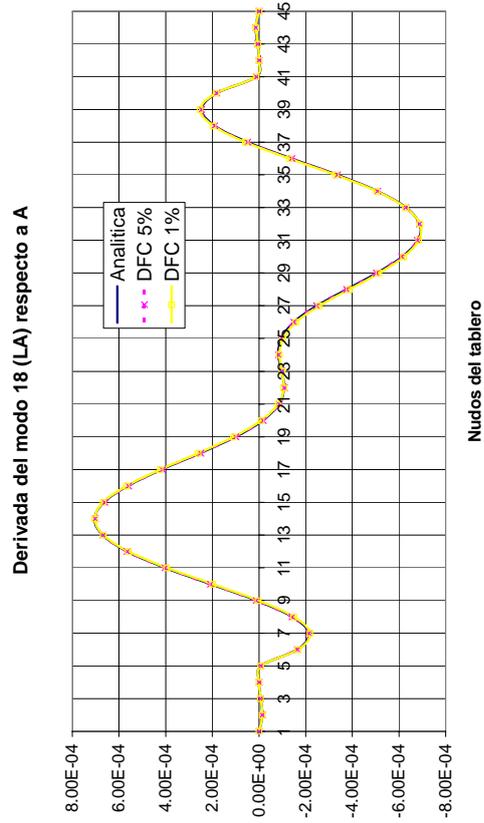
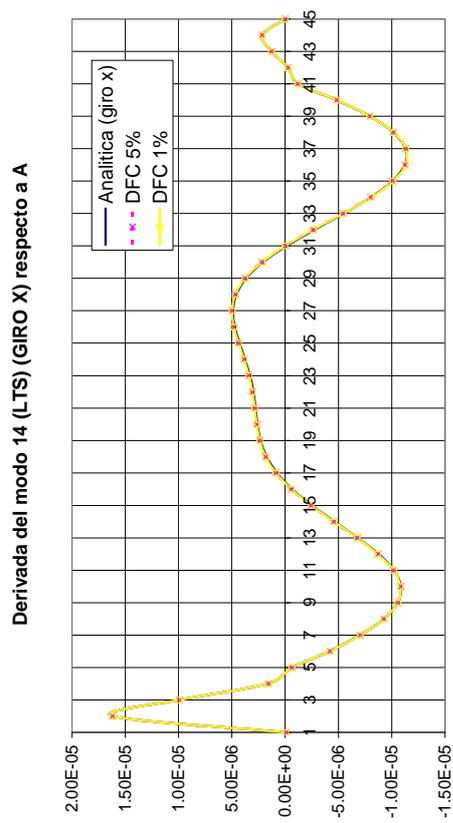


Figura 6.3.10(X). Sensibilidades de los modos propios de vibración del puente de Messina.

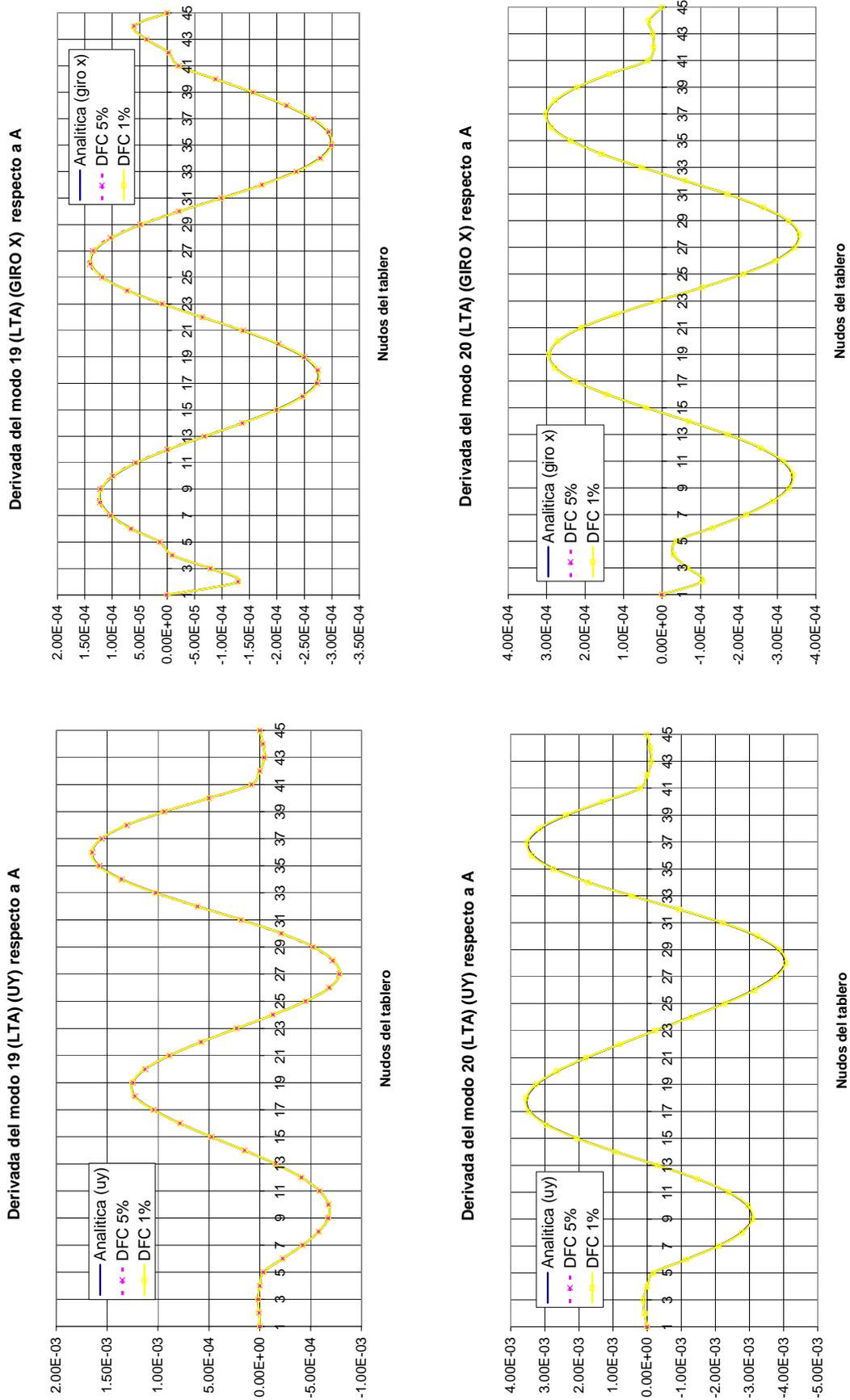


Figura 6.3.10(XI). Sensibilidades de los modos propios de vibración del puente de Messina.

El repaso de los resultados mostrados en las figuras 6.3.10(I) a 6.3.10(XI) permite establecer algunas conclusiones. Los resultados analíticos obtenidos con el programa DIOPTICA quedan validados con las buenas aproximaciones de las sensibilidades obtenidas empleando diferencias finitas centradas. En general, los dos tamaños de paso considerados, del 1% y del 5%, aproximan muy bien los resultados exactos obtenidos analíticamente. Sin embargo, se han dado algunos casos en los que las aproximaciones con tamaño de paso del 1% han ofrecido mejores resultados que tamaños mayores, como puede comprobarse en el cálculo de las sensibilidades respecto al área de los cajones laterales de los modos propios 6 (LTS) y 14 (LTS). Por otro lado, también hay casos en los que la situación es justo la opuesta, es decir, tamaños de paso mayores permiten obtener mejores aproximaciones, como ha sucedido al calcular la sensibilidad respecto a I_y del modo propio 2 (VA). Estas circunstancias ponen de manifiesto la incertidumbre asociada a la evaluación de derivadas empleando diferencias finitas, frente a la precisión que se obtiene empleando metodologías de tipo analítico.

Un ejercicio interesante consiste en comparar las sensibilidades de las frecuencias naturales y los modos propios de vibración respecto a una cierta propiedad mecánica del cajón central frente a la misma propiedad, pero de los cajones laterales del tablero.

Las sensibilidades de las frecuencias naturales y los modos propios verticales respecto a la inercia a flexión vertical, I_y , de los cajones laterales son prácticamente el doble que respecto al cajón central. Las sensibilidades de los modos propios tienen la misma apariencia en ambos casos.

Si se observan las sensibilidades de los modos propios respecto a las inercias laterales se aprecia como para el mismo modo la forma es la misma en ciertos casos, por ejemplo en los modos 6 (LTS) o 12 (LA), y en otros solo existen pequeñas diferencias en los dos extremos del tablero, como en los modos 1 (LS) ó 3 (LA). Las sensibilidades de las frecuencias naturales y de los modos propios asociadas a modos laterales respecto a la inercia a flexión lateral, I_z , de los cajones laterales, es aproximadamente la cuarta parte de esas mismas sensibilidades respecto a la inercia a flexión lateral del cajón central.

Las sensibilidades de las frecuencias y los modos naturales respecto a la inercia a torsión de los cajones laterales también es prácticamente el doble que respecto a la

inercia a torsión del cajón central. La apariencia de la sensibilidad asociada a cada modo es la misma en los dos casos.

En lo referente a las sensibilidades respecto al área de los cajones laterales se observa que las sensibilidades de las frecuencias naturales asociadas a los modos verticales son prácticamente el doble que esas mismas sensibilidades respecto al área del cajón central. De igual manera, las sensibilidades de los modos de vibración verticales respecto al área de los cajones laterales tienen la misma forma y su valor es aproximadamente el doble que esas mismas sensibilidades calculadas respecto al área del cajón central. Sin embargo, esta característica no puede ser aplicada con carácter general a modos que no sean verticales, incluso se pueden apreciar cambios de signo en las sensibilidades de una misma frecuencia como sucede, por ejemplo, con los modos 1 (LS) o 3 (LA).

6.3.3 Análisis aeroelástico

El análisis aeroelástico del puente sobre el estrecho de Messina, es decir, el cálculo de su velocidad de flameo y su frecuencia reducida, ha sido llevada a cabo mediante el módulo correspondiente del programa DIOPTICA. En este programa está implementada la formulación que permite obtener la respuesta aeroelástica del puente, distribuyendo el esfuerzo de cálculo entre los equipos de un cluster de ordenadores. Para resolver este problema las frecuencias naturales y los modos propios de vibración del puente deben ser conocidos, y su cálculo, así como los resultados obtenidos para este puente, ya han sido comentados en el apartado 6.3.1 de este capítulo. Además, los coeficientes de flameo del puente también deben ser facilitados al programa. En las figuras 6.3.11(I) y (II) se muestran los ocho coeficientes empleados en este ejemplo, que han sido obtenidos en el túnel de viento de que dispone el grupo de Mecánica de Estructuras de la ETS de Enxeñeiros de Camiños, Canais e Portos da Universidade da Coruña. Véase Nieto^[N2], Jurado y Hernández. Debe tenerse en cuenta que se ha trabajado con ocho de los dieciocho coeficientes aeroelásticos (A_i^* , H_i^* $i=1,\dots,4$), por lo tanto, para este puente no se ha dispuesto de los coeficientes de flameo P_i^* ($i=1,\dots,6$), que tienen influencia en la fuerza aeroelástica de empuje lateral D que relaciona movimientos y velocidades del tablero, según se ha mostrado en (2.5.7).

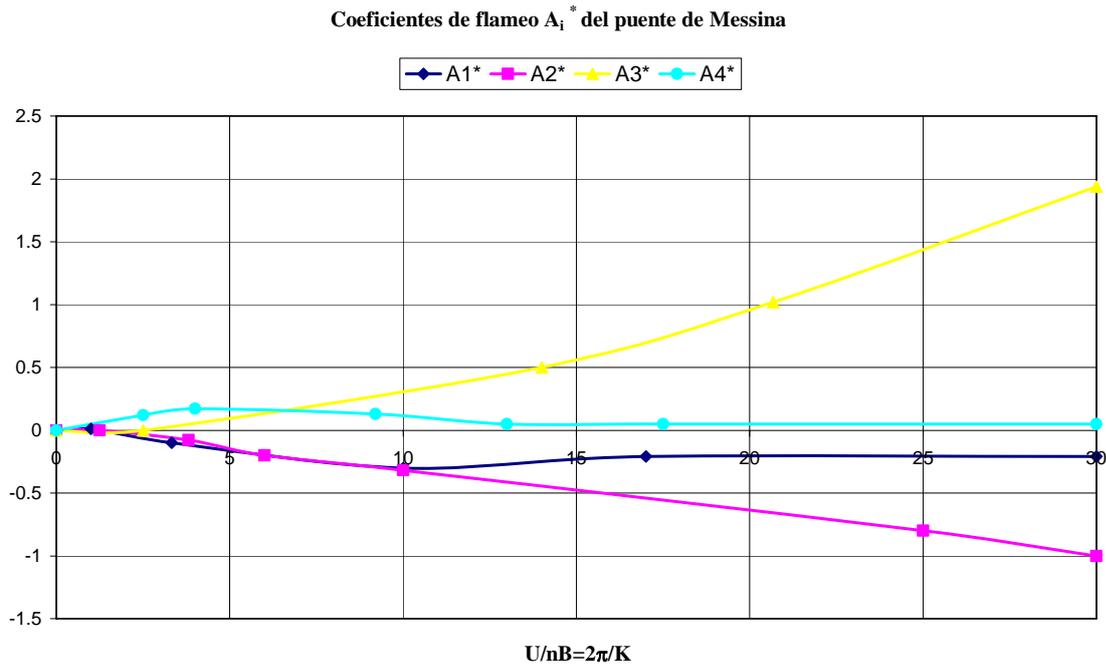


Figura 6.3.11(I). Coeficientes de flameo A_i^* del puente sobre el estrecho de Messina.

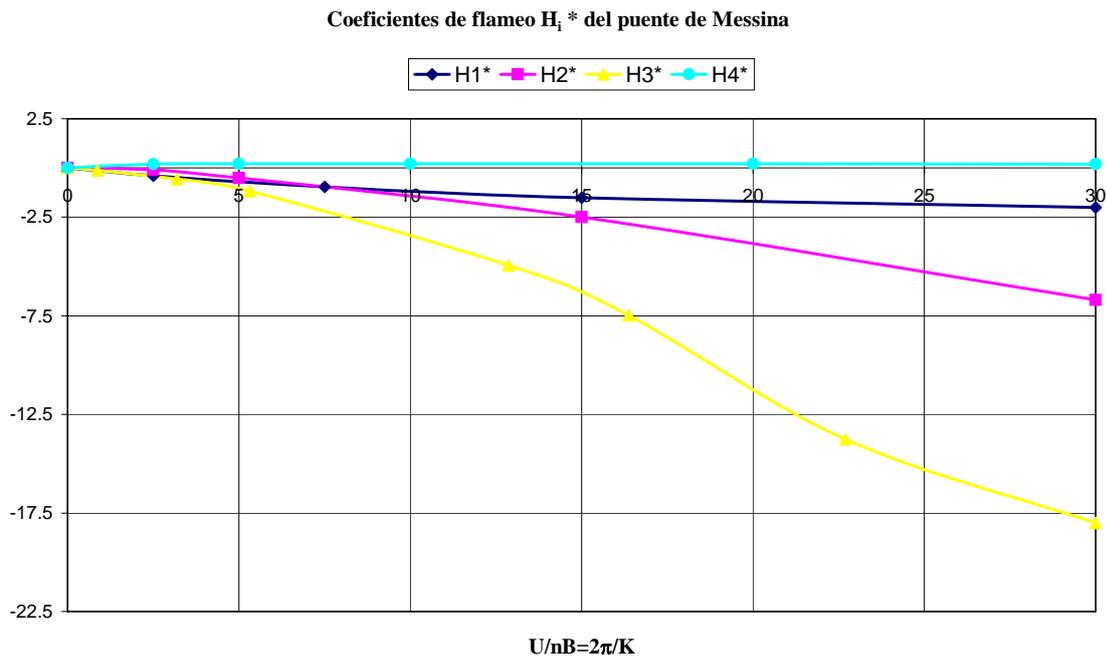


Figura 6.3.11(II). Coeficientes de flameo H_i^* del puente sobre el estrecho de Messina.

Para este ejemplo se ha adoptado un amortiguamiento estructural de tipo viscoso, igual para todos los modos, de valor $\xi = 0.00318$ el cual corresponde con un nivel de decremento logarítmico del 2%.

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \approx 2\pi\xi = 0.02 \tag{6.3.9}$$

Como ya se ha indicado en el ejemplo precedente, la técnica empleada para obtener la respuesta aeroelástica ha sido la del flameo multimodal. En el caso del puente sobre el estrecho de Messina, se ha trabajado con los 16 modos propios más significativos, tomados entre veinte primeros modos propios de vibración del puente, los cuales han sido presentados en la tabla 6.3.2. Para obtener la respuesta aeroelástica del puente se ha empleado el programa DIOPTICA, y un cluster de ordenadores entre los que se distribuye el esfuerzo de cálculo, con el fin de que los tiempos de computación se mantengan dentro de intervalos acotados.

En la figura 6.3.12 se presenta un gráfico con la evolución de la parte real α_j de los autovalores aeroelásticos en función de la velocidad de viento de cálculo, hasta que se alcanza la velocidad de flameo cuando la parte real de uno de los autovalores se hace nula.

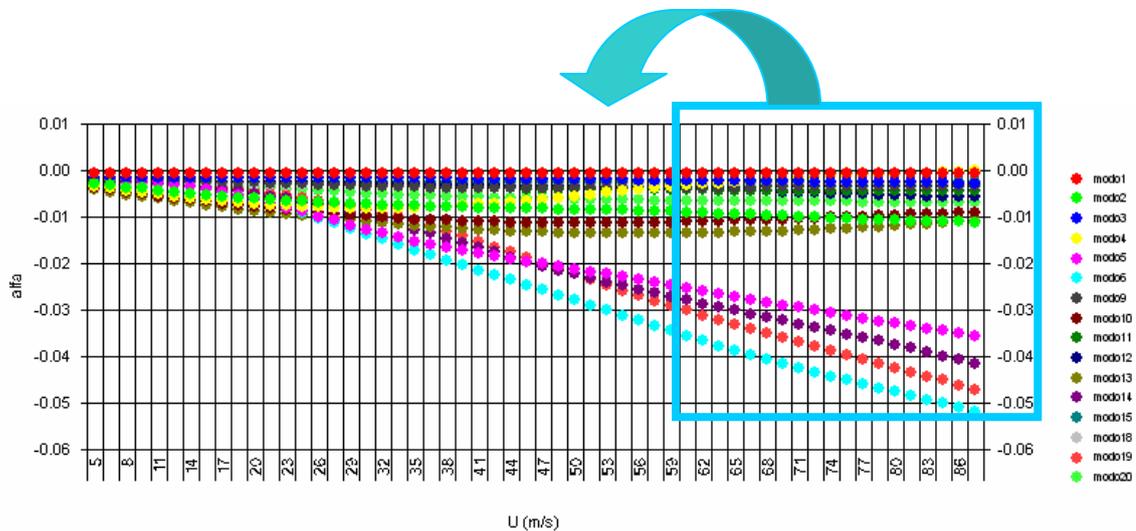


Figura 6.3.12. Evolución de la parte real α_j frente a U para el puente sobre el estrecho de Messina.

En la figura siguiente se muestra el detalle de la gráfica anterior al alcanzar el flameo.

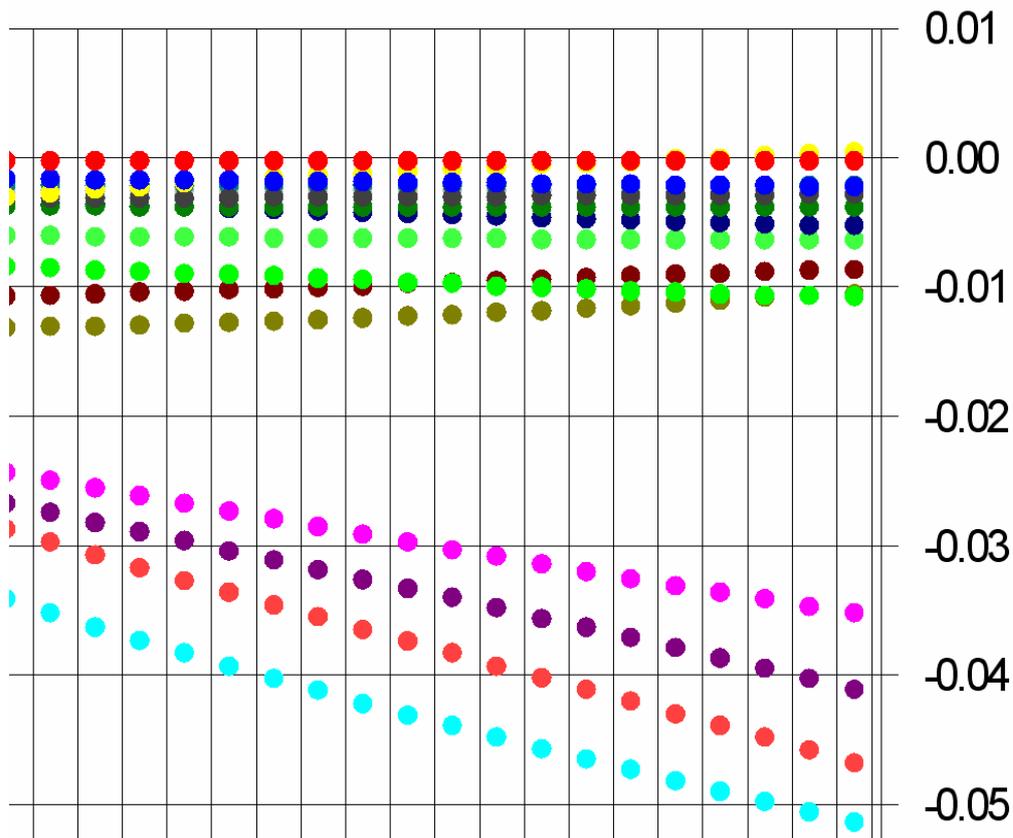


Figura 6.3.13. Detalle de la evolución de la parte real α_j frente a U para el puente sobre el estrecho de Messina al alcanzar la situación de flameo.

A continuación, en la figura 6.3.14 se presenta la evolución de la parte imaginaria β_j de los autovalores aeroelásticos en función de la velocidad de viento de cálculo, la cual se corresponde con la frecuencia de vibración de la respuesta. En la figura se aprecia como las variaciones en la parte imaginaria de los autovalores con la velocidad de viento no son excesivamente grandes.

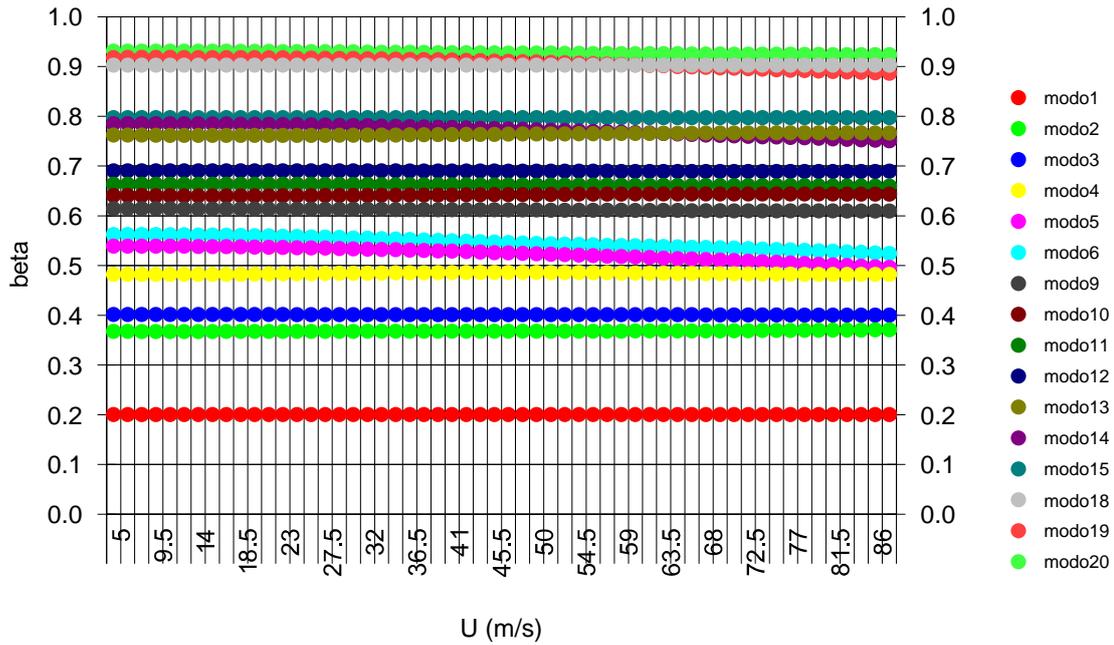


Figura 6.3.14. Evolución de la parte imaginaria β_j frente a U para el puente sobre el estrecho de Messina.

En la figura 6.3.15 se muestra la evolución de los amortiguamientos en función de la velocidad de cálculo. El amortiguamiento se evalúa como el cociente entre la parte real y la parte imaginaria de cada autovalor, es decir, $-\alpha_j / \beta_j$.

La expresión exacta que permite evaluar el amortiguamiento es:

$$\xi_{aj} = \frac{-\alpha_j}{\sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2}} \tag{6.3.10}$$

Teniendo en cuenta que el valor de la parte real de los autovalores α_j es muy pequeño, especialmente en aquellos modos próximos a alcanzar la situación de inestabilidad debida a flameo, la fórmula anterior puede aproximarse por la expresión siguiente, que es la empleada para confeccionar el gráfico de la figura 6.3.15:

$$\xi_{aj} \approx \frac{-\alpha_j}{\beta_j} \tag{6.3.11}$$

Se aprecia cómo en general los amortiguamientos crecen hasta velocidades de viento de unos 40 m/s. Desde ese valor, comienzan a disminuir hasta producirse la inestabilidad. La velocidad de flameo obtenida para este puente ha sido $U_f = 86.768$ m/s, mientras que el valor de la frecuencia reducida ha sido igual a $K_f = 0.339951$.

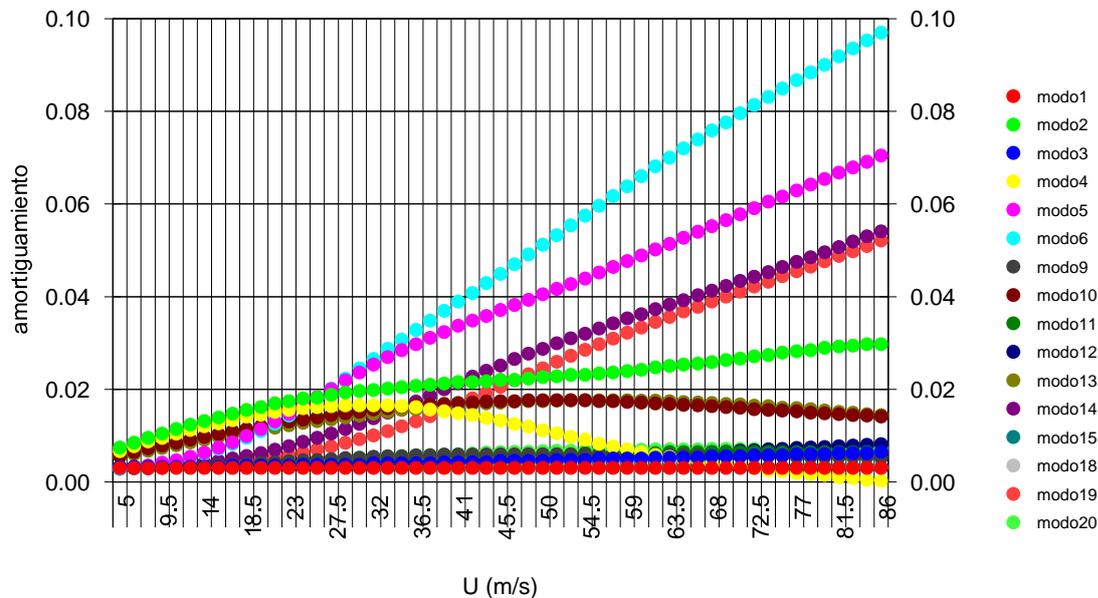


Figura 6.3.15. Evolución del amortiguamiento asociado a cada modo aerelástico para el puente sobre el estrecho de Messina.

En la figura 6.3.16 se muestra la salida de resultados numérica facilitada por el programa DIOPTICA. En la mencionada figura se muestran los resultados del análisis aerelástico, junto con los resultados de los análisis de sensibilidad respecto a las propiedades mecánicas de los cajones laterales. Una salida gráfica similar se obtiene al calcular las sensibilidades de la respuesta aerelástica respecto a las propiedades mecánicas del cajón central, las cuales se comentarán en el próximo apartado. Por otro lado, en la tabla 6.3.12 se comparan los resultados obtenidos en el presente trabajo con los ofrecidos por otros equipos de investigación como Miyata^[M3], Yamada y Katsuchi, Hernández^[H1] et al. o D'asdia^[D1] y Sepe.

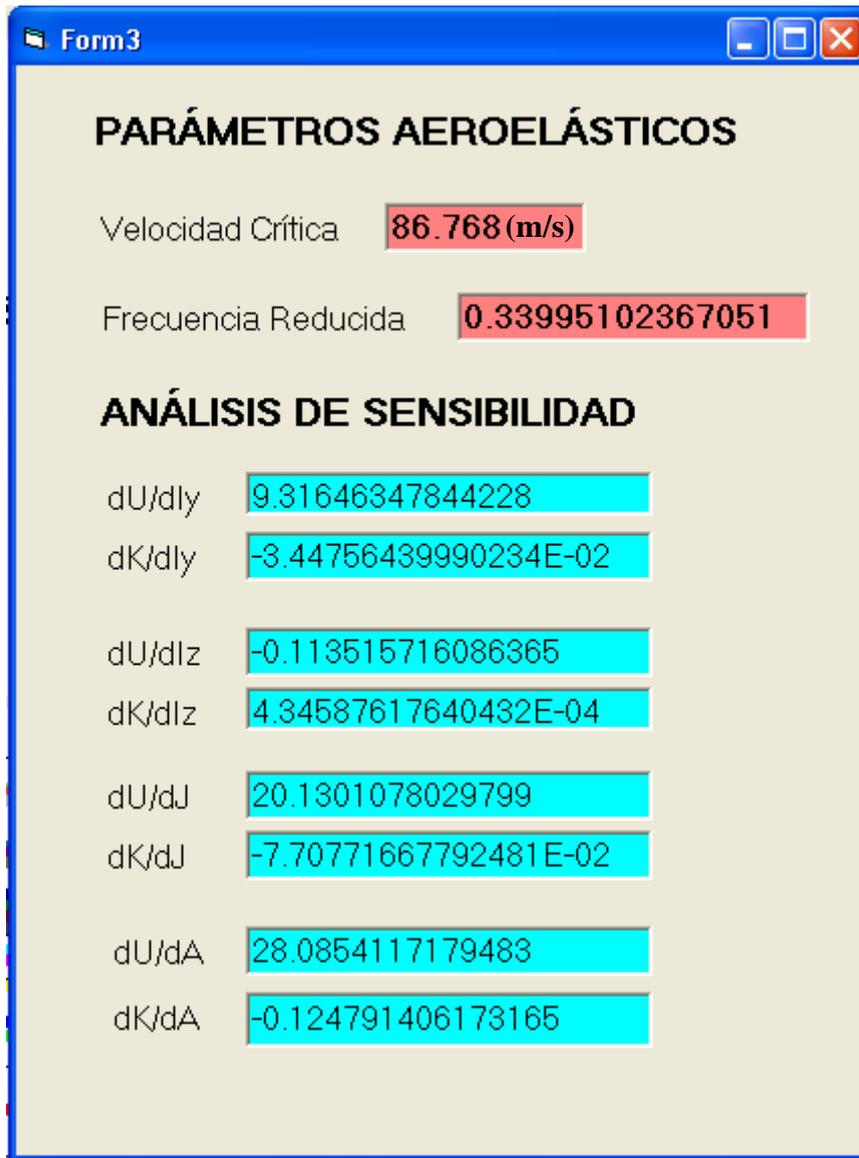


Figura 6.3.16. Resultados numéricos ofrecidos por DIOPTICA para el puente de Messina.

AUTOR	U_f (m/s)
Nieto	86.768
D'asdia & Sepe	94
Politécnico Milán	>80
Universidad de Yokohama	62-82

Tabla 6.3.12. Velocidad de flameo para el puente de Messina según diversos autores.

6.3.4 Análisis de sensibilidad de la respuesta aeroelástica respecto a las propiedades mecánicas de los cajones

En este apartado se van a presentar los resultados, calculados analíticamente, de las sensibilidades de la velocidad de flameo y la frecuencia reducida del puente de Messina respecto a las propiedades mecánicas de los cajones que constituyen el tablero del puente. Se han empleado los 16 modos que se presentaron en la tabla 6.3.2, los cuales son los más importantes entre los 20 primeros modos propios del puente. Estos resultados han sido obtenidos utilizando el programa DIOPTICA, que ha permitido distribuir el cálculo de las sensibilidades de la respuesta aeroelástica, respecto a cada propiedad mecánica, entre los equipos del cluster de computadoras empleado. La presentación de los resultados se hace agrupándolos de la siguiente manera: en primer lugar se facilitan las sensibilidades respecto a las propiedades mecánicas del tablero central, y en segundo lugar las sensibilidades respecto a las propiedades mecánicas de los tableros laterales. Se muestran, por tanto, las sensibilidades respecto a ocho variables de diseño, todas ellas independientes entre sí. Las ventajas de aplicar programación distribuida se hacen patentes teniendo en cuenta que si el cluster de ordenadores empleado dispone de ocho equipos, los ocho análisis de sensibilidad pueden hacerse simultáneamente y, en consecuencia, se emplea prácticamente el mismo tiempo que en realizar un único análisis de sensibilidad utilizando programación secuencial.

Tal y como se detalló en el capítulo 4, las sensibilidades analíticas de la respuesta aeroelástica calculadas son las siguientes:

$$\frac{\partial U_f}{\partial I_y}, \frac{\partial K_f}{\partial I_y}, \frac{\partial U_f}{\partial I_z}, \frac{\partial K_f}{\partial I_z}, \frac{\partial U_f}{\partial J}, \frac{\partial K_f}{\partial J}, \frac{\partial U_f}{\partial A}, \frac{\partial K_f}{\partial A} \quad (6.3.12)$$

siendo I_y la inercia a flexión vertical, I_z la inercia a flexión lateral, J la inercia a torsión y A el área de la sección transversal.

El contraste de los resultados analíticos obtenidos para las derivadas indicadas en la ecuación 6.3.12 sólo puede realizarse aproximando esas derivadas mediante diferencias

finitas, de tal modo que la derivada de una función cualquiera u respecto a una cierta variable x puede evaluarse como

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (6.3.13)$$

Por lo tanto, cada comprobación por medio de las diferencias finitas requiere, además de la evaluación ya efectuada de $u(x)$, dos cálculos adicionales de la respuesta con la variable modificada en $\pm\Delta x$. Si se tiene en cuenta que en este caso las respuestas a evaluar son los parámetros de flameo U_f y K_f , fácilmente se entiende lo tedioso del proceso, puesto que cada comprobación por diferencias finitas requiere dos cálculos dinámicos y dos cálculos aeroelásticos adicionales.

Para la comprobación de las derivadas analíticas, y debido a la inherente inexactitud de los cálculos por diferencias finitas, se han tomado dos longitudes de paso para dichos cálculos: $\Delta x=0.01x$ y $\Delta x=0.05x$. En las tablas 6.3.13(I) y 6.3.13(II) se presentan los resultados analíticos obtenidos utilizando DIOPTICA, las aproximaciones realizadas mediante diferencias finitas centradas y el error relativo expresado en tanto por ciento de las aproximaciones a las sensibilidades de la respuesta aeroelástica respecto a las propiedades mecánicas del tablero central. En el mismo orden de cosas, en las tablas 6.3.14(I) y 6.3.14(II) se presentan los mismos resultados, pero en ese caso referidos a las sensibilidades respecto a las propiedades mecánicas de los tableros laterales.

- *Sensibilidades de la respuesta aeroelástica respecto a las propiedades mecánicas del cajón central.*

	$\partial U_f / \partial I_y$	$\partial K_f / \partial I_y$	$\partial U_f / \partial I_z$	$\partial K_f / \partial I_z$
SENSIB. ANALITICA	-1.85050	0.00767	0.09768	-0.00037
DFC 1%	-1.99336	0.00822	0.07075	-0.00027
DFC 5%	-1.84385	0.00764	0.09906	-0.00038
error rel. DFC 1%	-7.72	-7.27	27.56	28.26
error rel. DFC 5%	0.36	0.34	-1.41	-1.43

Tabla 6.3.13(I). Sensibilidades de la velocidad de flameo y la frecuencia reducida del puente sobre el estrecho de Messina respecto a las inercias a flexión vertical y lateral del cajón central.

	$\partial U_f / \partial J$	$\partial K_f / \partial J$	$\partial U_f / \partial A$	$\partial K_f / \partial A$
SENSIB. ANALITICA	10.23068	-0.03917	66.21616	-0.26204
DFC 1%	10.26423	-0.03930	66.15385	-0.26184
DFC 5%	10.24390	-0.03923	66.15385	-0.26218
error rel. DFC 1%	-0.33	-0.33	0.09	0.08
error rel. DFC 5%	-0.13	-0.14	0.09	-0.05

Tabla 6.3.13(II). Sensibilidades de la velocidad de flameo y la frecuencia reducida del puente sobre el estrecho de Messina respecto a la inercia a torsión y el área del cajón central.

Si se analizan cuidadosamente las tablas presentadas pueden extraerse una serie de conclusiones, que permiten una mejor comprensión acerca de la influencia de las propiedades mecánicas del cajón central en el comportamiento aeroelástico del puente sobre el estrecho de Messina:

En primer lugar, llama poderosamente la atención el alto valor de la sensibilidad de la velocidad de flameo respecto al área de la sección transversal del cajón central A . Como el signo de la sensibilidad es positivo, esto significa que aumentar dicha propiedad provocará un incremento significativo de la velocidad de flameo del puente. Es muy interesante el hecho de que esta sensibilidad es un orden de magnitud mayor que el resultado obtenido para el puente del Great Belt, presentado en el apartado anterior, lo que pone una vez más de manifiesto la importancia de considerar la masa como una variable más a tener en cuenta en el proceso de diseño de una estructura de estas características.

La sensibilidad de la velocidad de flameo del puente respecto a la inercia a torsión J del cajón central es también alta y su signo es positivo. Esto significa que, al igual que en el caso anterior, el aumento de la inercia torsión del cajón significará un fuerte incremento en la velocidad de flameo. Un resultado similar a éste había sido obtenido para el puente sobre el Great Belt, lo que confirma la fuerte influencia que la inercia a torsión tiene sobre el comportamiento aeroelástico de los puentes de gran vano.

La sensibilidad de la velocidad de flameo respecto a la inercia a flexión lateral del cajón central I_z , es muy baja, lo que quiere decir que tiene poca influencia en el comportamiento aeroelástico del puente. Un resultado parecido se obtuvo también para el puente sobre el estrecho del Great Belt.

La sensibilidad de la velocidad de flameo respecto a la inercia a flexión vertical I_y , presenta la particularidad de tener signo negativo, circunstancia que también se daba en el caso del puente sobre el estrecho del Great Belt. Por tanto, un incremento en la inercia a flexión vertical producirá un descenso en la velocidad de flameo del puente, lo que explicita lo erróneo de ciertos apriorismos, establecidos de modo intuitivo, según los cuales una estructura más rígida debería presentar un mejor comportamiento frente a las inestabilidades provocadas por la acción del viento.

En lo que se refiere a las sensibilidades de la frecuencia reducida, se observa como los valores de esas sensibilidades respecto a las inercias a flexión son bajos, mientras que las sensibilidades respecto a la inercia a torsión y al área de la sección transversal son mayores.

Las diferencias finitas centradas, con carácter general, aproximan correctamente los valores de las sensibilidades de la velocidad de flameo y la frecuencia reducida. Sin embargo, las aproximaciones realizadas con un tamaño de paso del 5% ofrecen resultados mucho más precisos que los obtenidos empleando un tamaño de paso menor, como ha sido el caso de la diferencias finitas centradas del 1%.

- *Sensibilidades de la respuesta aeroelástica respecto a las propiedades mecánicas de los cajones laterales.*

	$\partial U_f / \partial I_y$	$\partial K_f / \partial I_y$	$\partial U_f / \partial I_z$	$\partial K_f / \partial I_z$
SENSIB. ANALITICA	9.31646	-0.03448	-0.11352	0.00043
DFC 1%	9.31264	-0.03446	-0.11602	0.00044
DFC 5%	9.31264	-0.03447	-0.11245	0.00043
error rel. DFC 1%	0.04	0.04	-2.20	-2.21
error rel. DFC 5%	0.04	0.02	0.95	0.95

Tabla 6.3.14(I). Sensibilidades de la velocidad de flameo y la frecuencia reducida del puente sobre el estrecho de Messina respecto a las inercias a flexión vertical y lateral de los cajones laterales.

	$\partial U_f / \partial J$	$\partial K_f / \partial J$	$\partial U_f / \partial A$	$\partial K_f / \partial A$
SENSIB. ANALITICA	20.13011	-0.07708	28.08541	-0.12479
DFC 1%	20.13956	-0.07712	28.18182	-0.12523
DFC 5%	20.13956	-0.07718	32.00000	-0.13951
error rel. DFC 1%	-0.05	-0.05	-0.34	-0.35
error rel. DFC 5%	-0.05	-0.13	-13.94	-11.80

Tabla 6.3.14(II). Sensibilidades de la velocidad de flameo y la frecuencia reducida del puente sobre el estrecho de Messina respecto a la inercia a torsión y el área los cajones laterales.

Del análisis de las dos tablas anteriores se deduce que la sensibilidad de la velocidad de flameo respecto al área de la sección transversal de los cajones laterales A es positiva y su valor es el mayor de todas las sensibilidades. En consecuencia, el incremento del área provocará un importante aumento de la velocidad de flameo de la estructura. Si se compara esta sensibilidad con la obtenida respecto al área de la sección transversal del cajón central se aprecia que esta última es más del doble de aquella, por tanto, si se desea aumentar la velocidad de flameo de la estructura la mejor estrategia a seguir es el incrementar el área de la sección transversal del cajón central.

La sensibilidad de la velocidad de flameo respecto a la inercia a torsión de los cajones laterales J es alta y positiva, siendo su valor incluso superior a la sensibilidad de la velocidad de flameo respecto a la inercia a torsión del cajón central. En consecuencia, incrementar la inercia a torsión de los cajones laterales tendrá como consecuencia un importante incremento en la velocidad de flameo del puente.

Una particularidad importante es el hecho de que la sensibilidad de la velocidad de flameo respecto a la inercia a flexión vertical I_y de los cajones laterales es positiva y su magnitud es importante. Esta circunstancia no se ha dado al evaluar la sensibilidad de la velocidad de flameo respecto a la inercia a flexión vertical del cajón central, ni tampoco al calcularla para el puente sobre el estrecho del Great Belt. Se ve, por tanto, que el aumentar la inercia a flexión de los tableros laterales, alejados horizontalmente del centro de gravedad de la sección, hace incrementar la velocidad de flameo del puente de Messina.

Al igual que en los restantes casos presentados hasta el momento, la sensibilidad de la velocidad de flameo respecto a la inercia a flexión lateral I_z de los cajones laterales es la

que presenta una menor magnitud. Por consiguiente, alteraciones en el valor de esta propiedad mecánica no van a producir modificaciones destacables en la velocidad de flameo del puente. En este caso, el signo de la sensibilidad es negativo, lo que significa que aumentar la inercia a flexión lateral de los cajones laterales tendrá como consecuencia una disminución en la velocidad crítica del puente.

En otro orden de cosas, las sensibilidades de la frecuencia reducida son bajas. La propiedad mecánica que produce mayor sensibilidad ante su alteración es el área de la sección transversal de los cajones laterales, que tiene el mismo signo que la sensibilidad de la frecuencia reducida respecto al área del cajón central, aunque su magnitud es aproximadamente la mitad que la de esta última.

Las diferencias finitas centradas, tanto del 1% como del 5%, aproximan correctamente las sensibilidades. A diferencia de lo que sucedía al aproximar las sensibilidades respecto a las propiedades mecánicas del tablero central, en este caso, las aproximaciones más precisas son las correspondientes al tamaño de paso menor, es decir, las diferencias finitas centradas del 1%.

Como ya se comentó en el ejemplo anterior, en el apartado 4.3.5, dedicado a la interpretación de los análisis de sensibilidad, se introducían los conceptos de velocidad de cambio y ratio de cambio de la velocidad de flameo, así como los de frecuencia reducida de cambio y ratio de cambio de la frecuencia reducida. En ese mismo apartado se destacó que lo que se persigue al evaluar las magnitudes indicadas es explicitar qué variables de diseño provocan mayores cambios en una respuesta estructural cuando son modificadas un mismo porcentaje. Por lo tanto, con estos cálculos se pretende garantizar que las modificaciones que se introduzcan en el proceso de diseño permitan mejorar siempre el diseño inicial, y no se entre en un proceso de prueba y error, característico del proceso clásico de diseño basado exclusivamente en la experiencia y habilidad del proyectista.

En las tablas 6.3.15(I) a 6.3.15(IV) se muestran las velocidades de cambio y las frecuencias reducidas de cambio respecto a las cuatro propiedades mecánicas, tanto del cajón central como de los laterales. Estos valores expresan la magnitud de las modificaciones de velocidad y frecuencia reducida al alterar las variables de diseño, y se

han obtenido a partir de las sensibilidades analíticas respecto a las propiedades mecánicas del tablero central y de los laterales. También aparecen los ratios de cambio de velocidad y frecuencia reducida respecto a las mismas variables, que son los valores que mejor cuantifican la variación de las propiedades aeroelásticas.

- Cajón central

$U_f^{I_y}$	$U_f^{I_z}$	U_f^J	U_f^A
-0.5570005	0.2070816	7.5502418	25.824302
$\lambda_U^{I_y}$	$\lambda_U^{I_z}$	λ_U^J	λ_U^A
-0.006419423	0.0023866	0.0870164	0.2976247

Tabla 6.3.15(I). Velocidad de cambio y ratio de cambio de la velocidad de flameo del puente sobre el estrecho de Messina respecto a las propiedades mecánicas del cajón central.

$K_f^{I_y}$	$K_f^{I_z}$	K_f^J	K_f^A
0.002307788	-0.000788	-0.02891	-0.102196
$\lambda_K^{I_y}$	$\lambda_K^{I_z}$	λ_K^J	λ_K^A
0.00678859	-0.002319	-0.085041	-0.300619

Tabla 6.3.15(II). Frecuencia reducida de cambio y ratio de cambio de la frecuencia reducida del puente sobre el estrecho de Messina respecto a las propiedades mecánicas del cajón central.

- Cajones laterales

$U_f^{I_y}$	$U_f^{I_z}$	U_f^J	U_f^A
4.2017235	-0.954022	20.915184	13.902278
$\lambda_U^{I_y}$	$\lambda_U^{I_z}$	λ_U^J	λ_U^A
0.0484248	-0.010995	0.2410472	0.1602236

Tabla 6.3.15(III). Velocidad de cambio y ratio de cambio de la velocidad de flameo del puente sobre el estrecho de Messina respecto a las propiedades mecánicas de los cajones laterales.

$K_f^{I_y}$	$K_f^{I_z}$	K_f^J	K_f^A
-0.015549	0.0036523	-0.080083	-0.061772
$\lambda_K^{I_y}$	$\lambda_K^{I_z}$	λ_K^J	λ_K^A
-0.045737	0.0107435	-0.235573	-0.181708

Tabla 6.3.15(IV). Frecuencia reducida de cambio y ratio de cambio de la frecuencia reducida del puente sobre el estrecho de Messina respecto a las propiedades mecánicas de los cajones laterales.

El repaso de las tablas mostradas permite extraer algunas conclusiones, relativas a los cambios que se infieren en la velocidad de flameo y en la frecuencia reducida del puente cuando se alteran las propiedades mecánicas de los cajones.

Si se presta atención a la velocidad de cambio respecto a las propiedades mecánicas del cajón central, que figuran en la tabla 6.3.15(I), se observa como ésta es mayor cuando se aumenta el área de la sección transversal ya que en ese caso la velocidad de cambio es $U_f^A = 26$ m/s. La velocidad de cambio respecto a la inercia a torsión, U_f^J , es también considerable, mientras que el incrementar cualquiera de la inercias a flexión casi no hace modificar la velocidad de flameo de la estructura.

Si se observa la tabla 6.3.15(II), relativa a la frecuencia reducida de cambio respecto a las propiedades mecánicas del cajón central, se aprecia como es la alteración del área de la sección transversal, K_f^A , la que provoca una mayor disminución en la frecuencia reducida del puente. El aumentar la inercia a torsión también hace disminuir la frecuencia reducida, mientras que la inercia a flexión lateral tiene una influencia muy escasa en la frecuencia reducida debido al bajo valor de $K_f^{I_z}$. A diferencia de las otras tres propiedades mecánicas, la inercia a flexión vertical hace aumentar la frecuencia reducida cuando se incrementa su valor.

La tabla 6.3.15(III) permite analizar como afectan alteraciones de las propiedades mecánicas de la sección transversal de los cajones laterales del puente a la velocidad de flameo del mismo. Así, se observa como el aumentar la inercia a torsión o el área de los cajones provoca importantes incrementos en la velocidad de flameo, ya que las velocidades de cambio, U_f^J y U_f^A , son de aproximadamente 21 y 14 m/s

respectivamente. A diferencia de lo que acontece en el cajón central, al incrementarse la inercia a flexión vertical de los tableros laterales la velocidad de flameo aumenta de modo apreciable, ya que su velocidad de cambio $U_f^{I_y}$ es de más de 4 m/s. Cualquier cambio en la inercia a flexión lateral influye muy poco en la velocidad de flameo del puente.

Las frecuencias reducidas de cambio asociadas a la inercia a flexión vertical $K_f^{I_y}$, a torsión K_f^J y al área K_f^A de la sección transversal de los tableros laterales, son negativas y del mismo orden de magnitud, tal como figura en la tabla 6.3.15(IV). La frecuencia reducida de cambio respecto a la inercia a flexión lateral $K_f^{I_z}$ es opuesta a las tres anteriores, sin embargo, su valor es un orden de magnitud inferior.

Comparando las velocidades de cambio asociadas a las propiedades mecánicas de los tres cajones, que aparecen en las tablas 6.3.15(I) y 6.3.15(III), se observa como el incrementar el área de la sección del cajón central provoca el mayor incremento de la velocidad de flameo ya que su velocidad de cambio U_f^A es la mayor de todas. El efecto del incremento del área y de la inercia a torsión de la sección transversal de los cajones laterales también es importante, aunque algo menor. En consecuencia, si se desea incrementar la velocidad de flameo de esta estructura a partir del diseño actual, lo más eficiente es incrementar el área de la sección transversal de ambos cajones, así como sus inercias a torsión. Las inercias a flexión, tanto lateral como vertical no tienen tanta influencia, y además, las velocidades de cambio $U_f^{I_y}$ y $U_f^{I_z}$ tienen signos opuestos, según estén asociadas a una inercia del cajón central o del lateral.

Finalmente, la frecuencia reducida de cambio, asociada al área de la sección transversal del cajón central K_f^A , es un orden de magnitud superior a las asociadas a las restantes propiedades mecánicas de los tres cajones. En consecuencia, el mejor modo de hacer disminuir la frecuencia reducida de la estructura, si así se desea, es incrementando el área de la sección transversal del cajón central.

6.3.5 Análisis de sensibilidad de la respuesta aeroelástica respecto a los espesores

En el ejemplo del apartado 6.2 relativo al puente sobre el Great Belt y, hasta el presente momento, en este ejemplo del puente sobre el estrecho de Messina, se han presentado los resultados de las sensibilidades de la respuesta aeroelástica respecto a las propiedades mecánicas del tablero o de los cajones que conforman el tablero de los puentes mencionados. Esa información es muy importante ya que permite anticipar el comportamiento aeroelástico de la estructura al introducir algún tipo de modificación en las propiedades mecánicas del tablero.

Sin embargo, es deseable que la información que los análisis de sensibilidad ofrezcan al proyectista sea lo más intuitiva y de inmediata aplicación posible, con el fin de facilitar la toma de decisiones durante el proceso de diseño. Por ello, se considera que una mejora en la línea que acaba de ser enunciada es el obtener los análisis de sensibilidad de la respuesta aeroelástica de puentes de gran vano, no respecto a las propiedades mecánicas del tablero, sino respecto a los espesores de las chapas que conforman una sección en cajón, asimilable a la sección aerodinámica del puente. El escenario que se plantea en estas circunstancias es aquel en el que, en lugar de anticipar el comportamiento aeroelástico de la estructura al alterar alguna propiedad mecánica del tablero, se prevea la respuesta aeroelástica del puente al aumentar o disminuir el espesor de las chapas de la sección transversal.

Por consiguiente, se logra así relacionar el comportamiento último de la estructura, que es su respuesta aeroelástica, con las decisiones que toma el proyectista en la génesis del proceso de diseño, como es asignar el espesor equivalente a las chapas que conforman la sección transversal del tablero de un puente de gran vano.

La formulación que permite obtener las sensibilidades de la respuesta aeroelástica respecto a los espesores de las chapas que componen una sección en cajón simétrica se desarrolló con detalle en el apartado 4.3 del presente documento. Las derivadas se escriben de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_f}{\partial e_i} &= \frac{\partial U_f}{\partial I_y} \frac{\partial I_y}{\partial e_i} + \frac{\partial U_f}{\partial I_z} \frac{\partial I_z}{\partial e_i} + \frac{\partial U_f}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial e_i} + \frac{\partial U_f}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial e_i} \\ \frac{\partial K_f}{\partial e_i} &= \frac{\partial K_f}{\partial I_y} \frac{\partial I_y}{\partial e_i} + \frac{\partial K_f}{\partial I_z} \frac{\partial I_z}{\partial e_i} + \frac{\partial K_f}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial e_i} + \frac{\partial K_f}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial e_i} \end{aligned} \quad (6.3.14)$$

donde los términos $\frac{\partial U_f}{\partial I_y}$, $\frac{\partial U_f}{\partial I_z}$, $\frac{\partial U_f}{\partial J}$, $\frac{\partial U_f}{\partial A}$, $\frac{\partial K_f}{\partial I_y}$, $\frac{\partial K_f}{\partial I_z}$, $\frac{\partial K_f}{\partial J}$ y $\frac{\partial K_f}{\partial A}$ son las sensibilidades de la respuesta aeroelástica respecto a las propiedades mecánicas de la sección transversal, cuyos resultados se han presentado en los ejemplos anteriores, mientras que $\frac{\partial I_y}{\partial e_i}$, $\frac{\partial I_z}{\partial e_i}$, $\frac{\partial J}{\partial e_i}$ y $\frac{\partial A}{\partial e_i}$ con $i=1, \dots, n$ deben calcularse para cada sección transversal en cajón simétrico con la que se esté trabajando. Se pueden plantear las relaciones matriciales siguientes:

$$\nabla_{\mathbf{e}} U_f = \begin{Bmatrix} \frac{\partial U_f}{\partial e_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial U_f}{\partial e_n} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial I_y}{\partial e_1} & \frac{\partial I_z}{\partial e_1} & \frac{\partial J}{\partial e_1} & \frac{\partial A}{\partial e_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial I_y}{\partial e_n} & \frac{\partial I_z}{\partial e_n} & \frac{\partial J}{\partial e_n} & \frac{\partial A}{\partial e_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial U_f}{\partial I_y} \\ \frac{\partial U_f}{\partial I_z} \\ \frac{\partial U_f}{\partial J} \\ \frac{\partial U_f}{\partial A} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \nabla_{\mathbf{I}} U_f \quad (6.3.15)$$

$$\nabla_{\mathbf{e}} K_f = \begin{Bmatrix} \frac{\partial K_f}{\partial e_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial K_f}{\partial e_n} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial I_y}{\partial e_1} & \frac{\partial I_z}{\partial e_1} & \frac{\partial J}{\partial e_1} & \frac{\partial A}{\partial e_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial I_y}{\partial e_n} & \frac{\partial I_z}{\partial e_n} & \frac{\partial J}{\partial e_n} & \frac{\partial A}{\partial e_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial K_f}{\partial I_y} \\ \frac{\partial K_f}{\partial I_z} \\ \frac{\partial K_f}{\partial J} \\ \frac{\partial K_f}{\partial A} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \nabla_{\mathbf{I}} K_f \quad (6.3.16)$$

Por tanto, estas expresiones pueden escribirse de una manera compacta utilizando solamente los vectores gradiente y la matriz jacobiana, como se indica a continuación

$$\nabla_{\mathbf{e}} U_f = \mathbf{J} \cdot \nabla_{\mathbf{I}} U_f \tag{6.3.17}$$

$$\nabla_{\mathbf{e}} K_f = \mathbf{J} \cdot \nabla_{\mathbf{I}} K_f \tag{6.3.18}$$

donde \mathbf{e} representa un vector que contiene los espesores de la sección transversal, empleados como variables de diseño, e \mathbf{I} es un vector compuesto por las propiedades mecánicas de la sección en cajón.

En las próximas líneas se facilitan las expresiones analíticas de las derivadas de las propiedades mecánicas de una sección en cajón monocelular simétrica respecto a los espesores de las chapas que conforman la sección según el esquema de la figura 6.3.17.

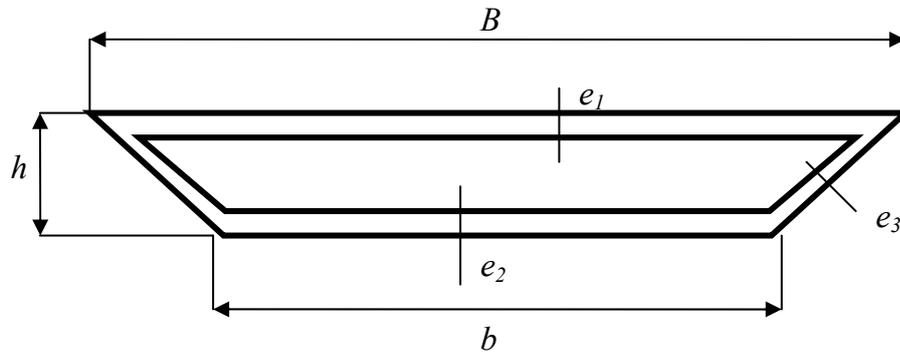


Figura 6.3.17. Sección transversal en cajón monocelular simétrica.

Las seis variables básicas que definen la geometría de la sección en cajón son seis: B , b , h , e_1 , e_2 y e_3 , de las cuales las dimensiones exteriores de la sección son conocidas (B , b y h), mientras que los tres espesores (e_1 , e_2 y e_3) serán las variables respecto a las que se derivan las expresiones de las propiedades mecánicas de la sección transversal dadas en las fórmulas (3.6.5) a (3.6.9).

En primer lugar se definen las siguientes variables auxiliares, que permiten escribir las expresiones subsiguientes de un modo razonablemente compacto:

$$s = \frac{B - b}{2} \tag{6.3.19}$$

$$t = h - e_1 - e_2 \tag{6.3.20}$$

$$q = \frac{ts}{h} = \frac{(h - e_1 - e_2)(B - b)}{2h} \quad (6.3.21)$$

$$p = \frac{e_3 \sqrt{s^2 + h^2}}{h} + e_1 \frac{s}{h} \quad (6.3.22)$$

$$r = B - 2(q + p) = B - \frac{1}{h} \left[(h - e_2)(b - h) + e_3 \sqrt{(B - b)^2 + 4h^2} \right] \quad (6.3.23)$$

Además, el área de la sección transversal, que interviene en algunas de las expresiones que se presentan a continuación, se obtiene como:

$$A = Bh - (sh + qt) - rt \quad (6.3.24)$$

Las derivadas de la posición del centro de gravedad de la sección en cajón respecto a los espesores de la sección se calculan empleando las expresiones siguientes:

$$\frac{\partial z_g}{\partial e_1} = \frac{(2q + r)(t + e_2)A - (2q + r) \left[B \frac{h^2}{2} - s \frac{h^2}{3} - 2 \left(e_2 + \frac{2}{3}t \right) \left(\frac{q}{2}t \right) - \left(e_2 + \frac{t}{2} \right) rt \right]}{A^2} \quad (6.3.25)$$

$$\frac{\partial z_g}{\partial e_2} = \frac{re_2 A - r \left[B \frac{h^2}{2} - s \frac{h^2}{3} - 2 \left(e_2 + \frac{2}{3}t \right) \left(\frac{q}{2}t \right) - \left(e_2 + \frac{t}{2} \right) rt \right]}{A^2} \quad (6.3.26)$$

$$\frac{\partial z_g}{\partial e_3} = \frac{\frac{t}{h} \left(e_2 + \frac{t}{2} \right) \sqrt{4s^2 + 4h^2} A - \frac{t}{h} \sqrt{4s^2 + 4h^2} \left[B \frac{h^2}{2} - s \frac{h^2}{3} - 2 \left(e_2 + \frac{2}{3}t \right) \left(\frac{q}{2}t \right) - \left(e_2 + \frac{t}{2} \right) rt \right]}{A^2} \quad (6.3.27)$$

Las derivadas de la inercia a flexión vertical, I_y , respecto a los tres espesores de la sección son las que se indican a continuación.

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_y}{\partial e_1} &= 2 \left(z_g - \frac{h}{2} \right) Bh \frac{\partial z_g}{\partial e_1} - \\ &- 2 \left[sh \left(z_g - \frac{h}{3} \right) \frac{\partial z_g}{\partial e_1} - q \frac{t^2}{9} - \left(e_2 + \frac{2}{3}t - z_g \right) \left(\frac{2}{3} + \frac{\partial z_g}{\partial e_1} \right) qt - q \left(e_2 + \frac{2}{3}t - z_g \right)^2 \right] + \quad (6.3.28) \\ &+ r \frac{t^2}{4} + 2 \left(e_2 + \frac{t}{2} - z_g \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\partial z_g}{\partial e_1} \right) rt + \left(e_2 + \frac{t}{2} - z_g \right)^2 r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_y}{\partial e_2} &= 2 \left(z_g - \frac{h}{2} \right) Bh \frac{\partial z_g}{\partial e_2} - \\ &- 2 \left[sh \left(z_g - \frac{h}{3} \right) \frac{\partial z_g}{\partial e_2} - q \frac{t^2}{9} - \left(e_2 + \frac{2}{3}t - z_g \right) \left(\frac{1}{3} - \frac{\partial z_g}{\partial e_2} \right) qt - q \left(e_2 + \frac{2}{3}t - z_g \right)^2 \right] - \quad (6.3.29) \\ &- \left[q \frac{t^2}{6} - r \frac{t^2}{4} + 2 \left(e_2 + \frac{t}{2} - z_g \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\partial z_g}{\partial e_2} \right) rt + (2q - r) \left(e_2 + \frac{t}{2} - z_g \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_y}{\partial e_3} &= 2 \left(z_g - \frac{h}{2} \right) Bh \frac{\partial z_g}{\partial e_3} - \\ &- 2 \left[sh \left(z_g - \frac{h}{3} \right) \frac{\partial z_g}{\partial e_3} - \left(e_2 + \frac{2}{3}t - z_g \right) \left(\frac{\partial z_g}{\partial e_3} \right) qt \right] + \quad (6.3.30) \\ &+ \frac{t^3 \sqrt{4s^2 + 4h^2}}{12h} + 2 \left(e_2 + \frac{t}{2} - z_g \right) \left(\frac{\partial z_g}{\partial e_3} \right) rt + \frac{\left(e_2 + \frac{t}{2} - z_g \right)^2 t \sqrt{4s^2 + 4h^2}}{h} \end{aligned}$$

Las expresiones que permiten evaluar las derivadas de la inercia a flexión lateral de la sección transversal respecto a los espesores de la misma son, similarmente:

$$\frac{\partial I_z}{\partial e_1} = -2 \left[-\frac{q^3}{9} - \frac{q^2}{3} \left(\frac{r}{2} + \frac{q}{3} \right) - q \left(\frac{r}{2} + \frac{q}{3} \right)^2 \right] + \frac{r^3}{12} \quad (6.3.31)$$

$$\frac{\partial I_z}{\partial e_2} = -2 \left[-\frac{q^3}{9} - \frac{2}{3} q^2 \left(\frac{r}{2} + \frac{q}{3} \right) - q \left(\frac{r}{2} + \frac{q}{3} \right)^2 \right] - \frac{1}{12} (-r^3 + 6r^2q) \quad (6.3.32)$$

$$\frac{\partial I_z}{\partial e_3} = -2 \left[\frac{qt\sqrt{4s^2 + 4h^2} \left(\frac{r}{2} + \frac{q}{3} \right)}{2h} \right] + \frac{r^2 t \sqrt{s^2 + h^2}}{2h} \quad (6.3.33)$$

Las derivadas de la inercia a torsión se calculan utilizando estas fórmulas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial e_1} = & \frac{8 \left(Bh - sh - \frac{Be_1}{2} - \frac{be_2}{2} - \sqrt{s^2 + h^2} e_3 \right) \left(\frac{-B}{2} \right) \left(\frac{B}{e_1} + \frac{b}{e_2} + 2 \frac{\sqrt{s^2 + h^2}}{e_3} \right)}{\left(\frac{B}{e_1} + \frac{b}{e_2} + 2 \frac{\sqrt{s^2 + h^2}}{e_3} \right)^2} + \\ & + \frac{\frac{B}{e_1^2} \left[4 \left(Bh - sh - \frac{Be_1}{2} - \frac{be_2}{2} - \sqrt{s^2 + h^2} e_3 \right)^2 \right]}{\left(\frac{B}{e_1} + \frac{b}{e_2} + 2 \frac{\sqrt{s^2 + h^2}}{e_3} \right)^2} \end{aligned} \quad (6.3.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial e_2} = & \frac{8 \left(Bh - sh - \frac{Be_1}{2} - \frac{be_2}{2} - \sqrt{s^2 + h^2} e_3 \right) \left(\frac{-b}{2} \right) \left(\frac{B}{e_1} + \frac{b}{e_2} + 2 \frac{\sqrt{s^2 + h^2}}{e_3} \right)}{\left(\frac{B}{e_1} + \frac{b}{e_2} + 2 \frac{\sqrt{s^2 + h^2}}{e_3} \right)^2} + \\ & + \frac{\frac{b}{e_2^2} \left[4 \left(Bh - sh - \frac{Be_1}{2} - \frac{be_2}{2} - \sqrt{s^2 + h^2} e_3 \right)^2 \right]}{\left(\frac{B}{e_1} + \frac{b}{e_2} + 2 \frac{\sqrt{s^2 + h^2}}{e_3} \right)^2} \end{aligned} \quad (6.3.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial e_3} = & \frac{8 \left(Bh - sh - \frac{Be_1}{2} - \frac{be_2}{2} - \sqrt{s^2 + h^2} e_3 \right) \left(-\sqrt{s^2 + h^2} \right) \left(\frac{B}{e_1} + \frac{b}{e_2} + 2 \frac{\sqrt{s^2 + h^2}}{e_3} \right)}{\left(\frac{B}{e_1} + \frac{b}{e_2} + 2 \frac{\sqrt{s^2 + h^2}}{e_3} \right)^2} + \\ & + \frac{\frac{2\sqrt{s^2 + h^2}}{e_3^2} \left[4 \left(Bh - sh - \frac{Be_1}{2} - \frac{be_2}{2} - \sqrt{s^2 + h^2} e_3 \right)^2 \right]}{\left(\frac{B}{e_1} + \frac{b}{e_2} + 2 \frac{\sqrt{s^2 + h^2}}{e_3} \right)^2} \end{aligned} \quad (6.3.36)$$

Finalmente, las derivadas del área de la sección transversal respecto a los espesores de la misma se formulan del modo siguiente.

$$\frac{\partial A}{\partial e_1} = 2q + r \tag{6.3.37}$$

$$\frac{\partial A}{\partial e_2} = r \tag{6.3.38}$$

$$\frac{\partial A}{\partial e_3} = \frac{t}{h} \sqrt{2s^2 + 4h^2} \tag{6.3.39}$$

Si se sustituye en las expresiones que van desde la (6.3.28) a la (6.3.39) los valores de los espesores y las dimensiones exteriores de la sección en cajón, ya sea del cajón central o de los laterales, se obtienen los elementos de la matriz jacobiana que interviene en las expresiones (6.3.15) y (6.3.16), que permiten obtener las sensibilidades de la respuesta aeroelástica respecto a los espesores de la sección transversal del cajón central o los laterales.

En la figura 6.3.18 se muestra la sección transversal equivalente empleada en el presente ejemplo, en la que se han incluido los espesores del cajón central y los laterales. Los resultados obtenidos para el puente sobre el estrecho de Messina son los que se indican a continuación.

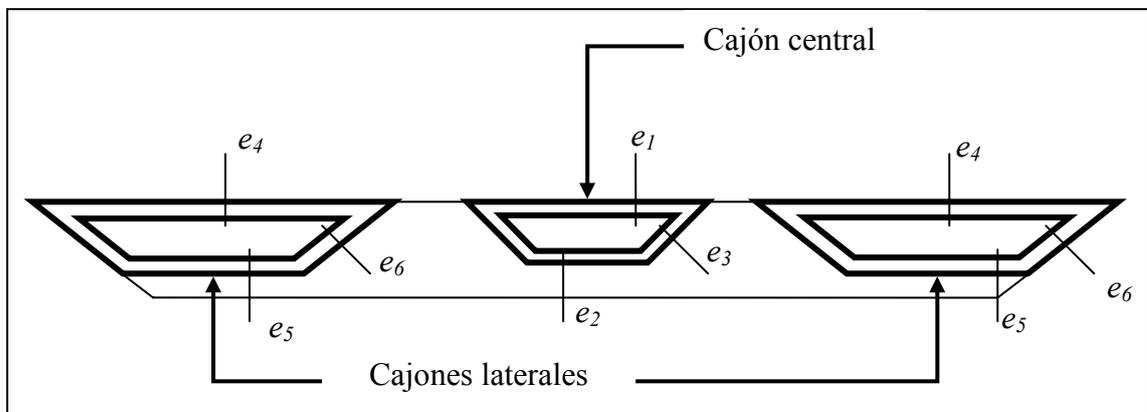


Figura 6.3.18. Sección transversal equivalente del puente de Messina.

- Cajón central

Las variables fundamentales de la sección son conocidas:

$$B_c = 7.5 \text{ m}$$

$$b_c = 4 \text{ m}$$

$$h_c = 2 \text{ m}$$

$$e_1 = 2.068867 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$e_2 = 2.7881283 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$e_3 = 2.8552402 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Los resultados de las derivadas analíticas son los siguientes:

$$\frac{\partial I_y^c}{\partial e_1} = 5.663855$$

$$\frac{\partial I_z^c}{\partial e_1} = 33.6035$$

$$\frac{\partial I_y^c}{\partial e_2} = 4.598428$$

$$\frac{\partial I_z^c}{\partial e_2} = 5.22566$$

$$\frac{\partial I_y^c}{\partial e_3} = 1.697704$$

$$\frac{\partial I_z^c}{\partial e_3} = 43.09422$$

$$\frac{\partial J^c}{\partial e_1} = 18.16434$$

$$\frac{\partial A^c}{\partial e_1} = 7.387916$$

$$\frac{\partial J^c}{\partial e_2} = 5.21407$$

$$\frac{\partial A^c}{\partial e_2} = 3.972925$$

$$\frac{\partial J^c}{\partial e_3} = 6.593715$$

$$\frac{\partial A^c}{\partial e_3} = 5.185978$$

- Cajones laterales

Las variables fundamentales de la sección son las que se indican:

$$B_l = 13 \text{ m}$$

$$b_l = 5 \text{ m}$$

$$h_l = 2.5 \text{ m}$$

$$e_4 = 1.0574375 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$e_5 = 1.3173586 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$e_6 = 3.1824701 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Los resultados de las derivadas analíticas se presentan a continuación:

$$\frac{\partial I'_y}{\partial e_4} = 14.47927$$

$$\frac{\partial I'_z}{\partial e_4} = 176.6564$$

$$\frac{\partial I'_y}{\partial e_5} = 9.849319$$

$$\frac{\partial I'_z}{\partial e_5} = 9.937107$$

$$\frac{\partial I'_y}{\partial e_6} = 5.065798$$

$$\frac{\partial I'_z}{\partial e_6} = 196.6034$$

$$\frac{\partial J'}{\partial e_4} = 62.79811$$

$$\frac{\partial A'}{\partial e_4} = 12.84607$$

$$\frac{\partial J'}{\partial e_5} = 15.47927$$

$$\frac{\partial A'}{\partial e_5} = 4.922062$$

$$\frac{\partial J'}{\partial e_6} = 4.639306$$

$$\frac{\partial A'}{\partial e_6} = 9.344366$$

Los resultados mostrados han sido comprobados calculando las diferencias finitas centradas del 1%, obteniéndose una total coincidencia con los resultados analíticos presentados en este ejemplo.

Por otro lado, las sensibilidades calculadas tienen interés en sí mismas ya que indican cual es la sensibilidad de las propiedades mecánicas de la sección en cajón considerada cuando se altera alguno de los espesores de la misma.

Sustituyendo los valores calculados en las expresiones (6.3.15) y (6.3.16) se obtienen las sensibilidades analíticas de la velocidad de flameo respecto a los espesores de las

chapas que conforman la sección transversal de los cajones central o laterales del puente sobre el estrecho de Messina. Los resultados se presentan en las tablas 6.3.17 y 6.3.18.

- Cajón central

	$\partial U_f / \partial e_1$	$\partial U_f / \partial e_2$	$\partial U_f / \partial e_3$
SENSIBILIDAD ANALITICA	667.83435	308.41624	411.92169

	$\partial K_f / \partial e_1$	$\partial K_f / \partial e_2$	$\partial K_f / \partial e_3$
SENSIBILIDAD ANALITICA	-2.616555	-1.212004	-1.62024

Tabla 6.3.16. Sensibilidades de la velocidad de flameo y de la frecuencia reducida del puente sobre el estrecho de Messina respecto a los espesores del cajón central.

- Cajones laterales

	$\partial U_f / \partial e_4$	$\partial U_f / \partial e_5$	$\partial U_f / \partial e_6$
SENSIBILIDAD ANALITICA	1739.7617	540.47016	380.70779

	$\partial K_f / \partial e_4$	$\partial K_f / \partial e_5$	$\partial K_f / \partial e_6$
SENSIBILIDAD ANALITICA	-6.865789	-2.142572	-1.612886

Tabla 6.3.17. Sensibilidades de la velocidad de flameo y de la frecuencia reducida del puente sobre el estrecho de Messina respecto a los espesores de los cajones laterales.

Si se analizan los resultados presentados en las tablas 6.3.16 y 6.3.17 se aprecia la gran uniformidad existente en los resultados obtenidos, ya que las sensibilidades de la velocidad de flameo respecto a los espesores de la sección son todas del mismo signo y del mismo orden de magnitud, tanto para el cajón central como para los laterales. Lo mismo puede ser dicho de las sensibilidades de la frecuencia reducida.

Independientemente de cómo afecte a las propiedades mecánicas de la sección transversal, el incrementar el espesor en alguna de las chapas provoca un aumento significativo de la velocidad de flameo, que puede ser mayor o menor, en función del espesor concreto que se modifique.

De la misma manera, incrementar el espesor de alguna de las chapas hará disminuir la frecuencia reducida de la estructura, sobre todo si son los espesores de los tableros

laterales los que se modifican, ya que los análisis de sensibilidad son mayores en ese caso.

Los análisis de sensibilidad de la velocidad de flameo respecto a las propiedades mecánicas de la sección del tablero son de gran ayuda, pero en ocasiones puede no ser fácil el decidir qué hacer para, por ejemplo, disminuir el área de la sección transversal a la vez que se mantienen constantes las inercias a torsión y a flexión de la sección. Sin embargo, con los análisis de sensibilidad de la respuesta aeroelástica respecto a los espesores es mucho más intuitivo tomar decisiones en la fase de proyecto con el fin de obtener una respuesta aeroelástica satisfactoria, ya que se conoce de forma desagregada cómo se modifica la velocidad de flameo o la frecuencia reducida al alterar individualmente el espesor de alguna de las chapas de la sección en cajón.

En el apartado 6.3.4 se han presentado las velocidades de cambio, los ratios de cambio de la velocidad de flameo, las frecuencias reducidas de cambio y los ratios de cambio de la frecuencia reducida asociados a las propiedades mecánicas de las secciones en cajón central o laterales. Los mismos resultados pueden ser calculados, pero asociados a las espesores de la sección transversal en cajón considerada. El objetivo es el anticipar la alteración que se produce en la respuesta aeroelástica cuando se incrementa cada uno de los espesores de la sección trasversal, por lo tanto, determinar cual de los espesores tiene mayor influencia en la modificación de alguna respuesta aeroelástica. A continuación se repasa la formulación requerida para el cajón central, siendo las expresiones idénticas para los cajones laterales.

Las expresiones correspondientes a las velocidades de cambio asociadas a los tres espesores del tablero son:

$$\begin{aligned}
 U_f^{e_1} &= \frac{\partial U_f}{\partial e_1} e_1 \\
 U_f^{e_2} &= \frac{\partial U_f}{\partial e_2} e_2 \\
 U_f^{e_3} &= \frac{\partial U_f}{\partial e_3} e_3
 \end{aligned}
 \tag{6.3.40}$$

Por otro lado, los ratios de cambio de la velocidad de flameo asociados a las tres variables de diseño consideradas en el presente ejemplo son:

$$\begin{aligned}\lambda_U^{e_1} &= \frac{U_f^{e_1}}{U_f} = \frac{\partial U_f}{\partial e_1} \frac{e_1}{U_f} \\ \lambda_U^{e_2} &= \frac{U_f^{e_2}}{U_f} = \frac{\partial U_f}{\partial e_2} \frac{e_2}{U_f} \\ \lambda_U^{e_3} &= \frac{U_f^{e_3}}{U_f} = \frac{\partial U_f}{\partial e_3} \frac{e_3}{U_f}\end{aligned}\quad (6.3.41)$$

Del mismo modo, las expresiones que permiten evaluar la frecuencia reducida de cambio cuando los espesores de la sección se modifican son las que se muestran seguidamente:

$$\begin{aligned}K_f^{e_1} &= \frac{\partial K_f}{\partial e_1} e_1 \\ K_f^{e_2} &= \frac{\partial K_f}{\partial e_2} e_2 \\ K_f^{e_3} &= \frac{\partial K_f}{\partial e_3} e_3\end{aligned}\quad (6.3.42)$$

Finalmente, las ecuaciones para evaluar el ratio de cambio de la frecuencia reducida respecto a las variables de diseño son:

$$\begin{aligned}\lambda_K^{e_1} &= \frac{K_f^{e_1}}{K_f} = \frac{\partial K_f}{\partial e_1} \frac{e_1}{K_f} \\ \lambda_K^{e_2} &= \frac{K_f^{e_2}}{K_f} = \frac{\partial K_f}{\partial e_2} \frac{e_2}{K_f} \\ \lambda_K^{e_3} &= \frac{K_f^{e_3}}{K_f} = \frac{\partial K_f}{\partial e_3} \frac{e_3}{K_f}\end{aligned}\quad (6.3.43)$$

En las tablas que se presentan a continuación se muestran los resultados de los parámetros cuyo significado se acaba de definir, obtenidos a partir de las sensibilidades

analíticas de la respuesta aeroelástica respecto a los espesores de los cajones del tablero del puente de Messina.

- Cajón central

$U_f^{e_1}$	$U_f^{e_2}$	$U_f^{e_3}$
13.816604	8.6011523	13.109284
$\lambda_U^{e_1}$	$\lambda_U^{e_2}$	$\lambda_U^{e_3}$
0.1592362	0.0991282	0.1510843

Tabla 6.3.18(I). Velocidad de cambio y ratio de cambio de la velocidad de flameo del puente sobre el estrecho de Messina respecto a los espesores del cajón central.

$K_f^{e_1}$	$K_f^{e_2}$	$K_f^{e_3}$
-0.054133	-0.033801	-0.046262
$\lambda_K^{e_1}$	$\lambda_K^{e_2}$	$\lambda_K^{e_3}$
-0.159238	-0.099428	-0.136084

Tabla 6.3.18(II). Frecuencia reducida de cambio y ratio de cambio de la frecuencia reducida del puente sobre el estrecho de Messina respecto a los espesores del cajón central.

- Cajones laterales

$U_f^{e_4}$	$U_f^{e_5}$	$U_f^{e_6}$
18.396901	7.1199322	12.115911
$\lambda_U^{e_4}$	$\lambda_U^{e_5}$	$\lambda_U^{e_6}$
0.212024	0.0820571	0.1396357

Tabla 6.3.19(I). Velocidad de cambio y ratio de cambio de la velocidad de flameo del puente sobre el estrecho de Messina respecto a los espesores de los cajones laterales.

$K_f^{e_4}$	$K_f^{e_5}$	$K_f^{e_6}$
-0.072601	-0.028225	-0.05133
$\lambda_K^{e_4}$	$\lambda_K^{e_5}$	$\lambda_K^{e_6}$
-0.213564	-0.083028	-0.150991

Tabla 6.3.19(II). Frecuencia reducida de cambio y ratio de cambio de la frecuencia reducida del puente sobre el estrecho de Messina respecto a los espesores de los cajones laterales.

Al repasar las tablas anteriores, se observa que el incrementar los espesores de la sección transversal, tanto del cajón central como de los laterales va a provocar un incremento de la velocidad de flameo, ya que la velocidad de cambio $U_f^{e_i}$ es positiva y del mismo orden de magnitud aproximadamente. Además, los mayores incrementos se producen para aumentos del espesor de la chapa superior de los cajones laterales, e_4 , así como de los espesores de las chapas superior e_1 y lateral e_3 del cajón central. El espesor de las chapas inferiores e_2 o e_5 tiene menor influencia en la velocidad de flameo, aunque ésta no es despreciable.

La frecuencia reducida de cambio $K_f^{e_i}$ es negativa en todos los casos, es decir, incrementos de los espesores de las chapas de cualquiera de los cajones producen descensos en la frecuencia reducida de la estructura. Los espesores que tienen mayor influencia en la alteración de la frecuencia reducida son los de las chapas superiores, e_1 y e_4 , así como los laterales, e_3 y e_6 , tanto del cajón central como de los laterales.

Por lo tanto, si durante el proceso de diseño del puente se hace necesario modificar su comportamiento aeroelástico, el proyectista dispone de una herramienta muy eficaz en los análisis de sensibilidad respecto a los espesores de la sección transversal, ya que no sólo sabe si un incremento de un cierto espesor hace aumentar la velocidad de flameo, sino que dispone de una estimación muy precisa de la magnitud de dicho incremento.

6.4 REFERENCIAS

[C1] COWI [2004] *Cowi home page* <http://www.cowi.dk/>

[C2] COSMOS/M [2003] *User's Manual, 2.8 version*. Structural Research & Analysis Corp. Santa Mónica, California.

[C3] Cobo D. [1998] *An analysis of wind stability. Improvements to the response of suspension bridges*. Tesis doctoral de la Universitat Politècnica de Catalunya. Escola Tècnica Superior D'Enginyers de Camins, Canals i Ports.

[D1] D'Asdia P, Sepe V. [1998] *Aeroelastic Instability of Long-Span Suspension Bridges: a Multimode Approach*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 74-76, pp 849-857.

[H1] Hernández S., Jurado J.A., Bravo F. Baldomir A., [2005] *A Comparison of Flutter Speed of the Messina Bridge Considering Several Cable Configurations*. Proceedings of the 3rd International Conference on Fluid Structure Interaction and 8th International Conference on Computational Modelling and Experimental Measurements of Free and Moving Boundaries, A Coruña, 19-21 septiembre.

[J1] Jurado J.Á. [2001] *Análisis Aeroelástico y de Sensibilidad del Fenómeno de Flameo en Puentes Soportados por Cables*. Tesis doctoral de la Universidad de La Coruña. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.

[L1] Larsen A. [1993] *Aerodynamic aspects of the final design of the 1624 m suspension bridge across the Great Belt*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 48, pp.261-285.

[M1] Mosquera A., [2003] *Sensibilidad Analítica de la Vibración Libre y del Flameo en Puentes Colgantes de Gran Vano en Servicio y en Fase Constructiva*. Tesis doctoral de la Universidade da Coruña. Escola Técnica Superior de Enxeñeiros de Camiños, Canais e Portos.

[M2] Mosquera A., Hernández S., Jurado J.Á. [2003] *Analytical Sensitivity Analysis of Aeroelastic Performance of Suspension Bridges under Construction*. Proceedings of the 11th International Conference on Wind Engineering. June 2-5 2003, Lubbock, Texas, USA.

[M3] Miyata T., Yamada H, Katsuchi H. [2003] *Comparative Analysis of Messina Bridge International Benchmark Study*. Proceedings of the 11th International Conference on Wind Engineering. June 2-5 2003, Lubbock, Texas, USA.

[N1] Nieto F., Hernández S, Jurado J.Á. [2005] *Distributed Computing for the Evaluation of the Aeroelastic Response and Sensitivity Analysis of Flutter Speed of the Messina Bridge*. Proceedings of the 3rd International Conference on Fluid Structure Interaction and 8th International Conference on Computational Modelling and Experimental Measurements of Free and Moving Boundaries. 19-21 September, 2005, A Coruña, Spain.

[N2] Nieto F., Jurado J.Á., Hernández S. [2002] *Ensayos Aeroelásticos de Modelos Seccionales de Tableros de Puentes*. Ed.: Santiago Hernández. ETS de Enxeñeiros de Camiños, Canais e Portos, Universidade da Coruña.

[O1] Ostenfeld K.H., [1995] *The Great Belt bridge Project*. Spatial Structures: Heritage, Present & Future, IASS, Milano, pp. 947-960.

[P1] Ponte sullo Stretto di Messina, [2006] *Stretto di Messina home page*. <http://www.strettodimessina.it/>

[P2] Ponte sullo Stretto di Messina [2003] *Studi e approfondimenti dell'opera di attraversamento*. Stretto di Messina S.p.A.

CAPÍTULO 7

EJEMPLO DE DISEÑO ÓPTIMO CONSIDERANDO CONDICIONES AEROELÁSTICAS

It is not debatable that optimization is useful...It is not a “push-button” tool that instantly produces the best design without human intervention. It is a process that reduces the design time, improves the design quality, and free engineers...for creative work by taking over tedious operations.

(VR&D home page, www.vrand.com/education.html)

7.1. INTRODUCCIÓN

A lo largo del presente documento se ha hecho hincapié en la mejora del proceso de diseño que supone la utilización de métodos basados en los análisis de sensibilidad y en técnicas de optimización. El empleo de las metodologías mencionadas no sólo permite proyectar estructuras que, cumpliendo los requisitos exigidos por el plan de necesidades, tienen un menor coste económico y son más eficientes, sino que el proceso de diseño en sí mismo se hace más lógico, fluido y eficaz, ya que se superan los procedimientos basados en sucesivas pruebas y errores, que reposan únicamente en la habilidad y experiencia del proyectista. Se alumbró así un proceso de diseño que se apoya en metodologías objetivas y rigurosas, las cuales garantizan que un nuevo diseño se comporta siempre mejor que el precedente.

En el capítulo 3 se ha puesto de manifiesto que el proyecto de puentes de gran vano, a diferencia de lo que ha acontecido en otros ámbitos de la ingeniería, ha sido impermeable a las técnicas de diseño basadas en los análisis de sensibilidad y, todavía

más, a la optimización estructural. Paradójicamente, los ingenieros civiles no siempre han sido refractarios a las metodologías de diseño no convencionales. Las técnicas experimentales han sido empleadas con profusión durante años en el proyecto de numerosas estructuras, como grandes presas o puentes colgantes.

En general, la experimentación es un proceso complejo, que requiere gran pericia, no sólo en la planificación y ejecución de un ensayo, sino sobre todo en su interpretación. Además, los modelos ensayados son siempre una aproximación más o menos precisa a la realidad, pero nunca son la realidad misma. Todo ello no ha sido obstáculo para que algunos técnicos acepten, sin objetar, cualquier resultado experimental, asumiendo las incertidumbres consustanciales a todo ensayo. Evidentemente, las técnicas experimentales son perfectamente válidas en muchas ocasiones y proporcionan información que, en ciertos casos, no podría ser obtenida de otro modo. Por ello, técnicas tan rigurosas y eficaces como los análisis de sensibilidad o la optimización necesariamente terminarán encontrando su camino en el ámbito de la ingeniería de estructuras. A pesar de ello existen algunos trabajos con aplicaciones prácticas de gran utilidad, como son los de Azevedo^[A1], los de Perezván^[P1] y Hernández, el libro editado por Frangopol^[F1] o las guías para la optimización estructural del ASCE, editadas por Arora^[A2] en 1997 o Burns^[B1] en 2002.

Sin embargo, en otras ramas de la ingeniería los métodos de diseño óptimo, o basados en análisis de sensibilidad, han calado, quizás debido a la gran competitividad existente en esos sectores. En la actualidad es impensable el diseñar un automóvil, el nuevo Airbus A-380 o un módulo para la estación espacial internacional empleando exclusivamente reglas heurísticas. Consecuentemente, los trabajos de investigación realizados en esas áreas son innumerables, pudiéndose citar algunas referencias con vocación generalista como la obra del American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) editada por Kamat^[K1], la obra sobre la optimización estructural en la industria del automóvil de Bennet^[B2] y Botkin, promovida por General Motors, o publicaciones relacionadas con aplicaciones industriales variadas de Hernández^{[H1][H2]} y Fontán.

Las causas que han motivado esta indiferencia en la ingeniería de puentes ante los avances en las técnicas de diseño alumbrados durante la segunda mitad del siglo XX

hay que buscarlas, no sólo en el desconocimiento, la carencia de un espíritu técnicamente emprendedor o el conservadurismo científico que puede imperar en ciertos sectores de la ingeniería civil. Los aspectos exclusivamente técnicos también han jugado un papel nada desdeñable en el devenir de los acontecimientos. Efectivamente, la optimización de puentes de gran vano considerando condiciones de comportamiento de tipo aeroelástico, ha podido ser etiquetado hasta fechas recientes como un *grand challenge problem*, es decir, un problema con unas exigencias computacionales que desbordan la capacidad de los ordenadores disponibles en un momento histórico determinado. En consecuencia, sólo desde hace pocos años, la tecnología necesaria para resolver este problema ha estado a disposición de la comunidad técnica internacional. Para comprender el por qué de esta realidad conviene plantear de modo general el problema de optimización que debe ser resuelto:

$$\min F = A(e_1, \dots, e_n) \quad (7.1.1)$$

Con las condiciones:

$$e_{\min} \leq e_i \leq e_{\max} \quad i = 1, \dots, n \quad (7.1.2)$$

$$g_1 : \frac{U_{f,cr}}{U_f} - 1 \leq 0 \quad (7.1.3)$$

$$g_2 : \frac{w_c}{w_{c,\max}} - 1 \leq 0 \quad (7.1.4)$$

En las expresiones anteriores A es el área de la sección transversal del tablero, e_i $i=1, \dots, 6$ son los espesores de las chapas que conforman los cajones del tablero, $U_{f,cr}$ es la mínima velocidad de flameo admisible, U_f es la velocidad de flameo del puente, $w_{c,\max}$ es la máxima flecha admisible en el centro del vano central cuando actúan el peso propio y las sobrecargas de uso, y w_c es la flecha en el centro del vano central cuando actúan el peso propio y las sobrecargas de uso.

En el capítulo 5 de este documento se comentaron detalladamente las operaciones que deben ser realizadas en un proceso de diseño óptimo como el planteado. El problema,

en este trabajo, va a ser resuelto aplicando el método de las direcciones eficientes modificado y, por lo tanto, se le deben facilitar al algoritmo de optimización los valores de la función objetivo, las condiciones y los gradientes de los mismos. Las operaciones más importantes se detallan a continuación:

- Cálculo estático del puente considerando teoría no lineal.
- Análisis dinámico para obtener las frecuencias naturales y los modos propios de vibración de la estructura.
- Obtención de la respuesta aeroelástica.
- Evaluación de la función objetivo y las condiciones.
- Análisis de sensibilidad de los movimientos de la estructura.
- Análisis de sensibilidad de las frecuencias naturales y los modos propios de vibración respecto a las propiedades mecánicas de la sección transversal.
- Análisis de sensibilidad de la respuesta aeroelástica respecto a las propiedades mecánicas del tablero o, en un caso como el del puente de Messina, de los cajones que lo conforman.
- Análisis de sensibilidad de la respuesta aeroelástica respecto a los espesores del cajón o cajones del tablero.
- Evaluación de los gradientes de la función objetivo y las condiciones.
- Ejecución del algoritmo de optimización.

Como se desprende de la lista anterior, los subproblemas a resolver son variados, complejos y, en general, tienen un coste computacional muy elevado. Por ello, en la actualidad, el problema del diseño óptimo de puentes de gran vano considerando condiciones de tipo aeroelástico sólo puede ser resuelto en un intervalo de tiempo razonable si se aplican técnicas de programación distribuida y se dispone de un cluster de ordenadores conectados entre sí. De esta manera se logra que subprocesos, que pueden ser resueltos de modo independiente, sean acometidos simultáneamente por los equipos que forman el cluster de ordenadores, con lo que los tiempos de cálculo requeridos para solventar el problema en su conjunto disminuyen de modo notable.

Se verifica una vez más el principio clásico según el cual, un avance tecnológico, como es el desarrollo de los clusters de computadoras y las técnicas de programación

distribuida, permite alumbrar un nuevo avance científico como es el acometer por vez primera el diseño óptimo de puentes de gran vano considerando condiciones de tipo aeroelástico. A su vez, este avance científico deberá conducir a nuevos avances prácticos, ya que su generalización supone una mejora en el proyecto de estas estructuras tan complejas como apasionantes.

7.2 DISEÑO ÓPTIMO DEL PUENTE SOBRE EL ESTRECHO DE MESSINA CONSIDERANDO CONDICIONES AEROELÁSTICAS Y CINEMÁTICAS

El puente sobre el estrecho de Messina^[P2] que es, hasta la fecha, el proyectado con mayor vano central del mundo, unirá la isla de Sicilia con la Italia peninsular en un futuro próximo.

El proyecto del puente sobre el estrecho de Messina ha sufrido modificaciones durante las últimas décadas, siendo el último diseño oficialmente aprobado el publicado en el año 2002 y que ha servido como base para el concurso de proyecto y obra convocado en el año 2004. Una de las características más destacadas de este puente es que el tablero está constituido por tres cajones independientes, conectados entre sí mediante vigas transversales dispuestas cada 30 m. Los dos cajones laterales se destinan al tráfico de vehículos automóviles, mientras que el cajón central soporta el tráfico ferroviario. En las figuras 7.2.1(I) a (III) se presentan varias imágenes virtuales tridimensionales de la sección transversal y de otros detalles del puente correspondiente al diseño del año 2002, las cuales han sido elaboradas por el grupo de Mecánica de Estructuras de la ETS de Enxeñeiros de Camiños, Canais e Portos de la Universidade da Coruña.

Las dimensiones de este puente, de acuerdo con el diseño del año 2002, son impresionantes ya que la longitud del vano central es de 3300 m, siendo la longitud total del puente 3666 m, dado que los vanos laterales son mucho más modestos. Es también destacable la altura de las torres del puente, que es de 382.6 m. Las propiedades del puente más significativas, y que han servido para realizar el modelo utilizado en este ejemplo, se presentan en la tabla 7.2.1.

Longitud total del tablero (m)	3666
Longitud del vano central (m)	3300
Longitud de los vanos laterales (m)	183
Distancia torre-anclaje lado Sicilia (m)	960
Distancia torre-anclaje lado Calabria (m)	810
Área cajón central (m^2)	0.39
Momento de inercia a flexión vertical del cajón central I_y (m^4)	0.301
Momento de inercia a flexión lateral del cajón central I_z (m^4)	2.12
Momento de inercia a torsión del cajón central J (m^4)	0.738
Masa por unidad de longitud del cajón central (T/m)	8.79
Momento de inercia polar por unidad de longitud del cajón central (Tm^2/m)	1112.93
Área cajones laterales (m^2)	0.495
Momento de inercia a flexión vertical de los cajones laterales I_y (m^4)	0.451
Momento de inercia a flexión lateral de los cajones laterales I_z (m^4)	8.404
Momento de inercia a torsión de los cajones laterales J (m^4)	1.039
Masa por unidad de longitud de los cajones laterales (T/m)	7.28
Momento de inercia polar por unidad de longitud de los cajones laterales (Tm^2/m)	590.34
Anchura entre cables (m)	52
Anchura total del tablero (m)	61.13

Tabla 7.2.1. Propiedades geométricas y mecánicas del puente de Messina

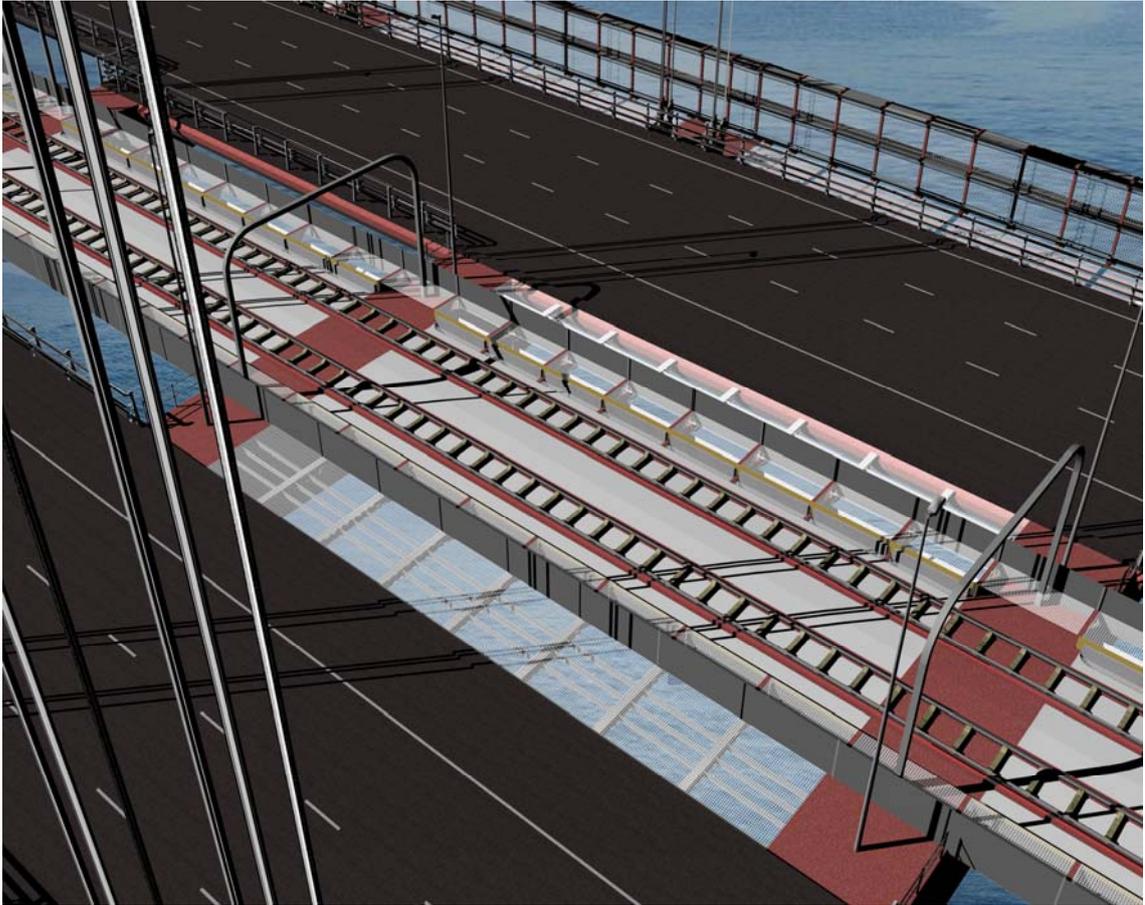


Figura 7.2.1(I). Sección transversal según el diseño de 2002.

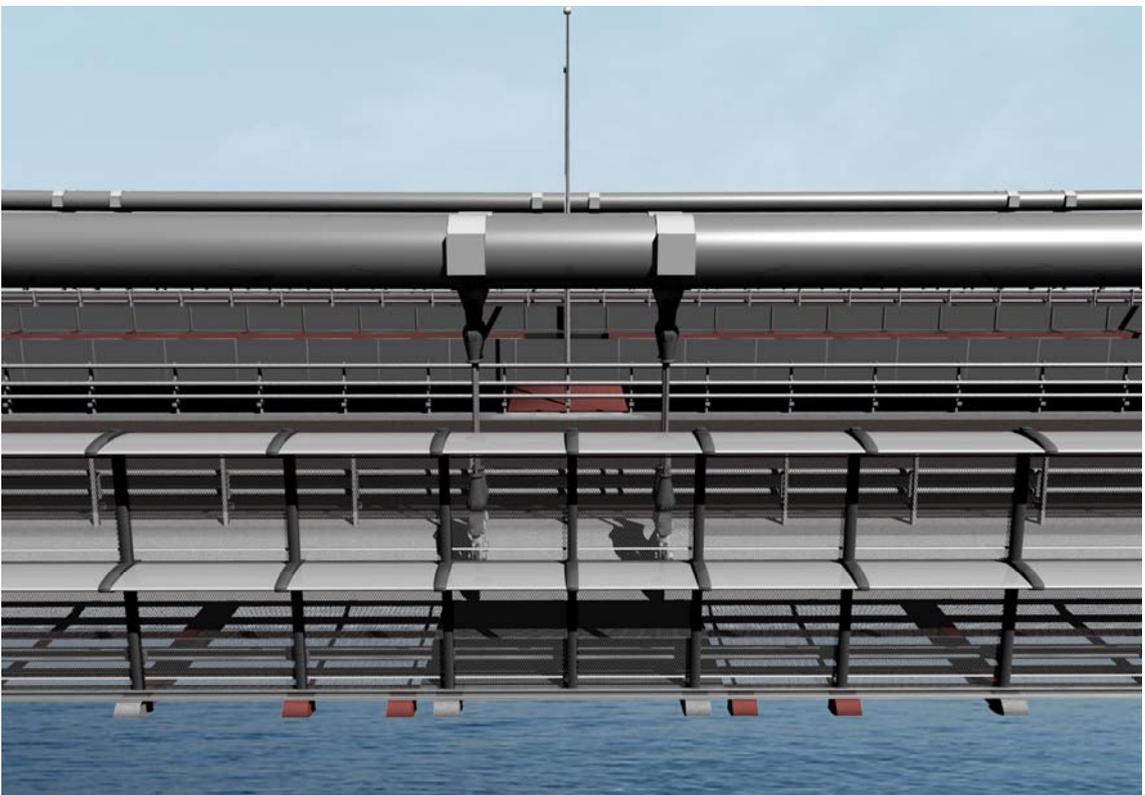


Figura 7.2.1(II). Detalle de los alerones.

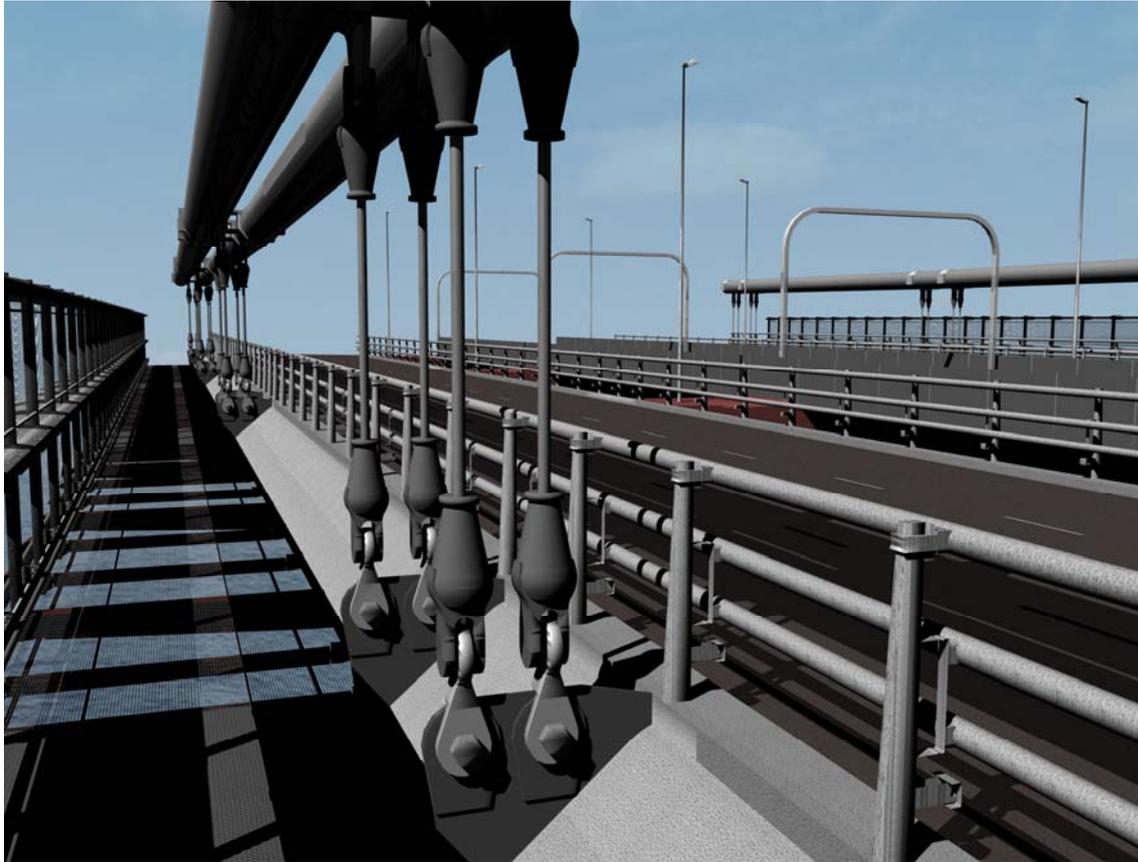


Figura 7.2.1(III). Vista virtual desde la pasarela de servicio del puente.

La apariencia y definición geométrica del puente de Messina en su conjunto pueden apreciarse en las imágenes que se muestran a continuación.

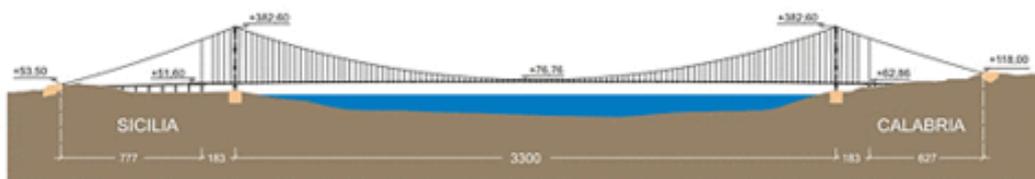


Figura 7.2.2(I). Perfil longitudinal del puente de Messina.



Figura 7.2.2(II). Imagen virtual del puente sobre el estrecho de Messina.



Figura 7.2.2(III). Detalle de las torres del puente de Messina.

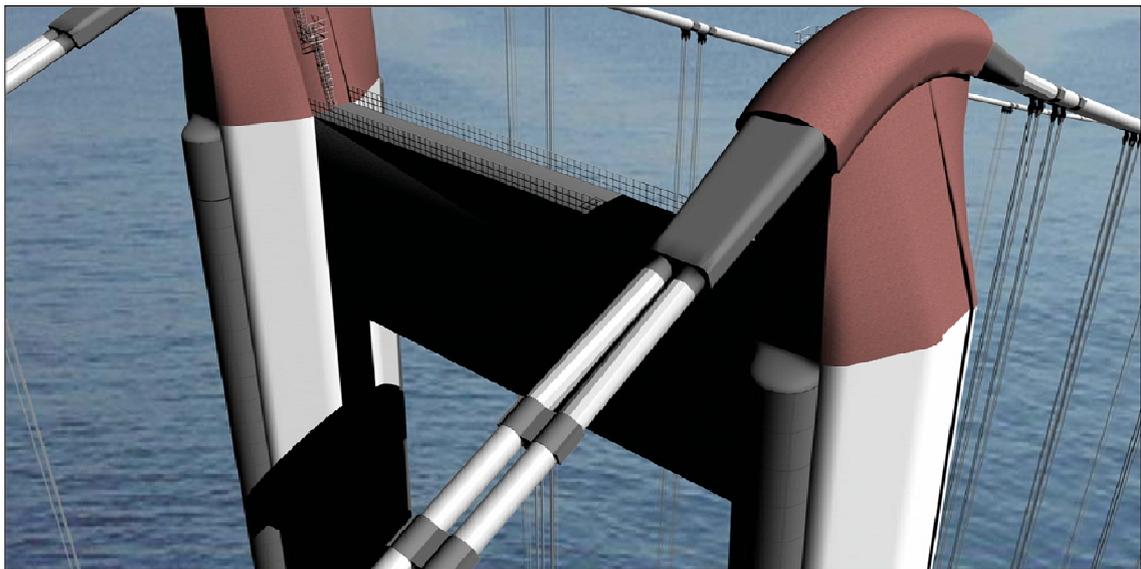


Figura 7.2.2(IV). Imagen virtual de la coronación de una de las torres del puente de Messina.

Los espesores de las secciones en cajón equivalentes a las secciones aerodinámicas que configuran el tablero del puente en el diseño inicial fueron obtenidos en el apartado 3 del capítulo 6. A continuación se muestran sendos esquemas con los resultados obtenidos.

- Cajón central

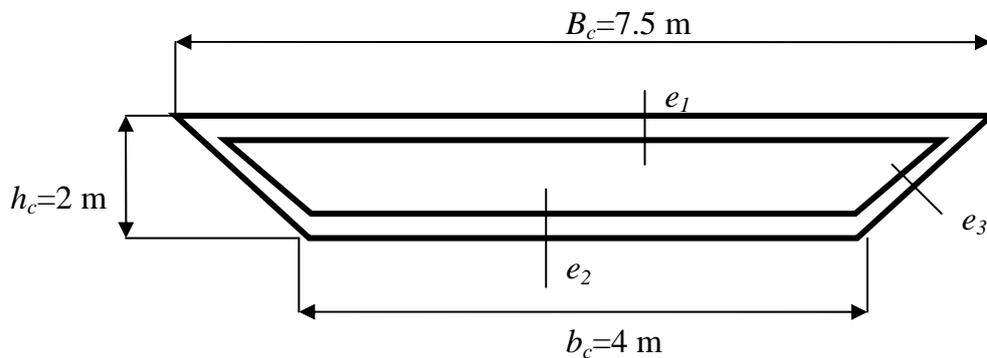


Figura.7.2.3 Sección en cajón equivalente al cajón central del puente de Messina.

$$e_1 = 2.068867 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$e_2 = 2.7881283 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$e_3 = 2.8552402 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Con los espesores obtenidos y las dimensiones exteriores del cajón indicadas en la figura 7.2.3, se obtienen las siguientes propiedades mecánicas:

$$I_y = 0.303263 \text{ m}^4$$

$$I_z = 2.120037 \text{ m}^4$$

$$J = 0.736781 \text{ m}^4$$

$$A = 0.415096 \text{ m}^2$$

- Cajones laterales

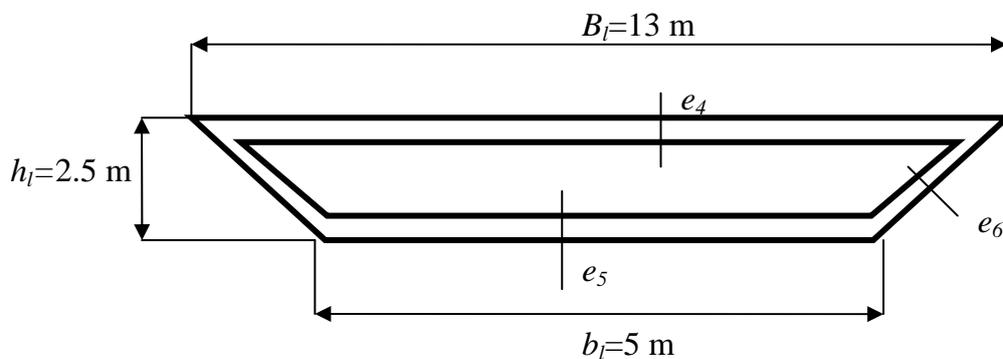


Figura.7.2.4 Sección en cajón equivalente a cada cajón lateral del puente de Messina.

$$e_4 = 1.0574375 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$e_5 = 1.3173586 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$e_6 = 3.1824701 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Con los espesores obtenidos y las dimensiones exteriores del cajón indicadas en la figura 7.2.4, se obtienen las siguientes propiedades mecánicas para cada uno de los cajones laterales:

$$I_y = 0.451102 \text{ m}^4$$

$$I_z = 8.403938 \text{ m}^4$$

$$J = 1.039133 \text{ m}^4$$

$$A = 0.500815 \text{ m}^2$$

En la figura 7.2.5 se establece una comparación gráfica entre la sección transversal real del puente y la sección transversal de cálculo equivalente.

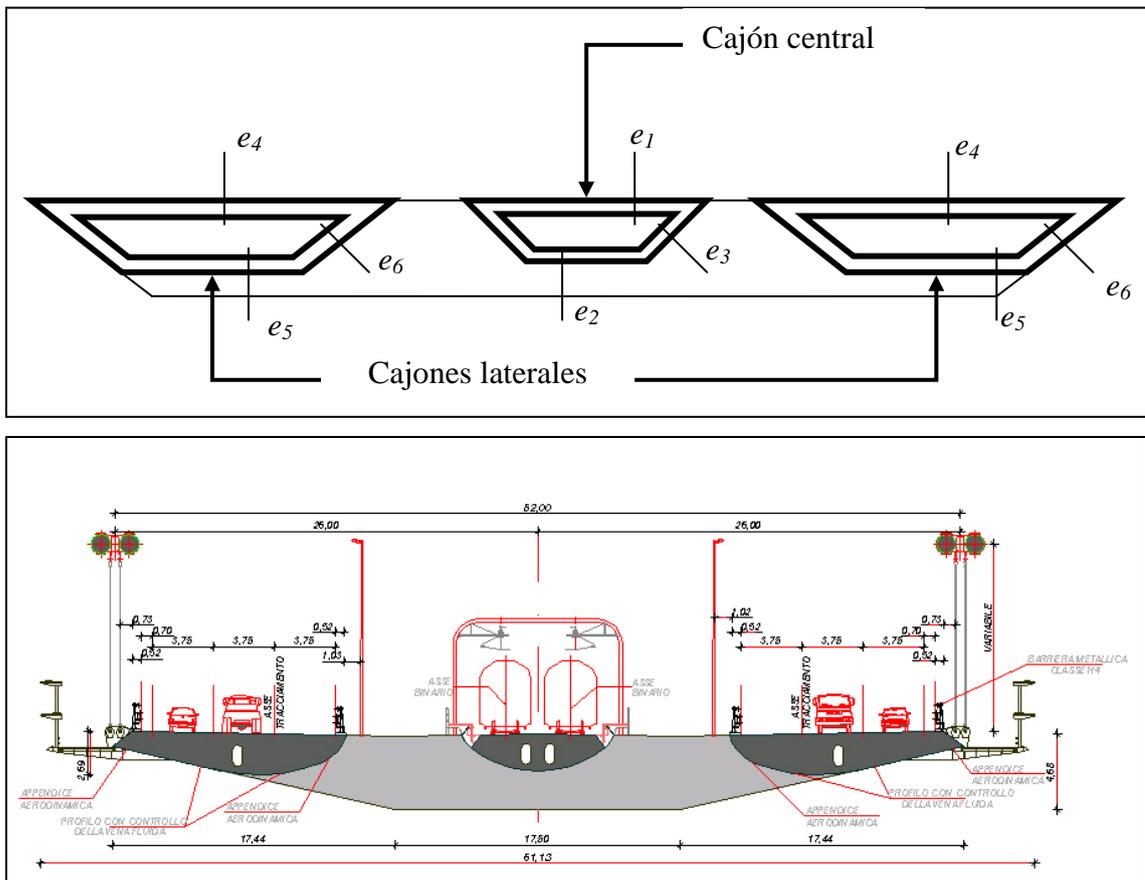


Figura 7.2.5. Sección de cálculo y sección real del puente de Messina.

7.2.1 Formulación del problema de optimización

A continuación, se formula detalladamente el problema de optimización planteado para el puente sobre el estrecho de Messina, en el que se pretende minimizar el área de la sección transversal del tablero satisfaciendo, a la vez, condiciones en movimientos y aeroelásticas. Las variables de diseño consideradas son los espesores de las chapas que conforman los dos tipos de secciones en cajón adoptadas al definir la geometría del tablero del puente (véanse las figuras 7.2.3 y 7.2.4).

$$\begin{aligned} \min F = A = A^c + 2A^l = & B_c h_c - \left(\frac{B_c - b_c}{2} \right) h_c - \frac{(h_c - e_1 - e_2)^2 (B_c - b_c)}{2h_c} - \\ & - (h_c - e_1 - e_2) \left\{ B_c - \frac{1}{h_c} \left[(h_c - e_2)(b_c - h_c) + e_3 \sqrt{(B_c - b_c)^2 + 4h_c^2} \right] \right\} + \quad (7.2.1) \\ +2 & \left\{ B_l h_l - \left(\frac{B_l - b_l}{2} \right) h_l - \frac{(h_l - e_4 - e_5)^2 (B_l - b_l)}{2h_l} - \right. \\ & \left. - (h_l - e_4 - e_5) \left\{ B_l - \frac{1}{h_l} \left[(h_l - e_5)(b_l - h_l) + e_6 \sqrt{(B_l - b_l)^2 + 4h_l^2} \right] \right\} \right\} \end{aligned}$$

Sujeto a las siguientes condiciones:

$$0.003 \text{ m} \leq e_i \quad (7.2.2)$$

$$g_1 : \frac{U_{f,cr}}{U_f} - 1 \leq 0 \quad \text{con } U_{f,cr} = 75 \text{ m/s} \quad (7.2.3)$$

$$g_2 : \frac{w_c}{w_{c,max}} - 1 \leq 0 \quad \text{con } w_{c,max} = \frac{3l}{1000} = 9.9 \text{ m}; l=3300 \text{ m} \quad (7.2.4)$$

Merece la pena comentar algunos aspectos relacionados con la formulación del problema que acaba de ser presentada. La función objetivo es el área total de la sección transversal del tablero, expresada como la suma del área del cajón central más el área de los dos cajones laterales. La función objetivo se ha escrito finalmente en función de las doce dimensiones geométricas fundamentales que son las seis longitudes que definen la

geometría perimetral de los cajones y los seis espesores de las chapas que los conforman, los cuales constituyen las variables de diseño.

El límite inferior de 3 mm establecido para los espesores tiene por objeto el impedir que se obtengan espesores tan pequeños que no puedan ser ejecutados con los medios materiales habitualmente empleados en la construcción de este tipo de obras.

En relación con la primera de las condiciones de comportamiento, matemáticamente se establece que la velocidad de flameo U_f debe ser superior a la velocidad de flameo mínima admisible de 75 m/s, establecida en las condiciones técnicas del concurso de proyecto y obra convocado por la Sociedad Pública Stretto di Messina en 2004.

Finalmente, como segunda condición de comportamiento se ha establecido que la flecha en el centro del vano principal del tablero, cuando actúa el peso propio junto con las sobrecargas de uso w_c debe ser inferior a la flecha máxima admisible que es de 3/1000 de la longitud del vano principal del puente. Las sobrecargas de uso consideradas en el problema han sido establecidas tomando como base el pliego de condiciones^[P3] del concurso para el proyecto y construcción del puente y la normativa española^[M1]:

- Sobrecarga de uso de 4 kN/m² actuando simultáneamente sobre los tres cajones del tablero.
- Dos sobrecargas lineales de 80 kN/m actuando a lo largo de 720 m de longitud cada una, separadas entre sí otros 720 m y aplicadas en el centro del vano principal del cajón central.
- Tren de cargas de 60 toneladas actuando en el centro del vano principal.

El problema general de optimización así planteado para el puente sobre el estrecho de Messina puede desembocar en tres problemas concretos de diseño óptimo, según las variables de diseño que se consideren.

- Problema C: las variables de diseño consideradas son los espesores del cajón central e_1 , e_2 y e_3 , manteniendo el resto de los espesores y dimensiones geométricas el valor correspondiente al diseño inicial. Se trata por tanto de un problema de optimización del

área de la sección transversal del tablero del puente, en el que los cajones laterales permanecen invariables, manteniendo por tanto fijo su diseño inicial.

- Problema L: las variables de diseño consideradas en este caso son los espesores de los cajones laterales del tablero e_4 , e_5 , y e_6 , manteniéndose el resto de dimensiones geométricas y espesores invariables. En este segundo problema es el cajón central el que conserva su diseño inicial, modificándose los espesores de los cajones laterales hasta obtener el área mínima de la sección transversal del tablero del puente, compatible con las condiciones de diseño y comportamiento impuestas.
- Problema CL: en este caso se consideran seis variables de diseño que son los espesores tanto del cajón central como de los laterales e_1 , e_2 , e_3 , e_4 , e_5 y e_6 . Este tercer problema es el más complejo y el que presenta mayores exigencias desde el punto de vista computacional, ya que el número de variables de diseño se ha duplicado respecto a los dos problemas planteados anteriormente.

En los apartados siguientes se muestran los resultados obtenidos al resolver los tres problemas de diseño óptimo del puente sobre el estrecho de Messina que acaban de ser enunciados.

7.2.2 Problema C: Optimización considerando como variables de diseño los espesores del cajón central

Como ya se ha explicado con anterioridad, en este problema se asume que los cajones laterales conservan en todo momento el diseño inicial, minimizando el área de la sección transversal del tablero en su conjunto, modificando los espesores de las chapas que conforman el cajón central.

Para resolver este problema de optimización se ha empleado el código DIOPTICA, cuyo funcionamiento y capacidades han sido explicados en profundidad en el capítulo 5 del presente trabajo de investigación. La formulación del problema de optimización ha sido explicada en el apartado anterior, y como se indicó, se han considerado condiciones de comportamiento de tipo aeroelástico y en movimientos. El algoritmo de optimización

empleado ha sido el de las direcciones eficientes modificado, véase Vanderplaats^[V1]. Los cálculos han sido llevados a cabo en un cluster de ordenadores personales conectados en red, aplicando técnicas de programación en paralelo como se explica en Nieto^[N1]. En las siguientes figuras y tablas se presentan los resultados obtenidos empleando el programa DIOPTICA.

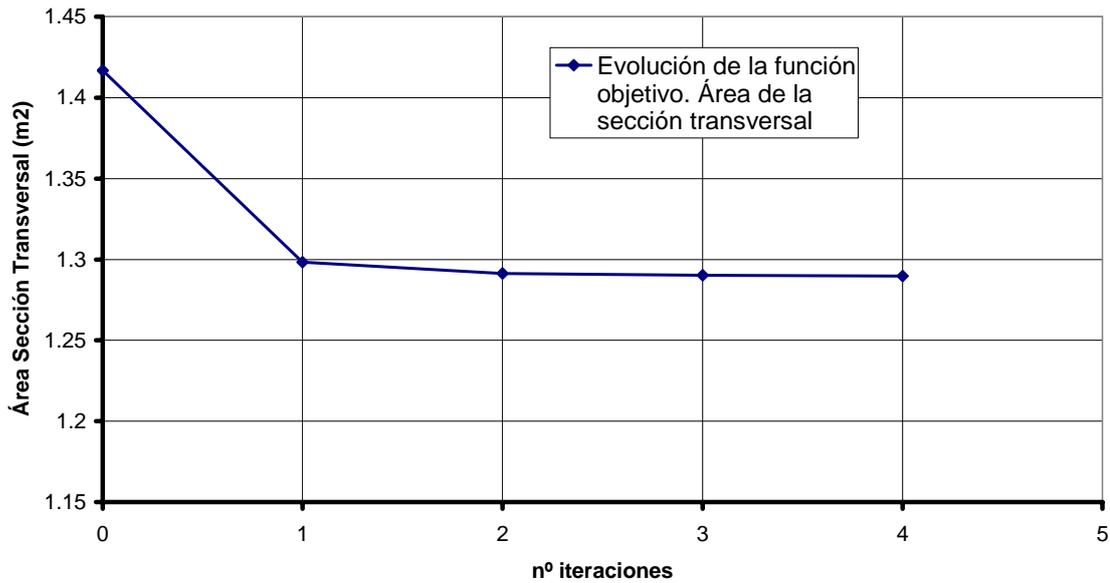


Figura 7.2.6. Problema C, evolución de la función objetivo.

El área total de la sección transversal en el diseño inicial, suma de la correspondiente al cajón central y a los laterales, es de 1.417 m^2 . Por otro lado, el área de la sección transversal optimizada es de 1.290 m^2 , lo que supone un ahorro del 8.96% en la cantidad de material empleado frente al diseño inicial. Sin embargo, si se presta atención exclusivamente al material del cajón central, ya que los cajones laterales no sufren alteración alguna, se parte de un área de 0.415 m^2 , alcanzándose al final del proceso de diseño óptimo un área de la sección transversal del cajón central de 0.288 m^2 , lo que representa una disminución en la superficie de ese cajón del 30.6% respecto a la superficie original. Se aprecia como el ahorro en materiales, y por consiguiente en costes de ejecución, es importante ya que el realizar el diseño del puente empleando técnicas de optimización permite disminuir en este caso casi un 10% la cantidad del acero utilizado en la construcción del tablero, al tiempo que se satisfacen las condiciones de diseño y comportamiento impuestas en la formulación del problema. En

otro orden de cosas cabe comentar que el número de iteraciones necesarias para alcanzar el diseño óptimo ha sido muy pequeño.

A continuación en la figura 7.2.7 se muestra la evolución de la velocidad de flameo del puente para cada iteración a lo largo del proceso de diseño óptimo.

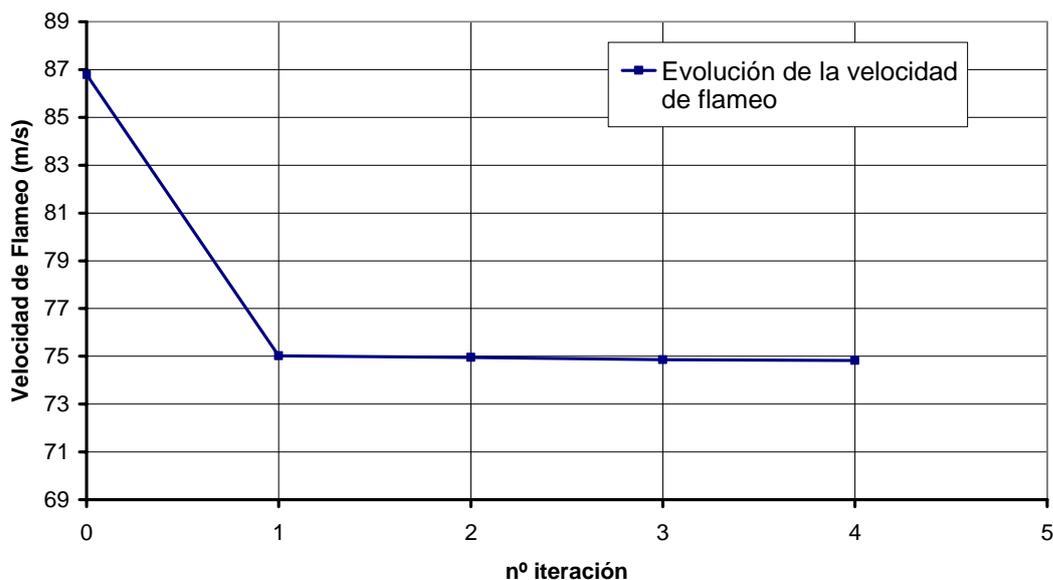


Figura 7.2.7. Problema C, evolución de la velocidad de flameo.

En la figura anterior se aprecia como la velocidad de flameo del puente para el diseño óptimo es levemente inferior a la velocidad mínima establecida en las condiciones del problema, que era de 75 m/s. En concreto, el valor de la velocidad crítica para el diseño óptimo es de 74.8265 m/s. Esta circunstancia es debida a que en las rutinas del programa de optimización utilizado ADS^[V2] se establece una pequeña tolerancia para discriminar la situación de activación o violación de una condición cuando ésta se trata de una desigualdad no lineal. El objeto de esta tolerancia es evitar la generación de errores numéricos por parte del algoritmo de optimización. En la figura 7.2.8 se muestra gráficamente el significado de la tolerancia a la que se ha hecho referencia.

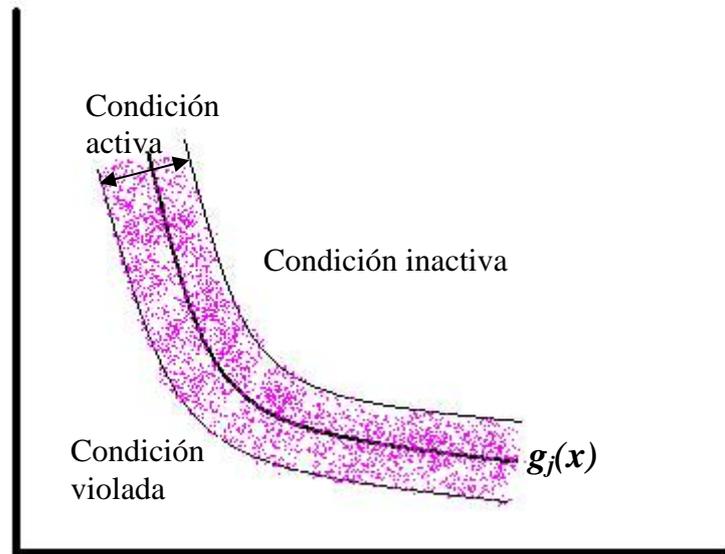


Figura 7.2.8. Tolerancias en la activación de las condiciones en el programa ADS.

En la figura 7.2.9 se muestra la evolución de las condiciones de comportamiento consideradas en el problema.

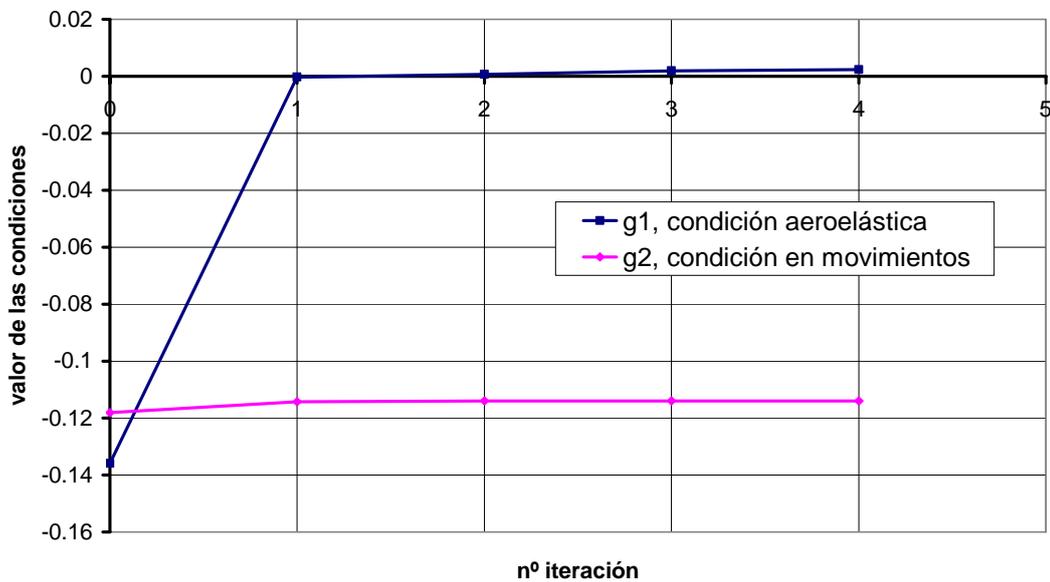


Figura 7.2.9. Problema C, evolución de las condiciones de comportamiento.

Se aprecia como la condición de tipo aeroelástico se hace activa en todas las iteraciones del proceso de optimización. El valor levemente mayor que cero de la condición g_1 es

debido a la tolerancia que establecen las subrutinas de ADS para definir la situación de activación o violación de la condición, tal y como se ha ilustrado en la figura 7.2.8. Por tanto, es el comportamiento aeroelástico del puente el que condiciona su diseño. La condición referente a los movimientos en centro de vano del tablero no se hace activa en ningún caso, quiere esto decir que criterios de limitación de movimientos más estrictos que el establecido también serían satisfechos.

En el gráfico mostrado en la figura 7.2.10 se presenta la evolución de los espesores de las chapas que conforman el cajón central del puente, es decir, las variables de diseño empleadas en el proceso de diseño óptimo. Además, en la tabla 7.2.2 se indica cómo ha sido la variación de esos espesores entre el diseño inicial y el óptimo.

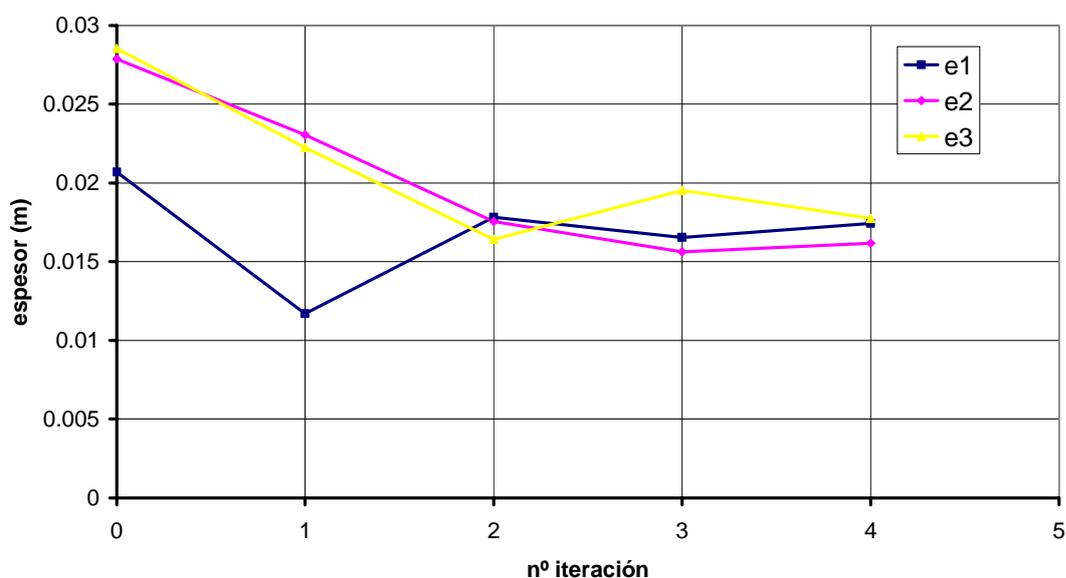


Figura 7.2.10. Problema C, evolución de los espesores del cajón central.

	Diseño Inicial (m)	Diseño Óptimo (m)	% Variación
e_1	0.02068867	0.01743807	-15.71
e_2	0.02788813	0.0161712	-42.01
e_3	0.0285524	0.01774415	-37.85

Tabla 7.2.2. Problema C, evolución de los espesores del cajón central

De la tabla anterior se infiere que las mayores modificaciones se producen para los espesores de la chapa inferior y las laterales. Además, los valores de los tres espesores

son muy similares ya que los tres están próximos al centímetro y medio. Esta situación contrasta con el diseño inicial en el que los espesores no son tan parecidos.

Con el fin de entender mejor el comportamiento de la estructura, se presenta en la figura 7.2.11 la evolución, a lo largo de la optimización, de las propiedades mecánicas del cajón central del tablero del puente sobre el estrecho de Messina. Puede apreciarse como todas las propiedades mecánicas disminuyen al avanzar el proceso de diseño óptimo, particularmente la inercia a flexión lateral.

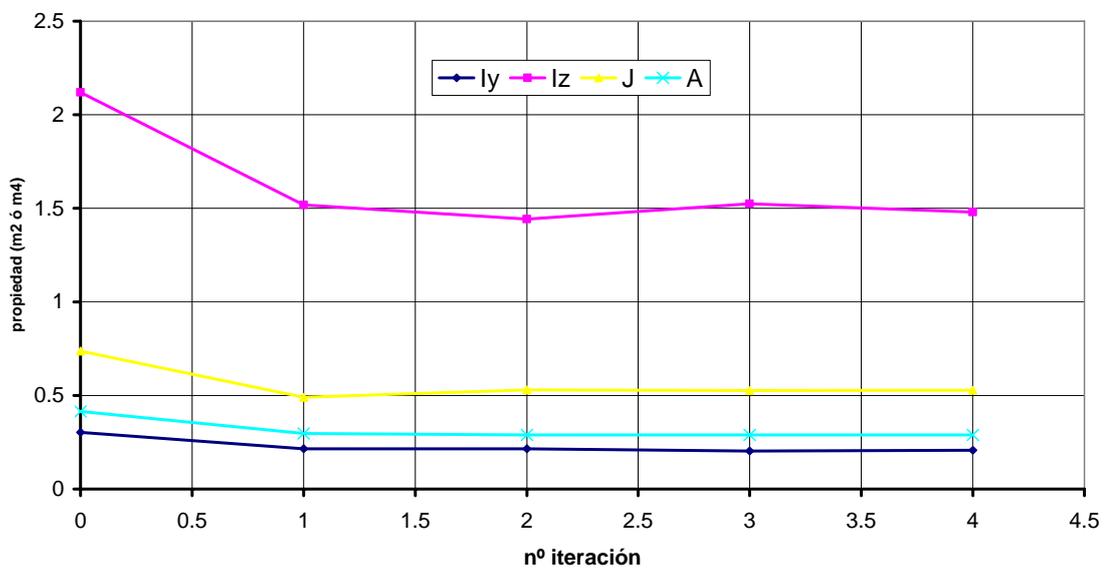


Figura 7.2.11. Problema C, evolución de las propiedades mecánicas del cajón central.

En la tabla 7.2.3 se comparan las propiedades mecánicas del cajón central correspondientes al diseño inicial y al óptimo. Se puede comprobar como todas las propiedades mecánicas experimentan una reducción similar, del orden del 30%.

	Diseño Inicial	Diseño Óptimo	% Variación
I_y (m ⁴)	0.303263	0.207372	-31.62
I_z (m ⁴)	2.120037	1.479248	-30.23
J (m ⁴)	0.736781	0.527903	-28.35
A (m ²)	0.415096	0.28816	-30.58

Tabla 7.2.3. Problema C, evolución de las propiedades mecánicas del cajón central.

7.2.3 Problema L: Optimización considerando como variables de diseño los espesores de los cajones laterales

En este segundo problema se minimiza el área de la sección transversal satisfaciendo las condiciones de diseño indicadas en 7.2.1, considerando como variables de diseño los espesores de los cajones laterales del puente sobre el estrecho de Messina. Se asume que el tablero es simétrico, es decir, los dos tableros laterales son idénticos en todo momento, por lo que tan solo se consideran tres variables de diseño, que son los espesores e_4 , e_5 y e_6 . Como en el ejemplo anterior, el problema de optimización ha sido resuelto empleando el programa DIOPTICA.

En la figura 7.2.12 se muestra la evolución de la función objetivo, es decir, el área de la sección transversal del tablero para el problema L.

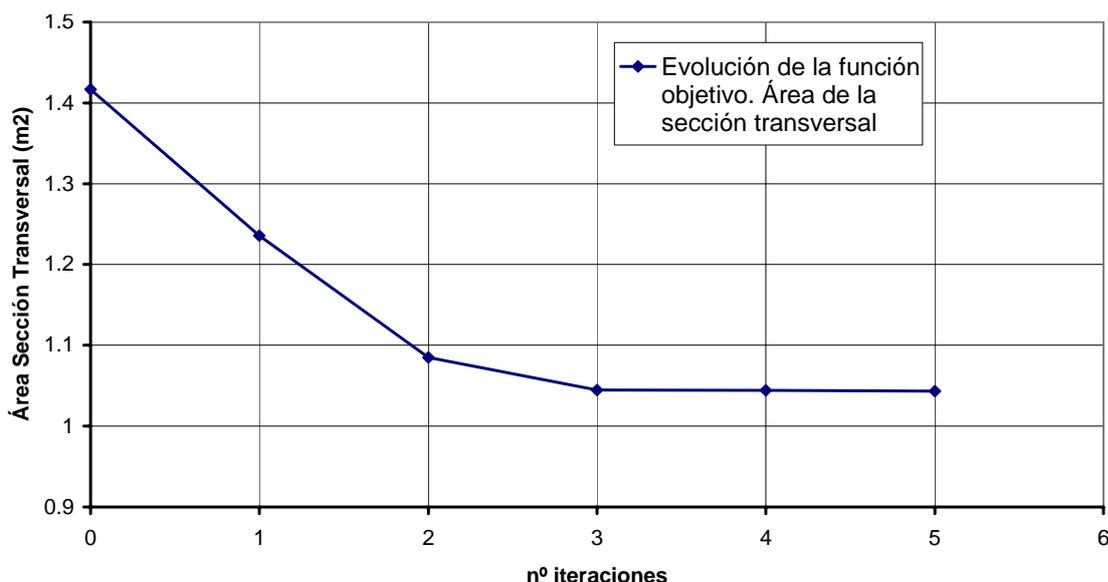


Figura.7.2.12. Problema L, evolución de la función objetivo.

El área de la sección transversal óptima es de 1.043 m^2 , frente a los 1.417 m^2 del diseño inicial. Esto supone un ahorro del material necesario para ejecutar el tablero del puente sobre el estrecho de Messina del 26.39%. El área correspondiente a los cajones laterales en el diseño inicial es de 1 m^2 , siendo en el diseño óptimo de 0.628 m^2 . La disminución del material correspondiente es del 37.18%. Al margen de las interpretaciones técnicas, la trascendencia económica es evidente: el uso de técnicas de optimización permite

ahorrar una cuarta parte del material inicialmente previsto para la ejecución del tablero del puente. Se observa también, que el resolver el problema de optimización planteado considerando como variables de diseño los espesores de los cajones laterales e_4 , e_5 y e_6 en lugar de los del cajón central e_1 , e_2 y e_3 permite obtener un diseño óptimo con un menor valor de la función objetivo, y en consecuencia, más interesante desde el punto de vista económico, al tiempo que el esfuerzo de cálculo es muy parecido.

En la figura 7.2.13 se presenta la evolución de la velocidad de flameo de la estructura para los diseños correspondientes a cada una de las iteraciones del proceso de diseño óptimo. Como en el problema C, la velocidad de flameo es levemente inferior a los 75 m/s impuestos en las condiciones de comportamiento, debido al motivo explicado en el apartado anterior. El valor de la velocidad crítica del diseño óptimo es 74.7635 m/s.

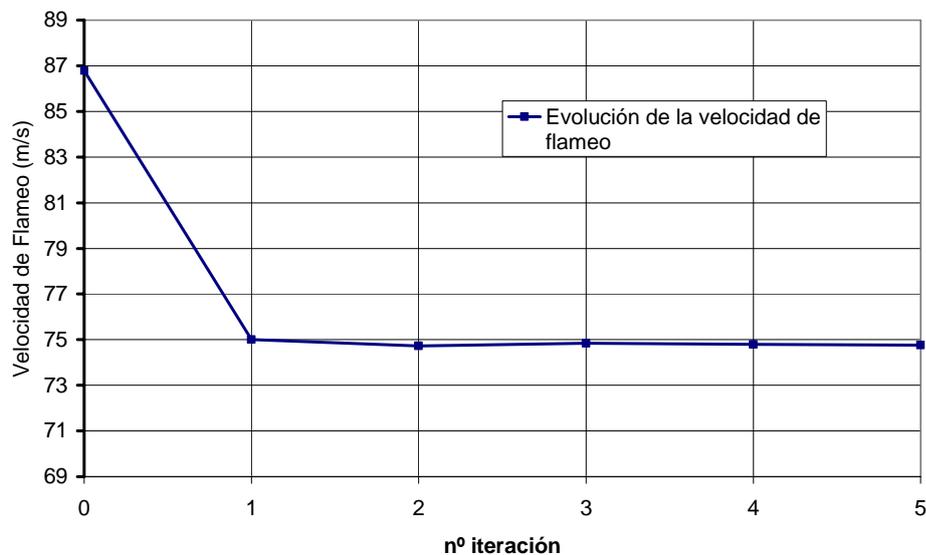


Figura 7.2.13. Problema L, evolución de la velocidad de flameo.

Por otro lado, en la figura 7.2.14, se representa la evolución de las condiciones de comportamiento a lo largo del proceso de diseño óptimo. Tal y como ha sucedido en el problema C, es la condición aeroelástica g_I la que ha sido activa en todas las iteraciones del proceso de diseño óptimo.

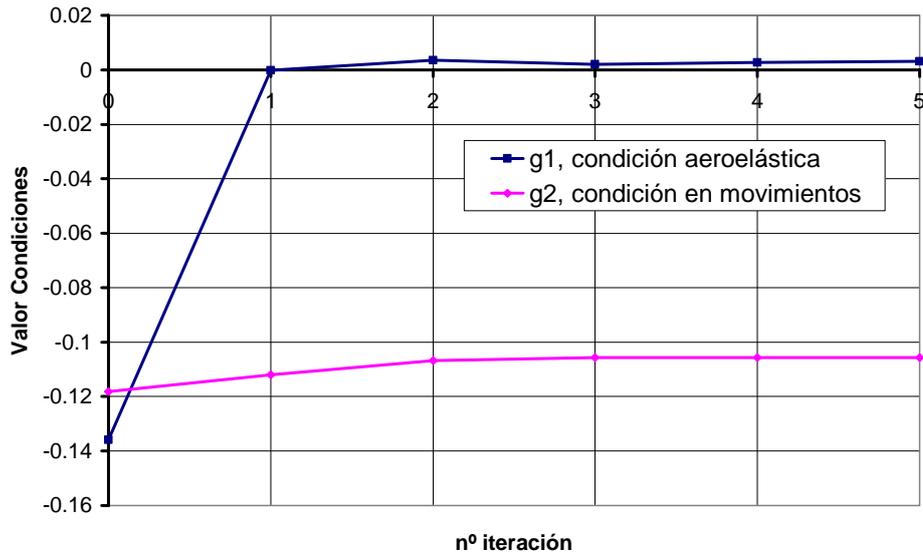


Figura 7.2.14. Problema L, evolución de las condiciones de comportamiento.

En la tabla 7.2.4 se presentan los cambios experimentados por los espesores e_4 , e_5 y e_6 entre el diseño inicial y el óptimo, indicándose también el porcentaje de variación que han experimentado.

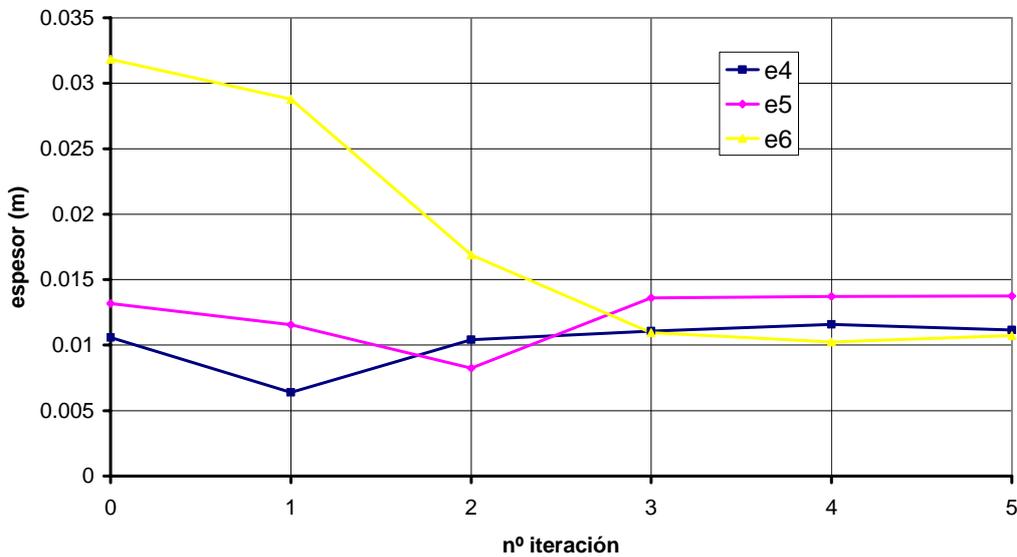


Figura 7.2.15. Problema L, evolución de los espesores de los cajones laterales.

	Diseño Inicial (m)	Diseño Óptimo (m)	% Variación
e_4	0.0105744	0.0111624	5.56
e_5	0.0131736	0.0137397	4.30
e_6	0.0318247	0.0107284	-66.29

Tabla 7.2.4. Problema L, evolución de los espesores de los cajones laterales.

En el caso estudiado los espesores en el diseño óptimo tienen un valor similar, un poco superior a un centímetro. Sin embargo, las variaciones que han experimentado son muy diferentes a las que sufrían los espesores del cajón central en el problema C. En este problema L, los espesores de las chapas superior e inferior han aumentado aproximadamente un 5%, sin embargo, el espesor de las chapas laterales ha disminuido muy fuertemente, en concreto, más de un 66%. En consecuencia, se ha disminuido el área de la sección transversal del tablero, incluso con incrementos en los valores iniciales de dos de las variables de diseño consideradas.

Para completar la información presentada, se muestra en la figura 7.2.16 cómo han evolucionado las propiedades mecánicas de los cajones laterales en las sucesivas iteraciones del proceso de diseño óptimo. Igualmente, en la tabla 7.2.5 se listan los valores de esas propiedades mecánicas en el diseño inicial y en el óptimo, junto con el tanto por ciento de variación que han sufrido.

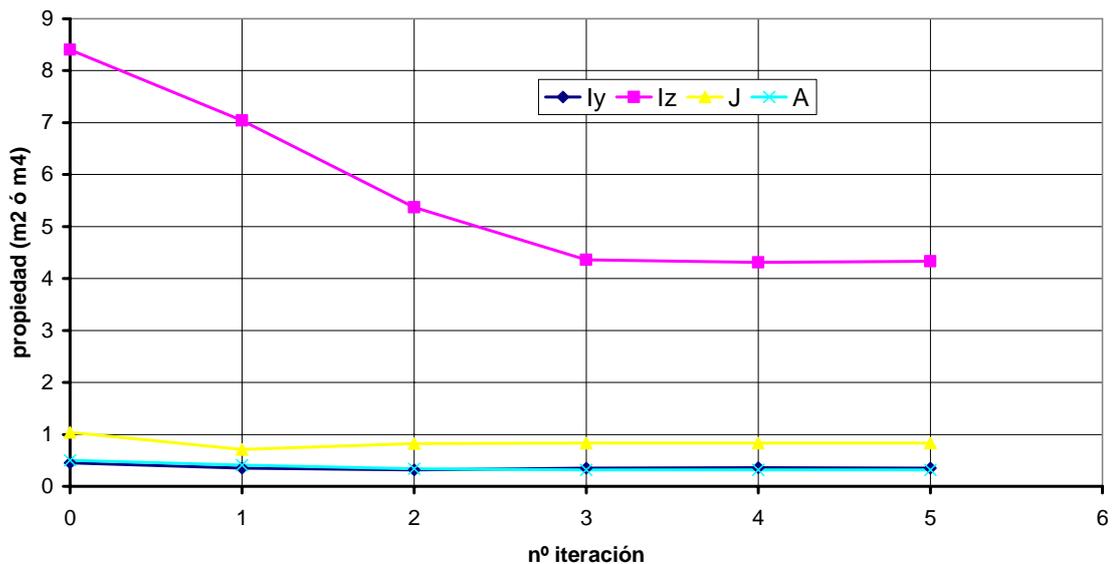


Figura 7.2.16. Problema L, evolución de las propiedades mecánicas de los cajones laterales.

	Diseño Inicial	Diseño Óptimo	% Variación
I_y (m ⁴)	0.451102	0.353654	-21.60
I_z (m ⁴)	8.403938	4.333078	-48.44
J (m ⁴)	1.039133	0.829255	-20.20
A (m ²)	0.500815	0.314115	-37.28

Tabla 7.2.5. Problema L, evolución de las propiedades mecánicas de los cajones laterales.

En la tabla anterior se aprecia como las cuatro propiedades disminuyen respecto a los valores establecidos en el diseño inicial. La propiedad mecánica que ha experimentado una mayor variación es la inercia a flexión lateral, circunstancia esta que concuerda con la fuerte disminución del espesor de las chapas laterales de la sección transversal. El resto de propiedades también disminuyen, pero en un porcentaje más modesto.

7.2.4 Problema CL: Optimización considerando como variables de diseño los espesores del cajón central y de los cajones laterales

En este tercer problema, se acomete el diseño óptimo de la sección transversal del puente sobre el estrecho de Messina, considerando como variables de diseño los seis espesores de las chapas que conforman los cajones central y laterales. Como en los ejemplos anteriores, las dimensiones perimetrales de los cajones se consideran invariables y la sección transversal mantiene la propiedad de simetría. Este es el problema de optimización más complejo de los tres planteados, ya que se duplica el número de variables de diseño y en consecuencia, el esfuerzo de cálculo y los tiempos de computación aumentan muy significativamente. Por otro lado, este problema permite acometer la optimización de la sección transversal del puente como un conjunto, poniendo de manifiesto las bondades de las técnicas de diseño óptimo.

En primer lugar se presenta la evolución de la función objetivo del problema, es decir, el área de la sección transversal del tablero, a lo largo del proceso de optimización. Es destacable el incremento en el número de iteraciones requeridas para alcanzar el óptimo frente a los dos problemas resueltos anteriormente. Esto muestra claramente el importante coste computacional del problema, el cual presentaría dificultades mucho mayores sin el empleo de técnicas de programación distribuida.

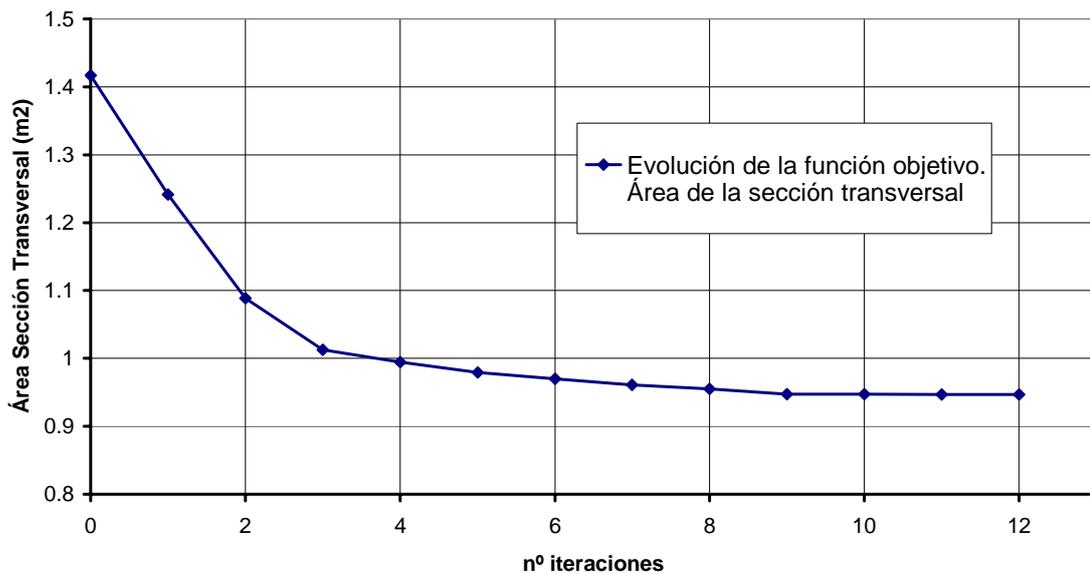


Figura.7.2.17. Problema CL, evolución de la función objetivo.

El área de la sección transversal en el diseño inicial es de 1.417 m^2 , al igual que en los restantes problemas, mientras que el área correspondiente al diseño óptimo es en este caso de 0.947 m^2 . Esto supone una disminución en el material empleado para la construcción del tablero del 33.17%, es decir, técnicamente es posible disminuir los costes de los materiales del tablero en una tercera parte, lo que supone una evidente ventaja competitiva en un hipotético concurso para la ejecución de este puente. Una circunstancia que debe tenerse en cuenta es que el área de la sección transversal de cada uno de los cajones no disminuye en la misma proporción que el área de la sección transversal del puente en su conjunto. En la figura 7.2.18 se muestra cómo evoluciona el área de la sección transversal de los cajones que constituyen el tablero del puente durante el proceso de optimización.

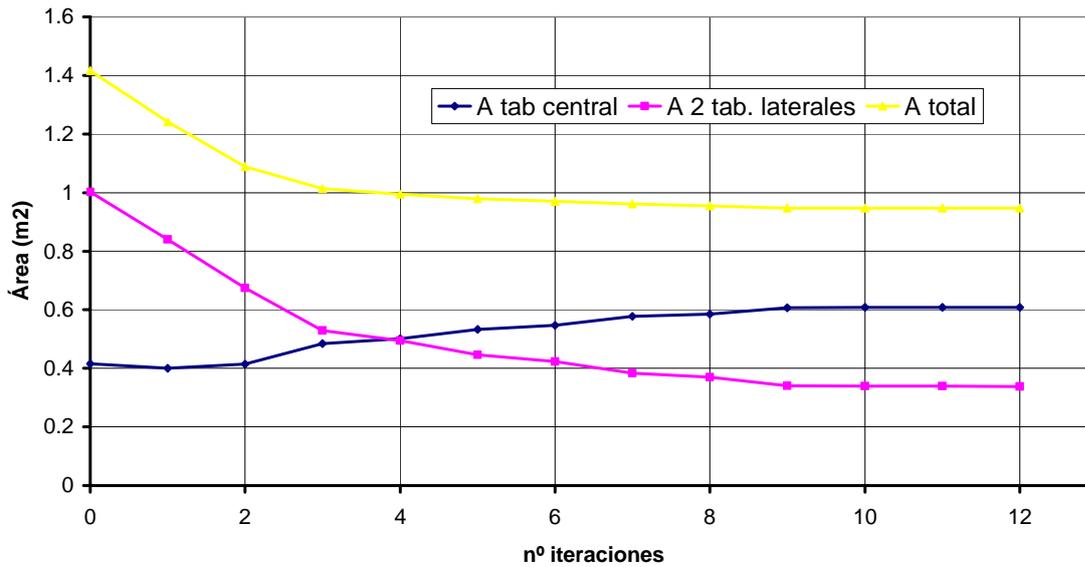


Figura 7.2.18. Problema CL, evolución del área de los cajones del puente de Mesina.

La superficie del cajón central en el diseño inicial es de 0.415 m^2 , siendo al final del proceso de optimización de 0.608 m^2 , lo que significa un incremento del 46.5% respecto al valor inicial. Sin embargo, el área correspondiente a los cajones laterales, que en el diseño inicial es de 1 m^2 , en el óptimo pasa a ser de 0.338 m^2 , lo que representa una disminución del 66.18%, que es un valor ciertamente muy importante. Se aprecia que empleando técnicas de diseño óptimo se logra, no sólo disminuir el área de la sección transversal del puente, si no también redistribuirla. Efectivamente, se incrementa la masa del tablero en la zona central, disminuyendo fuertemente en los laterales de la sección transversal.

Como en los dos problemas anteriores, se muestra en la figura 7.2.19 la evolución de la velocidad de flameo a lo largo del proceso de diseño óptimo. Esa velocidad se ha mantenido durante todo el proceso en el entorno de los 75 m/s . La velocidad crítica de flameo obtenida para el diseño óptimo ha sido de 74.705 m/s .

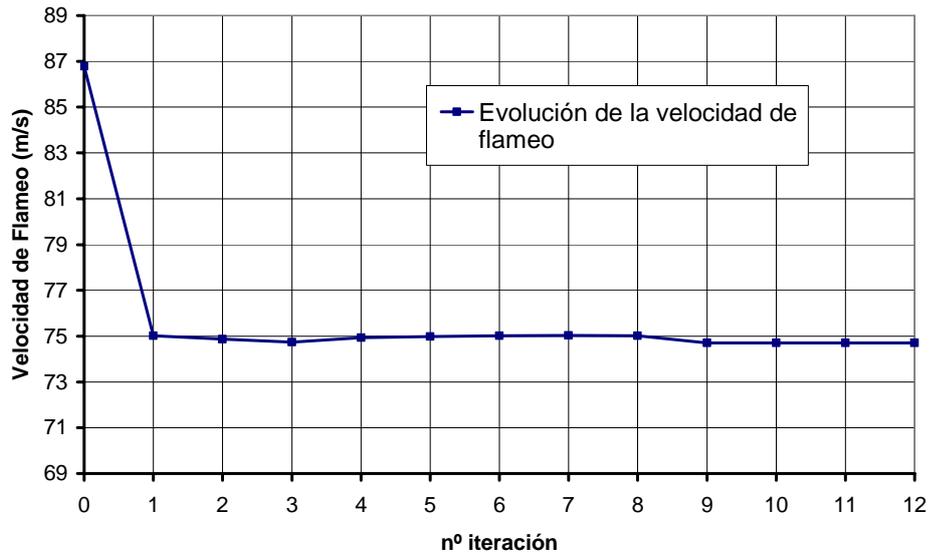


Figura 7.2.19. Problema CL, evolución de la velocidad de flameo.

Por otro lado, en la figura 7.2.20 se presenta la evolución de las condiciones de comportamiento consideradas en el problema de optimización. Como ya ha sucedido en los problemas C y L, es la condición aeroelástica la que ha sido activa en todas las iteraciones.

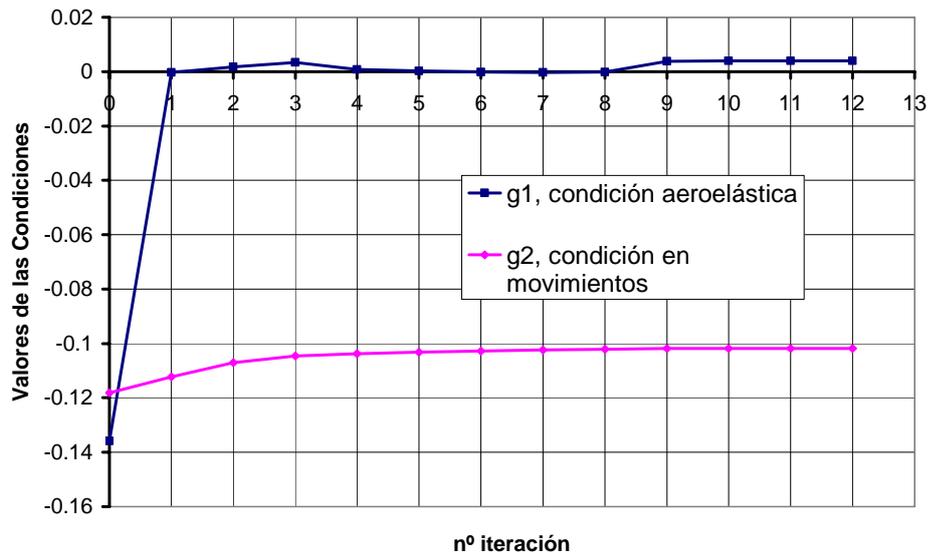


Figura 7.2.20. Problema CL, evolución de las condiciones de comportamiento.

Es de particular importancia el conocer el modo en que se han producido las alteraciones en los espesores a lo largo del proceso de diseño óptimo. En la figura 7.2.21 se muestra el gráfico en el que queda recogida esa información. De la misma manera, en la tabla 7.2.6 se recogen los valores de las seis variables de diseño iniciales, y una vez alcanzado el óptimo, junto con los porcentajes de variación correspondientes.

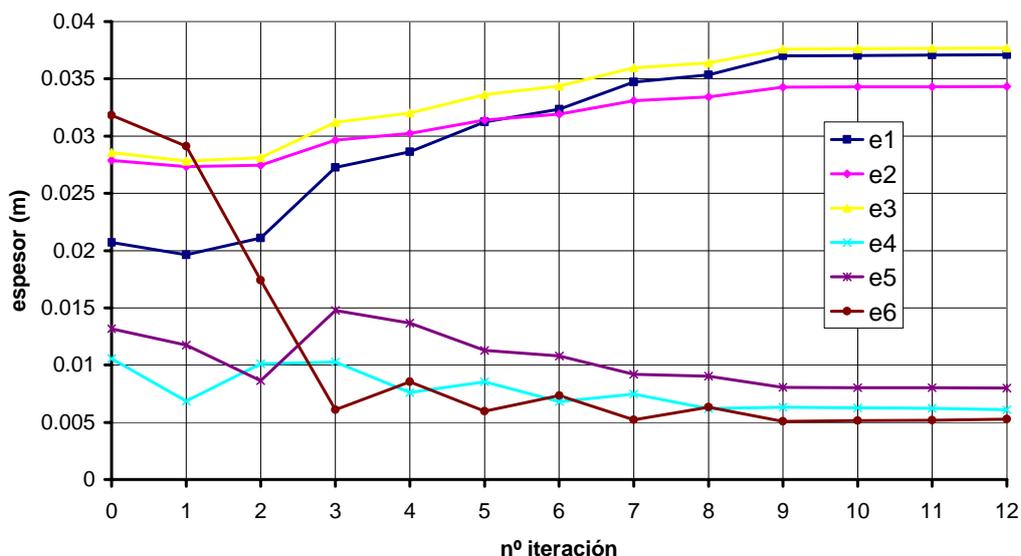


Figura 7.2.21. Problema CL, evolución de los espesores de los cajones central y laterales.

	Diseño Inicial (m)	Diseño Óptimo (m)	% Variación
e_1	0.0206887	0.0371048	79.35
e_2	0.0278881	0.0343161	23.05
e_3	0.0285524	0.0376799	31.97
e_4	0.0105744	0.0061111	-42.21
e_5	0.0131736	0.0080028	-39.25
e_6	0.0318247	0.0052853	-83.39

Tabla 7.2.6. Problema CL, evolución de los espesores del cajón central y los cajones laterales.

Se puede observar como los espesores correspondientes al cajón central han crecido, alcanzando los tres un valor en el entorno de los 3.5 cm. En el caso de los espesores de los cajones laterales la evolución ha sido la inversa. Los espesores han disminuido hasta situarse en valores en el entorno de los 7 mm. Las mayores variaciones porcentuales corresponden a los espesores de la chapa superior del cajón central y las chapas laterales de los cajones laterales.

Seguidamente se muestra cómo han variado las propiedades mecánicas del cajón central y de uno de los laterales a lo largo del proceso de diseño óptimo. En la figura 7.2.22 se presenta la evolución de las propiedades del cajón central, mientras que en la figura 7.2.23 se detalla la información referida a las propiedades mecánicas de cada uno de los cajones laterales.

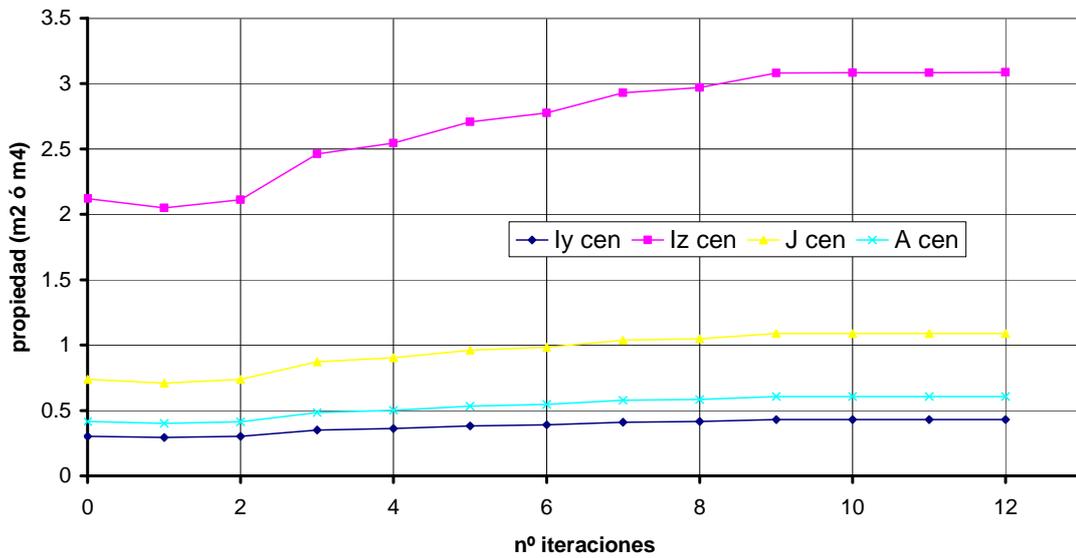


Figura 7.2.22. Problema CL, evolución de las propiedades mecánicas del cajón central.

En esta figura se aprecia el crecimiento sostenido de las propiedades mecánicas del cajón central durante el proceso de optimización.

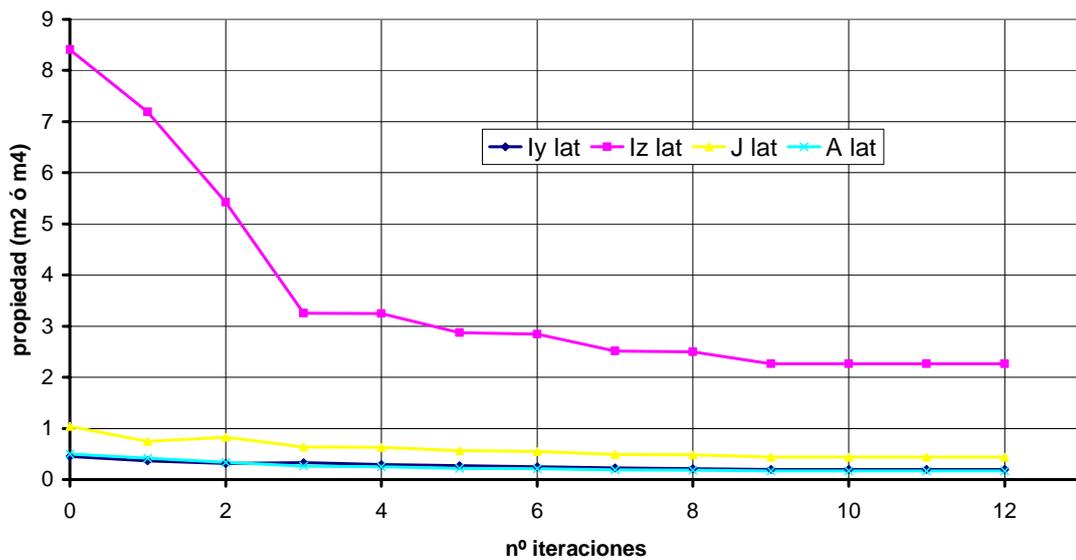


Figura 7.2.23. Problema CL, evolución de las propiedades mecánicas de los cajones laterales.

En el caso de las propiedades mecánicas de uno de los cajones laterales, la evolución es inversa a la del cajón central, ya que los valores disminuyen apreciablemente durante la optimización.

Para concluir, en la tabla 7.2.7 se presentan los valores de las propiedades mecánicas del cajón central y de uno de los laterales en el diseño inicial y en el óptimo, así como el porcentaje de variación de los mismos.

	Diseño Inicial	Diseño Óptimo	% Variación
I_y^c (m ⁴)	0.303263	0.430101	41.82
I_z^c (m ⁴)	2.120037	3.087907	45.65
J^c (m ⁴)	0.736781	1.089829	47.92
A^c (m ²)	0.415096	0.608495	46.59
I_y^l (m ⁴)	0.451102	0.197017	-56.33
I_z^l (m ⁴)	8.403938	2.268125	-73.01
J^l (m ⁴)	1.039133	0.442976	-57.37
A^l (m ²)	0.500815	0.169081	-66.24

Tabla 7.2.7. Problema CL, evolución de las propiedades mecánicas del cajón central y de los cajones laterales.

Se aprecia como las propiedades mecánicas del cajón central han experimentado un aumento importante, al tiempo que las de los cajones laterales han disminuido de modo todavía más notable, obteniéndose así una sección transversal del tablero con la mínima superficie posible compatible con las condiciones de diseño y comportamiento impuestas.

Si se pasa revista a los resultados obtenidos para los tres problemas de optimización resueltos, se puede concluir que en los tres casos el ahorro de material alcanzado ha sido muy considerable, justificando lo adecuado de la utilización de técnicas de optimización en el diseño de puentes de gran vano soportados por cables. Particularmente, el diseño óptimo llevado a cabo en el problema CL, en el cual se han considerado como variables de diseño los seis espesores que definen los cajones, ha permitido el diseño más eficiente de la sección transversal del puente.

En caso de acometer de forma más amplia el proceso de diseño óptimo de este puente sería necesario añadir a las condiciones de tipo aeroelástico y en movimientos que se han considerado comprobaciones referentes a las tensiones que puede alcanzar el material en diversos puntos. La consecuencia de ello es que al problema de optimización planteado en este trabajo, sería necesario añadirle las nuevas condiciones de comportamiento. Ello no supone a priori ninguna dificultad de tipo científico, ya que la optimización estructural con condiciones en tensiones ha sido formulada hace ya años y existe experiencia en ese tipo de problemas. Por otro lado, el incluir un cierto número de condiciones como las indicadas no supone un incremento excesivo del esfuerzo de cálculo requerido ya que, como se ha explicado en diversas partes de este documento, es la condición de tipo aeroelástico la más compleja y la que exige un mayor número de operaciones durante el proceso de optimización. Por tanto, la metodología a emplear puede darse por validada con este trabajo de investigación, recalcando que el diseño óptimo en un planteamiento con mayor número de condiciones, quizás pudiera conducir a resultados que pudieran ser distintos. Sin embargo, incluso en una hipótesis conservadora, un ahorro en los materiales de, por ejemplo, el 15% ¿no justifica el invertir en diseño óptimo?

7.3 REFERENCIAS

[A1] Azevedo A.F.M., Adao da Fonseca A., Oliveira R. [2002] *Optimização da forma de uma ponte metálica*. Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería V. 3-6 de junio, Madrid, España.

[A2] Arora J. (Ed.) [1997] *Guide to Structural Optimization*. Technical Committee on Optimal Structural Design. ASCE, New York, USA.

[B1] Burns S.A. (Ed.) [2002] *Recent Advances in Optimal Structural Design*. Technical Committee on Optimal Structural Design. ASCE, Reston (Virginia), USA.

[B2] Bennet J.A., Botkin M.E. [1986] *The Optimum Shape: Automated Structural Design*. General Motors Research Laboratories Symposia Series. Plenum Press, New York, USA.

[F1] Frangopol D. M. (Ed.) [1999] *Case Studies in Optimal Design and Maintenance Planning of Civil Infrastructure Systems*. ASCE, SEI, Reston (Virginia), USA.

[H1] Hernández S., Fontán A.N. [1999] *Aplicaciones Industriales de Optimización del Diseño*. Consellería de Industria e Comercio. Xunta de Galicia.

[H2] Hernández S., Fontán A.N. [2002] *Practical Applications of Design Optimization*. WIT Press, Southampton, UK.

[K1] Kamat M.P. (Ed.) [1993] *Structural Optimization: Status and Promise*. Progress in Astronautics and Aeronautics. Volume 150. American Institute of Aeronautics and Astronautics.

[M1] Ministerio de Fomento [1998] *Orden de 12 febrero de 1998, por la que se aprueba la instrucción sobre las acciones a considerar en el proyecto de puentes de Carretera (IAP)*.

[N1] Nieto F., Jurado J. A., Hernández S. [2005] *Aplicación de la programación distribuida en la obtención de la velocidad de flameo y los análisis de sensibilidad del flameo en puentes de gran vano*. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol 21, 1, pp. 83-101.

[P1] Perezzan J.C., Hernández S. [2003] *Analytical Expressions of Sensitivities for Shape Variables in Linear Bending Systems*. Advances in Engineering Software, 34 pp 271-278.

[P2] Ponte sullo Stretto di Messina, [2006] *Stretto di Messina home page*. <http://www.strettodimessina.it/>

[P3] Ponte sullo Stretto di Messina, [2004] *Fondamenti Progettuali e Prestazioni Attese per l'Opera di Attraversamento*. Stretto di Messina S.p.A.

[V1] Vanderplaats G. N. [2001] *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*. 3rd edition. Vanderplaats Research & Development Inc., Colorado Springs, USA.

[V2] VMA Engineering [1988] *ADS – A Fortran Program for Automated Design Synthesis, Version 3.00*. Vanderplaats, Miura & Associates, Inc., Goleta, California, USA.

CAPÍTULO 8

CONCLUSIONES

“Long-span bridges are one of the most, if not the most wind-prone of all structures...suspension bridges have multiplied their spans by a factor of one hundred, and longer projects are presently under consideration, which increase the need for an always deeper understanding of their static and dynamic behaviour in wind.”

(Bartoli G., Ricciardelli F., Sepe V. (Eds.), WINDERFUL: Wind and Infrastructures: Dominating Eolian Risk For Utilities and Lifelines)

8.1 CONCLUSIONES GENERALES

A lo largo de la presente memoria-tesis han quedado recogidas las aportaciones metodológicas y conceptuales que han permitido llevar a cabo esta investigación. Además, se han presentado los resultados obtenidos en puentes reales, como el del Great Belt o el de Messina. Volviendo la vista a atrás, pueden extraerse una serie de conclusiones con carácter general, que son las que se indican a continuación:

Se han descrito los principales fenómenos aeroelásticos que pueden tener lugar en el ámbito de la ingeniería civil, así como diversas metodologías empleadas en su estudio.

El flameo es el fenómeno que condiciona más el diseño de puentes soportados por cables por lo que se ha descrito en profundidad.

La metodología híbrida utilizada en esta investigación para obtener la velocidad de flameo en puentes de gran vano es la más precisa y requiere ensayos experimentales de

bajo coste. Otras metodologías, como la experimental o la puramente computacional, no presentan simultáneamente las dos cualidades que acaban de mencionarse.

Frente a procesos de diseño convencional, las técnicas de diseño óptimo en ingeniería ofrecen ventajas como por ejemplo:

- En cada iteración el diseño obtenido siempre es mejor que el anterior.
- Se emplea una formulación matemática rigurosa en lugar de reglas heurísticas, es decir basadas fundamentalmente en la experiencia del proyectista.
- En cada iteración se permite la modificación de un amplio conjunto de variables de diseño.

Los análisis de sensibilidad anticipan la respuesta estructural que tendrá lugar al modificar las variables de diseño del problema. Por tanto informan al proyectista de la magnitud y el signo de la variación que debe realizarse sobre dichas variables para mejorar el comportamiento de la estructura.

La obtención de las sensibilidades por diferencias finitas supone un gran coste computacional, sin embargo su obtención analítica requiere menos tiempo y hace factible la utilización de métodos de optimización basados en el cálculo de gradientes.

Los ejemplos en los que se han aplicado técnicas de diseño óptimo en el ámbito de la ingeniería civil son escasos hasta la fecha. En esta investigación se han aplicado análisis de sensibilidad y técnicas de optimización a grandes puentes reales, poniéndose de manifiesto, no sólo que es viable aplicar las metodologías mencionadas, sino que permiten alcanzar diseños más eficientes que los logrados empleando técnicas de diseño convencional.

Se han descrito algunos de los métodos de optimización más importantes como los métodos de programación matemática, los algoritmos genéticos y los métodos de perturbaciones. En este trabajo se ha utilizado el método de las direcciones eficientes modificado ya que es muy eficaz cuando se dispone de las sensibilidades analíticas al permitir alcanzar el diseño óptimo en un número bajo de iteraciones.

Los trabajos existentes sobre análisis de sensibilidad del flameo en puentes consideraban hasta la fecha como variables de diseño las inercias del tablero. Esta tesis amplía el conjunto de variables al incluir el área de la sección transversal del mismo. Esto hecho tiene gran trascendencia ya que los problemas aeroelásticos como el flameo son problemas dinámicos donde la masa, que depende directamente del área de la sección, influye decisivamente en las frecuencias de la respuesta dinámica. Por otra parte, en un proceso de optimización estructural generalmente se minimiza la cantidad de material, estableciéndose como función objetivo que las dimensiones de los elementos sean las menores posibles.

En esta investigación también se ha planteado el problema de la optimización de puentes de cables adoptando como función objetivo la minimización del área de la sección transversal del tablero, o lo que es lo mismo, que su masa sea la menor posible.

Como condiciones de comportamiento se ha impuesto que la velocidad crítica de flameo de la estructura permanezca por encima de un cierto valor y que la flecha en el centro del vano principal no supere una cierta magnitud.

El problema de optimización planteado se puede considerar un *Grand Challenge Problem*, lo que demandaría un grandísimo esfuerzo de computación. Su programación secuencial supondría un tiempo de computación tan grande que lo haría inviable, sin embargo las técnicas de paralelización salvan esta dificultad alcanzándose el diseño óptimo en un tiempo razonable.

Se ha pasado revista a los conceptos más importantes sobre técnicas de programación en paralelo y se han comentado los tipos de arquitecturas que pueden presentar las principales computadoras en paralelo existentes en la actualidad. En la investigación se ha optado por emplear un cluster de ordenadores debido a su relativamente bajo coste económico y a la facilidad de su mantenimiento y gestión.

Para acometer el problema del diseño óptimo de puentes de gran vano se ha desarrollado el código DIOPTICA que aplica técnicas de programación distribuida para obtener la respuesta aeroelástica y los análisis de sensibilidad.

En el caso del análisis aeroelástico el tiempo de cálculo se reduce en un factor aproximadamente igual al número de equipos que trabajan en modo esclavo. Por otra parte, el tiempo de computación para los análisis de sensibilidad se reduce por el número de variables de diseño cuando se emplea programación en paralelo. Esto último es así siempre que el número de variables de diseño sea menor o igual al número de equipos que actúan como esclavos.

8.2 CONCLUSIONES RELATIVAS A LOS ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

Se desarrollan a continuación las conclusiones más importantes relativas a los análisis de sensibilidad, tanto de las frecuencias y modos propios de vibración como de la respuesta aeroelástica. Se han agrupado en aquellas relativas a diversos aspectos de la metodología empleada y en las referentes a los resultados obtenidos en los ejemplos de aplicación presentados.

8.2.1 Conclusiones metodológicas

Ampliar el conjunto de variables de diseño incorporando el área ha requerido modificar algunos pasos de los procedimientos analíticos para la obtención de los análisis de sensibilidad, tanto de frecuencias naturales como de modos propios de vibración. También se ha incorporado el área como variable de diseño en los análisis de sensibilidad de la respuesta aeroelástica.

La obtención analítica de las sensibilidades respecto a los espesores de un cajón aerodinámico se ha realizado a través de la matriz jacobiana que los relaciona con las propiedades mecánicas del tablero (I_y , I_z , J , A).

Con el fin de cuantificar adecuadamente las sensibilidades de la respuesta aeroelástica y diagnosticar de manera correcta qué variables de diseño gobiernan el comportamiento de la estructura, se han definido los siguientes parámetros: velocidad de cambio, ratio de cambio de la velocidad de flameo, frecuencia reducida de cambio y ratio de cambio de la frecuencia reducida.

8.2.2 Conclusiones relativas a los ejemplos de aplicación

A partir de los valores que toman los nuevos parámetros de cuantificación de las sensibilidades se observa que tanto en el puente sobre el Great Belt como en el puente sobre el estrecho de Messina, el área y la inercia a torsión del tablero tienen una gran influencia en la respuesta aeroelástica del puente.

Análogamente, se ha comprobado que las inercias a flexión vertical I_y y lateral I_z tienen mucha menor influencia en la velocidad de flameo de los dos puentes mencionados. Únicamente la inercia a flexión vertical de los cajones laterales del puente sobre el estrecho de Messina tiene una influencia significativa.

La sensibilidad de la velocidad de flameo respecto a la inercia a flexión vertical I_y es generalmente negativa y sólo en el caso de los cajones laterales del puente de Messina tiene valor positivo. Disminuir esta inercia está en contradicción con los requerimientos frente a cargas gravitacionales. Por ello, en la mayor parte de los casos el deseo de incrementar la velocidad de flameo entra en pugna con los requerimientos estáticos de rigidez.

Las sensibilidades obtenidas analíticamente han sido comprobadas utilizando diferencias finitas. Los procedimientos analíticos desarrollados quedan validados ya que en todos los casos las diferencias finitas ofrecen valores semejantes.

Las evaluaciones de las diferencias finitas han sido muy laboriosas y han demandado grandes tiempos de cálculo ya que se han requerido dos nuevos análisis dinámicos, dos nuevos análisis aeroelásticos y un cuidadoso postproceso de los resultados obtenidos. Consecuentemente, las diferencias finitas no son adecuadas para su implementación en un proceso de diseño óptimo como el estudiado.

Se ha constatado que los resultados obtenidos al calcular las sensibilidades de la respuesta aeroelástica dependen fuertemente del número de modos de vibración considerados al realizar los cálculos, siendo más precisos los resultados cuanto mayor sea el número de modos incorporados en el proceso de cálculo.

Los valores de la velocidad de cambio respecto a los espesores de los cajones del puente de Messina son del mismo orden de magnitud y tienen signo positivo en todos los casos. Similarmente, las frecuencias reducidas de cambio respecto a cada uno de los espesores han sido siempre negativas y su valor es aproximadamente dos órdenes de magnitud menor que el de las velocidades de cambio. Por consiguiente, ninguno de los espesores tiene influencia destacada sobre los otros en el comportamiento aeroelástico del puente.

8.3 CONCLUSIONES RELATIVAS AL DISEÑO ÓPTIMO

El problema del diseño óptimo formulado para el tablero del puente sobre el estrecho de Messina considera como función objetivo el área de la sección transversal de los cajones ($\min F = A(e_1, \dots, e_n)$) y como condiciones unos valores límite de espesores ($e_{\min} \leq e_i \leq e_{\max} \quad i = 1, \dots, n$), la condición aeroelástica de flameo ($g_1 : U_{f,cr}/U_f - 1 \leq 0$) y la condición cinemática de flecha en centro de vano ($g_2 : w_c/w_{c,\max} - 1 \leq 0$).

Se han obtenido tres diseños óptimos para el puente sobre el estrecho de Messina:

- En el problema *C* se ha minimizado el área del cajón central, obteniéndose un ahorro del 9 % en el material del tablero.
- En el problema *L* se ha optimizado el peso del tablero manteniendo invariable el cajón central y modificando los cajones laterales. El ahorro de material ha sido superior al 26 %.
- En el problema *CL* se ha optimizado el tablero alterando la sección transversal de los tres cajones simultáneamente. El ahorro en material ha sido del 33 %.

Se ha comprobado cómo el proceso de diseño óptimo no sólo hace disminuir la cantidad de material respecto al diseño inicial, sino que también se produce una redistribución de la masa entre el cajón central y los laterales.

Los diseños óptimos alcanzados presentan espesores muy parecidos en cada cajón aerodinámico, lo que facilita su ulterior ejecución.

8.4 LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURAS

Como se ha puesto de manifiesto en diversas partes de esta memoria-tesis, las técnicas de diseño basadas en análisis de sensibilidad y los métodos de optimización permiten mejorar el proyecto de puentes de gran vano. Esas técnicas de diseño pueden ofrecer resultados más completos si se consideran nuevas variables de diseño, como por ejemplo, la sección y altura de las torres o el área de los cables principales. La potencialidad de estas metodologías de diseño no convencionales también puede mejorarse si se introducen condiciones en tensiones, y otras más sofisticadas, por ejemplo relativas al comportamiento de la estructura en fase constructiva. En el mismo orden de cosas, el ámbito de aplicación del programa de optimización DIOPTICA puede extenderse incorporando la formulación que permite tratar secciones en cajón de geometría más compleja, por ejemplo de cajón multicelular.

Otra mejora a incorporar que permite establecer una metodología de diseño asistido por ordenador más ambiciosa, es incluir la formulación de los análisis de sensibilidad de la respuesta aeroelástica asociada al fenómeno del bataneo, *buffeting* en inglés, y consecuentemente, incluir el bataneo como una condición de comportamiento más en el proceso de optimización.

También se podría plantear el diseño de puentes colgantes con tablero en celosía rígida, optimizando la disposición de las barras del tablero y las secciones de las mismas. Lo mismo puede decirse en relación con la optimización de puentes atirantados de gran vano, que cada vez más, están expuestos a sufrir los peligrosos efectos de los fenómenos aeroelásticos.

Un campo de trabajo que puede llegar a ofrecer frutos muy interesantes, es el estudio de los análisis de sensibilidad de los coeficientes de flameo, considerando como variables de diseño las dimensiones geométricas principales de la sección transversal. Utilizando diferencias finitas se podrían evaluar estas sensibilidades con lo que se comprendería mejor el comportamiento ante la acción del viento de las secciones aerodinámicas. El avanzar en esta línea permitiría la optimización total de la sección transversal del tablero, distribuyendo su masa a la vez que definiendo su forma geométrica.

A medida que el tamaño del problema de optimización aumente por considerar más variables de diseño, más condiciones aeroelásticas o de otro tipo y utilizar modelos estructurales más complejos, será necesario acudir a arquitecturas de computación en paralelo más sofisticadas.

