

¿SON FIABLES LOS MÉTODOS CONVENCIONALES PARA EL CÁLCULO DE REDES DE PUESTA A TIERRA?

Fermín Navarrina, Ignasi Colominas y Manuel Casteleiro*

* GMNI - Grupo de Métodos Numéricos en Ingeniería
Depto. de Métodos Matemáticos y de Representación, Universidad de A Coruña
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Campus de Elviña, 15192 A CORUÑA, ESPAÑA
e-mail: {navarrina,colominas,casteleiro}@iccp.udc.es, web: <<http://caminos.udc.es/gmni>>

Palabras clave: Anomalous results, average potential method, boundary element methods, boundary integral equations, computer methods for grounding analysis, convergence of numerical methods, fault currents, grounding, power system protection.

Resumen. *Para diseñar una toma de tierra es preciso calcular su resistencia equivalente y la distribución de potencial en la superficie del terreno durante una derivación de corriente [1, 2, 3]. Para ello las normas sólo proponen fórmulas aproximadas para los casos más sencillos. Desde los años 70 se han desarrollado métodos matriciales (Computer Methods) como el APM, en los que los electrodos se subdividen en segmentos cuyo comportamiento se modela a partir de ideas intuitivas (superposición de fuentes de corriente puntuales, promediado del error, etc.) [1, 3, 4, 5, 6]. Sin embargo, la aplicación de estos métodos da lugar a anomalías desconcertantes al aumentar la segmentación de los conductores, con la consiguiente incertidumbre en su margen de error [2, 5].*

Los autores han desarrollado una formulación de elementos de contorno en las que se enmarcan los citados métodos matriciales. De esta forma, los métodos matriciales admiten finalmente una fundamentación rigurosa, y es posible explicar su comportamiento asintóticamente anómalo, así como identificar las fuentes de error y valorar la fiabilidad de los resultados de su aplicación.

1. INTRODUCCIÓN

En esencia, una toma de tierra es un electrodo conductor (normalmente una malla de cobre) que se entierra bajo una instalación eléctrica. Los objetivos de un sistema de toma de tierra son garantizar la integridad de los equipos y la continuidad del suministro eléctrico cuando tienen lugar situaciones de fallo —permitiendo el transporte y disipación de la corriente eléctrica en el terreno—, y evitar que las personas que se encuentren transitando o trabajando en las inmediaciones de una instalación conectada a tierra estén expuestas a una descarga eléctrica peligrosa. Para el análisis y el diseño de estos sistemas de protección es preciso determinar una serie de parámetros característicos, como la resistencia equivalente del sistema y las denominadas tensiones de paso, mano y contacto (máximas diferencias de potencial a las que puede estar sometido un ser humano que se encuentre en las inmediaciones de la instalación). A su vez, la evaluación de estas tensiones requiere conocer la distribución de potencial en la superficie del terreno cuando se produce una derivación de corriente a tierra [1, 2, 3].

Los estudios sobre el cálculo de tomas de tierra se han planteado tradicionalmente con el fin de obtener fórmulas sencillas que permitan la estimación de estos parámetros. Este tipo de fórmulas —que en la actualidad son la base de los procedimientos de cálculo recomendados por las normas [2]— se fundamentan en modelos extremadamente simples, en resultados obtenidos empíricamente mediante ensayos de laboratorio y en la experiencia profesional acumulada por reconocidos expertos durante muchos años. Desde mediados de los años setenta se han propuesto algunos métodos de cálculo matricial: los denominados “*computer methods*” en la norma IEEE Std. 80 [2]. En este tipo de métodos los electrodos de la toma de tierra se subdividen en segmentos, cuyos efectos e interrelaciones se modelan a partir de algunas hipótesis básicas, ideas intuitivas (como la superposición de fuentes de corriente puntuales y el promediado del error) y simplificaciones poco justificadas, cuando no cuestionables [1, 3, 4, 5]. A pesar del indudable avance que sin duda representaron, estas técnicas no se han aplicado históricamente (ni se aplican hoy en día) con tanta frecuencia como cabría esperar. En la actualidad las normas [2] mencionan su existencia, aunque no explicitan los detalles de su formulación. Y advierten de que para obtener resultados razonablemente precisos es necesario segmentar suficientemente los conductores, lo que sugiere un elevado coste computacional. Sin embargo, los ensayos realizados han puesto de manifiesto que al aumentar el grado de segmentación de los conductores se obtienen resultados poco realistas [5] e incluso físicamente imposibles, y en cualquier caso muy diferentes a los obtenidos con niveles de segmentación más bajos. Los métodos propuestos no convergen, por tanto, a la solución del problema. Esta notable anomalía, y la absoluta incertidumbre en el margen de error de los resultados obtenidos, constituyen sin duda los motivos por los que el uso de este tipo de técnicas no se ha universalizado todavía.

2. MODELO MATEMÁTICO

El problema asociado a la disipación de corriente eléctrica en el suelo se puede modelizar mediante la Teoría del Electromagnetismo de Maxwell [7, 8, 9]. Reduciendo el análisis a la obtención de la solución electrocinética estacionaria y despreciando la resistencia eléctrica in-

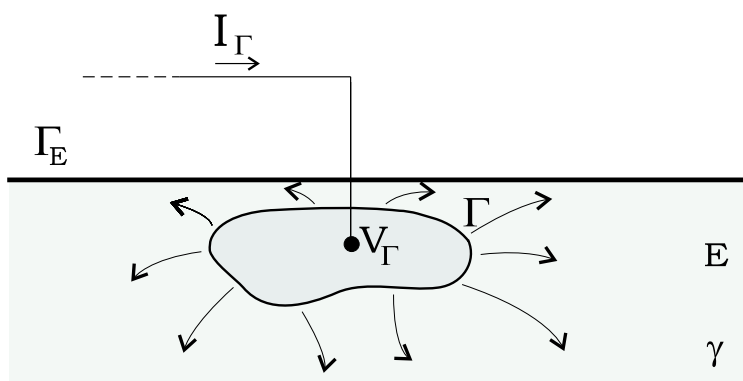


Figura 1. Disipación de corriente en el suelo.

terna de la toma de tierra (una malla de electrodos interconectados enterrada a una determinada profundidad), las ecuaciones que rigen la derivación de corriente pueden escribirse en la forma

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) &= 0 \text{ en } E, & \text{siendo } \boldsymbol{\sigma} &= -\boldsymbol{\gamma} \operatorname{grad}(V) \\ \boldsymbol{\sigma}^t \mathbf{n}_E &= 0 \text{ en } \Gamma_E, & V &= V_\Gamma \text{ en } \Gamma, \\ V &\rightarrow 0 \text{ cuando } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (1)$$

siendo E el terreno, $\boldsymbol{\gamma}$ su tensor de conductividad, Γ_E la superficie del terreno, \mathbf{n}_E su versor normal exterior y Γ la superficie de los electrodos [10, 11, 12] (véase la figura 1). La solución de este problema permite calcular el potencial $V(\mathbf{x})$ y la densidad de corriente $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ en un punto arbitrario \mathbf{x} en E cuando la toma de tierra adquiere un potencial V_Γ respecto al nivel de referencia en un punto remoto. El valor de V_Γ se denomina Sobretensión de Tierra o GPR (*Ground Potential Rise*).

El campo vectorial $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ describe el movimiento de cargas eléctricas en el entorno de cada punto. Así, el producto escalar $\boldsymbol{\sigma}^t(\mathbf{x})\mathbf{n}$ proporciona la densidad de corriente (cantidad de carga que atraviesa la unidad de superficie por unidad de tiempo) en la dirección del vector \mathbf{n} en el punto \mathbf{x} . En el estado estacionario, por definición, la cantidad de carga no varía en cada punto. Por tanto, la ecuación de equilibrio $\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ en E es simplemente una ley estándar de conservación que expresa la indestructibilidad de carga. Obviamente, esta relación puede derivarse fácilmente a partir de las Ecuaciones de Maxwell [9, 11].

La ecuación constitutiva $\boldsymbol{\sigma} = -\boldsymbol{\gamma} \operatorname{grad}(V)$ es una versión generalizada de la Ley de Ohm. En esencia, las Ecuaciones de Maxwell establecen que la intensidad del campo eléctrico $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ es irrotacional en un estado estacionario. Por tanto, debe existir un potencial escalar V tal que $\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\operatorname{grad}(V)$ [9, 11]. En consecuencia, esta ecuación constitutiva establece una relación lineal entre la densidad de corriente $\boldsymbol{\sigma}$ y la intensidad del campo eléctrico $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ en cada punto, en términos del denominado tensor de conductividad $\boldsymbol{\gamma}$. Para un medio homogéneo el tensor de conductividad es constante. Por otro lado, en un medio isótropo el tensor de conductividad se puede sustituir por una conductividad escalar γ . Por tanto, en el caso de un medio homogéneo e isótropo unidimensional esta ecuación constitutiva dice simplemente que la intensidad de corriente por unidad de superficie es proporcional a la pérdida de potencial eléctrico por unidad

de longitud, lo que constituye una forma conocida de la Ley de Ohm.

Puesto que el producto escalar $\boldsymbol{\sigma}^t \mathbf{n}_E$ proporciona el flujo de cargas eléctricas en la dirección de la normal a la superficie del terreno, es evidente que la condición de contorno natural $\boldsymbol{\sigma}^t \mathbf{n}_E = 0$ en Γ_E es equivalente a considerar la atmósfera como un aislante perfecto. Por otro lado, la condición de contorno esencial $V = V_\Gamma$ en Γ procede, obviamente, de despreciar la resistividad del electrodo. Finalmente, la condición de contorno esencial $V \rightarrow 0$ si $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ asigna un valor nulo (arbitrario pero conveniente) al potencial de referencia en un punto remoto [11]. Además, el potencial V debe satisfacer algunos requerimientos teóricos en el infinito (las denominadas condiciones de regularidad) que se explicitan en el Apéndice I [7, 8].

En estos términos, la densidad de corriente de pérdida $\sigma(\boldsymbol{\xi})$ que emana de un punto arbitrario $\boldsymbol{\xi}$ de la superficie de los electrodos, la intensidad total de corriente que emana de la toma de tierra I_Γ y la resistencia equivalente del sistema electrodo-terreno R_{eq} pueden escribirse como

$$\sigma(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\sigma}^t(\boldsymbol{\xi})\mathbf{n}, \quad I_\Gamma = \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} \sigma(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma, \quad R_{eq} = \frac{V_\Gamma}{I_\Gamma}, \quad (2)$$

siendo \mathbf{n} el versor normal exterior a Γ . En lo sucesivo se considerará que $V_\Gamma = 1$ sin pérdida de generalidad, dado que V y $\boldsymbol{\sigma}$ son proporcionales al valor de V_Γ (GPR).

En la práctica, la hipótesis de terreno homogéneo e isótropo se puede considerar aceptable [1], por lo que el tensor $\boldsymbol{\gamma}$ se puede sustituir por una conductividad escalar aparente γ que se determina experimentalmente. En el caso más general se considera que un modelo multi-capa permite representar aceptablemente la respuesta del terreno [13, 14]. Puesto que las técnicas que se exponen en este trabajo pueden generalizarse a modelos multi-capa [15] (que representan el terreno estratificado en dos o más capas de diferente espesor, cada una caracterizada con un valor distinto de la conductividad escalar γ), el desarrollo y los ejemplos que se presentarán en lo sucesivo se restringen al modelo de terreno uniforme. Así, el problema (1) se reduce a la ecuación de Laplace con condiciones de contorno mixtas [7, 8]. Por otra parte, si se asume que la superficie del terreno es horizontal (véase el Apéndice I), la simetría permite reescribir el problema (1) en términos de un Problema Exterior de Dirichlet [16]. La hipótesis de superficie horizontal es bastante adecuada dado que, en la práctica, el terreno en el que se construye una instalación eléctrica se regulariza previamente a la colocación de los equipos y ejecución de los viales y zonas de servicios.

Este tipo de problemas ha sido rigurosamente estudiado [17], y en muchas aplicaciones técnicas se obtienen rutinariamente soluciones numéricas mediante técnicas como el Método de Elementos Finitos o el Método de Diferencias Finitas. Sin embargo, éste no es nuestro caso. En la mayor parte de las tomas de tierra instaladas en subestaciones eléctricas, el electrodo enterrado consiste en una malla de barras cilíndricas de material conductor interconectadas entre sí, cuyo relación diámetro/longitud suele ser relativamente pequeña ($\approx 10^{-3}$). Puesto que el terreno se considera semi-infinito y el electrodo no está incluido en él, la discretización del dominio E requiere un número extremadamente elevado de grados de libertad. Son precisamente los prohibitivos requerimientos computacionales asociados a este tipo de discretizaciones [18] los que impiden el uso de los Métodos de Diferencias Finitas y Elementos Finitos en la práctica.

Sin embargo, recordemos que el diseño de un sistema de tierras tiene dos objetivos prioritarios: preservar la seguridad humana (para lo que se limitan las tensiones de paso, mano y contacto) y garantizar la integridad de los equipos y la continuidad del servicio (para lo que se intenta minimizar la resistencia equivalente) cuando ocurre una condición de fallo [1, 2, 11]. Para evaluar las tensiones de paso, mano y contacto sólo es preciso calcular el potencial en la superficie del terreno Γ_E . Además, la resistencia equivalente se obtiene fácilmente (2) a partir de la densidad de corriente de pérdida. Por tanto, una formulación basada en el Método de Elementos de Contorno se perfila como la elección más acertada, ya que únicamente requeriría la discretización de la superficie de los electrodos Γ y permitiría reducir el problema tridimensional a un problema bidimensional [10, 11, 12].

3. PLANTEAMIENTO VARIACIONAL DEL PROBLEMA

La aplicación de la Identidad de Green [17] a (1) permite obtener la siguiente expresión integral (véase el Apéndice I) para el potencial V en E , en términos de la densidad de corriente de pérdida (incógnita) σ [10, 11, 12]

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\xi \in \Gamma} k(\mathbf{x}, \xi) \sigma(\xi) d\Gamma, \quad (3)$$

siendo el núcleo débilmente singular

$$k(\mathbf{x}, \xi) = \left(\frac{1}{r(\mathbf{x}, \xi)} + \frac{1}{r(\mathbf{x}, \xi')} \right), \quad r(\mathbf{x}, \xi) = |\mathbf{x} - \xi|, \quad (4)$$

donde ξ' es el punto simétrico de ξ con respecto a la superficie del terreno. Dado que (3) se verifica también sobre la superficie de los electrodos Γ [11] donde el potencial viene dado por la Sobretensión de Tierra, la condición de contorno $V(\chi) = 1 \quad \forall \chi \in \Gamma$, conduce a la ecuación integral de Fredholm de primera clase definida en Γ

$$1 - \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\xi \in \Gamma} k(\chi, \xi) \sigma(\xi) d\Gamma = 0 \quad \forall \chi \in \Gamma, \quad (5)$$

cuya solución es la densidad de corriente de pérdida incógnita σ .

Finalmente, la expresión anterior puede escribirse (mediante el Método de Residuos Ponderados) en la forma variacional más débil [19, 20]

$$\iint_{\chi \in \Gamma} w(\chi) \left[1 - \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\xi \in \Gamma} k(\chi, \xi) \sigma(\xi) d\Gamma \right] d\Gamma = 0, \quad (6)$$

que debe verificarse para todos los miembros $w(\chi)$ de una determinada clase de funciones de test en Γ [10, 11, 12].

Parece evidente que la forma débil (6) es una consecuencia de la forma original (o fuerte) del problema (5). La implicación inversa no es obvia, aunque puede razonarse de forma intuitiva: la forma débil (6) debe satisfacerse para *cualquier* función de test $w(\chi)$, y esto no es posible a menos que la forma fuerte (5) se satisfaga también. De hecho, puede probarse que las dos formas del problema son equivalentes [19, 20] en general.

La forma débil (6) será el punto de partida para obtener una solución aproximada al problema original (1) mediante el Método de Elementos de Contorno. El desarrollo posterior será muy familiar para aquellos lectores que hayan tenido ya algún contacto con la tecnología básica del Método de Elementos Finitos [9, 19, 20]. La idea esencial es aproximar la ecuación variacional (6) en un contexto de dimensión finita. Primero sustituiremos la solución exacta $\sigma(\boldsymbol{\xi})$ por una aproximación discreta $\sigma^h(\boldsymbol{\xi})$ en términos de un conjunto de parámetros (incógnitas) a determinar. Y, a continuación, discretizaremos el espacio de las funciones de test de forma similar. Nuestro propósito es reducir el problema aproximado a un sistema lineal bien planteado, con el mismo número de grados de libertad (incógnitas) que ecuaciones discretizadas. También se discretizará la geometría del contorno, como es usual en esta clase de métodos, con el fin de simplificar y sistematizar el trabajo de integración.

3.1. Formulación de Elementos de Contorno

Dadas \mathcal{N} funciones de prueba $\{N_i(\boldsymbol{\xi})\}$ definidas en Γ [19, 20], y dados \mathcal{M} elementos 2D de contorno $\{\Gamma^\alpha\}$, la densidad de corriente de pérdida σ y la superficie de la toma de tierra Γ se pueden discretizar en la forma

$$\sigma(\boldsymbol{\xi}) \approx \sigma^h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \sigma_i N_i(\boldsymbol{\xi}), \quad \Gamma = \bigcup_{\alpha=1}^{\mathcal{M}} \Gamma^\alpha. \quad (7)$$

A su vez, la expresión (3) puede aproximarse por

$$V(\mathbf{x}) \approx V^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \sigma_i V_i(\mathbf{x}), \quad V_i(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{M}} V_i^\alpha(\mathbf{x}), \quad (8)$$

$$V_i^\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma^\alpha} k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) N_i(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma. \quad (9)$$

Finalmente, para un conjunto dado de \mathcal{N} funciones de test $\{w_j(\mathbf{x})\}$ definidas en Γ , la forma variacional (6) se reduce al sistema de ecuaciones lineales [10, 11, 12]

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} R_{ji} \sigma_i = \nu_j, \quad j = 1, \dots, \mathcal{N}; \quad (10)$$

$$R_{ji} = \sum_{\beta=1}^{\mathcal{M}} \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{M}} R_{ji}^{\beta\alpha}, \quad \nu_j = \sum_{\beta=1}^{\mathcal{M}} \nu_j^\beta, \quad \begin{cases} i = 1, \dots, \mathcal{N}; \\ j = 1, \dots, \mathcal{N}; \end{cases} \quad (11)$$

$$R_{ji}^{\beta\alpha} = \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\mathbf{x} \in \Gamma^\beta} w_j(\mathbf{x}) \left[\iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma^\alpha} k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) N_i(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma \right] d\Gamma, \quad \nu_j^\beta = \iint_{\mathbf{x} \in \Gamma^\beta} w_j(\mathbf{x}) d\Gamma. \quad (12)$$

Sin embargo, es obvio que las discretizaciones 2D requeridas para resolver estas ecuaciones en problemas reales obligarían a manipular un número extremadamente alto de grados de libertad, ya que los sistemas de toma de tierra están formados en la práctica por mallas de varios cientos de conductores cilíndricos de gran longitud en relación con su diámetro. Por ello, y teniendo en cuenta que la matriz de coeficientes en (10) es llena, y que la integración 2D en

(12) debe efectuarse dos veces sobre la superficie de cada uno de los electrodos, se comprende inmediatamente la necesidad de introducir algunas simplificaciones adicionales con el fin de reducir el extremadamente elevado coste computacional del problema.

4. PLANTEAMIENTO VARIACIONAL APROXIMADO

Considerando la geometría específica de las tomas de tierra en la mayoría de las instalaciones eléctricas reales, puede asumirse que la densidad de corriente es constante en la sección transversal de cada electrodo cilíndrico [10, 11, 12]. Esta hipótesis de uniformidad circunferencial es ampliamente empleada en la mayor parte de los estudios teóricos y procedimientos prácticos recogidos en la bibliografía [1, 2, 5]. Sea L el conjunto completo de los ejes de los conductores enterrados Γ . Sea $\hat{\xi} \in L$ la proyección ortogonal sobre el eje de un punto genérico $\xi \in \Gamma$ situado sobre la superficie cilíndrica. Sea $\phi(\hat{\xi})$ el diámetro (que se supone mucho menor que la longitud) del conductor, y sea $C(\hat{\xi})$ el perímetro circunferencial de la sección transversal en el punto $\hat{\xi}$ en cuestión. Si la distribución de la corriente de pérdida se supone uniforme en el perímetro de cada sección transversal (véase la figura 2), es decir $\sigma(\xi) = \hat{\sigma}(\hat{\xi}) \forall \xi \in C(\hat{\xi})$, se puede obtener una expresión aproximada del potencial (3) de la forma [10, 11, 12]

$$\hat{V}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\hat{\xi} \in L} \left[\int_{\xi \in C(\hat{\xi})} k(\mathbf{x}, \xi) dC \right] \hat{\sigma}(\hat{\xi}) dL. \quad (13)$$

Esta hipótesis parece adecuada, teniendo en cuenta la geometría real de las tomas de tierra [1, 2, 5]. Sin embargo, debido a que la densidad de corriente de pérdida no es realmente uniforme en la sección transversal, la expresión anterior no podrá satisfacer estrictamente la condición de contorno $\hat{V}(\mathbf{x}) = V_{\Gamma} = 1 \forall \mathbf{x} \in \Gamma$, ni por consiguiente la forma variacional (6) (excepto en algún caso particular en el que la densidad de corriente sea efectivamente uniforme a lo largo del perímetro). No obstante, si se restringe la clase de funciones de test a aquellas con uniformidad circunferencial, es decir $w(\mathbf{x}) = \hat{w}(\hat{\mathbf{x}}) \forall \mathbf{x} \in C(\hat{\mathbf{x}})$, la expresión (6) se reduce a

$$\int_{\hat{\mathbf{x}} \in L} \hat{w}(\hat{\mathbf{x}}) \left[\pi\phi(\hat{\mathbf{x}}) - \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\hat{\xi} \in L} K(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\xi}) \hat{\sigma}(\hat{\xi}) dL \right] dL = 0 \quad (14)$$

que debe satisfacerse para todos los miembros $\hat{w}(\hat{\mathbf{x}})$ de una determinada clase de funciones de test en L , siendo el núcleo integral

$$K(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\xi}) = \int_{\mathbf{x} \in C(\hat{\mathbf{x}})} \left[\int_{\xi \in C(\hat{\xi})} k(\mathbf{x}, \xi) dC \right] dC. \quad (15)$$

Así se impone que la condición de contorno se verifique en promedio en la sección transversal. A su vez (14) es una forma débil de la ecuación integral de Fredholm de primera especie en L

$$\pi\phi(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\hat{\xi} \in L} K(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\xi}) \hat{\sigma}(\hat{\xi}) dL \quad \forall \hat{\mathbf{x}} \in L. \quad (16)$$

En esta formulación no se han tenido en cuenta ni los extremos ni las uniones de los conductores, por lo que es de esperar la aparición de ligeras anomalías localizadas en esos puntos, aunque en los resultados globales no deberían apreciarse perturbaciones significativas.

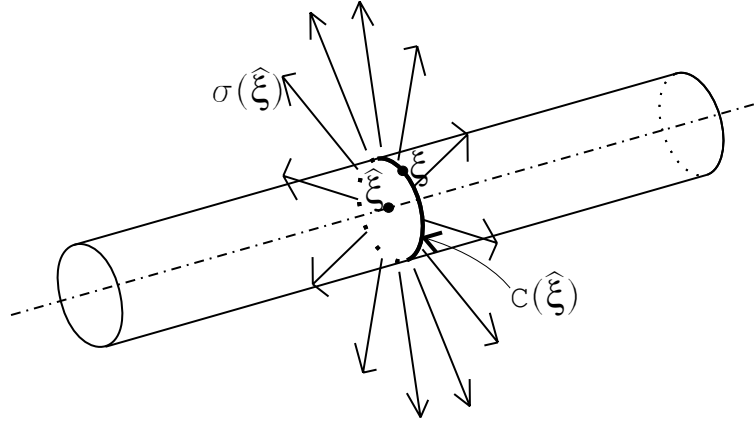


Figura 2. Hipótesis de uniformidad circunferencial.

4.1. Formulación aproximada de Elementos de Contorno

La resolución de la ecuación integral (14) requiere la discretización del dominio formado por el conjunto completo de los ejes de los conductores enterrados L . Así, dadas n funciones de prueba $\{\widehat{N}_i(\widehat{\xi})\}$ definidas en L y m elementos 1D de contorno $\{L^\alpha\}$ (segmentos de los conductores cilíndricos), la densidad de corriente de pérdida $\widehat{\sigma}$ y el conjunto de ejes de los conductores L se pueden discretizar en la forma

$$\widehat{\sigma}(\widehat{\xi}) \approx \widehat{\sigma}^h(\widehat{\xi}) = \sum_{i=1}^n \widehat{\sigma}_i \widehat{N}_i(\widehat{\xi}), \quad L = \bigcup_{\alpha=1}^m L^\alpha. \quad (17)$$

En estos términos podemos escribir una versión discretizada de (13) como

$$\widehat{V}(\mathbf{x}) \approx \widehat{V}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \widehat{\sigma}_i \widehat{V}_i(\mathbf{x}), \quad \widehat{V}_i(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^m \widehat{V}_i^\alpha(\mathbf{x}), \quad (18)$$

$$\widehat{V}_i^\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\widehat{\xi} \in L^\alpha} \left[\int_{\widehat{\xi} \in C(\widehat{\xi})} \widehat{K}^k(\mathbf{x}, \widehat{\xi}) dC \right] \widehat{N}_i(\widehat{\xi}) dL. \quad (19)$$

Finalmente, para una elección adecuada de n funciones de test $\{\widehat{w}_j(\widehat{\chi})\}$ definidas en L , la ecuación (14) se reduce al sistema de ecuaciones lineales [10, 11, 12]

$$\sum_{i=1}^n \widehat{R}_{ji} \widehat{\sigma}_i = \widehat{v}_j, \quad j = 1, \dots, n; \quad (20)$$

$$\widehat{R}_{ji} = \sum_{\beta=1}^m \sum_{\alpha=1}^m \widehat{R}_{ji}^{\beta\alpha}, \quad \widehat{v}_j = \sum_{\beta=1}^m \widehat{v}_j^\beta, \quad \begin{cases} i = 1, \dots, n; \\ j = 1, \dots, n; \end{cases} \quad (21)$$

$$\widehat{R}_{ji}^{\beta\alpha} = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\widehat{\chi} \in L^\beta} \widehat{w}_j(\widehat{\chi}) \left[\int_{\widehat{\xi} \in L^\alpha} \widehat{K}(\widehat{\chi}, \widehat{\xi}) \widehat{N}_i(\widehat{\xi}) dL \right] dL, \quad \widehat{v}_j^\beta = \int_{\widehat{\chi} \in L^\beta} \pi \phi(\widehat{\chi}) \widehat{w}_j(\widehat{\chi}) dL. \quad (22)$$

En comparación con la formulación 2D presentada anteriormente, el esfuerzo computacional requerido para resolver problemas reales se reduce drásticamente con esta formulación 1D,

dado que tanto el tamaño del sistema de ecuaciones lineales (20), como el número de contribuciones (22) que es preciso calcular son significativamente más pequeños que los de (10) y (12). Sin embargo, en el caso de problemas reales, el coste computacional requerido para la integración es todavía considerablemente elevado, debido a las integrales circunferenciales que es preciso evaluar en (15) y en (19). Por esta razón, se hace necesario introducir nuevamente ciertas simplificaciones para reducir los tiempos de cálculo a niveles aceptables.

4.2. Formulación simplificada 1D de Elementos de Contorno

La integral circunferencial del núcleo $k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ de (19) se puede escribir como [10, 11, 12]

$$\int_{\boldsymbol{\xi} \in C(\hat{\boldsymbol{\xi}})} k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dC \approx \pi \phi(\hat{\boldsymbol{\xi}}) \hat{k}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\xi}}), \quad (23)$$

siendo

$$\hat{k}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\xi}}) = \left(\frac{1}{\hat{r}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\xi}})} + \frac{1}{\hat{r}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\xi}}')} \right), \quad \text{y} \quad \hat{r}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\xi}}) = \sqrt{|\mathbf{x} - \hat{\boldsymbol{\xi}}|^2 + \frac{\phi^2(\hat{\boldsymbol{\xi}})}{4}}, \quad (24)$$

donde $\hat{\boldsymbol{\xi}}'$ es el simétrico de $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ con respecto a la superficie del terreno. Esta aproximación es suficientemente precisa a menos que la distancia entre los puntos \mathbf{x} y $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ sea del mismo orden de magnitud que el diámetro $\phi(\hat{\boldsymbol{\xi}})$, lo que no ocurrirá en la práctica al emplear esta aproximación para calcular los valores del potencial en la superficie del terreno. Consecuentemente, el núcleo integral (15) se puede aproximar en la forma

$$K(\hat{\boldsymbol{\chi}}, \hat{\boldsymbol{\xi}}) \approx \pi \phi(\hat{\boldsymbol{\chi}}) \pi \phi(\hat{\boldsymbol{\xi}}) \hat{k}(\hat{\boldsymbol{\chi}}, \hat{\boldsymbol{\xi}}), \quad (25)$$

siendo

$$\hat{k}(\hat{\boldsymbol{\chi}}, \hat{\boldsymbol{\xi}}) = \left(\frac{1}{\hat{r}(\hat{\boldsymbol{\chi}}, \hat{\boldsymbol{\xi}})} + \frac{1}{\hat{r}(\hat{\boldsymbol{\chi}}, \hat{\boldsymbol{\xi}}')} \right), \quad \text{y} \quad \hat{r}(\hat{\boldsymbol{\chi}}, \hat{\boldsymbol{\xi}}) = \sqrt{|\hat{\boldsymbol{\chi}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}|^2 + \frac{\phi^2(\hat{\boldsymbol{\xi}}) + \phi^2(\hat{\boldsymbol{\chi}})}{8}}, \quad (26)$$

lo que preserva la simetría de la ecuación (20) aunque las secciones transversales del electrodo sean distintas en los puntos $\hat{\boldsymbol{\chi}}$ y $\hat{\boldsymbol{\xi}}$.

La selección de diferentes tipos de funciones de prueba y test en (22) conduce a diferentes formulaciones específicas. Así, con elementos de densidad de corriente constante (un nodo centrado por segmento de conductor), la Colocación Puntual (deltas de Dirac como funciones de prueba) se identifica con los métodos intuitivos más antiguos, basados en la idea de sustituir cada segmento de conductor por una “esfera imaginaria” [4]. Por otra parte, la formulación de Galerkin (donde las funciones de test son las mismas que las de prueba) se identifica con una clase de métodos más recientes, como el Método del Promediado del Potencial o APM (*Average Potential Method*) [4, 5]. Este método se basa en la idea de que cada segmento de conductor se sustituye por una “línea de fuentes puntuales de corriente sobre la longitud del conductor” (elementos de densidad de corriente constante), y los coeficientes (22) corresponden a “resistencias mutuas y propias” entre “segmentos de conductor” [5]. Obviamente, es posible desarrollar formulaciones más avanzadas y precisas [11, 12] aproximando la densidad de corriente mediante funciones de prueba lineales, cuadráticas, y polinomios de grado superior.

5. TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN ANALÍTICA

En lo sucesivo, el modelo numérico y los ejemplos se restringirán a formulaciones de tipo Galerkin, donde la matriz del sistema (20) es simétrica y definida positiva [19]. Así, si se introducen las simplificaciones de las integrales circunferenciales (23) y (25), y se asume que el diámetro de los conductores es constante en cada elemento, las expresiones finales que permiten calcular los coeficientes del potencial (19) y del sistema de ecuaciones (22) resultan ser:

$$\widehat{V}_i^\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \pi \phi^\alpha \int_{\widehat{\boldsymbol{\xi}} \in L^\alpha} \widehat{k}(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}) \widehat{N}_i(\widehat{\boldsymbol{\xi}}) dL, \quad (27)$$

$$\widehat{R}_{ji}^{\beta\alpha} = \frac{\pi \phi^\beta \pi \phi^\alpha}{4\pi\gamma} \int_{\widehat{\boldsymbol{\chi}} \in L^\beta} \widehat{N}_j(\widehat{\boldsymbol{\chi}}) \left[\int_{\widehat{\boldsymbol{\xi}} \in L^\alpha} \widehat{k}(\widehat{\boldsymbol{\chi}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}) \widehat{N}_i(\widehat{\boldsymbol{\xi}}) dL \right] dL, \quad (28)$$

donde ϕ^α y ϕ^β representan el diámetro del conductor en los elementos L^α y L^β respectivamente. Obviamente, las contribuciones (28) conducen a una matriz simétrica en (20).

El cálculo de las restantes integrales que intervienen en (27) y (28) mediante cuadraturas numéricas es muy costoso debido al mal comportamiento de las funciones de los integrandos [10, 11]. Por este motivo se optó por desarrollar la integración analítica de todos los coeficientes. Inicialmente se derivaron fórmulas explícitas para calcular (27) con elementos de densidad de corriente constante (1 nodo funcional), lineal (2 nodos funcionales) y cuadrática (3 nodos funcionales) [10, 11, 12]. A continuación se obtuvieron las expresiones explícitas completas [11, 12] que permiten calcular las contribuciones (28). La obtención de estas expresiones no es obvia y requiere un importante y sistemático trabajo analítico [11]. En esta formulación se incluyen los métodos matriciales anteriores como casos particulares (por ejemplo el APM [4] corresponde a la utilización de elementos de densidad de corriente constante). La deducción completa de estas fórmulas pueden encontrarse en trabajos previos de los autores [12].

6. ¿POR QUÉ NO CONVERGEN ESTOS MÉTODOS?

En principio, esperamos que la densidad de corriente de pérdida discretizada $\widehat{\sigma}^h(\widehat{\boldsymbol{\xi}})$ converja a la solución exacta $\sigma(\boldsymbol{\xi})$ a medida que se aumente el número de grados de libertad n . También esperamos que el potencial discretizado $\widehat{V}^h(\mathbf{x})$ converja simultáneamente a la solución exacta $V(\mathbf{x})$. En general, podemos intentar obtener estos efectos en (17) o bien incrementando la segmentación de los conductores, o bien eligiendo funciones de prueba $\widehat{N}_i(\widehat{\boldsymbol{\xi}})$ más sofisticadas (es decir, usando elementos de orden superior) [19, 20]. En la terminología usual del Método de Elementos Finitos, la primera opción se denomina refinamiento de tipo **h**, mientras que la segunda se denomina refinamiento de tipo **p**.

Sin embargo, se comprueba que estas formulaciones no convergen a la solución exacta debido a la aparición de inestabilidades de valor creciente que perturban fuertemente el valor de la densidad de corriente de pérdida cuando la discretización se refina más allá de determinado punto [5, 16]. De hecho, las inestabilidades numéricas tienden a extenderse a lo largo de toda la longitud de los conductores al incrementar la segmentación. Consecuentemente se obtienen resultados claramente no realistas (por ejemplo potenciales negativos) al calcular el potencial en

la superficie del terreno. Sin embargo, el valor de la resistencia equivalente R_{eq} no se modifica de forma sustancial [11, 18].

Estos problemas fueron descritos hace dos décadas en un artículo especialmente lúcido y ya clásico [5] sobre la precisión del Método del Promediado del Potencial (APM). A pesar de carecer de una deducción rigurosa del método, estos autores establecieron y analizaron la mayor parte de las fuentes de error. Sin embargo, el origen de las inestabilidades mencionadas anteriormente no pudo ser explicado en aquel marco teórico incompleto. Como escribieron estos autores “*until a rigorous mathematical error analysis is performed, the ground grid designer must continue to work with an unknown correction factor in ground grid analysis*”. La formulación presentada en este artículo proporciona el marco teórico riguroso en el que se pueden analizar, explicar y controlar aquellas anomalías.

El problema (1) es un problema bien puesto [17]. Se puede argumentar que desprestigiar la resistividad del electrodo no es absolutamente realista, y por tanto V_F no es exactamente constante sobre la superficie del electrodo. Esta línea de razonamiento conduce a aceptar la necesidad de utilizar modelos más sofisticados en aquellos casos en los que la resistividad del electrodo deba ser tenida en cuenta. Pero esta idealización parece ser perfectamente razonable, y suficientemente precisa, para la mayor parte de los supuestos prácticos [11, 18], por lo que no se le puede atribuir el origen de las inestabilidades observadas. Por otro lado, la deducción de la expresión (3) y de la ecuación integral de Fredholm de primera especie (5) han sido rigurosamente establecidas [11]. Además, el problema definido por la forma variacional (6) también está bien puesto, el núcleo (4) es débilmente singular, y el sistema lineal (10) está relativamente bien condicionado para discretizaciones realistas de la superficie del electrodo [19], lo que no sucede en otros problemas similares que tienen núcleos regulares, que son frecuentemente muy mal-condicionados y, por tanto, extremadamente difíciles de resolver [19].

Por tanto, los motivos por los que se produce el fallo en la convergencia del método deben ser buscados entre las simplificaciones introducidas con el fin de reducir la complejidad computacional de la formulación general 2D de Elementos de Contorno [10, 11, 12], es decir: **A)** la corriente de pérdida se supone uniforme en el perímetro de la sección transversal de cada conductor cilíndrico, **B)** los extremos y las uniones de los conductores no se tienen en cuenta, y **C)** las aproximaciones (23) y (25) se introducen para evitar la integración circunferencial y reducir el tiempo de computación.

Los autores han realizado varios ensayos numéricos para el problema académico de una única barra en un dominio infinito [11, 18]. Este problema se ha resuelto mediante: **1)** la formulación de elementos 1D de contorno presentada en este artículo, **2)** una formulación estándar de elementos 2D de contorno para problemas de potencial axisimétricos (donde no se realiza ningún tipo de aproximaciones ni en el núcleo de la ecuación integral ni en las integrales circunferenciales), y **3)** un programa específicamente desarrollado de elementos finitos 2D para problemas de potencial axisimétricos. Los resultados de la formulación 1D concuerdan significativamente con los obtenidos con los otros dos métodos. Sin embargo, si se aumenta el grado de discretización, los resultados que se obtienen con esta técnica de elementos 1D de contorno oscilan alrededor de la solución real. Dado que la hipótesis de uniformidad circunferencial se

satisface estrictamente en este ejemplo de prueba [18], y no se producen oscilaciones en la solución con la formulación estándar de elementos 2D de contorno ni con la de elementos finitos, la simplificación **A**) no puede ser el origen de los problemas encontrados al aplicar estos métodos. No se han desarrollado ensayos específicos hasta el momento orientados a cuantificar el error debido a la simplificación **B**). No obstante, la experiencia de los autores indica que se pueden esperar efectos locales ligeramente anómalos cerca de los extremos y de las uniones entre los conductores, aunque los resultados globales no deberían verse seriamente afectados. Remarcamos que las deducciones de la ecuación (13) y de la ecuación integral de Fredholm de primera especie (16) han sido rigurosamente establecidas [11, 12]. Además, el problema definido por la forma variacional (14) es aproximado pero está bien puesto, el núcleo (15) es débilmente singular, y el sistema lineal (20) debe ser razonablemente bien-condicionado para segmentaciones realistas de los conductores [19].

Por tanto, el origen de estos problemas debe emanar de las simplificaciones **C**) introducidas en la formulación numérica 1D. El hecho es que la aproximación (23) no es válida para distancias pequeñas. Así, cuando se aumenta la discretización y el tamaño de los elementos llega a ser comparable al diámetro del conductor, la aproximación (25) introduce errores significativos en los coeficientes del sistema de ecuaciones (20) que corresponden a nodos adyacentes, y especialmente en los términos diagonales. Por otra parte, puesto que el error de la aproximación aumenta con el nivel de discretización, los resultados numéricos para discretizaciones finas no tienden a la solución de la ecuación integral (5) con el núcleo (6), sino a la solución de una ecuación integral distinta y mal-condicionada (16) con el núcleo no singular aproximado (25).

Es un resultado teórico conocido para las ecuaciones de Fredholm de primera especie que el inverso de un operador completamente continuo no es acotado [21]. En palabras sencillas: al usar las aproximaciones (23) y (25) nos enfrentamos a un problema muy mal-condicionado cuya solución no se puede hallar numéricamente, puesto que existen distribuciones de la densidad de corriente de pérdida muy diferentes entre sí que verifican la condición de contorno $\hat{V}^h(\boldsymbol{\chi}) = V_\Gamma = 1 \quad \forall \boldsymbol{\chi} \in \Gamma$ en su forma débil (14) con errores arbitrariamente pequeños.

Esto explica por qué se obtienen resultados poco realistas cuando aumenta la discretización [5], y se impide la convergencia [16].

7. COSTE COMPUTACIONAL Y EFICACIA

En este punto, remarcamos las lúcidas recomendaciones establecidas en [5]. Este tipo de métodos debería ser empleado de forma iterativa, incrementando la segmentación en cada ejecución del problema. Una estrategia simple (aunque costosa) sería comenzar con un número reducido de segmentos de tamaño similar, y realizar una bisección de cada segmento en cada ejecución del programa hasta que los resultados converjan (aparentemente) dentro de unas tolerancias razonables. Remarcamos que la segmentación no puede incrementarse indefinidamente por las razones expuestas anteriormente. Como regla práctica, podemos decir que las aproximaciones (23) y (25) no serán válidas cuando el tamaño de los segmentos sea comparable al (o menor que el) diámetro del electrodo.

Se ha comprobado que los resultados obtenidos con niveles de discretización normales son

suficientemente precisos en la práctica [11, 18]. Sin embargo, es obvio que en casos especiales podrían ser requeridos resultados más precisos. De hecho, se han documentado en la literatura casos en los que el Método del Promediado del Potencial (APM), por ejemplo, se ha manifestado incapaz de proporcionar resultados aceptables. En estos casos, el uso de elementos de orden superior (lineal o cuadrático) podría ayudar, al menos hasta un cierto nivel de precisión.

Por otro lado, la formulación propuesta señala una posible estrategia que podría aumentar la precisión de estos métodos en un futuro inmediato. Remarcamos que la formulación 1D simplificada es mal-condicionada, pero la formulación 1D previa es correcta. Por tanto, la solución radica en sustituir las aproximaciones (23) y (25) por aproximaciones mejores que también sean válidas para distancias cortas. Esto no es obvio, ni inmediato, puesto que sería necesario adaptar la mayor parte del trabajo analítico descrito en las secciones anteriores. En cualquier caso, la investigación en esta línea podría dar lugar a métodos eficaces y asintóticamente estables en un futuro próximo.

El coste computacional global de esta formulación se puede analizar teniendo en cuenta que para una discretización dada, con m elementos de p nodos cada uno y un total de n grados de libertad, se debe generar y resolver el sistema de ecuaciones lineal (20) de dimensión n . La matriz de coeficientes es simétrica pero no vacía, por lo que su resolución mediante un método directo requiere $O(n^3/3)$ operaciones. Por su parte, la generación de esta matriz requiere $O(m^2p^2/2)$ operaciones, cada una de ellas equivalente a una integral doble, debido a las p^2 contribuciones que se calculan mediante la expresión (28) para cada par de elementos (considerando que aproximadamente la mitad se obtienen directamente por simetría). Una vez obtenida la densidad de corriente normal que emana de los electrodos, el coste de calcular la resistencia equivalente (2) es despreciable. El coste adicional asociado a la obtención del potencial en un punto dado (normalmente en la superficie del terreno) por medio de (18) y (27) requiere sólo $O(mp)$ operaciones. No obstante, si es necesario calcular potenciales en un gran número de puntos (por ejemplo para el dibujo de isolíneas) el tiempo de computación puede ser considerable.

Por tanto, en el caso de problemas pequeños/medianos el mayor esfuerzo computacional se invierte en la generación de la matriz, en tanto que la resolución del sistema de ecuaciones debería ser el factor predominante en problemas medianos/grandes. Sin embargo, a partir de un cierto tamaño del problema la utilización de un método directo para la solución del sistema de ecuaciones es prohibitiva, por lo que se preferirá una técnica iterativa o semiiterativa. En nuestro caso, los mejores resultados los ha proporcionado un algoritmo de gradientes conjugados con preconditionamiento diagonal ensamblando la matriz de coeficientes [11, 22]. Esta técnica ha demostrado ser enormemente eficaz en este tipo de problemas, tal y como predice la teoría [19], y tiene un coste computacional relativamente bajo en comparación con el volumen de cálculo necesario para generar el sistema de ecuaciones. Finalmente, el proceso que consume la mayor parte del tiempo de computación es la generación del sistema, seguido del cálculo del potencial en un número elevado de puntos. Afortunadamente estos dos procesos son masivamente paralelizables [23].

En cuanto a la elección del tipo de elemento en un problema determinado, para una discretización dada es evidente que la utilización de elementos de densidad de corriente constante

proporcionará resultados menos precisos, aunque con un coste computacional menor, que la utilización de elementos de densidad de corriente lineal o parabólica. Obviamente, en comparación con los resultados obtenidos con una malla relativamente grosera de elementos de densidad de corriente constante, podremos aumentar la precisión o bien incrementando el número de elementos o utilizando elementos de mayor orden [18]. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que no es posible aumentar de forma indiscriminada el número de elementos dado que las aproximaciones (23) y (25) realizadas no son satisfactorias si el tamaño del elemento es del mismo orden de magnitud que el diámetro del electrodo cilíndrico, como se ha comentado anteriormente. En todo caso, para un problema dado, será necesario valorar cuidadosamente hasta qué punto es conveniente refinar la malla, y en su caso aumentar el número de elementos (refinamiento de tipo **h**) o utilizar elementos de mayor orden [11, 12] (refinamiento de tipo **p**). En general es preferible usar elementos de orden superior, ya que se pueden obtener resultados más precisos con un número menor de grados de libertad.

8. EJEMPLO DE APLICACIÓN

Las técnicas desarrolladas por los autores se han implementado en un sistema de diseño asistido por ordenador para tomas de tierra de subestaciones eléctricas denominado TOTBEM [24]. En el momento actual, el cálculo de una toma de tierra con un modelo de suelo homogéneo e isótropo se realiza en tiempo real en un ordenador personal, y el tamaño del problema más grande que es posible resolver está limitado por la capacidad de memoria que requiere el almacenamiento y manipulación de la matriz de coeficientes. Así, para un problema de 2000 grados de libertad, se precisan aproximadamente 16Mb, mientras que los tiempos de generación de la matriz y resolución del sistema son todavía reducidos y del mismo orden de magnitud (algunos segundos en un ordenador personal de gama media en el año 2004). El sistema ha sido usado por los autores y por varias empresas eléctricas españolas para analizar instalaciones de gran tamaño durante los últimos 10 años. Alguno de estos resultados se pueden encontrar en [10, 11, 12, 24]. El siguiente ejemplo fue resuelto mediante el sistema TOTBEM.

8.1. Ejemplo: Subestación Santiago II

La figura 3 muestra la subestación Santiago II ($230 \times 195 \text{ m}^2$) cerca de la ciudad de Santiago de Compostela, operada por la compañía eléctrica *Unión Fenosa*. El sistema de tierras está formado por 534 barras ($\phi = 11,28 \text{ mm}$) enterradas a una profundidad de 75 cm y complementadas con 24 picas verticales ($\phi = 15,00 \text{ mm}$, $L = 4,0 \text{ m}$). El valor de la resistividad del suelo es $60 \Omega \text{ m}$. Cada barra se discretiza en un elemento y cada pica se discretiza en dos elementos, todos ellos de densidad lineal (la densidad de corriente de pérdida aproximada σ^h varía linealmente dentro de cada segmento de conductor). Esto conduce a un problema aproximado con un total de 386 incógnitas. Se utilizó una ponderación de tipo Galerkin. En la figura 3 se muestra también la distribución del potencial sobre la superficie del terreno cuando sucede una condición de fallo. Para la sobretensión de tierra (GPR) de $V_{\Gamma} = 10 \text{ kV}$ la corriente de fallo calculada es $I_{\Gamma} = 67,3 \text{ kA}$, lo que determina una resistencia equivalente $R_{eq} = 0,149 \Omega$. Este

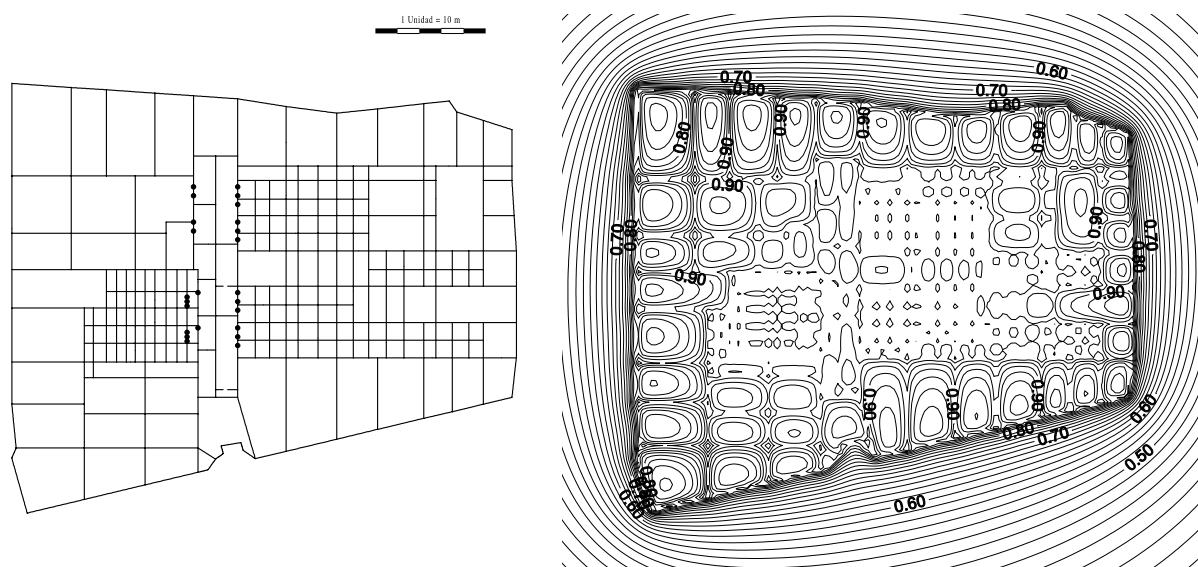


Figura 3. Subestación Santiago II: Malla de electrodos y distribución de potencial sobre la superficie del terreno (en tanto por uno del GPR).

caso fue originalmente calculado en un DEC AlphaServer 4000–AXP con sistema operativo VMS [25, 26]. Completar el análisis en 1999 requirió 7,7 segundos. El mismo análisis puede realizarse en un tiempo similar (o inferior) usando un PC de gama media en este momento.

Nótese que la utilización de elementos de densidad constante (en lugar de lineal) conduciría a un problema mayor (con 582 incógnitas). Este ejemplo muestra cómo la utilización de elementos de densidad lineal puede ser ventajosa en comparación con la utilización de elementos de densidad constante, puesto que permite obtener resultados de mayor precisión para un esfuerzo computacional similar (el menor coste asociado a la resolución del sistema de ecuaciones se compensa con el mayor coste asociado a la generación de la matriz).

8.2. Refinamiento de la Discretización

Los ejemplos analizados por los autores han sido resueltos repetidamente, incrementando la segmentación de los conductores. Como la teoría predice (y ha sido documentado en la literatura) las inestabilidades numéricas perturban totalmente la solución cuando la discretización se refina más allá de determinado punto. En cualquier caso, un nivel de discretización moderado permite obtener resultados suficientemente precisos en la práctica. En nuestra experiencia, aumentar fuertemente el número de elementos no aporta ventajas significativas a la escala del conjunto. Parece, por tanto, que refinar la discretización sólo está justificado cuando se requieren resultados de gran precisión en una zona determinada.

Por otro lado, utilizar elementos de orden más elevado (lineal o cuadrático) parece ser más ventajoso (en general) que refinar intensivamente la discretización, puesto que la precisión que se obtiene es mayor para un número de grados de libertad significativamente menor [11].

8.3. Otros Desarrollos

Las técnicas descritas en este artículo pueden extenderse a modelos multicapa [25, 26], aunque los tiempos de computación crecen de forma muy importante. La correspondiente formulación ha sido implementada en un supercomputador paralelo, y el programa ha sido aplicado al análisis de varias tomas a tierra de subestaciones reales [23, 25, 26]. Los resultados obtenidos con modelos multicapa difieren notablemente de los correspondientes a un modelo del suelo homogéneo e isótropo. Por ello, los autores creen que la formulación multicapa deberá ser la herramienta de diseño en tiempo real que se utilice en un futuro próximo, a medida que la supercomputación en paralelo se convierta en un recurso ampliamente disponible para los ingenieros. La formulación también ha sido adaptada para calcular potenciales transferidos [28].

9. CONCLUSIONES

En este artículo se presenta una formulación de elementos de contorno para el análisis de tomas de tierra de subestaciones eléctricas. La formulación propuesta se basa en la solución de una ecuación integral de Fredholm mediante el Método de Elementos de Contorno. La solución de la ecuación integral proporciona la densidad de corriente que emana de la superficie de la malla conductora, a partir de la cual se puede evaluar de forma sencilla tanto la resistencia equivalente del sistema como el potencial en cualquier punto de la superficie del terreno. La introducción de una serie de hipótesis comúnmente aceptadas permite reducir la formulación general de Elementos de Contorno 2D a una formulación simplificada 1D con requerimientos computacionales aceptables. A su vez, el desarrollo de técnicas analíticas de integración específicas para la formulación 1D simplificada, y la utilización de métodos semi-iterativos para la resolución de los sistemas de ecuaciones involucrados, permite reducir drásticamente el coste computacional.

Nuestra formulación incluye a los denominados métodos matriciales, ampliamente utilizados en la práctica. Estos métodos se identifican como las variantes más sencillas de la formulación simplificada para elecciones específicas de las funciones de prueba y de test (elementos de densidad de corriente constante, ponderación por colocación puntual, etc.). Por ello, en el marco de esta formulación es posible explicar y cuantificar, desde un punto de vista matemáticamente riguroso, las anomalías encontradas a lo largo del tiempo en la aplicación de este tipo de métodos, y desarrollar nuevas formulaciones más eficientes y precisas

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la SGPICIT del Ministerio de Ciencia y Tecnología mediante los proyectos #DPI2001-0556 y #DPI2002-00297, cofinanciados con fondos FEDER, así como por la Secretaría Xeral de I+D de la Xunta de Galicia y por la Universidad de A Coruña.

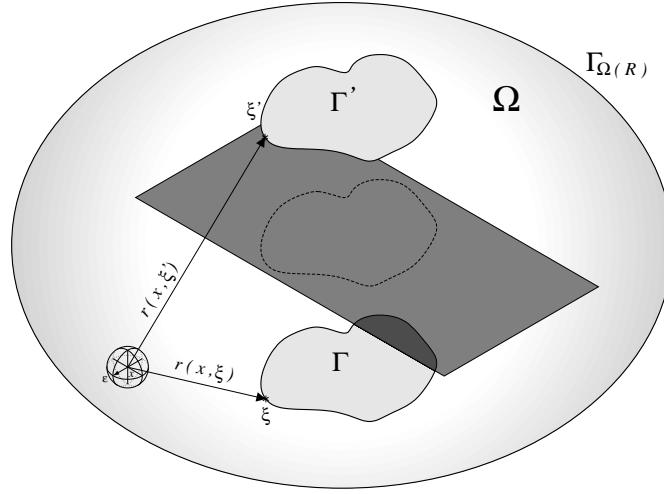


Figura 4. Dominio extendido simétrico para el problema (1).

APÉNDICE I: EXPRESIÓN INTEGRAL PARA EL POTENCIAL

Pretendemos obtener una expresión integral para la solución $V(\mathbf{x})$ del problema (1) en un punto arbitrario \mathbf{x} en E . Suponemos que la superficie del terreno Γ_E es horizontal.

En primer lugar, extendemos el dominio E añadiendo su simétrico respecto al plano Γ_E . Sea $\Omega(\infty)$ el dominio extendido (infinito). Sea $\Omega(R) \subset \Omega(\infty)$ un subdominio finito, y sea R su diámetro. Sea $\Gamma_{\Omega(R)}$ el contorno exterior de $\Omega(R)$. Sea Γ' la imagen de la superficie del electrodo Γ respecto al plano Γ_E . Suponemos que el valor de R es suficientemente grande. Así, la toma de tierra y su simétrica están embebidas —pero no incluidas— en $\Omega(R)$ (figura 4).

El suelo se considera homogéneo e isótropo. Por tanto, el tensor $\boldsymbol{\gamma}$ se sustituye por la conductividad escalar constante γ y el problema (1) se reduce al Problema Exterior de Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta V(\mathbf{z}) = 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \Omega(\infty), \quad V(\boldsymbol{\xi}) = V_\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \Gamma, \quad V(\boldsymbol{\xi}') = V_\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\xi}' \in \Gamma', \\ V(\mathbf{z}) \text{ verifica condiciones normales si } |\mathbf{z}| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (29)$$

ya que la condición de contorno natural $\boldsymbol{\sigma}^t \mathbf{n}_E = 0$ en Γ_E se satisface automáticamente por simetría. Las condiciones normales en el infinito se expresan matemáticamente como [7, 8]

$$|V(\mathbf{z})| = O(|\mathbf{z}|^{-1}) \quad \text{si } |\mathbf{z}| \rightarrow \infty, \quad \text{y} \quad |\mathbf{grad}(V(\mathbf{z}))| = O(|\mathbf{z}|^{-2}) \quad \text{si } |\mathbf{z}| \rightarrow \infty. \quad (30)$$

Para el punto dado \mathbf{x} , la denominada solución fundamental [27] para el problema anterior es

$$\Psi(\mathbf{z}) = \frac{1}{4\pi r(\mathbf{x}, \mathbf{z})}, \quad r(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = |\mathbf{x} - \mathbf{z}|, \quad (31)$$

donde $|\mathbf{x} - \mathbf{z}|$ es la distancia euclídea entre \mathbf{x} y \mathbf{z} . Esta función satisface el enunciado

$$\Delta \Psi(\mathbf{z}) = \delta(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{z} \in \Omega(\infty), \quad \Psi(\mathbf{z}) \text{ verifica condiciones normales si } |\mathbf{z}| \rightarrow \infty, \quad (32)$$

siendo δ la distribución delta de Dirac. Por tanto, la solución fundamental se puede interpretar como la solución particular del problema para una fuente puntual de corriente situada en el

punto dado \mathbf{x} [27]. El Laplaciano de la solución fundamental (31) es obviamente singular en $\mathbf{z} = \mathbf{x}$, pero se anula en cualquier otro punto. Para evitar la singularidad definimos la bola $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ de radio ε centrada en el punto \mathbf{x} (véase la figura 4). Sea $\Gamma_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)}$ el contorno de $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$.

Consideremos el dominio cerrado $D(R, \varepsilon) = \Omega(R) - B(\mathbf{x}, \varepsilon)$. Obviamente, tanto $V(\mathbf{z})$ como $\Psi(\mathbf{z})$ son funciones de clase C^2 en $D(R, \varepsilon)$. Por tanto, podemos aplicar la segunda identidad de Green [17, 11] a nuestro problema. Obtenemos

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbf{z} \in D(R, \varepsilon)} (V(\mathbf{z}) \Delta \Psi(\mathbf{z}) - \Psi(\mathbf{z}) \Delta V(\mathbf{z})) dD = \\ \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma_{D(R, \varepsilon)}} (V(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \Psi}{\partial n_D}(\boldsymbol{\xi}) - \Psi(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial V}{\partial n_D}(\boldsymbol{\xi})) d\Gamma_D, \end{aligned} \quad (33)$$

donde $\Gamma_D(R, \varepsilon)$ es el contorno del dominio $D(R, \varepsilon)$ y \mathbf{n}_D es el correspondiente vector normal exterior unitario. Ambas funciones, $V(\mathbf{z})$ y $\Psi(\mathbf{z})$, son armónicas en $D(R, \varepsilon)$, puesto que (29) y (32) se satisfacen y la singularidad en $\mathbf{z} = \mathbf{x}$ ha sido aislada. Luego (33) se reduce a

$$\iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma_{D(R, \varepsilon)}} \Upsilon(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_D = 0, \quad \text{siendo } \Upsilon(\boldsymbol{\xi}) = V(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \Psi}{\partial n_D}(\boldsymbol{\xi}) - \Psi(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial V}{\partial n_D}(\boldsymbol{\xi}). \quad (34)$$

Finalmente, es obvio que (34) se cumple para valores arbitrariamente grandes de R y valores arbitrariamente pequeños de ε . Por tanto, podemos escribir

$$\lim_{R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma_{D(R, \varepsilon)}} \Upsilon(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_D = 0. \quad (35)$$

El contorno exterior de $D(R, \varepsilon)$ es $\Gamma_{\Omega(R)}$. El contorno interior de $D(R, \varepsilon)$ consiste en los contornos exteriores de 1) el electrodo (Γ), 2) su imagen (Γ'), y 3) la bola $\Gamma_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)}$. Por tanto

$$\Gamma_D = \Gamma_{\Omega(R)} \cup \Gamma_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \cup \Gamma \cup \Gamma' \quad (36)$$

y

$$\iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma_{D(R, \varepsilon)}} \Upsilon(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_D = \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma_{\Omega(R)}} \Upsilon(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_D + \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)}} \Upsilon(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_D + \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} \Upsilon(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_D + \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma'} \Upsilon(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_D. \quad (37)$$

Dado que (31) da $\Psi(\boldsymbol{\xi})$ para todo $\boldsymbol{\xi}$ en Γ_D , y $V(\mathbf{z})$ satisface (29) y (30), se cumple [11]

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma_{\Omega(R)}} \Upsilon(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_D = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)}} \Upsilon(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_D = V(\mathbf{x}), \\ \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} \Upsilon(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_D = \frac{1}{4\pi} \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} \frac{1}{r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})} \frac{\partial V}{\partial n}(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma, \quad \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma'} \Upsilon(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_D = \frac{1}{4\pi} \iint_{\boldsymbol{\xi}' \in \Gamma'} \frac{1}{r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}')} \frac{\partial V}{\partial n'}(\boldsymbol{\xi}') d\Gamma', \end{aligned} \quad (38)$$

siendo \mathbf{n} y \mathbf{n}' los vectores normales exteriores unitarios a Γ y Γ' . Por tanto (35) se reduce a

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} \frac{1}{r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})} \frac{\partial V}{\partial n}(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma + -\frac{1}{4\pi} \iint_{\boldsymbol{\xi}' \in \Gamma'} \frac{1}{r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}')} \frac{\partial V}{\partial n'}(\boldsymbol{\xi}') d\Gamma'. \quad (39)$$

Finalmente, podemos aprovecharnos de la simetría para escribir [10, 11, 12]

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \sigma(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma, \quad \text{siendo } \sigma(\boldsymbol{\xi}) = -\gamma \frac{\partial V}{\partial n}(\boldsymbol{\xi}) \quad (40)$$

y

$$k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \left(\frac{1}{r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})} + \frac{1}{r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}') } \right), \quad (41)$$

donde $\boldsymbol{\xi}'$ es el simétrico de $\boldsymbol{\xi}$ respecto a la superficie del terreno. La función $\sigma(\boldsymbol{\xi})$ en (40) se identifica claramente como la densidad de corriente de pérdida en un punto arbitrario $\boldsymbol{\xi}$ sobre el electrodo Γ . Con estas suposiciones podemos probar también que (40) se verifica sobre la superficie del electrodo, lo que nos permite escribir

$$V(\boldsymbol{\chi}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} k(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\xi}) \sigma(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma, \quad \forall \boldsymbol{\chi} \in \Gamma. \quad (42)$$

Esto no es ni obvio ni trivial, y la prueba requiere una discusión especial [11]. En este caso, el núcleo (41) es singular en $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\chi}$. Puesto que (42) tiene sentido, a pesar de la singularidad, se dice que (41) es un núcleo débilmente singular.

Nótese que la expresión (40) siempre satisface la ecuación de campo, la condición de contorno natural y las condiciones normales en el infinito del problema (1). Por tanto, lo único que falta para resolver el problema es que se satisfaga la condición de contorno esencial $V = V_\Gamma$ en Γ . Impondremos este requisito mediante (42). Por consiguiente, nuestro problema se reduce a encontrar la distribución de la densidad de corriente de pérdida incógnita $\sigma(\boldsymbol{\xi})$ en Γ que verifica

$$V_\Gamma = \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} k(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\xi}) \sigma(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma, \quad \forall \boldsymbol{\chi} \in \Gamma. \quad (43)$$

Una vez se conozca la distribución de la densidad de corriente de pérdida, se podrá calcular el potencial en cualquier punto mediante la expresión (40).

REFERENCIAS

- [1] J.G. Sverak, W.K. Dick, T.H. Dodds and R.H. Heppe, Safe Substation Grounding, *IEEE-TPAS*, Part I: **100**, 4281–4290 (1981); Part II: **101**, 4006–4023 (1982).
- [2] IEEE Std.80–2000, *IEEE Guide for Safety in AC Substation Grounding*, IEEE (2000).
- [3] J.G. Sverak, Progress in Step and Touch Voltage Equations of ANSI/IEEE Std 80. Historical Perspective, *IEEE Trans. on Power Delivery*, **13**, 762–767 (1998).
- [4] R.J. Heppe, Computation of Potential at Surface Above an Energized Grid or Other Electrode, Allowing for Non-Uniform Current Distribution, *IEEE-TPAS*, **98**, 1978–1988 (1979).
- [5] D.L. Garrett and J.G. Pruitt, Problems Encountered With the Average Potential Method of Analyzing Substation Grounding Systems, *IEEE-TPAS*, **104**, 3586–3596 (1985).
- [6] B. Thapar, V. Gerez, A. Balakrishnan, D.A. Blank, Simplified Equations for Mesh and Step Voltages in AC Substation, *IEEE Trans. on Power Delivery*, **6**, 601–607 (1991).
- [7] E. Durand, *Électrostatique*, Masson (1966).
- [8] O.D. Kellogg, *Foundations of Potential Theory*, Springer-Verlag (1967).
- [9] P.P. Silvester and R.L. Ferrari, *Finite Elements for Electrical Engineers*, Cambridge University Press (1996).

- [10] F. Navarrina, I. Colominas and M. Casteleiro, Analytical Integration Techniques for Earthing Grid Computation by BEM, En: H. Alder et al. (Eds.), *Numerical Methods in Engineering and Applied Sciences*, 1197–1206, CIMNE (1992).
- [11] I. Colominas, *A CAD System for Grounding Grids in Electrical Installations: A Numerical Approach Based on the Boundary Element Integral Method* (in Spanish), Ph.D. Thesis, Universidad de A Coruña (1995).
- [12] I. Colominas, F. Navarrina and M. Casteleiro, A Boundary Element Numerical Approach for Grounding Grid Computation, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **174**, 73–90 (1999).
- [13] F.P. Dawalibi, D. Mudhekar Optimum Design of Substation Grounding in a Two-Layer Earth Structure, *IEEE-TPAS*, **94**, 252–272 (1975).
- [14] H.S. Lee, J.H. Kim, F.P. Dawalibi, J. Ma Efficient Ground Designs in Layered Soils, *IEEE Trans. on Power Delivery*, **13**, 745–751 (1998).
- [15] E.D. Sunde, *Earth Conduction Effects in Transmission Systems*, McMillan (1968).
- [16] F. Navarrina, L. Moreno, E. Bendito, A. Encinas, A. Ledesma and M. Casteleiro, Computer Aided Design of Grounding Grids: A Boundary Element Approach, En: M. Heiliö (Ed.), *Mathematics in Industry*, 307–314, Kluwer Academic Pub. (1991).
- [17] I. Stakgold, *Boundary Value Problems of Mathematical Physics*, McMillan (1970).
- [18] I. Colominas, F. Navarrina and M. Casteleiro, A Validation of the Boundary Element Method for Grounding Grid Design and Computation, En: H. Alder et al. (Eds.), *Numerical Methods in Engineering and Applied Sciences*, 1187–1196, CIMNE (1992).
- [19] C. Johnson, *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*, Cambridge Univ. Press (1987).
- [20] T.J.R. Hughes, *The Finite Element Method*, Prentice Hall (1987).
- [21] A.N. Kolmogorov and S.V. Fomin, *Introductory Real Analysis*, Dover (1975).
- [22] G. Pini and G. Gambolati, Is a Simple Diagonal Scaling The Best Preconditioner For Conjugate Gradients on Supercomputers?, *Adv. on Water Resources*, **13**, 147–153 (1990).
- [23] I. Colominas, F. Navarrina, G. Mosqueira, J.M. Eiroa and M. Casteleiro, Numerical Modelling of Grounding Systems in High-Performance Parallel Computers, En: C.A. Brebbia and H. Power (Eds.), *Boundary Elements XXII*, WIT Press (2000).
- [24] I. Colominas, F. Navarrina and M. Casteleiro, A Boundary Element Formulation for the Substation Grounding Design, *Advances in Engineering Software*, **30**, 693–700 (1999).
- [25] I. Colominas, J. Gómez Calviño, F. Navarrina and M. Casteleiro, Computer Analysis of Earthing Systems in Horizontally or Vertically Layered Soils, *Electric Power Systems Research*, **59**, 149–156 (2001).
- [26] I. Colominas, F. Navarrina and M. Casteleiro, A Numerical Formulation for Grounding Analysis in Stratified Soils, *IEEE Trans. on Power Delivery*, **17**, 587–595 (2002).
- [27] M. Bonnet *Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids*, John Wiley and Sons Ltd (1995).
- [28] I. Colominas, F. Navarrina and M. Casteleiro, Analysis of transferred earth potentials in grounding systems: A BEM numerical approach, *IEEE Trans. on Power Delivery*, [En Prensa] (2004).