Curvas geodésicas: um exemplo com resolução analítica.

by J. P. FATELO AND N. MARTINS-FERREIRA

ESTG, CDRSP
Instituto Politécnico de Leiria

Resumo Apresentamos um exemplo de uma superfície não trivial em $\mathbb{R}^3$ na qual as curvas geodésicas são encontradas analiticamente.

1 Introdução

Tal como explicado em [1], na maioria dos casos, as curvas geodésicas são obtidas com recurso a aplicações computacionais. Entre as superfícies com curvas geodésicas encontradas analiticamente e sem aproximações, destacam-se o caso da superfície esférica com a solução (*intuitiva*) correspondente aos "grandes círculos" e o caso do cilindro que, neste particular, não é muito diferente de um plano onde as geodésicas são retas. Neste artigo considera-se uma superfície de revolução que, mesmo não sendo trivial, permite uma determinação explícita, em termos de funções elementares, das suas curvas geodésicas.

Na secção 2, apresentamos a superfície considerada. Na secção 3, resolvemos as equações das geodésicas para este exemplo e explicitamos as soluções sujeitas a condições iniciais e, na secção 4, as soluções na presença de condições de fronteira.

As figuras expostas neste artigo foram geradas usando a aplicação Mathematica [2].

2 A superfície

Em geral, as superfícies de revolução em $\mathbb{R}^3$ podem ser parametrizadas da seguinte maneira

$$\vec{\sigma}(\alpha,\theta) = \big(r(\alpha)\cos\theta, r(\alpha)\sin\theta, z(\alpha)\big). \tag{1}$$

Neste artigo, vamos considerar o caso em que

$$r(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}},$$

$$z(\alpha) = \int_{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}^{\alpha} \sqrt{1-\frac{1}{4\,x^3}}\,dx,$$

onde $\alpha \geq \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ e $\theta \in \mathbb{R}$. A função z pode ser expressa em termos da função gama Γ e da função hipergeométrica ${}_2F_1$ da seguinte maneira:

$$z(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)}{\sqrt[3]{4}\,\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} + \alpha\,{}_2F_1\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{4\,\alpha^3}\right).$$

Parte da superfície assim definida está representada na *Fig. 1*.

O parâmetro θ assume qualquer valor real e considera-se a seguinte interpretação: pontos com o mesmo valor de α mas com valores de θ que diferem por um múltiplo de $2\,\pi$ correspondem à mesma posição geométrica mas situam-se em *camadas* diferentes da superfície.

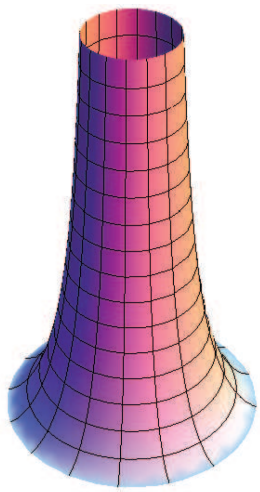

Fig. 1: Vista parcial da superfície em estudo.

Estas expressões de r e z foram escolhidas porque têm a seguinte propriedade:

$$r'^2 + z'^2 = 1.$$

Assim, o tensor métrico da superfície é uma matriz com a forma

$$g = \begin{pmatrix} r'^2 + z'^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\alpha \end{pmatrix}.$$

A partir do tensor métrico, obtêm-se as equações das geodésicas [1]:

$$\ddot{\alpha} + \frac{1}{2\,\alpha^2}\,\dot{\theta}^2 = 0 \tag{2}$$

$$\ddot{\theta} - \frac{1}{\alpha}\,\dot{\alpha}\,\dot{\theta} = 0. \tag{3}$$

Uma geodésica na superfície é um conjunto de pontos parametrizado por $\vec{\sigma}(\alpha(t),\theta(t))$, onde t é um parâmetro real e $\alpha = \alpha(t)$ e $\theta = \theta(t)$ são soluções das equações (2) e (3). Estas equações formam um sistema autónomo uma vez que não dependem explicitamente da variável independente t. Na secção seguinte, o sistema é resolvido com a utilização de leis de conservação, também conhecidas por *first integrals*.

3 Geodésicas a partir de um ponto dado

Nesta secção apresentam-se os cálculos necessários para obter as soluções dos caminhos geodésicos que começam num dado ponto inicial. Em primeiro lugar, observa-se que o sistema de equações (2) e (3) implica:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{\alpha}\,\dot{\theta}^2\right) = 2\,\dot{\alpha}\left(\ddot{\alpha} + \frac{1}{2\,\alpha^2}\,\dot{\theta}^2\right) = 0$$

e

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\theta}}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}\left(\ddot{\theta} - \frac{1}{\alpha}\,\dot{\alpha}\,\dot{\theta}\right) = 0.$$

Por conseguinte, as curvas geodésicas são soluções do seguinte sistema mais simples:

$$\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{\alpha}\,\dot{\theta}^2 = v^2 \tag{4}$$

$$\dot{\theta} = \alpha\, l, \tag{5}$$

onde v e l são constantes arbitrárias. É possível relacionar (4) e (5), respetivamente, com a conservação da energia e do momento angular. De facto, estas quantidades são conservadas ao longo de um caminho geodésico uma vez que este é o caminho seguido por uma partícula livre, ou seja, sem forças a atuar sobre ela (para além daquelas que a mantêm na superfície).

Uma primeira classe de soluções corresponde ao caso $l = 0$, em que θ se mantém constante ao longo da geodésica, que é portanto um "meridiano" da superfície, e em que α varia linearmente com t.

Para determinar as soluções com $l \neq 0$, substitui-se (5) em (4), e obtem-se a equação

$$\dot{\alpha}^2 = v^2 - \alpha\, l^2,$$

donde

$$\dot{\alpha} = \pm\sqrt{v^2 - \alpha\, l^2}.$$

Considerando que são conhecidos os valores de α e θ em $t = 0$ (e notando $\alpha(0) = \alpha_0$ e $\theta(0) = \theta_0$), esta equação reduz-se a:

$$\sqrt{v^2 - \alpha\, l^2} = \sqrt{v^2 - \alpha_0\, l^2} \mp \frac{l^2}{2} t.$$

Usando a notação $\beta_0 = \dot{\alpha}(0) = \pm\sqrt{v^2 - \alpha_0\, l^2}$, a solução escreve-se

$$v^2 - \alpha\, l^2 = \left(\beta_0 - \frac{l^2}{2} t\right)^2,$$

ou seja,

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \beta_0\, t - \frac{l^2}{4}\, t^2. \tag{6}$$

Usando este resultado na equação (5), determina-se θ:

$$\theta(t) = \theta_0 + \alpha_0\, l\, t + \frac{\beta_0\, l}{2}\, t^2 - \frac{l^3}{12}\, t^3. \tag{7}$$

Em resumo, com as condições iniciais $\alpha(0) = \alpha_0$, $\theta(0) = \theta_0$, $\beta_0 = \dot{\alpha}(0)$ e $\omega_0 = \dot{\theta}(0) = \alpha_0\, l$, as soluções de (2) e (3) são

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \beta_0\, t - \frac{\omega_0^2}{4\,\alpha_0^2}\, t^2$$

e

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0\, t + \frac{\beta_0\, \omega_0}{2\,\alpha_0}\, t^2 - \frac{\omega_0^3}{12\,\alpha_0^3}\, t^3,$$

sempre que $\alpha_0 + \beta_0\, t - \frac{\omega_0^2}{4\,\alpha_0^2}\, t^2 \geq \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

Por exemplo, no caso $\alpha_0 = 1, \theta_0 = -2, \beta_0 = 4.25$ e $\omega_0 = 1.3$, a geodésica está representada na figura seguinte.

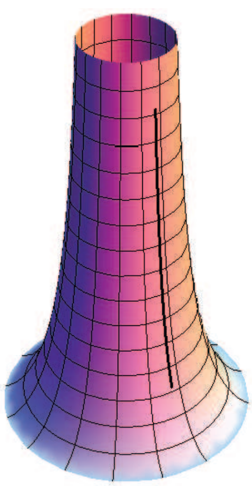

Fig. 2: Um meridiano.

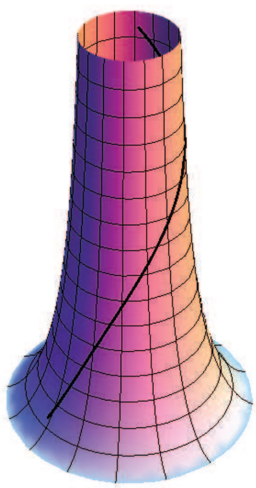

Fig. 3: Caminho geodésico 1.

Segue outro exemplo com $\alpha_0 = 2$, $\theta_0 = -1.8$, $\beta_0 = 4.5$ e $\omega_0 = 4$.

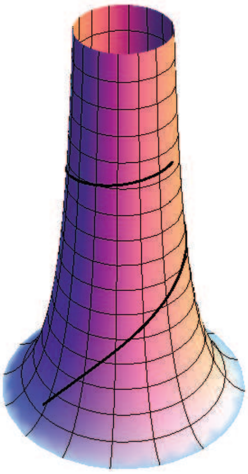

Fig. 4: Caminho geodésico 2.

Neste segundo exemplo, a curva geodésica não corresponde ao caminho mais curto entre as extremidades representadas. Mas isso não é uma contradição, conforme vamos esclarecer na próxima secção. Devido às condições iniciais, a curva não podia seguir diretamente para o ponto final, ou dito de outra forma, nas condições deste exemplo as extremidades da curva representadas estão em *camadas* diferentes da superfície o que obriga a curva a enrolar uma vez.

4 Geodésicas entre dois pontos

As soluções obtidas na secção anterior permitem obter os caminhos geodésicos a partir de um ponto inicial caraterizado pelos valores α_0 e θ_0 e conhecidos os dois parâmetros β_0 e l ou, de forma equivalente, β_0 e $\omega_0 = \alpha_0\, l$. Na prática, um problema que surge com alguma frequência consiste na determinação de um caminho geodésico entre dois pontos dados. Para isso, é necessário conseguir escrever os dois parâmetros β_0 e l em função dos pontos extremos do caminho em causa. A *Fig. 5* mostra um exemplo de dois pontos sobre um "paralelo" (conjunto de pontos da superfície com o mesmo valor de z) bem como o caminho geodésico que os liga.

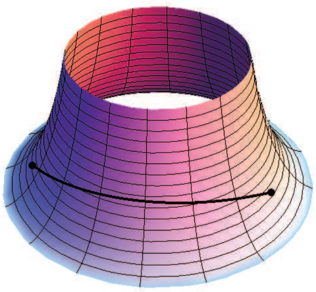

Fig. 5: Caminho geodésico entre dois pontos de um mesmo paralelo.

Os próprios paralelos não são curvas geodésicas uma vez que girar sobre paralelos de menor raio equivale a uma menor distância percorrida.

Supõe-se então que os valores de α e θ são conhecidos para dois valores de t. Sem perda de generalidade, a escolha destes valores pode ser $t = 0$ e $t = 1$:

$$\alpha(0) = \alpha_0 \quad ; \quad \theta(0) = \theta_0 \quad ; \quad \alpha(1) = \alpha_1 \quad ; \quad \theta(1) = \theta_1 .$$

Uma escolha diferente de $t = 1$, correspondente ao segundo ponto dado, apenas altera a velocidade com que o caminho geodésico é percorrido mas não o *trilho* na superfície. A partir de (6) e (7), obtêm-se as relações

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_0 + \beta_0 - \frac{l^2}{4} \\ \theta_1 &= \theta_0 + \left(\alpha_0 + \frac{\beta_0}{2}\right) l - \frac{l^3}{12}, \end{aligned}$$

donde se conclui que:

$$\beta_0 = \alpha_1 - \alpha_0 + \frac{l^2}{4} \qquad (8)$$

$$l^3 + 12\,(\alpha_0 + \alpha_1)\, l + 24\,(\theta_0 - \theta_1) = 0. \qquad (9)$$

Esta equação de terceiro grau é incompleta e pode resolver-se através da mudança de variável

$$l = x - 4\,\frac{\alpha_0 + \alpha_1}{x},$$

que produz uma equação quadrática em x^3. A solução é:

$$\begin{aligned} l = &\sqrt[3]{12(\theta_1 - \theta_0) + 4\sqrt{9(\theta_1 - \theta_0)^2 + 4(\alpha_0 + \alpha_1)^3}} \\ &+ \sqrt[3]{12(\theta_1 - \theta_0) - 4\sqrt{9(\theta_1 - \theta_0)^2 + 4(\alpha_0 + \alpha_1)^3}}. \qquad (10) \end{aligned}$$

Usando (8) e (9), as equações (6) e (7) podem agora ser escritas em termos de α_0, α_1, θ_0 e θ_1. Mantendo a notação (10) por conveniência, o resultado é:

$$\alpha(t) = \alpha_0\,(1 - t) + \alpha_1\, t + \frac{l^2}{4}\, t\,(1 - t) \qquad (11)$$

$$\begin{aligned} \theta(t) = \theta_0\,(1 - t) + \theta_1\, t + \frac{l}{2}\,(\alpha_0 - \alpha_1)\, t\,(1 - t) \\ + \frac{l^3}{24}\, t\,(1 - t)\,(2t - 1). \qquad (12) \end{aligned}$$

Estão reunidas as condições para voltar ao aparente paradoxo da *Fig. 4* onde a curva representada, apesar de ser parte de uma geodésica, não é o caminho mais curto entre as suas extremidades. Para exemplificar a análise, considere os pontos $A = \vec{\sigma}(2, -1.8)$ e $B = \vec{\sigma}(5.5, 6)$. Usando as equações (11) e (12) com $\alpha_0 = 2$, $\theta_0 = -1.8$, $\alpha_1 = 5.5$ e $\theta_1 = 6$, obtém-se a curva geodésica entre A e B representada na *Fig. 6*.

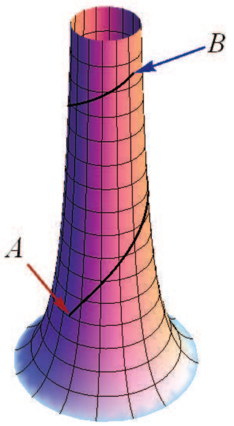

Fig. 6: Caminho geodésico entre A e B.

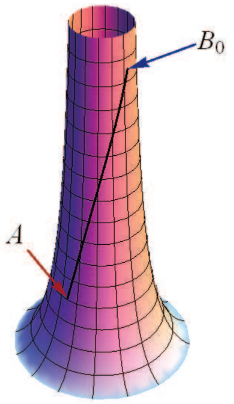

Fig. 7: Caminho geodésico entre A e B_0.

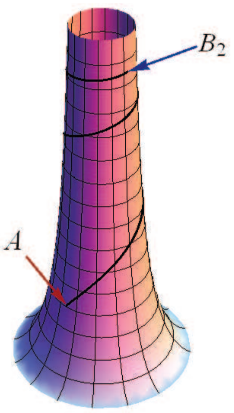

Fig. 8: Caminho geodésico entre A e B_2.

Observa-se que $\theta_1 - \theta_0 = 7.8$, ou seja, superior a 2π. O que significa que A e B não estão situados na mesma *camada* da superfície. O ponto $B_0 = \overrightarrow{\sigma}(5.5, 6-2\pi)$ está situado na mesma posição da superfície de B e na mesma *camada* de A. Usando as equações (11) e (12) com $\alpha_0 = 2$, $\theta_0 = -1.8$, $\alpha_1 = 5.5$ e $\theta_1 = 6 - 2\pi$, obtém-se a curva geodésica entre A e B_0 representada na *Fig. 7*.

Agora sim, foi encontrado o caminho mais curto entre as duas posições na superfície.

Podemos também procurar caminhos geodésicos entre A e outros pontos na mesma posição de B mas em camadas diferentes. A curva geodésica entre A e $B_2 = \overrightarrow{\sigma}(5.5, 6 + 2\pi)$ está representada na *Fig. 8*.

A *Fig. 9* representa a curva geodésica entre A e $B_4 = \overrightarrow{\sigma}(5.5, 6 + 6\pi)$

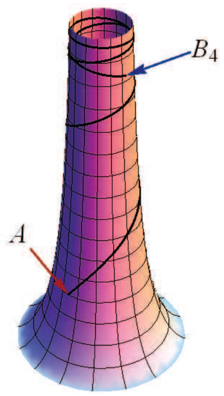

Fig. 9: Caminho geodésico entre A e B_4.

enquanto a *Fig. 10* representa a curva geodésica entre A e $B_{-1} = \overrightarrow{\sigma}(5.5, 6 - 4\pi)$.

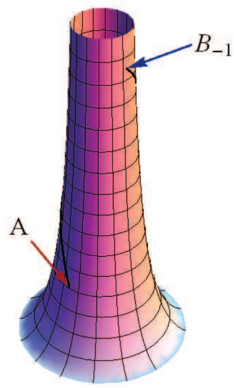

Fig. 10: Caminho geodésico entre A e B_{-1}.

5 Conclusão

Este estudo resulta de um trabalho ainda em curso sobre a possibilidade de axiomatizar a noção de caminho geodésico através de uma operação binária que a cada dois pontos associa o ponto médio do percurso geodésico que os une. Neste caso a operação binária seria dada pelas equações (11) e (12) com $t = \frac{1}{2}$. O exemplo aqui ilustrado serviu o propósito de testar os axiomas de uma tal estrutura algébrica.

Bibliografia

[1] J. P. Fatelo, Nelson Martins-Ferreira, *Curvas Geodésicas em superfícies*, Scripta-Ingenia, June 2014, No. 2, 22-25.

[2] Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 9.0, Champaign, IL (2012).