Selma dos Santos Feteira

Relatório de Trabalho de Projeto

Os números racionais, na sua representação por frações, nos primeiros anos de escolaridade

Mestrado em Educação e Tecnologia em Matemática

Relatório realizado sob a orientação de

Professora Doutora Marina Vitória Valdez Faria Rodrigues

Leiria, 2012

Selma dos Santos Feteira

Relatório de Trabalho de Projeto

Os números racionais, na sua representação por frações, nos primeiros anos de escolaridade

Mestrado em Educação e Tecnologia em Matemática

Relatório realizado sob a orientação de

Professora Doutora Marina Vitória Valdez Faria Rodrigues

Leiria, 2012

O júri

Presidente

Doutor/a ____

Doutor/a ____

Doutor/a ____

Doutor/a ____

Doutor/a ____

Agradecimentos

A realização deste projeto de investigação permitiu-me desenvolver significativamente o meu conhecimento profissional, assim como, me ajudou a crescer a nível pessoal. Foi uma tarefa difícil de concretizar, como muitos obstáculo, mas também, com muitos momentos de realização e de felicidade. Esta etapa tão importante, não teria chegado ao fim, sem a colaboração e apoio de várias pessoas, às quais quero agradecer.

À minha orientadora, Professora Doutora Marina Vitória Valdez Faria Rodrigues, pela sua dedicação, permanente disponibilidade, incentivo, exigência e principalmente pela sua capacidade de me orientar de forma construtiva, respeitando as minhas ideias e ao mesmo tempo transmitindo os seus conhecimentos.

Aos alunos que participaram nesta investigação, pelo seu empenho e cooperação, pois sem este importante contributo não teria sido possível realizar este estudo.

Aos professores e colegas de mestrado, pelo apoio, encorajamento e disponibilidade prestados ao longo destes dois anos.

Aos meus pais, Celina e Armando, pelo entusiasmo, amor, e paciência com que sempre me apoiaram.

A todos aqueles, que direta ou indiretamente, me apoiaram e incentivaram, contribuindo para a realização deste trabalho.

Resumo

O desenvolvimento do sentido de número racional tem-se revelado um foco de dificuldades no processo de ensino/aprendizagem dos alunos. O momento em que este tema deve ser introduzido também tem gerado alguma falta de consenso.

As exigências resultantes da reorganização curricular, bem como a minha experiência como professora do 1.º e 2.ºciclos, permitem-me conhecer muitas das dificuldades dos alunos e fizeram-me sentir necessidade de averiguar como os alunos, do 1.º ciclo do ensino básico, desenvolvem o sentido de número racional. Assim, com este estudo pretendeu-se analisar como se desenvolve o sentido de número racional em alunos do 1.º ano de escolaridade.

Foi realizada uma investigação de natureza qualitativa na forma de estudo de caso, pois pretendia-se investigar um fenómeno atual no seu contexto real, dando a conhecer casos particulares.

Para realizar este estudo, numa turma de 1.º ano de escolaridade, foram promovidas experiências de aprendizagem diversificadas e devidamente contextualizadas, com as quais se procurou promover o desenvolvimento do sentido de número racional, analisar e interpretar esse desenvolvimento, e sempre que possível estabelecer conexões com os vários temas matemáticos.

Como instrumentos de recolha de dados, foram usados: o diário de pesquisa, as produções dos alunos e o registo em áudio e/ou em vídeo, das aulas em que foram realizadas as experiências de aprendizagem. Esta recolha de dados foi efetuada ao longo de dois períodos escolares. A análise dos dados realizou-se com base nos procedimentos da análise de conteúdo.

De modo a formular conclusões/tecer considerações, analisaram-se os resultados do estudo à luz do contexto teórico, procurando encontrar resposta para as seguintes questões: 1) Que processos usam os alunos na resolução de tarefas conducentes ao desenvolvimento do sentido de número racional? 2) Que estratégias de ensino parecem facilitar ou dificultar o desenvolvimento do sentido de número racional? 3) Que dificuldades manifestam os alunos no desenvolvimento do sentido de número racional.

A análise dos resultados permitiu constatar que os alunos já possuíam alguns conhecimentos sobre os números racionais, resultantes das suas vivências, aos quais recorriam frequentemente. A estratégia de tentativa e erro e a mobilização de conhecimentos também se destacaram como processos privilegiados pelos alunos. Relativamente às estratégias de ensino evidenciaram-se três aspetos fundamentais: a contextualização das tarefas; o recurso a materiais manipulativos; e o incentivo à realização de representações esquemáticas. As principais dificuldades apresentadas concentraram-se no trabalho com unidades discretas e na designação das partes obtidas numa divisão.

Palavras-chave: números racionais; frações; sentido de número; abordagem intuitiva; matemática.

Abstract

The development of the sense of rational number has proved to be a focus of difficulties in the process of students teaching/learning. The time that this subject should be introduced has also generated some lack of consensus. The curricular requirements resulting from the reorganization, as well as my experience as a teacher of 1st and 2nd cycles, allow me to meet many of the students ' difficulties and made me feel the need to investigate how students, of the 1st cycle of basic education, develop a sense of rational number. So, with this study, I will examine how students of the 1st year of schooling develop the sense of rational number.

I carried out an investigation of a qualitative nature in the form of case study, because I intended to investigate a current phenomenon in its real context, together with individual cases.

To perform this study, I have worked with a class of students, during their 1st year of schooling. I have promoted several learning experiences which were properly contextualized, its aim were to promote the development of the sense of rational number. Throughout the study, whenever it was possible, I established the possibility of existing connections with various mathematical topics. I use the application of different activities to analyze and grasp the process.

As data collection tools I used: the journal of research, the students ' productions and the classes in which learning experiences were conducted were recorded by audio and/or video. This data collection was performed over two school periods. Data analysis was carried out on the basis of content analysis procedures.

In order to formulate findings, analyzed the results of the study in the light of the theoretical context, seeking to find answers to the following questions: 1) what processes are used by students in solving tasks leading to the development of the sense of rational number? 2) What teaching strategies seem to facilitate or impede the development of the sense of rational number? 3) Which are the difficulties manifested by students in developing the sense of rational number? The analysis of the results found that students already had some knowledge about the rational numbers, resulting from their experiences, which often drew on. The strategy of trial and error and the mobilization of knowledge also stood out as privileged processes by students. The teaching strategies used have demonstrated three fundamental aspects: the tasks contextualization; the use of manipulative materials; and encouraging the attainment of schematic representations. The main difficulties presented were focused on work with discrete units and the names of the parties obtained in a division.

Keywords: rational numbers; fractions; number sense; intuitive approach; mathematics.

Índice geral

Índice de figuras

Índice de tabelas

I - Introdução

Este estudo que pretende contribuir para a compreensão do processo de ensino/aprendizagem dos números racionais, na sua representação por frações, nos primeiros anos de escolaridade, foi organizado em sete capítulos.

Neste primeiro capítulo – Introdução, é apresentada a problemática e as questões orientadoras do estudo, bem como a justificação das motivações que desencadearam esta investigação e a pertinência do estudo.

No segundo capítulo – Fundamentação teórica, apresenta-se o enquadramento teórico que fundamenta o estudo. Este capítulo encontra-se dividido em três secções intituladas: Sentido de número; Os números racionais no currículo; A aprendizagem de números racionais.

O terceiro capítulo – Metodologia, é dedicado à apresentação das opções metodológicas, dos participantes no estudo e dos procedimentos seguidos. Também é feita uma breve descrição das tarefas aplicadas e dos instrumentos e procedimentos de recolha de dados. É ainda referido como se efetuou a análise destes dados.

A presentação e discussão dos resultados constitui o quarto capítulo e é realizada por aluno caso.

No quinto capítulo – Conclusões, é realizada uma síntese do estudo, são apresentadas as principais conclusões e limitações deste e, são também, feitas algumas recomendações.

1.1 - Problemática e objetivos de investigação

O desenvolvimento do sentido de número racional tem-se revelado um foco de dificuldades no processo de ensino/aprendizagem dos alunos. Segundo Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) os alunos têm tendência a transferir regras aprendidas nos números inteiros para os números racionais, o que lhes causa alguma estranheza em determinadas regras. Outra dificuldade, resulta do facto de o numerador e o denominador serem vistos separadamente e não como uma razão, impedindo que os alunos interpretem uma fração como um número. Monteiro e Pinto (2005) referem, ainda, as dificuldades apresentadas pelos alunos em aceitarem que uma divisão possa ter como resultado um número superior ao dividendo.

Segundo Confrey, Kieren e Mack (citados por Damico, 2007), uma possível justificação para as dificuldades sentidas pelos alunos, prende-se com o facto de os professores não levarem em consideração as tentativas de explicação que as crianças apresentam para que os números racionais tenham sentido para elas.

A temática dos números racionais tem gerado alguma controvérsia entre os estudiosos da matéria. De acordo com Pinto (2004) alguns investigadores e professores, devido aos maus resultados apresentados pelos alunos na realização de tarefas que envolvem números racionais, defendem que a introdução destes deve ser feita em níveis etários mais avançados. Contudo, existem autores que defendem o contrário. Smith (2002) diz que as experiências das crianças com conceitos relacionados com os números racionais, começam antes da entrada para a escola. Também Monteiro e Pinto (2007, p.5) afirmam: *"Somos da opinião que, a partir dos 7anos, as crianças podem iniciar a resolução de problemas que levem à linguagem das frações partindo da resolução de problemas significativos"*.

Ao longo da minha experiência como professora do 1.º e do 2.º ciclo do ensino básico, tive oportunidade de contactar com alunos e professores dos dois níveis de ensino e de fazer algumas reflexões sobre as dificuldades apresentadas pelos alunos do 2.º ciclo durante a abordagem dos números racionais não negativos. Muitos destes alunos, não compreendem a representação nem a linguagem das frações.

Penso que a situação apresentada, mostra a pertinência do desenvolvimento deste tema, que deveria ser iniciado nos primeiros anos de escolaridade. Também o atual Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) (ME, 2007) reforça esta ideia:

> *Os números racionais começam a ser trabalhados nos dois primeiros anos com uma abordagem intuitiva a partir de situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais, recorrendo a modelos e à representação em forma de fração nos casos mais simples.*

Face ao exposto, este estudo tem como objetivo averiguar como os alunos, dos 1.º ano de escolaridade, desenvolvem o sentido de número racional, promovendo experiências de aprendizagem diversificadas e devidamente contextualizadas, com as quais se pretende promover o desenvolvimento do sentido de número racional, e sempre que possível, estabelecer conexões com os vários temas matemáticos.

Para atingir este objetivo procurei responder às seguintes questões:

- Que processos usam os alunos na resolução de tarefas conducentes ao desenvolvimento do sentido de número racional?
- Que estratégias de ensino parecem facilitar ou dificultar o desenvolvimento do sentido de número racional?
- Que dificuldades manifestam os alunos no desenvolvimento do sentido de número racional?

1.2 - Pertinência do estudo

No quadro de investigação educacional, segundo Castro e Rodrigues (2008, p. 117) "*a expressão sentido de número surge na literatura de educação matemática há cerca de 20/25 anos.*"

Sendo o desenvolvimento do sentido de número um tema muito abrangente, penso que seja interessante estudar, em particular, o desenvolvimento do sentido de número racional nos primeiros anos de escolaridade.

De acordo com o NCTM (2007, p.35): "*a compreensão do número desenvolve-se entre o pré-escolar e o 2.º ano*". Este documento, refere ainda:

> *"Para além da compreensão dos números inteiros, os alunos podem ainda ser encorajados a compreender e representar, num determinado contexto, algumas frações mais comummente utilizadas, como $\frac{1}{2}$ de uma bolacha ou $\frac{1}{8}$ de uma pizza, e a ver as frações como partes de uma unidade inteira ou de uma colecção. Os professores deverão ajudar os alunos a desenvolverem a compreensão de que as frações estão associadas à divisão".*

Alguns estudos empíricos recomendam a realização de investigação sobre os números racionais no 1º ciclo. Martins (2007) defende que no nosso país é escassa a investigação sobre as potencialidades de uma abordagem às frações para iniciar o estudo dos números racionais, pelo que recomenda a investigação de aspetos relacionados com esta problemática. Quaresma (2010) refere a importância do desenvolvimento de estudos sobre a *"noção e representação de número racional envolvendo os diferentes significados e as diversas representações com alunos do 1.º ciclo, à luz das orientações do novo Programa de Matemática do Ensino Básico"* (p. 185).

A reorganização curricular traz sempre muitas exigências para os professores, pois implica um reajuste, ou até mesmo uma mudança de práticas, com as quais, por vezes, não se sentem confortáveis, o que origina inúmeras dificuldades, quer porque sentem falta de formação específica, quer porque têm que desenvolver novos materiais.

Em Portugal, a orientação clara do atual programa, relativamente ao tópico números racionais não negativos nos 1.º e 2.º anos de escolaridade, veio trazer uma necessidade de mudança de práticas na abordagem deste tópico em relação ao que era preconizado em Organização Curricular e Programas (ME, 1998), que só a partir do 2.º ano referia os seguintes objetivos:

"- Utilizar a notação $\frac{1}{2}\times$ *e* $2\times$ *para representar "metade de " e o "dobro de".*

- Reconhecer $\frac{1}{4}\times$ *como o inverso de* $4\times$*"* (p.181).

Ou seja, nos primeiros anos não se verificava uma verdadeira inclusão dos números racionais representados na forma de fração, pois a abordagem desta representação limitava-se ao seu uso como operadores.

Esta necessidade de mudança de práticas mostra como é pertinente investigar/aprofundar o assunto apresentado, pois está a ser colocado mais um desafio aos professores, na medida em que se espera que estes sejam capazes de criar condições favoráveis ao desenvolvimento de novas competências por parte dos seus alunos.

A forma de concretizar as referidas condições será diversificada e adequada ao contexto em que os alunos estão inseridos, contudo este estudo poderá ser um contributo para os professores, na medida em que facilitará a tomada de decisões e induzirá mais confiança para diversificar estratégias de ensino.

II - Fundamentação teórica

Neste capítulo é apresentado o enquadramento teórico que fundamenta o estudo. O capítulo encontra-se dividido em três secções: Sentido de número; Os números racionais no currículo; A aprendizagem de números racionais.

2.1- Sentido de número

De acordo com o NCTM (2007, p.83): "*As bases para o desenvolvimento matemático das crianças são estabelecidas desde muito cedo.*" Deste modo, não há um momento ideal, para as crianças iniciarem o desenvolvimento de conceitos matemáticos, desde que este seja feito de forma natural e com base nas suas experiências do dia-a-dia.

A importância do desenvolvimento do sentido de número tem vindo a ganhar visibilidade devido a vários estudos que têm sido apresentados (Fosnot & Dolk, 2002; Brocardo, Serrazina & Rocha, 2008; Rodrigues, 2010).

Apesar da maioria dos professores ter conhecimento da necessidade do desenvolvimento do sentido de número nos seus alunos, ainda se verifica muita discussão em torno do seu significado e da forma como se desenvolve. Segundo Greeno e Hope (citados por Castro & Rodrigues, 2008, p.117) "*o sentido do número é difícil de definir, no entanto, reconhece-se a sua existência ou ausência em contextos práticos de atividades matemáticas.*"

Cebola (2002, p.225 e 266) apresenta a seguinte definição de sentido de número:

> *"pode ainda definir-se como sendo a compreensão genérica que cada pessoa tem dos números e das operações. Esta compreensão inclui não só a capacidade mas também a tendência que se possui para desenvolver estratégias úteis que envolvam números e operações como um meio de comunicação, processamento e interpretação de informação, na resolução de problemas."*

No estudo realizado por Gonçalves (2008) é referido que ter um bom sentido de número consiste em apresentar capacidade e tendência para estabelecer relações entre os números, identificar regularidades numéricas e trabalhar como os números e operações de forma flexível e inteligente. As crianças com um bom sentido de número mostram entendimento dos diferentes significados dos números e confiança no trabalho com estes, analisando sempre se o que fazem tem sentido. Para reforçar esta ideia a autora cita o NCTM, (1998, p.6) *" As crianças que têm o sentido de número compreendem como os números se relacionam uns com os outros e como nos dão informação do mundo real."*

O desenvolvimento do sentido de número não pode ser visto como uma aprendizagem que se realiza num determinado momento, *"mas sim uma competência genérica que se desenvolve ao longo de todo o ensino obrigatório e não obrigatório e mesmo ao longo de toda a vida."* (Abrantes et al., 1999, p.45). Estes autores referem, ainda, que o sentido de número é uma referência central do ensino dos números e do cálculo desde os primeiros anos.

Segundo Castro e Rodrigues (2008) antes de entrarem para o 1.º ciclo, as crianças, já conseguem solucionar situações problemáticas que envolvem números, recorrendo aos seus conhecimentos informais de aritmética. Através das suas experiências de contagem a criança verifica como os números mudam, torna-se capaz de descobrir relações e vai assim construindo as bases da aritmética.

Face ao exposto, salienta-se a importância, de proporcionar às crianças situações que permitam a compreensão dos diferentes significados de número, bem como dos diferentes sentidos das operações, desde os primeiros anos, contribuindo assim para o desenvolvimento do sentido de número.

Segundo McIntosh et al. (citado por Cebola, 2002, p.238) *"a era tecnológica em que vivemos faz com que o possuir sentido do número seja uma das características que permite distinguir o ser humano do computador."* Possuir sentido de número também permitirá fazer uma utilização correta e benéfica das ferramentas tecnológicas que se encontram atualmente à nossa disposição.

2.1.1– Sentido de número racional

O conjunto dos números racionais resulta da reunião do conjunto dos números inteiros com o conjunto dos números fracionários. O desenvolvimento do sentido de número, relativamente aos números racionais, envolve uma ampliação significativa de conhecimentos, desde logo, porque deixamos de trabalhar com um conjunto discreto para passarmos a trabalhar com um conjunto denso.

Os alunos iniciam o desenvolvimento do sentido de número com os números naturais, que apresentam um carácter discreto. Já os números racionais caracterizam-se pela sua densidade, ou seja, os alunos têm que compreender que entre quaisquer dois números racionais, existe uma infinidade de números racionais, ao contrário do que acontecia com os números naturais, o que, do ponto de vista cognitivo, é substancialmente mais complexo. Cid, Godino e Batanero (2004) afirmam que os números racionais são o primeiro conjunto, em que os alunos realizam experiências matemáticas, que não se baseiam no processo de contagem, ou seja, o facto de o conjunto dos números racionais ser um conjunto denso (em que, portanto, dado um qualquer número racional, não é possível determinar quer o seu antecessor, quer o seu sucessor) implica mudanças profundas no raciocínio e nas estratégias de cálculo dos alunos.

Como já foi referido, muitas das dificuldades dos alunos em trabalharem com números racionais resultam da tendência de transferir para estes números as regras aprendidas nos números inteiros. Salienta-se assim, a importância de trabalhar desde os primeiros anos simultaneamente os números inteiros e os fraccionários, de modo a minimizar esta tendência.

> *“Juntamente com o trabalho com números inteiros, os alunos mais novos deverão também possuir alguma experiência no trabalho com frações simples, por meio da associação a situações quotidianas e problemas significativos, partindo das frações mais comuns, expressos na linguagem que trazem consigo para a sala de aula.”* (NCTM, 2007, p.95)

2.1.2 - Desenvolvimento do sentido de número racional

O conceito de número racional pode ter várias interpretações, segundo Kieren (1976) (citado por Pinto, 2004) existem sete interpretações deste conceito, das quais destaca cinco: parte-todo, quociente, razão, operador e medida. Também para Behr, Lesh, Post e Silver (1983) estas interpretações são fulcrais para a aquisição do conceito. Estes autores, sugerem ainda, que a compreensão do número racional requer uma compreensão de cada um dos seus significados separadamente e também uma compreensão das relações entre eles (Behr et al., 1997).

Em contexto escolar, de modo a contribuir para o desenvolvimento do sentido de número relativamente aos racionais, é importante explorar de forma gradual os diferentes significados que as frações podem assumir. De seguida, apresentam-se os diferentes significados de fração, de acordo com a perspetiva de Monteiro e Pinto (2005) (2007).

- **relação parte-todo:** neste contexto a fração surge da comparação entre a parte e o todo (unidade), sendo a unidade dividida em partes iguais. O denominador indica o número de partes iguais em que o todo se encontra dividido e o numerador indica o número de partes escolhidas.

-**quociente:** surge em situações de partilha equitativa, em que a fração representa o quociente entre dois números, isto é, uma relação entre duas quantidades, o numerador indica o número de coisas a ser partilhado e o denominador o número de receptores dessa partilha.

- **operador multiplicativo:** neste contexto, a utilização da fração permite transformar o cardinal de um conjunto discreto. No caso de uma figura, a fração tem o efeito de redução ou de ampliação. Aqui o denominador indica uma divisão e o numerador uma multiplicação. A exploração deste significado facilitará a compreensão da multiplicação de números racionais.

- **medida:** nesta situação, compara-se uma grandeza com outra, tomada como unidade. A unidade de medida é fracionada numa parte, que esteja contida um número inteiro de vezes, na quantidade a medir.

- **razão:** estabelece uma relação comparativa entre duas partes de um mesmo todo ou entre duas grandezas diferentes dando origem a outra grandeza.

Estas autoras também salientam a importância que a unidade desempenha no processo de compreensão das frações, pois uma fração tem sempre subjacente uma unidade. Podem-se considerar diferentes tipos de unidades simples ou compostas, contínuas ou discretas.

O NCTM (1998), sobre as frações e decimais no 1.º ciclo, refere que é fundamental o desenvolvimento de conceitos e relações que funcionarão como alicerces para aprendizagens futuras. Como estas ideias são construídas lentamente, se o seu desenvolvimento for iniciado nestes níveis de escolaridade reduzir-se-á o tempo que é gasto em níveis mais avançados para corrigir concepções erróneas e superar dificuldades processuais.

2.2 – Os números racionais no currículo

O atual PMEB (ME, 2007) refere que se deve promover a compreensão dos números e operações, desenvolver o sentido de número e desenvolver a fluência no cálculo. Ao contrário do que acontecia no programa anterior, as representações fracionária e decimal dos números racionais surgem em paralelo, sendo recomendado que, em cada situação, o aluno deve ser capaz de usar a representação mais adequada e deve igualmente ser capaz de passar com facilidade de uma representação para outra. É também dada uma importância significativa à representação dos números na reta numérica.

Brocardo (2010) destaca como um aspecto muito positivo no PMEB, o facto de o trabalho em torno do tema números e operações ser perspectivado em termos de desenvolvimento do sentido de número. De acordo com a autora, os números racionais na sua representação fracionária podem ser introduzidos antes dos decimais, ao contrário do que acontecia no programa anterior, em que esta situação não era possível devido ao foco do trabalho com Números e Operações ser o cálculo algorítmico. Segundo Brocardo (2010, p.17) *“Muitos contextos ligados à representação na forma de fração (...) são inicialmente mais acessíveis aos alunos do que os associados à* *representação decimal.”* Neste sentido, a autora acrescenta ainda, que do ponto de vista histórico, os números fracionários surgiram muito antes dos decimais.

De acordo com PMEB (ME, 2007), o trabalho com números racionais deve ser iniciado no 1.º e 2.º anos, com uma abordagem intuitiva a partir de situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais, recorrendo a modelos e à representação em forma de fração nos casos mais simples. Nos 3.º e 4.º anos, o estudo destes números deve ser aprofundado, quer recorrendo a problemas que permitam trabalhar outros significados das frações, quer introduzindo números representados na forma decimal. O ensino e a aprendizagem dos números e operações, no 1.º ciclo, deve ter como ponto de partida situações relacionadas com a vida do dia-a-dia e os materiais manipuláveis devem ser utilizados nas situações de aprendizagem em que o seu uso seja facilitador da compreensão dos conceitos e das ideias matemáticas. No caso dos números racionais, devem ser contemplados os diferentes significados das frações, em contextos variados, que permitam aprofundar a sua compreensão, envolvendo quantidades discretas e contínuas, que podem ser representadas por palavras, desenhos, esquemas ou frações. O trabalho com estes números, deve incluir a exploração de situações que, de uma forma intuitiva, contribuam para o desenvolvimento da compreensão dos conceitos de razão e de proporção, deve incluir também a exploração de situações que contribuam para ampliação do conhecimento de estratégias de cálculo mental e escrito e que permitam aos alunos relacionar a representação fracionária e a decimal.

As tabelas 1e 2 mostram os tópicos e objetivos específicos que o programa apresenta para o 1º ciclo.

Tópicos	Objectivos específicos	Notas
Números racionais não negativos • Fracções	• Identificar a metade, a terça parte, a quarta parte, a décima parte e outras partes da unidade e representá-las na forma de fracção. • Compreender e usar os operadores: dobro, triplo, quádruplo e quíntuplo e relacioná-los, respectivamente, com a metade, a terça parte, a quarta parte e a quinta parte.	• Explorar intuitivamente situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais, envolvendo quantidades discretas e contínuas. Representar estas quantidades por palavras, desenhos, esquemas ou fracções.

Tabela 1 – Tópicos e objetivos específicos do PMEB para o 1º e 2º anos (ME, 2007)

Tópicos	Objectivos específicos	Notas
Números racionais não negativos • Fracções • Decimais	• Compreender fracções com os significados quociente, parte-todo e operador. • Reconstruir a unidade a partir das suas partes. • Resolver problemas envolvendo números na sua representação decimal. • Ler e escrever números na representação decimal (até à milésima) e relacionar diferentes representações dos números racionais não negativos. • Comparar e ordenar números representados na forma decimal. • Localizar e posicionar números racionais não negativos na recta numérica. • Estimar e calcular mentalmente com números racionais não negativos representados na forma decimal. • Adicionar, subtrair, multiplicar e dividir com números racionais não negativos na representação decimal. • Compreender que com a multiplicação (divisão) de um número por 0,1, 0,01, e 0,001 se obtém o mesmo resultado do que, respectivamente, com a divisão (multiplicação) desse número por 10,100 e 1000.	• Explorar intuitivamente problemas do tipo: *Dois chocolates foram divididos igualmente por 5 crianças. Quanto recebeu cada uma?* (quociente) *Uma barra de chocolate foi dividida em 4 partes iguais. O João comeu 3 dessas partes. Que parte do chocolate comeu o João?* (parte-todo). *A Ana tem uma caixa com 48 lápis de cor. O Rui tem* $\frac{1}{4}$ *dessa quantidade de lápis. Quantos lápis tem ele? (operador)* • Explorar, por exemplo, situações de partilha equitativa, medida e dinheiro. • Trabalhar com situações de partilha equitativa envolvendo quantidades discretas (como o número de objectos de uma dada colecção) e contínuas (como uma porção de pão ou piza). • Utilizar modelos (rectangular, circular) na representação da décima, centésima e milésima e estabelecer relações entre elas. • Usar valores de referência representados de diferentes formas. Por exemplo: 0,5, $\frac{1}{2}$ e 50%; 0,25, $\frac{1}{4}$ e 25%; 0,75, $\frac{3}{4}$ e 75%; 0,1 e $\frac{1}{10}$; 0,01 e $\frac{1}{100}$; 0,001 e $\frac{1}{1000}$. • Localizar, por exemplo, o número 2,75 numa recta numérica. Posicionar, por exemplo, o número 1,5. • Representar também na recta numérica números como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{10}$ e $\frac{5}{10}$, relacionando a representação fraccionária com a decimal. • Valorizar o cálculo mental. Por exemplo, para calcular 15 - 0,5 não é necessário utilizar um algoritmo. • Trabalhar as operações a partir de situações do quotidiano. No exemplo, *Metade de um chocolate a dividir por duas crianças*, seria: 0,5:2=0,25 ou $\frac{1}{4}$ do chocolate. • Usar estratégias como: 1,5+2,7=1,5+2,5+0,2=4,0+0,2=4,2. • Averiguar com os alunos o que acontece na multiplicação quando um dos factores é menor que 1 e, na divisão, quando o divisor é menor que 1.

Tabela 2 – Tópicos e objetivos específicos do PMEB para o 3º e 4º anos (ME, 2007)

2.3 – A aprendizagem dos números racionais

Várias estudos têm sido realizados para tentar perceber qual a idade mais adequada à introdução dos números racionais. Hunting, Sharpley, Bezuk e Streefland citados por (Pinto, 2004) defendem a introdução dos números racionais nos primeiros anos de escolaridade desde que seja acompanhada de materiais manipulativos e, segundo o último, tendo em conta uma abordagem realista da matemática no sentido que lhe foi dado por Freudenthal.[1]

Segundo Cramer e Henry (2002) os estudantes terão mais sucesso se os professores, nos primeiros anos de escolaridade, investirem o seu tempo na construção do significado das frações, usando modelos concretos, enfatizando conceitos e usando estratégias informais de ordenação e estimativa.

De acordo com Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999, p.48). "*A ampliação do conceito de número racional é um dos aspectos centrais do desenvolvimento da competência matemática dos alunos ao longo da educação básica*."

Kieren dedicou grande parte da sua carreira à investigação sobre o domínio dos números racionais, o seu trabalho contribuiu para um melhor entendimento do comportamento de partilha em crianças pequenas. O investigador gosta de dizer que a matemática é " Sobre algo", mas esta é uma ideia importante que se foi perdendo e que têm conduzido, ao longo dos anos, os alunos a uma abstração prematura e uma preocupação excessiva com os algoritmos (Post et al, 1998).

Kieren (citado em Sowder et al., 1998) caracterizou o conhecimento de números racionais em quatro tipos de conhecimento: *etnomático; intuitivo; técnico- simbólico e axiomático-dedutivo* (figura 1).

[1] Freudenthal defendia a ideia da matemática como uma atividade humana, afirmando que a essência da matemática não são as estruturas matemáticas, mas sim o processo que conduz a essas estruturas. Os alunos deveriam aprender matemática, através do fazer matemática, tendo o ensino de estar relacionado com as experiências dos alunos. Ou seja, deveria ser dada aos alunos a oportunidade de reinventarem a matemática através de um processo de matematização progressiva. Tendo como ponto de partida as ideias de Freudenthal, desenvolveu-se a partir de 1970, na Holanda, uma corrente designada por Matemática Realista. (Gravemeijer, citado por Monteiro et al., 2005).

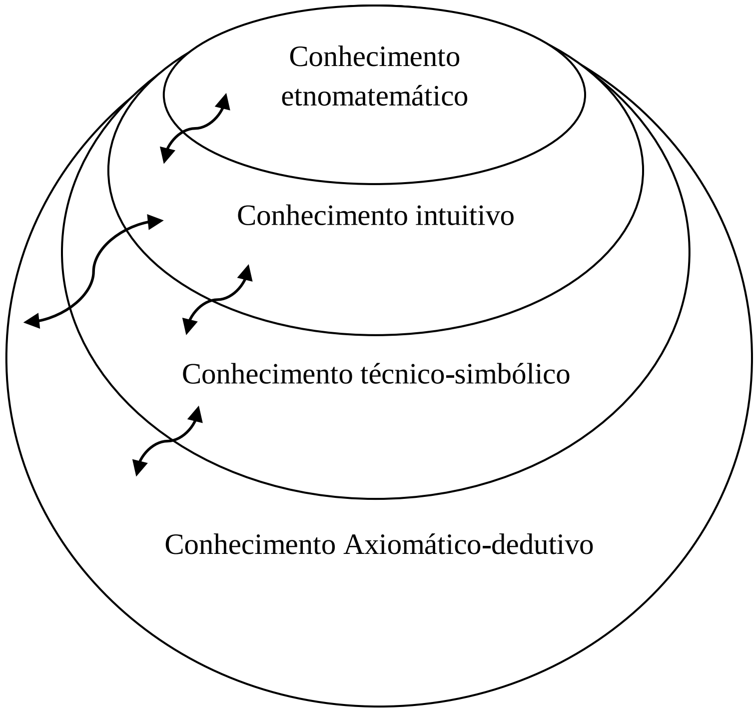


Figura 1 – Interação entre os tipos de conhecimento adaptado de Kiren citado por Sowder et al. (1998)

O *conhecimento etnomatemático* resulta da interação com o ambiente. No seu dia-a-dia, as crianças repartem quantidades discretas e contínuas, fazem a descrição dessas repartições e também já viram fazer medições usando frações, no entanto a sua linguagem ainda não obedece a um padrão. Kieren considera que o *conhecimento intuitivo* é um conhecimento escolar construído a partir da experiência quotidiana e em relação com esta. O *conhecimento técnico-simbólico* envolve o uso de linguagem padrão, símbolos e algoritmos. O conhecimento *axiomático-dedutivo* significa que se possuiu um raciocínio dedutivo dentro de um sistema axiomático (Sowder et al.,1998.).

Kieren (citado em Behr et al, 1992) refere que este modelo de conhecimento foi pensado para ser dinâmico, orgânico e interativo. No contexto do estudo apresentado interessam fundamentalmente o *conhecimento etnomatemático e o conhecimento intuitivo.*

Na perspetiva de alguns autores (Hunting, 1991; Smith, 2002; Empson, 2002), as crianças possuem conhecimento informal sobre as frações, desde muito cedo. Deste conhecimento salientam-se a capacidade para cortar/partir e a noção intuitiva de escalas, que fornecem, respetivamente, a base para a criação de estratégias de divisão em partes iguais e o desenvolvimento de estratégias em situações de proporcionalidade. Nos primeiros anos, mesmo antes de qualquer instrução sobre frações, as crianças também possuem um conhecimento sustentado sobre o significado de metade e de “metade repetida”. Nestas idades, as crianças normalmente chamam às frações metades ou bocados.

Segundo Cramer et al. (2009), os estudos têm mostrado consistentemente que os alunos que usam os currículos do Rational Number Project (RNP), nas avaliações sobre frações, têm um desempenho superior aos que usam os currículos tradicionais. O RNP é um projeto cooperativo de investigação, que tem vindo a investigar o modo como as crianças desenvolvem os seus conhecimentos sobre os números racionais e teve início em 1979, nos Estados Unidos da América. Os membros do projeto acreditam fortemente que uma das razões do referido sucesso reside no facto de as suas lições valorizarem as relações estabelecidas dentro e entre os modos de representação.

Richard Lesh, membro fundador do (RNP), tendo por base o quadro teórico sugerido por Jean Piaget, Jerome Bruner, e Zoltan Dienes, apresentou um modelo de ensino que mostra como as crianças podem estar claramente envolvidas na sua aprendizagem. A figura 2 apresenta o esquema do modelo proposto por Lesh. O investigador sugere que as ideias matemáticas podem ser representadas através dos cinco modos apresentados: situações da vida real (real world contexts); materiais manipulativos (concrete models); imagens (pictures); símbolos verbais (verbal symbols); símbolos escritos (written symbols). As setas que ligam as diferentes representações referem-se às transições entre elas e as setas internas mostram as transições dentro de cada representação (Cramer et al., 2009).

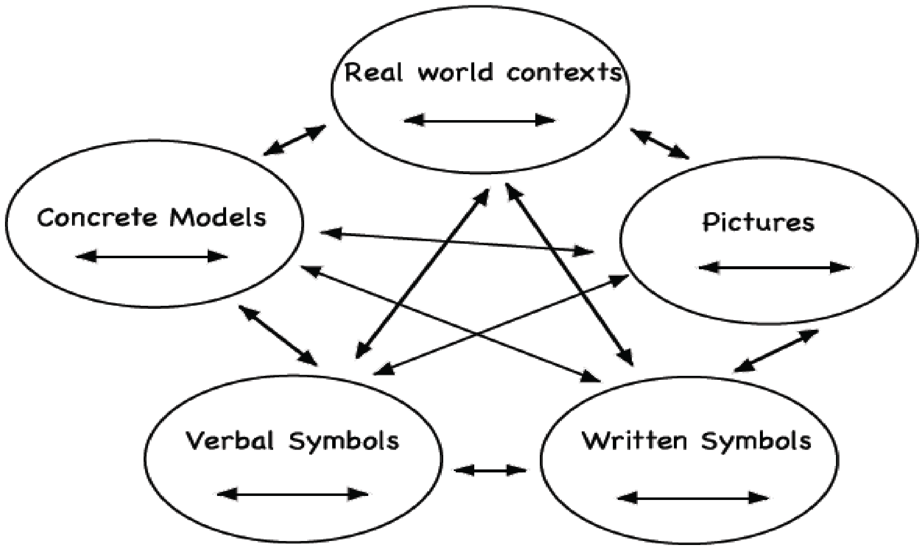


Figura 2 – Modelo proposto por Lesh (Cramer et al, 2009, p.4)

Segundo este modelo as crianças aprendem através da oportunidade que têm de explorar as ideias matemáticas nos diferentes modos e através das conexões ou transições estabelecidas entre e dentro das diferentes representações, o que é, de acordo com Lesh et al. (1987) muito importante para os alunos.

Outro fator de sucesso apontado é o longo período de tempo que os alunos passam com modelos concretos de frações, pois acredita-se que os alunos precisam de muitas oportunidades para explorarem frações e decimais usando múltiplos modos de representação e de relações entre as diferentes representações. Além disso, o currículo do RNP investe muito tempo no desenvolvimento de conceitos, da capacidade de ordenação e das ideias de equivalência antes de iniciar o trabalho com as operações (Cramer et al., 2009).

Nas investigações realizadas por Post et al. (1993), também no âmbito do RNP, são apresentadas algumas sugestões para o ensino dos números racionais:

- Deve ter como base as aprendizagens anteriores dos alunos e evoluir ao longo de um período de vários anos;
- Deve enfatizar as inter-relações entre os vários significados de número racional (parte-todo, decimal, quociente, razão, medida e operador);
- Os procedimentos e operações devem ser atrasados e antecedidos pela compreensão das relações de ordem e equivalência;
- Deve basear-se em modelos educativos que reforcem as relações entre conceitos e procedimentos, bem como no uso de diferentes representações.

No desenvolvimento de sentido de número racional, Lamon (2002) defende a importância das experiências de reconstrução da unidade a partir das partes e do trabalho com frações equivalentes de modo significativo, recorrendo ao processo de "unitizing" (reconstrução da unidade), sem recurso a regras.

No dia-a-dia, as crianças geram as suas ideias sobre as frações, estabelecem relações, constroem conhecimentos. Deste modo, o papel do professor é ajudar os alunos a estabelecerem relações entre os conhecimentos que possuem e os que são trabalhados na aula, pelo que, para tal precisa de ouvir atentamente os seus alunos (Smith, 2002).

Segundo Resnick (citado por Sowerder, 2002), infelizmente, quando muitas crianças iniciam a aprendizagem das frações e das proporções já deixaram de acreditar que a matemática faz sentido, pois esta, foi-lhe anteriormente apresentada, como um conjunto de regras para memorizar e aplicar. Assim, sugere que um modo de contrariar esta visão da matemática será ter-se em atenção o envolvimento dos alunos através da utilização de contextos significativos, despertando assim a sua curiosidade, que funcionará como um "motor" na construção do conhecimento matemático.

Como é que sabemos quais são os contextos adequados? De acordo com Fosnot e Dolk (2002) são os alunos que mostram ao professor se o contexto é bom ou não. O contexto é bom quando os alunos pensam sobre o problema e falam sobre a situação, caso contrário os alunos falam sobre os números de forma abstracta, perdem o sentido do problema e tentam mostrar o que o professor quer. Os contextos ricos que suportam o desenvolvimento da literacia matemática pressupõem um trabalho de seleção ou criação cuidadoso dos mesmos.

De modo a promover o trabalho com os números racionais numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número, Brocardo (2010) propõe três princípios que considera fundamentais para orientar a ação do professor:

- *Usar contextos e modelos apropriados*

Segundo a autora frações, decimais e percentagens só ganham sentido quando percebemos como são utilizadas em contexto. As dobragens a partir de folhas e tiras de papel são um contexto com bastantes possibilidades para trabalhar aspetos relacionados com as frações. Este é um bom contexto, porque tem significado para os alunos e é entusiasmante, também permite lidar, a um nível informal, com ideias que vão sendo formalizadas progressivamente. A barra que surge no écran do computador quando se imprime ou guarda um documento permite apoiar o uso da barra retangular e da reta associando percentagens a frações. O contexto de divisão de pizas ou tartes apoiam a estruturação do modelo circular que pode ser muito expressivo para representar partes da unidade e as relações entre as mesmas.

- *Desenvolver gradualmente as "grandes" ideias subjacentes aos números racionais*

São apresentadas sete ideias a desenvolver: 1) a relação parte-todo (que está no centro da compreensão do que é uma fração); 2) as partes do mesmo todo não precisam de ser congruentes; 3) relacionar as frações com a multiplicação e divisão; 4) o todo importa; 5) quando multiplicam ou dividem frações devem ter em conta relações de relações; 6) relacionar as diferentes formas de representação (frações, decimais e percentagens); 7) valor de posição.

- *Construir significados e relações*

No longo caminho que os alunos efetuam para compreenderem os vários conjuntos numéricos, tem que se ter em conta a "desestabilização" proporcionada pelos "novos" números, que conduz a prolongamentos incorretos de regras de cálculo, o que mostra como é importante atender ao significado das novas relações numéricas e das relações entre elas.

No mesmo sentido e sobre o desenvolvimento do significado dos algoritmos das frações Sharp, Garofalo e Adams (2002) fazem as seguintes recomendações aos professores:

- Usar contextos pessoais para desenvolver conceitos;
- Encorajar os alunos a criarem procedimentos recorrendo aos seus conhecimentos;
- Permitir aos alunos o uso da sua linguagem e representações;
- Encorajar os alunos a registarem como pensaram, caminhando para representações cada vez mais formais;
- Ajudar os alunos a relacionarem os seus processos e ideias com os algoritmos formais.

As perspetivas apresentadas constituíram a referência teórica para a conceção e aplicação da sequência de aprendizagem, bem como para a análise de dados. Destas perspetivas destaca-se a opinião de muitos autores, que defendem a introdução dos números racionais nos primeiros anos de escolaridade, dando especial atenção aos contextos e modelos utilizados. Uma outra ideia muito reforçada anteriormente e à qual também se deu bastante atenção é a ideia de que as crianças, antes da abordagem do tema na escola, já possuem muitos conhecimentos informais, que devem ser relacionados com o conhecimento escolar e contribuir assim para a construção do sentido de número racional. Este processo de construção de conhecimento deve ter como base as aprendizagens anteriores dos alunos e evoluir através do estabelecimento de relações e exploração de modelos concretos.

III – Metodologia

Neste capítulo são apresentas as opções metodológicas, os participantes no estudo e os procedimentos seguidos. Também é feita uma breve descrição das tarefas aplicadas, dos instrumentos e procedimentos de recolha de dados. É ainda referido como se efetuou a análise destes dados.

3.1 – Opções metodológicas

Esta investigação pretende contribuir para o conhecimento de como os alunos, no 1.º de escolaridade, desenvolvem o sentido de número racional, ambicionando a compreensão do fenómeno de forma indutiva. Segundo Fernandes (1991, p.66) “*O foco da investigação qualitativa é a compreensão mais profunda dos problemas, é investigar o que está “por trás” de certos comportamentos, atitudes e convicções.”* A investigação centrou-se nos processos utilizados e não nos resultados obtidos, na medida em que se pretendia observar, descrever e interpretar os procedimentos dos alunos. Procurei identificar os processos que os alunos usam no desenvolvimento do sentido de número racional, as estratégias de ensino que parecem facilitar este processo, assim como as dificuldades sentidas pelos alunos. Deste modo, considerei que o paradigma qualitativo era o mais adequado numa investigação deste tipo.

A investigação foi realizada na turma em que leciono, mas dada a necessidade de a controlar foi delimitada, incidindo apenas sobre dois dos quatro alunos que frequentavam o 1.º ano, de uma turma composta por dois anos de escolaridade. Segundo Bogdan e Biklen (1994) esta necessidade é característica de uma investigação qualitativa.

Como já foi referido, com esta investigação pretendia-se aprofundar conhecimentos sobre o ensino/aprendizagem dos números racionais nos primeiros anos de escolaridade, para tal, foi analisado o desempenho de dois alunos do 1.º ano de escolaridade. Segundo Ponte (2006) um estudo de caso visa conhecer uma entidade bem definida, como por exemplo: uma instituição, um curso, um sistema educativo ou qualquer outa unidade social. Também, Coutinho e Chaves (2002) referem que quase tudo pode ser um “caso”: um indivíduo, um pequeno grupo, uma organização, uma comunidade ou até mesmo uma nação. Neste estudo foram analisados, em profundidade e segundo uma perspetiva de questionamento, os processos usados e as dificuldades apresentadas por estes dois alunos, tentando também perceber quais as estratégias de ensino mais eficazes no desenvolvimento do sentido de número racional. Ponte (2006) defende que um estudo de caso tem como objetivo conhecer em profundidade o “como” e os “porquês” de uma entidade, evidenciando as suas características próprias, nomeadamente nos aspetos que interessam ao pesquisador. Um estudo de caso:

> *“É uma investigação que se assume como particularística, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspectos, procurando descobrir a que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenómeno de interesse.” (Ponte, 2006, p.2)*

Este estudo foi realizado em contexto de sala de aula e o investigador assumiu também o papel de professor, o que pressupõe uma participação ativa e uma perda de controlo sobre o campo de investigação. Segundo Yin (1994) os estudos de caso representam a estratégia preferida quando o investigador tem pouco controlo sobre os acontecimentos e quando o foco de investigação se encontra em fenómenos contemporâneos inseridos em algum contexto de vida real. O autor, também afirma, que esta abordagem se adapta à investigação em educação.

Face ao exposto e tendo em conta o facto de que as questões em estudo estão relacionadas com a dinâmica educacional e a investigação incidir sobre a minha própria prática profissional, usei uma metodologia qualitativa na forma de estudo de caso.

Desde o início do estudo que me preocupei com a sua qualidade, neste sentido é importante referir que o propósito dos estudos de caso é a “compreensão”, não é a comprovação ou falsificação de “leis gerais”, como tal, os critérios de qualidade têm que refletir esta intenção (Ponte 2006).

3.2 – Participantes

O estudo foi realizado com os alunos da turma A da Escola do 1.º Ciclo do Ensino Básico de Ardido, pertencente ao Agrupamento de Escolas da Benedita.

Na fase inicial do estudo, a turma era constituída por dez alunos (quatro alunos do 1.º ano e seis alunos do 4.º ano). Os quatro alunos do 1.º ano, constituem um grupo relativamente homogéneo a nível de comportamento, empenho e ritmo de trabalho. Facilmente se consegue estabelecer uma boa relação com este alunos, pois são crianças bastante sensíveis. De um modo geral, os alunos apresentam um desempenho satisfatório na área da matemática, existindo um aluno que normalmente se destaca de forma positiva e uma aluna que por vezes apresenta algumas dificuldades.

Antes da realização do estudo, de acordo com a definição de Kiren (citado por Sowder, 1998), os alunos apenas possuíam *conhecimentos etnomatemáticos* sobre os números racionais, resultantes das suas vivências e de algumas conexões eventualmente estabelecidas durante o estudo de outros temas.

Na fase final do estudo a turma era constituída por dezassete alunos (os quatro alunos que no início do estudo se encontravam no 1º ano e transitaram para o 2ºano e treze alunos que iniciaram o 1º ano de escolaridade).

Num estudo de caso, a seleção da amostra está sujeita a determinados critérios, como tal, neste estudo, a seleção de dois alunos caso foi realizada tendo em conta os seguintes critérios:

- Diferentes níveis de desempenho;
- Capacidade de expressão dos raciocínios.

Neste estudo, a investigadora, como professora titular de turma foi uma observadora participante. O facto de existir proximidade entre a investigadora e os participantes no estudo, pode ser considerado uma vantagem, uma vez que, deste modo, a investigadora não será vista como um intruso, o que poderia condicionar os resultados. Segundo Bogdan e Biklen (1994) a investigação na área da educação pode beneficiar da relação de proximidade existente entre o investigador e o objecto de estudo.

3.3 – Procedimentos

O presente estudo decorreu durante o 3.º período do ano letivo 2010/2011 e estendeu-se ao início do ano letivo 2011/2012.

Antes de iniciar o trabalho de campo, em abril de 2011, foi pedida autorização para a realização do estudo à direção do agrupamento e aos encarregados de educação dos alunos participantes, sendo sempre garantido o anonimato dos intervenientes.

A recolha de dados foi iniciada, em maio de 2011, com a realização da tarefa de diagnóstico, que tinham como objetivo recolher algumas informações acerca dos conhecimentos que os alunos possuíam sobre o tema números racionais e fazer a seleção dos alunos caso.

Considerando os princípios apresentados na fundamentação teórica, as orientações programáticas, os conhecimentos que os alunos já possuíam e tendo subjacente a ideia de trajetória hipotética de aprendizagem, foi construída e aplicada aos alunos, pela investigadora, uma sequência de aprendizagem, entre maio e junho de 2011. As aulas foram vídeo gravadas, as produções dos alunos foram recolhidas e analisadas e ao longo deste processo, a investigadora construiu um diário de pesquisa.

O trabalho de campo terminou em dezembro de 2011, com a aplicação da tarefa final, constituída por um conjunto de atividades, que tinham como objetivo recolher algumas informações acerca da estabilidade e consistência dos conhecimentos que os alunos adquiriram sobre o tema e as dificuldades que persistiam.

3.4 – As tarefas

O trabalho empírico iniciou-se com a realização da tarefa de diagnóstico, que serviu como instrumento de seleção dos alunos caso e foi construído pela investigadora, tendo por base o enquadramento teórico do estudo, o Currículo Nacional do Ensino Básico (ME, 2001) e o PMEB (ME, 2007). Estas tarefas pretendiam avaliar o nível dos conhecimentos dos alunos *etnomátemáticos* ou, eventualmente *intuitivos*, de acordo com a definição de Kiren (citado por Sowder, 1998)

Seguidamente foi construída uma sequência de aprendizagem que tinha como objetivo contribuir para o desenvolvimento do sentido de número racional no 1.º ano de escolaridade. Tal como as tarefas diagnóstico, também as tarefas que constituem a sequência de aprendizagem foram construídas mantendo o mesmo quadro teórico, de acordo com as questões orientadoras do estudo e já com o contributo dos resultados obtidos na tarefa de diagnóstico. A sua construção teve ainda por base o Currículo Nacional do Ensino Básico (ME, 2001) e o (PMEB) (ME, 2007). Por outro lado, a sequência de aprendizagem foi elaborada tendo subjacente a ideia de trajetória hipotética de aprendizagem, no sentido que lhe é dado por Simon citado por (Serrazina e Oliveira, 2010).

Algumas tarefas foram adaptadas de Desenvolvendo o Sentido do Número Racional (Monteiro e Pinto, 2007) e de Classroom Activities for Making Sense of Fractions, Rratios, and Proportions: 2002 Yearbook. (Bright, & Litwiller, 2002), sendo outras idealizadas e construídas pela investigadora, tendo por base a revisão da literatura efetuada e a sua experiência como docente.

Na tabela 3 apresentam-se as tarefas propostas aos alunos, bem como a respetiva calendarização e duração.

Tarefa	Designação	Aplicação	Duração
1.º ano de escolaridade			
0	Tarefa de diagnóstico	20/05/2011	60 minutos
Sequência de aprendizagem			
1	Visita de estudo	27/05/2011	60 + 30 minutos
2	Dobras	09/06/2011	60 minutos
3	Maçãs e berlindes	14/06/2011	90 minutos
4	Missangas	17/06/2011	60 + 30 minutos
2.º ano de escolaridade			
5	Tarefa final	14/12/2011	60 minutos

Tabela 3 – Calendarização da aplicação das tarefas

Tarefa de diagnóstico

As questões que constituíam a tarefa de diagnóstico (Anexo 3), tinham como objetivo identificar os conhecimentos que os alunos possuíam sobre o tema em estudo. Neste conjunto de tarefas foram apresentados diferentes modelos, bem como diversos contextos, contemplando situações que envolviam unidades discretas e contínuas.

Como os alunos ainda não conseguiam ler de forma autónoma, as tarefas foram lidas pela professora.

Sequência de aprendizagem

A tarefa 1, "Visita de estudo" (Anexo 4), tinha como principais objetivos desenvolver a noção de metade e a linguagem das frações.

A primeira tarefa era constituída por quatro. A primeira chamava a atenção dos alunos para a presença da matemática no nosso dia-a-dia e permitia-lhes o contacto com unidades contínuas e discretas, bem como o desenvolvimento da linguagem das frações: "meia", "metade" "partir ao meio"… Na segunda questão, pretendia-se que os alunos usassem um conceito já abordado (números pares) em articulação com um conceito ainda em exploração (metade da metade). Com esta questão pretendia-se proporcionar aos alunos a oportunidade de verificarem o que acontece quando sucessivamente se determina metade da metade. Nas duas últimas questões, pretendia-se que os alunos aplicassem os conhecimentos adquiridos sobre "metades sucessivas" em situações de partilha equitativa, desenvolvendo a linguagem das frações e a descoberta de relações.

Com a tarefa 2, "Dobras" (Anexo5), pretendia-se introduzir as designações de "um meio", "um quatro" e "um terço", bem como a escrita dos respetivos símbolos.

A fase inicial da tarefa foi dedicada à continuação do desenvolvimento das noções de metade e quarta parte, e à introdução da noção de terça parte recorrendo à manipulação de tiras de papel. Pretendia-se também que os alunos comparassem as partes obtidas nos três casos, estabelecendo relações entre os tamanhos das diferentes partes.

Na fase final da tarefa, pretendia-se introduzir a designação de cada parte obtida nas diferentes tiras e estabelecer uma relação entre estas e a reta numérica, de modo a que os alunos tivessem oportunidade de verificar que existem números entre o zero e o um.

Ao longo de toda a tarefa, pretendia-se desenvolver a linguagem das frações e a comunicação matemática, estimulando a discussão sobre os procedimentos realizados.

A tarefa 3, "Maçãs e berlindes" (Anexo 6), tinha como principais objetivos desenvolver o raciocínio multiplicativo e continuar a desenvolver a linguagem das frações, através da exploração de situações de partilha equitativa e de divisão em partes iguais.

Na primeira parte da tarefa, pretendia-se que os alunos definissem o procedimento a seguir de modo a dividirem, igualmente, uma maçã pelos quatro alunos do 1.º ano, para que posteriormente, identificassem e designassem a fração unitária obtida na divisão. Também se ambiciona, que informalmente, os alunos contactassem com a ideia de numeral misto.

A segunda parte da tarefa, para além de proporcionar oportunidades de exploração de situações de partilha equitativa recorrendo a material concreto, permitiu, ainda, a identificação e nomeação de frações unitárias obtidas a partir da divisão de unidades discretas.

A tarefa 4, "Missangas" (Anexo 7), tinha como principal objetivo a identificação de partes em unidades contínuas e discretas.

Na primeira parte da tarefa, pretendia-se que os alunos, utilizando material manipulável (missangas), aplicassem corretamente a linguagem das frações na designação das partes obtidas e que efetuassem a sua representação simbólica.

A segunda questão da tarefa, tinha como principal objetivo permitir a identificação de partes em unidades discretas e contínuas, proporcionando, ainda, a exploração intuitiva da ideia de frações equivalentes.

Na última parte da tarefa pretendia-se proporcionar aos alunos o contacto com a adição intuitiva de números fracionários.

Tarefa final

A tarefa final procurou sintetizar todas as ideias trabalhadas ao longo da sequência de aprendizagem. Esta tarefa foi realizada individualmente, no início do ano letivo seguinte à aplicação da sequência de aprendizagem, de modo a permitir compreender se as aprendizagens realizadas foram significativas, estáveis e consistentes.

3.5 – Instrumentos e procedimentos de recolha de dados

Neste estudo, com o objetivo de efetuar uma recolha de dados representativa e diversificada, de modo a contribuir para o encontro das respostas às questões apresentadas, foram utilizados alguns instrumentos de recolha de dados característicos da metodologia qualitativa visando a triangulação de dados.

Os instrumentos de recolha de dados complementam-se permitindo uma abordagem a partir de diferentes perspetivas (Bogdan & Biklen, 1994). Deste modo, foram utilizados os seguintes instrumentos de recolha de dados:

- Diário de pesquisa – Nesta forma de observação participante, o investigador vai registando cronologicamente os resultados das observações efectuadas. Num estudo qualitativo, este instrumento é crucial para o seu sucesso, principalmente num estudo como este, que envolve a própria prática do investigador.

Ao longo do estudo, no diário de pesquisa, foram registadas algumas atitudes dos alunos, nomeadamente detalhes dos processos utilizados para resolverem as situações apresentadas. Também foram registados comentários que os alunos faziam sobre as tarefas, após a sua realização. Este diário, serviu ainda, para tomar nota de algumas considerações e opiniões relacionados com as questões de investigação.

- **Produções dos alunos** – Para a realização deste estudo foi produzido e aplicado um conjunto de tarefas, como tal, as produções dos alunos foram recolhidas para serem convenientemente analisadas.

Como a recolha de dados foi exclusivamente realizada pela investigadora, para facilitar este processo as aulas foram áudio e/ou vídeo gravadas.

Dada a natureza qualitativa do estudo, foram realizadas mudanças na seleção dos métodos de recolha de dados, à medida que esta recolha se realizava. Inicialmente estava prevista a realização de entrevistas ao longo do estudo, no entanto, não se sentiu necessidade de recorrer a este instrumento de recolha de dados para aumentar o conjunto de informações recolhidas, uma vez que, durante a aplicação das tarefas os alunos foram sendo questionados e todas as dúvidas que surgiram sobre os raciocínios e processos apresentados por estes foram esclarecidas em contexto de sala de aula.

3.6 - Análise de dados

O facto de neste estudo os dados recolhidos serem qualitativos implica a realização de análise de conteúdo. Segundo Sousa (2009, p. 264):

> "*A análise de conteúdo compreende uma intenção de analisar um ou mais documentos, com o propósito de inferir o seu conteúdo imanente, profundo oculto sob o aparente; ir além do que está expresso como comunicação directa, procurando descobrir conteúdos ocultos e mais profundos.*"

Num primeiro momento, foi efetuada uma leitura de todo o material recolhido (notas do diário de pesquisa, produções dos alunos, transcrições das aulas), de forma a proceder à sua organização e à escolha do corpus (conjunto de documentos a serem analisados). Esta seleção procurou ser: exaustiva, representativa, homogénea e pertinente.

De forma a continuar a análise de conteúdo, tendo em conta o objetivo do estudo e as questões orientadoras anteriormente definidas, foram estabelecidas três categorias de análise:

- Processos usados pelos alunos;
- Estratégias de ensino;
- Dificuldades manifestadas pelos alunos.

Esta classificação facilitou a interpretação que foi realizada à luz do contexto teórico, visando encontrar resposta para as questões apresentadas e assim retirar conclusões do estudo efetuado.

IV – Apresentação e discussão dos resultados

Neste capítulo é realizada a descrição e análise dos dados recolhidos ao longo do estudo, dando especial ênfase às estratégias utilizadas pelos alunos e às dificuldades que estes apresentaram ao longo do processo de desenvolvimento do sentido de número racional.

A apresentação dos resultados, bem como a sua análise, foi feita por aluno caso. No final da descrição de todas as tarefas realizadas por cada aluno é efetuada uma síntese, salientando as principais estratégias, procedimentos e dificuldades.

4.1 – Matilde

4.1.1 – Caracterização

A Matilde tinha seis anos quando realizou a sequência de aprendizagem e tinha sete anos quando realizou a tarefa final.

A aluna gosta da escola, a sua disciplina preferida é estudo do meio e diz que estuda em casa com regularidade. Na área da matemática tem apresentado um desempenho satisfatório. Normalmente, perante as atividades propostas demonstra interesse e empenha-se bastante na sua realização.

É uma criança simpática, muito sensível e bastante introvertida. Nos seus tempos livres costuma ouvir música, brincar com os amigos, ver televisão e filmes.

A análise das tarefas de diagnóstico, realizadas pela Matilde, revelou que esta aluna tinha dificuldade em determinar metades, em situações que envolviam unidades discretas. Para Matilde, determinar "metade" tinha subjacente a ideia de um único elemento que teria que ser dividido em duas partes. Assim, ser confrontada com o problema de dividir ao meio uma unidade discreta (composta, portanto, por vários elementos) parece ser algo confuso para Matilde, que, em termos processuais, resolveu dividindo cada um dos elementos ao meio. No entanto, mesmo quando lhe são apresentadas unidades contínuas, surgem algumas dificuldades. Por exemplo a Matilde demonstrou insegurança em pintar metades de figuras divididas em quatro ou oito partes e em selecionar esquemas que representassem a unidade dividida ao meio. Por outro lado, parece interpretar "metade" como uma das partes de qualquer tipo de partilha em dois, mesmo não se tratando de uma partilha equitativa. Relativamente à linguagem não usou corretamente o termo "metade" para se referir à parte em falta, de um padrão. A aluna indicou a quantidade de triângulos que faltava desenhar para concluir o padrão em vez de referir, como era esperado, que faltava desenhar metade.

Em suma, a Matilde revelou dificuldades em trabalhar com unidades discretas e em identificar metade de unidades contínuas, quando estas se encontravam divididas em mais do que duas partes. Para a aluna, metade era uma parte resultante de qualquer partilha em dois, mesmo que esta partilha não fosse equitativa. Nos diálogos estabelecidos, a aluna nem sempre utilizou corretamente o termo metade.

4.1.2 – Desempenho nas tarefas

Neste subcapítulo, pretende-se dar a conhecer e analisar as estratégias utilizadas, assim como as dificuldades reveladas pela Matilde durante o desenvolvimento da sequência de aprendizagem.

Tarefa 1 – Visita de Estudo

Durante a resolução da questão "Lanche da Joana", a Matilde assumiu, perante a sua colega de trabalho, uma atitude passiva, reveladora de alguma insegurança relativamente ao que era pedido. No que se refere à divisão ao meio da sandes, não mostrou dificuldade, embora posteriormente referisse que, após a divisão, cada menina ficaria com uma sandes. No que diz respeito à partilha dos morangos, apenas com o apoio da professora, conseguiu modelar a situação (Figura 3) e então resolver o problema:

P – Já repartiste a sandes, como é que vais fazer com os morangos? São quantas meninas?

M – Duas.

P – Como é que vais repartir? Imagina que eras a Joana, como é que repartias esses morangos com a Rita?

M – Partia ao meio.

P – Então divide ao meio!

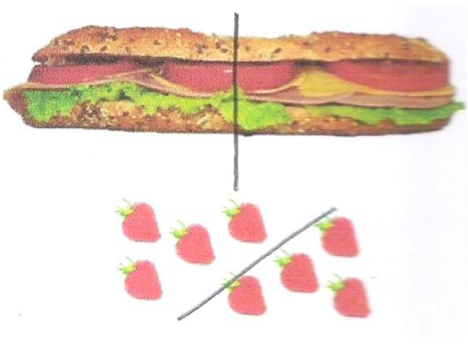


Figura 3 – Registo da tarefa1, primeira questão (Matilde)

A hesitação da Matilde confirma a ideia diagnosticada inicialmente, da sua dificuldade em lidar com a partilha de unidades discretas.

Quando foi solicitado o preenchimento da frase, a Matilde escreveu de imediato:

*"Cada menina comeu*_____2______ *sandes* e __________ *dos morangos."*

Face a esta resposta, foram colocadas algumas questões à aluna, na tentativa de a levar a refletir sobre a sua resposta e também de perceber o que a levou a dar aquela resposta:

P – Cada menina comeu duas sandes?

M – Não, uma!

P – Se a Joana tinha só uma sandes e a repartiu com a sua amiga Rita, achas que cada uma pode ter comido uma sandes?

A aluna ficou pensativa e não respondeu.

P – Por que fizeste um traço ao meio da sandes? Olha para o desenho, tens quantas sandes?

> M – Uma.
>
> P – Então cada menina comeu o quê? Só havia uma sandes! O que quer dizer esse traço?
>
> M – Que é metade para cada uma.

É provável que a resposta inicial se deva ao facto de este ser o primeiro contacto da aluna com os números racionais. Até aqui, para ela só existiam os números inteiros, então os dois pedaços, supostamente, correspondiam a duas sandes e, cada menina comia uma sandes, o que na realidade era uma metade. Deste diálogo, destaca-se também, a importância da interpretação da representação esquemática na descoberta da parte que comeu cada menina.

A conclusão do preenchimento da frase foi realizada em grupo e a Matilde assumiu uma atitude passiva não participando na discussão.

O "Jogo das metades", foi primeiro explorado com todo o grupo e só depois os alunos realizaram individualmente a atividade proposta. Matilde, mais uma vez, revelou algumas dificuldades:

> M – Professora é para cortar assim? (Apontando para o chocolate e desenhando com o dedo várias linhas verticais.)
>
> P – Não sei. Ela em cada casa comia o quê?

A aluna demonstrou insegurança e ficou pensativa, enquanto ia observando o que os colegas faziam e diziam.

> P – O que é que ela vai comer na casa oito?
>
> M – Metade, mas não estou a perceber.
>
> P – Imagina que querias dividir este chocolate ao meio, para ti e para Carolina, como é que fazias?

A aluna pegou no chocolate e dobrou-o ao meio, fazendo coincidir as duas partes obtidas. Demonstrou, mais uma vez, a importância de modelar a situação, que deste modo, passou a compreender.

A partir deste momento, a aluna, sem dificuldade, foi escrevendo o número da casa em que a metade era comida, dividindo a outra metade obtida até chegar ao final do jogo.

Na discussão que se realizou no final da questão, a Matilde não teve uma participação muito ativa, mas importa apresentar o seguinte diálogo, que mostra como a aluna entendeu que é sempre possível fazer mais uma divisão ao meio:

> P – Se tivesse calhado na casa trinta o que é que ela tinha que fazer?
>
> M – Comer mais uma metade.
>
> P – As metades do que vai sobrando do chocolate vão-se tornando cada vez mais…
>
> M - … pequenas.

Na terceira questão desta tarefa "Divisão das pizas", a Matilde repartiu facilmente as pizas nas duas situações apresentadas, usando como estratégia a determinação de metades sucessivas, mas revelou alguma dificuldade relativamente ao nome a atribuir a cada uma das partes obtidas. A aluna demorou mais tempo para completar a divisão porque, na segunda piza, preocupou-se bastante com a necessidade de obter partes com tamanho idêntico, o que revela alguma consciência da partilha equitativa.

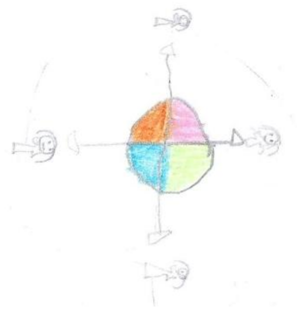


Figura 4 – Registo da tarefa1, terceira questão (Matilde)

Após a conclusão do esquema representado na figura 4, os alunos foram questionados sobre a parte que cada menino comeu. A resposta imediata foi "metade", face à resposta dada, foram lançadas algumas questões a fim de clarificar esta ideia. Durante a discussão, a Matilde teve uma participação pouco ativa, contudo, parece ter entendido as ideias discutidas, pois fez a sua aplicação correta na questão seguinte, como mostra o esquema apresentado na figura 5.

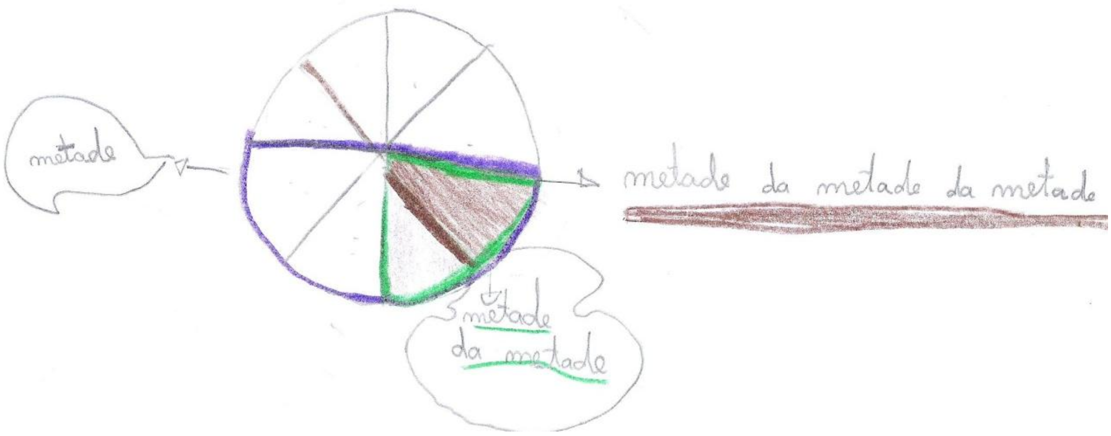


Figura 5 – Registo da tarefa1, quarta questão (Matilde)

Tarefa 2 – Dobras

Na dobragem da primeira tira em duas partes iguais, a Matilde não revelou qualquer dificuldade, talvez porque já tinha efetuado, várias vezes, um procedimento semelhante na tarefa anterior. Relativamente à divisão da tira em quatro partes iguais, a aluna já manifestou algumas dificuldades, pois usou como estratégica a estimativa, para definir o tamanho de uma das partes e, a partir dessa medida, foi dobrando e enrolando a tira sucessivamente, mas quando chegou ao fim uma das partes estava maior. Face a esta situação estabeleceu-se o seguinte diálogo:

> P – As quatro partes estão iguais?
>
> M – Não, uma está maior.
>
> P – Por que não fazes como nas pizas? Primeiro dividiste ao…
>
> M –…meio.
>
> P – E depois?
>
> M – Dividi em quatro.
>
> P – Será que depois de dividires ao meio, dividiste em quatro partes?
>
> M – Não, dividi outra vez ao meio.

Após o diálogo, a aluna dobrou a tira corretamente em quatro partes iguais, mas pediu uma tira nova, pois os vários vincos estavam a dificultar a identificação das partes obtidas. Verificou-se que, apesar do trabalho realizado na primeira tarefa, ainda persistem algumas dificuldades e inseguranças relativamente a este assunto.

A Matilde foi a primeira aluna a concluir, com sucesso, a divisão da tira em três partes iguais. Recorreu a uma estratégia semelhante à inicialmente usada para dividir a tira em quatro partes, mas desta vez com mais cuidado, para que todas as partes ficassem com o mesmo tamanho. Apesar de não obter sucesso na primeira vez que usou esta estratégia, a aluna conseguiu mobilizar conhecimentos, de modo a tornar a sua estratégia eficaz numa situação semelhante.

Quando foi pedido para compararem o tamanho das diferentes partes pintadas, a aluna identificou facilmente a maior e a menor. Para levar cada aluno a formular a sua conclusão, em relação ao tamanho das diferentes partes, foi estabelecida uma discussão envolvendo todos os alunos. A Matilde chegou à seguinte conclusão: *" A verde dobrou-se mais vezes e por isso ficaram mais pequenas e a azul ficou maior."* Deste modo, a aluna mostra ter compreendido que existe uma relação entre o número de vezes em que se dobra a tira e o tamanho das partes obtidas, o que, eventualmente, pode estar associado à emergência do raciocínio proporcional.

Na discussão, que tinha como objetivo introduzir a designação de cada parte obtida nas diferentes tiras e estabelecer uma relação entre estas e a reta numérica, a Matilde participou e mostrou estar a compreender as ideias abordadas, no entanto, revelou alguma confusão na sua aplicação como mostra a figura 6.

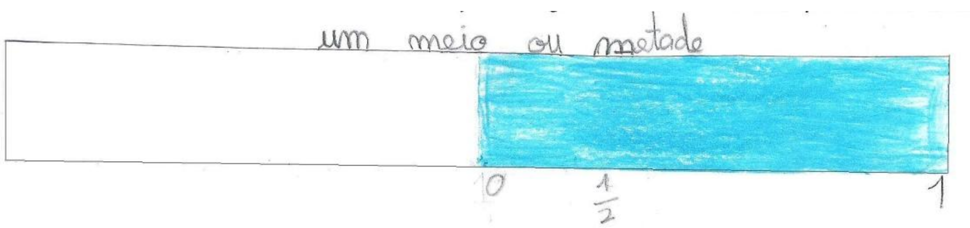


Figura 6 – Registo da tarefa 2, primeira questão (Matilde)

A aluna revelou alguma dificuldade em estabelecer a relação entre a tira e a reta numérica, pois parece ter considerado que a unidade era apenas a parte pintada da tira. Após um pequeno diálogo, a aluna reconheceu que tinha de fazer coincidir o zero com o início da tira e $\frac{1}{2}$ com a dobra da mesma.

Relativamente à tira dividida em quatro partes, a aluna também manifestou algumas dificuldades. Nesta tira, como revela o esquema da figura 7, a aluna já conseguiu identificar a localização do 0 e do 1. A localização do número $\frac{1}{4}$, provavelmente, terá sido dificultada devido ao facto de a parte pintada não se encontrar no início da reta.

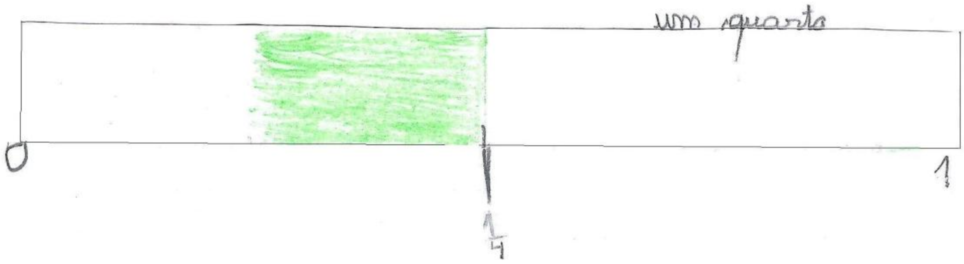


Figura 7 – Registo da tarefa 2, segunda questão (Matilde)

De modo a esclarecer as dúvidas que a aluna manifestou, foi estabelecido um pequeno diálogo:

> P – Um meio é o mesmo que um quarto?
>
> M – Não, um meio é maior.
>
> P – Mas se compararmos as duas tiras, um meio e um quarto estão à mesma distância do zero!
>
> M – Um quatro não é aqui, mas não sei onde é…
>
> P – Qualquer uma das partes da tira é um quarto?
>
> M – Sim.
>
> P – Então não importa qual é que eu pinto, cada parte representa sempre um quarto?
>
> M – Sim.

Como se pensou que esta confusão resultava do facto de a parte pintada não estar no início da tira foi desenhado, no quadro, o esquema apresentado na figura 8, o que facilitou significativamente a localização de $\frac{1}{4}$, na tira transformada em reta numérica.

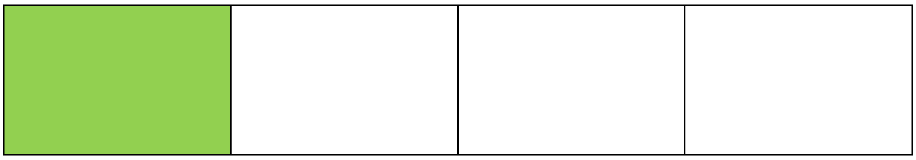


Figura 8 – Esquema realizado no quadro durante a exploração da tarefa 2

Relativamente à tira dividida em três partes, apesar de na sua tira, a aluna não ter pintado o primeiro terço, ao estabelecer a correspondência com a reta numérica, marcou corretamente o ponto correspondente a $\frac{1}{3}$, o que pode significar que a aprendizagem realizada com a tira anterior foi significativa.

Face ao interesse manifestado pelos alunos, foi realizada uma discussão que permitiu a descoberta e a representação na reta numérica das frações: $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$. A Matilde não manifestou dificuldades durante este processo, salientando-se a sua participação na discussão em relação às frações que representam a unidade:

> P – Onde vai ficar três terços?
>
> M – Ao pé do um.
>
> P – Então três terços é igual a um.
>
> M – Sim, porque junta-se tudo.

Tarefa 3 – Maçãs e berlindes

Na primeira parte da tarefa, a Matilde escreveu: *"A professora tem que partir ao meio e depois partir outra vez ao meio."* Apesar de não fazer uma descrição muito completa do procedimento, a aluna, implicitamente, conseguiu identificar o número de partes que necessitava obter e assim indicar como deveria ser dividida a maçã.

Durante a discussão das indicações apresentadas por cada aluno, a Matilde teve um papel bastante importante na clarificação da ideia, apresentada por alguns colegas, de que cada uma das partes obtidas com a divisão era metade. No entanto, não conseguiu lembrar-se da designação *"um quatro"*, referindo-se sempre à parte em questão como *"metade da metade"*.

A aluna revelou bastante dificuldade em encontrar uma designação para a quantidade total de maçã comida por cada aluno, referido que: *"Cada menino comeu metade e um quarto"*. Foi necessário um longo diálogo, recorrendo à manipulação da quantidade total de maçã comida por cada aluno, para que a Matilde chegasse a uma resposta correta:

P – Tens aqui alguma metade?

M – Não.

P – Então o que tens aqui?

M – Uma maçã inteira.

P – Mais…

M – … um quarto.

P – Então que quantidade comeu cada menino?

M – Um quarto.

P – E a maçã inteira? Quem é que a comeu?

M – É uma maçã inteira e um quarto.

Em todas as questões da segunda parte da tarefa, a aluna mostrou algumas dificuldades em identificar a parte dos berlindes que ficava em cada saco, pois para ela era mais significativo o número de berlindes que seria colocado em cada um dos sacos. Na tarefa de diagnóstico, verificou-se uma prestação semelhante, quando questionada sobre a parte que faltava num friso, a aluna respondeu qual a quantidade de triângulos em falta. Possivelmente também existirá relação entre o desempenho da aluna nestas questões e a dificuldade em representar partes de unidades discretas, já referida na tarefa 1 e na tarefa de diagnóstico, o que revela que as dificuldades iniciais persistiram. Depreende-se que teria sido preferível colocar primeiro a questão sobre a quantidade de berlindes que ficava em cada saco, pois é uma situação concreta e que faz parte do quotidiano dos alunos, e só depois perguntar que parte dos berlindes ficava em cada saco. Deste modo, durante a aplicação da tarefa permitiu-se aos alunos trocarem a ordem das questões. Assim, a Matilde não precisou de ajuda para fazer a divisão dos berlindes pelos sacos, no entanto, foi necessário estabelecer um pequeno diálogo com a aluna, para que esta conseguisse descobrir que parte dos berlindes ficava em cada saco. Estas dificuldades foram diminuindo ao longo da atividade como se pode verificar nos seguintes excertos de diálogo:

Divisão por quatro sacos

P – Como é que vamos chamar à parte que ficou em cada saco?

M – Metade.

P – Mas quando dividimos por dois sacos disseste que metade eram seis berlindes.

M – Pois é.

P – Que partes já conheces?

M – Metade, um quarto, um quinto...

P – Se dividiste por quatro sacos, que parte ficou em cada um?

M – Um quarto.

Divisão por três sacos

P – Agora estamos a dividir por três sacos, que parte fica em cada um?

M – Um terço.

P – Porquê?

M – Porque aqui estão três sacos e um terço quer dizer que dividimos por três.

Neste diálogo, também se pode verificar que a aluna relaciona as frações com a divisão, o que é considerado por Brocardo (2010) uma das “grandes” ideias subjacentes aos números racionais.

Tarefa 4 – Missangas

Na primeira questão da tarefa, o contexto e a manipulação do material contribuíram significativamente para a motivação da Matilde que se mostrou bastante entusiasmada e com vontade de o resolver, ultrapassando as dificuldades que foram surgindo, como mostra o seguinte excerto de diálogo:

M – Temos que pôr as missangas todas?

P – Não sei, tu é que tens que decidir.

P – Já sabem quantas missangas vão colocar em cada pulseira?

M – Três.

A aluna respondeu que colocava três missangas em cada pulseira, mas já tinha colocado cinco num dos fios, mostrando alguma confusão entre o número de pulseiras (divisor) e o número de missangas por pulseira (quociente).

Posteriormente a Matilde afirma que cada pulseira deve levar dez missangas, mas quando confrontada com o número total de missangas que possuiu e as que precisaria, corrige a sua previsão para nove missangas por pulseira. No entanto, a aluna não revela segurança na sua previsão e prefere concretizar a distribuição das missangas pelas pulseiras para ter a certeza, mas antes de terminar a distribuição das missangas consegue concluir que a sua previsão estava correta.

Para explicitar o seu raciocínio, o grupo da Matilde apresentou um desenho e uma expressão numérica (figura 9), revelando a importância da concretização na passagem gradual de estratégia informais para estratégias mais formais.

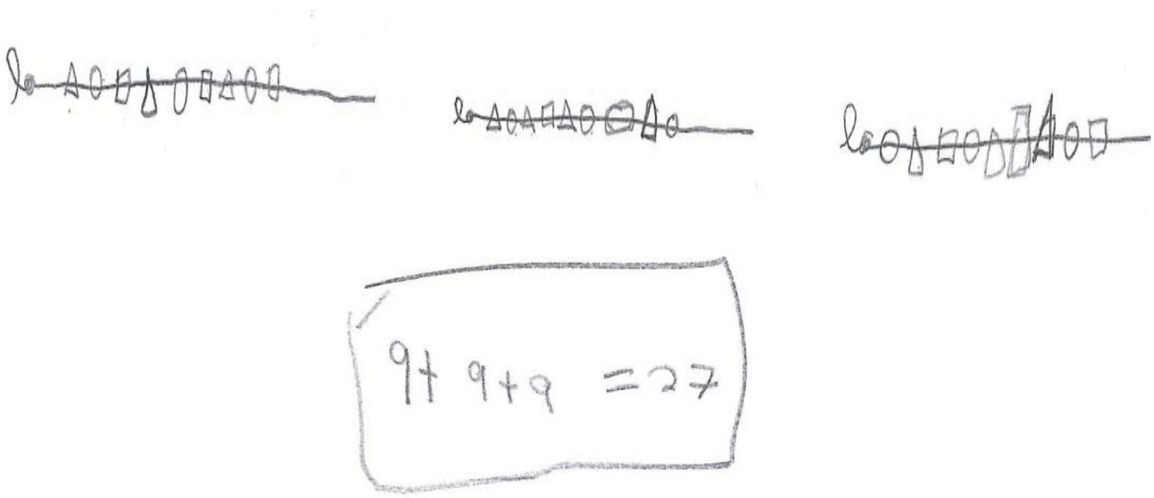


Figura 9 – Registo da tarefa 4, primeira questão (Matilde)

Relativamente à designação da parte das missangas que ficou em cada pulseira, a Matilde revelou não se lembrar da designação correta, mas usou a descrição da representação simbólica para se referir à parte em questão:

> P – Com que parte das missangas ficou cada pulseira?
>
> M – Um, traço por baixo e depois três.

Na segunda questão da tarefa, a Matilde apenas necessitou de alguma ajuda para se recordar da designação “um meio”, nas restantes situações designou corretamente as partes pintadas, apresentado uma justificação coerente, aos colegas que revelavam algumas dificuldades.

Nas situações apresentadas na figura 10, a aluna utilizou como estratégia unir partes da unidade para facilitar a visualização e a identificação da parte pintada em cada situação. Intuitivamente a aluna recorreu a uma ideia de equivalência de frações.

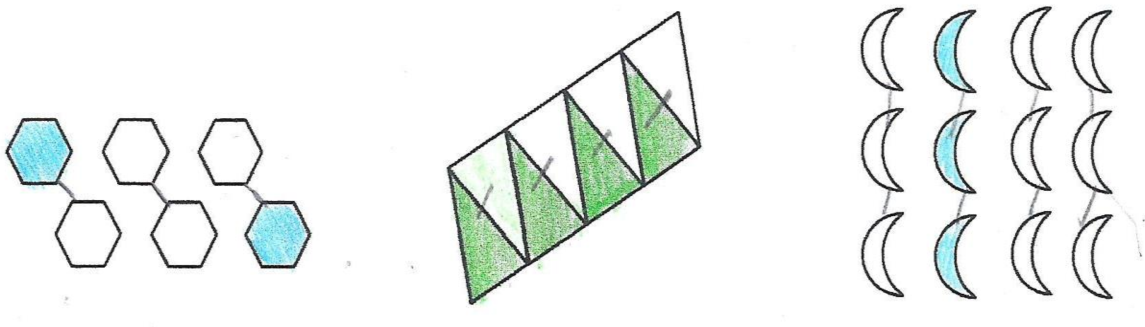


Figura 10 – Registo da tarefa 4, segunda questão (Matilde)

Como surgiram frações equivalentes, foi promovida uma breve discussão, com o objetivo de explorar este conceito de forma intuitiva. A Matilde não mostrou dificuldades em explicar as razões que a levaram a apresentar cada uma das frações, no entanto mostrou alguma resistência em aceitar a solução apresentada pelos colegas. No final da discussão, a aluna mostrou ter compreendido o conceito abordado:

> P – Se valem a mesma coisa, então são…
>
> M – Iguais.
>
> P – Quer dizer que um terço é equivalente a …
>
> M – Dois sextos.

Na última questão da tarefa, a Matilde continuou a mostrar mais facilidade em trabalhar com as unidades contínuas do que com as discretas.

A aluna começou pelo círculo, pintando corretamente: $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$. Depois passou para o retângulo onde pintou primeiro $\frac{1}{2}$, posteriormente dividiu esta parte ao meio, como mostra a figura 11, e de seguida procedeu à pintura de $\frac{1}{4}$ do retângulo.

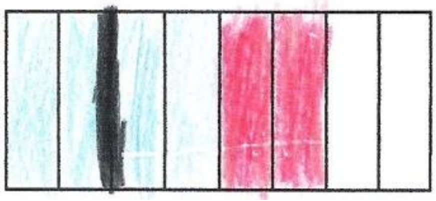


Figura 11 – Registo da tarefa 4, terceira questão (Matilde)

Na situação das maçãs foi necessário alertar a aluna de que a unidade era composta pelas oito maçãs, uma vez que a aluna já tinha começado a dividir uma maçã ao meio. Após esta chamada de atenção a aluna, sem dificuldade, pintou o que era solicitado.

No caso das bolas, a aluna parece ter aproveitado a sua disposição para efetuar corretamente a pintura de $\frac{1}{4}$ de vermelho, no entanto também pintou $\frac{1}{4}$ de azul, revelando dificuldades em descobrir o que faltava pintar de azul para obter $\frac{1}{2}$, como se pode verificar no seguinte excerto de diálogo:

P – Já tens metade das bolas pintadas de azul?

M – Não.

P – Então falta pintar mais bolas.

M – Mas não há mais.

P – Não? Não podes pintar as que estão brancas?

M – Falta pintar mais duas?

P – Só mais duas?

M - Mais quatro.

Durante o diálogo a aluna, mais uma vez, mostrou muita insegurança e alguma dificuldade em compreender que a unidade era composta por um conjunto de vários objetos (unidade discreta).

Na situação das estrelas a aluna também pintou a mesma quantidade de vermelho e de azul: três estrelas de vermelho ($\frac{1}{4}$) e três estrelas de azul ($\frac{1}{4}$), foi necessário questioná-la sobre a totalidade de estrelas existente, para ela verificar que deveria pintar mais três estrelas de azul.

No final desta atividade, a aluna considerou importante registar as conclusões apresentadas na figura 12.

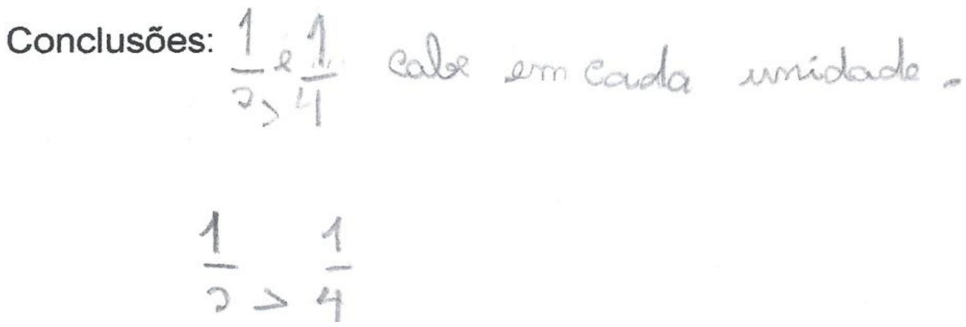


Figura 12 – Registo da tarefa 4, conclusões (Matilde)

Tarefa final

De entre todos os alunos, a Matilde foi a aluna que revelou mais insegurança durante a resolução das questões propostas. De modo a aumentar a autoconfiança da aluna, tentei esclarecer as dúvidas que colocava sem influenciar as suas decisões e respostas dadas.

Logo na primeira questão a aluna solicitou ajuda, porque não estava a entender a pergunta. Sugeri que fizesse esquemas para representar um meio e metade. A aluna desenhou dois círculos num pintou metade, depois ficou um pouco pensativa e disse que um meio é o mesmo que metade, encontrando deste modo a resposta à pergunta.

Na segunda, terceira e quarta questões a aluna não manifestou qualquer dificuldade, apresentando resoluções corretas. É de salientar que na terceira questão onde era pedido para pintar $\frac{1}{4}$, inicialmente, a aluna pintou metade da figura, mas depois apagou e deixou pintado apenas um quarto da figura. Pensa-se que a aluna detetou a incorreção quando pintou $\frac{1}{2}$ de uma das figuras seguintes. Na quarta questão também se nota que a aluna apagou duas maçãs, aparentemente começou por fazer a divisão das maças, em três partes, na vertical, mas terá verificado que era mais fácil fazer esta divisão na horizontal.

Nas duas últimas questões, a aluna pediu ajuda para saber em quantas partes tinha que dividir a piza e o chocolate. No caso da piza apenas foi necessário ler a questão com a aluna e ela descobriu em quantas partes a tinha que dividir. Inicialmente fez uma divisão em que as partes ficaram com tamanhos muito diferentes, mas apagou para melhorar a representação. Foi necessário questionar a aluna sobre a designação da parte que cada menino comeu, pois a aluna apenas estava a dizer que cada um comeu uma parte.

No caso do chocolate, também foi necessário ler a questão com a aluna, enquanto esta ia fazendo a divisão no esquema. Depois de identificar a parte que a Joana deu à Rita, a aluna, inicialmente disse que essa parte correspondia a metade do chocolate, mas logo de seguida corrigiu dizendo que era $\frac{1}{4}$.

4.1.3 – Síntese do desempenho nas tarefas

Durante a aplicação das tarefas verificou-se um ambiente de trabalho bastante positivo favorecido pela sua contextualização, o que motivou a participação e envolvimento da Matilde.

O recurso a material manipulativo e a exploração das situações de forma intuitiva pareceu aumentar a autoconfiança da aluna. Contudo, esta manifestou algum desconforto devido ao facto de estar a ser filmada, o que poderá ter influenciado o seu desempenho, pois, por várias vezes, a aluna teve que ser chamada à atenção, porque estava distraída a olhar para a câmara de filmar.

No início da aplicação da sequência de tarefas a Matilde revelava muita insegurança, assumindo uma atitude passiva nos trabalhos a pares e nos diálogos. No entanto, ao logo do estudo, a aluna foi-se tornando mais segura na apresentação e fundamentação das suas estratégias e ideias.

Durante a aplicação das tarefas, a aluna revelou algumas dificuldades, principalmente no trabalho com unidades discretas e na designação das partes obtidas nas diferentes situações, que foram sendo superadas com pequenos diálogos e uma exploração mais direcionada das tarefas.

Nas primeiras abordagens, a aluna manifestou alguma resistência na compreensão da representação simbólica das frações, assim como no desenvolvimento da linguagem específica das frações, contudo ao longo do estudo, foi conseguindo fazer a mobilização de conhecimentos adquiridos em tarefas anteriores para proceder à resolução das tarefas seguintes, utilizando corretamente a representação simbólica e a linguagem específica das frações. O recurso a materiais manipulativos revelou-se fundamental para a concretização das situações apresentadas e o desenvolvimento de conceitos.

A Matilde, que inicialmente parecia sentir muita insegurança e até mesmo desconforto quando confrontada com situações matemáticas, no final revelou mais segurança e conforto perante as situações apresentadas, parecendo ter adquirido alguma confiança no seu saber matemático.

4.2 – Tânia

4.2.1 – Caracterização

A Tânia tinha seis anos quando iniciou a realização da sequência de aprendizagem e sete anos quando a terminou, apresentado a mesma idade durante a realização da tarefa final.

A aluna gosta da escola e diz que estuda em casa com regularidade, as suas disciplinas preferidas são matemática e língua portuguesa. Na área da matemática tem apresentado um desempenho bastante satisfatório. Perante as atividades propostas demonstra interesse e empenha-se bastante na sua realização.

É uma criança simpática, participativa e com espírito de líder. Nos seus tempos livres costuma brincar como os amigos, ver televisão e brincar na areia e nos baloiços.

Nas tarefas de diagnóstico, a aluna revelou dificuldades em pintar metade das missangas de azul e as restantes de cor-de-rosa, pois achou que as missangas cor-de-rosa tinham que ser metade das azuis, o que não era possível, uma vez que a pulseira tinha oito missangas. Relativamente à linguagem também não usou corretamente o termo "metade" para se referir à parte em falta.

As restantes tarefas foram realizadas com facilidade e de forma correta, de salientar que na última questão a aluna justifica a sua resposta com a expressão: "$5 \times 3 = 15$", revelando que, intuitivamente, a aluna reconhece a divisão e a multiplicação como operações inversas.

4.2.2 – Desempenho nas tarefas

Tarefa 1 – Visita de Estudo

No início da resolução da primeira questão, "Lanche da Joana", a Tânia apresentou uma atitude de reflexão, depois resolveu a situação sem solicitar qualquer ajuda e apresentou o esquema da figura 13.

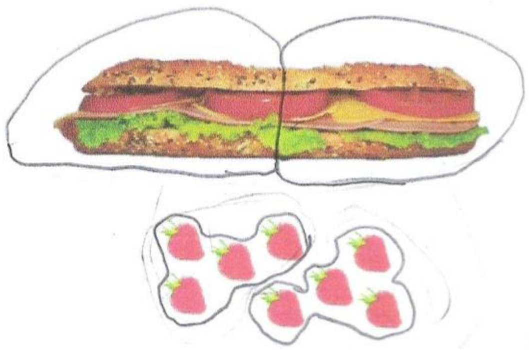


Figura 13 – Registo da tarefa 1, primeira questão (Tânia)

As dúvidas surgiram no preenchimento da frase:

P – Achas que fica bem: *"Cada menina comeu__metade__ sandes …"*

T – "da sandes"

P – Não podemos acrescentar “da” temos que arranjar uma palavra que queira dizer o mesmo que “metade”.

T – meio; meia sandes!

O preenchimento da lacuna da frase sobre os morangos foi realizado em grupo, e os alunos já mostraram mais facilidade em escolher a palavra adequada: “meio” ou “metade”, revelando que tinham compreendido a sua equivalência.

Como a aluna não apresentou dificuldades, no final da tarefa, de modo a aprofundar os conceitos abordados, estabeleceu-se o seguinte diálogo:

P – Quanto é metade de oito morangos?

T – Quatro.

P – Por que razão é quatro?

T – Porque quatro mais quatro é oito.

P – Se em vez de serem duas meninas fossem quatro o que tínhamos que fazer? Tínhamos que dividir…

T – …em dois; em duas partes.

P – Em duas partes?

T – É dois, mais dois, mais dois, mais dois.

P – Dava então quantos morangos a cada menina?

T – Dois.

P - Para dar um morango a cada menina, tinham que ser quantas meninas?

T – Oito meninas.

Na questão “Jogo das metades”, a Tânia voltou a adotar uma postura de reflexão, foi fazendo dobragens e contado os quadrados. Encontrou a primeira metade com facilidade, mas achou que o jogo acabava na casa doze, pois a Joana comia a outra metade do chocolate, não respeitou a regra de que só podia comer metade do que tinha. Depois de perceber o funcionamento do jogo prosseguiu, mas voltou a precisar de ajuda para identificar as partes que iam sendo comidas:

P – Qual foi o bocado que ela comeu na casa oito?

T – Este. (Apontando para a metade da casa doze.)

P – Só esse? Mas o chocolate era isto tudo, onde é que está a primeira metade?

T – É assim.

P – Escreve o número da casa em que cada metade é comida.

Na casa vinte e quatro, a aluna achou que a Joana devia comer todo o chocolate, que lhe restava, de modo a acabar o jogo, não respeitando novamente a regra de comer apenas metade do chocolate que possuía:

> P – Comeu tudo na casa vinte e quatro, porquê? Devia comer metade!
>
> T – Então, mas assim não dá!
>
> P – Porquê?
>
> T – Tem que comer isto tudo, não para em mais casas pares.
>
> P – Ela chegou à casa vinte e quatro com quatro quadradinhos, nas casas pares tem que comer metade, isto é metade?
>
> T – Não, vai comer duas e chega ao fim.
>
> P – Então o que é que ela tinha quando chegou ao fim?
>
> T – Tinha dois bocadinhos.

Da discussão realizada no final do jogo, salienta-se o seguinte excerto da participação da Tânia, que revela como através da divisão sucessiva em metades, a aluna demonstra ter uma noção intuitiva de infinito e alguma ideia de densidade.

> P – O que é que fomos sempre fazendo?
>
> T – Metades.
>
> P – Por que razão o chocolate não acabou?
>
> T – Porque era grande, médio, pequeno e depois sobrou.
>
> P – E será que podia acabar?
>
> T – Não, porque ficava sempre com uma metade mais pequena.

Nas questões referentes à "Divisão das pizas", a Tânia apenas revelou alguma dificuldade relativamente ao nome a atribuir a cada uma das partes obtidas.

Na divisão da piza por quatro meninos e após a indicação para pintar de cores diferentes metade da piza e a parte que cada menino comeu, a aluna apresentou o esquema que mostra a figura 14, no entanto, só após a seguinte discussão é que a aluna realizou a legenda da figura:

> P – Cada menino comeu então metade da…
>
> T – … metade
>
> P – A parte pintada de roxo escuro é…
>
> T – … metade
>
> P – Como podemos chamar à parte pintada de roxo claro?
>
> T – Metade da metade.

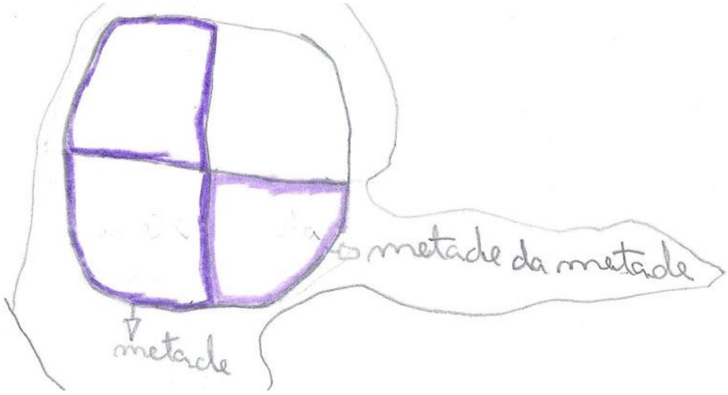


Figura 14 – Registo da tarefa 1, terceira questão (Tânia)

Relativamente à divisão da piza em oito partes, a Tânia procedeu de forma semelhante à questão anterior, mas mostrou mais facilidade em designar a parte que cada menino comeu e em fazer a legenda apresentada na figura 15.

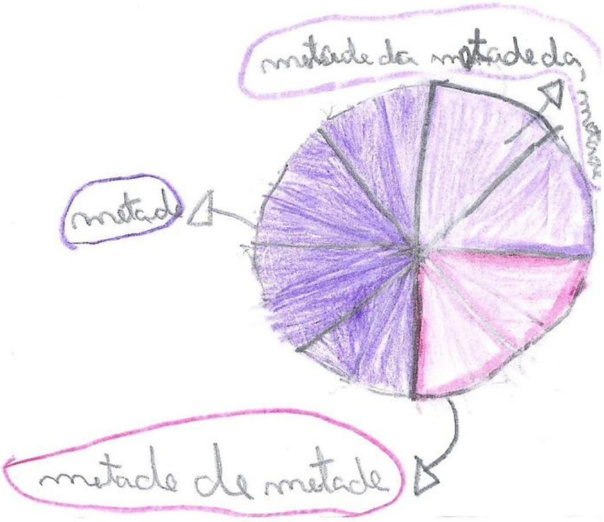


Figura 15 – Registo da tarefa 1, quarta questão (Tânia)

Tarefa 2 – Dobras

Nas várias questões desta tarefa, a Tânia apresentou uma atitude bastante consciente, não agindo por impulso, ou seja, pensava sempre um pouco antes de efetuar qualquer procedimento.

Na divisão da tira em duas e em quatro partes iguais, a aluna não revelou qualquer dificuldade, mobilizando os conhecimentos adquiridos na tarefa anterior. Relativamente, à divisão da tira em três partes iguais, recorrendo a uma estratégia de tentativa e erro, a Tânia foi dobrando várias vezes a tira até conseguir acertar, ou seja, obter três partes iguais, sem necessitar de qualquer ajuda.

Quando foi solicitada a comparação do tamanho das diferentes partes pintadas, a aluna identificou facilmente a maior e a menor, fazendo a ordenação das várias partes pintadas através da sua sobreposição, realizando um procedimento que, posteriormente poderá facilitar a comparação e ordenação de frações.

Na discussão, que tinha como objetivo formular conclusões em relação ao tamanho das diferentes partes, a Tânia revelou muita segurança na sua participação:

P – Qual foi a tira que dobraram mais vezes?

T – A verde.

P – Por isso ficou dividida em partes…

T – … mais pequenas.

P – Qual é que dobraram menos?

T – A azul.

P – Se dobrarmos pouco, ficam partes…

T – … maiores.

P – Se dobrarmos muito ficam partes…

T – … mais pequenas.

Depois da discussão, ao escrever a conclusão: *" Quanto mais dobramos mais pequeno fica."* a aluna revelou ter compreendido e conseguiu generalizar para todos os casos, que existe uma relação de proporcionalidade inversa entre o número de vezes em que se dobra a tira e o tamanho das partes obtidas.

Relativamente à introdução da designação de cada parte obtida nas diferentes tiras, a participação da Tânia revelou-se bastante pertinente, pois de forma intuitiva a aluna simplificou esta introdução, tornando-a mais significativa para todos:

P – A tira está dividida ao…

T – …meio.

P – Podemos dizer que a parte azul é uma metade ou um…

T – … meio.

P – $\frac{1}{2}$ é um número, mas não é um número inteiro.

T – Pois, porque o risco está a dividir.

A aluna revelou facilidade em estabelecer a relação entre as tiras e a reta numérica, com exceção da tira dividida em quatro partes, como revela o esquema da figura 16.

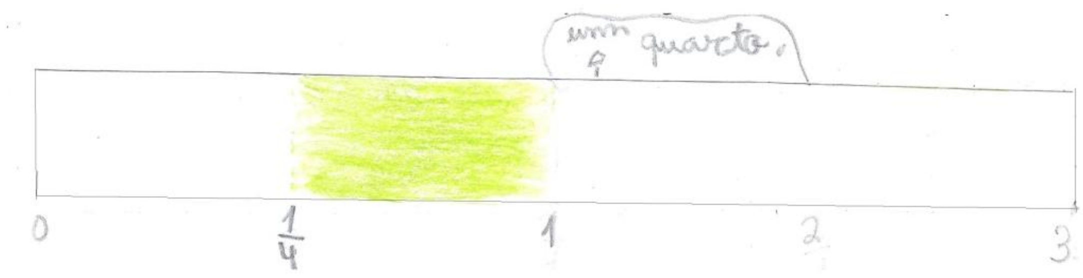


Figura 16 – Registo da tarefa 2, segunda questão (Tânia)

A aluna revelou dificuldade em representar na reta simultaneamente números inteiros e racionais, pois marca a distância entre $\frac{1}{4}$ e 1 igual à distância entre 1 e 2. Ao fazer a correspondência entre a tira e a reta, a aluna continuou a interpretar $\frac{1}{4}$ apenas como uma área e não como um número. A aluna não conseguiu fazer uma correspondência correta entre a tira e a reta.

De modo a esclarecer as dúvidas que a aluna manifestou, foi estabelecido um pequeno diálogo que poderá revelar que a aluna se precipitou ao apresentar a resolução que mostra a figura 16.

P – Esta tira é igual à de cima?

T – Sim.

P – Então o número um não devia estar no mesmo sítio nas duas retas?

T – Sim. Está errado.

Posteriormente, a Tânia corrigiu a sua representação, o que fez compreensivamente, uma vez que realizou, com facilidade, a descoberta e a representação na reta numérica das frações: $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, assim como ordenou corretamente as frações unitárias ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$), referindo que estas se encontravam entre os números zero e um.

Tarefa 3 – Maçãs e berlindes

Na primeira parte da tarefa, a Tânia escreveu: *"A professora tem que partir a maçã em quatro metades."* A aluna conseguiu identificar o número de partes que necessitava obter, mas não deu indicações para efetuar a divisão, recorreu ao desenho (figura 17) para completar a sua reposta. Chamou a cada um das partes obtidas: metade, o que é muito frequente nestas primeiras abordagens.

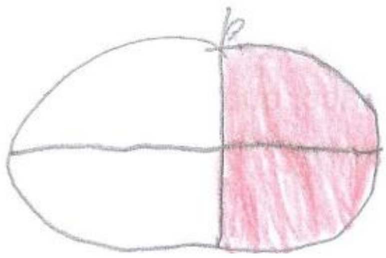


Figura 17 – Registo da tarefa 3, primeira questão (Tânia)

Durante a discussão das indicações apresentadas por cada aluno, a Tânia revelou alguma resistência em aceitar que não era possível partir a maçã em quatro metades, pois para ela, uma metade era uma parte:

> T – Partimos aos meios, uma metade para mim, uma para a Matilde, outra para o João e outra para a Inês.
>
> P – A maçã tem quatro metades?
>
> T – Não, tem duas, mas depois partimos outra vez?
>
> P – Não ficámos com quatro metades? Cada parte é o quê?
>
> T – Meia metade.

Com a continuação da discussão, a aluna lembrou-se da designação *"um quatro"* e referiu que a divisão que apresentou no seu desenho não estava muito correta, porque as partes de cima da maçã eram maiores que as de baixo, por isso seria mais correto fazer todos os cortes na vertical.

Após um pequeno diálogo sobre a quantidade total de maçã comida por cada aluno, a aluna registou: *"Vamos comer $\frac{1}{4}$ e uma maçã inteira"*. Tendo em conta a facilidade demonstrada pela aluna nesta questão, foi-lhe colocado o desafio de representar a quantidade total que cada menino comeu usando apenas algarismos. Intuitivamente a aluna escreveu o numeral misto: $1\frac{1}{4}$ e explicou aos colegas que o 1 era a maçã inteira e $\frac{1}{4}$ era um quarto da maçã.

Na primeira questão da segunda parte da tarefa, tal como a Matilde, a Tânia também revelou algumas dificuldades em identificar a parte dos berlindes que ficava em cada saco, pois para ela era mais significativo o número de berlindes que seria colocado em cada um dos sacos. Esta situação também se verificou nas tarefas de diagnóstico, quando questionada sobre a parte em falta, a aluna respondeu qual a quantidade de triângulos em falta. Com já foi referido anteriormente com a Matilde, perante esta dificuldade, permitiu-se aos alunos trocarem a ordem das questões.

Após um pequeno diálogo, a aluna conseguiu responder corretamente a todas as questões, revelando uma grande alegria por ter compreendido o que era pedido e assim realizar a tarefa sem solicitar ajuda.

Tarefa 4 – Missangas

No início da tarefa a Tânia mostrou-se muito entusiasmada e referiu que a Joana tinha razão, porque a matemática existe em muitas situações.

A aluna não necessitou do material manipulativo para resolver a primeira questão da tarefa, apenas o usou para confirmar a sua solução, como mostra o seguinte diálogo:

> T – Cada pulseira fica com nove missangas!
> P – Porquê?
> P – Porque nove mais nove mais nove dá vinte e sete.

Para registar o seu raciocínio, o grupo da Tânia apresentou uma expressão numérica que traduz a resolução do problema, mas também acrescentou outras decomposições do número vinte e sete (figura 18). Talvez porque a decomposição de números faça parte da sua rotina, nem pensaram se era necessário efetuá-las, apenas as fizeram porque estavam a achar divertido, estavam tão entusiasmados que tive de pedir para pararem de fazer decomposições.

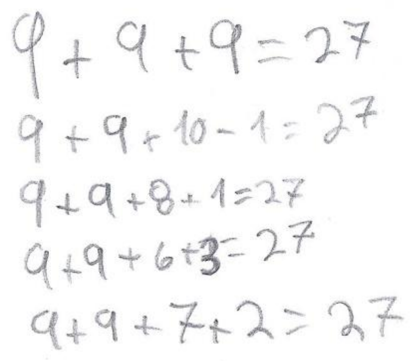


Figura 18 – Registo da tarefa 4, primeira questão (Tânia)

A Tânia designou corretamente a parte das missangas que ficou em cada pulseira, revelando facilidade na utilização da linguagem das frações.

Na segunda questão da tarefa, a Tânia designou corretamente a parte que representava "um meio", mas manifestou alguma dificuldade em efetuar a sua representação simbólica.

Nas situações que representavam $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$, a aluna assumiu que o número de partes pintadas correspondia ao numerador e o número de partes por pintar ao denominador. No entanto, bastou pedir à aluna a justificação da escolha de uma das frações apresentadas para esta refletir e efetuar as devidas correções.

O mesmo aconteceu na situação seguinte, em que o pedido de justificação da solução apresentada conduziu à reflexão e consequentemente à correção:

> P – Explica porque colocaste aqui $\frac{1}{6}$?
>
> T – Não, em cima é dois e em baixo seis!
>
> P – Dois sextos?
>
> P – Sim, porque estão duas pintadas e ao todo são seis.

Durante a discussão que tinha como objetivo explorar o conceito de fração equivalente de forma intuitiva a Tânia revelou ter compreendido o conceito abordado, como mostra o seguinte excerto de diálogo:

T – Nós temos $\frac{4}{8}$ e $\frac{1}{2}$.

P – O que significa?

T – Quer dizer que os dois estão certos, porque quatro mais quatro é oito e quatro estão pintados, que é metade de oito.

P – Então podemos dizer que quatro oitavos é equivalente a…

T – Um meio.

Na última questão da tarefa, a Tânia apresentou algumas dificuldades e também alguma falta de concentração. Começou por pintar $\frac{1}{2}$ das maças de vermelho em vez de azul, no entanto, quando foi questionada sobre a quantidade que estava pintada de vermelho, verificou que tinha trocado as cores e efetuou a respetiva correção. Relativamente à identificação de $\frac{1}{4}$ das maças, para a aluna fazia mais sentido pintar $\frac{1}{4}$ das maçãs que ficaram por pintar e não $\frac{1}{4}$ da totalidade de maçãs, como mostra o seguinte excerto de diálogo:

T – Pintamos uma maçã.

P – Mas isso é um quatro das maçãs que sobraram e não um quarto do total de maças.

T – Já sei, pintamos estas duas.

P – Porquê?

T – Porque está aqui dividido ao meio e aqui também (Figura 19).

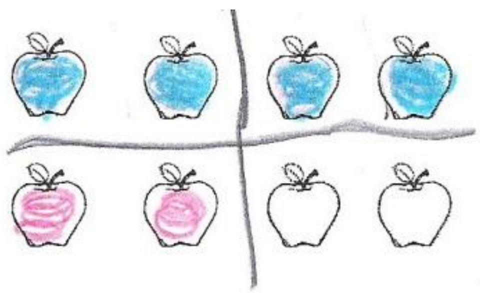


Figura 19 – Registo da tarefa 4, terceira questão (Tânia)

No caso do círculo, que se encontrava dividido em quatro partes, a aluna começou por pintar de vermelho, uma das partes ($\frac{1}{4}$), mas pintou os restantes $\frac{3}{4}$ de azul. Só depois de ser questionada se estava metade da figura pintada de azul é que a aluna apagou e colocou uma cruz na parte que tinha pintado a mais.

A aluna não mostrou qualquer dificuldade no caso do retângulo, aparentemente porque este estava divido no mesmo número de partes que as maçãs.

No caso das estrelas parece que a aluna quis seguir a estratégias usada anteriormente, mas atendendo apenas à representação esquemática que as maças e as estrelas apresentavam, não tendo em conta que o número de elementos de cada conjunto, como mostra o seguinte excerto de diálogo:

P – Pintaram metade das estrelas de azul?

T – Sim!

P – Quanto é metade das estrelas?

T – São seis.

P – Então mas só estão quatro pintadas?

T – Faltam duas.

T – E pintamos duas de vermelho?

P – Porquê? Quanto é metade das azuis?

T – Três. Pois, pintamos três de vermelho.

No caso das bolas, a aluna volta a querer reproduzir o que fez nas situações anteriores, tendo que ser alertada para o número total de bolas existente.

No final desta atividade a aluna concluiu que podemos pintar $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ na mesma unidade, que em cada unidade pintámos $\frac{3}{4}$ e que $\frac{1}{2}$ é menor que a unidade. A Tânia também efetuou o registo presente na figura 20, que mostra como intuitivamente aplicou corretamente a operação da adição aos números fracionários.

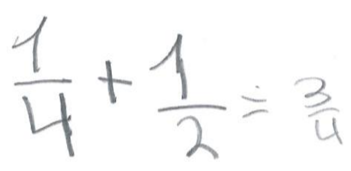


Figura 20 – Registo da tarefa 4, conclusões (Tânia)

Tarefa final

A Tânia resolveu corretamente todas as questões sem solicitar qualquer ajuda. Apenas deu uma resposta que não estava totalmente correta na última questão, no entanto, a representação esquemática (figura21) demonstra que a aluna compreendeu o que fez.

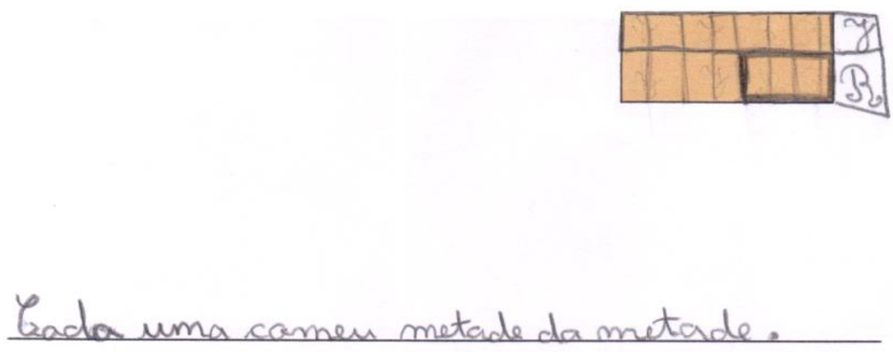


Figura 21 – Registo da tarefa final, sexta questão (Tânia)

Quando questionada sobre a razão de uma representação esquemática apresentada na primeira questão a aluna disse que não estava a entender e por isso recorreu a esta estratégia, mas depois percebeu e já não precisou de usar o esquema.

É também de salientar, que na terceira questão, a aluna fez a divisão das figuras para identificar a parte que devia pintar em cada situação.

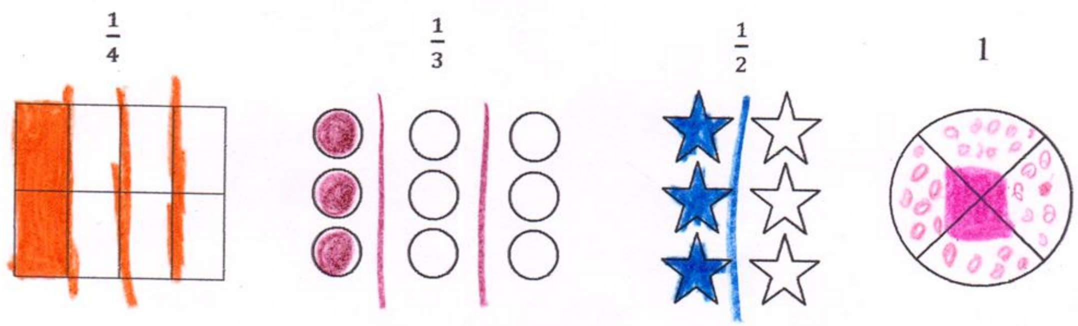


Figura 22 – Registo da tarefa final, terceira questão (Tânia)

4.2.3 – Síntese do desempenho nas tarefas

A aplicação das tarefas decorreu num ambiente de trabalho bastante positivo e desafiante para a Tânia, que mostrou grande satisfação e alegria durante a sua realização.

A utilização de material manipulativo, a contextualização das tarefas e a exploração das situações de forma intuitiva, parecem ter possibilitado o recurso a diversas estratégias, contribuindo assim para aumentar a motivação da aluna e o interesse pela matemática.

No início da aplicação da sequência de tarefas a Tânia revelou alguma timidez, o que faz parte da sua personalidade, quando está perante uma situação desconhecida, neste caso: estar a ser filmada. No entanto, pensa-se que este facto não terá influenciado o seu desempenho, pois a aluna mostrou confiança na apresentação e fundamentação das suas estratégias e ideias.

Ao longo da aplicação da sequência de tarefas, a Tânia revelou uma atitude bastante consciente, pois normalmente refletia sempre um pouco antes de executar qualquer procedimento. A aluna resolveu a maior parte das tarefas sem solicitar ajuda, revelando facilidade em encontrar estratégias adequadas às situações apresentadas, dando preferência às representações esquemáticas. Em algumas situações houve necessidade de apresentar novos desafios, de modo a manter a aluna interessada e motivada, o que permitiu aprofundar alguns conhecimentos.

Nas primeiras abordagens, a aluna revelou algumas dificuldades no trabalho com unidades discretas e na designação das partes obtidas em diferentes situações, estas dificuldades foram sendo superadas recorrendo a pequenos diálogos e à capacidade de reflexão da aluna.

Durante a aplicação das tarefas, a Tânia manifestou facilidade na compreensão da representação simbólica das frações, assim como na utilização da linguagem específica das frações. A aluna conseguiu fazer a mobilização de conhecimentos adquiridos em tarefas anteriores para proceder à resolução das tarefas seguintes.

A aluna apresentou sempre uma atitude bastante positiva em relação a todas as situações matemáticas apresentadas, revelando um grande interesse em aumentar os seus conhecimentos e muita confiança no seu saber matemático.

V – Conclusões

Este capítulo será iniciado com a apresentação de uma síntese do estudo realizado, de seguida serão apresentadas as principais conclusões obtidas, relativamente às questões de investigação e por fim será feita uma breve reflexão, com objetivo de identificar as limitações do estudo e apresentar algumas recomendações.

5.1 – Síntese do estudo

O estudo apresentado surgiu da necessidade de aprofundar conhecimentos sobre o processo de ensino/aprendizagem dos números racionais (frações) nos primeiros anos de ensino, numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número.

Na fundamentação teórica foi apresentada uma breve abordagem de aspetos relacionados com o desenvolvimento do sentido de número em geral, e do sentido de número racional em particular. Foram analisados os programas oficiais e as perspetivas de alguns autores/teóricos sobre a aprendizagem de números racionais.

A metodologia usada neste estudo foi de natureza qualitativa, na forma de estudo de caso.

Este estudo teve por base a aplicação de uma sequência de tarefas construída pela investigadora, tendo em conta o enquadramento teórico do estudo, o Currículo Nacional do Ensino Básico, (ME, 2001) o PMEB (ME, 2001) e a ideia de trajetória hipotética de aprendizagem. As tarefas privilegiaram a exploração de situações devidamente contextualizadas de forma intuitiva, com recurso a materiais manipulativos que auxiliaram a modelação matemática e a construção de esquemas mentais. A linguagem e a simbologia foram desenvolvidas de forma natural, partindo dos contextos apresentados e da linguagem utilizada pelos alunos no seu dia-a-dia.

A recolha de dados decorreu no 3º período do ano letivo 2010/11, numa turma de 1º/2º ano em que lecionava, e foi concluída no 1º período do ano letivo de 2011/12. Da turma selecionaram-se duas alunas caso (do 1.º ano de escolaridade), que foram objeto de uma análise mais aprofundada. As principais fontes de dados foram as vídeos-gravações e as produções dos alunos.

5.2 – Conclusões do estudo

O estudo procurou responder às seguintes questões de investigação: 1) Que processos usam os alunos na resolução de tarefas conducentes ao desenvolvimento do sentido de número racional? 2) Que estratégias de ensino parecem facilitar ou dificultar o desenvolvimento do sentido de número racional? 3) Que dificuldades manifestam os alunos no desenvolvimento do sentido de número racional. Seguidamente serão apresentadas as principais conclusões em função das mesmas.

Processos usados pelos alunos

No momento de aplicação da sequência de tarefas, as alunas, apesar de estarem no primeiro ano de escolaridade, já tinham tomado consciência que em matemática podem usar diferentes estratégias para resolver a mesma situação.

Durante todo o estudo, as alunas demonstraram interesse e empenho na realização das tarefas propostas, o que facilitou a sua aplicação e contribuiu significativamente para alcançarem os objetivos propostos. Confirma-se assim a ideia de Sharp, Garofalo & Adams (2002) de que na apresentação das situações aos alunos se deve ter em atenção o envolvimento destes através do contexto. A curiosidade dos alunos deve ser satisfeita, de modo a que estes queiram e comecem a resolver a situação.

Na primeira tarefa, as alunas apresentaram diferentes estratégias. A Matilde optou por observar o trabalho dos colegas, o que lhe permitiu ganhar segurança para modelar o problema. A Tânia apresentou uma estratégia de tentativa e erro complementada por momentos de reflexão.

A Tânia inicialmente revelou alguma dificuldade na compreensão das regras do “jogo das metades” e para as ultrapassar foi sempre argumentando segundo o seu ponto de vista, não aceitando mudar a sua estratégia, enquanto não entendesse corretamente o que era pretendido com o jogo, apesar das dificuldades iniciais com esta situação, a aluna demonstrou ter uma noção intuitiva de infinito e de densidade.

A Matilde mostrou uma grande preocupação em obter partes com tamanhos idênticos na divisão das pizas, revelando consciência de partilha equitativa.

Ao longo da tarefa, verificou-se que as alunas conseguiram mobilizar conhecimentos de umas questões para as outras.

Na tarefa *dobras*, as alunas recorreram às estratégicas de tentativa e erro, de estimativa e também se verificou a utilização de conhecimentos adquiridos na tarefa anterior. De acordo com o NCTM (1998), é fundamental o desenvolvimento de conceitos e relações que funcionarão como alicerces para aprendizagens futuras.

Ao longo da tarefa verificou-se um aperfeiçoamento das estratégicas usadas. As duas alunas conseguiram comparar e fazer a ordenação das várias partes pintadas, o que posteriormente poderá facilitar a compreensão e ordenações de frações, não foi possível identificar a estratégica da Matilde, mas a Tânia fez esta ordenação recorrendo à sobreposição, a aluna também conseguiu generalizar para todos os casos, dizendo que *"quanto mais dobramos mais pequeno fica"*. Considera-se importante o desenvolvimento destas estratégias pessoais que poderão evitar dificuldades futuras na ordenação e equivalência de frações como refere ser muito frequente, Smith (2002)

Importa referir que durante a questão relacionada com a divisão da maçã a Tânia revelou uma posição crítica face à representação esquemática que fez dessa divisão, tendo em conta a forma irregular da maçã. Nesta questão, a Matilde como não se recordava da designação $\frac{1}{4}$, utilizou a expressão "metade da metade" para se referir a esta parte, uma vez que esta designação faz mais sentido para a aluna, pois como refere Empson (2002) as crianças têm um conhecimento robusto de metade e metade repetida antes de qualquer instrução sobre frações.

Relativamente à questão dos berlindes, as alunas preferiram efetuar primeiro a distribuição pelos sacos e só depois pensar qual a parte que correspondia ao conteúdo de cada saco. A Matilde precisou de recorrer ao material manipulativo em todas as situações, mas a Tânia só precisou na segunda questão.

Na primeira questão da última tarefa, a Tânia recorreu à adição sucessiva para resolver a questão, a Matilde fez uma estimativa da quantidade de missangas que ficaria em cada pulseira, mas precisou de recorrer ao material manipulativo para concretizar a divisão, no entanto, no final apresentou a representação esquemática e a expressão numérica que a traduz, revelando assim estar numa fase de transição do seu processo de formalização de estratégias.

Para facilitar a identificação da parte pintada nas situações apresentadas na segunda questão da tarefa 4, a Matilde procedeu à união de partes que constituíam a unidade de forma a visualizar algo que lhe fosse familiar. A Tânia escreveu as frações correspondentes a cada caso de forma mais abstrata, pois contava o número de partes pintadas para escrever o numerador e o número total de partes em que a unidade se encontrava dividida para escrever o denominador, encontrando assim frações que ainda não conhecia.

Na fase final da tarefa, as alunas aproveitaram a disposição das partes de cada unidade para procederem à pintura de $\frac{1}{2}$ e de $\frac{1}{4}$.

Da análise global do desempenho das alunas na sequência de tarefas conclui-se que estas já possuíam alguns conhecimentos sobre os números racionais resultantes das suas vivências, o que confirma a ideia já apresentada por Smith (2002) de que os alunos, no dia-a-dia, geram as suas ideias sobre frações e que as experiências com estes conceitos começam antes da entrada para a escola. As alunas, de forma intuitiva e tendo como suporte a contextualização das situações apresentadas, desenvolveram novos conhecimentos sobre números racionais, usaram corretamente a notação de numeral misto e de adição de frações com denominadores diferentes. Demonstraram ainda, uma noção intuitiva de proporcionalidade inversa e de infinito, assim como alguma ideia de densidade, característica dos números racionais.

As *estratégias de Ensino*

No trabalho com alunos deste nível de ensino, a contextualização das tarefas revelou-se fundamental. Permitiu envolver os alunos mantendo-os interessados e motivados, ajudando-os assim na resolução das tarefas, pois estes colocavam-se no lugar das personagens, o que lhes facilitava a interpretação das situações. Brocardo

(2010) considera fundamental o uso de contextos apropriados, que tenham significado e sejam entusiasmantes para os alunos.

A exploração, ao longo da sequência de tarefas, de situações que envolviam procedimentos semelhantes, mas com graus de dificuldade crescente, permitiu aos alunos efetuarem frequentemente a mobilização de conhecimentos adquiridos anteriormente e assim evoluírem no domínio do tema de forma gradual e com autoconfiança. Em Post et al. (1993) também se defende que o ensino dos números racionais deve ter como base as aprendizagens anteriores dos alunos e evoluir ao longo de vários anos.

O recurso a materiais manipulativos estruturados (fios de contas) e não estruturados (chocolates de papel, tiras de papel, maçãs, sacos e berlindes) facilitou a interpretação e a resolução das situações apresentadas, pois, os alunos, sempre que necessitaram, tiveram oportunidade de realizar a concretização, servindo esta, algumas vezes, apenas para confirmar, por uma questão de segurança, o que já tinham efetuado de forma mais abstrata. Os alunos deste nível de ensino, nomeadamente no desenvolvimento do sentido de número racional, apesar de explorarem as situações de forma muito intuitiva, encontram-se num processo de formalização crescente, em que o recurso ao concreto, sustenta esta evolução. É de salientar que no PMEB (ME,2007) é referido que o trabalho com números racionais deve ser iniciado nos 1.º e 2.º anos, com uma abordagem intuitiva e que os materiais manipuláveis devem ser utilizados nas situações de aprendizagem em que o seu uso seja facilitador da compreensão dos conceitos e das ideias matemáticas.

Considera-se que a elaboração de representações esquemáticas elaboradas individualmente ou em grupo, bem como a sua interpretação e legendagem contribuíram para o desenvolvimento da capacidade de visualização e de identificação das frações representadas, na medida em lhes proporcionou oportunidade de através de estratégias próprias serem criadas imagens mentais e estabelecidas relações, que ajudaram e continuarão a ajudar no processo evolutivo de construção de conhecimentos sobre os números racionais. Identificam-se aqui algumas ideias que estão relacionadas com o modelo apresentado por Lesh (figura 2, página 14).

O trabalho a pares e os momentos de discussão em grupo promoveram o pensamento crítico e troca de ideias entre alunos, o que facilitou significativamente a aquisição de conhecimentos, pois estes utilizam uma linguagem mais acessível e por vezes mais esclarecedora. Segundo Empson (2002) a discussão de estratégias é crucial, pois os alunos têm oportunidade de refletirem sobre a forma como pensaram e a forma como os seus colegas pensaram. Também os diálogos estabelecidos entre a professora e os alunos, como base na necessidade de justificação dos procedimentos e resultados apresentados, levaram os alunos a refletirem sobre o seu trabalho, assumindo uma posição crítica, o que contribuiu para clarificarem algumas ideias.

A comparação e ordenação das partes obtidas em diferentes divisões da mesma unidade e o estabelecimento de uma correspondência com a reta numérica permitiu ordenar frações e fazer a sua representação em simultâneo com os números inteiros, permitiu ainda, tomar consciência de diferentes representações do mesmo número. A ordenação de frações é fundamental para o desenvolvimento do sentido de número racional em Cramer et al (2009) é referido, como um aspeto que contribuiu para o sucesso, o facto de o currículo do R N P investir muito tempo no desenvolvimento da capacidade de ordenação e das ideias de equivalência. O estabelecimento da correspondência entre as partes da tira e a reta numérica tornou-se mais difícil porque não foi dada a indicação aos alunos para pintarem a primeira parte de cada tira.

A terceira tarefa não se mostrou muito facilitadora pois as questões deveriam ser apresentadas de forma inversa, primeiro deveria ser pedido aos alunos para identificarem a quantidade de berlindes que ficava em cada saco, pois é uma situação concreta e que faz parte do quotidiano dos alunos, e só depois perguntar que parte dos berlindes ficava em cada saco. Nesta situação procedeu-se ao ajuste da tarefa face ao desempenho dos alunos, segundo a perspetiva defendida por Simon (1995) citado por (Serrazina e Oliveira, 2010) no âmbito da trajetória hipotética de aprendizagem.

De modo a rentabilizar a curiosidade e o interesse manifestados pelos alunos foram lançados pequenos desafios que permitiram aprofundar os conhecimentos abordados, nomeadamente a noção intuitiva de fração equivalente e de numeral misto.

Dificuldades manifestadas pelos alunos

No desempenho das alunas na tarefa de diagnóstico, verificou-se que as suas dificuldades se concentravam no trabalho com unidades discretas. Ao longo da aplicação da sequência de tarefas, as alunas também apresentaram mais facilidade em trabalhar com unidades contínuas do que com unidades discretas, contudo foi-se notando alguma evolução relativamente à sua compreensão. Inicialmente, as alunas não entendiam que estas unidades eram compostas por vários elementos, encarando cada elemento como uma unidade independente, mas esta ideia foi sendo desfeita para dar lugar à noção correta. De referir, que na tarefa final, realizada aproximadamente cinco meses após o desenvolvimento da sequência de tarefas, as alunas apresentaram um bom desempenho nas situações que envolviam este tipo de unidades.

Tal como já tinha sido verificado nas tarefas diagnóstico, foi comum, ao longo do desenvolvimentos das tarefas as alunas sentirem dificuldade em identificarem o nome da parte obtida em cada situação, principalmente quando se tratava de unidades discretas, em que a tendência era para indicarem a quantidade de objetos que constituía cada uma das partes obtidas.

As alunas, também, revelaram algumas dificuldades relativamente à utilização correta da linguagem específica das frações. Em muitas situações o termo "metade" foi indevidamente usado para designar uma parte resultante de qualquer divisão. Por exemplo, após dividir uma maçã em quatro partes, uma aluna disse: "*Partimos aos meios, uma metade para mim, uma para a Matilde, outra para o João e outra para a Inês"*. Kieren citado por Sowder (1998) defende que a linguagem dos alunos, no nível de *conhecimento etnomatemático* ainda não obedece a um padrão. Empson (2002) defende que as estratégias dos alunos, nos primeiros anos da introdução das frações, não dependem do conhecimento da terminologia correta. Contudo, ao longo da aplicação das tarefas, verificou-se, por parte das alunas, um grande empenho em usar os termos corretos e muita curiosidade em conhecer a designação das partes obtidas nas diferentes divisões. Esta curiosidade natural foi aproveitada para desenvolver uma linguagem correta e mais formal partindo da linguagem utilizada pelas alunas no seu dia-a-dia.

Outra dificuldade prendeu-se com o uso e leitura da representação simbólica das frações, por vezes, as alunas não se recordavam de como a efetuar. Relativamente à sua interpretação apenas se verificou uma situação, em que uma aluna não a fez corretamente, pois numa representação esquemática, assumiu que o numerador era o número de partes pintadas e o denominador o número de partes por pintar.

Na tarefa em que se pretendia que as alunas estabelecessem uma relação entre as dobragens de uma tira de papel e a reta numérica, inicialmente verificaram-se algumas dificuldades, que foram diminuindo com o decorrer da tarefa. Importa referir que esta foi a primeira abordagens em simultâneo dos números inteiros e fracionários.

As alunas também sentiram dificuldade em representar $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ na mesma unidade, no entanto, após a aplicação desta tarefa também se considerou que o seu grau de dificuldade era muito elevado para este nível de ensino.

5.3 – Reflexão final

Este estudo contribuiu para melhorar o meu desempenho como professora. O professor ao agir como investigador não desempenha só os seus deveres profissionais, mas também se observa a si próprio tendo uma visão mais ampla do que se está passar como é referido por Bogdan e Biklen (1994). Este estudo permitiu-me uma reflexão mais profunda sobre a eficácia das estratégias utilizadas, assim como sobre os processos usados pelos alunos e as dificuldades que estes apresentam no desenvolvimento do sentido de número racional, deste modo foi possível aumentar a minha compreensão acerca deste processo. Oliveira e Serrazina (2002, p.39) defendem que: *" A reflexão pode abrir novas possibilidades para a ação e pode conduzir a melhoramentos naquilo que se faz"*.

Penso que os resultados do estudo desmistificam um pouco a ideia de que existem muitas dificuldades associadas ao desenvolvimento do sentido de número racional, nos primeiros anos de escolaridade. Considero que este estudo, também poderá contribuir para facilitar o papel dos professores do 1ºciclo do ensino, no desenvolvimento do sentido de número racional, na medida em que apresenta uma experiência de ensino com resultados positivos.

Limitações do estudo

Desde o início do estudo que me deparei com a dificuldade de encontrar fundamentação teórica específica sobre o desenvolvimento do sentido de número nos primeiros anos de escolaridade. O mesmo aconteceu relativamente aos materiais e exemplos de situações de aprendizagem, que se direcionavam apenas para o 3.º e 4.º anos de escolaridade, ou então para o 2ºciclo do ensino básico. Deste modo, foi necessário um maior empenho na construção das tarefas.

O facto de os alunos do primeiro ano serem apenas quatro, limitou um pouco a escolha dos alunos caso, pois a turma não apresentava muita diversidade.

Devido à necessidade de participar em diversas atividades que faziam parte da agenda escolar, verificou-se alguma falta de tempo para aplicar as tarefas e assim não foram estabelecidas tantas conexões como estava previsto inicialmente. Por esta razão, a aplicação das tarefas também se realizou mais tarde do que era pretendido, acabando por coincidir com o final dos períodos letivos.

Outra limitação do estudo prendeu-se com o facto de a professora lecionar numa turma com dois níveis de ensino e acumular o papel de investigadora, o que lhe exigiu um trabalho redobrado e dificultou o processo de recolha de dado.

O processo de análise de dados revelou-se muito exigente, pois a sua natureza qualitativa e a elevada extensão obrigaram a uma análise atenta e repetida para se conseguir estabelecer algum tipo de relação e assim tecer conclusões.

Recomendações

Penso que os resultados do estudo mostram como faz sentido e é pertinente antecipar a introdução do tema números racionais numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número. Assim para perceber se em contextos diferentes se mantêm os mesmos resultados seria importante realizar mais investigações deste caris, nas quais faria sentido elaborar e testar materiais de apoio.

Considero também, que seria importante a realização de estudos para analisar em níveis de escolaridade mais elevados, o desempenho dos alunos que anteciparam o desenvolvimento de sentido de número racional.

Bibliografia

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I.(1999). A Matemática na Educação Básica. Lisboa: Ministério da Educação - Departamento da Educação Básica.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 296-333). NY: Macmillan Publishing. Retirado em 24 de março de 2011de http://www.cehd.umn.edu/rationalnumberproject/92_1.html.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). Rational Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes, (pp. 91-125). New York: Academic Press. Retirado em 24 de março de 2011 de http://www.cehd.umn.edu/rationalnumberproject/83_1.html.

Behr, M., Khoury, H., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1997). Conceptual units analysisof preservice elementary school teachers' strategies on a rational-number-asoperatortask. *Journal of Research in Mathematics Education*, 28(1), 48-69. Retirado em 5 de abril de 2011 de http://www.cehd.umn.edu/rationalnumberproject/97_1.html.

Bogdan, R. & Biklen S., (1994). Investigação Qualitativa em Educação: Uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora.

Bright, G. & Litwiller, B. (2002). *Classroom activities for making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 Yearbook*. Reston, Virginia: NCTM.

Brocardo, J., Serrazina, L. & Rocha, I. (2008), (Org.) O Sentido do Número - reflexões que entrecruzam teoria e prática. Lisboa: Escolar Editora.

Brocardo, J. (2010).Trabalhar os números racionais numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número. *Educação e Matemática*, (109) 15-23.

Castro, J. & Rodrigues M. (2008). O sentido de número no início da aprendizagem, em Brocardo, J., Serrazina, L. & Rocha, I. (Org.) O Sentido do Número - reflexões que entrecruzam teoria e prática. (pp. 117-133) Lisboa: Escolar Editora.

Cebola, G. (2002) Do número ao sentido do número, em Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores (pp. 223-239). Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Secção de Educação e Matemática.

Cid, E., Godino, J. D., & Batanero, C., (2004). Fracciones y números racionales positivos em Godino, J. D. (Org.) Didáctica de las Matemáticas para Maestros. (pp.221-237) Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidade de Granada. Retirado em 11 de dezembro de 2011 de http://www.ugr.es/~jgodino/fprofesores.htm.

Coutinho, C. & Chaves, J. (2002). O estudo de caso na investigação, em Tecnologia Educativa em Portugal. *Revista Portuguesa de Educação*, 15 (1), 221-244.CIEd - Universidade do Minho.

Cramer, K. & Henry, A. (2002) Using Manipulative Models to Build Number Sense for Addition and Frations, em Litwiller, B. (0rg.), Making Sense of Fractions, Ratios and Proportions. (pp. 41-48) Virginia: NCTM.

Cramer, K., Behr, M., Post T., Lesh, R., (2009) Rational Number Project: Initial Fraction Ideas. Retirado em 24 de março de 2011 de http://www.cehd.umn.edu/rationalnumberproject/rnp1-09.html.

Cramer, K., Wyberg, T. & Leavitt, (2009) Fraction Operations and Initial Decimal Ideas. (Companion module to RNP: Fraction Lessons for the Middle Grades) Retirado em 24 de março de 2011 de http://www.cehd.umn.edu/rationalnumberproject/rnp2.html.

Damico, A. (2007). Uma investigação sobre a formação inicial de professores de matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental. Tese de doutoramento em educação matemática. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Empson, J. (2002). Organizing diversity in early fraction thinking , in Litwiller, B. (0rg.), Making Sense of Fractions, Ratios and Proportions. (pp. 29-40) Virginia: NCTM.

Fernandes, D. (1991). Notas sobre paradigmas de investigação em educação. *Noesis*, (18), 64-66.

Fosnot, C. & Dolk, M. (2002). Young mathematics at work: Constructing Fractions, Decimals, and Percents. Portsmouth, NH: Heinemann.

Gonçalves, A. (2008). Desenvolvimento do sentido de número num contexto de resolução de problemas em alunos do 1º Ciclo do Ensino Básico. Tese de Mestrado. Lisboa: Universidade de Lisboa, Portugal.

Hunting, R. (1991). The Social Origins of Prefractions Knowledge in Three-Years-Old, in Hunting, R. & Davis G. (Org), Early Fractions Learning. (pp. 55-72) New York: Springer-Verlag.

Lamon, S. (2002). Part-whole Comparisions whith Unitizing, in Litwiller, B. (Org), *Making Sense of Fractions, Ratios and Proportions.*.(pp. 79-86) Virginia: NCTM.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. In C. Janvier, (Org.), Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum. Retirado em 24 de março de 2011 de http://www.cehd.umn.edu/rationalnumberproject/87_5.html.

Martins, F. (2007). As frações no desenvolvimento do sentido de número racional no 1º ciclo. Tese de Mestrado em Educação – Didáctica da Matemática. Lisboa: Universidade de Lisboa, Portugal.

Ministério da Educação (2001) Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais. Lisboa: Ministério da Educação.

Ministério da Educação (1998) Organização Curricular e Programas. Lisboa: Ministério da Educação.

Ministério da Educação (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico. Lisboa: DGIDC (disponível online).

Monteiro, C. & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante*, volume XIV n.º 1, 89-107.

Monteiro, C., Pinto, H. & Figueiredo, N. (2005). As fracções e o desenvolvimento do sentido do número racional. *Revista Educação e Matemática*, (84), 47-51.

Monteiro, C. & Pinto, H. (2007). Desenvolvendo o Sentido do Número Racional. Lisboa: APM.

NCTM (1998) Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar. Lisboa: APM.

NCTM (2007) Princípios e Normas para a Matemática Escolar. Lisboa: APM.

Oliveira, I. & (2002) Serrazina, L.A reflexão e o professor como investigador. In Reflectir e investigar sobre a prática profissional (pp.30-42). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Pinto, H. (2004). O número racional no 2.º Ciclo do Ensino Básico no contexto da Matemática realista. Tese de Mestrado. Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema, 25,* 105-132.

Post, T., Cramer, K., Harel, G., Kiernen, T., & Lesh, R. (1998) Research on rational number, ratio and proportionality. Proceedings of the Twentieth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME-NA XX Volume I (pp. 89-93). Raleigh, North Carolina. Retirado em 24 de março de 2011 de http://www.cehd.umn.edu/rationalnumberproject/98_1.html.

Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). Curriculum implications of Research on the Learning, Teaching, and Assessing of Rational Number Concepts. In T. Carpenter, E. F& Harel, G. (In press). Designing instructionally relevant assessment reports. In T. Carpenter & E. Fennema (Eds.), Research on the Learning, Teaching, and Assessing of Rational Number Concepts. Lawrence

Erlbaum and Associates. Retirado em 5 de abril de 2011 de http://www.cehd.umn.edu/rationalnumberproject/93_6.html.

Quaresma, M. (2010). Ordenação e comparação de números racionais em diferentes representações: uma experiência de ensino. Tese de Mestrado em Educação – Didáctica da Matemática. Lisboa: Universidade de Lisboa. Portugal.

Rodrigues, M. (2010). O sentido de número: uma experiência de aprendizagem e desenvolvimento no pré-escolar. Tese de Doutoramento. Badajoz: Universidad de Extremadura. Espanha.

Serrazina, L. & Oliveira, I. (2010). Trajectórias de aprendizagem e ensinar para a compreensão. In GTI (Ed.), O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico (pp.43-59). Lisboa: Associação de Professores de Matemática, Grupo de Trabalho de Investigação.

Sharp, J., Garofalo, J, & Adams, B. (2002) Children's Development of Meaningful Fraction Algorithms: A Kid's Cookies and Puppy's Pills, in Litwiller, B. (0rg.), Making Sense of Fractions, Ratios and Proportions. (pp. 18-28) Virginia: NCTM.

Smith, J. (2002). The Development of Students' Knowledge, in Litwiller, B. (0rg.), Making Sense of Fractions, Ratios and Proportions. (pp. 3-17) Virginia: NCTM.

Sousa, A.(2009). Investigação em Educação.2.º edição. Lisboa: Livros Horizonte.

Sowder, J., Philipp, R., Armstrong, B. & Schappelle, B. (1998). Middle-grade teachers´ mathematical Knowledge and its relationship to instruction: a research monograph. NY: State University of New York Press.

Sowder, J. (2002) Introdution, in Litwiller, B. (0rg.), Making Sense of Fractions, Ratios and Proportions. (pp. 1-2) Virginia: NCTM.

Yin, R. (1994). Case Study Research – Design and Methods. London: Sage Publications.

Anexos

Anexo 1

REQUERIMENTO

Exma. Senhora

Directora do Agrupamento de Escolas da Benedita

Assunto: Recolha de dados para Tese de Mestrado

Eu, Selma dos Santos Feteira, portadora do B.I.nº11493978, válido até 19/11/2012, professora do quadro de Agrupamento, no grupo de recrutamento do 1.º Ciclo, em exercício de funções docentes neste Agrupamento de Escolas, e a frequentar o Mestrado em Educação e Tecnologia em Matemática, no Instituto politécnico de Leiria, venho por este meio solicitar autorização para realizar, na turma em que lecciono, a recolha de dados necessários para a elaboração da minha Tese de Mestrado.

Pede deferimento,

A docente

____

Benedita, 26 de Abril de 2011

Anexo 2

AUTORIZAÇÃO

Eu, ____ Encarregado de Educação do aluno ____

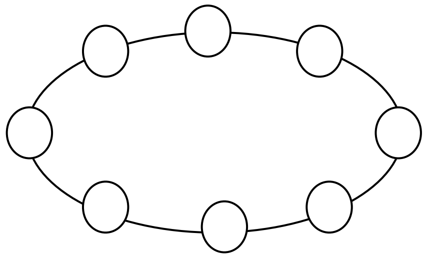
declaro por este meio, que autorizo a participação do meu educando num estudo sobre o desenvolvimento do sentido de número racional (Tese de Mestrado). Para este estudo algumas aulas serão áudio ou vídeo gravadas e também serão usados os registos efectuados pelos alunos.

Ardido, _____ de ________________2011

Encarregado de Educação _____________________________________

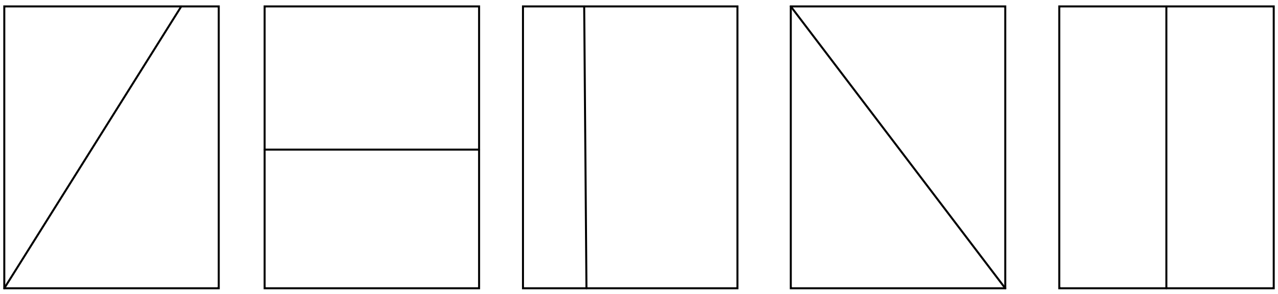
Anexo 3 – Tarefa de diagnóstico

- A Joana comprou uma pulseira com 8 missangas, metade das missangas são azuis e a outras são cor-de-rosa. Pinta a pulseira da Joana.



- A Joana e o seu irmão mais novo inventaram o jogo das metades. Têm que encontrar o maior número possível de diferentes formas de dobrar uma folha de papel ao meio.

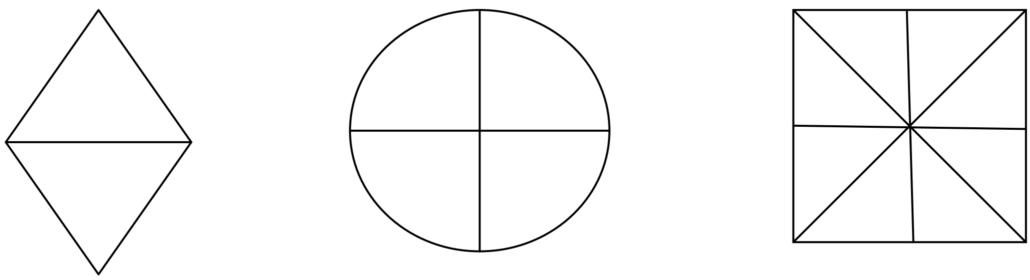
  Já encontraram estas, mas não estão todas correctas:



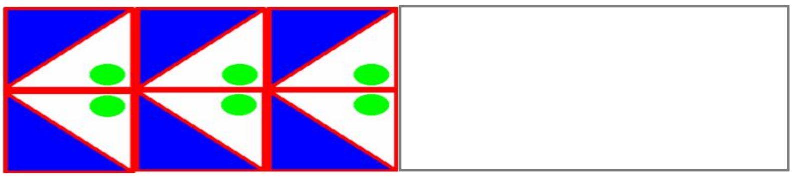
Rodeia as folhas que não estão divididas ao meio.

- O irmão da Joana quer pintar metade de cada figura, mas está com algumas dúvidas.

  Ajuda-o a encontrar a solução.



- A Joana está a construir um friso e já fez o que está representado na figura. Que parte lhe falta fazer para acabar?



- Para o jantar a mãe da Joana comprou uma Pizza. O pai, a mãe, a Joana e o irmão comeram a mesma quantidade de pizza.

  Representa a parte da pizza que cada um comeu.

- A Joana resolveu levar 15 bombons para oferecer aos seus amigos. Cada amigo comeu 3 bombons, a quantos amigos a Joana deu bombons?

4 – Tarefa 1

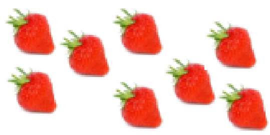
Ontem fomos a uma visita de estudo que foi muito interessante e divertida.

Na primeira paragem, a minha amiga Rita ficou muito triste porque se tinha esquecido do lanche, mas eu reparti igualmente o meu lanche com ela.

Olá, eu sou a Joana e adoro matemática!

Consigo ver matemática em tudo o que faço. Acham que tenho razão?

Lanche da Joana



- Representa na imagem a parte que cada menina comeu.

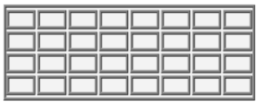
- Completa:

Cada menina comeu ____________ sandes e

____________ *dos morangos.*

Antes de almoço fomos à exposição "Matemática em jogo". Eu decidi jogar o "Jogo das metades". Comecei com um chocolate inteiro e cada vez que parava numa casa de número par, comia metade do chocolate que tinha. Vê o meu jogo, consegues representar a parte do chocolate que eu tinha no fim do jogo?

Chocolate que a Joana recebeu.



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
									11
					16	15	14	13	12
					17				
23	22	21	20	19	18				
24									
25	26	27	28	29	30	FIM			

\- Casas onde a Joana parou.

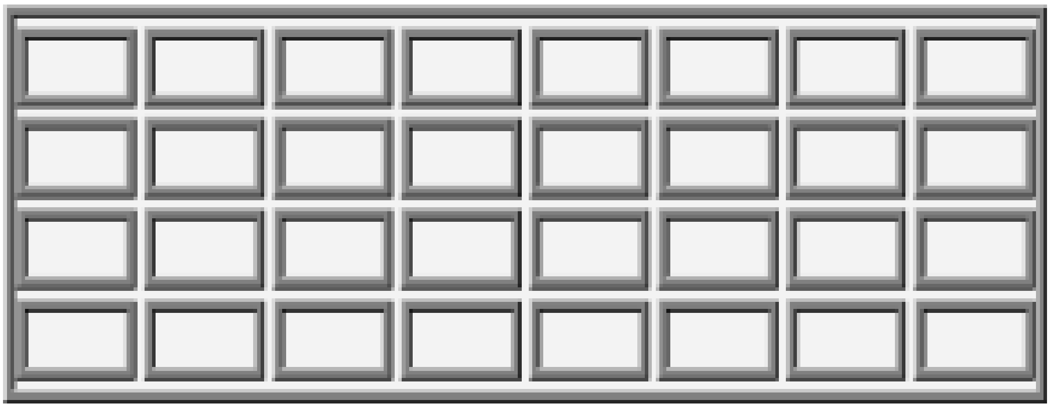
O almoço foi pizza, estava deliciosa!

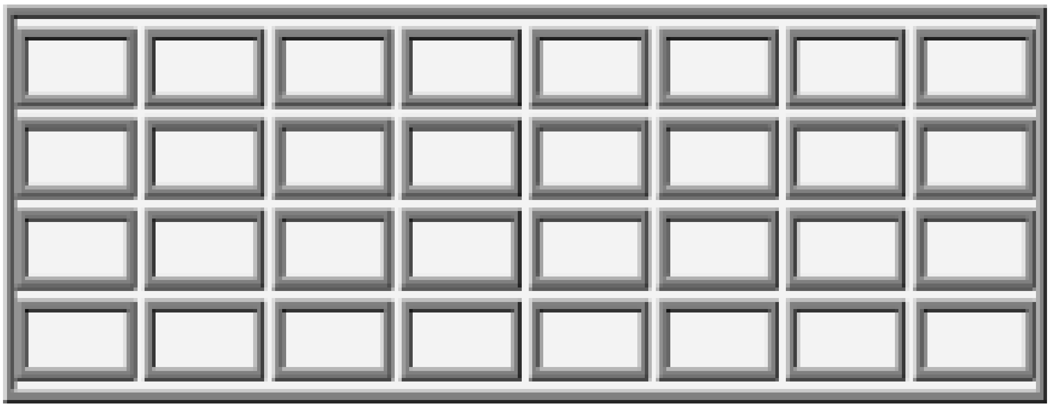
Cada pizza foi dividida por quatro meninos e todos os meninos comeram a mesma quantidade.

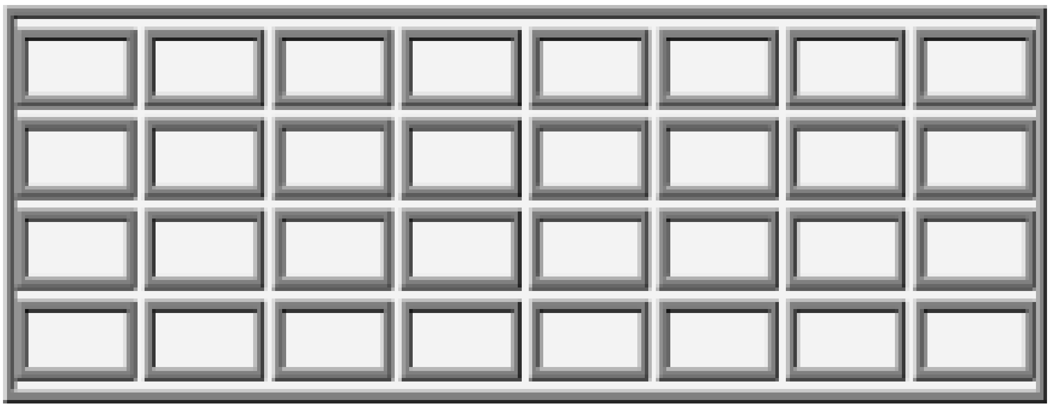
Mostra como achas que cada pizza foi dividida e explica como pensaste.

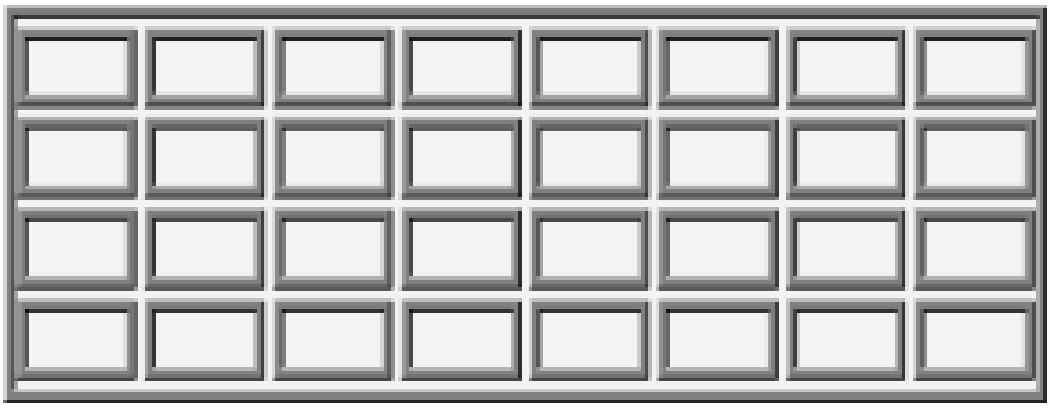
E se cada pizza fosse dividida por oito meninos.

Mostra como achas que ficava dividida.

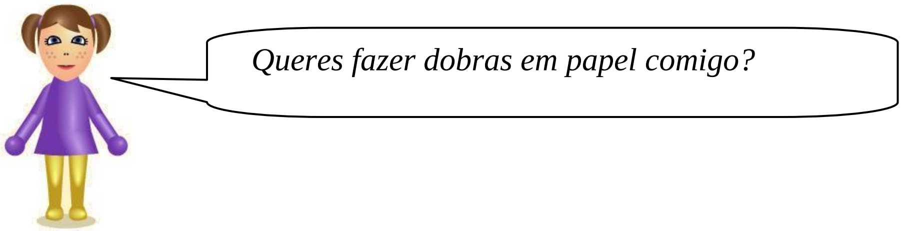








Anexo 5 – Tarefa 2



- Dobra uma tira de modo a obteres duas partes iguais. Pinta uma das partes de azul.

- Dobra uma tira de modo a obteres quatro partes iguais. Pinta uma das partes de verde.

- Dobra uma tira de modo a obteres três partes iguais. Pinta uma das partes de vermelho.

- Compara as diferentes partes pintadas.
  Qual é a maior?

  E a mais pequena?

- O que podes concluir em relação ao tamanho das diferentes partes obtidas?

- Discute com os teus colegas como se poderá chamar cada uma das partes pintadas.

- Cola cada tira no local apropriado.

Anexo 6 – Tarefa 3

Depois de distribuir a fruta, a professora verificou que sobrava uma maçã.

Escreve as indicações que deves dar à professora para ela dividir igualmente a maçã pelos quatro meninos do 1.º ano.

- Compara e discute as tuas indicações e as dos teus colegas e pede à professora para efectuar a divisão da maçã de acordo com o resultado da discussão.

- Que parte da maçã vai comer cada menino?

- Neste dia, cada menino comeu uma maçã inteira e uma parte de outra, ao todo que quantidade de maçã comeu cada menino?

A professora comprou um saco com 12 berlindes e pediu aos alunos para os arrumarem em sacos mais pequenos.

- Se os berlindes forem arrumados em dois sacos com a mesma quantidade, que parte dos berlindes fica em cada saco?

Essa parte que fica em cada saco, quantos berlindes são?

- Se os berlindes forem arrumados em quatro sacos com a mesma quantidade, que parte dos berlindes fica em cada saco?

Essa parte que fica em cada saco, quantos berlindes são?

- Se os berlindes forem arrumados em três sacos com a mesma quantidade, que parte dos berlindes fica em cada saco?

Essa parte que fica em cada saco, quantos berlindes são?

Anexo 7 – Tarefa 4

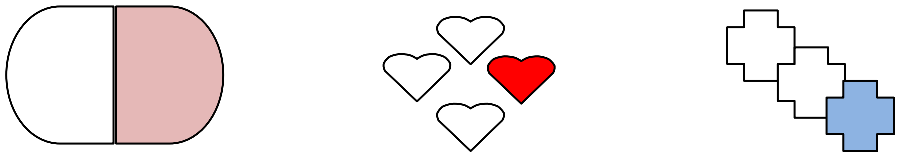
O meu fio rebentou-se, mas resolvi aproveitar as 27 missangas para fazer 3 pulseiras, todas com o mesmo número de missangas.

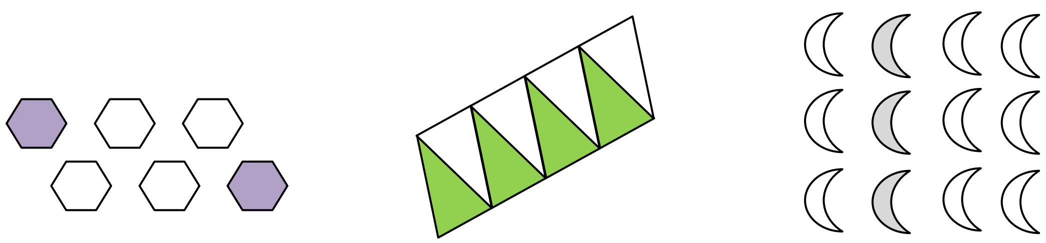
Será que vou conseguir?

Cada pulseira fica com quantas missangas?

- Que parte das missangas ficou em cada pulseira?

Descobre qual é a parte pintada em cada situação:

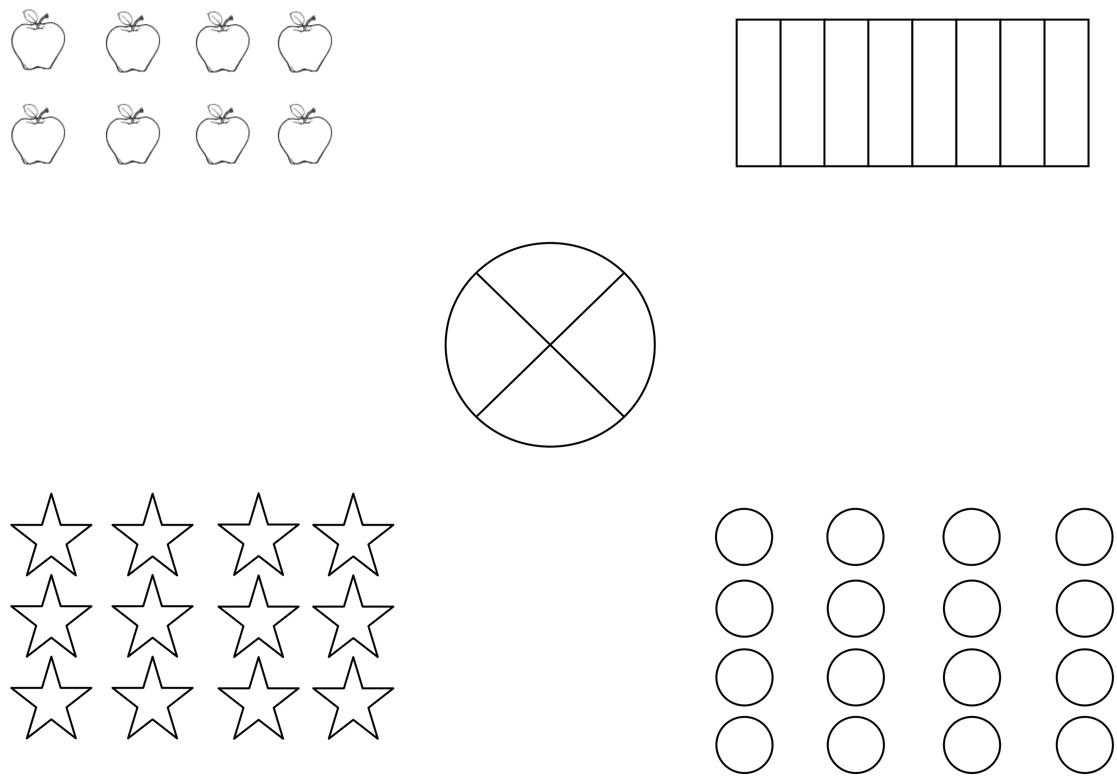




"As fracções são uns números um pouco estranhos!

Em cada unidade (o conjunto das maças, das estrelas e dos círculos também são unidades) quero pintar: $\frac{1}{2}$ *de azul e* $\frac{1}{4}$ *de vermelho, sem pintar com uma cor por cima da outra.*

Será possível? Ajuda-me a descobrir!"



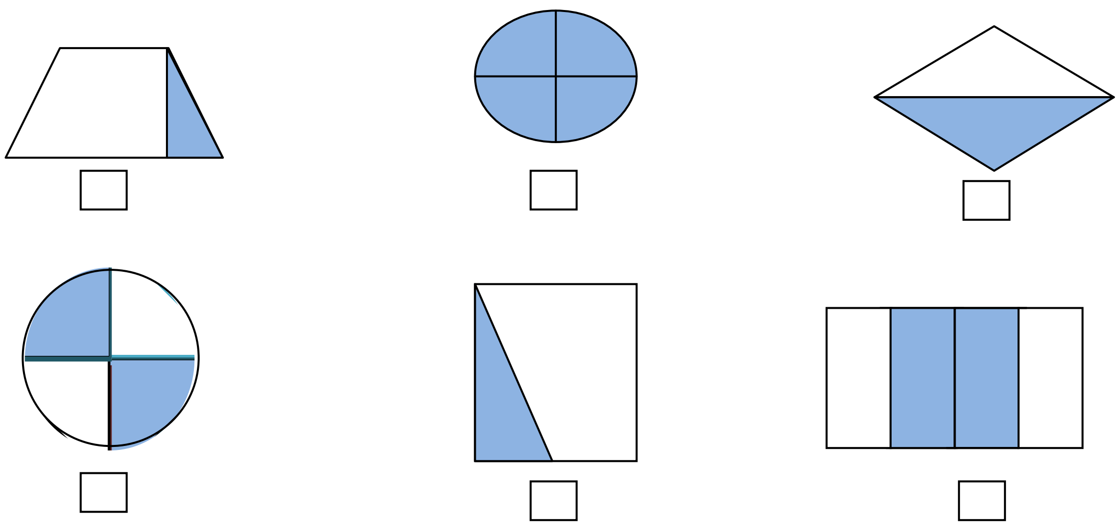
Conclusões:

Anexo 8 – Tarefa Final

Olá, ainda te lembras de mim?
Hoje estou com uma dúvida, na aula de expressão plástica estivemos a pintar frisos. Eu pintei metade do meu friso e a minha amiga Rita diz que pintou um meio ($\frac{1}{2}$) do seu friso.
Será que pintei mais, o mesmo ou menos do que a Rita?

____

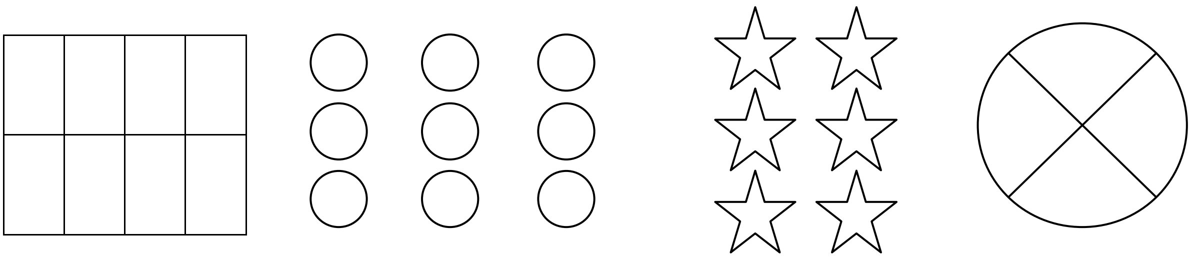
- Assinala com um ☒ as figuras que achas que têm metade pintada.



Adaptado de *Classroom Activities for Making Sense of Fractions, Rratios, and Proportions: 2002 Yearbook.* (Bright, & Litwiller, 2002)

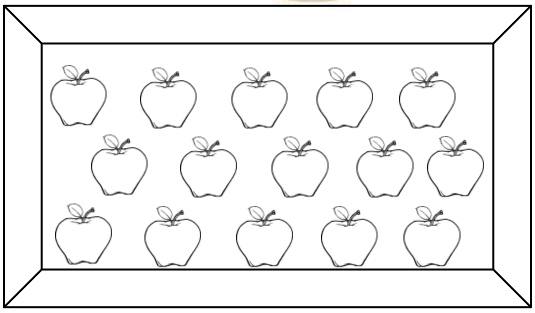
- Pinta o que é indicado em cada situação:

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ 1



Ajuda-me a encontrar uma solução para cada uma das seguintes situações.

A minha mãe foi ao supermercado e comprou $\frac{1}{3}$ das maçãs que estavam na caixa.
Quantas maçãs comprou?



Ontem ao almoço, partilhei uma piza com a Rita, a Ana e o Rui. Que parte da piza comeu cada um de nós?

Hoje trouxe um chocolate para a escola, já comi metade. Se eu quiser dar metade da metade que sobrou à Rita, que parte do chocolate inteiro lhe irei dar?

Adaptado de *Desenvolvendo o Sentido do Número Racional*- APM (2007)