

DK 536.25:532.5:533.6.011:666.1.031.13:517.392

Einfluß veränderlicher Eigenschaften des Strömungsmediums auf den Massen- und Wärmetransport bei erzwungener Konvektion

Teil I. Erweiterung der von Karman-Näherung auf die laminare Strömung über eine ebene Platte mit Druckgradient Null

VON ALFRED R. COOPER jr., Cambridge (Mass.)

(Mitteilung aus der Ceramics Division des Departments of Metallurgy im Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.)

(Eingegangen am 26. Juni 1963)

In Silikatschmelzen sind die Koeffizienten, die die Transportvorgänge beeinflussen, nämlich die Massendiffusion, die kinematische Viskosität und die Wärmeleitfähigkeit, stark von der Temperatur und der Zusammensetzung der Schmelze abhängig. Bei der Anwendung der Grenzschichttheorie-Gleichungen auf den Massen- und Wärmetransport in diesen Systemen ist es deshalb notwendig, mit veränderlichen Eigenschaften zu rechnen. Dies kann mit Hilfe der Integralnäherung nach VON KARMAN für die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht geschehen mit dem Ergebnis, daß die veränderlichen Eigenschaften im allgemeinen durch eine einfache schrittweise Näherungslösung berücksichtigt werden können; das gilt auch für den speziellen Fall der Silikatschmelzen, bei denen die kinematische Viskosität viele Größenordnungen höher ist als die Massendiffusion oder Wärmeleitfähigkeit. Der Einfluß der veränderlichen Eigenschaften kann durch numerische Integration bestimmt werden.

Die Diffusionskoeffizienten des Wärme-, Massen- und Impulstransports sind stets von der Zusammensetzung und der Temperatur des Mediums abhängig. Während diese Abhängigkeit oft so gering ist, daß sie keine Bedeutung hat, kann in vielen Fällen, insbesondere bei viskosen Flüssigkeiten, wie den Silikatschmelzen, eine wesentliche Änderung der Eigenschaften in einem verhältnismäßig engen Bereich der Zusammensetzung und Temperatur eintreten. Für Fälle, wo die Konvektion keine Rolle spielt, wurden Methoden beschrieben [1], bei denen veränderliche Diffusionskoeffizienten eingeführt und Näherungslösungen für die Diffusionsgleichungen erhalten wurden. Auch im Falle des Wärmetransports bei Rohrströmungen wurde gezeigt [2], daß die Änderung der Wärmeleitfähigkeit mit der Temperatur in einigen Systemen durch Wahl eines entsprechenden Mittelwertes zwischen Rand- und Innentemperatur und Verwendung der Leitfähigkeit bei dieser Temperatur empirisch berücksichtigt werden kann. Eine strenge, aber umständliche numerische Methode wird von H. SCHUH [3] für veränderliche Eigenschaften bei erzwungener Konvektion angegeben, jedoch schließen seine Beispiele für viskose Flüssigkeiten nur die Viskositätsänderung ein.

Bei der Glasherstellung ist der Massentransport in viskosen Systemen oft der beherrschende Vorgang, z. B. bei der Auflösung der feuerfesten Materialien und beim Einschmelzen der Rohstoffe [4]. In diesen Systemen muß sich die Viskosität [5] nicht monoton mit der Zusammensetzung ändern, und die Extrapolation [6] der wenigen Angaben zu den Diffusionskoeffizienten läßt ebenso die Möglichkeit von Maxima oder Minima erkennen. Es ist deshalb wünschenswert, über eine genauere Methode zur Behandlung der veränderlichen Viskosität und

Diffusionskoeffizienten zu verfügen, um die Geschwindigkeit des Massentransports bei erzwungener Konvektion in solchen Systemen vorhersagen zu können.

Um den Massentransport mit Konvektion zu untersuchen, ist es zunächst notwendig, die Komponente der Geschwindigkeit der Flüssigkeit in Richtung des Konzentrationsgradienten zu bestimmen. Eine dafür brauchbare Methode ist es, die Grenzschichtvorstellung von PRANDTL zu verwenden und der näherungsweise Behandlung nach VON KARMAN [7] zu folgen, welche eine analytische Form für das Geschwindigkeitsprofil voraussetzt und ein Impulsgleichgewicht in der Grenzschicht fordert. Ein ähnliches Verfahren, zuerst wohl von G. KROUJILINE [8] angewendet, das sowohl für das Temperatur- als auch das Geschwindigkeitsprofil eine bestimmte Form voraussetzt und den Wärmetransport durch Konvektion und Diffusion erfaßt, liefert eine direkte Methode zur Erfassung des Wärme- oder Massentransports von einfachen Festkörpern in Systemen mit erzwungener Konvektion.

Wurden genauere Lösungen erzielt, so waren sie in angemessener Übereinstimmung mit den durch die VON KARMAN-Näherung bestimmten. Zum Beispiel differieren bei einer Strömung über eine ebene Platte mit Druckgradient Null die errechneten Geschwindigkeitsgradienten an der Grenzfläche um 3%, wenn man die exakte Lösung [9] mit der nach der VON KARMAN-Näherung vergleicht. Dieses Strömungssystem liefert ein verhältnismäßig einfaches Beispiel für den Einfluß erzwungener Konvektion auf den Massentransport. Es hat sich als brauchbar erwiesen bei der Ableitung des Massentransports bei komplizierteren Strömungen. Sogar bei einem anscheinend so anders gearteten Strömungssystem, wie dem durch eine rotierende Scheibe erzeugten [10], haben

die Gleichungen, die den Massentransport beschreiben, die gleiche Form wie die für die Strömung über eine ebene Platte. A. ACRIVOS [11] hat gezeigt, daß der Einfluß veränderlicher Eigenschaften auf den Massen- oder Wärmetransport bei viskosen Flüssigkeiten unabhängig von der speziellen Geometrie ist und nur von den Eigenschaften der Flüssigkeit abhängt.

Es ist möglich, die veränderliche Viskosität und Diffusion direkt in die Näherung nach VON KARMAN und KROUJILINE einzuführen. So wird eine exakte Grundlage dafür geschaffen, die quantitative Behandlung des Massen- und Wärmetransports bei erzwungener Konvektion auf Systeme auszudehnen, bei denen sich die Eigenschaften in komplizierter Weise mit der Zusammensetzung und Temperatur ändern. Dies ist der Zweck der vorliegenden Arbeit, welche speziell den Massentransport behandelt, obgleich die Analogie zum Wärmetransport offensichtlich ist.

1. Problemstellung und Benennungen

Die Kenntnis der Abhängigkeit des einschlägigen Diffusionskoeffizienten D und der dynamischen Viskosität η von der Konzentration C sei vorausgesetzt:

$$D = D(C)$$

$$\eta = \eta(C)$$

Die rechtwinkligen Koordinaten werden so gewählt, daß der Nullpunkt an der Kante der Platte, x parallel zur Grenzfläche in Richtung der Strömung und y senkrecht zur Grenzfläche liegen.

Die Indices 0 und ∞ werden jeweils zur Kennzeichnung der Werte der Grenzfläche und des Inneren benutzt. Die Grenzschichtdicken für die Geschwindigkeit δ_u und Konzentration δ_c werden definiert als senkrechte Abstände zur Grenzfläche, bei welchen die Geschwindigkeit u oder die Konzentration C gleich und tangential der Geschwindigkeit u_∞ oder Konzentration C_∞ im Innern werden. Diese Grenzschichtdicken können sich beträchtlich unterscheiden. Im Falle konstanter Eigenschaften wurde gefunden, daß

$$\frac{\delta_c}{\delta_u} \approx \sqrt[3]{\frac{D}{\nu}} = Sc^{-1/3},$$

wobei Sc die SCHMIDTSche Zahl ist und ν die kinematische Viskosität (= Quotient aus η und Dichte ρ). Der Transport in vielen viskosen Systemen, z. B. von Natriumchlorid in Glyzerin [12] oder die Kationendiffusion in Calcium-Aluminium-Silikat-Schlacken [13], führt zu Werten von

$$\frac{\delta_c}{\delta_u} < 0,01.$$

Wie wir sehen werden, führen solche kleinen Werte des Grenzschichtdickenverhältnisses zu einer wesentlichen Vereinfachung der Betrachtung.

Sowohl (y/δ_u) als auch (y/δ_c) sind dimensionslose Veränderliche und werden durch besondere Symbole angegeben.

$$y/\delta_u = \tilde{y}$$

$$y/\delta_c = \tilde{y}^*$$

Andere dimensionslose Größen werden durch das Zeichen $\hat{\cdot}$ gekennzeichnet. Eigenschaftswerte, z. B. Viskosität und Diffusionskoeffizient, werden durch Division durch ihren Wert im Innern der Strömung dimensionslos gemacht. Da Schubspannung und Kraftliniendichte im Innern verschwinden, werden diese Größen durch ihren

Grenzflächenwert dividiert, um zu dimensionslosen Werten zu kommen. Damit Konzentrations- und Geschwindigkeitsprofile in der Grenzschicht ähnliche Form haben, wählen wir $\hat{u} = \frac{u}{u_\infty}$ und $\hat{C} = \frac{C_0 - C}{C_0 - C_\infty}$ als dimensionslose Geschwindigkeit und Konzentration.

Kleine Buchstaben (m, n) werden den verfügbaren Konstanten zugewiesen und große Buchstaben (I, J, K . . .) Integralen. Die Spezialfälle hochviskoser Flüssigkeiten und konstanter Eigenschaften werden durch ' bzw. '' bezeichnet. Eine Aufstellung der Symbole wird in Tabelle 1 gegeben.

Tabelle 1. Symbole

Symbol	Definition
x	Abstand in Richtung der Strömung
y	Abstand senkrecht zur Grenzfläche
u	Geschwindigkeit
C	Konzentration
D	Diffusionskoeffizient (Masse oder Wärme)
η	dynamische Viskosität
ρ	Dichte
ν	kinematische Viskosität
τ	Schubspannung, die auf die Grenzfläche parallel zur Grenze wirkt
m, n . . .	verfügbare Konstanten
j	Flußdichte
∞	Index für den Wert im Innern
0	Index für den Wert an der Grenzfläche
'	verweist auf den Fall viskoser Flüssigkeiten
''	verweist auf den Fall konstanter Eigenschaften
δ_u	Geschwindigkeitsgrenzschichtdicke
δ_c	Konzentrationsgrenzschichtdicke
\tilde{y}	y/δ_u
\tilde{y}^*	y/δ_c
$\hat{\eta}, \hat{D}$	$\eta/\eta_\infty, D/D_\infty$
\hat{C}	$(C_0 - C)/(C_0 - C_\infty)$
$d\hat{C}$	$-dC/(C_0 - C_\infty)$
$\hat{\tau}$	$\tau/(\eta_\infty u_\infty/\delta_u)$
\hat{j}	$j/j_0 = j/(D_\infty(C_0 - C_\infty)/\delta_c)$
λ	j'/j''
$I(\tilde{y})$	$\int_0^{\tilde{y}} \frac{1 - \tilde{y}^2}{\hat{\eta}} d\tilde{y}$
$J(1)$	$\int_0^1 (I(1) - I(\tilde{y})) \frac{I(\tilde{y})}{I(1)} d\tilde{y}$
$K(\hat{C})$	$\int_0^{\hat{C}} \hat{D} d\hat{C}$
$I^*(\tilde{y}^*)$	$\int_0^{\tilde{y}^*} \frac{1}{\hat{\eta}^*} d\tilde{y}^*$
$L(1)$	$\int_0^1 (1 - \hat{C}) I^*(\tilde{y}^*) d\tilde{y}^* = \int_0^1 \left[(1 - \hat{C}) \int_0^{\tilde{y}^*} \frac{d\tilde{y}^*}{\hat{\eta}^*} \right] d\tilde{y}^*$

2. Geschwindigkeitsverteilung

Zur Verallgemeinerung der VON KARMAN-Näherung auf den Fall ortsabhängiger Viskosität setzen wir voraus, daß die dimensionslose Schubspannung $\hat{\tau}$ in der Grenzschicht beschrieben wird durch die parabolische Form

$$\hat{\tau} = \hat{\eta} \, d\hat{u}/d\tilde{y} = m_0 + m_2 \tilde{y}^2. \quad (1)$$

Das Glied in der ersten Potenz hat den Koeffizienten Null, um dem der Grenzfläche unmittelbar benachbarten Zustand zu entsprechen, wo die Geschwindigkeiten klein werden, so daß im Grunde genommen nur Reibungskräfte auf ein Flüssigkeitsteilchen einwirken; die Spannungen sind so in diesem Bereich fast unabhängig von y .

Die Integration der Gleichung (1) für den Fall ortsabhängiger Viskosität — unter Beachtung, daß die Geschwindigkeit an der Grenzfläche Null ist — ergibt die dimensionslose Geschwindigkeit als Funktion von \tilde{y} :

$$\hat{u}(\tilde{y}) = \int_0^{\tilde{y}} \frac{m_0 + m_2 \tilde{y}^2}{\hat{\eta}} d\tilde{y}. \quad (2)$$

Aus der Definition der Geschwindigkeitsgrenzschicht folgen zwei weitere Bedingungen:

$$\text{für } \tilde{y} = 1; \quad \frac{d\hat{u}}{d\tilde{y}} = 0, \quad \hat{u} = 1.$$

Diese Bedingungen gestatten die Berechnung der Konstanten m_0 und m_2

$$\frac{1}{m_0} = -\frac{1}{m_2} = \int_0^1 \frac{1 - \tilde{y}^2}{\hat{\eta}} d\tilde{y} = I(1)$$

und erlauben es, die dimensionslose Geschwindigkeit ohne willkürliche Konstanten auszudrücken:

$$\hat{u}(\tilde{y}) = \frac{\int_0^{\tilde{y}} \frac{1 - \tilde{y}^2}{\hat{\eta}} d\tilde{y}}{\int_0^1 \frac{1 - \tilde{y}^2}{\hat{\eta}} d\tilde{y}} = \frac{I(\tilde{y})}{I(1)}. \quad (3)$$

3. Impulsleichgewicht

Durch die Gleichsetzung der Schubspannung am Rand mit dem Impulstransport pro Zeiteinheit in einem abgeschlossenen Streifen der Breite dx und einer Höhe, die die gesamte Geschwindigkeitsgrenzschicht umschließt, erhielt VON KARMAN die Impulsleichung für die Grenzschicht¹⁾

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_u} (u_\infty - u) u \, dy = \eta \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=0}, \quad (4)$$

wobei die Dichte unabhängig von der Konzentration angenommen wird.

Der Übergang zu dimensionslosen Veränderlichen und das Einsetzen der Ausdrücke für die Geschwindig-

keit aus Gleichung (3) und für die Schubspannung aus Gleichung (1) ergibt:

$$u_\infty^2 \rho \frac{d}{dx} \delta_u \int_0^1 \left(1 - \frac{I(\tilde{y})}{I(1)} \right) \frac{I(\tilde{y})}{I(1)} d\tilde{y} = \frac{m_0 u_\infty \eta_\infty}{\delta_u} = \frac{u_\infty \eta_\infty}{I(1) \delta_u}. \quad (5)$$

Durch Ordnen und Einführen der kinematischen Viskosität im Innern $\nu_\infty = \eta_\infty/\rho$ erhält man

$$\delta_u \left(\frac{d}{dx} (\delta_u) \right) \int_0^1 \left(1 - \frac{I(\tilde{y})}{I(1)} \right) I(\tilde{y}) d\tilde{y} = \frac{\nu_\infty}{u_\infty} \quad (6)$$

$$\delta_u \left(\frac{d}{dx} (\delta_u) \right) = \frac{\nu_\infty}{u_\infty J(1)} \quad (7)$$

wobei

$$J(1) = \int_0^1 \left(1 - \frac{I(\tilde{y})}{I(1)} \right) I(\tilde{y}) d\tilde{y}. \quad (8)$$

Mit

$$\delta_u = \sqrt{\frac{2 \nu_\infty x}{u_\infty J(1)}}$$

haben wir einen Ausdruck für die Geschwindigkeitsgrenzschichtdicke δ_u , aber sie kann nicht berechnet werden, da wir $\hat{\eta}(\tilde{y})$ noch nicht kennen, und $J(1)$ von $\hat{\eta}(\tilde{y})$ abhängt.

4. Konzentrationsverteilung

Aus ähnlichen Gründen wie bei der Näherungslösung der Geschwindigkeitsverteilung wird vorausgesetzt, daß die dimensionslose Massenflußdichte in der Grenzschicht senkrecht zur Grenzfläche durch eine Parabel dargestellt werden kann, deren lineares Glied ebenfalls Null ist, da die Geschwindigkeiten nahe der Grenze sehr gering sind, so daß in diesem Bereich nur die Diffusion einen Beitrag zum Massengleichgewicht liefert:

$$\hat{j} = \hat{D} \frac{d\hat{C}}{d\tilde{y}} = n_0 + n_2 \tilde{y}^2. \quad (9)$$

Durch Integration mit $\hat{D} = \hat{D}(\hat{C})$ und Eliminierung der Integrationskonstante auf Grund der Definition von \hat{C} , welche $\hat{C} = 0$ fordert für $\tilde{y} = 0$, ergibt sich

$$\int_0^{\hat{C}} \hat{D} d\hat{C} = K(\hat{C}) = [n_0 \hat{y}^* + n_2 \hat{y}^{*3}/3]. \quad (10)$$

Die Definition der Konzentrationsgrenzschichtdicke δ_c und der dimensionslosen Konzentration \hat{C} bringen zwei weitere Bedingungen für $\tilde{y} = 1$:

$$\frac{d\hat{C}}{d\tilde{y}} = 0; \quad \hat{C} = 1,$$

welche die Berechnung der Konstanten ermöglichen:

$$n_0 = -n_2 = \frac{3}{2} \int_0^1 \hat{D} d\hat{C} = \frac{3}{2} K(1).$$

Durch Einsetzen dieser Konstanten in Gleichung (10) ergibt sich die Konzentrationsverteilung in der Grenzschicht zu:

$$K(\hat{C}) = \left[\frac{3}{2} K(1) \left(\hat{y}^* - \hat{y}^{*3}/3 \right) \right]. \quad (11)$$

¹⁾ Hierbei wird das Zunehmen des Impulses durch die sich auflösenden festen Teilchen vernachlässigt. Im Falle konstanter Eigenschaften kann gezeigt werden, daß der durch diese Teilchen pro Zeiteinheit aufgenommene Impuls kleiner als $(\eta^{2/3}/D^{2/3})$ des in Gleichung (4) beschriebenen Impulsaustauschs ist. In viskosen Systemen ist $(\eta/D)^{2/3} \approx 10^{-4}$.

5. Massengleichgewicht

Um die Konzentrations- und Geschwindigkeitsverteilungen in Beziehung zu setzen, wird der Näherung von KROUJLINE gefolgt und ein Massengleichgewicht in einer wachsenden Breite dx der Konzentrationsgrenzschicht bestimmt, das sowohl den Massentransport durch Konvektion als auch den durch Diffusion berücksichtigt:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_c} (C_\infty - C) u dy = (D \frac{dC}{dy})_{y=0} \quad (12)$$

In dimensionsloser Form lautet Gleichung (12):

$$u_\infty \delta_u \left(\frac{d}{dx} (\delta_u) \right) \int_0^{\delta_c/\delta_u} (1 - \hat{C}) \hat{u} d\tilde{y} = D_\infty \left(\hat{D} \frac{d\hat{C}}{d\tilde{y}} \right)_{\tilde{y}=0} \quad (13)$$

Durch nochmaligen Austausch der Abstandsveränderlichen, diesmal durch \tilde{y}^* , und Ersetzen von $\delta_u \frac{d}{dx} \delta_u$ nach Gleichung (7) ergibt sich:

$$\frac{\delta_c}{\delta_u} \int_0^1 (1 - \hat{C}) \hat{u} d\tilde{y}^* = \left(\frac{\delta_u}{\delta_c} \right) \frac{D_\infty J(1)}{\nu_\infty} \left(\hat{D} \frac{d\hat{C}}{d\tilde{y}^*} \right)_{\tilde{y}^*=0} \quad (14)$$

Das Ersetzen von $(\hat{D} \frac{d\hat{C}}{d\tilde{y}^*})_{\tilde{y}^*=0}$ nach Gleichung (9)

und das Ordnen der Glieder, die Funktionen von (δ_c/δ_u) sind, führt zu:

$$\left(\frac{\delta_c}{\delta_u} \right)^2 \frac{1}{J(1)} \int_0^1 (1 - \hat{C}) \hat{u} d\tilde{y}^* = \frac{3}{2} \frac{D_\infty}{\nu_\infty} K(1) \quad (15)$$

$\hat{u} = \hat{u}(\tilde{y}^*)$ ist aus Gleichung (3) bekannt, aber $u(\tilde{y}^*)$ ist abhängig von (δ_c/δ_u) . Da $J(1)$ aus der Integration des Produkts von \hat{u} und $(1 - \hat{u})$ stammt, ist es ebenfalls eine Funktion von (δ_c/δ_u) . Alle restlichen Glieder sind bekannt, und damit kann Gleichung (15) durch die Methode der schrittweisen Näherung nach (δ_c/δ_u) aufgelöst werden. Der Wert von δ_c wird dann aus Gleichung (8) erhalten. Die Flußdicke j_0 an der Grenzfläche wird durch die rechte Seite der Gleichung (12) gegeben, welche nach Einführung dimensionsloser Größen und Ersetzung von $\hat{D} (\frac{d\hat{C}}{d\tilde{y}^*})_{\tilde{y}^*=0}$ ergibt:

$$j_0 = \frac{3}{2} K(1) \frac{D_\infty}{\delta_c} (C_0 - C_\infty) \quad (16)$$

6. Der Fall viskoser Flüssigkeiten

Bei viskosen Flüssigkeiten ist $\frac{\delta_c}{\delta_u} \ll 1$, weshalb die

Eigenschaftsänderung und der Massentransport nur in einem kleinen Bruchteil der Geschwindigkeitsgrenzschicht stattfinden. In diesem Falle kann die Geschwindigkeitsverteilung in der Konzentrationsgrenzschicht in guter Näherung²⁾ durch Vereinfachung von Gleichung (3) wie folgt erhalten werden:

$$\left[\hat{u}'(\tilde{y}) \right]_{\tilde{y} < \delta_c/\delta_u} \cong \int \frac{d\tilde{y}/\eta}{2/3} = \frac{3}{2} I'(\tilde{y}) \quad (3a)$$

²⁾ Der durch diesen Näherungswert der Gleichung (3) hervorgerufene Fehler beträgt durchschnittlich etwa $1/2 (\delta_c/\delta_u)$ und hat als obere Grenze $3/2 (\delta_c/\delta_u)$ für Werte von $\delta_c/\delta_u < 0,05$.

Die Geschwindigkeit kann nun mit Hilfe des anderen dimensionslosen Abstands \tilde{y}^* ausgedrückt werden:

$$\left[\hat{u}'(\tilde{y}^*) \right]_{\tilde{y}^* < 1} \cong \frac{\delta_c}{\delta_u} \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{1}{\hat{\eta}} d\tilde{y}^* = \frac{3}{2} \frac{\delta_c}{\delta_u} I'(\tilde{y}^*) \quad (3b)$$

Die Konzentrationsverteilung wird durch Gleichung (11) gegeben. Da auch die Abhängigkeit der Viskosität von der Konzentration bekannt ist, kann $I'(\tilde{y}^*)$ bestimmt werden.

$J(1)$ läßt sich in zwei Teile trennen, von denen nur einer viskositätsabhängig ist. Es wurde gefunden, daß für kleines δ_c/δ_u der Wert von $J(1)$ wenig durch Viskositätsänderungen beeinflusst wird und sich ziemlich genau der Konstante 39/420 nähert. Die Geschwindigkeitsgrenzschichtdicke wird dann aus Gleichung (8) erhalten³⁾:

$$\delta_u' \cong 4,64 \sqrt{\frac{\nu_\infty x}{u_\infty}} \quad (8a)$$

Dieser Wert ist identisch mit der Grenzschichtdicke für konstante Viskosität und zeigt, daß Veränderungen der Viskosität bei hohen Schmidtschen Zahlen die Geschwindigkeitsgrenzschichtdicke wenig beeinflussen, obgleich die Veränderungen das der Grenzfläche unmittelbar benachbarte Geschwindigkeitsprofil beeinflussen.

Ersetzt man in Gleichung (15) die Werte von $u(\tilde{y}^*)$ nach Gleichung (3b) und den Wert $J(1)$ durch 39/420, so erhält man:

$$\left(\frac{\delta_c}{\delta_u} \right)^3 \int_0^1 (1 - \hat{C}) I'(\tilde{y}^*) d\tilde{y}^* \cong \frac{39}{420} \frac{D_\infty}{\nu_\infty} K(1) \quad (15a)$$

Das Integral auf der linken Seite ist aus den Gleichungen (11) und (3b) explizit bekannt. Wird es mit $L(1)$ bezeichnet, folgt:

$$\left(\frac{\delta_c}{\delta_u} \right) \cong 0,45 \sqrt[3]{\frac{D_\infty}{\nu_\infty} \frac{K(1)}{L(1)}} \quad (15b)$$

und aus Gleichung (8a)

$$\delta_c' \cong 2,08 \left(\frac{K(1)}{L(1)} \right)^{1/3} D_\infty^{1/3} \nu_\infty^{1/6} u_\infty^{-1/2} x^{1/2} \quad (15c)$$

Schließlich kann durch Einsetzen von δ_c in Gleichung (16) die Flußdicke erhalten werden:

$$j_0' \cong 0,72 [K(1)]^{2/3} [L(1)]^{1/3} D_\infty^{2/3} \nu_\infty^{-1/6} u_\infty^{1/2} x^{-1/2} C_0 - C_\infty \quad (16a)^4.$$

7. Der Fall konstanter Eigenschaften

Die Integrale $K(1)$ und $L(1)$ können für konstante Eigenschaften, d. h. $\hat{\eta} = \hat{D} = 1$, leicht berechnet werden. Mit $D = 1$ folgt aus Gleichung (10):

$$K''(1) = 1 \quad (17a)$$

und
$$\hat{C} = \frac{3}{2} (\tilde{y}^* - \tilde{y}^{*3}/3) \quad (17b)$$

Aus den Gleichungen (15), (17b) und (3b) ergibt sich mit $\hat{D} = 1$ und $\hat{\eta} = 1$:

$$L''(1) = \int_0^1 (1 - 3/2 \tilde{y}^* + 1/2 \tilde{y}^{*3}) \tilde{y}^* d\tilde{y}^* = 1/10, \quad (18)$$

³⁾ Für $\delta_c/\delta_u < 0,05$ beträgt der Fehler dieser Näherung etwa 0,01.

⁴⁾ Da sich die Fehler von \hat{u}' und $J(1)$ teilweise ausgleichen, kann ohne weiteres gesagt werden, daß diese Näherungswerte einen Fehlanteil von weniger als (δ_c/δ_u) zu j_0' beitragen.

woraus für Gleichung (16a) folgt:

$$j_0'' = 0,332 D_\infty^{2/3} \nu_\infty^{-1/6} u_\infty^{-1/2} x^{1/2} (C_0 - C_\infty), \quad (16b)$$

was der von E. R. ECKERT [2] angegebene Ausdruck für eine „exakte Lösung der Differentialgleichung der Grenzschicht“ ist.

8. Zusammenfassung

Es wird eine Methode angegeben zur Behandlung des Massentransports bei erzwungener Konvektion in einer Strömung über eine ebene Platte mit verschiedenen Abhängigkeiten der Viskosität und Diffusion von der Konzentration. Sie beruht auf einer Lösung der Gleichung (15) nach (δ_c/δ_v) durch schrittweise Näherung. Dies kann durch numerische Methoden leicht erreicht werden.

Bei viskosen Flüssigkeiten, wo $\delta_c/\delta_v \ll 1$ ist, vereinfacht sich die Situation, so daß ein Korrekturfaktor λ definiert werden kann, der die im Falle konstanter Eigenschaften gefundene Massenflußdichte in die für veränderliche Eigenschaften erwartete überführt. Er wird erhalten durch Division von Gleichung (16a) durch Gleichung (16b):

$$\lambda = \frac{j_0'}{j_0''} \approx 2,14 [K(1)]^{2/3} [K(1)]^{1/3}, \quad (19)$$

was ein Resultat ergibt, das allein durch numerische Integration von $K(1)$ und $L(1)$ bestimmt werden kann.

Diese Arbeit wurde am Massachusetts Institute of Technology ausgeführt mit Unterstützung der U. S. Atomic Energy Commission unter Contract-No. AT(30-1)-1852.

9. Schrifttum

- [1] PHILIP, J. R.: Numerical solution of equations of the diffusion type with diffusivity concentration-dependent. Trans. Faraday Soc. **51** (1955) S. 885–892.
- CRANK, J. C.: The mathematics of diffusion. London: Oxford Univ. Press 1956.
- [2] ECKERT, E. R.: Introduction to the transfer of heat and mass. New York: McGraw-Hill 1960.
- [3] SCHUH, H.: Über die Lösung der laminaren Grenzschichtgleichung an der ebenen Platte für Geschwindigkeits- und Temperaturfeld bei veränderlichen Stoffwerten und für das Diffusionsfeld bei höheren Konzentrationen. Z. angew. Math. Mech. **25–27** (1947) S. 54–60.
- [4] COOPER, jr., A. R.: Mixing and flow in glass tanks. J. Amer. ceram. Soc. **42** (1959) S. 93–101. [Ref. Glastechn. Ber. **33** (1960) S. 268.]
COOPER, jr., A. R. und KINGERY, W. D.: Corrosion of refractories by liquid slags and glasses. In: KINGERY, W. D.: Kinetics of high-temperature processes. New York: Wiley 1959. S. 85–92.
- [5] KOZAKEVITCH, P. P.: Viscosité et éléments structuraux des aluminosilicates fondus: Laitiers $\text{CaO-Al}_2\text{O}_3\text{-SiO}_2$ entre 1600 et 2100 °C. Rev. Metallurg. **57** (1960) S. 149–160.
- [6] COOPER, jr., A. R. Kinetics of refractory solution. Cambridge: Diss. Massachusetts Institute of Technology. Dept. of Metallurgy 1960.
- [7] VON KARMAN, T.: Über laminare und turbulente Reibung. Z. angew. Math. Mech. **1** (1921) S. 233–252.
- [8] KROUJILINE, G.: Investigation de la couche — limite thermique. (Orig. russ.) Techn. Phys. (UdSSR) **3** (1936) S. 183–194.
KROUJILINE, G.: La théorie de la transmission de chaleur par un cylindre circulaire dans un courant fluide transversal. (Orig. russ.) Techn. Phys. (UdSSR) **3** (1963) S. 311–320.
- [9] HOWARTH, L.: On the solution of the laminar boundary layer equations. Proc. Roy Soc. (London) **A 164** (1938) S. 547–579.
- [10] LEVICH, B.: The theory of concentration polarisation. Disc. Faraday Soc. **1** (1947) S. 37–43.
GREGORY, D. G. und RIDDIFORD, A. C.: Transport to the surface of a rotating disc. J. chem. Soc. 1956, III, S. 3756–3764.
- [11] ACRIVOS, A.: Solution of the laminar boundary layer energy equation at high prandtl numbers. Phys. of Fluids **3** (1960) S. 657–658.
- [12] WOLKOWA, Z. W.: Ein Beitrag zur inneren Reibung und Diffusion in Glycerin-Wassergemischen. Z. phys. Chem. **A 145** (1929) S. 200–206; **A 147** (1930) S. 206 bis 214.
- [13] KING, T. B. und KOROS, P. J.: Diffusion in liquid silicates. In: KINGERY, W. D.: Kinetics of high temperature processes. New York: Wiley 1959. S. 80–85.
HENDERSON, J., YANG, L. und DERGE, G.: Self-diffusion of aluminium in $\text{CaO-SiO}_2\text{-Al}_2\text{O}_3$ melts. Trans-Metallurg. Soc. AIME **221** (1961) S. 56–60. (39088)

DK 620.193.57:666.11.01:620.193.4

Über die Heißauslaugung von Silikatgläsern durch Neutralsalzlösungen¹⁾

VON ERNST WIEGEL, Braunschweig

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt Braunschweig)

(Eingegangen am 9. Juli 1963)

Die Heißauslaugung des Glases durch Neutralsalzlösungen wurde an 20 Silikatgläsern untersucht. Ihre Abhängigkeit von der Salzkonzentration, der Glasmenge und der Auslaugzeit wurde mit Hilfe der aus dem Glasgrieß ausgelaugten Basen nach dem entsprechend modifizierten Griebtitrationsverfahren DIN 12111 bestimmt. Während an einem reinen Natronkalkglas für Glaselektroden (dem Elektrodenglas nach „Mac-Innes“ [7]) gegenüber den Wasserauslaugwerten nur Erniedrigungen der Basenabgaben durch die Salzlösungen gefunden wurden, ergaben sich bei technischen Natronkalkgläsern der III. und IV. hydrolytischen Klasse, besonders im Konzentrationsbereich $n/1$ - normaler Lösungen von Kalium- und Natriumchlorid zum Teil erhebliche Erhöhungen der Basenabgaben, die bei noch höheren Salzkonzentrationen wieder absanken. Auch bei Boro-silikatgläsern der I. und II. hydrolytischen Klasse wurden, je nach Glassorte, erniedrigte oder erhöhte Basenabgaben in Neutralsalzlösungen festgestellt.

Die Probleme der Heißauslaugung von Silikatgläsern interessieren in den letzten Jahren vor allem im Zusammenhang mit der Frage einer genauen Bestimmung der Wasserbeständigkeit dieser Gläser. Die Ergebnisse der entsprechenden Prüfverfahren sind vornehmlich für Hohlgläser von Bedeutung im Hinblick auf ihren Gebrauch als Flaschen oder Glasgeräte, die zur Aufbewahrung von Flüssigkeiten dienen, welche gegen

pH -Änderungen, bzw. eine Verunreinigung durch Alkalien oder geringe Mengen anderer Glasbestandteile chemisch empfindlich sind. Durch das vielfach benutzte Griebtitrationsverfahren [1] DIN 12111 und durch ähnliche ausländische Verfahren wird allerdings nur die

¹⁾ Vortrag auf der Sitzung des Fachausschusses I der Deutschen Glastechnischen Gesellschaft am 25. April 1963 im Max-Planck-Institut für Silikatforschung in Würzburg.