UNIVERSIDAD DE BURGOS

PROGRAMA INTERNACIONAL DE DOCTORADO
ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

Departamento de Didácticas Específicas

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE EN ECUACIONES DIFERENCIALES CON ABORDAJE GRÁFICO, NUMÉRICO Y ANALÍTICO

TESIS DOCTORAL

MARIA MADALENA DULLIUS

Burgos, febrero de 2009

UNIVERSIDAD DE BURGOS

PROGRAMA INTERNACIONAL DE DOCTORADO
ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

Departamento de Didácticas Específicas

Universidad de Burgos

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE EN ECUACIONES DIFERENCIALES CON ABORDAJE GRÁFICO, NUMÉRICO Y ANALÍTICO

MARIA MADALENA DULLIUS

Tesis Doctoral realizada por **Maria Madalena Dullius**, para optar al Grado de Doctor por la Universidad de Burgos, bajo la dirección de la **Dra. Eliane Angela Veit** y la codirección del **Dr. Ives Solano Araujo.**

Burgos, febrero de 2009

AGRADECIMIENTOS

¡Un ensueño realizado!

Durante la lucha por este ensueño, que ha sido un trayecto de cinco años, una gran parte de mi vida se ha adaptado. Las horas de estudio y de escritura de la tesis me han exigido una reducción en el tiempo con la familia y amigos. Además, otras personas han comenzado a formar parte de mi vida y que son esenciales para este trabajo. Por lo tanto, quiero dar las gracias :

- A los profesores Eliane Angela Veit y Ives Solano Araujo, por la orientación, los conocimientos compartidos, sobre todo por el estímulo y la comprensión demostrada a lo largo de este trayecto.
- A los compañeros del curso por la amistad, la convivencia, el apoyo y la motivación.
- A mi marido Volmir y a mis hijos Bruno, Artur y Julia, por el afecto y la comprensión de mis ausencias.
- A mis padres y a mis hermanos por la participación en cada momento de mi vida.
- A mis compañeros de la UNIVATES, Claus, Ieda, Ingo, Eduardo, João y Marli, el apoyo, el estímulo y por la disponibilidad para lectura y por la ayuda para mejorar el trabajo.
- A los profesores del Programa de Doctorado en Enseñanza de las Ciencias en la Universidad de Burgos que han participado y colaborado también en este logro.
- A todos los profesores que han contribuido con sus valiosas sugerencias para la mejora del test de conocimientos, especialmente a la profesora Varriale Maria Cristina y al profesor Fernando Lang da Silveira.
- La UNIVATES que permitió la realización de mis prácticas de enseñanza y, en particular, los estudiantes temas de investigación.

RESUMEN

Los Estudios indican que la metodología dominante en el contexto de enseñanza de ecuaciones diferenciales, fuertemente orientada hacia la solución analítica, generan un aprendizaje mecánico, sin que el alumno perciba su potencial y su importancia como una herramienta matemática para resolver problemas prácticos. Los recursos computacionales disponibles en la actualidad permiten ir más allá de la mera aplicación de técnicas para resolución de las ecuaciones, eso puede ayudar a los alumnos a centrarse más en la interpretación de las ecuaciones diferenciales y sus soluciones en relación a los fenómenos que pretenden representar. En este sentido, presentamos en este trabajo de investigación llevado a cabo a fin de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, en que exploramos el potencial de los recursos computacionales y la contribución de la interacción profesor-alumno-material didáctico, con el fin de proporcionar condiciones favorables al aprendizaje significativo**.** La investigación, en su conjunto, comprende cuatro estudios (Estudio Preliminar, Estudio 1, Estudio 2 y Estudio 3). En el Estudio Preliminar investigamos las dificultades de aprendizaje, y en cada uno de los estudios 1, 2 y 3 desarrollamos una práctica pedagógica en que participaron los alumnos de los cursos de Ingeniería y Química Industrial del *Centro Universitário UNIVATES* (Brasil), matriculados en la asignatura de Cálculo III. La propuesta de enseñanza de esta práctica se centra en la solución de situaciones-problema con el uso de los recursos computacionales, en que inicialmente exploramos la solución de ecuaciones diferenciales, obtenidas con un *software* y, a continuación, el abordaje de las técnicas analíticas (metodología inversa). La metodología de las clases sigue presupuestos de la Teoría Socio Interaccionista de Vygotsky y los materiales de instrucción utilizados son elaborados a partir de la Teoría del Aprendizaje significativo de Ausubel. Para la colecta de informaciones sobre el aprendizaje de los alumnos durante las clases, utilizamos instrumentos elaborados para ese propósito: cuestionario, entrevistas, guías de actividades, test inicial y final de conocimientos y diario de campo. De un estudio a otro modificamos los materiales, instrumentos para la colecta de datos e hicimos algunos cambios en la metodología de las clases. Las discusiones presentadas son provenientes de las informaciones obtenidas durante las actividades de enseñanza-aprendizaje y tienen en cuenta el marco teórico adoptado. Como resultados de la aplicación del material, podemos señalar que las actividades propuestas en las guías y el uso de recursos computacionales motivaron a los alumnos para el estudio de las ecuaciones diferenciales, que es un factor importante para que ocurra el aprendizaje significativo, según Ausubel. Asimismo, la interacción de los alumnos, en grupos, con el material de instrucción y con el profesor siempre ha posibilitado debates provechosos y las condiciones propicias para el aprendizaje. Nuestros resultados indican que el uso de recursos computacionales puede ser una herramienta importante en el proceso enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales. Además, es importante destacar que proponer una metodología distinta genera incómodo y descontento a los alumnos a pesar de que hemos trabajado los contenidos con enfoque analítico, numérico y gráfico, los alumnos todavía priorizan las técnicas analíticas.

ABSTRACT

Several studies show that the dominant approach in the teaching of differential equations is strongly focused on analytical solving and ends to generate a mechanical learning of those, although the students don't actually understand the potential and importance as a mathematical tool for solving practical problems. The computing resources available today can reach beyond techniques application for solving the equations and might help students to focus more closely on the differential equations interpretation and their solutions in terms of the phenomena they intend to represent. So, the work we present here was carried on to improve the differential equations teaching-learning process and explore the potentials of computational resources and the contribution of the interaction between teacher-student-teaching material in order to provide favorable conditions for the meaningful learning. The research as a whole involves four studies (Preliminary Study, Study 1, Study 2 and Study 3). In the preliminary study we investigated learning deficiencies. In each of the other studies 1, 2 and 3, we developed a pedagogical practice with the students registered for Calculus III in Engineering and Industrial Chemistry courses of UNIVATES University Center (Brazil). The practice teaching proposals are focused on problem-solution of situations with the use of computational resources which initially explore the differential equations solution obtained with a software and later the approach of analytical techniques (reverse methodology). The methodology of classes follows assumptions from the Vygotsky's Socio-interactionist Theory and the instructional materials based on Ausubel's Meaningful Learning Theory. We used specially designed tools for information collection about the students' learning during the lessons: questionnaire, interviews, guides to activities, initial and final knowledge tests and the field notes. From one study to another we improve the materials and instruments for data collection and we made some changes in the methodology of classes. The presented discussion results from those informations obtained during the activities of teaching and learning and it takes into account the theoretical basis adopted. Within the results in the material application we ca highlight that the activities proposed in the guides and the computational resources helped in motivating students to work harder on differential equations and this is an important factor for the meaningful learning occurrence according to Ausubel. Also the interaction of students, in groups, with the instructional material and with the teacher provided rich discussions and conditions for easier learning. Our results indicate that the use of computational resources can be an important tool in the differential equations teaching-learning process. But it's also important to emphasize that when we offer a differentiated approach we often create discomfort and dissatisfaction to the students, and despite working with numeric and graphic analytical approach the students still prioritize the analytical techniques.

ÍNDICE

1 INTRODUCCIÓN

El presente trabajo es una tesis de doctorado en Enseñanza de las Ciencias que está vinculada a la línea de nuevas tecnologías en la enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas del Programa Internacional de Doctorado en Enseñanza de las Ciencias (PIDEC) promovido por la Universidad de Burgos (UBU), España, y por la Universidad *Federal do Rio Grande do Sul* (UFRGS), Brasil. Pretendemos proponer e investigar una metodología diferenciada para abordar el contenido de ecuaciones diferenciales, enfocada en situaciones-problema, en que, inicialmente, exploramos la solución de una ecuación diferencial utilizando recursos computacionales, y que sólo, a posteriori, abordamos técnicas analíticas. En este proceso, tenemos en cuenta la interacción social, buscando de esa manera proporcionar condiciones favorables al aprendizaje significativo de este contenido.

La opción de trabajar a partir de la enseñanza de ecuaciones diferenciales surge de una problemática que nos sensibiliza desde hace tiempo. Antes como académica del curso de matemáticas, no percibí el sentido de tantas técnicas analíticas, y de la resolución de largos ejercicios que me parecían desprovistos de significado; después ya como profesora de este contenido, mi principal preocupación era y sigue siendo por las dificultades del aprendizaje que aparecen en los alumnos, tanto en el uso de técnicas como en la resolución de ecuaciones diferenciales, puesto que los estudiantes no dominan contenidos de matemáticas en nivel básico, en cuanto a la producción de significados y comprensión de conceptos, como, por ejemplo, el de tasa de variación.

Hace ocho años que trabajo con la enseñanza del cálculo, en los cursos de Ingeniería de la Computación, Ingeniería de la Automatización y Control, Ingeniería de Producción, Ingeniería Ambiental y Química Industrial, por lo tanto, noto la insatisfacción de los alumnos, cuando no perciben la importancia del contenido abordado para su carrera. A partir de cada nuevo grupo, aumentan los interrogantes del tipo: ¿Por qué realizar enormes cuentas si existen máquinas que pueden hacer esto por nosotros? ¿Por qué "aprender de memoria" tantas fórmulas, si cuando las necesite, podré buscarlas en libros o *internet*? ¿Por qué necesito saber todo esto?

No es necesario que se haga un gran esfuerzo para percibir que poco del contenido matemático que se estudia en la enseñanza media y superior, de la forma como es abordado, estimula al alumno a cautivarse de forma significativa en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Además, apesar de los recursos computacionales estar disponibles, constatamos su poco uso en el contexto escolar (DULLIUS y QUARTIERI, 2007; DULLIUS et. al., 2007).

Percibimos que los alumnos llegan a la universidad sin las habilidades y competencias requeridas para trabajar con contenidos matemáticos básicos, como operaciones con fracciones, reglas de potenciación, cálculos de porcentaje, resolución de ecuaciones simples, logarítmos y trigonometría. Además, los estudiantes no demuestran interés por el contenido, resuelven los problemas mecánicamente y están preocupados, en la mayoría de las veces, solamente por obtener una nota mínima para aprobar el curso. Los alumnos van a las clases sin motivación por no comprender, en gran parte, lo que están haciendo y, consecuentemente, no comprenden la relevancia de este aprendizaje para su vida profesional. Entonces nos preguntamos: ¿Qué estamos haciendo los profesores de Cálculo Integral y Diferencial en estas asignaturas?.

En función de esta problemática, elegimos como objetivos de este trabajo la identificación de las principales dificultades de los alumnos en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales; la elaboración de una propuesta pedagógica que potencialmente los auxilie en la superación de esas dificultades y los ayude a percibir la importancia del contenido para su formación; el estudio de las potencialidades de uso de recursos computacionales en el proceso enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y en este contexto, el estudio de la contribución de la interacción entre el profesor-alumno-material didáctico, de modo que proporcione condiciones favorables al aprendizaje significativo de este contenido. A partir de esta propuesta, pretendemos que el profesor sea un facilitador; que el conocimiento matemático sea significativo para los estudiantes y que éstos puedan explorar problemas de su interés.

Teniendo en cuenta estos objetivos nos propusimos las siguientes preguntas orientadoras de la investigación:

1. ¿Cuáles son las principales dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales?

2. ¿Cómo podemos ayudar a los alumnos en la obtención de un aprendizaje significativo de las ecuaciones diferenciales?

3. ¿Cómo podemos trabajar con recursos computacionales para amenizar estas dificultades? ¿Cuáles son las ventajas y desventajas del uso de este tipo de herramienta en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales?

Iniciamos nuestro trabajo, en el segundo semestre de 2005, haciendo una revisión bibliográfica sobre la enseñanza y el aprendizaje de ecuaciones diferenciales y el uso de recursos computacionales en el proceso de enseñanza-aprendizaje de este contenido. En el mismo periodo, realizamos un Estudio Preliminar para identificar las dificultades de los alumnos en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, para tal, realizamos una entrevista semi-estructurada con profesores que trabajan con la enseñanza de las ecuaciones diferenciales y les aplicamos un cuestionario a los 35 alumnos del curso de Licenciatura en Ciencias Exactas de *UNIVATES* que cursaban la asignatura de Ecuaciones Diferenciales (administrada por nosotros) en el segundo semestre de 2005.

Después, para el desarrollo de los Estudios 1, 2 y 3, elaboramos una propuesta de enseñanza enfocada a la solución de situaciones-problema y el uso de recursos computacionales. En la elaboración del material instruccional tuvimos en cuenta los marcos de la Teoría del Aprendizaje Significativo de Ausubel. Ausubel (2003) caracteriza el aprendizaje significativo por una interacción, no arbitraria y no literal, entre las nuevas informaciones o conceptos, que es objeto de atención en el proceso de enseñanza-aprendizaje, y la estructura conceptual (conceptos y relaciones) existentes en la mente del individuo. Si ocurre esta interacción, la nueva información adquiere significado para el aprendiz, a medida en que se anclan en conceptos o proposiciones relevantes, preexistentes en su estructura conceptual, definidos como conceptos subsumidores, o meramente *subsumidores*. Ausubel (op. cit.) propone dos condiciones básicas que deben ser satisfechas para que ocurra el aprendizaje significativo: la primera es que el alumno debe manifestar una predisposición positiva para aprender, es decir, una disposición para relacionar, de forma no arbitraria, pero substantivamente[1], el nuevo material con su estructura cognitiva; y la segunda es que el material que va a ser aprendido debe ser potencialmente significativo para que aquel alumno, en particular, pueda relacionarlo con su estructura cognitiva. Esa condición implica que el aprendiz tenga disponible en su mente los subsumidores adecuados y si no lo están, necesitamos proporcionarle el acceso al material potencialmente significativo para ayudarlo en la obtención de los mismos.

Ausubel (apud MOREIRA, 2003) propone que una de las primera tareas nuestras como profesores, es promover la predisposición del alumno para aprender. Para ello, es importante que el profesor trabaje, de acuerdo con los intereses, expectativas y necesidades de los alumnos. En este sentido, usando recursos computacionales, pretendemos presentar propuestas de actividades que tengan en cuenta las dificultades y la desmotivación demostradas, por los alumnos, en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, de modo que les ayude a superarlas y propiciar condiciones favorables al aprendizaje significativo. Damos el énfasis en la contextualización, a través de situaciones-problema, que están relacionadas al área de actuación de los futuros profesionales, intentamos, por un lado, motivar a los alumnos, y, por otro lado, explorar el raciocinio conceptual a fin de ayudarles a dar significado a las ecuaciones diferenciales y a sus soluciones.

La metodología empleada en la práctica pedagógica de los Estudios 1, 2, 3 tiene como soporte la Teoría Socio-interaccionista de Vygotsky (2000 y 2003) especialmente en lo que se refiere a la interacción profesor-alumno-material didáctico, en el ambiente con recursos computacionales. Esta teoría parte del desarrollo cognitivo del individuo como resultado de un proceso socio-histórico-cultural. En relación al aprendizaje, Vygotsky (op. cit.) señala dos factores, considerados por el autor primordiales. El primero, y más importante para él, es la adquisición de conocimientos por la interacción social, que es el vehículo fundamental para la transmisión dinámica del conocimiento construido social, histórica y culturalmente. La interacción social implica un mínimo de dos personas intercambiando significados. El segundo son las posibilidades de organización de situaciones de enseñanza que actúen en la zona de desarrollo próximo del alumno, permitiéndole alcanzar niveles de conocimiento más

1 Substantivamente significa que la relación entre el material a ser aprendido y la estructura no es alterada si otros símbolos diferentes, pero equivalentes fueran utilizados.

elaborados. La zona de desarrollo próximo es definida por Vygotsky como un nivel intermediario entre el nivel de desarrollo cognitivo real del individuo, medido por su capacidad de resolver problemas solo, y si nivel de desarrollo potencial, medido a través de la solución de problemas bajo orientación. La zona de desarrollo próximo abarca las funciones que todavía están en proceso de maduración.

Vygotsky (apud MOREIRA, 2003) destaca que la enseñanza debe ser caracterizada por la interacción social, por eso, es importante que el alumno tenga oportunidades de interactuar socialmente con los compañeros y con el profesor para favorecer su desarrollo cognitivo y su aprendizaje. El autor también aborda el uso de instrumentos en la mediación con el ambiente. A partir de estos factores, pretendemos desarrollar nuestra propuesta de enseñanza con actividades que favorezcan la interacción y explorar el uso de recursos computacionales como una herramienta auxiliar para que los alumnos puedan construir y explorar situaciones-problema que involucren el contenido de ecuaciones diferenciales y actuar sobre ellos para analizar los efectos causados y también para ayudarlos en la exteriorización de sus ideas.

Desarrollamos una propuesta de enseñanza enfocada para las futuras necesidades de los alumnos como profesionales del área, buscando estimular una participación más activa de los mismos en el aula de clase. Presentamos situaciones-problema contextualizadas, las cuales los alumnos consiguen atribuir significados, y son cuestionados, entonces, sobre las variables y parámetros que están envueltos. A través de un raciocinio conceptual intrínseco relacionado a la particular situación-problema en estudio, el alumno era conducido a crear o explorar el modelo computacional de modo a comprender su comportamiento. Sólo entonces se pasaba a la formulación de la ecuación diferencial que describe el fenómeno y su solución analítica. A partir de esta metodología inversa, que enfatiza la comprensión del comportamiento de la solución, para solamente después construir la ecuación y resolver formalmente el problema, buscamos motivar al alumno y darle condiciones para proporcionar significados a las ecuaciones diferenciales y a sus soluciones.

La práctica pedagógica del Estudio 1, 2 y 3, fue realizada, respectivamente, en el semestre de 2006, en el primer semestre de 2007 y en el primer semestre de 2008, siempre con los alumnos de los cursos de Química Industrial e Ingenierías (Computacional, de Producción, de Automatización y Control y Ambiental) de

UNIVATES (Brasil). Las actividades propuestas les fueron presentadas a los alumnos en forma de guías de actividades, y éstos realizaban los ejercicios por parejas, con o sin el uso de recursos computacionales. Para la colecta de datos, fueron registradas observaciones en todas las clases, realizadas entrevistas, aplicación de un cuestionario a todos los alumnos y, también fueron analizados guías de actividades. A partir de esos registros, intentamos inferir regularidades, buscar indicadores, construir interpretaciones y comprensiones contextualizadas. Para el desarrollo de la práctica pedagógica en los Estudios 2 y 3, fuimos haciendo mejoramientos en las guías, en los instrumentos de recolección de datos, en la metodología de las clases de acuerdo con los resultados y sugerencias anteriormente recogidas.

Desde el punto de vista del aprendizaje[2], apostamos por el uso de recursos computacionales, porque eso propiciaría la oportunidad del alumno interactuar con una representación del modelo científico que describe el fenómeno de interés. A través de esta interacción, el alumno dispone de la oportunidad de observar, explorar y analizar cómo se comportan las diversas grandezas involucradas en las ecuaciones diferenciales en estudio, enfocando el aprendizaje en la interpretación y aplicación de las ecuaciones diferenciales, en contraposición a la mera solución analítica. Además, incentivamos el uso de esos recursos como una herramienta auxiliar para que los alumnos logren exteriorizar sus ideas, reflexionarlas y discutirlas en grupo y/o con el profesor.

Los recursos computacionales utilizados, de acuerdo con lo mencionado anteriormente, fueron la planilla de cálculos de OpenOffice[3] y el *software* Powersim[4]. Las planillas de cálculos son constituidas por un conjunto de células organizadas en líneas y columnas, donde son digitados números, textos y fórmulas matemáticas, cuyo argumento puede estar localizado en alguna otra célula de la planilla. La sintaxis es simple y la inserción de fórmulas en células adyacentes es muy facilitada por el hecho de que ellas pueden ser automáticamente ajustadas, permitiendo que fácilmente se implemente cálculos recursivos acumulativos. También son fácilmente implementados cálculos de variaciones en intervalos finitos cuyos valores pueden convertirse de forma tan pequeña como se quiera, limitados a la precisión de las máquinas (usualmente10^{-16}). El uso de la planilla fue previsto, en nuestra propuesta, para favorecer la comprensión

2 Sobre el punto de vista instrumental, el uso de recursos computacionales en la solución de los problemas típicos del área de actuación es indispensable para todo buen profesional del siglo XXI.
3 http://www.openoffice.org.br/
4 http://www.powersim.com/

de los conceptos de límite y tasa de variación media e instantánea (derivadas), ya que éstos son conceptos subsumidores indispensables para el aprendizaje significativo de ecuaciones diferenciales.

El Powersim es un *software* que permite modelar un sistema a través de la elaboración de diagramas de flujo utilizando la metáfora de Forrester (1990, apud SANTOS et. al., 2002). A través de la creación y conexión de objetos básicos, representados por íconos en la base de construcción del modelo del Powersim, se puede construir un modelo computacional suministrando solamente relaciones algebraicas entre sus elementos. De inmediato, gráficos y tablas son fácilmente realizados y el usuario puede explorar las consecuencias de las alteraciones de variables, parámetros y sus relaciones, sin conocimiento de la formulación matemática del problema. De particular interés es el comportamiento de variables en función del tiempo, que permite investigar el comportamiento dinámico del sistema. La opción por el uso del Powersim se debe exactamente al hecho de que usamos la representación por íconos para modelar la situación-problema en estudio, y su uso facilita el entendimiento de las relaciones entre variables de las ecuaciones diferenciales y el comportamiento de las mismas sin tener una solución analítica.

Presentamos el trabajo en seis capítulos, conforme la descripción, a continuación. En el capítulo 2 presentamos la revisión bibliográfica sobre la enseñanza y el aprendizaje de ecuaciones diferenciales y sobre el uso de recursos computacionales en la enseñanza de éste y de otros contenidos de Matemáticas. En el capítulo 3, presentamos el marco teórico que orientó el trabajo: la Teoría de Aprendizaje de Ausubel y la Teoría Socio-interaccionista de Vygotsky. En el capítulo 4, presentamos algunos tópicos del contenido de ecuaciones diferenciales. En el capítulo 5, relatamos brevemente el Estudio Preliminar y describimos los Estudios 1, 2 y 3, detallamos la metodología usada para abordar el problema de investigación, la práctica pedagógica desarrollada, los materiales elaborados, las herramientas computacionales usadas, como los instrumentos para colectar las informaciones necesarias para el desarrollo de la investigación, los mejoramientos que fueron hechos de un estudio a otro y la discusión de los resultados obtenidos a partir de los instrumentos utilizados. Y, por fin, en el capítulo “Consideraciones Finales”, presentamos una posible síntesis de los principales resultados y la continuación de la investigación.

2 REVISIÓN DE LA LITERATURA

En este capítulo presentamos una revisión bibliográfica sobre la enseñanza y el aprendizaje de ecuaciones diferenciales y algunos estudios que abordan la enseñanza de contenido de Matemáticas a través del uso de recursos computacionales, como planillas electrónicas y otros *softwares* de modelación computacional, en la Enseñanza Superior. Consultamos revistas clasificadas como A, B, y C por la CAPES[5] del área de Enseñanza de las Ciencias y Matemáticas. La relación de las revistas consultadas, de las que extraímos los artículos que analizamos, se encuentra en la Tabla 2.1.

2.1 Enseñanza de las Matemáticas de nivel superior a través del uso de algún *software* de modelación computacional

En esta sección no presentamos una revisión bibliográfica completa sobre el tema, pues éste no es el enfoque de nuestro trabajo, pero destacamos algunos estudios a fin de tener una idea sobre lo que está siendo investigado en el área de Matemáticas que involucra el uso de recursos computacionales.

La revisión bibliográfica presentada por Villarreal (1999) en su tesis de doctorado titulada: "El pensamiento matemático de estudiantes universitarios de Cálculo y tecnologías informáticas" estuvo enfocada en tres aspectos: aprendizaje del

5 CAPES es un órgano del gobierno de financiamiento de investigación y las revistas clasificadas con calidad A son las consideradas mas calificadas http://qualis.capes.gov.br/

Cálculo, Tecnología y Educación Matemática y Cálculo, y tecnologías computacionales.

Tabla 2.1- Revistas consultadas del área de Enseñanza de las Ciencias y Matemáticas.

Nombre de la revista	***Periodo consultado***	***Circulación***
Bolema	1985-2005	Nacional
Caderno Brasileiro de Ensino de Física* (CBEF)	1990-2007	Nacional
Ciência e Educação	1999-2007	Nacional
Computers & Education	1998-2007	Internacional
Educação Matemática em Revista (RS)	2001-2004	Local
Educação Matemática em Revista (SP)	1993-2004	Nacional
Educação Matemática Pesquisa	1999-2006	Nacional
Enseñanza de las Ciencias	1995-2007	Internacional
Investigações em Ensino de Ciências (IENCI)	1996-2007	Internacional
International Journal of Mathematical Education in Science and Technology	1995-2007	Internacional
International Journal of Science Education (IJSE)	1999-2006	Internacional
Journal for Research in Mathematics Education (JRME)	1997-2006	Internacional
Journal of Mathematical Behavior	1995-2007	Internacional
Nonlinear Differential Equations and Applications (NoDEA)	1994-2006	Internacional
Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias (REEC)	2002-2006	Internacional
Revista Brasileira de Educação	1995-2006	Nacional
Revista Brasileira de Ensino de Física	1996-2006	Nacional
Revista Brasileira de História da Matemática	2001-2006	Internacional
Revista Brasileira de Informática na Educação	1997-2006	Nacional
Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências	2001-2006	Nacional
Revista de Ciências Exatas e Naturais	2000-2006	Nacional
Science Education	1996-2006	Internacional
Science & Education	1992-2006	Internacional
Zetetike	1993-2005	Nacional

*Hasta 2001, llamado Caderno Catarinense de Ensino de Física

En relación al aprendizaje del Cálculo, Villarreal afirmó que existían numerosos y variados estudios que habían sido realizados con enfoque en esta problemática y citó en su texto en torno a 30 artículos. La autora presentó estudios sobre las concepciones de los estudiantes y de las posibles formas de abordar el Cálculo. Además, aludió a estudios sobre las concepciones y habilidades relacionadas al concepto de derivada y sus diversas formas de representación; se refirió, asimismo, a teorías que trataban de las concepciones alternativas en sus varias interpretaciones, de los obstáculos epistemológicos, del modelo de los campos semánticos, de la propuesta metodológica de la asimilación solidaria, entre otras. A partir de ello, la investigadora señaló algunos aspectos que, según su entendimiento, se referían a las dificultades en el aprendizaje o a propuestas alternativas para cambiar el marco de fracaso que se presenta en la enseñanza del Cálculo. La investigadora también analizó los trabajos que trataban específicamente de la enseñanza del Cálculo. De un lado, algunos trabajos criticaban la enseñanza tradicional vigente, por otro lado, había los que valoraban las opiniones de los estudiantes y la necesidad de entender su perspectiva. Asimismo, había otros que proponían estrategias de enseñanza, como la modelación matemática y, además, existía los que trataban de establecer paralelos entre la práctica pedagógica y la práctica científica del profesor-investigador.

En lo que refiere a la temática del uso de la tecnología en la Educación Matemática, la autora afirmó que la bibliografía era larga en ejemplos que indicaban la necesidad de cambios en los contenidos matemáticos que se les enseñaba a los alumnos, en la dinámica del trabajo en el aula de clase, en los papeles que desempeñaban tanto los profesores como los estudiantes en esta dinámica. Conforme la autora, el ordenador, considerado como un instrumento didáctico, conduce a la reflexión en torno a nuevos valores y objetivos para la enseñanza de Matemáticas, de la misma manera que la ausencia de reflexión sobre su incorporación al ambiente educacional puede dificultar el proceso de construcción de conocimiento matemático.

En cuanto al Cálculo y tecnologías computacionales, Villarreal analizó diferentes estudios que se referían a cursos de Cálculo que utilizaban ordenadores, y a partir de estos trabajos surgió el proceso de visualización como una presencia significativa ligada al uso del ordenador. La autora citó en su trabajo en torno a 20 artículos, además, destacó que algunos autores enumeraban ventajas, otros se referían a dificultades, no obstante todos reconocían que la incorporación de tecnologías transformaba la realidad en el aula de clase, de modo que era necesario considerar aspectos que anteriormente eran poco o nunca considerados. Además, en vez del aprendizaje de técnicas, se hacen fuertemente presentes la investigación, la experimentación, la formulación de hipótesis, la comprensión conceptual y la combinación de perspectivas gráficas, numéricas y analíticas.

En su investigación, Villarreal optó por una metodología cualitativa, que estaba basada, principalmente, en la realización de experimentos de enseñanzas constructivas. La autora trabajó con parejas de estudiantes en un ambiente computacional. Tres parejas de estudiantes participaron en la investigación. Villarreal realizó cuatro encuentros, aproximadamente de una hora y media, con cada pareja. En el primer encuentro, dedicó un tiempo inicial a la familiarización con los comandos del programa que eligió para la realización de los experimentos: el *Derive*. En los experimentos, la investigadora propuso actividades que estaban relacionadas con el estudio de funciones y derivadas, tales como: trazar el gráfico de la derivada a partir del gráfico de la función, discutir la relación entre la monotonicidad de la función y el signo de su derivada, y entre los ceros de la derivada y los extremos de las funciones, trazar y relacionar el gráfico de la función con el gráfico de la derivada y con el gráfico de rectas tangentes a la función. Durante la realización de los experimentos, Villarreal intervenía solamente cuando era necesario estimular la experimentación o sugerir preguntas apropiadas; no daba respuestas rápidas a las preguntas, pero fomentaba actitudes de investigación en los estudiantes. A partir de esos experimentos, que se grabó en video, la autora seleccionó algunas partes relevantes que llamó "episodios" a medida que ofrecían posibles repuestas para la pregunta de investigación: ¿cómo caracterizar los procesos de pensamiento de los estudiantes al trabajar preguntas matemáticas relacionadas con el concepto de derivada en un ambiente computacional?, o que fueran interesantes debido a las estrategias que han sido desarrolladas por los estudiantes para realizar las actividades propuestas y/o a causa de las dudas que han sido suscitadas, o que evidenciaran situaciones típicas en un ambiente computacional. A partir de esos episodios, fue realizado el análisis de los datos.

Los relatos y análisis de los episodios evidenciaron que había conflicto entre el concepto de derivada de la función y la recta tangente al gráfico de la función, que el ordenador proporcionaba una imagen visual que no era natural para los estudiantes, que recurrían, a menudo, a lápiz y papel para resolver algunos problemas. Por lo tanto, los alumnos pasaron a pensar más en los conceptos y no se quedaron solamente repitiendo algorítmos. Villareal observó y destacó algunos cambios, en este ambiente computacional: el ordenador favorecía las representaciones múltiples a medida que ofrecía la oportunidad de pensar y resolver problemas de nuevas formas, propiciaba mayor comprensión de los conceptos del cálculo, ilustraba y reforzaba conceptos básicos; el ordenador ofrecía imágenes que, de otra forma, serían inaccesibles para los estudiantes y comunicaba nuevas ideas de forma visual y experimental.

Araújo et. al. (2005) relataron una experiencia de actividades desarrolladas en el aula involucrando el uso de planilla electrónica, con licenciados en Matemáticas de la Universidad do *Sagrado Coração-USC*/*Bauru*, y con estudiantes del tercer curso de la enseñanza secundaria. Los objetivos de esta experiencia fueron: 1) propiciarles a los futuros profesores de Matemáticas la vivencia y el análisis de acciones metodológicas, en las clases de Matemáticas, a través del uso del ordenador; 2) darles a los estudiantes de la enseñanza secundaria el trabajo con conceptos matemáticos, a través del uso de la tecnología de la información; 3) ofrecerles a los profesores de Matemáticas de la escuela pública, algunas oportunidades dirigidas a su formación continuada. Estos investigadores desarrollaron las actividades, durante 8 clases, con duración de 50 minutos cada una, en el laboratorio computacional del curso de licenciatura en Matemáticas de la *USC*, con estudiantes del tercer curso de una escuela de enseñanza secundaria. Los autores destacaron que esta experiencia fue muy significativa para los futuros profesores, pues éstos lograron vivenciar actitudes y procedimientos profesionales, adoptando en su práctica instrumentos que estimularon tanto la construcción de conocimiento como su retomada. De igual manera, la experiencia fue importante para los estudiantes de la enseñanza secundaria, puesto que la agilidad del proceso, generada por el ordenador, favoreció la exploración visual de los conceptos, y eso posibilitó la comparación entre los diferentes resultados. Además, se pudo conocer, manipular y utilizar nuevas tecnologías en la exploración de conceptos matemáticos y se consiguió aprender una otra forma de organización de datos en un ambiente más atractivo. Los autores también señalaron que la facilidad de adaptación a la metodología utilizada reveló que los estudiantes poseían flexibilidad para trabajar con nuevas tecnologías y se quedaban bastante motivados frente a las nuevas descubiertas.

Palis (2000) a fin de explorar y analizar las potencialidades de una planilla, diseñó un conjunto de actividades para ser realizadas con el apoyo de esa herramienta computacional. El autor pretendía con estas actividades: trabajar con secuencias definidas recursivamente y su descripción en forma cerrada; explorar situaciones-problema que podían ser modeladas con secuencias recurrentes e investigar diferentes comportamientos de esas secuencias cuando se realizaban cambios en sus condiciones iniciales y parámetros. Además, Palis tenía el objetivo de crear una oportunidad para una discusión sobre los diferentes papeles de variables y parámetros y sobre la concepción característica de un razonamiento inductivo de que ejemplos son suficientes para comprobar un enunciado matemático. El autor les propuso a los profesores estas actividades en cursos de postgrado y en talleres, y para licenciados en la Universidad *PUC-RIO*. Palis señaló, en su conclusión, que tanto licenciados como los profesores que ya estaban impartiendo clase, necesitaban estar preparados para usar herramientas computacionales que propiciaran ambientes favorables a trabajos exploratorios con conceptos y procesos matemáticos, como una forma de mejorar la enseñanza/aprendizaje.

Otro estudio que encontramos sobre el tema en las revistas consultadas fue el de Meyer y Junior (2002). Estos autores presentaron un histórico de trabajos y análisis de experiencias relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo a través del uso de ordenadores en diversos ambientes. Además, señalaron que la preocupación por introducir el ordenador en las asignaturas de contenido de Matemáticas en la universidad no era nueva en Brasil, varias iniciativas separadas habían ocurrido, pero no se las registraron. Meyer y Junior destacaron que las primeras referencias a los programas de derivación e integración simbólica, destinados para la investigación en Matemáticas Aplicada, comenzaron a aparecer en 1998, en el XI Congreso Nacional de Matemáticas Aplicada y Computacional (CNMAC), que tuvo lugar en Ouro Preto, pero no había una preocupación explícita por las implicaciones didácticas, y tampoco por la enseñanza. A continuación, presentamos una relación de varios encuentros, a los que los autores aludieron: V Encuentro Nacional de Educación Matemática- ENEM (1995); XX CNMAC (1997); la informática en la Enseñanza de las Matemáticas (1997); VI ENEM (1998); XXI CNMAC (1998); CNMAC (1999);

CNMAC (2001). Cabe señalar que estos encuentros se realizaron, a nivel nacional, y, en éstos, se relataron trabajos sobre la enseñanza de las Matemáticas más especialmente del Cálculo con el uso de recursos computacionales. Los autores destacaron la formación de algunos grupos dentro de las universidades que abordan el uso del ordenador en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Cálculo. Algunos grupos tienen interés en profundizar los estudios sobre *softwares* aplicativos existentes para la investigación y enseñanza de las Matemáticas; otros tienen su interés centrado en la producción y valoración de *softwares* específicos para la enseñanza del Cálculo.

Por último, en esta sección, sintetizamos el trabajo de Roque (2000) que presentó una breve discusión sobre la enseñanza de las matemáticas ante las nuevas tecnologías computacionales. Este autor señaló que a pesar de existir recursos computacionales en potencial y de ser su acceso cada vez más fácil, las instituciones de enseñanza superior y las escuelas de enseñanza secundaria no aprovechan esta herramienta de enseñanza. El hecho de no aprovecharse los recursos computacionales quizás esté relacionado con el costo para la creación de laboratorios, la falta de conocimiento por parte de los profesores sobre la capacidad de tales recursos y/o a una cierta resistencia en utilizarlos como herramienta de apoyo a la enseñanza. El autor llamó la atención para los Sistemas de Computación Algebraica como una importante herramienta que debe ser introducida y extensivamente explorada para la mejoraría de la calidad de enseñanza de las Matemáticas, en los niveles secundario y superior. Al finalizar el trabajo, Roque afirmó que no existía otro camino a ser recorrido si no al de adecuarnos a la nueva realidad de la ciencia moderna y a las exigencias impuestas por las innovaciones del mercado de trabajo, pues las tecnologías son una realidad y deberían permanecer, y, por lo tanto, debíamos buscar lo más rápido posible nuestros propios caminos para ofrecer una mejor y más moderna formación para nuestros estudiantes.

2.2 Enseñanza y Aprendizaje de Ecuaciones Diferenciales

En esta sección, presentamos artículos que están relacionados específicamente con la enseñanza y el aprendizaje del contenido de ecuaciones diferenciales, foco de nuestro interés en este trabajo. También sintetizamos dos trabajos que están relacionados con las concepciones de los profesores que enseñan ecuaciones diferenciales.

La revista Educación Matemática contiene un artículo específico referente a las ecuaciones diferenciales, titulado "Modelación matemática y aprendizaje significativo: una propuesta para el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias" de Borssoi y Almeida (2004). Estas autoras realizaron un trabajo de investigación fundamentado en los marcos teóricos de la modelación matemática, desde la perspectiva de la Educación Matemática y de la Teoría de Aprendizaje Significativo de Ausubel, abordando el contenido de ecuaciones diferenciales ordinarias. Para ello, organizaron una propuesta de enseñanza y aprendizaje con la finalidad de ser la facilitadora del aprendizaje significativo, la desarrollaron en un grupo regular de treinta y ocho alumnos del curso de Licenciatura en Química de la Universidad de *Londrina*, en la asignatura de Cálculo y Geometría Analítica II. La propuesta estaba constituida de cuatro actividades de modelación que fueron desarrolladas, durante las clases. Las autoras desarrollaron la primera actividad con el objetivo de introducir el concepto de ecuaciones diferenciales ordinarias, por medio de un problema relacionado con el área de Química, y las otras tres las planificaron para permear las clases, tanto para abordar algún concepto, como para aplicar el asunto estudiado. Durante el desarrollo de la propuesta, Borssoi y Almeida dedicaron algunas clases a las actividades complementarias de sistematización de los contenidos, en que estos investigadores trabajaron los conceptos y métodos de solución de las ecuaciones diferenciales fuera del ambiente de modelación, en clase convencional, y algunas veces en el laboratorio de informática, utilizando, como instrumentos de ayuda para algunas actividades, los programas Excel y Maple, que son empleados para trazar curvas de tendencias, ajustar curvas a los datos suministrados, calcular, trazar gráficos y simular resultados.

Para la recolección de información, las autoras utilizaron fichas de levantamiento, entrevistas, mapas conceptuales, tareas realizadas (resolución de problemas diversos, trabajo de modelación en grupos, test escrita) y registro de observaciones de las clases. Además, analizaron varios factores que influencian el aprendizaje de los estudiantes: participación en las actividades; la elaboración de estrategias propias, el aprendizaje extra del contenido, la comprensión conceptual, la construcción y manipulación de representaciones múltiples y la aplicación de conocimiento a situaciones nuevas. Asimismo, las investigadoras destacaron ventajas, desventajas y dificultades de la propuesta de trabajo presentada, desde la visión de los alumnos. La conclusión más significativa de las autoras fue la percepción de indicios de que la modelación matemática, como estrategia de enseñanza, era una facilitadora del aprendizaje significativo, pues las actividades de enseñanza en el ambiente de modelación permitían emerger una gran cantidad de conceptos matemáticos y extra-matemáticos, que proporcionaban interacciones favorables al aprendizaje.

En la Revista Enseñanza de las Ciencias encontramos dos artículos que tratan del contenido de ecuaciones diferenciales. Estos artículos no están dirigidos a las dificultades de aprendizaje, sino que se ocupan de la concepción de los profesores: "Concepciones de los profesores sobre la enseñanza de las ecuaciones diferenciales a estudiantes de Química y Biología. Estudio de casos" (MORENO y AZCÁRATE, 1997) y "Concepciones y creencias de los profesores universitarios de Matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales" (MORENO y AZCÁRATE, 2003).

En el primer artículo, Moreno y Azcárate (1997) buscaron investigar las concepciones de los profesores de Matemáticas sobre la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, y detectar dificultades relativas a "¿ qué y cómo enseñar este contenido?". Los autores realizaron un estudio cualitativo en que incluyeron cuatro profesores de Matemáticas de diferentes universidades de España, utilizando tres instrumentos de colecta de datos: mapas conceptuales, que fueron elaborados por los profesores, cuestionario con preguntas abiertas y cerradas y una entrevista grabada. A partir de los mapas conceptuales, los investigadores buscaron obtener informaciones de los modelos cognitivos de los profesores sobre la enseñanza de ecuaciones diferenciales y captar el significado y la estructura de conocimientos que el profesor buscaba transmitir a los estudiantes. Moreno y Azcárate, a partir del cuestionario, pretendían conocer el punto de vista de los profesores sobre aspectos metodológicos, conceptuales y procedimentales de la materia en sí. Realizaron la entrevista con el objetivo de aclarar aspectos de los mapas conceptuales y de los cuestionarios que no estaban suficientemente claros para evitar una interpretación inadecuada de los datos recogidos. Conjuntamente con estos instrumentos Moreno y Azcárate analizaron los programas de la asignatura, los materiales de clase, los enunciados de examen y los libros de texto, con la intención de buscar aclarar relaciones entre lo que cada profesor decía qué hacía y cómo concebía la asignatura y qué en la práctica evidenciaban sus decisiones en relación al material, ejercicios, etc.

Los autores señalaron, en las conclusiones, la existencia de tres estilos diferentes: el primero mantenía un tratamiento más estructural de las ecuaciones diferenciales y de las matemáticas (estilo tradicional); el segundo, que en otro extremo, proponía una planificación metodológica muy próxima a los intereses de las ciencias experimentales, consideraba las ecuaciones diferenciales como un instrumento para resolver problemas químicos o biológicos (estilo avanzado). Entre estos dos estilos existe lo que denominan transitorio, en que el profesor entra en conflicto, se pregunta cómo es su acción docente y cómo podría serlo. Los estilos tradicional y transitorio centran su enseñanza en el aspecto del proceso, en las técnicas de resolución de las ecuaciones diferenciales y los estudiantes pueden convertirse en habilidosos solucionadores de ecuaciones diferenciales, pero pueden desarrollar de forma incompleta el concepto de ecuación diferencial. Estos estudiantes probablemente tendrían una flexibilidad de raciocino limitada, construirían esquemas conceptuales muy pobres y serían incapaces de generar una gama variada de representaciones mentales asociadas al concepto. Eso hace que realicen rutinariamente las secuencias de actividades y explica, en parte, el fracaso de los estudiantes en las clases de matemáticas. Por otro lado, el estilo avanzado, parte de la planificación de las ecuaciones diferenciales como concepto, considerando que son “objetos matemáticos” e “instrumentos fundamentales” para conducir formalmente los modelos determinísticos continuos. Los estudiantes manejan las ecuaciones diferenciales asociadas a modelos, las relacionan con la tasa de variación, enriquecen sus sistemas de representación y producen una red de esquemas conceptuales, cada vez más complejos, asociados a la noción de ecuación diferencial. La flexibilidad de razonamiento sería potencializada a través de la manipulación simultánea de representaciones gráficas, numéricas y simbólicas. Desde el punto de vista didáctico, el estilo avanzado es un modelo de enseñanza que está basado en la búsqueda de situaciones didácticas a través de modelos biológicos. El profesor intenta trabajar una propuesta curricular “al servicio del alumno” y con una línea metodológica que busca motivarlos.

En el segundo artículo, Moreno y Azcárate (2003) presentaron una reflexión sobre la enseñanza de las ecuaciones diferenciales en facultades de ciencias experimentales y un estudio de las concepciones y creencias de profesores universitarios de Matemáticas sobre las ecuaciones diferenciales y su enseñanza y aprendizaje. Los autores señalaron que los objetivos del estudio fueron: determinar las características más relevantes de la enseñanza actual de las ecuaciones diferenciales; explicar la persistencia de métodos de enseñanza tradicionales, que potencializan el enfoque algebraico sobre el gráfico y el numérico, y favorecen el carácter mecánico e instrumental; caracterizar a los profesores universitarios de Matemáticas en función de sus creencias sobre la enseñanza y el aprendizaje, y sus concepciones sobre las matemáticas y en particular de la materia que enseñan; determinar el nivel de coherencia del conjunto de creencias y concepciones de los profesores y la influencia sobre las decisiones que determinan la práctica docente de cada profesor y, todavía, valorar la consistencia y el grado de permeabilidad de las creencias y concepciones de cada profesor en cuanto a la posibilidad de ser modificadas en función de mejorar la enseñanza de las ecuaciones diferenciales.

Para colectar la información, los investigadores utilizaron cuestionario, entrevista grabada, programas oficiales, listas de ejercicios y problemas propuestos, referencias bibliográficas recomendadas a los estudiantes en algunos casos, cantidad de apuntes preparados por los profesores para el acompañamiento de la asignatura. Los participantes del estudio eran seis profesores universitarios, todos matemáticos, especialistas en matemáticas aplicada. Los autores presentaron un cuestionario a los profesores que estaba compuesto por cuatro problemas de ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones, buscando articular los tres enfoques, a saber: gráfico, algebraico y numérico. Con el objetivo de que el profesor reflexionara sobre aspectos propios de la materia de su enseñanza y aprendizaje, juntamente con las situaciones-problema, los autores propusieron preguntas para reflexión sobre las dificultades de los estudiantes y las especificidades de los contenidos enseñados, la actitud de los estudiantes, etc.

Los autores destacaron algunas creencias de los profesores: los estudiantes aprenden las ecuaciones diferenciales por imitación y memorización de situaciones y por esquemas de solución vistos en el aula; los estudiantes son incapaces de pensar, crear y razonar por sí mismos; las definiciones son algo mecánico que es preciso aprender de memoria, sin la necesidad de comprensión; la utilización de ordenadores de forma sistemática nos obligaría a actualizar la forma de enseñar las ecuaciones diferenciales y dar más importancia a los métodos gráficos y numéricos; la formación de los profesores como matemáticos es insuficiente en lo que corresponde a aplicaciones a otros campos de las ciencias experimentales; considerando que las técnicas y los modelos matemáticos son dos aspectos difíciles de reconciliar, los profesores finalmente optan por uno; es más fácil aprender a resolver una ecuación diferencial que reconocer un modelo matemático, de forma que los profesores solamente optan por el camino más fácil.

Algunas de las conclusiones de los autores fueron:

- La metodología de enseñanza dominante en el ámbito universitario de este estudio es el aula magistral en que el profesor de Matemáticas ocupa un papel central y relevante; ninguno de los profesores del estudio siente necesidad de utilizar otro tipo de metodología de enseñanza.
- La mayoría de los profesores están convencidos de que los contenidos de ecuaciones diferenciales que son abordados actualmente son los que realmente deberían ser tratados, teniendo en cuenta las características de los estudiantes con que trabajan.
- Las concepciones de las matemáticas de la mayoría de los profesores todavía se aproximan a las ideas formalistas; en líneas generales la práctica docente es esencialmente instrumentalista y tiene especial énfasis en la enseñanza de métodos de solución de tipos de ecuaciones diferenciales integrables y en la solución de determinados problemas-patrón de modelación.
- Los profesores creen que una buena enseñanza esta exclusivamente relacionada con el nivel de conocimientos matemáticos del profesor.
- La persistencia de los métodos de enseñanza tradicional frente a alternativas más innovadoras de enseñanza se debe a varios motivos: 1) fuerte creencia, en general, del pobre nivel de competencia de los estudiantes, de la escasa capacidad de raciocinio matemático y del deficiente conocimiento matemático, que los hace considerar como impensable cualquier enfoque que coloque el estudiante en situación de razonar más allá de los aspectos básicos que acaba por memorizar y mecanizar; 2) la concepción de las Matemáticas, y en particular de las ecuaciones

diferenciales, es muy formalista, valora demasiadamente la manipulación simbólica frente al tratamiento numérico y gráfico de las ecuaciones diferenciables, como principio incuestionable del aprendizaje significativo; 3) miedo de pérdida de los contenidos específicos que algunos profesores consideran "las matemáticas de la verdad"; 4) conciencia de estar obligado a dedicar tiempo a la preparación de contenido que actualmente conocen y dominan; 5) sencillez de la enseñanza de técnicas frente a la dificultad para enseñar la solución de problemas.

En conclusión, los autores argumentaron que en términos generales se pudo comprobar que aunque la enseñanza de la modelación es un tema interesante, pero difícil, las razones que más se tienen en cuenta para dejarla de lado en el currículo son la comodidad de los profesores a la hora de enseñar y la despreocupación por la docencia. También destacaron la ausencia de objetivos claros y explícitos en los programas específicos de la materia, eso lleva a suponer una dificultad, por parte de los profesores, de saber exactamente la meta alcanzable y, como consecuencia, acaban por enseñar contenidos que tradicionalmente están en los programas, pero que hoy en día pierden su sentido en función de los avances tecnológicos. Esto lleva a pensar en la necesidad de un debate y una reflexión sobre la utilidad, interés e importancia de los contenidos actuales para un aprendizaje y una enseñanza mediada por las nuevas tecnologías y condicionada por las demandas sociales. Los profesores no consideran diferentes estilos de aprendizaje, porque el reconocimiento de éstos los obligaría a reorganizar su forma de enseñanza que puede atender las diferentes necesidades de aprendizaje en distintos niveles de los estudiantes. Por lo general, los profesores prefieren atribuir las responsabilidades sobre el fracaso de enseñanza a los propios estudiantes, a sus actitudes y a su escasa formación matemática.

Los dos últimos estudios presentados abordan preguntas: ¿Cómo los profesores enseñan su contenido de ecuaciones diferenciales ?, y explican, de cierta forma, ¿Por qué lo hacen de forma tan tradicional?. A continuación, sintetizamos trabajos que se refieren al proceso de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los resultados muestran la importancia de que los profesores modifiquen sus métodos de enseñanza, considerando principalmente la posibilidad de aprovechar los avances tecnológicos.

Encontramos dos trabajos de Samer Habre que abordan la enseñanza y el aprendizaje de ecuaciones diferenciales: “Explorando estrategias de los estudiantes para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias en un contexto reformado” (HABRE, 2000) e “Investigando la aprobación de los estudiantes en un enfoque geométrico para las ecuaciones diferenciales y sus soluciones (HABRE, 2003).

Habre (2000) hizo una apreciación inicial sobre los cursos introductorios de EDOs. El autor afirmó que éstos consistían, principalmente, de una secuencia de técnicas a fin de encontrar fórmulas para las soluciones, siendo muchos ejercicios adaptados con la intención de que las soluciones pudieran ser encontradas con alguna de las formas de solución enseñadas y para que la variable dependiente pudiera ser expresada explícita o implícitamente en términos de variable independiente. Sin embargo, como menciona el autor, cuando un problema físico era modelado por una ecuación diferencial, su solución no puedía, en la mayoría de las veces, ser obtenida analíticamente en términos de la variable independiente y los alumnos finalizaban los cursos clásicos de EDO con poca comprensión sobre lo que representaban las soluciones de ecuaciones diferenciales en una situación aplicada. Según el autor, muchos educadores creían que en un curso de EDO, para ser útil, necesitaba tener un enfoque cualitativo del asunto. El autor señaló que este tipo de perspectiva no había sido usado en el pasado debido a las dificultades asociadas a su representación visual, pero que el avance de la computación gráfica había proporcionado al profesor como al alumno nuevas oportunidades.

En su apreciación inicial, el autor mencionó que el currículo en EDOs sufrió algunos cambios importantes a favor del enfoque de aspectos más visuales y numéricos en el curso. Habre citó algunos libros en que ya puede ser percibido el intento de cambiar el enfoque de la enseñanza de las EDs, destacando que la característica común de estos libros era el enfoque en el empleo de ideas geométricas para facilitar la comprensión y el análisis de EDs y sus soluciones. Además, varios programas de ordenador habían sido desarrollados para tenerlos como suplemento para la enseñanza, como herramienta de investigación. El autor destacó que, no obstante, las investigaciones en relación con sus efectos de esa reforma sobre el entendimiento de los estudiantes eran mínimas.

Habre en su trabajo investigó si los estudiantes consideraban el campo de direcciones como un medio para resolver EDOs de primer orden y estudiaba el éxito de los alumnos en la lectura de informaciones en estos dominios. Este autor también investigó las habilidades de los estudiantes en convertir informaciones simbólicas en gráficas y viceversa.

Los estudiantes investigados eran de un grupo del tercer semestre de un curso de cuatro créditos ofrecido en una universidad del noreste de los Estados Unidos. El curso abarcaba cálculo de varias variables en la primera mitad del semestre y ecuaciones diferenciales en la segunda mitad. Inicialmente, en el grupo había 30 alumnos, pero solamente 26 permanecieron hasta el final del semestre, de los cuales nueve eran del área de Biología, tres de la Economía, tres de la Biometría y la Estadística, dos de Química, uno de Matemáticas, seis indecisos y los demás de Geología, Meteorología, Bioquímica e Historia. El grupo se reunía dos veces a la semana, en sesiones de 50 minutos, siendo una de las sesiones en el laboratorio de informática. Ningún libro específico fue utilizado, pero a los estudiantes se les dio materiales elaborados por el instructor. Las clases enfatizaron el aspecto geométrico, representado gráficamente, con poco análisis cuantitativo, siendo utilizado en el ordenador el *software Interactive Differential Equations* (IDE), constituido de una colección de ilustraciones dinámicamente interactivas de conceptos claves de EDs.

Los datos para el estudio fueron tomados de observaciones de clase, observaciones de sesiones de laboratorio, fotocopias de los exámenes de los estudiantes, fotocopias de atribuciones en el IDE, cuestionarios aplicados durante el semestre, y la transcripción de la entrevista semi-estructurada con nueve alumnos selecionados a partir de criterios preestablecidos por el autor. Los resultados presentados están fuertemente basados en las entrevistas, con duración de 40 a 45 minutos.

La entrevista fue realizada durante la última semana del semestre, y partía de dos interrogantes básicos que envolvían interpretación del campo de direcciones. Al principio de la entrevista, se hacía la siguiente pregunta: ¿Qué le viene a mente cuando a usted se le solicita que resuelva una ecuación diferencial? La respuesta inicial de todos los entrevistados fue verificar si la EDO es separable, lineal o exacta. Dicho de otro modo, todos los alumnos pensaron primero en una solución analítica.

Cuando las EDs les fueron presentadas para ser resueltas, todos optaron por una solución analítica. Los entrevistados consiguieron clasificarlas, y todos intentaron resolverlas, usando las técnicas para ecuaciones separables o lineales, sin embargo no recordaban las técnicas de integración. Entonces, después de los cuestionamientos del entrevistador, la mayoría de los entrevistados optó por resolver el problema geométricamente, y a partir de esa representación fueron hechos cuestionamientos sobre la interpretación, envolviendo el problema de valor inicial, la clasificación de las soluciones, su comportamiento a largo plazo, así como la existencia soluciones de equilibrio. Durante toda la entrevista, fue solicitado a los alumnos para pensar en voz alta y decir todo lo que se les venía a la mente mientras estaban explorando los problemas. Los aprendices también fueron informados de la existencia de un ordenador disponible para el proceso de solución en caso de que alguno tuviera interés.

Aunque el instructor haya orientado el curso en un sentido cualitativo, los estudiantes asociaron la solución de una ecuación diferencial a un proceso puramente algebraico. En lo que se refiere al enfoque geométrico, solamente dos estudiantes demostraron aprobación. Sorprendentemente, ninguno de los entrevistados consiguió avanzar en la habilidad de ir y volver entre el aspecto visual y algebraico de las EDOs.

Según Habre, el rechazo por el enfoque geométrico reflejó la creencia en el poder de una respuesta simbólica contra una gráfica, pues a pesar de existir varios aspectos que caracterizan una función, como lo simbólico, lo gráfico, así como lo numérico, en general, sólo lo simbólico y lo gráfico son enseñados en las clases tradicionales, con muy poco énfasis en lo gráfico. Mucho tiempo y esfuerzo son usados en la construcción de competencias de los alumnos en manipular el lenguaje simbólico formal. Como consecuencia, los estudiantes estaban más inclinados a creer que la representación de una función es más importante y más útil que la gráfica (y numérica).

El autor señaló que integrar recursos tecnológicos al proceso de enseñanza no siempre era un éxito completo, pues los programas como Mathematica y Maple casi siempre creaban barrera de la necesidad de aprender primero la sintaxis. En vez de concentrarse en las matemáticas, los estudiantes utilizaban mucho tiempo intentando aprender el *software*. Esto no fue un problema para los individuos de este estudio, pues el IDEs no exigían sintaxis especial. Cuando se les solicitó a los estudiantes que evaluaran el IDE, el 72% lo evaluaron entre bueno y excelente. Los efectos positivos de los laboratorios fueron claros para el éxito de la mayoría de los entrevistados en la lectura de los campos de direcciones y para clasificar soluciones. La capacidad de interpretar información gráfica también apareció y quedó bien evidenciada cuando todos los entrevistados fueron capaces de dibujar e interpretar las trayectorias. Tal vez haya sido el aspecto dinámico e interactivo del IDE que condujo a estos resultados positivos.

Lo interesante de esta investigación es que a pesar del énfasis en el curso ser en el método de solución cualitativo (gráfica), la mayoría de los estudiantes entrevistados al final del curso todavía prefería aproximaciones algebraicas en vez de aproximaciones gráficas, posiblemente reflejo de experiencias matemáticas anteriores, en que el enfoque era el algebraico. Esta investigación también muestra que los estudiantes encontraron dificultades para pensar simultáneamente de modos diferentes (algebraico y gráfico). Eso también puede ayudar a explicar por qué normalmente los estudiantes no usan varios enfoques para abordar los problemas. El autor destacó, en su conclusión, que los estudiantes necesitaban más tiempo para asimilar la idea de pensar visualmente.

En otro estudio, Habre (2003) indicó que los avances en el área de la computación gráfica en la década pasada, tenía como contribución grandes cambios en el modo de como se enseñaba las matemáticas a nivel universitario. A pesar del Cálculo haber sido el mayor beneficiado por este avance, el tópico de ecuaciones diferenciales había sufrido cambios fundamentales en su currículo a favor de aspectos visuales y gráficos en el curso.

El autor investigó la aceptación de los estudiantes para resolver EDs geométricamente. El grupo escogido fue del tercer semestre de la universidad Americana Libanesa de Beirut de un curso introductorio de EDOs, dirigido a estudiantes de ingeniería. El grupo estaba compuesto por 36 estudiantes, de los cuales todos, excepto dos, eran estudiantes de Ingeniería. El grupo se encontraba tres veces a la semana, en sesiones de 50 minutos. El libro texto enfatizaba el enfoque geométrico y el análisis de los resultados. Además, fueron usados regularmente, dos *softwares* de ordenador: el *IDE* y el *ODE Architect*.

La recolección de los datos ocurrió desde el comienzo hasta el final del semestre. Por ejemplo, fueron hechas copias de actividades del *IDE* que exigían capacidad de visualización y copia de exámenes en papel. En el primer examen, la última pregunta incluía cuestionamientos teóricos sobre definición de ED, soluciones, representación geométrica. Un cuestionario fue aplicado al final de semestre para evaluar el trabajo del profesor, el libro usado, los *softwares* usados y también para obtener informaciones sobre formas de resolución de EDs, pero como solamente siete estudiantes devolvieron el cuestionario, sus resultados no son muy fiables.

Durante la segunda mitad del semestre, fue realizada una entrevista con 6 estudiantes que voluntariamente quisieron participar en este estudio. La entrevista fue semi-estructurada, pero cuando era necesario, se incluían preguntas adicionales. Por lo tanto, a todos los entrevistados se hizo las siguientes preguntas:

"*¿Con sus propias palabras, defina una ecuación diferencial?*
¿En qué constituye la solución de una ED?
¿Si yo le pido a usted que resuelva una ED, qué es lo primero que se le viene a la mente?
¿La solución geométrica, por sí misma es satisfactoria?
¿Piensa usted que aprendió EDOs por completo, o piensa que alguna cosa todavía está faltando?
¿Rreconoce usted el lado geométrico de las matemáticas?"

Además, en el examen final, se les solicitó a todos los estudiantes que expresaran su opinión sobre el enfoque geométrico en el cual el material les fue presentado.

Los 36 estudiantes respondieron la última pregunta del primer examen. El autor destacó como resultados que, a la pregunta que concierne a la definición de ED, el 67% de los estudiantes presentaron la definición puramente analítica. En la pregunta cuando se quería saber cómo podía ser la solución de una ED solamente el 17% de los estudiantes pensaron en el gráfico como solución. Ya en la pregunta que se pretendía saber cómo resolver una ED, solamente el 25% eligió el enfoque geométrico.

En la entrevista con los seis estudiantes, que fueron clasificados como estudiantes con desempeño mediano o excelentes, para definir una ED, 3 usaron una definición puramente analítica y 3 la definieron como medida de la tasa de variación. El autor entonces concluyó que, a pesar de los alumnos frecuentar un curso con un enfoque diferenciado, con el enfoque geométrico, muchos alumnos siguían viendo una EDO como una ecuación abstracta que involucra símbolos y no como una representación simbólica de un fenómeno del mundo real.

Cuando se preguntó sobre en qué constituía la solución de una EDO, 4 estudiantes la definieron como una función expresada algebraicamente que satishacía la ecuación dada. En lo que se refiere al enfoque usado para resolver una ED, nuevamente 4 estudiantes eligieron un enfoque analítico. El autor afirmó que esto se debía al hecho de que tradicionalmente a los estudiantes se les enseñaba a resolver EDOs analíticamente, ello hace con que, a pesar de los estudiantes presentar dificultades para usar las técnicas analíticas, les atribuyen más valor a ellas y, consecuentemente rechazan un enfoque geométrico. Gran parte de las matemáticas se enseña simbólicamente, desde la escuela hasta la universidad, esto genera una creencia en los estudiantes que el enfoque gráfico no es tan preciso como el simbólico.

A los entrevistados también se les preguntó si aceptaban gráficos como solución de una EDO. Tres estudiantes aprobaron la solución geométrica, y los otros tres se rehusaron a aceptarla. Los autores afirmaron que la mayoría de los estudiantes apreciaban esbozar soluciones de problemas de valor inicial desde que les permitiera analizar el significado de la solución, especialmente cuando era modelada una situación real dada. En cuanto a la precisión de esbozos, parece que este punto causó desconfort a los estudiantes. El hecho de que se esbozó la solución a partir del campo de direcciones y no como el delineamiento de una función específica (la solución analítica de un problema de valor inicial) les causó duda a algunos estudiantes en el proceso de solución. Tradicionalmente, en las matemáticas, se da la función analítica y, entonces, se solicita la representación geométrica. El autor concluyó que, tal vez algunos estudiantes no aceptaran la solución geométrica porque eran incapaces de asociarla a una representación analítica.

El autor afirmó que no había quedado sorprendido al percibir la resistencia por el nuevo enfoque, principalmente en el estadio inicial del curso. En el examen final del semestre, 30 estudiantes respondieron la pregunta en que tenían que expresar su opinión sobre el uso del enfoque geométrico en el material del curso les había sido presentado, el 90% de las respuestas fueron positivas. El autor relató que los resultados adicionales de la entrevista mostraron que todos los entrevistados comenzaron a apreciar el componente geométrico de las matemáticas, generalmente. Además, los entrevistados desearon que se enseñaran otros cursos de matemáticas con este componente adicional.

Los resultados mostraron que inicialmente los estudiantes presentaban resistencia en aceptar el enfoque geométrico, pero a lo largo del curso, muchos estudiantes lo aceptaron, apreciaron su utilidad e incluso desearon que se ofrecieran otros cursos de matemáticas de forma similar. El autor también afirmó que los estudiantes señalaron la eficacia de los *software* usados, pues éstos ayudaron en el desarrollo de la capacidad visual y en la comprensión de EDs gráficamente.

En relación a las dificultades de aprendizaje de EDs y la comprensión de ideas centrales de las matemáticas, por parte de los alumnos, Rasmussen (2001) realizó un estudio que tuvo como objetivo buscar nuevos rumbos para orientar a los alumnos a pensar de un modo más interpretativo y reforzar sus capacidades de análisis gráfico y numérico de las EDs. Según este autor, en la década pasada, se realizaron varios estudios para mejorar el currículo del Cálculo, no obstante, poco se investigó en relación a las EDs. Desde su visión, con la tecnología disponible actualmente, ya no tiene sentido dar tanta atención a las soluciones analíticas, ya que las técnicas para obtenerlas son muy limitadas y no sirven para la mayoría de las EDs, mientras que los métodos numéricos, fácilmente implementados con ayuda de las tecnologías, en muchos casos, proporcionan soluciones confiables aproximadas. A partir de métodos gráficos pueden obtenerse muchas informaciones importantes relacionadas con la solución de las EDs en estudio.

El estudio se inserta en una línea tradicional de investigación que pretende comprender la concepción de los estudiantes sobre determinadas ideas matemáticas. El panorama que el autor relató ofrece una manera de organizar y ampliar la comprensión sobre la manera de pensar en EDs de estudiantes universitarios en los Estados Unidos, resultado de la investigación en profundidad de seis estudiantes basada en una serie de tareas, entrevistas individuales y observaciones de clase.

Los participantes eran estudiantes de un curso introductorio de EDs para científicos e ingenieros en una universidad del Medio-Atlántico que voluntariamente participaron en cuatro entrevistas individuales con base en tareas. Estos estudiantes formaban parte de un grupo de 16 alumnos que se reunían tres veces a la semana en periodos de 50 minutos por clase, en un aula sin recursos computacionales. En el curso se utilizó dos libros didácticos, *Elementary Differential Equations* por Boyce y Diprima, y texto suplementar del computador, *Differential Equations with Mathematica* por Coombes et. al. (1995). Fuera de clase, los estudiantes realizaban cuatro conjuntos de problema con el *Mathematica* (versión 2.2), concebidos para profundizar la comprensión de las ideas centrales de matemáticas a partir de un enfoque gráfico y numérico para el análisis de EDs.

La recolección de datos se dio a través de la transcripción de una entrevista individual, realizada con cada estudiante y basada en cuatro tareas; entrevistas con el instructor del curso y otros profesores del departamento de matemáticas; copias de test, exámenes, y trabajos de ordenador de los estudiantes; y un cuestionario al final del semestre sobre la utilización del *Mathematica*. Todas las clases fueron filmadas. También se realizó diarios de campo detallados sobre las cuestiones que los estudiantes levantaron, así como desarrollo instruccional de conceptos y métodos, referencias a la tecnología, y la utilización de representaciones gráficas. Cada una de las cuatro entrevistas, con duración de 60 a 90 minutos, estaba compuesta de tres a cinco problemas, que fueron analizados por dos matemáticos a fin de evaluar la validez y la pertinencia. Como el objetivo de la entrevista era explorar el entendimiento y las dificultades de los estudiantes, el autor utilizó una entrevista semi-estructurada, en la que se invitó a los estudiantes a pensar en voz alta sobre cómo resolvían los problemas. Además, adaptó las tareas de la entrevista de libros didácticos, preguntas de examen de años anteriores o elaboradas por el autor.

Los objetivos básicos en el suplemento matemático ofrecido fueron: (i) llevar a los estudiantes a pensar de un modo más interpretativo y (ii) reforzar en los estudiantes la habilidad para hacer análisis gráfico y numérico de las EDs. El tema central reiterado por el instructor, durante todo el curso, fue la importancia de buscar usar equilibradamente, métodos analíticos, gráficos y numéricos para análisis de EDs, en vez de concentrarse exclusivamente en soluciones analíticas.

El autor utilizó como base el acompañamiento de las clases del instructor con sus estudiantes, seleccionó para el análisis, con el objetivo de mejorar el aprendizaje de los estudiantes, dos temas: el dilema de la función como solución y las imágenes e intuiciones de los estudiantes. Dentro del tema función como solución abordó tres facetas: interpretación de soluciones, interpretación del equilibrio de soluciones y el enfoque en cantidades.

El autor destacó que representaciones gráficas no necesariamente significan la misma idea matemática para los estudiantes como para la comunidad matemática. Los estudiantes piensan en función cuando distinguen una ecuación o regla y no con un gráfico. El investigador afirmó que el cambio requerido en la conceptualización de soluciones como números (que es el caso cuando se resuelve ecuaciones algebraicas) para la conceptualización de soluciones como funciones (que es el caso cuando se resuelve EDOs) era análogo a un cambio de paradigma, que no era trivial a los estudiantes. Rassmussen también notó que algunas de las dificultades de los estudiantes con aproximaciones gráficas provenían del pensamiento de una cantidad inapropiada y/o de la pérdida de centro de interés de la cantidad pretendida.

En otro estudio, Rasmussen junto con Stephan (2002) hizo un análisis de las prácticas de las clases matemáticas que incluía el contenido de EDs de primer orden. Estas clases fueron desarrolladas a lo largo de la primera mitad de un semestre. Los autores afirmaron que, en los últimos años, varias investigaciones fueron realizadas sobre el contexto social de aprendizaje, en que se destacó que el aprendizaje era inherente a procesos individuales y sociales. Estos investigadores consideraron que estos análisis son importantes porque los resultados podían llevar a cambios en el desarrollo instruccional, es decir, en las tareas, en el discurso y en las herramientas involucradas en el aprendizaje de las matemáticas, por consiguiente, llaman la atención que pocos análisis teóricos en este sentido fueron realizados y menos todavía en el área de las matemáticas.

La investigación está centrada en apoyar a los estudiantes en el proceso de creación de un conjunto estructurado de funciones-solución en vez de usar un gráfico en particular o métodos numéricos, con el objetivo de ayudarlos a comprender que soluciones de EDs son conjuntos de funciones. La metodología utilizada se basó en el hecho de que los estudiantes crean significado matemático a partir del momento en que se involucran en tareas que les desafían y participan en las construcciones que respeten sus niveles de comprensión. En este sentido los autores apostaron por el uso de tecnologías para que los estudiantes crearan y recrearan gráficos, campo de direcciones y estimularan su pensamiento. Además, fue hecho un esfuerzo para encaminar a los estudiantes en situaciones en que simultáneamente construían gráficos, soluciones numéricas y analíticas para predecir funciones-solución de EDOs de primer orden, en vez de tratar cada uno de los métodos como técnicas separadas que debían ser aprendidas en un secuencia lineal.

Los autores realizaron, durante 15 semanas de clase, experimentos de enseñanza de un curso introductorio de EDs, principalmente para ingenieros, en una universidad de los Estados Unidos. La fuente de datos incluyó videograbaciones de cada sesión, videograbación de las entrevistas con estudiantes, copias de todos trabajos escritos, los materiales de instrucción, el cuaderno de anotaciones del investigador, y audio grabaciones de las reuniones para análisis de las sesiones. En este trabajo, los investigadores solamente analizaron el primer semestre del curso, que abordaban soluciones de EDs de primer orden. En el segundo semestre del curso fue abordado sistemas de EDs.

Durante los primeros 22 días de experiencia docente en aula de clase, fueron realizadas seis prácticas matemáticas en que los estudiantes eran incentivados a construir un conjunto de ideas, integrando técnicas gráficas, analíticas y numéricas. En la primera actividad, los estudiantes intentaron a través de previsiones, aproximar funciones-solución para una determinada ecuación diferencial involucrando dos ideas matemáticas: forma exponencial y ecuación de tasa de variación que modela un escenario del mundo real. En la segunda actividad, los estudiantes mejoraron la previsiones iniciales, intentaron desarrollar métodos de aproximación, construyeron gráficos de sus previsiones/aproximaciones. A partir de la segunda practica emergieron seis ideas matemáticas: el uso de un proceso recursivo se obtiene gráficos que son aproximaciones, no exactos: cuanto menor la variación del tiempo utilizado en el método más exacta será la previsión y el gráfico; la función-solución exacta usa tasas de variación instantáneas mientras que la aproximación gráfica es compuesta por trechos lineales de las tasas de variación; el gráfico de la aproximación se aproxima más a lo exacto cuando los intervalos de tiempo escogidos son menores; la inclinación inicial en el instante cero es tangente a la solución exacta; la inclinación inicial es la misma, no importa el tamaño del intervalo del tiempo.

En la tercera actividad matemática, los estudiantes crearon y estructuraron un campo de direcciones para realizar previsiones sobre una cantidad de interés que fue expresada por una ecuación diferencial de tasa de variación. Tres ideas matemáticas surgieron: raciocinio sobre la forma de cómo cambian las inclinaciones a lo largo del tiempo, las inclinaciones son horizontalmente invariantes para ecuaciones diferenciales autónomas; infinitamente muchas inclinaciones son encontradas en un campo de direcciones, pero solamente finitos son visibles. La actividad 4 tenía el objetivo de explorar la “P” (población) como variable y función a la vez. Los estudiantes concluyeron que “P” , de un lado, hacía el papel de variable en una ecuación diferencial de tasa de variación y “P” , por otro lado, era una función conocida determinada por la tasa de variación.

En la quinta actividad, los estudiantes crearon y organizaron conjuntos de funciones-solución de donde surgieron cuatro ideas matemáticas: los gráficos de funciones-solución que no se interceptan o se cruzan mútuamente (por lo menos para las ecuaciones estudiadas); dos gráficos de funciones-solución presentan variaciones horizontales para ecuaciones diferenciales autónomas; las funciones-solución pueden ser escritas de formas distintas, la recta de fase significa el resultado de la estructuración de un espacio de funciones solución.

En la actividad seis, fue explorada la idea de que un conjunto de funciones-solución podría ser inscrito en una única línea con puntos que indican las funciones-solución de equilibrio y setas que muestran la dirección de la inclinación dentro de una región. La evolución de esa práctica puede ser descrita en tres partes: interpretación del gráfico dy/dt en varios escenarios; interpretación dinámica del gráfico dy/dt versus y para estructurar la línea de fase general para el diagrama de bifurcación; unión de los puntos de varias líneas fase para obtener una “línea de fase general”.

El objetivo general de este trabajo fue documentar el aprendizaje colectivo del contenido de EDs, considerando las ideas matemáticas que emergieron a partir de las construcciones de los estudiantes. Los autores destacaron la naturaleza y la calidad de la experiencia matemática de los estudiantes y la importancia de la argumentación en este proceso. También llamaron la atención para dos importantes avances teóricos cuando se trabajaba a partir de ideas que surgían de los estudiantes, el surgimiento de clases prácticas podían ser no secuenciales en el tiempo y en la estructura.

Rowland y Jovanoski también estuvieron investigando sobre el aprendizaje de ecuaciones diferenciales. En 2004, estos autores realizaron un estudio para identificar las dificultades de estudiantes de primer año de licenciatura en la interpretación de los términos de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) de primer orden en un contexto de modelación. Los autores afirmaron que algunas iniciativas para cambiar la enseñanza de EDs surgieron a comienzos del 90 juntamente con las reformas en la enseñanza del Cálculo y también con la disponibilidad de programas de calculadoras gráficas y paquetes de algebra simbólica, que posibilitaban investigaciones y análisis más sofisticados de las EDs. Por lo tanto, hay pocas investigaciones sobre el entendimiento de los estudiantes acerca de las EDOs, a pesar de que aspectos similares han sido investigados en contextos que involucraban problemas algebraicos y problemas de Cálculo, por ejemplo, los estudiantes tenían dificultad para distinguir correctamente constantes y variables, y variables dependientes e independientes en el contexto de la tasa de variación.

En un contexto de modelación, Rowland y Jovanoski investigaron las habilidades de los estudiantes para interpretar físicamente los términos de una EDO y traducirlos de una descripción física a la descripción matemática. Estas habilidades, según los autores, eran importantes y necesarias para que los estudiantes razonaran adecuadamente sobre soluciones y también desarrollaran las habilidades necesarias para modelarlas.

La investigación era compuesta por 59 estudiantes, que estaban matriculados en dos semestres consecutivos de Algebra Lineal. En estas asignaturas trabajaron con una variedad de sistemas físicos que podían ser modelados por EDOs de primer orden, incluyendo crecimiento poblacional logístico, desintegración radioactiva, mezcla de soluciones en un tanque, ley de enfriamiento de Newton. Se esperaba que los estudiantes resolvieran las EDOs y, además, fueran capaces de interpretar el significado físico de los términos de las EDOs dadas como descripciones de problemas físicos y , a partir de la descripción del sistema físico, determinaran la EDO que gobernaba este sistema.

Con la intención de investigar el entendimiento conceptual de los estudiantes, los autores usaron un test diagnóstico de selección múltiple, un examen con preguntas de respuesta corta y entrevista individuales. En la primera fase de la investigación, los participantes recibieron un test de selección múltiple, en la última semana de clase del primer semestre de estudio universitario (48 de los 59 estudiantes estaban presentes en clase en aquel día). La aplicación del test ocurrió cuando los estudiantes ya estaban estudiando durante algún tiempo las EDOs de primer orden, los métodos de solución y varios sistemas físicos que podían ser modelados por estas EDs. El test incluía dos preguntas que fueron seleccionadas por los autores que involucraban modelos relativamente simples, similares, pero no idénticos a los que los estudiantes ya habían abordado en clase o en el material usado, con alternativas que fueron elegidas para representar hipótesis de tipos de errores. Estas hipótesis fueron basadas en la combinación de experiencias de enseñanza, resultados de la literatura en preguntas relacionadas al Cálculo y en una aplicación del modo de pensar de la teoría de Perkins. Las dos preguntas exigían de los estudiantes la habilidad de generar la ecuación del problema descrito, es decir, traducir el problema descrito al lenguaje matemático. Como esta traducción es muy difícil para la mayoría de los estudiantes y puede involucrar una serie de dificultades, para simplificar la interpretación de los resultados, fue decidido el uso del formato de selección múltiple, en que los estudiantes deberían elegir la respuesta correcta del problema físico, ya que ésta es una tarea probablemente más sencillo que el desarrollo de toda la ecuación.

También les fue aplicado un examen de final de semestre que consistía de una variedad de preguntas de Cálculo que incluían dos preguntas de EDOs de primer orden. Para el análisis de los resultados, las respuestas de los estudiantes fueron tabuladas de modo que permitiera comparaciones del desempeño de los estudiantes y también del desempeño de cada una de las diferentes preguntas.

Con el objeto de verificar las interpretaciones de las repuestas de los estudiantes, en los dos primeros instrumentos aplicados en el primer semestre, durante el segundo semestre, Rowland y Jovanoski realizaron entrevistas individuales con 8 estudiantes que presentaron las concepciones equivocadas que más aparecieron en el cuestionario aplicado. Los investigadores le dijeron a cada estudiante sus respuestas, referentes a las dos primeras preguntas del cuestionario, y entonces le preguntaron por qué habían elegido aquella opción. Si su respuesta estaba incompleta o equivocada, él era llevado a elaborarla. Después le solicitaban a cada alumno que detallara más la respuesta de la tercera pregunta del examen y, a fin de perfeccionar su pensamiento, entre otras cosas, le hacían preguntas sobre cada término de la EDO. Durante la entrevista, los entrevistadores hacían un registro escrito de las respuestas del estudiante, y al final de la entrevista, hacían apuntes adicionales sobre cómo el estudiante las había respondido. Luego las respuestas de los estudiantes fueron tabuladas para que se facilitara la comparación e se identificara semejanzas y diferencias entre las mismas.

A partir de los resultados, los investigadores destacaron que el buen desempeño en "preguntas tradicionales" (manipulativas o algorítmicas) no necesariamente evidenciaba que los estudiantes aprendieron conceptualmente. Se esperaba que la mayoría de los estudiantes consiguiera interpretar dD/dt, pero en torno a un cuarto de los estudiantes interpretaba incorrectamente; algunos estudiantes usaron el término de tasa de variación de la cantidad en sus repuestas, mientras que otros utilizaron solamente cantidad. Los autores creían que probablemente los estudiantes poseían concepciones correctas, no obstante presentaban imprecisión en el uso del lenguaje, otros hacen confusión entre la cantidad y la tasa de variación de la cantidad.

Es necesario un cambio de paradigma sobre la función que describe “cómo la cantidad varía” para un pensamiento sobre la ecuación que describe “cómo la tasa de variación de la cantidad varía”. Además, los términos constantes de las EDO fueron interpretados por muchos como condición inicial o como una cantidad máxima o de equilibrio en vez de un tasa de variación constante. También en el pensamiento de muchos estudiantes, la relación de la variable dependiente e independiente necesitaba estar explícita y faltaba concienciación, por parte de los estudiantes, de que todos los términos en la ecuación física necesitaban de alguna unidad. Algunos estudiantes parecían ignorar la necesidad de la consistencia interna de los términos de una EDO. Esta inconsistencia podía reflejar el hecho de que el conocimiento de muchos estudiantes era altamente fragmentado y, consecuentemente, era altamente dependiente del contexto.

En términos de la preocupación de mejoramiento pedagógico, los autores sugerieron la inclusión de más preguntas conceptuales o cualitativas en el enfoque de las EDs, pues éstas harían con que los estudiantes cambiaran el interés en la simple manipulación en dirección al enfoque de la comprensión. Asimismo, sugerieron muchas discusiones en grupo.

En otro estudio, Rowland (2006) investigó la comprensión de estudiantes de ingeniería en relación a las unidades de los términos de EDOs de primer orden en un contexto de modelación y la naturaleza de los problemas relacionados con éstas. Los participantes de la investigación fueron 108 estudiantes de primer año en Engeniería, en una universidad Australiana, en el 2003. Todos los estudiantes habían estudiado cálculo en la escuela superior y estuvieron en un curso de Cálculo en la universidad que incluía la discusión y solución de situaciones físicas modeladas por ecuaciones diferenciales ordinarias simples.

Cuando se aproximaba el fin del primer semestre en la universidad, les dieron a los estudiantes, durante uno de sus horarios de clase de Cálculo, un test de diagnostico que incluía una pregunta en que se solicitaba analizar las unidades y la interpretación física de cada término de una ecuación diferencial determinada, que hipotéticamente modelaba la cantidad de droga en el cuerpo de un paciente en función del tiempo. Otra pregunta se refería a la velocidad de un coche en función del tiempo, en que el objetivo principal era analizar las unidades de la constante de proporcionalidad encontrada en la ecuación diferencial.

A partir de los resultados, el autor destacó que pocos estudiantes parecían percibir que los términos de las ecuaciones necesitaban tener las mismas unidades, o si comprendían, no conseguían usar este conocimiento cuando era necesario. Además, los estudiantes usaban unidades que representaban cantidades y no tasa de variación de cantidades, pues interpretaban una ecuación diferencial como cantidad. Otro error encontrado, con frecuencia, se refería a la falta de atención a las unidades requeridas por las constantes de proporcionalidad. Los estudiantes las percibían como un número puro, sin unidades. Pocos estudiantes fueron capaces de determinar la unidad de la constante de proporcionalidad de una ecuación simple. Según el autor, los profesores de cursos de modelación no podían considerar que esto fuera de conocimiento de los alumnos y para garantizarlo debían incluirlo explícitamente en el proceso instruccional, pues para que ingenieros y científicos fueran capaces de cuantificar las cosas que eran de su interés, el entendimiento sólido de unidades de medidas era gran importancias para éstos. Además, la comprensión de unidades y cómo se combinaban, era también importante en la modelación matemática porque ayudaban a determinar cómo ciertas cantidades podían ser combinadas para resultar una cantidad necesaria, así como podían ser usadas para verificar la validación de las ecuaciones.

Los resultados también mostraron que la mayoría de los estudiantes no utilizaba la información de que las ecuaciones necesitaban ser homogéneamente dimensionales para ayudarlos en el entendimiento de ecuaciones en el contexto de la modelación y que muchos estudiantes no entendían la conexión entre la ecuación diferencial y el sistema físico modelado. Por eso, el autor defendía la importancia de ser explícita la consideración de las unidades, en la parte instruccional, así como su combinación, y cómo los alumnos podían usarla para analizar sistemas en el contexto de modelación. El autor también destacó que, al realizar una comparación de respuestas, percibió que en muchos casos los estudiantes presentaban dificultades en la comunicación escrita y mismo oral, pues lo que expresaban no era lo que pretendían expresar.

2.3 Consideraciones sobre la revisión de la literatura

Uno de los factores que motivó este trabajo fue el hecho del cuestionamiento de la enseñanza de ecuaciones diferenciales estar basado en su mayor parte, solamente en técnicas analíticas de solución. En la sección 2.2, presentamos dos trabajos que abordaron la concepción y creencia de los profesores universitarios de matemáticas sobre la enseñanza de ecuaciones diferenciales. Estas investigaciones presentaron indicativos que explicaban los motivos por los que la mayoría de los profesores trabajaban este contenido de forma tradicional.

Los autores (Moreno y Azcárate, 1997 y 2003) destacaron la existencia de tres estilos diferentes de profesores: (i) el estilo tradicional que enfoca la enseñanza en las técnicas analíticas de solución de ecuaciones diferenciales y aborda el contenido de forma más estructural; (ii) el estilo avanzado que considera las ecuaciones diferenciales como un instrumento para abordar modelos y resolver problemas y abordar simultáneamente representaciones gráficas, numéricas y simbólicas y (iii) el estilo transitorio, en que el profesor entra en conflicto entre "lo que hace " y " lo que se podría hacer". Esta clasificación también es apropiada para nuestro medio y no solamente en lo que corresponde al contenido de ecuaciones diferenciales, pero en las matemáticas en general y también de otras asignaturas. Muchos son los motivos que llevan al profesor a actuar de tal manera y no de otra, de las cuales señalamos: su formación profesional, su concepción de enseñanza, su interés y dedicación, entre otros. En su estudio, Moreno y Azcárate investigaron estos interrogantes, enfocados específicamente con profesores que trabajaban con enseñanza de las ecuaciones diferenciales.

Estos autores verificaron que la metodología que predominaba en el contexto de enseñanza de las ecuaciones diferenciales era la clase tradicional, que potencializaba el enfoque algebraico sobre el gráfico y el numérico, con énfasis en métodos analíticos de solución y en la solución del problema. Lo más triste era que ninguno de los profesores del estudio sentía necesidad de usar otro tipo de metodología de enseñanza. Nuevamente haciendo analogías, se percibe este hecho también en otras áreas de enseñanza. Los alumnos de hoy día son distintos de los de antaño, las necesidades y exigencias del mercado de trabajo, así como las herramientas disponibles son otras, pero la mayoría de las clases siguen siendo las mismas. Los currículos necesitan ser repensados y los avances tecnológicos considerados.

La persistencia de los métodos de enseñanza tradicional frente a alternativas más innovadoras de enseñanza se debe a varios motivos, de los cuales pretendemos señalar algunos que fueron presentados por los autores:

- Los profesores consideran que los estudiantes no tienen condiciones para trabajar de modo diferente, pues son incapaces de pensar, crear y racionar por sí mismo, poseen poco conocimiento matemático, aprenden por imitación y memorización. Esta concepción es muy fuerte entre los profesores.
- Los profesores poseen la concepción de que las Matemáticas es muy formalista, y esta concepción es, probablemente, consecuencia de la formación de los profesores que estuvo basada en utilización de técnicas, fórmulas, demostración de teoremas…
- Un nuevo enfoque exigiría del profesor más tiempo en la preparación de clases, pues la formación de los profesores como matemáticos es insuficiente en lo que corresponde a aplicaciones, sin considerar que la enseñanza de técnicas, que el profesor domina muy bien, es mucho más simple frente a la enseñanza a partir de solución de problemas.
- Cuando se realiza un cambio en el enfoque del contenido a favor de algunos enfoques específicos, otros resultaron “perjudicadas”, por ejemplo, en la asignatura en que realizamos nuestros estudios, tradicionalmente, la enseñanza de ecuaciones diferenciales estaba basada en técnicas analíticas de solución y varias técnicas para resolver EDOs de primer orden eran abordadas y , a partir del cambio del enfoque a través de la inclusión del enfoque numérico y gráfico a partir de situaciones-problema, no tuvimos más tiempo para abordar tantas

técnicas. Inicialmente, tanto para los profesores como para nosotros, era difícil aceptar dejar estas técnicas, pues siempre fueron consideradas tan importante en el medio académico.

En resumen, los resultados de estos trabajos comprueban que las razones que más son relevantes en la persistencia de los métodos tradicionales son la comodidad de los profesores y la despreocupación por la docencia. Por lo general, los profesores prefieren atribuir las responsabilidades sobre el fracaso de la enseñanza a los propios estudiantes, a sus actitudes y a su escasa formación matemática.

Prácticamente todos los estudios presentados en la sección 2.2 muestran que el contenido de ecuaciones diferenciales es abordado, tradicionalmente, como una secuencia de técnicas analíticas para encontrar expresiones para las soluciones y consecuentemente, los alumnos no consiguen aplicar las ecuaciones diferenciales en situaciones específicas. En función de esas dificultades algunos educadores están buscando un enfoque más cualitativo del asunto a favor del enfoque de aspectos más visuales y numéricos y en estos nos incluimos al trabajar EDOs de forma más contextualizada, a partir de situaciones-problema y abordando este contenido analítico, numérico y gráficamente, a través de la ayuda de recursos computacionales para facilitar y agilizar el proceso.

Los autores abordados destacan que varios estudios fueron realizados para mejorar el currículo del Cálculo, no obstante, poco se investigó en relación a las EDs, principalmente en lo que comprendía al entendimiento de los estudiantes sobre el contenido. Este hecho lo comprobamos, cuando realizamos la revisión de la literatura.

Los estudios susodichos buscan enfocar la enseñanza de las EDOs en un enfoque más cualitativo, por ejemplo: Habre, en el estudio realizado en 2000, abordó el campo de direcciones como un medio para resolver EDOs de primer orden y en 2003, este autor investigó la aceptación de los estudiantes en resolver EDs geométricamente; Rasmussen, en 2001, realizó una investigación sobre las dificultades de aprendizaje de los estudiantes en abordar equilibradamente, métodos analíticos, gráficos y numéricos para análisis de EDs y en 2002, Stephan y Rasmussen enfocaron su estudio en el enfoque de funciones-solución; ya Rowland y Jovanoski, en 2004, realizaron un estudio para identificar las dificultades de estudiantes en la interpretación de términos de EDOs de primer orden en un contexto de modelación y en 2006, Rowland investigó la comprensión de estudiantes de ingeniería en relación a las unidades de los términos de EDO de los términos de primer orden en un contexto de modelación y la naturaleza de los problemas relacionados con éstas. Nosotros también trabajamos los contenidos de EDOs con mayor énfasis en la contextualización a través de situaciones-problema, buscando motivar a los alumnos y explorar el raciocinio conceptual, con la intención de ayudarlos a dar significado a la EDOs y a sus soluciones. Inicialmente, exploramos la solución de las EDOs que fueron obtenidas con ayuda de un *software* y sólo después abordamos las técnicas.

A partir de los resultados de estos trabajos, que fundamentan nuestros estudios, pretendemos señalar que cuando los estudiantes piensan en ecuaciones diferenciales, piensan en técnicas analíticas, pues ven una EDO como una ecuación abstracta que involucra símbolos y para resolverla, inicialmente quieren usar técnicas analíticas. En general, los estudiantes asocian EDOs a un proceso puramente analítico, y creen que la representación simbólica de una función es más importante y más útil que la gráfica (y numérica). Lo interesante es que a pesar de después de cursar EDOs, con énfasis en el método de solución cualitativo (gráfica), la mayoría de los estudiantes todavía preferían aproximaciones algebraicas que aproximaciones gráficas, posiblemente eso era reflejo de experiencias matemáticas anteriores, en que el enfoque era algebraico.

Otro punto que destacamos es el hecho de que tradicionalmente, en las matemáticas, es dada la función analítica y, entonces, se solicita la representación geométrica, y muchos estudiantes no aceptan la solución geométrica porque son incapaces de asociarla a una representación analítica. Los estudiantes piensan en función cuando ven una ecuación o regla y no en un gráfico. Además, los alumnos poseen dificultades para pensar simultáneamente de modos diferentes (algebraico y gráfico). Eso puede también ayudar a explicar por qué normalmente el alumnado no usa varios modos para resolver problemas.

Para amenizar estas dificultades, los autores consideraron que es importante el profesor buscar usar equilibrada y simultáneamente, métodos analíticos, gráficos y numéricos para análisis de EDs. Éstos investigadores sugerieron que es necesario incluir más preguntas conceptuales o cualitativas en el enfoque de este contenido, pues éstas harán con que los estudiantes cambien el interés por la simple manipulación por el enfoque en la comprensión, eso exigirá un modo más interpretativo.

En los estudios que fueron citados, también se destacó la importancia del uso de tecnologías para que los estudiantes creen y recreen gráficos, campo de direcciones y estimulen su pensamiento, pues tenemos muchos avances en el área de la computación gráfica, y esto necesita ser aprovechado en el modo de enseñar las matemáticas. A partir de la tecnología disponible, actualmente, ya no tiene sentido dar tanta atención a las soluciones analíticas, pues éstas son, muchas veces, complicadas y muy limitadas, mientras que con recursos computacionales se puede obtener, fácil y rápidamente soluciones gráficas y numéricas y, a partir de estas, extraer informaciones importantes. Los autores también llaman la atención para el hecho de que integrar recursos tecnológicos al proceso de enseñanza no siempre es un éxito completo, pues algunos programas computacionales presentan como barrera la necesidad de aprender primero su sintaxis. En vez de concentrarse en las matemáticas, los estudiantes consumen mucho tiempo intentando aprender el *software*. Para evitarse ello, en los estudios que realizamos y presentamos, en este trabajo, usamos el *software* Powersim, por presentar una sintaxis bien simple, basada en íconos y que no exigen la necesidad de utilizar mucho tiempo para aprender a operacionalizar el *software*.

Los autores también destacan la confusión que los estudiantes hacen entre la cantidad y la tasa de variación de la cantidad. Es necesario que haya un cambio de paradigma sobre la función que describe “como la cantidad varia” para un pensamiento sobre la ecuación que describe “como la tasa de variación de la cantidad varía”. El dilema de la función como solución está asociado a esto, pues no es corriente entre los estudiantes aceptar funciones como solución de una ED, considerando que están acostumbrados a tomar números como solución.

Para finalizar, queremos destacar un punto crucial que está relacionado con el proceso enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas y, en especial, de las EDs: los estudiantes no demuestran interés por el contenido, resuelven las actividades mecánicamente, participan en las clases sin motivación. Creemos que el principal motivo es que el alumnado no percibe la importancia de los contenidos para su actividad profesional, pues conforme a lo comentado, anteriormente, se enseñan las matemáticas muy formalmente. Y cuando se busca trabajar de una forma más contextualizada, muchos estudiantes presentan dificultades, pues no desarrollan su capacidad y sino que pasaron mucho tiempo de vida escolar repitiendo y memorizando técnicas. Los alumnos no entienden la conexión entre la ecuación diferencial y el sistema físico modelado, presentan dificultades para interpretar físicamente los términos de una EDO y para traducirlos de la descripción física a la descripción matemática. Además, falta concienciación, por parte de los alumnos, de que todos los términos en la ecuación física necesitan tener alguna unidad y éstos parecen ignorar la necesidad de la consistencia interna de los términos de una EDO, puesto que se comprenden, no consiguen usar este conocimiento cuando es necesario. Esto puede ser resultado de un conocimiento altamente fragmentado. Otra dificultad presentada por los estudiantes se refiere a la falta de atención de que constantes de proporcionalidad también necesitan tener unidades, pues las perciben como un número puro, sin unidades. Por eso, los autores consideran fundamental incluir explícitamente en el proceso instruccional la consideración de unidades, así como su combinación, y como usarlas para analizar sistemas en un contexto de modelación.

3 MARCO TEÓRICO

Nuestro estudio está basado en la Teoría de Aprendizaje Significativo de Ausubel y en la Teoría Socio-interaccionista de Vygotsky, que son presentadas a continuación.

3.1 La Teoría de Aprendizaje de Ausubel

Bajo el punto de vista cognitivo, la meta del proceso enseñanza-aprendizaje consiste en hacer con que los alumnos aprendan de modo significativo el contenido, es decir, aprendan, comprendan y sean capaces de transferir los conocimientos a nuevas situaciones. El concepto de aprendizaje significativo es el punto central de la teoría de Ausubel, la cual presentamos a continuación.

En la teoría de Aprendizaje Significativo de Ausubel el conocimiento previo, es decir, lo que el alumno trae en su conjunto de conocimientos adquiridos tiene relevancia. Para Ausubel (2003) es esencial que haya una interacción, no arbitraria y no literal, entre la nueva información y los conocimientos previos existentes en la estructura cognitiva del estudiante, definidos como conceptos subsumidores o simplemente subsumidores. Si hay esa interacción, la nueva información se ancla en conceptos o proposiciones relevantes, preexistentes en la estructura cognitiva del aprendiz, adquiriendo significado para sí. Por lo tanto, podemos afirmar que este aprendizaje es significativo en contraposición al aprendizaje mecánico, en que las nuevas informaciones son aprendidas de forma arbitraria y sustantiva, sin relacionarse con conceptos subsumidores específicos.

La no arbitrariedad significa que la relación entre el nuevo ítem que debe ser aprendido y los ítems relevantes de la estructura cognitiva no debe ser arbitraria o al azar. La nueva información debe interaccionar con conceptos relevantes existentes en la estructura cognitiva vinculándose a conceptos subsumidores específicos. Debe existir una relación lógica y explícita entre la nueva información y algunas otras que ya existen en la estructura cognitiva del individuo. Otra característica, la substantividad, significa que la relación entre el material que debe ser aprendido y la estructura cognitiva no es alterada si símbolos diferentes, pero equivalentes, han sido utilizados, es decir, lo que es esencial en la nueva información debe ser interiorizado por la estructura cognitiva y no las palabras o símbolos específicos que han sido utilizadas para expresarla. Si el alumno aprende determinado contenido substantivamente, conseguirá explicarlo con sus propias palabras, pues ha aprendido el sentido, el significado de lo que le ha sido enseñado. Si el alumno aprende el contenido de forma significativa, almanecerá las nuevas informaciones, durante más tiempo, de manera estable, de modo que use el nuevo concepto independiente del contexto en que este contenido haya sido aprendido primeramente. Por lo tanto, según Ausubel (op. cit.) el aprendizaje significativo se caracteriza por una interacción, no arbitraria y substantiva, entre la estructura conceptual (conceptos y relaciones) existente en la mente del individuo y las nuevas informaciones o conceptos que están siendo objeto de atención en actividades de enseñanza y aprendizaje u otro proceso educativo cualquiera.

Conforme Ausubel, el almacenamiento de informaciones en el cerebro humano es organizado en una jerarquía conceptual, en que conceptos más relevantes e inclusivos interaccionan con el nuevo material, sirviendo de anclaje. Este proceso de “anclaje” de la nueva información resulta en un crecimiento y modificación del subsumidor. De acuerdo con Ausubel (2003)

> "... se podem apreender e reter novas idéias e informações, de forma significativa e mais eficaz, quando já estão disponíveis conceitos ou proposições adequadamente relevantes e tipicamente mais inclusivos, para desempenharem um papel de subsunção ou fornecerem uma ancoragem ideal às idéias subordinadas ..." (p. 44)

Para explicar mejor la adquisición, retención y organización de significados en la estructura significativa, Ausubel (2003) propone la teoría de la *asimilación*. Según esta teoría *"Quando se apreende uma nova idéia **a**, através da relação e da interacção com a ideia relevante **A** estabelecida na estrutura cognitiva, alteram-se ambas as ideias e **a** assimila-se à ideia estabelecida **A**."* (p. 105).

En el punto central de la teoría de la asimilación está la idea de que los nuevos significados son adquiridos a través de la interacción de nuevas ideas (conocimientos) potencialmente significativas con proposiciones y conceptos que han sido aprendidos anteriormente y que, en este proceso interactivo, tanto el potencial significativo de las nuevas informaciones, como el significado de los conceptos o proposiciones en que están ancladas, pueden sufrir alteraciones y, a partir de ahí, el aprendiz crea nuevos significados.

Moreira (2003, p.157) esquematizó la teoría de la asimilación de Ausubel conforme a lo presentado, a continuación, en la Figura 3.1:

Nueva información potencialmente significativa	→	Relacionada a, y asimilada por	→	Concepto subsumidor existente en la estructura cognitiva	→	Producto interaccional (subsumidor modificado)
a				**A**		**A' a'**

Figura 3.1: Teoría de la Asimilación de Ausubel (MOREIRA, 2003, p. 157).

En el aprendizaje mecánico, las nuevas informaciones no se relacionan de forma lógica y clara con los subsumidores existentes en la estructura cognitiva del alumno, sino que son "aprendidas de memoria". De esta manera, estas informaciones son almacenadas de forma arbitraria, eso no garantiza flexibilidad (el aprendizaje no es substantivo) en su uso y, a consecuencia de eso, el alumno no es capaz de expresar el nuevo contenido a través de un lenguaje distinto de aquel con que el material ha sido aprendida, y tampoco es capaz de utilizar el conocimiento en contexto diferente de aquel en el que han sido presentados primeramente estos conceptos. De hecho, el alumno no ha aprendido el significado, el sentido del nuevo material, solamente ha aprendido de memoria la secuencia de palabras que lo definía. Por lo general, en el aprendizaje mecánico, se consigue interiorizar solamente tareas de aprendizaje relativamente sencillas y éstas únicamente consiguen quedarse retenidas durante cortos periodos de tiempo, a no ser que sean bien aprendidas. Además, el aprendizaje mecánico es más vulnerable a la interferencia del material que ha sido aprendido anteriormente. Estos factores explican la superioridad del aprendizaje significativo en relación al aprendizaje mecánico o por memorización.

Ausubel (2003) no presenta el aprendizaje significativo y el aprendizaje mecánico como una dicotomía, sino que los muestra como un continuo entre dos extremos. En la enseñanza de las matemáticas, por ejemplo, la memorización de fórmulas, técnicas y la manipulación mecánica de símbolos puede ser considerada, de un lado, un aprendizaje mecánico, por consiguiente, ubicada en uno de los extremos y, el dominio de los conceptos relevantes y su empleo en las más diversas situaciones, por otro lado, en el otro extremo. Entre los dos extremos pueden existir muchos procesos intermediarios relevantes.

Es necesario señalar que a pesar de Ausubel enfatizar el aprendizaje significativo, considera que en el proceso enseñanza-aprendizaje existen circunstancias en que el aprendizaje mecánico es inevitable. Muchas veces un individuo puede aprender tareas de aprendizaje mecánicamente y solamente más tarde percibir que ello se relaciona con algún conocimiento anterior que ya ha sido dominado. En este caso se ha utilizado esfuerzo y tiempo demasiado para asimilar conceptos que serían más fácilmente comprendidos, si se encontraran un “anclaje” o un *subsumidor*, existente en la estructura cognitiva.

Una pregunta propuesta por la teoría de Ausubel se refiere al origen de los *subsumidores*. ¿Si éstos no estuvieran presentes para viabilizar el aprendizaje significativo cómo sería posible crearlos? En un primer estadio, el aprendizaje de las nuevas informaciones puede ser meramente mecánico. A pesar de esas nuevas informaciones ser poco elaboradas, se van constituyendo en *subsumidores*, es decir, van formando estructuras cognitivas que sirven como anclas para volver relevantes los nuevos conocimientos.

Según Ausubel (apud MOREIRA, 2006) el aprendizaje mecánico es necesario en casos de conceptos que son totalmente nuevos para el alumno, pero, posteriormente, este tipo de aprendizaje podrá transformarse en significativo. A fin de acelerar ese proceso, Ausubel propone los organizadores previos, que son materiales introductorios, los cuales le han sido presentados al alumno antes del material que debe ser aprendido en sí, y su principal función es servir de puente entre lo que el alumno ya sabe, y algo nuevo, que se desea enseñar, pero con que el aprendiz no tiene familiaridad. La función del organizador es poder establecer de manera significativa, en la estructura cognitiva del alumno, las ideas más generales relativas al contenido que se desea enseñar, a partir de las cuales las más específicas serán trabajadas por el profesor.

Ausubel (2003) propone dos condiciones básicas que deben ser satisfechas para que ocurra el aprendizaje significativo:

1. el alumno debe manifestar una predisposición positiva en relación al aprendizaje, dicho de otro modo, una disposición para relacionar, de manera no arbitraria y substantivamente, el material nuevo con su estructura cognitiva;
2. el material que será aprendido debe ser potencialmente significativo para aquel alumno en particular y relacionable con su estructura cognitiva.

Para aprender significativamente, el alumno necesita presentar un verdadero interés y tener disponible en su estructura significativa los subsumidores adecuados. Si no los están, necesitamos propiciarle condiciones posibles, proporcionando acceso al material en un nivel más adecuado, de modo que le sea potencialmente significativo. La clase y el material instruccional de apoyo son potencialmente significativos, cuando, satisfechas las condiciones internas (existencia de subsumidores y la voluntad de aprender), este material posibilita el aprendizaje significativo del alumno.

Para un material ser potencialmente significativo necesita satisfacer dos factores principales: la naturaleza del material en sí (significativo lógico), y la naturaleza de la estructura cognitiva del alumno (significativo psicológico). Para el material tener significado lógico es indispensable que las nuevas ideas sean propuestas de manera no arbitraria y no aleatoria, a fin de poder ser relacionada substantiva y no arbitrariamente con las ideas anclas existentes en la estructura cognitiva del alumno. A fin de que el material tenga significado psicológico, en la estructura cognitiva del alumno, deben estar disponibles los conceptos subsumidores específicos, con los cuales el nuevo material es relacionable.

En el proceso de programación de un contenido, Ausubel propone dos principios orientadores, pretendiendo el aprendizaje significativo:

1. **El principio de la diferenciación progresiva** según éste, en la programación de un contenido, las ideas más generales e inclusivas deben ser presentadas en primer lugar, para después ser progresivamente diferenciadas, en términos de detalles y cosas específicas. Para el alumno es menos difícil captar aspectos diferenciados de un todo más inclusivo que previamente han sido aprendidos que llegar al todo a partir de sus partes diferenciadas que previamente han sido aprendidas, pues la organización del contenido de determinada asignatura en la mente de un alumno es una estructura jerárquica, en la que las ideas más inclusivas y generales están en la cima de la estructura y, progresivamente, incorporan proposiciones, conceptos y hechos menos inclusivos y más diferenciados. Es decir, generalizar a partir de conceptos más específicos es más difícil que aprender conceptos particulares a partir de uno más general.
2. **El principio de la reconciliación integrativa** según éste, en la presentación de un contenido, el profesor debe explorar posibles relaciones existentes entre las diversas ideas que están siendo trabajadas de modo que facilite la creación de ligaciones en la estructura cognitiva del alumno, busque dejar claras las semejanzas y diferencias importantes y aclare eventuales contradicciones existentes entre los diversos conceptos en cuestión.

En el estudio de ecuaciones diferenciales, por ejemplo, es recomendable abordar inicialmente cuestiones generales, tales como: la idea de que ecuaciones diferenciales son ecuaciones que involucran derivadas, tasas de variación; y después ir especificándolas en tipos, orden, grado. De la misma manera, en lo que se refiere a las soluciones de una ecuación diferencial, inicialmente, se enfoca, de manera general, lo que es una solución y después se puede clasificarla, de acuerdo con particularidades, por ejemplo, solución analítica general y solución analítica particular, solución gráfica, solución numérica y, finalmente, se hará una reconciliación integrativa, destacando las diferencias y semejanzas entre las mismas.

Considerando la estructura del conocimiento en el cerebro humano como siendo organizada, Ausubel (2003) clasifica el aprendizaje significativo, de acuerdo con su naturaleza, como se presenta, a continuación:

- **Aprendizaje subordinado:** cuando la nueva información adquiere significado a través de la interacción con subsumidores, refleja una relación de subordinación de esa nueva información a la estructura que ya existe en el alumno, el nuevo conocimiento es una especificación, una particularidad de algo más general que el alumno ya sabe.
- **Aprendizaje superordenado (subordinante):** cuando la información nueva es muy amplia para ser asimilada por cualquier *subsumidor* existente, siendo más amplia que éstos y entonces pasa a asimilarlos.
- **Aprendizaje combinatorio:** cuando la información nueva no es suficientemente amplia para absorber los *subsumidores*, pero en contrapartida es muy amplia para ser absorvida por éstos. Ocurre, entonces, una interacción con todo el conocimiento del individuo que no crea un subsumidor nuevo, solamente lo enriquece.

Los tres tipos de aprendizajes que puede ser esquematizados conforme a la Figura 3.2.

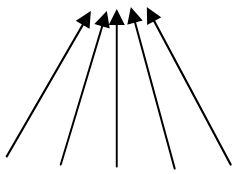
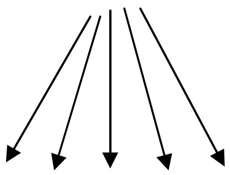
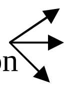
Aprendizaje subordinado	***Aprendizaje superordenado***	***Aprendizaje combinatorio***
idea establecida  nuevas informaciones	nueva información  ideas establecidas	nueva información  ideas establecidas
Las nuevas informaciones se relacionan a una idea más inclusiva que ya ha sido establecida.	La nueva información se relaciona a ideas más especifícas que ya han sido establecidas .	La nueva información se relaciona a ideas establecidas, pero no es más inclusiva ni más específica que estas ideas.

Figura 3.2 Formas de aprendizaje significativo. Adaptado de Ausubel (2003, p. 111).

Como ejemplo de aprendizaje subordinado, podemos citar la definición de ecuación diferencial, que para que los alumnos la comprendan mejor, se subordina al concepto de una ecuación simple (por ejemplo $2x+3=10$), que ya les es familiar. Los principios que rigen la ecuación diferencial siguen los de una simple ecuación, por ejemplo, la solución analítica necesita satisfacer la igualdad de la ecuación en ambos casos, la diferencia es que en las ecuaciones diferenciales la solución es una función y en estas ecuaciones es un valor numérico.

Para ejemplificar el aprendizaje superordenado, podemos considerar el estudio de funciones que se relaciona con conceptos más específicos como el de relación, variables, dependencia,….Y para el aprendizaje combinatorio consideremos el concepto de derivación e integración, pues la relación que existe entre ambos conceptos no se establece con ideas más inclusivas o específicas. Entre ambos existen muchas cosas en común, por ejemplo, el concepto de función.

En el aprendizaje subordinado, predominantemente, ocurre la diferenciación progresiva, en que un concepto original es progresivamente detallado y especificado, evoluciona, a través de las asimilaciones subordinadas, y resulta en un proceso de análisis. Ya en un aprendizaje de característica superordenado o combinatorio tiende a ocurrir la reconciliación integrativa, en la cual los conceptos originales buscan asociaciones entre sí.

En el proceso instruccional, conforme Ausubel (apud MOREIRA, 2003), el factor cognitivo que más influencia el aprendizaje significativo es la estructura cognitiva del aprendiz en el momento del aprendizaje. Y esta puede ser influenciada de dos maneras:

> "... 1) *substantivamente*, pela apresentação, ao aprendiz, de conceitos e princípios unificadores e inclusivos, com maior poder explanatório e propriedades integradoras; 2) *programaticamente*, pelo emprego de métodos adequados de apresentação do conteúdo e utilização de princípios programáticos apropriados na organização seqüencial da matéria de ensino."(p. 161)

Entonces, de acuerdo con el autor, la primera tarea del profesor en su papel pedagógico es la identificación de los conceptos básicos de la materia de enseñanza que pretende enseñar y verificar como éstos están estructurados. Después de esta etapa, el docente se centra en la presentación y organización del contenido basado en los principios de la diferenciación progresiva, reconciliación integrativa, organización secuencial y consolidación. Los dos primeros ya los abordamos. En cuanto a la organización secuencial, Ausubel (2003) destaca la importancia de respetarse las dependencias secuenciales naturales de los tópicos existentes en la asignatura, pues la comprensión de un asunto puede depender del entendimiento de otro anterior. La consolidación del asunto se refiere a la importancia de no introducirse nuevos materiales antes de consolidar los que están en estudio. Por ello, es importante identificar en la estructura cognitiva del alumno los conceptos que ya están consolidados y utilizar un método de enseñanza que tome como prioridad la asociación de los conceptos de la materia com los *subsumidores* del alumno de forma que le propicie un aprendizaje significativo.

No siempre el alumno, solo, consigue realizar las relaciones necesarias y posibles entre lo que está aprendiendo y lo que ya sabe. Además, el discente no siempre satisface todos los prerrequisitos necesarios para el aprendizaje significativo de un determinado material. Si lo que se pretende es potencializar un aprendizaje significativo, el profesor debe partir, en sus clases, no del material instruccional que utiliza, sino que debe tener en cuenta lo que el alumno ya sabe (y no de aquello que *debería* saber), utilizando materiales, prácticas pedagógicas, recursos y métodos significativos.

El profesor, a partir de la visión ausbeliana, desempeña un papel importante y posee por lo menos cuatro tareas fundamentales:

- identificar la estructura conceptual y proposicional de la materia de enseñanza, para organizar jerárquicamente los conceptos y principios inclusivos y progresivamente llegar a los datos más específicos, es decir, organizar el contenido que debe ser enseñado, partiendo del todo (visión general), para llegar a los contenidos específicos;
- identificar cuáles son los *subsumidores* (conocimiento previo) que el alumno debe tener para poder aprender el contenido significativamente;
- verificar qué el alumno ya sabe sobre el contenido que le debe ser enseñado y si le faltan *subsumidores* al alumno de una forma u otra, el profesor debe ayudarlo a adquirirlos;
- utilizar recursos en los procesos de enseñanza que le facilite al aprendiz la

adquisición de la estructura conceptual del contenido de una manera significativa, auxiliando al alumno en el proceso de la asimilación del contenido y en la organización de la estructura cognitiva en esa área de conocimiento.

Varios aspectos que han sido considerados esenciales por Ausubel nos han motivado a elaborar una propuesta de enseñanza para trabajar el contenido de las ecuaciones diferenciales de modo que les facilite el aprendizaje significativo a los alumnos. Ausubel destaca la importancia del alumno en manifestar predisposición para aprender. Pretendemos, entonces, abordar el contenido de manera contextualizada, a partir de la realidad del alumno y de sus intereses en relación al futuro profesional, con la intención de motivarlo. Elaboramos materiales de enseñanza, siguiendo una forma jerárquica y secuencial, en que, primeramente, presentamos las ideas más generales e inclusivas del contenido que ha sido abordado para después progresivamente diferenciarlo en términos de detalles y especificidades. Además, buscamos realizar la reconciliación integrativa. Por fin, incentivamos el uso de recursos computacionales, por parte del alumno, para ayudarlo en el proceso de asimilación del contenido, de manera que le facilite la comprensión y le permita una mejor visualización y análisis de los resultados.

3.2 La Teoría Socio-interaccionista de Vygotsky

Vygotsky (2003) construye su teoría a partir del desarrollo cognitivo del individuo como resultado de un proceso social-histórico-cultural. Este autor se preocupa por la dimensión social de la apropriación de los conocimientos, defiende que la interacción social es extremadamente importante para el aprendizaje, pues ejerce un papel fundamental en el desarrollo de la cognición.

El desarrollo y el aprendizaje no es lo mismo y, por consiguiente, no deben ser confundidos. Existe una relación entre el determinado nivel de desarrollo y la capacidad potencial de aprendizaje. Vygotsky (op. cit.) señala que para definir la relación efectiva entre el desarrollo y el aprendizaje es necesario determinar, por lo menos, dos niveles de desarrollo, caso contrario no conseguiremos la relación entre el desarrollo y la posibilidad de aprendizaje. El autor identifica los dos niveles de desarrollo:

1. El nivel de **desarrollo real** que es determinado por la capacidad del individuo para solucionar de forma independiente las actividades que le son propuestas. El individuo consigue resolver problemas solo, sin que nadie le ayude. El nivel de desarrollo real está relacionado a las funciones o capacidades que ya han sido dominadas por el sujeto, se refiere al desarrollo efectivo, consolidado.
2. El nivel de **desarrollo potencial** está relacionado a la capacidad del sujeto de resolver problemas bajo orientación de otra persona o con la cooperación de sus compañeros.

Entre estos dos niveles se ubica la *zona de desarrollo próximo*, considerado como un nivel intermediario, y definido como la distancia entre el nivel de desarrollo cognitivo real del individuo y su nivel de desarrollo potencial. En este nivel, el sujeto llega a ser capaz de resolver problemas que no conseguiría resolver solo, desde que otras personas le ayuden. Ello se refiere a la ampliación de las posibilidades cognitivas, cuando se interactúa con otros se mejora comparativamente lo que se puede realizar solo.

La *zona de desarrollo próximo* es potencializada a través de la interacción social, es decir, las habilidades pueden ser desarrolladas con la ayuda del profesor o por medio de la colaboración de los compañeros. Las interacciones para la construcción del conocimiento o del aprendizaje ocurren en la zona de desarrollo próximo, por lo tanto, ésta es dinámica y está en constante cambio. De acuerdo con las bases constructivistas, el conocimiento no es directamente transmitido de una persona a otra, es activamente construido por el alumno. El profesor tiene el papel explícito de interferir en el proceso causando avances en los alumnos. Ello llega a ser posible a través de la interferencia del profesor en la zona de desarolho próximo del alumno.

El aprendizaje no coincide con el desarrollo, la zona de desarrollo próximo es el intermediario obligatorio entre los dos conceptos. Vygotsky (apud VERGNAUD, 2004, p.31) afirma: "*O único ensino bom é o que precede o desenvolvimento*". La zona de desarrollo próximo tiene un significado más directo para la dinámica del desarrollo intelectual y el éxito del aprendizaje de que el nivel real.

Gaspar (2004) explica que nuestra mente crea las estructuras cognitivas necesarias a la comprensión de un determinado concepto a medida que éste está siendo aprendido y, según la teoría de Vygotsky, esas estructuras solamente comenzarán a ser construidas, en el momento en que se enseñen nuevos conceptos. El desarrollo cognitivo no posibilita el aprendizaje, pero el proceso de enseñar y el esfuerzo de aprender son los que promueven el desarrollo cognitivo (p.86).

La intervención del profesor en la zona de desarrollo próximo es un momento privilegiado en el proceso pedagógico, pues permite estimular los avances que no ocurrirían de manera espontánea. El aprendizaje con el otro crea condiciones para una serie de procesos de desarrollo, los cuales únicamente se producen en el plano de la comunicación y de la colaboración de adultos y compañeros, que llegarán a ser más tarde un logro propio del niño. Vygotsky (apud VERGNAUD, 2004, p.31) explica:

> "Cada função psíquica superior aparece duas vezes ao longo do desenvolvimento da criança: primeiramente como atividade coletiva, social e, portanto, como função interpsíquica; depois, a segunda vez como atividade individual, como propriedade interior do pensamento da criança, como função intrapsíquica"

Según el autor, el desarrollo cognitivo es la transformación de las relaciones sociales en funciones mentales. Esta conversión no es directa, necesita ser mediada. Las funciones psicológicas superiores presentan una estructura de manera que entre el hombre y el mundo real existen mediadores, herramientas auxiliares de la actividad humana. Vygotsky (2003) presenta dos tipos de elementos mediadores:

- Instrumentos (herramientas): es algo que puede ser usado para hacer alguna cosa. Toda actividad social es condicionada por los aspectos materiales.
- Signos: el signo es algo que significa alguna otra cosa. La invención y el uso de signos como medios auxiliares para solucionar un dado problema psicológico es análogo a la invención y al uso de instrumentos, sólo que ahora en el campo psicológico.

El individuo, a través de la interacción social, se desarrolla cognitivamente apropiándose de (interiorizando) instrumentos y signos, que son construcciones socio-históricas-culturales. La interiorización de signos es esencial para el desarrollo humano, pues median la relación de la persona con las otras y consigo misma.

Existen tres tipos de signos:

> "1. indicadores são aqueles que têm uma relação de causa e efeito com aquilo que significam;
> 2. icônicos são imagens ou desenhos daquilo que significam;
> 3. simbólicos são os que têm uma relação abstrata com o que significam." (MOREIRA, 2003, p. 111)

Pretendemos señalar que en el aprendizaje de ecuaciones diferenciales los signos más frecuentes son los simbólicos. Éstos representan las mayores dificultades de aprendizaje de los alumnos en relación al contenido. Podemos afirmar que en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, por lo general, estos signos están muy presentes y, a menudo, representan un gran problema para los alumnos. El alumnado posee dificultades para introducir la simbología matemática, probablemente, debido al hecho de ésta no estar tan presente en su cotidiano, o, asimismo, en función de ser abordada de forma muy descontextualizada o de tener un nivel de abstracción muy elevado, que perjudica el desarrollo cognitivo.

Vygotsky (2000) destaca la gran importancia del papel de los signos en el proceso de enseñanza-aprendizaje, pues éstos median la relación de los seres humanos entre sí y el mundo. El autor afirma que el ser humano se constituye como tal a partir de su relación con el "otro" social. La cultura proporciona al individuo los sistemas simbólicos de representación de la realidad. A lo largo del desarrollo, estas formas culturales son interiorizadas en un proceso en que las actividades externas se transforman en actividades internas. Para interiorizar los signos, el individuo necesita captar los significados que ya han sido compartidos socialmente, necesita pasar a compartir significados aceptados en el contexto social en que se encuentra. En este ambiente, la interacción social es importante para que el individuo pueda captar significados y verifique si los significados que capta son socialmente compartidos para los signos en cuestión.

En ese proceso, el lenguaje tiene un papel fundamental, sirve a la comunicación entre los individuos y suministra categorías conceptuales cuyo significado es compartido por los usuarios de la lengua. El lenguaje es el sistema simbólico de los grupos humanos que proporciona las formas de organización de lo real, la mediación entre el sujeto y el objeto del conocimiento. A través de este sistema simbólico es que las funciones mentales superiores son socialmente formadas y culturalmente transmitidas, por lo tanto, las sociedades y culturas diferentes producen estructuras diferenciadas. El lenguaje tiene un papel relevante en esta teoría, y todas las herramientas auxiliares que puedan ser utilizadas para mediar las relaciones humanas, obtendrán un espacio mayor en la educación. Según Vygotsky (apud VERGNAUD, 2004, p.65): "*A linguagem exteriorizada é um processo de transformação do pensamento em palavras, sua materialização, sua objetivação"*.

Específicamente en lo que concierne a la enseñanza, Vygotsky (apud MOREIRA) destaca:

> "... o papel fundamental do professor como mediador na aquisição de significados contextualmente aceitos, o indispensável intercâmbio de significados entre professor e aluno dentro da zona de desenvolvimento proximal do aprendiz, a origem social das funções mentais superiores, a linguagem, como o mais importante sistema de signos para o desenvolvimento cognitivo..." (p. 120)

En un episodio de enseñanza, el profesor que ya posee interiorizados los significados socialmente compartidos para los materiales educativos del currículo y que ha interiorizado instrumentos y signos contextualmente aceptados, les presenta a los alumnos significados socialmente aceptados en el contexto de la materia de enseñanza. El alumno, a través de la interacción con el profesor, demuestra el significado que ha captado. Por consiguiente, corresponde al profesor la verificación de este significado. La enseñanza se realiza cuando el alumno y el profesor comparten el mismo significado. El intercambio de significados entre el profesor y los alumnos es fundamental para el aprendizaje.

El profesor es el mediador del aprendizaje del alumno, le facilita al alumno el dominio y la apropiación de los diferentes instrumentos culturales. La acción docente solamente tendrá sentido si es realizada en la zona de desarrollo próximo. El profesor necesita potencializar el proceso de aprendizaje del estudiante, es decir, precisa intermediar en aquello que el alumno todavía no es capaz de resolver solo, a partir de estrategias que lo lleven a volverse independiente. Muchas veces valoramos únicamente el nivel de desarrollo real de los alumnos, ya sea durante las clases, ya sea en los momentos de evaluación, pues les ponemos exámenes y les exigimos que los realicen solos, sin que puedan discutir con los compañeros o incluso sacar dudas con el profesor. Perdemos así la oportunidad de observar que muchas preguntas que los alumnos no responden, o que presentan respuestas "con errores," si hubieran sido realizadas con la mediación del profesor o compañeros que tienen más experiencia, habrían obtenido respuestas positivas. Muchas veces si el profesor interviene, desafía, estimula o apoya al alumno cuando éste demuestra dificultad en un determinado punto, es posible que consiga trabajar funciones que todavía no están consolidadas totalmente. En el momento en que no tenemos en cuenta estas funciones que se encuentran en proceso de consolidación, dejamos de actuar en la zona de desarrollo próximo.

El profesor no se debe considerar como centro del proceso, que "enseña" para que los alumnos pasivamente aprendan; tampoco debe organizar propuestas de aprendizaje de modo que el alumnado deberá desarrollar sin que él tenga que intervenir. Es necesario que el profesor proporcione actividades en grupo, para que los que estén más adelantados en relación al aprendizaje, puedan cooperar con los demás. A través de sus intervenciones, los que están más adelantados contribuirán para el fortalecimiento de funciones, que todavía no están consolidadas, en los que tienen dificultades, o para la abertura de zonas de desarrollo próximo.

Según Gaspar (2004), el tiempo que el aprendizaje de un nuevo conocimiento durará depende de la forma como éste le ha sido presentado al aprendiz, de la manera como ocurre la interacción entre personas más capaces, del desnivel cognitivo que debe ser superado y de la complejidad de las estructuras mentales que deben ser construidas para que se posibilite esa adquisición.

El alumno no aprende por el simple hecho de manipular objetos, realizar experiencias, simulaciones o resolver actividades. El alumno aprende interactuando con sus compañeros, profesores u otra persona que sea capaz de actuar en la zona de desarrollo próximo. A pesar del alumno poseer materiales considerados motivadores, desafiadores y bien planeados, necesita interactuar. Gaspar (2004) describiendo preguntas acerca de la enseñanza de la física afirma:

> "Nenhuma experiência é autoexplicativa sem a orientação do professor, os alunos muitas vezes nem sequer vêem o que se espera ou se deseja que vejam. E mesmo quando vêem e com essa visão se encantam, não há razão para supor que isso seja o bastante para que aprendamos conceitos que dela podem ser extraídos." (p. 88)

Y ejemplifica:

> "Não é possível acreditar que, pela simples observação do apagar de uma vela tapada por um copo, um grupo de alunos possa concluir que a chama apagou porque consumiu o oxigênio aprisionado; ou que observando um bastão atritado com um lenço atrair papeizinhos alguém possa, sem conhecimento teórico prévio, concluir que o lenço cedeu ou tirou elétrons do bastão, este polarizou eletricamente os papeizinhos e assim os atraiu. Isso só será possível se o professor, parceiro mais capaz dessa interação, ao passar "continuamente da mesa para a lousa" apresentar aos seus alunos os modelos teóricos criados pelo ser humano ao longo de séculos para descrever essas observações."(p. 88)

A partir de las ideas de Vygotsky, señalando principalmente el papel fundamental de la interacción social en el proceso enseñanza-aprendizaje, en nuestro trabajo, optamos por dar a los alumnos situaciones en que puedan interactuar socialmente con la profesora y compañeros, de manera que les ayude en el desarrollo de sus habilidades cognitivas, para que puedan aprender lo que pretendemos enseñar. Buscamos utilizar los recursos computacionales como instrumentos mediadores para actuar en la zona de desarrollo próximo del alumno, potencializando la construcción de su conocimiento. A través del lenguaje por medio de íconos requerido por el *software* Powersim para representar situaciones que involucran ecuaciones diferenciales buscamos proporcionar a los alumnos una mejor comprensión e interpretación de este contenido, sin necesariamente estar en posesión de la solución analítica. Asimismo incentivamos el uso de recursos computacionales, como una herramienta auxiliar del alumno, para que éste exteriorice sus ideas y también actúen sobre éstas.

4 ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE 1º E 2º ORDEN

En este capítulo presentamos, brevemente, el contenido de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs). Nos centramos en tópicos de interés de este contenido en las asignaturas, que normalmente impartimos en los cursos de Ingeniería, y en los objetivos que tenemos al introducir EDOs en clase, que son los siguientes:

- representar matemáticamente, a través de EDOs, situaciones-problema;
- obtener informaciones sobre el comportamiento de las soluciones de EDOs sin resolverlas analíticamente, pero solamente mediante el análisis semicuantitativo de variables y parámetros y, conociendo las representaciones gráficas básicas para las EDOs trabajadas, el impacto de la alteración de sus valores en la representación gráfica de estas soluciones;
- promover el dominio de las técnicas de soluciones analíticas de EDOs, sabiendo clasificarlas conforme criterios de orden y linealidad.

Inicialmente, en la sección 4.1, presentamos la definición y la clasificación de EDOs; posteriormente, en la sección 4.2, abordamos algunos temas relacionados con la solución analítica y la representación gráfica de la solución de una EDO y el método de Euler para obtener una solución aproximada a un problema de valor inicial regido por una ecuación del tipo $y' = f(x, y)$ y una condición inicial $y(x_0) = y_0$. En la sección 4.3 presentamos algunas técnicas analíticas para resolver EDOs y, por último, en la sección 4.4, mostramos brevemente el foco de las EDOs que proponemos en nuestros estudios, en que pretendemos abordar el contenido de forma menos dependiente de la expresión analítica de su solución.

4.1 Definición, clasificación y orden de una ecuación diferencial

Zill (2003, p.2) define una ecuación diferencial como sigue.

Definición 4.1.1 *Una ecuación que contiene las derivadas (o diferenciales) de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes es una ecuación diferencial (ED).*

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 4.1.1

$\frac{dT}{dt}=k(T-T_a)$ (Ley de enfriamiento de Newton), Eq.1

donde *T* (Temperatura) es una función de la variable independiente *t* (tiempo), *Ta* (Temperatura del ambiente) es una constante y *k* es una constante de proporcionalidad.

Ejemplo 4.1.2

$y'-5x=0$, Eq.2

donde y' denota la diferenciación de *y* con respecto a *x*.

Ejemplo 4.1.3

$\frac{d^2y}{dx^2}+x^2\frac{dy}{dx}-y=8,$ Eq.3

donde *y* es una función de la variable independiente *x*.

Ejemplo 4.1.4

$a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ (Ecuación de la onda), Eq.4

donde y es una función de las variables independientes x y t.

Las ecuaciones diferenciales pueden ser clasificadas de acuerdo con su tipo.

i. Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs): son las ecuaciones que contienen una sola variable independiente (ex.: Eq.1, Eq.2 y Eq.3).

ii. Ecuaciones diferenciales parciales (EDPs): son las ecuaciones que contienen más de una variable independiente (ex.: Eq.4).

El orden de una ecuación diferencial es determinado por la derivada de mayor orden en la ecuación, cuyo coeficiente es diferente de zero. Por ejemplo, la Eq.1 y Eq.2 son ecuaciones de primer orden y la Eq.3 y Eq.4 son ecuaciones de segundo orden.

En nuestros estudios, abordamos sólo algunos casos de EDOs de primero y segundo orden, que es el de primer orden de variables separables**,** las ordinarias lineales de primer orden y las ordinarias lineales de segundo orden con coeficientes constantes. A continuación, definimos cada una.

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden

Sigue la definición de Zill (2003, p.60).

Definición 4.1.2 *Una ecuación diferencial de primer orden, de la forma* $a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$ es una *ecuación lineal.*

Cabe señalar que $a_1(x)$, $a_0(x)$ e $g(x)$ son funciones de la variable independiente x y que $a_1(x)\neq 0$.

Con la división de ambos lados de la ecuación $a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$ por $a_1(x)$ obtenemos

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x) \qquad \text{Eq. 5}$$

donde $P(x)=\frac{a_0(x)}{a_1(x)}$ y $f(x)=\frac{g(x)}{a_1(x)}$.

La Eq.5 es denominada forma estándar de una ecuación lineal.

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de variables separables

Zill (2003, p.52) define una ecuación separable de la siguiente manera.

Definición 4.1.3 U*na ecuación diferencial de primer orden de la forma* $\frac{dy}{dx}=g(x)h(y)$ *es llamada separable o de variables separables.*

Escrito en forma $\frac{dy}{h(y)}=g(x)dx$, con $h(y)\neq 0$, es claro que el coeficiente de *dy, 1/h(y)*, sólo depende de *y,* y el coeficiente de *dx*, *g(x)*, sólo de *x*. Por otra parte, el lado izquierdo de la ecuación depende sólo de *y* el lado derecho de *x*, que justifican la denominación de "variables separables."

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

Boyce y DiPrima (2006, p.74) definen ecuaciones lineales de segundo orden de la siguiente manera.

Definición 4.1.4 *Una ecuación diferencial de segundo orden posee la forma* $\frac{d^2y}{dt^2}=f\left(t,y,\frac{dy}{dt}\right)$ *donde f es alguna función dada. Si* $f\left(t,y,\frac{dy}{dt}\right)=g(t)-p(t)\frac{dy}{dt}-q(t)y$, *con g, p* y *q funciones de la variable independiente t, la ecuación es dicha lineal.*

Es conveniente escribir la ecuación diferencial lineal de segundo orden como sigue

$$y''+p(t)y'+q(t)y=g(t), \qquad \text{Eq.6}$$

donde y' denota la diferenciación de *y* con respecto a *t*.

Si $p(t)$ y $q(t)$ son constantes, se dice la ecuación con coeficientes constantes, de lo contrario se llama de coeficientes variables. Cuando $g(t)=0$ se afirma que la ecuación diferencial es homogénea y si $g(t)\neq 0$ la ecuación diferencial es no homogénea.

4.2 Solución de una ecuación diferencial

Podemos ofrecer la solución de una ecuación diferencial en una forma analítica, gráfica o numérica.

4.2.1. Solución analítica

Zill (2003, p.4) define la solución analítica de una ecuación diferencial como sigue.

Definición 4.2.1 C*ualquier función* ϕ *definida en un intervalo I que posee por lo menos n derivadas continuas en I, las cuales cuando son sustituidas en una ecuación diferencial ordinaria de orden n reducen la ecuación a una identidad, es una solución de la ecuación diferencial en el intervalo.*

Ejemplo 4.2.1

Dada la ecuación $y'+2y=0$, una solución es $y=e^{-2x}$, pues sustituyendo $y=e^{-2x}$ y su derivada $y'=-2e^{-2x}$ en la ecuación, obtenemos $-2e^{-2x}+2e^{-2x}=0$.

La solución analítica general es una familia de funciones que satishacen la ecuación diferencial y la solución particular es una solución obtenida atribuyéndose valores específicos a las constantes que están en la solución general.

Ejemplo 4.2.2

$y = c\,e^{-2x}$ es la solución general de $y' + 2y = 0$, donde c representa una constante cualquiera. Teniendo en cuenta la condición inicial $y(0) = 3$ es posible obtener el valor de *c*, y escribir la solución particular a esta situación, como sigue:

$$y = c\,e^{-2x} \;\Rightarrow\; 3 = c e^{0} \;\Rightarrow\; 3 = c \;\Rightarrow\; c = 3$$

por lo tanto, la solución particular será $y = 3e^{-2x}$.

4.2.2 Representación gráfica de la solución

La representación gráfica de la solución general de una ecuación diferencial de primer orden consiste en una familia infinita de curvas y la solución particular es una de estas curvas.

Ejemplo 4.2.3

La solución general de la ecuación diferencial $y' = \frac{2y}{x}$ es $y = cx^2$, donde *c* es una constante cualquiera. Si $y(2) = 8$ entonces $c = 2$ y la solución particular será $y = 2x^2$, como puede verse en la Figura 4.1

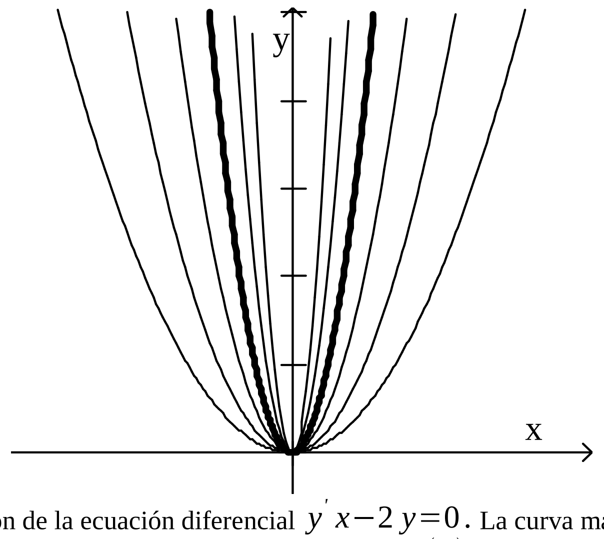


Figura 4.1 Curvas-solución de la ecuación diferencial $y' x - 2y = 0$. La curva más gruesa representa la solución particular para el caso en $y(2) = 8$.

4.2.3 Un método numérico para encontrar la solución de una ecuación diferencial ordinaria (Método de Euler)

Para algunas ecuaciones diferenciales se puede obtener una solución analitica desde expresiones matemáticas envolviendo funciones conocidas, como polinomios, exponenciales, ... utilizando técnicas analiticas de resolución, como se ha visto anteriormente. Pero, en muchos casos, no se puede encontrar este tipo de soluciones y entonces tenemos que recurrir a métodos numéricos. Describimos el Método de Euler basado en Boyce y DiPrima (2006).

El método de Euler consiste en aproximar la solución de un problema de valor inicial de forma

$$\frac{dy}{dt}=f(t,y) \text{ y } y(t_0)=y_0. \qquad \text{Eq.7}$$

Si f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ *son contínuas entonces el problema de valor inicial Eq.7 posee una sola solución* $y=\phi(t)$ *en un intervalo que contiene el punto inicial* $t=t_0$. *El gráfico de la solución conitene el punto* $(t_{0,}y_0)$ *y la inclinación de la recta tangente al gráfico en este ponto es* $f(t_{0,}y_0)$. *Podemos, entonces, escribir una ecuación para la recta tangente a la curva solución en* $(t_{0,}y_0)$ *como sigue*

$$y=y_0+f(t_{0,}y_0)(t-t_0). \qquad \text{Eq.8}$$

La recta tangente es una buena aproximación para la curva solución en un intervalo suficientemente pequeño, de modo que la inclinación de la recta tangente a la curva solución no es muy distinta de su valor en el punto inicial. Así, si t_1 *está suficientemente próximo de* t_0, *podemos aproximar* $\phi(t)$ *a través del valor* y_1 *obtenido a través de la sustitución de* $t=t_1$ *en la ecuación de la recta tangente en el punto* $t=t_0$; *por lo tanto*

$$y_1=y_0+f(t_{0,}y_0)(t_1-t_0).$$

A fín de seguir con la descripción del método, calculamos un valor *aproximado para* y_1 y *construimos la recta conteniendo el punto* $(t_{1,} y_1)$ *con coeficiente angular* $f(t_{1,} y_1)$,

$$y = y_1 + f(t_{1,} y_1)(t - t_1).$$

Para aproximar el valor de $\phi(t)$ *en un próximo punto* t_2, *usamos*

$$y_2 = y_1 + f(t_{1,} y_1)(t_2 - t_1).$$

Siguiendo de ese modo, usamos el valor de y calculado en cada etapa para determinar el coeficiente angular para la próxima aproximación. La expresión general para y_{n+1} *en función de* t_n, t_{n+1} *e* y_n *es*

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)(t_{n+1} - t_n) \text{ con } n = 0,1,2,3,...$$

Suponiendo que existe un tamaño uniforme para el paso h entre los puntos $t_{0,} t_{1,} t_{2,...}$ *entonces* $t_{n+1} = t_n + h$ *para cada n, obtenemos la fórmula de Euler como*

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n) h \text{ con } n = 0,1,2,3,...$$

Usando incrementos cada vez menores, obtenemos una buena aproximación de $\phi(t)$ *en un determinado t.* (Adaptado de BOYCE y DIPRIMA, 2006, p. 56-57)

4.3 Técnicas analíticas para resolver ecuaciones diferenciales

Las técnicas analíticas son métodos para resolver determinados tipos de ecuaciones diferenciales, y a partir de ellos se obtiene las soluciones analíticas, representadas por funciones. En nuestro estudio, tratamos específicamente de tres técnicas analíticas, como presentamos a continuación.

4.3.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden separables

Ecuaciones diferenciales separables pueden ser resueltas por la integración.

Consideremos la ecuación separable $\frac{dy}{h(y)}=g(x)dx$. Es conveniente considerar $\frac{1}{h(y)}=p(y)$ para escribirse $p(y)dy=g(x)dx$ e integrando ambos lados de esta ecuación

$$\int p(y)dy=\int g(x)d(x)$$

se obtiene la solución general $H(y)=G(x)+c$, dónde $H(y)$ y $G(x)$ son antiderivadas de $p(y)=\frac{1}{h(y)}$ y $g(x)$, respectivamente. (ZILL, 2003, p. 52)

Ejemplo 4.3.1

Dada la ecuación $y'=x^3y^2$, resolvemos de la siguiente manera

$$\frac{dy}{dx}=x^3y^2 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y^2}=x^3dx \;\Rightarrow\; \int\frac{dy}{y^2}=\int x^3dx \;\Rightarrow\; -\frac{1}{y}=\frac{x^4}{4}+c \;\Rightarrow\; y=\frac{4}{c-x^4}.$$

4.3.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden

Para resolver analíticamente una ecuación diferencial lineal de la forma de la Eq.5 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)$, con $P(x)$ integrable y diferente de cero, calculamos el factor integrante

$$e^{\int P(x)dx} \qquad \text{Eq.9}$$

y multiplicamos todos los términos de la Eq.5 por este factor, obteniendo

$$e^{\int P(x)dx}y'+e^{\int P(x)dx}P(x)y=e^{\int P(x)dx}f(x).$$

Por otro lado,

$$e^{\int P(x)dx}y'+e^{\int P(x)dx}P(x)y=\frac{d}{dx}\left(ye^{\int P(x)dx}\right)$$

entonces

$$\frac{d}{dx}(ye^{\int P(x)dx})=e^{\int P(x)dx}f(x).$$

Con la integración de ambos lados de la igualdad, obtenemos

$$\int \frac{d}{dx}(ye^{\int P(x)dx})dx=\int e^{\int P(x)dx}f(x)dx$$

resultando en

$$y=\frac{\int e^{\int P(x)dx}f(x)dx}{e^{\int P(x)dx}}. \qquad \text{Eq.10}$$

Ejemplo 4.3.2

Dada la ecuación $y'+\frac{1}{x}y=x^3$, calculamos el factor integrante

$$e^{\int \frac{1}{x}dx}\Rightarrow e^{\ln x}\Rightarrow x$$

y multiplicamos todos los términos de la ecuación por este factor, obteniendo

$$x\,y'+x\frac{1}{x}y=x\,x^3.$$

Entonces $\frac{d(y\,x)}{dx}=x^4 \;\Rightarrow\; \int \frac{d(y\,x)}{dx}dx=\int x^4 dx$

donde

$$y\,x=\frac{x^5}{5}+C \;\Rightarrow\; y=\frac{x^4}{5}+\frac{C}{x}.$$

Ejemplo 4.3.3

Dada la ecuación que rige la velocidad de los objetos en situaciones de movimiento vertical, bajo acción de la gravedad y la resistencia del aire:

$$m\frac{dv}{dt}+kv=mg\,,$$

donde *v* es una función de la variable independiente *t* y *m*, *k* y *g* son constantes, con $m \neq 0.$ Para escribir en forma estándar dividimos los términos de la ecuación por *m* y obtenemos

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g \text{ o } v' + \frac{k}{m} v = g.$$

Calculamos el factor integrante

$$e^{\int \frac{k}{m} dt} = e^{\frac{k}{m} t}$$

y multiplicamos todos los términos de la ecuación por este factor, obteniendo

$$e^{\frac{k}{m} t} v' + e^{\frac{k}{m} t} \frac{k}{m} v = g e^{\frac{k}{m} t}.$$

Entonces $\dfrac{d(v e^{\frac{k}{m} t})}{dt} = g e^{\frac{k}{m} t} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{d(v e^{\frac{k}{m} t})}{dt} dt = \int g e^{\frac{k}{m} t} dt$

donde

$$v e^{\frac{k}{m} t} = \frac{mg\, e^{\frac{k}{m} t}}{k} + C \quad \Rightarrow \quad v = \frac{mg}{k} + C e^{\frac{-k}{m} t}.$$

4.3.3 Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

Presentamos, brevemente, basado en teoremas citados en Boyce y DiPrima (2006) y Zill (2003), la técnica de resolución a la ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes.

Teorema 4.3.1 *Considere el problema de valor inicial* $y'' + p(t) y' + q(t) y = g(t),\ y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y'_0$ *donde p, q y g son funciones continuas en un intervalo abierto I. Entonces, existe exactamente una solución* $y = \phi(t)$ *de ese problema, y la solución existe en todo intervalo I.* (adaptado de BOYCE y DIPRIMA, 2006, p.79)

Teorema 4.3.2 (Princípio de la Superposición) *Si* y_1 y y_2 *son soluciones de la ecuación diferencial* $y^{''}+p(t)y^{'}+q(t)y=0,$ *entonces la combinación lineal* $c_1 y_1+c_2 y_2$, *también es solución, cualesquiera que sean los valores de las constantes* c_1 *e* c_2. (adaptado de BOYCE y DIPRIMA, 2006, p.79)

Definición 4.3.1 (Conjunto fundamental de soluciones) *Si* y_1 y y_2 *son soluciones linealmente independientes*[6]*(LI) de la ecuación diferencial* $y^{''}+p(t)y^{'}+q(t)y=0$ *en un intervalo I, entonces* y_1 y y_2 *formam un conjunto fundamental de soluciones en el intervalo.* (adaptado de ZILL, 2003, p.146)

Teorema 4.3.3 *Existe un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación diferencial* $y^{''}+p(t)y^{'}+q(t)y=0$ *en un intervalo I.* (adaptado de ZILL, 2003, p.146)

Teorema 4.3.4 (Solución General, Ecuaciones Homogéneas) *Si* y_1 y y_2 *es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial* $y^{''}+p(t)y^{'}+q(t)y=0$ *en un intervalo I. Entonces, la solución general de la ecuación en el intervalo es* $y=c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x)$, *donde* c_1 y c_2 *son constantes arbitrarias.* (adaptado de ZILL, 2003, p.146)

Teorema 4.3.5 (Solución General, Ecuaciones No Homogéneas) *Si* y_p *es una solución particular cualquiera de la ecuación diferencial lineal no homogénea,* $y^{''}+p(t)y^{'}+q(t)y=g(x)$, *en un intervalo I, y si* y_1 y y_2 *es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea* $y^{''}+p(t)y^{'}+q(t)y=0$ *,en I. Entonces, la solución general de la ecuación en el intervalo es* $y=c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x)+y_p$, *donde* c_1 y c_2 *son constantes arbitrarias.* (adaptado de ZILL, 2003, p. 148)

Considerando que abordamos sólo las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes, rescribimos la ecuación

---

6 Duas funciones f y g son LI en un intervalo I si la combinación lineal $c_1 f(x)+c_2 g(x)=0$ sólo es válida para todo *x* en el intervalo I si $c_1=c_2=0,$ caso contrário son linearmente dependentes (LD).

$y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$ como $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ con a_0, a_1 y a_2 constantes.

Observando la ecuación homogénea, nos damos cuenta de que función-solución debe tener la propiedad de que sus derivadas del primero y segundo orden son funciones iguales a la función-solución multiplicada por constantes. Entonces las funciones exponenciales e^{mx} son las probables candidatas para la solución porque las derivadas de tales funciones son exponenciales e^{mx} multiplicadas por constantes (potencias de *m*).

Considerando, entonces, la función $y = e^{mx}$ como solución y sustituyéndola en la ecuación homogénea, respectivamente, con la derivada del primero y segundo orden, $y' = me^{mx}$ y $y'' = m^2 e^{mx}$ obtenemos $m^2 a_2 e^{mx} + m\,a_1 e^{mx} + a_0 e^{mx} = 0$.

Con la división de esta ecuación por e^{mx}, obtenemos $a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0$, que se llama ecuación característica.

Si resolvemos esta ecuación característica, encontramos los valores de *m*, y consecuentemente las soluciones de la ecuación diferencial homogénea.

Para esta ecuación característica (ecuación de 2º grado), hay tres posibilidades diferentes de raíces, según los valores de *m*. Abordaremos éstas en los tres casos que siguen:

1º caso: dos valores reales y diferentes para *m*, m_1 y m_2

Entonces tenemos dos soluciones, $y_1 = e^{m_1 x}$ y $y_2 = e^{m_2 x}$. Como y_1 y y_2 son LI, la solución general para este caso es $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$.

Ejemplo 4.3.4

Dada la ecuación diferencial $y'' - y' - 6y = 0$, su ecuación característica es $m^2 - m - 6 = 0$, cuyas soluciones son $m_1 = -2$ y $m_2 = 3$. Por lo tanto, la solución general será $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$.

2º caso: dos valores reales y iguales para *m*

Entonces tenemos $y_1=e^{mx}$ y $y_2=e^{mx}$. Como y_1 y y_2 no son LI, usamos el procedimiento de redución de orden, cuya demonstración entendemos prescindible, y obtenemos $y_2=xe^{mx}$, tornando por tanto, y_1 y y_2 LI, y la solución general para este caso es $y(x)=c_1e^{mx}+c_2xe^{mx}$.

Ejemplo 4.3.5

Dada la ecuación diferencial $y''-4y'+4y=0$, su ecuación característica es $m^2-4m+4=0$, cuya solución es $m=2$. Por lo tanto, la solución general será $y(x)=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$.

3º caso: dos valores complejos y conjugados para *m*: $m_1=p+qi$ y $m_2=p-qi$, con p y $q>0$ reales, y $i^2=-1$

Entonces $y_1=e^{(p+qi)x}$ y $y_2=e^{(p-qi)x}$. Como y_1 y y_2 son LI, la solución general para este caso es $y(x)=c_1e^{(p+qi)x}+c_2e^{(p-qi)x}$. Usando la relación de Euler $e^{ix}=\cos x+i\,sen\,x$, podemos escribir la solución general como $y=e^{px}(k_1\cos(qx)+k_2sen(qx))$.

Ejemplo 4.3.6

Dada la ecuación diferencial $y''+2y'+6y=0$, su ecuación característica es $m^2+2m+6=0$, cuyas soluciones son $m_1=-1+\sqrt{5}i$ y $m_2=-1-\sqrt{5}i$. Por lo tanto, la solución general será $y=e^{-x}(k_1\cos(\sqrt{5}x)+k_2sen(\sqrt{5}x))$.

Para resolver las ecuaciones diferenciales no homogéneas del tipo

$$a_2y''+a_1y'+a_0y=g(x)$$

utilizaremos el Método de Coeficientes a Determinar. Inicialmente consideramos la ecuación como homogénea y la resolvemos como se ha descrito anteriormente. Obtenemos entonces y_h (solución homogénea), que es una parte de la solución general

$y(x)=y_h+y_p$, y resta determinar y_p.

El método de los coeficientes a determinar consiste en elegir para y_p una función que tiene la misma forma de $g(x)$, pero con los coeficientes no especificados. Esta función puede ser una constante, una función polinómica, una función exponencial e^{ax}, una función del seno o cos, $sen(ax)$ o $\cos(ax)$, o sumas y productos finitos de estas funciones.

Veamos algunos ejemplos.

Si $g(x)=2x^2+3x-1$ elegimos $y_p=Ax^2+Bx+C$.

Si $g(x)=2\sin(3x)$ elegimos $y_p=A\cos(3x)+B\sin(3x)$.

Si $g(x)=4e^{2x}$ elegimos $y_p=Ae^{2x}$.

E la secuencia calculamos la derivada de primero y la segundo orden de la función y_p elegida y sustituimos en la ecuación diferencial para encontrar el valor de las constante implicadas.

Ejemplo 4.3.7

Dada la ecuación diferencial

$$y''-3y'-4y=3e^{2x}, \qquad \text{Eq.11}$$

la ecuación homogénea es $y''-3y'-4y=0$ y su ecuación característica, $m^2-3m-4=0$. Resolviéndola obtenemos $m_1=-1$ y $m_2=4$. Por lo tanto

$$y_h=c_1e^{-x}+c_2e^{4x}.$$

Para calcular y_p, elegimos $y_p=Ae^{2x}$, donde el coeficiente *A* necesita ser determinado. Para encontrar *A*, calculamos

$$y_p'=2Ae^{2x} \text{ y } y_p''=4Ae^{2x}.$$

Substituyendo en la Eq. 11

$$4Ae^{2x}-3\cdot 2Ae^{2x}-4Ae^{2x}=3e^{2x} \Rightarrow -6Ae^{2x}=3e^{2x}$$

por lo tanto $A=\frac{-1}{2}$. Tan $y_p=\frac{-1}{2}e^{2x}$ y la solución general será

$$y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{4x}-\frac{1}{2}e^{2x}.$$

4.4 Abordaje utilizado en los estudios realizados

En el ámbito de las Ciencias Naturales, muchos fenómenos pueden ser descritos a través del uso de relaciones matemáticas envolviendo tasas, según las cuales las grandezas de interés varían en el tiempo, o en el espacio. Comúnmente estas relaciones son expresadas por ecuaciones diferenciales que envuelven funciones de las variables involucradas, y tasas de variación relacionadas. Las EDs son de gran importancia en varias áreas de conocimiento, como Física, Química, Economía, por poseer una aplicabilidad muy grande. Una de las razones básicas de la importancia de las EDs es que mismo las ecuaciones más simples corresponden a modelos útiles, como el crecimiento y el decaimiento exponencial, problemas de mezcla o circuitos eléctricos.

Las EDs pueden ser abordadas de varias maneras, siendo la más común la clase tradicional, en la que el contenido es abordado de forma más estructural y que enfoca la solución analítica, en oposición de las soluciones gráfica y numérica. En nuestro trabajo consideramos las ecuaciones diferenciales como un instrumento para explorar modelos y resolver problemas y buscamos abordar, equilibrada y simultáneamente, representaciones gráficas, numéricas y simbólicas. Buscamos un enfoque más cualitativo de las EDs, trabajando el contenido con mayor énfasis en la contextualización, a través de situaciones-problema buscando motivar a los alumnos, pretendiendo explorar más preguntas conceptuales de modo a ayudarlos a dar significado a las EDOs y a sus soluciones. Nuestro objetivo es estimular a los estudiantes a cambiar el enfoque de la simple manipulación analítica de las ecuaciones diferenciales, para la comprensión de su carácter representativo, exigiéndoles que piensen de un modo más interpretativo. Inicialmente, exploramos la interpretación de las EDOs y el comportamiento de las soluciones con la ayuda de recursos tecnológicos para facilitar y agilizar el proceso y sólo después abordamos las técnicas. Dentro de las técnicas, nos limitamos a presentar el método de separación de variables y el de factor integrante para resolver EDOs lineales de primer orden, y para las de segundo orden, exploramos las homogéneas y no homogéneas con coeficientes constantes, a través del método de los coeficientes a determinar.

A través de la representación gráfica de la solución podemos obtener informaciones importantes sobre las EDOs y el comportamiento de su solución. Creemos que resultados cualitativos y gráficos producidos con la ayuda del ordenador, pueden servir para ilustrar y aclarar la utilidad y relevancia de las Eds trabajadas, que pueden quedar oscurecidas por expresiones analíticas complicadas. En los estudios que realizamos y presentamos en este trabajo, usamos el *software* Powersim, por presentar una sintaxis bien simple, basada en íconos, y que no necesita gastar mucho tiempo para aprender a operarlo. Este *software* utiliza métodos numéricos para resolver EDs. Es importante explorar el enfoque gráfico y numérico porque existen muchas EDs para las cuales las soluciones no pueden ser obtenidas analíticamente, otras veces así mismo cuando esta solución está disponible es necesario considerar el problema de determinar su comportamiento. Por ejemplo, determinar intervalos en que la solución es creciente o decreciente. Además, en varias aplicaciones la expresión analítica de la solución no es necesaria, solamente es de interés el conocimiento general del comportamiento de la solución, es decir, un conocimiento cualitativo.

En nuestro trabajo también abordamos el análisis dimensional, resaltando la necesidad de la consistencia interna de los términos de una EDO y como usar este conocimiento en el entendimiento de ecuaciones diferenciales en situaciones contextualizadas, destacando que el análisis dimensional puede ser usado para identificar inconsistencias en las ecuaciones.

En seguida presentamos, por medio de ejemplos, algunas cuestiones abordadas en nuestros estudios.

Ejemplo 4.5.1

Consideremos que la tasa de variación de la cantidad (Q) de aves en una región en función del tiempo es proporcional a la cantidad de aves existentes en un determinado instante de tiempo t. Esta situación puede ser descrita por la ecuación diferencial

$$\frac{dQ}{dt} = kQ \qquad \text{Eq.12}$$

donde k es una constante denominada constante de crecimiento o decrecimiento de la cantidad de aves. Solamente con la interpretación del problema y el conocimiento de la solución gráfica de la Eq. 12 es posible concluir que:

- si k es una constante positiva, la cantidad de aves en esta región aumenta en función del aumento del tiempo y si k es negativa la cantidad de aves disminuye;
- la curva que describe la cantidad de aves en función del tiempo es exponencial y se asemeja a la Figura 4.2;

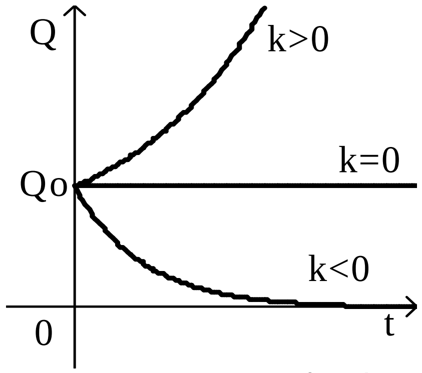


Figura 4.2. Curvas representativas de la cantidad de aves en función del tiempo, regida por la Eq.12 para diferentes valores de *k*.

- la variación de la cantidad de aves en cada intervalo de tiempo varía, pues la cantidad de aves en cada instante, también cambia;
- la curva que describe la tasa de variación de la cantidad de aves en función de la cantidad de aves es lineal, conforme a la Figura 4.3.

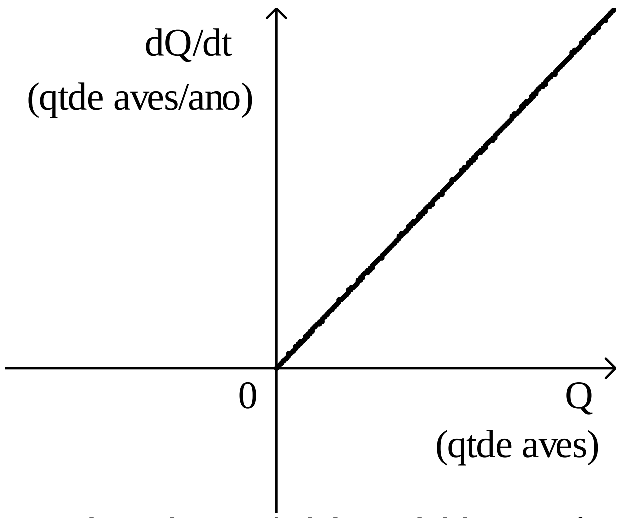


Figura 4.3. Curva que representa la tasa de variación de la cantidad de aves en función de la cantidad de aves.

Después del abordaje cualitativo de la ecuación diferencial, exploramos su solución analítica.

Ejemplo 4.5.2 Usando la técnica de variable separable para resolver la Eq. 12

Dada la ecuación $\frac{dQ}{dt}=kQ$, separamos las variables $\frac{dQ}{Q}=kdt$ e integramos a ambos lados, es decir,

$$\int \frac{dQ}{Q}=\int kdt \Rightarrow \ln(Q)=kt+C_1 \Rightarrow e^{\ln(Q)}=e^{kt+C_1} \Rightarrow Q=e^{kt}e^{C_1} \Rightarrow Q=Ce^{kt}.$$

$Q=Ce^{kt}$ es la solución general de $\frac{dQ}{dt}=kQ$, donde C representa una constante cualquiera. En el presente caso, $C=Q_0$, que representa la cantidad inicial de la variable *Q*. Si *Q* representa la cantidad de aves, Q_0, es el número de aves existentes en el instante inicialmente considerado, y arbitrario como $t=0$, y *k* es una constante de crecimiento o decrecimiento que depende de factores específicos de cada población. Considerando una población inicial de 100 aves y sabiendo que este número se dobla cada tres años podemos obtener el valor de *k*, y escribir la solución particular para esta situación conforme sigue:

$$Q=Q_0e^{kt} \Rightarrow 2Q_0=Q_0e^{k3} \Rightarrow 2=e^{k3} \Rightarrow \ln(2)=\ln(e^{k3}) \Rightarrow \ln(2)=k3\ln(e)$$
$$\Rightarrow k=\frac{\ln(2)}{3}=0{,}231/años$$

por tanto la solución particular será

$$Q=100e^{0{,}231\,t}. \qquad \text{Eq.13}$$

En la Figura 4.4 presentamos la representación gráfica de una familia de soluciones generales de la Eq. 12. La curva más gruesa representa una solución particular de la Eq. 12 representada por la Eq. 13.

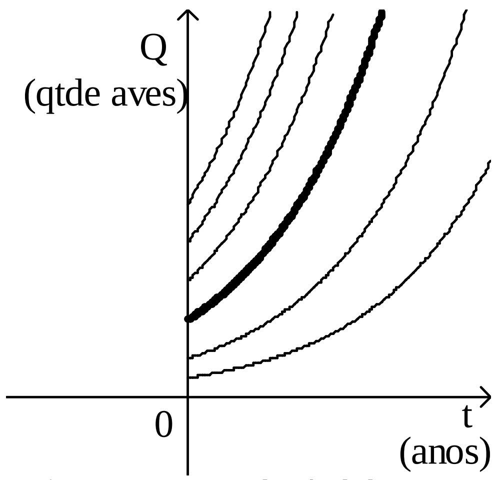


Figura 4.4 Curvas-solución de la Eq. 12.

Una única ecuacción diferencial puede servir como modelo matemático para varios fenómenos diferentes. Por ejemplo, la Eq. 12 puede ser usada para representar matemáticamente todas situaciones en que la tasa de variación de la cantidad en función del tiempo es proporcional a la cantidad existente en un determinado instante de tiempo *t*, como situaciones de desintegración radioactiva, absorción de medicamento, intereses compuestos**,** reacciones químicas, entre muchas otras.

Ejemplo 4.5.3 Ley de enfriamiento de Newton

Consideremos una situación de enfriamiento de agua sobre algunas condiciones idealizadas: cuando el agua caliente es dejada en un ambiente cuya temperatura es menor y constante, ésta se enfría a una tasa proporcional a la diferencia entre su temperatura (T) y la temperatura del ambiente (T_a) que está alrededor (Ley de enfriamiento de Newton)[7]. Esta situación puede ser descrita matemáticamente por la ecuación diferencial

$$\frac{dT}{dt}=k(T-T_a). \qquad \text{Eq.14}$$

A partir del análisis de esta situación, podemos concluir que:

- a medida que el agua se enfría, la tasa de enfriamiento va disminuyendo, pues la diferencia entre la temperatura del agua y la temperatura del aire que está a su alrededor disminuye;
- la curva que describe la temperatura del agua en función del tiempo puede ser representada conforme la Figura 4.5.

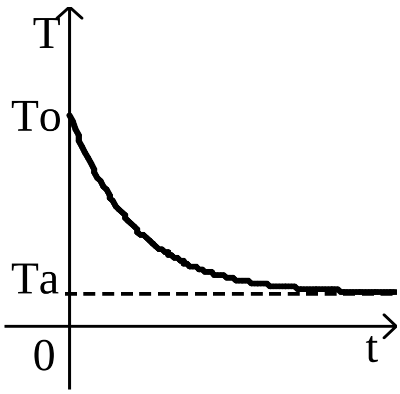


Figura 4.5. Curva que representa la temperatura de la agua en función del tiempo.

- el decrecimiento en la temperatura del agua por unidad de tiempo, disminuye a medida que pasa el tiempo;
- a largo plazo, la tasa de enfriamiento del agua tiende a cero, pues la temperatura del agua tiende a la temperatura del ambiente.

7 La Ley de enfriamiento de Newton es una buena aproximación para la descripción de este problema cuando la diferencia entre la temperatura inicial del liquido y del medio no es muy grande, representativamente inferior a 80ºC.

Para hacer el análisis cualitativo presentado, usamos como recurso el *software* Powersim, pues permite que fácilmente se obtengan datos interesantes sin necesitar de la solución analítica, conforme lo discutiremos en el Capitulo 5. A partir de esta herramienta podemos fácil y rápidamente, analizar efectos de la variación de un determinado parámetro y determinar el comportamiento de la solución a largo plazo.

En los estudios que realizamos, también exploramos el análisis dimensional. Consideremos por ejemplo la Eq. 12

$$\frac{dQ}{dt}=kQ\,,$$

donde Q representa una cantidad determinada que puede ser medida, por ejemplo, en *kg*. Entonces su tasa de variación en el tiempo será dada por la razón entre la unidad de medida de Q y alguna unidad de tiempo, por ejemplo, días, de modo que la variación temporal de Q, tendrá como unidad la razón entre la unidad de Q y la del tiempo. Por lo tanto $\frac{dQ}{dt}$ tendrá como dimensión de $\frac{kg}{dia}$ para satisfacer la consistencia interna de los términos de la ecuación, la unidad de k será $\frac{1}{dia}$.

Este análisis dimensional es importante, pues puede ser aprovechado para identificar inconsistencias en las ecuaciones y soluciones encontradas y puede ayudar en el entendimiento de ecuaciones diferenciales en situaciones contextualizadas.

Abordamos también el método de Euler para aproximar la solución de un problema de valor inicial de la forma

$$\frac{dy}{dt}=f(t,y) \text{ y } y(t_0)=y_0.$$

Ejemplo 4.5.4 Velocidad de un objeto

Considerando la ecuación que rige la velocidad de un objeto, bajo acción de la gravedad y la resistencia del aire, considerada linealmente dependiente de la velocidad, exploraremos la velocidad del objeto en función del tiempo a través del método de Euler. Adoptaremos un sistema referencia cuyo eje vertical apunta hacia arriba. Así, cuando el objeto se mueve hacia arriba su velocidad es positiva y hacia abajo es negativa. Recordemos que la ecuación que rige la velocidad del cuerpo es $v' + \frac{k}{m} v = -g$.

Inicialmente, nuestro interés es verificar la velocidad del objeto en cualquier instante de tiempo. Sabemos que para un objeto que se mueve con aceleración constante, la velocidad en un instante t_1, puede ser calculada a partir del instante t_0, por la relación $v_1 = v_0 + a \cdot \Delta t$, siendo Δt igual a $t_1 - t_0$. Vamos a considerar ahora un objeto cuya aceleración no es constante, dada por la curva mostrada en la Figura 5.5. Aplicar el Método de Euler implica realizar una aproximación en que supone que la aceleración puede ser considerada constante para pequeños intervalos de tiempo, representados por los rectángulos de la Figura 4.6.

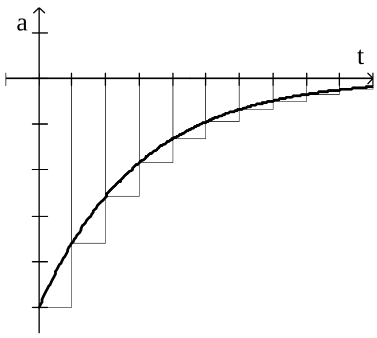


Figura 4.6 La curva suave representa la aceleración versus el tiempo para un determinado objeto. La otra curva representa la aproximación para la aceleración asumida en el Método de Euler. Se supone la aceleración constante e igual al valor en el inicio del intervalo de tiempo.

Si definimos la aceleración por una función $f(t, v)$, concluimos que $f(t, v) = a = \frac{dv}{dt} = v' = -g - \frac{k}{m} v$.

Si conocemos v_0 y t_0, tenemos $f(t_0, v_0)$ y podemos tener un valor aproximado para la velocidad en un instante posterior t_1 : $v_1 = v_0 + \Delta t \cdot f(t_0, v_0)$, siendo $\Delta t = t_1 - t_0$.

Si conocemos v_1 podemos calcular $f(t_1, v_1) = -g - \frac{k}{m} \cdot v_1$ y usar este valor para obtener la velocidad en un instante posterior $t_2: v_2 = v_1 + \Delta t \cdot f(t_1, v_1)$, siendo $\Delta t = t_2 - t_1$. Por sencilhez, vamos a tomar $t_2 - t_1 = t_1 - t_0$.

Y así sucesivamente, se usa el valor de la velocidad en un dado instante t_n (v_n) para determinar la aceleración en el instante t_n $(f(t_n, v_n))$, que permite calcular la velocidad en un instante posterior, t_{n+1}. Por simplicidad, tomamos los incrementos del tiempo $t_{n+1} - t_n = constante = \Delta t$. Generalizando, obtenemos:

$$v_n = v_{n-1} + \Delta t \cdot f(t_{n-1}, v_{n-1}), \text{ con } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Si utilizamos intervalos cada vez menores, los rectángulos de la Figura 4.6 se vuelven cada vez más estrechos y obtenemos una buena aproximación de la velocidad en un instante de tiempo.

Es importante destacar que para cada instante de tiempo Δt de la Figura 4.6 formamos un rectángulo y calculamos su área, pues hicimos Δt (base) x $f(t, v)$ (altura). Como el resultado es sumado con el resultado anterior, lo que está siendo calculado es el área bajo la curva "en degrau", por lo tanto, el área bajo el gráfico de $a\, x\, t$ proporciona la variación de la velocidad.

Ejemplo 4.5.5 Posición de un objeto

Considerando el objeto del ejemplo 4.5.4, si $x(t)$ representa la posición del objeto del instante *t*, la ecuación diferencial que rige el movimiento del objeto es:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} \frac{dx}{dt} = -g.$$

Nuestro interés es verificar la posición de la esfera en cualquier instante de tiempo. Sabemos que para un objeto que se mueve con velocidad constante, la posición en un instante t_1, puede ser calculada a partir de la posición en el instante t_0, por la relación $x_1 = x_0 + v \cdot \Delta t$, siendo igual a $t_1 - t_0$. Vamos a considerar ahora un objeto cuya velocidad no es constante, y aplicar el Método de Euler para realizar una aproximación, suponiendo la velocidad constante para pequeños intervalos de tiempo.

Si conocemos x_0 y t_0, podemos obtener un valor aproximado para la posición en un instante posterior t_1 : $x_1 = x_0 + \Delta t \cdot v_0$, siendo $\Delta t = t_1 - t_0$.

Si conocemos x_1 podemos usar este valor para obtener la posición en un instante posterior t_2 : $x_2 = x_1 + \Delta t \cdot v_1$. Y así sucesivamente, se usa el valor de la posición en un dado instante t_n (x_n) para determinar la posición en un instante posterior, t_{n+1}. Generalizando, obtenemos:

$$x_n = x_{n-1} + \Delta t \cdot v_{n-1} \text{, con } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Si utilizamos intervalos de tiempo cada vez más pequeños, obtenemos una buena aproximación de la posición en un instante de tiempo, semejante a lo que ocurrió con la velocidad abordada anteriormente.

En el capitulo 5 describimos con detalles como realizamos nuestra práctica pedagógica, las actividades y los materiales elaborados, los recursos computacionales utilizados, y los resultados que obtuvimos con nuestra propuesta.

5 METODOLOGÍA Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Teniendo en cuenta las preguntas orientadoras de nuestra investigación, los trabajos presentes en la revisión de la literatura, las especificaciones del contenido abordado, el contexto escolar y los aportes teóricos, elegimos las opciones metodológicas para el desarrollo de la investigación conforme la descripción a continuación.

Inicialmente, en la sección 5.1, presentamos el delineamiento metodológico general de la tesis, es decir, mostramos cómo organizamos la realización de los estudios a través de una breve descripción de sus objetivos, de los participantes y de los instrumentos de recolección de datos, que utilizamos en cada estudio. En la sección 5.2, relatamos cómo hicimos el levantamiento de las principales dificultades de los alumnos en lo aprendido de ecuaciones diferenciales; presentamos una descripción detallada de la entrevista realizada con los profesores y del cuestionario aplicado a los alumnos, las preguntas de la entrevista y del cuestionario y la síntesis de los resultados obtenidos, que llamamos "Estudio Preliminar". En la sección 5.3, describimos, detalladamente, el Estudio 1: el contexto en que lo desarrollamos, la práctica pedagógica realizada, el método de enseñanza y aprendizaje, los materiales instruccionales elaborados, los instrumentos que utilizamos para la recolección de datos, la discusión sobre las herramientas computacionales utilizadas y la síntesis de los resultados que obtuvimos. En la sección 5.4, relatamos el Estudio 2, en que señalamos los objetivos que lo orientan y las proposiciones que adoptamos para el, considerando los resultados obtenidos en el Estudio 1, además, describimos el contexto en que desarrollamos el Estudio 2, los instrumentos utilizados para la recolección de datos, el material didáctico que elaboramos y la síntesis de sus resultados. En la sección 5.5, presentamos el Estudio 3, en que definimos los objetivos y las proposiciones a partir de los resultados del Estudio 2, también describimos el contexto en que lo desarrollamos, los instrumentos utilizados para la recolección de datos, el material didáctico que elaboramos y la síntesis de los resultados. Finalmente, presentamos una discusión general de los resultados, en particular, los resultados que obtuvimos en el Estudio 3.

5.1 Delineamento metodologico general

En la Tabla 5.1, a continuación, presentamos una descripción resumida de los cuatro estudios que realizamos en el presente trabajo.

Tabla 5.1-Descripción resumida de los cuatro estudios.

	Objetivos	*Participantes*	*Instrumentos*
Estudio Preliminar 2º semestre 2005	- obtener indicios sobre las dificultades de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales.	- profesores de Física (2) y Matemáticas (2)	- Entrevista semi-estructurada
		- alumnos del curso de Ciencias Exactas (34)	- Cuestionario - Diario de campo
Estudio 1 1º semestre 2006	- elaborar y aplicar una perspectiva pedagógica que ayude a los alumnos en la superación de las dificultades y les proporcione condiciones favorables al aprendizaje significativo de ecuaciones diferenciales; - estudiar las potencialidades del uso de recursos computacionales en el proceso de enseñanza-aprendizaje de ecuaciones diferenciales; - estudiar la contribución de la interacción entre profesor-aluno-material didáctico.	- alumnos de los cursos de Ingenierías y Química Industrial (59)	- Cuestionario - Entrevista semi-estructurada - Guias de atividades - Diario de campo
Estudio 2 1º semestre 2007		alumnos de los cursos de Ingeniarías y Química Industrial (31)	- Cuestionario - Entrevista semi-estructurada - Guias de atividades - Diario de campo - Test inicial y final de conocimientos
Estudio 3 1º semestre 2008		alumnos de los cursos de Ingeniarías y Química Industrial (60)	

Optamos por realizar un estudio de metodología cualitativa, pues estábamos interesados en un análisis más detallado de la situación investigada. Desarrollamos la práctica pedagógica en el contexto natural de clase y estuvimos en contacto directo con el ambiente y los sujetos de la investigación.

Denzin y Lincoln (1994, p.1) afirman que es difícil definir lo que es una investigación cualitativa, porque su significado varía, de acuerdo con el momento histórico. En el intento de presentar una definición genérica, los mismos autores indican que:

> "la investigación cualitativa es multimetodológica en cuanto al enfoque, abarcando una perspectiva interpretativa y naturalistica para su asunto. Esto significa que los investigadores cualitativos estudian las cosas en su ambiente natural, intentando dar sentido o interpretar fenómenos en términos de los significados que las personas traen para ellos" (p.2).

Ludke y André (1986, p.11-12) con la intención de caracterizar un análisis de tipo cualitativo, presentan cinco características básicas de este tipo de perspectiva discutido por Bogdan y Biklen (1982) en su livro *A Pesquisa Qualitativa em Educação:*

> "- La investigación cualitativa tiene un ambiente natural como su fuente directa de datos y el investigador como su principal instrumento... La investigación cualitativa supone el contacto directo y alargado del investigador con el ambiente y la situación que está siendo investigada, a través del trabajo intensivo de campo ... las circunstancias particulares en que un determinado objeto se introduce son esenciales para que se pueda entenderlo. ..
>
> - Los datos colectados son predominantemente descriptivos. El material obtenido en estas investigaciones es rico en descripciones de personas, situaciones y acontecimientos; incluye transcripciones de entrevistas y declaraciones, fotografías, dibujos y extractos de diversos tipos de documentos... Todos los datos de la realidad se consideran importantes ...
>
> - La preocupación por el proceso es mucho mayor que por el producto. El interés del investigador, al estudiar un determinado problema, es verificar cómo éste se manifiesta en las actividades, en los procedimientos y en las interacciones cotidianas...
>
> - El "significado" que las personas dan a las cosas y a su vida son centro de atención especial del investigador... Al considerar los diferentes puntos de vista de los participantes, los estudios cualitativos permiten aclarar el dinamismo interno de las situaciones generalmente inaccesibles al observador externo. El cuidado que el investigador necesita tener al revelar los puntos de vista de los participantes es en relación a agudeza de sus percepciones...
>
> - El análisis de los datos tiende a seguir un proceso inductivo. Los

> investigadores no se preocupan por buscar evidencias que comprueben las hipótesis definidas antes del inicio de los estudios. Las abstracciones se forman o se consolidan básicamente a partir de la inspección de los datos en un proceso de abajo hacia arriba... El estudio se aproxima a un embudo: al principio hay preguntas o focos de interés muy amplios, que al final se vuelven más directos y específicos...”

Según Moreira (2002), en el contexto de la metodología cualitativa, el investigador es el principal instrumento de colecta de datos. El contacto directo y alargado de éste con el ambiente y la situación investigada supone una forma de comprender mejor las relaciones, las interacciones, los significados y las interpretaciones de las acciones y de las situaciones que ocurren en ese contexto. El investigador cualitativo estudia la realidad en su contexto natural, para ello recurre a una variabilidad de datos que son obtenidos a través de varios materiales. Además, observa, participativamente dentro del ambiente estudiado, analiza el estudio de pequeñas muestras, de casos específicos y busca explorar exhaustivamente una instancia determinada.

Para la realización de nuestra investigación, utilizamos como medios de colecta de datos cuestionarios, entrevistas, análisis de documentos y registros que realizamos durante nuestra observación participante del ambiente estudiado. A partir de los datos colectados, la mayoría descriptivos, obtuvimos un conjunto de informaciones que analizamos, a partir del marco teórico.

5.2 Estudio Preliminar

A partir de los trabajos a los que aludimos en nuestra revisión de la literatura, hemos podido concluir que hay pocos estudios sobre la dificultad de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, por parte de los alumnos universitarios, por lo tanto, realizamos un Estudio Preliminar para este fin. Este estudio ha consistido en la realización de una entrevista semi-estructurada con profesores que tienen amplia experiencia en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales y en el acompañamiento de un grupo de alumnos, durante el desarrollo de una asignatura de ecuaciones diferenciales. Para tal fin, hemos realizado anotaciones en el diario de campo y les hemos aplicado un cuestionario, al final del semestre, a los alumnos.

5.2.1 Entrevista con profesores

Realizamos la entrevista, en el segundo semestre de 2005, con cuatro profesores de la Universidad *Federal do Rio Grande do Sul* (UFRGS): dos profesores de Matemáticas que trabajan con la enseñanza de ecuaciones diferenciales y dos profesores de Física que enseñan asignaturas que incluyen el estudio de fenómenos físicos que pueden ser descritos a través de ecuaciones diferenciales. Les entrevistamos a los profesores, individualmente, durante un periodo aproximado de 30 minutos. En esta entrevista, partimos de cinco preguntas básicas, que están en la Tabla 5.2, las cuales se las hicimos a los cuatro profesores. Ocasionalmente**,** realizamos preguntas adicionales para aclarar mejor la opinión del profesor en relación a algún tópico considerado relevante para la investigación.

Tabla 5.2- Preguntas y respectivos objetivos de la entrevista con los profesores.

Preguntas	**Objetivos**
Q1: ¿Cómo es la dinámica de sus clases cuando usted trabaja con la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias? Q2: ¿Y cómo son las evaluaciones?	- obtener informaciones sobre la metodología de trabajo del profesor, verificar si la enseñanza es direccionada para las técnicas de resolución de las ecuaciones diferenciales o si el enfoque está en la interpretación de las ecuaciones, averiguar si aborda situaciones-problema que involucren el contenido, como y que es evaluado.
Q3: ¿En su visión, cuáles son las principales dificultades de los alumnos en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias? ¿A qué usted atribuye estas dificultades? Q4: ¿Cómo podríamos nosotros los profesores contribuir para amenizar estas dificultades?	- colectar indicios sobre las dificultades de los alumnos en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y sugerencias de cómo los profesores podrían contribuir para reducir las dificultades presentadas.
Q5: ¿Cómo ve usted el uso de recursos tecnológicos en el proceso enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales?	- verificar cómo los profesores perciben el uso de recursos computacionales en la enseñanza y cómo se los usan, y si se los usan en sus clases.

Presentamos, a continuación, los resultados que obtuvimos en la entrevista semi-estructurada, que realizamos con los profesores y también consideramos algunas de sus citaciones. Grabamos todas las entrevistas, posteriormente, transcribimos y condensamos las informaciones relevantes. Codificamos a los cuatro profesores entrevistados:

- PA es un profesor de Matemáticas que tiene más de 30 años de experiencia en la enseñanza de ecuaciones diferenciales. En sus clases acostumbra abordar situaciones-problema para contextualizar el contenido;
- PB es un profesor con 40 años de experiencia en la enseñanza de Física, usa las ecuaciones diferenciales para abordar fenómenos físicos;
- PC es un profesor de Física que tiene 25 años de experiencia en la enseñanza, trabaja con situaciones-problema que incluyen ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno;
- PD es un profesor de Matemáticas con 10 años de experiencia en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales.

Cuando les preguntamos a los profesores sobre la dinámica de la clase, ambos profesores de Matemáticas respondieron que les presentaban a los alumnos los diferentes tipos de ecuaciones diferenciales y sus respectivas técnicas a través de clases expositivas. También afirmaron que en sus clases había resolución de listados de ejercicios y que exigían de los alumnos el desarrollo de toda la solución de los ejercicios.

> *"Primero yo enseño los métodos, quiero que todos sepan cómo se resuelve primero una ecuación" (PA)*
>
> *"Yo imparto clase expositiva, clase de ejercicios…realizo clases de laboratorio también, en que los alumnos usan el software Maple…La clase expositiva es más una presentación de los métodos de resolución, resuelvo algunos ejemplos. En la clase práctica realizo sólo ejercicios porque los alumnos tienen dificultades con el listado de ejercicios" (PD)*

Los profesores afirmaron que trabajaban con la construcción e interpretación de gráficos. A partir de gráficos simples iban construyendo otros más complejos en que incluían más elementos. Además, buscaban trabajar con situaciones-problema para motivar a los alumnos. Cuando los profesores trabajaban con aplicaciones, usaban modelos patrón de los libros, pues creían que los alumnos no tenían condiciones de construir modelos de ecuaciones en situaciones del día a día.

> *"Mi dinámica es así: los alumnos tienen que saber el método de resolución, pero tienen toda parte realmente de modelaje, yo hago con que ellos razonen sobre lo que significa derivada, lo que significa realizar esta hipótesis…yo me preocupé siempre por la parte de la modelación, esto le motiva bastante al alumno, ver cómo puede resolver una situación real, aunque sea muy idealizada, dejando de lado muchas variables para llegar a una ecuación diferenciable manejable " (PA)*

Los dos profesores de Física respondieron que partían de un modelo físico que conduce a una ecuación diferencial y que el enfoque era la interpretación del fenómeno envuelto y no en la resolución de la ecuación.

> *"Cuando yo voy a usar ecuaciones diferenciales primero tomo un modelo que va a generar una ecuación diferencial, de esa forma se llega a la ecuación diferencial" (PB)*

En lo que se refiere a las evaluaciones, los profesores destacaron que desafortunadamente era necesario ponerles exámenes a los alumnos, pues estaban condicionados por esto, es decir, si no hubiera pruebas, los alumnos no se preocuparían por aprender. Los exámenes eran individuales, sin consulta y por tema para que no se acumulara mucho contenido. Las preguntas de los exámenes eran largas, los profesores exigían de sus alumnos mucha interpretación. Los docentes realizaban trabajos computacionales en grupos que tenían poco peso en la nota final, pues los alumnos copiaban muchos unos de otros.

> *"Yo les doy el test teórica a los alumnos en clase, yo la elabora de interpretación, con preguntas largas, un grupo de preguntas de interpretación y generalmente hago yo los gráficos, los alumnos deben interpretarlos. Mis pruebas son de varias páginas, las preguntas son muy largas. Los alumnos hacen trabajos también computacionales, deben entregámelos, entonces, una parte de la nota es el trabajo" (PA)*
>
> *"…les pongo seis pruebas a los alumnos, tres pruebas y tres recuperaciones, para cada tema hay una prueba y una recuperación. También realizo trabajos computacionales, entonces los alumnos saben que mi prueba es sobre nueve puntos y un punto es el trabajo" (PD)*
>
> *"... las evaluaciones formales en clase, son sin consulta, en las que examino la parte conceptual de la materia, verifico si ellos entendieron las cosas del concepto, casi que semanalmente los alumnos están siempre haciendo ejercicios para entregármelos "(PB)*

En relación a las principales dificultades de los alumnos en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias, todos los profesores entrevistados fueron unánimes en decir que los alumnos no saben cálculo, derivadas e integrales, trigonometría, resolución de sistemas lineales (2x2), números complejos entre otros contenidos considerados básicos para las ecuaciones diferenciales. Además, los alumnos poseían problemas conceptuales, principalmente en lo que se refiere a la interpretación de la derivada, que es la base de las ecuaciones diferenciales. Los profesores señalaron que los alumnos cursaban varias asignaturas de Cálculo Diferencial e Integral, pero no entendían lo que significaba una derivada (tasa de variación) y seguían presentando dificultades en la interpretación de gráficos.

> *"Porque los alumnos no saben cálculo, cada semestre ellos ingresan a la facultad con menos conocimientos, son cosas de la enseñanza media, no saben trigonometría, no conocen números complejos…entonces se tiene que trabajar con ellos esta parte, pienso que es una falla muy grande, no saben la parte fundamental, ..." (PD)*

Los profesores también destacaron que el alumnado no entendía las matemáticas, no sabían las razones de los procedimientos matemáticos, sólo sabían resolver mecánicamente las actividades propuestas, necesitaban siempre de un modelo patrón para seguir.

> *"Los alumnos tienen que aprender a razonar, pienso que nuestros alumnos tienen problemas de base matemática que vienen desde la enseñanza media…tienen que pensar sobre las reglas, les pido que traduzcan al portugués lo que está escrito en "matematiques", porque en el momento ques saben hablar sobre que es, ahí que se entienden las cosas" (PA)*

> *"…los alumnos sólo saben aprender de memoria, no saben el porque de las cosas, resulta difícil, tienen que aprender a razonar. Pienso que nuestros alumnos tienen un problema de base matemática que viene desde allá, de la enseñanza media" (PA)*

Otro punto, a los que los profesores se refirieron, fue la falta de motivación de los alumnos para "aprender de verdad", es decir, entender lo que están haciendo. En el caso de las ecuaciones diferenciales, los alumnos no las relacionan con aplicaciones.

> *"La impresión que yo tengo es que, evidentemente, los alumnos estudian las ecuaciones, hacen algunos ejemplos, pero tal vez ellos no conectan realmente las ecuaciones para su uso…, usan ejemplos en las matemáticas*

que no desarrollan tal vez muy bien, no entienden,…. Tienen dificultades de identificar las condiciones, matematizar las condiciones de contorno y saber usar. Para esto hace falta experiencia" (PC)

Un profesor dijo que los alumnos estaban actuando de modo irresponsable, es decir, no cumplían con las tareas en el plazo determinado, no se empeñaban en obtener buenos resultados.

Los profesores entrevistados consideraron que era necesario repasar los conceptos problemáticos, insistir en la interpretación y en el raciocinio para intentar vencer estas dificultades. Además, dijeron que era preciso saber motivar a los alumnos, mostrar la importancia del contenido abordado, saber decir en qué contexto determinado contenido va a ser usado, pues el alumno necesita tener estímulo de aprender.

"*…tal vez sea necesario dar una base sólida de las ecuaciones diferenciales, no sólo de teorías, sino también de ejercicios. Los alumnos tienen que realmente resolver los ejercicios" (PC)*

"S*aber motivar al alumno, …, los alumnos tienen que saber decir en qué contexto los contenidos van a ser usados, es necesario saber motivarlos para la importancia, la madurez no se consigue con una sola vez …ellos tienen que tener estímulo para aprender. El profesor cuando introduce el asunto tiene que tener condiciones de mostrar la importancia" (PC)*

Los profesores todavía señalaron la importancia de proporcionar trabajos en pequeños grupos para que los alumnos se puedan ayudar mútuamente a vencer las dificultades.

"… debemos proporcionar una atención individual, o en pequeños grupos" (PA)

En cuanto al uso de los recursos tecnológicos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, los profesores consideraron el ordenador como una herramienta muy importante para la construcción de gráficos e interpretación de parámetros, inclusive con animación, pero destacaron que el alumno necesitaba saber usarlo críticamente, analizar las soluciones presentadas, y tener en cuenta que el ordenador no toma decisiones, le toca al alumno tomarlas.

"Y*o pienso que los alumnos tienen que usarlo, pero eso no quiere decir que no necesita saber las matemáticas (necesita saber analizar, evaluar, imponer límites). Yo tengo hecho a mano y usado Maple para realizar* *cuentas más detalladas…*[el alumno] *necesita saber las matemáticas para poder interferir y ver donde está realmente la solución del problema…Yo exploro todo lo que puedo, pienso que la gente debe aprovechar los recursos tecnológicos no para dar menos de lo que se daba antiguamente, pero para dar más y para poder aprovechar mejor" (PA)*

"Yo pienso, siempre veo esto con dos ojos, por un lado, pienso que realmente es una cosa que estimula al alumno, en términos de cuando trabajamos el comportamiento de una función, función del tiempo…, pero eso pienso que es para quien ya tiene vivencia previa en el tema, conoce la dificultad que tiene una función, ve aquel gráfico animado…, pero quien no tiene esta vivencia sólo ve aquello allí bonito, pero no ve el fenómeno, no entiende la naturaleza del problema, no tiene una interpretación de los parámetros importantes, a partir de ahí prever el comportamiento, ver lo que está aconteciendo no es saber. Entonces reproducir un experimento de la naturaleza, como se resuelve…yo pienso que es útil" (PC)

"*...la parte computacional entra en los gráficos, porque ahí ellos* [los alumnos] *pueden cambiar parámetros, ver las diversas cosas que pueden acontecer, yo pienso que es fundamental el uso computacional,…cuando tú llegas a la solución muchas veces no puedes concluir mucho,…el comportamiento de la solución, la parte fenomenológica, cualitativa, y de ahí que la parte computacional es muy importante para mí ..." (PA)*

"Y*o pienso que es maravilloso, porque Maple es un software algebraico. Entonces él hace la parte analítica y después presenta las solución gráfica, e inclusive con animación. Entonces yo pienso que el alumno distingue, por ejemplo, en mi tiempo cuando se hablaba en la familia de soluciones necesitaba quedarse imaginando…. En los problemas de aplicación, puedo cambiar las condiciones iníciales por condiciones de contorno, él no necesita tener que resolver de nuevo. Sólo necesita ver lo que acontece y analizar el gráfico. Entonces yo pienso que en la educación ignorar esto es absurdo, la parte gráfica pienso que tiene que ser explorada,…lo que el alumno tiene que saber es el tipo de solución que se espera, cuál el comportamiento de la solución y verificar si esa solución está correcta. Maple a veces presenta fallas en algunas soluciones. Pero yo pienso que para la aplicación práctica es importantísimo el software ..." (PD)*

A partir de las entrevistas, podemos percibir que los dos profesores de Matemáticas trabajaban primero las técnicas de resolución y les solicitaban a los alumnos que las "ejercitaran" para después explorar situaciones aplicadas que envolvían las ecuaciones diferenciales. Ambos profesores de Física no se preocupaban por la resolución en sí, estaban más preocupados por sus aplicaciones. El escenario que los profesores presentaron, en lo que se refiere a las dificultades de los alumnos, no difiere de la realidad en que actúamos: el alumno resuelve mecánicamente los ejercicios, no entiende lo que está haciendo y, consecuentemente, pronto se olvida de todo. Ello ocurre desde la enseñanza primaria y secundaria, por consiguiente, los alumnos llegan a la universidad sin dominio de la base matemática que es indispensable para que se acompañe una asignatura de Cálculo Diferencial e Integral.

Los profesores entrevistados consideraron el uso de recursos computacionales como una herramienta importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje, desde que los alumnos los utlicen criticamente, es decir, sepan analizar los resultados y no simplemente aceptar como correcto lo que el ordenador da como respuesta. El ordenador es considerado importante para los alumnos que ya tienen experiencia en el asunto tratado. En este caso los alumnos pueden utilizarlo para trabajar con tareas más complicadas o que tardan más en ser realizadas a mano.

5.2.2 Acompañamiento de un grupo de alumnos

En el segundo semestre de 2005, acompañamos los trabajos de 35 alumnos de la asignatura de Ecuaciones Diferenciales del curso de licenciatura en Ciencias Exactas de *UNIVATES*, la cual impartimos. En esta asignatura trabajamos de forma tradicional, es decir, inicialmente, presentamos las definiciones referentes al contenido de ecuaciones diferenciales, después tratamos de las definiciones referentes al contenido de ecuaciones diferenciales, luego mostramos las técnicas de resolución analítica seguidas de algunos ejemplos, resueltos por la profesora y ejercicios realizados por los alumnos. Estos ejercicios eran repeticiones de las técnicas y, finalmente, exploramos algunas situaciones-problema que habían sido sacadas de libros de texto. Los alumnos trabajaban en grupos. Las evaluaciones estaban constituidas de exámenes que envolvían la resolución analítica de ecuaciones diferenciales y alguna situación problema. En esta asignatura no utilizamos el ordenador.

En este grupo con la intención de colectar indicios sobre las dificultades de aprendizaje en todas las manifestaciones de los alumnos, registramos, al final de cada clase, en el diario de campo, todas las observaciones que colectamos a lo largo de la clase: actividades realizadas, cuestionamientos, comentarios, respuestas a las preguntas conceptuales, resolución de problemas. Estos registros no presentaron resultados diferentes de los del cuestionario presentado a continuación, por eso no los presentamos en una sección específica.

Después de que los alumnos cursaron la asignatura de Ecuaciones Diferenciales, durante un semestre, con 4 horas de clase semanales, les solicitamos que respondieran un cuestionario (Apéndice 1), con el objetivo de obtener informaciones sobre su participación en la asignatura, las principales dificultades de aprendizajes que surgieron, sugerencias de mejorías para la asignatura y también algunas preguntas relacionadas al contenido de ecuaciones diferenciales: definición de ecuaciones diferenciales, su aplicabilidad, relevancia de las condiciones de contorno. El cuestionario que los 34 alumnos respondieron fue objeto de un análisis cuantitativo y cualitativo, conforme sigue.

Podemos observar, en la Tabla 5.3, a partir de las respuestas analizadas cuantitativamente, que los alumnos demostraron esfuerzo y dedicación para acompañar la asignatura.

Tabla 5.3 – Participación de los alumnos en las clases.

	Concuerdo plenamente	***Concuerdo***	***Sin opinión***	***Desacuerdo***	***Desacuerdo Totalmente***	***Total***
Considero que fui buen alumno	12	21	1	0	0	34
Asignatura importante para mí	8	20	5	1	0	34
Me dediqué poco a la asignatura	1	3	0	20	10	34
No acudí a la mayoría de las clases	0	1	0	3	30	34
Aprendí bastante en la asignatura	10	21	0	1	2	34

Para las preguntas del cuestionario, cuyas respuestas analizamos cualitativamente, buscamos crear categorías y las presentamos en forma de tablas. Las categorías formadas no son, óbviamente, las únicas posibles, pero condensan las informaciones proporcionadas por los alumnos. Inicialmente, describimos las categorías de respuestas formadas para cada pregunta del cuestionario y, posteriormente, presentamos una tabla con las categorías, ejemplificándolas con argumentos de los alumnos (Tablas 5.4 a 5.9). Hicimos una codificación para los alumnos: A1 (alumno 1), A2 (alumno 2),…, A34 (alumno 34).

Para las respuestas al cuestionamiento sobre la definición de ecuaciones diferenciales, formamos las siguientes categorías:

- D1: <u>Las Ecuaciones Diferenciales son ecuaciones que envuelven derivadas e integrales.</u> Incluimos en esta categoría las respuestas de los alumnos que consideraron las ecuaciones diferenciales como técnicas de cálculo que necesitan derivadas e integrales, algunos asociaron las derivadas a tasa de variación.
- D2: <u>Las ecuaciones diferenciales son ecuaciones que poseen aplicaciones en varias áreas</u>. Consideramos en esta categoría las respuestas de los alumnos que hicieron referencia a alguna aplicación de las ecuaciones diferenciales para definirlas.
- D3: <u>Las ecuaciones diferenciales es un contenido muy difícil</u>. Las respuestas que incluimos en esta categoría no se referían a la definición, propiamente dicha, de ecuaciones diferenciales, sino que trataban de la dificultad de resolución, necesidad de repaso de muchos contenidos matemáticos, desde los de enseñanza primaria hasta las derivadas e integrales.
- D4: <u>Ecuaciones diferenciales son ecuaciones que incluyen funciones y sus derivadas.</u> Diferenciamos esta categoría de D1, a partir de la inclusión de respuestas que estaban mejor elaboradas como definición de ED, que no simplemente las relacionaban con el cálculo de derivadas e integrales, sino con ecuaciones que envolvían funciones, sus derivadas y se referían como solución de las EDs una función que satisfacía la ecuación.
- Otras definiciones: consideramos las respuestas que juzgamos que no se encuadraban en ninguna de las cuatro categorías anteriores.

Tabla 5.4- Categorías de definición de ecuaciones diferenciales.

Definición de ecuaciones diferenciales			
Índice	Definición	Ejemplos de argumentación	Total de alumnos
D1	Son ecuaciones que incluyen derivadas e integrales	“ecuaciones que incluyen derivadas e integrales...” (A17) “... se que envuelve derivadas e integrales.” (A26) “... son ecuaciones que trabajan con variaciones no constantes y que utiliza derivada e integral para realizar los cálculos.” (A12) “... son ecuaciones que para resolverlas tenemos que usar derivadas, integrales.” (A15) “... son aquellas en que aparecen derivadas.”(A5) “son diferentes métodos de calcular usando derivadas, integrales...” (A24) “son ecuaciones que pueden ser resueltas de varias maneras, principalmente envolviendo las derivadas e integrales en los cálculos...” (A27) “es la resolución de ecuaciones por medio de derivadas e integrales...” (A23) “son ecuaciones en que usamos básicamente sólo integrales y derivada para resolverlas.” (A16)	13
D2	Son ecuaciones que poseen aplicaciones en várias áreas	“las ecuaciones diferenciales envuelven integrales y derivada para determinar problemas más complejos como por ejemplo: la concentración de una sustancia en función del tiempo, vida media de una sustancia en función del tiempo...” (A13) "Son ecuaciones que usamos para determinar crecimento poblacional, edad de fósiles, ..." (A33) "son usadas en algún campo de trabajo." (A9)	4
D3	Es un contenido difícil que exige mucho conocimiento	“son ecuaciones más complejas, envuelve mucho el razonamiento del alumno” (A31) “... involucra todo nuestro conocimento, desde que comenzamos a estudiar las matemáticas, abarca todo ...” (A28) "Bueno es un asunto bien difícil y complicado ..." (A26)	4
D4	Son ecuaciones que envuelven funciones y sus derivadas.	"las ecuaciones diferenciales son ecuaciones que envuelven derivadas e integrales y como resultado, se obtiene una función. Son ecuaciones que poseen aplicaciones en varias áreas de conocimiento." (A4) "las Ecuaciones diferenciales son funciones y sus derivadas. Tienen una incógnita que a través de cálculos de integrales y derivadas se llega a su valor " (A3) "las ecuaciones diferenciales son aquellas en que aparecen derivadas. La respuesta de la ecuación diferencial es una ley." (A5) "son ecuaciones que envuelven funciones y derivadas con una o más variables." (A30)	6
Otras definiciones		"... es una ecuación con funciones de 1 o + variables, en que una puede depender de otra." (A29) "Son ecuaciones que envuelven álgebra las cuales llegamos siempre a un valor numérico" (A2) "No sé darle una definición a las ecuaciones."(A25)	7

Comentario interpretativo: percibimos que existe una fuerte asociación de las EDs con las derivadas e integrales, pero pocas veces esta relación fue expuesta de forma conceptual, con algún argumento que daba indicios de que el alumno asociaba algún significado al concepto en cuestión. Los alumnos percibían las ecuaciones diferenciales como técnicas de cálculo que, en la mayoría de las veces, eran consideradas muy difíciles. También había alumnos que percibían las EDs como relevantes para varias áreas.

Para las respuestas al cuestionamiento sobre la importancia de las ecuaciones diferenciales, formulamos las siguientes categorías:

- I1: Oportunidad de repasar los contenidos de matemática básica. En esta categoría están incluidas las respuestas de los alumnos que percibieron en las EDs una oportunidad de repasar los contenidos de matemática básica de la enseñanza primaria y secundaria, que necesitarán enseñar cuando sean profesores, ya que éstos eran alumnos de un curso de licenciatura.
- I2: Sin importancia para el día a día. Los alumnos cuyas respuestas se encuadran en esta categoría eran los que no percibían la importancia de la enseñanza de las EDs, pues no era un contenido que necesitarán enseñar, en el momento en que sean futuros profesores.
- I3: Profundizar los conocimientos. En esta categoría se encuadran las respuestas de un pequeño número de alumnos que consideraban las EDs como un contenido de nivel más avanzado y que destacaron como principal importancia profundizar los conocimientos.
- I4: Importantes para resolver problemas aplicados. En esta categoría se encuadran las respuestas de la mayoría de los alumnos. Éstos consideraron las EDs importantes para resolver problemas aplicados de diversas áreas como Física, Química y Biología.
- Otras respuestas: Consideramos aquí respuestas que juzgamos que no se encuadran en ninguna de las cuatro consideradas anteriormente.

Tabla 5.5- Categorías sobre la importancia de las ecuaciones diferenciales.

Importancia de las ecuaciones diferenciales			
Índice	Importancia	Ejemplos de argumentación	Total de alumnos
I1	Aclaración de dudas de la matemática básica	“... generar dudas de preguntas simples que trabajaron en el 7º curso de la enseñaza primaria." (A3) "La parte más importante de las EDs fue el hecho de haberse aclarado dudas sobre la utilización de aspectos de matemática básica." (A21) "...recordar cosas básicas de matemáticas." (A22)	5
I2	Sin importancia para el día a día	"No puedo ver una aplicación real, ..." (A17) "... no lo usamos en nuestro día a día y no se lo enseñaremos a nuestros alumnos ..." (A6)	3
I3	Profundizar conocimientos	"... además de repasar muchos contenidos... hacen con que pensemos más allá..." (A28) "... son importantes para quien sigue los estudios después de la graduación" (A2) "son importantes para el desarrollo del razonamiento y para quien sigue en esta área." (A25)	4
I4	Resolver problemas aplicados	"resolver problemas que involucren variación de temperatura, mezclas,…,..." (A30) "... para resolver problemas envolviendo crecimiento poblacional, temperatura, medicinas ..." (A3) "la principal importancia son las aplicaciones, ..." (A4) "... son importantes para calcular crecimiento poblacional, ..." (A7) "Son importantes en la resolución de problemas que envuelven concentración de productos ..." (A8) "es importante para el estudio de problemas." (A18) "su importancia es conseguir resolver problemas de la ley de enfriamiento de Newton, ..." (A15)	13
Otras respuestas		No respondieron (A26) e (A31) "es importante para álgebra, cálculos, situaciones." (A11) "son importantes para calcular medidas y tiempos en cualquier instante." (A9) "No lo sé ..." (A27) "en mi entendimiento son importantes, pero cuando las estudié en el colegio no las aprendí, ..." (A16)	9

Comentario interpretativo: La mayoría de los alumnos consiguió percibir las aplicaciones de las EDs, refiriéndose a varias situaciones-problema. Cabe señalar, sin embargo, que los ejemplos a los que los alumnos aludieron fueron abordados en clase, ello deja un margen de duda, es decir, no sabemos si los alumnos percibieron la verdadera relación de las EDs con estos problemas o si simplemente aprendieron de memoria las aplicaciones. Algunos alumnos no hicieron referencia a las aplicaciones de las EDs, pero consideraron el asunto importante para repasar muchos contenidos básicos, principalmente los que se refieren a la enseñanza primaria. Esto se debe al hecho de que los alumnos eran de un curso de licenciatura y el contenido de EDs siempre es tratado en el último semestre, momento en el que los alumnos se preocupan por saber bien los contenidos que deberán enseñárselos a sus alumnos, cuando sean futuros profesionales. Otros alumnos destacaron que las EDs no tenían ninguna importancia en su día a día, se estaban refiriendo al hecho de ser un contenido que no se lo enseñarán en la enseñanza primaria y secundaria. Percibimos que los alumnos de este curso consideraban importante y se interesaban en aprender solamente los contenidos que se los enseñarán como futuros profesores.

En la Tabla 5.6 presentamos las situaciones-problema en que se aplican las ecuaciones diferenciales referidas por los alumnos

Tabla 5.6- Ejemplos de aplicaciones de ecuaciones diferenciales.

Ejemplos citados	***Número de citaciones***
Edad de fósiles	A21, A8, A33
Concentración de soluciones	A32, A21, A8, A17, A7, A30, A13, A2, A29
Concentración de medicinas en la sangre	A32, A4, A3
Proliferación de bacterias	A15
Calentamiento y enfriamiento de cuerpos	A1, A15, A12, A18, A8, A19, A21, A4, A3, A30, A11, A29
Crecimiento poblacional	A15, A18, A34, A19, A7, A20, A3, A33
Vida media de sustancias	A12, A13

Para las respuestas al interrogante sobre la relevancia de las condiciones de contorno en una ecuación diferencial, formamos las siguientes categorías:

- R1: <u>Auxilio en la resolución de ecuaciones diferenciales</u>. Incluimos en esta categoría las respuestas de los alumnos que consideraron las condiciones de contorno como una información auxiliar para resolver las EDs.
- R2: <u>Para encontrar soluciones particulares</u>. Consideramos en este grupo las respuestas de los alumnos que percibieron las condiciones de contorno como

datos importantes para calcular la solución particular de una EDs.

- Otras respuestas: Incluimos aquí las respuestas que no conseguimos categorizar, debido al hecho de ser muy diversas.

Tabla 5.7- Categorías sobre la relevancia de las condiciones de contorno.

Relevancia de las condiciones de contorno			
Índice	Relevancia	Ejemplos de argumentación	Total de alumnos
R1	Ayuda en la resolución de las ecuaciones diferenciales	“importantes para elaborar una estrategia de resolución” (A4) "para poder resolver mejor las ecuaciones." (A31) “... para resolver las ecuaciones." (A6) "son datos dados que ayudan a la resolución de las ecuaciones." (A30)	4
R2	Para encontrar soluciones particulares	“proporcionan especificar una solución para determinado caso, que muchas veces calculábamos generalizando.” (A7) "... para encontrar una respuesta más exacta y no de forma genérica." (A27) "... para encontrar una ecuación final más completa." (A5) "cuando estas condiciones son dadas, podemos obtener una solución particular para la ecuación." (A33) “nos ayudan a encontrar la 'respuesta exacta'...” (A8) "... nos ayudan a encontrar el valor de las incógnitas." (A3)	7
Otras respuestas		“saber que tipo de ecuación: si es homogénea o no lo es, si es separable ...” (A2) "cantidad inicial, final y tiempo." (A10) "a partir de ellas es que se desarrolla el estudio de las mismas." (A12) "serían las derivadas e integrales ..." (A15) "son condiciones más complicadas." (A28) "condiciones de orden, grado ..." (A29) "indispensable, cualquier cambio, cambia toda la ecuación." (A9)	8

Comentario interpretativo: Los alumnos tuvieron más dificultades en responder esta cuestión probablemente debido al hecho de no haber sido suficientemente abordada en el curso. Muchos alumnos intentaron escribir una respuesta, pero no estaban seguros de lo que escribieron. Cabe señalar que 15 alumnos no respondieron esta pregunta.

Para las respuestas a la pregunta sobre los tipos de dificultades enfrentadas en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, las categorías formadas son las siguientes:

- D1: Dificultad en derivadas, integrales y otros contenidos de Matemáticas. Un gran número de alumnos destacó que lo que más dificultó el aprendizaje de las EDs fue la deficiencia en relación a los contenidos que son básicos para la resolución e interpretación de EDs, citaron las derivadas, las integrales, el álgebra,... e incluso se refirieron a la asignatura de Matemáticas V (en que los adquieren estos conocimientos).
- D2: Clases muy rápidas. Los alumnos de esta categoría no relacionaron tipos de dificultades, asociaron poco tiempo destinado para resolver ejercicios y para practicar una técnica. Destacamos que, generalmente, los alumnos eran lentos en la resolución de problemas, necesitaban mucho tiempo para resolver problemas de matemática básica.
- D3: No sabe cómo iniciar la resolución. En esta categoría están contenidas las respuestas de los alumnos que consideraron la identificación del tipo de EDs la principal dificultad para posterior elección de la técnica de resolución.

Comentario interpretativo: El factor que los alumnos consideraron como el principal obstáculo en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales fue la falta de dominio de contenidos matemáticos necesarios para la resolución de las EDs. Casi todos los alumnos que hicieron referencia a las dificultades las relacionaron con la resolución de una EDs, al cálculo envuelto y no a la interpretación. Asimismo, los alumnos dijeron que las clases eran rápidas, había la necesidad de trabajar con más ejercicios en clase, pues en casa no tenían tiempo para hacerlos. Diez alumnos no respondieron esta pregunta.

Tabla 5.8- Categorías de las dificultades en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales.

Dificultades en el aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales			
Índice	Dificultades	Ejemplos de argumentación	Total de alumnos
D1	Dificultades en derivadas, integrales y otros contenidos de Matemáticas	"mi mayor dificultad fue con los contenidos... 7ª curso. También en derivadas e integrales. Si supiera hacer eso bien, la ecuación en sí sería fácil." (A15) "...creo que mi mayor dificultad para entender el contenido fue debido a las dificultades de entender asuntos de la enseñanza primaria y secundaria ..."(A13) "hubo problemas en la base, muchas veces no en el contenido de las ecuaciones y sí en los contenidos de la enseñanza primaria"(A29) "algunas reglas básicas que no recordaba más."(A10) "fueron en la parte del uso de la matemática básica. "(A21) "dificultades absurdas, cosas que van allá de la enseñanza primaria ..."(A22) " mi mayor dificultad, en ningún momento, fue en relación a las ecuaciones diferenciales y sí en relación a las matemáticas de la enseñanza primaria..."(A4) "... recordar varios temas de las matemáticas para resolverlos, ..."(A33) "Algunas derivadas son un poco complicadas. "(A19) "Muchas, pues necesitábamos recordar muchos otros contenidos estudiados."(A31)	14
D2	Las clases muy rápidas	"... las clases también eran muy rápidas." (A 14) "Las clases son muy rápidas."(A18) "... la clase es bastante rápida, ..."(A20) "mi razonamiento es más lento de lo que se exige."(A27)	6
D3	No sabe cómo iniciar la resolución	"Dificultad de interpretación y de iniciar la resolución. A partir de hay, todo bien." (A17) "Diferenciarlas, necesito muchas de horas de estudio." (A28) "Identificar cuál técnica debería ser utilizada."(A25) "... no sabía cómo y por dónde comenzar"(A2)	4

Las sugerencias de los alumnos para mejorar las clases y facilitar el aprendizaje de las EDs están muy relacionadas con las dificultades anteriormente citadas. Las agrupamos en las siguientes categorías:

- M1: <u>Retomar contenidos básicos, derivadas e integrales</u>. Forman parte de esta categoría las respuestas de los alumnos que consideraron importante repasar los contenidos que son básicos para la resolución e interpretación de las EDs, como las derivadas, las integrales y el álgebra.

- M2: Disminuir el ritmo de las clases. Los alumnos de esta categoría sugerieron que las clases deberían desarrollarse en un ritmo más lento, para que pudieran tener más tiempo para asimilar el contenido.
- M3: Ejercitar más: En esta categoría los alumnos solicitaron más ejercicios.
- Nada a mejorar: Para los alumnos de este grupo, la metodología, la evaluación y las actividades desarrolladas estaban satisfactorias.

Tabla 5.9- Sugerencia de los alumnos para mejorar las clases.

Cómo mejorar las clases y facilitar el aprendizaje			
Índice	Sugerencia de mejoría	Ejemplos de argumentación	Total de alumnos
M1	Repasar los contenidos básicos, derivadas e integrales	“yo debería recordar un poco a los contenidos de derivadas e integrales...”(A1) "... repasar los contenidos básicos antes de iniciar las ecuaciones." (A29) "... el curso debería tener más asignaturas relacionadas con integrales y derivadas ..."(A34)	5
M2	Disminuir el ritmo de las clases	“...las clases deberían ser un poco más 'lentas'...” (A27) “...las ecuaciones deberían ser estudiadas de forma más lenta y con más detalles ...”(A13)	4
M3	Ejercitar mas	“... talvez hacer más ejercicios sobre cada contenido.”(A24) "... haciendo más ejercicios." (A31) "...tal vez se debería trabajar más tiempo un contenido,..”(A14)	6
Nada a mejorar		“pienso que la forma en la cual se estaba trabajando está bien. Explicación, actividades, acompañamiento en las clases debe haber más interés de cada uno”(A32) “… no veo una mejor manera de trabajar en la asignatura.”(A6) “Para mí las clases fueron buenas y, principalmente, claras, no hay nada, en mi opinión, que debería ser mejorado.”(A4). “todo fue bueno... puedes seguir así…”(A22) “pienso que el ritmo de las clases y la metodología, la forma de evaluación facilitan, y mucho la forma de aprendizaje de los alumnos.” (A5) “las clases fueron buenas, la división de los trabajos también y, principalmente, los trabajos en grupo por eso pienso que nada debe ser cambiado”(A16) “pienso que de la forma como fueron impartidas las clases fueron muy buenas”(A8) “en mi opinión, debido a la metodología que se adoptó tuve un aprendizaje muy satisfactorio”(A23)	13

Comentario interpretativo: Las sugerencias para mejoría de las clases se dieron en relación a los contenidos matemáticos básicos utilizados en la resolución de las EDs. Percibimos que, a lo largo de la asignatura, básicamente todos los ítems analizados, la preocupación de los alumnos estuvo asociada a otros contenidos matemáticos y no a las EDs. Los alumnos afirmaron que el tiempo disponible para realizar las tareas no era suficiente, también consideraron insuficiente la cantidad de ejercicios trabajados con cada técnica de resolución, pues no permitía la fijación de la misma. Ello demostró una preocupación por la memorización de los pasos de las técnicas abordadas, quedando en segundo plano la comprensión de la EDs en estudio. Muchos alumnos destacaron que las clases eran muy bien trabajadas, la metodología usada era la adecuada, del mismo modo que la evaluación, sin embargo, según los alumnos, el contenido era difícil en sí. Seis alumnos no respondieron esta pregunta.

5.2.3 Síntesis de las dificultades de los alumnos en el aprendizaje de ecuaciones diferenciales

Intentamos responder una de nuestras preguntas de investigación: **¿Cuáles son las principales dificultades de los alumnos en el aprendizaje de ecuaciones diferenciales?**, presentamos una síntesis de las principales dificultades de los alumnos en el aprendizaje de ecuaciones diferenciales, que obtuvimos a partir de tres fuentes distintas: i) profesores con experiencia en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales; ii) alumnos después de cursar la asignatura de Ecuaciones Diferenciales y; iii) resultados de estudios ya realizados en este enfoque.

Para que haya una mejor organización, presentaremos las dificultades en forma de tópicos, conforme sigue.

- Los alumnos no saben los contenidos de matemática básica, como por ejemplo, trigonometría, fracciones, sistemas lineales, fracciones algebraicas, números complejos, derivadas e integrales, entre otros contenidos que consideramos necesarios para la resolución analítica de ecuaciones diferenciales. Esta dificultad estuvo presente en el habla de los profesores entrevistados, en los cuestionarios de los alumnos y en los estudios que analizamos en la literatura.

- Los alumnos poseen problemas conceptuales, principalmente, en lo que se refiere a la interpretación de la derivada, que es la base de las ecuaciones diferenciales. No entienden lo que significa una derivada (tasa de variación) y presentan dificultades considerables en la interpretación de gráficos. Esta afirmación estuvo presente en el habla de los profesores entrevistados. Los alumnos no comentaron nada al respecto porqué no relacionaban EDO con la interpretación, solamente la relacionaban con el cálculo envuelto. En los estudios de la literatura, se hizo bastante referencia a esta dificultad, incluso con más detalles, conforme lo presentado en los próximos tópicos.
- Los alumnos confunden cantidad con tasa de variación de la cantidad, y la función que describe "como la cantidad que varía" con la ecuación que describe "como la tasa de variación de la cantidad varía".
- Los alumnos no aceptan con facilidad las funciones como solución de una ED, considerando que están acostumbrados a ver números como solución, es que los autores llaman de el dilema de la función como solución.
- Falta concienzación, por parte de los alumnos, en relación a la importancia de las unidades al manipular términos de las ecuaciones diferenciales que representan sistemas reales y parecen ignorar la necesidad de la consistencia interna de los términos de un EDO, o si la comprenden, no consiguen usar este conocimiento cuando es necesario.
- Los alumnos no perciben que las constantes de proporcionalidad también necesitan tener unidades, pues las consideran como un número puro, sin unidades.
- Los alumnos no entienden matemáticas, no saben el porqué de los procedimientos matemáticos y sólo saben resolver mecánicamente las actividades propuestas, necesitan siempre de un modelo-patrón para seguir. Los profesores entrevistados se refirieron a esta cuestión que también apareció en los trabajos de la literatura que analizamos.
- Los alumnos no demuestran interés por el contenido, falta motivación para aprenderlo de forma significativa, es decir, comprender lo que están haciendo.

En el caso de las ecuaciones diferenciales, es necesario relacionarlas con aplicaciones. Esta también es una constatación de los profesores entrevistados y de los estudios de la literatura.

- Los alumnos asocian EDOs a un proceso puramente analítico, cuando piensan en ecuaciones diferenciales, piensan en técnicas analíticas, pues ven una EDO como una ecuación abstracta que envuelve símbolos y para resolverla quieren usar técnicas analíticas. Esto constatamos en los estudios de la literatura, sino también lo percibimos entre los alumnos investigados.
- Los alumnos creen que la representación simbólica de una función es siempre más importante y más útil que la gráfica y numérica, posiblemente reflejo de experiencias matemáticas anteriores, en que el enfoque era algebraico.
- Tradicionalmente, en las matemáticas, se enseña la función analítica y entonces se solicita la representación geométrica y muchos alumnos no aceptan la solución geométrica porque son incapaces de asociarla a una representación analítica. Los alumnos piensan en la función cuando ven una ecuación o regla y no en un gráfico.
- Los alumnos poseen dificultades para pensar simultáneamente de modos diferentes (algebraico y gráfico). Ello puede también ayudar a explicar por qué normalmente los alumnos no usan varias formas para resolver problemas.
- Los alumnos no entienden la conexión entre la ecuación diferencial y el sistema modelado, presentan dificultades para interpretar los términos de una EDO, y para traducirlos de la descripción física a la descripción matemática, pues no desarrollaron esta capacidad, puesto que, se quedaron mucho tiempo de la vida escolar repitiendo y memorizando técnicas.

En las próximas secciones describimos los estudios que desarrollamos con el objetivo de ayudar a los alumnos en la superación de estas dificultades.

5.3 Estudio 1

En el *Centro Universitario UNIVATES* en *Lajeado-RS*, la asignatura de Cálculo III es obligatoria en los cursos de Química industrial e Ingeniería (Informática, Producción, Automatización y Control y Ambiental). Los cursos de Ingeniería, en su mayoría, son durante el día, pero, el curso de Química Industrial es por la noche. A pesar de ello, los estudiantes pueden elegir si quieren cursar la asignatura por la mañana o por la noche, cuando se la ofrecen en ambos turnos, eso resulta en grupos con alumnos de diferentes cursos. La asignatura es de 4 horas de clase a la semana, 16 semanas semestrales, siendo que ocho semanas son dedicadas a la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. En esta asignatura abordamos, entre otros, los contenidos de ecuaciones diferenciales ordinarias, que son trabajados de una forma tradicional, es decir, se enseñan métodos analíticos para la solución de diversos tipos de ecuaciones diferenciales, seguido de ejercicios y problemas de aplicación que son sacados de los libros de texto. Eventualmente, se utiliza algún recurso computacional, pero básicamente para hacer los cálculos, como por ejemplo la inserción de una ecuación diferencial en la aplicación MatLab[8] a fin de obtener la solución numérica.

El contenido de las ecuaciones diferenciales se insertó en los cursos de *UNIVATES* debido al hecho de ser considerado como un instrumento necesario para modelar y explicar el comportamiento de dispositivos, equipos y/o sistemas, además, que es fundamental para diseñar, analizar y resolver muchos problemas prácticos de la Ingeniería. De acuerdo con los coordinadores de los cursos, que participan en el estudio de las ecuaciones diferenciales, la atención debería centrarse en la resolución, utilizando las ecuaciones para resolver problemas, y tratando de interpretar el significado de los coeficientes involucrados. Las ecuaciones diferenciales aparecen a menudo en problemas en el curso de Ingeniería y de Química y, por lo tanto, conocer y aprender a trabajar con éstas es fundamental para los estudiantes y profesionales de los cursos que aludimos, pero percibimos que los estudiantes no comprenden esta idea. Al igual que ocurre con otras asignaturas básicas, la falta de conexión entre el contenido presentado y su aplicación de alguna manera puede traer problemas, como la desmotivación, la falta de interés por la asignatura, la resolución de las actividades mecánicamente y la

8 Matlab es un ambiente para desarrollos matemáticos, numérica o simbólica, con gráficos de funciones. Es mantenido por la MathWorks, Inc http://www.mathworks.com

preocupación por obtener sólo la nota mínima para su aprobación.

Los autores que examinamos, en la sección 2.2, destacaron que varios estudios se habían realizado para mejorar el programa de estudios de Cálculo, pero poco se había investigado en relación a las EDs. También señalaron que este contenido es abordado, tradicionalmente, como una secuencia de técnicas analíticas para encontrar las expresiones para las soluciones y, consecuentemente, los estudiantes no conseguían aplicar las EDs en situaciones específicas.

Algunos educadores están buscando un enfoque más cualitativo del asunto en favor del enfoque de aspectos más visuales y numéricos, y en éstes nos incluimos, cuando trabajamos las EDOs de forma más contextualizada (tal y como se describe en los Estudios 1, 2 y 3), a partir de situaciones-problema y abordando este contenido analítica, numérica y gráficamente, a través del auxilio de recursos computacionales con el objeto de facilitar y acelerar el proceso.

En el Estudio 1 que tratamos en esta sección, al igual que en los siguientes (Estudio 2 y Estudio 3), nos propusimos a investigar las potencialidades de uso de recursos computacionales en el proceso de enseñanza-aprendizaje de ecuaciones diferenciales y, en este contexto, pretendemos también verificar la contribución de la interacción entre el profesor-alumno-material didáctico, para proporcionar condiciones favorables para el aprendizaje significativo. Elaboramos una propuesta de enseñanza que se centró en la solución de situaciones-problema con el uso de recursos computacionales. A partir de la contextualización a través de situaciones-problema que están relacionadas con las áreas de actividad de los futuros profesionales, pretendemos, por un lado, motivar a los estudiantes y por otro, a explorar el razonamiento conceptual con el fin de ayudarles a dar sentido a las ecuaciones diferenciales y sus soluciones.

La práctica pedagógica ocurrió con 59 estudiantes de los cursos de la Química Industrial e Ingeniería (Informática, Producción, Automatización y Control y Ambiental) de *UNIVATES-RS*, que cursaron la asignatura de Cálculo III, impartida por la autora de esta tesis, en el primer semestre de 2006. Los alumnos fueron divididos en dos grupos regulares, uno por la mañana (27 estudiantes, principalmente de los cursos de Ingeniería) y otro por la noche (32 alumnos, fundamentalmente de la Química Industrial). La práctica se centró en la unidad referente a la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias, con un total de 32 horas de clase regular de la asignatura, siendo de 8 horas de clase con la planilla de cálculos OpenOffice, de 12 horas de clase con el *software* Powersim y 12 horas de clase en las actividades en que se utilizó papel y lápiz.

5.3.1 Método de enseñanza y aprendizaje

La metodología empleada en la práctica pedagógica estuvo basada en la Teoría Socio interacionista Vygotsky (2000 y 2003). Como ya se ha mencionado, en esta teoría se destacan dos factores como esenciales para el aprendizaje: la adquisición de conocimientos a través de la interacción social y la posibilidad de organizar situaciones de enseñanza que actúen en la zona de desarrollo próximo del estudiante, de modo que le permita alcanzar los niveles de conocimiento más elaborados. Vygotsky (MOREIRA, 2006) señala que siendo el aprendizaje proveniente de la interacción social, es importante que el estudiante tenga la oportunidad de interactuar socialmente con los compañeros y con el profesor para fomentar su desarrollo cognitivo y su aprendizaje.

En nuestra práctica pedagógica, en la mayor parte de la clase, los estudiantes trabajaron por parejas o tríos, en la solución de situaciones-problema, que se encontraban en su zona de desarrollo próximo. Pocas veces algunos de los estudiantes individualmente sabían resolver la situación-problema en cuestión, sin embargo, al proponérsela en una guía impresa que contenía los desafíos intermediarios que el grupo debería enfrentar, pretendíamos fomentar la interacción social y proporcionar las condiciones para que el pequeño grupo, con la mediación del profesor y del uso del ordenador, tuviera condiciones para resolver la situación-problema. Además, en esta estrategia de enseñanza, evitábamos responder directamente al cuestionamiento de los estudiantes, dándoles una respuesta lista. El profesor, durante la mediación en el aula, respondió a las preguntas a través de la formulación de nueva(s) pregunta(s) cuya(s) respuesta(s) podían(n) ayudar a reducir las dudas de los estudiantes y provocar nuevas conversaciones que condujeran a la solución final, o nuevos debates.

Empezábamos las clases, por lo general, a partir de una exposición acerca de las actividades que los alumnos tendrían que desarrollar, con el objeto de proporcionarles una motivación para el tema, introducir el tema que debería ser trabajado y dar una noción general de los recursos computacionales que utilizaríamos. Luego, en pequeños grupos, los estudiantes trabajaban en situaciones-problema que estaban en las guías impresas (Apéndice 2), con diversas cuestiones intermediarias, cuya respuesta dependía de la operación de un modelo computacional que era entregado al estudiante o de la creación de un modelo por el grupo. Empezábamos la clase a través de actividades exploratorias que, además de ayudarles a los alumnos a resolver la situación-problema, también tenía el objetivo de la familiarizarles con el *software.* Al final de la clase, los estudiantes nos entregábamos por escrito una guía impresa por el grupo, con las respuestas del grupo, para que las corrigiéramos y empezáramos la próxima clase con un debate con el gran grupo, momento en que repasábamos las cuestiones-clave y realizábamos una pequeña reconciliación integrativa. De inmediato, hacíamos una introducción sobre el nuevo tema del trabajo y los estudiantes empezaban a trabajar en pequeños grupos y el ciclo se repetía. Con la exigencia de la entrega de solamente una guía por grupo, pretendíamos promover la negociación de significados entre los estudiantes, que se veían obligados a encontrar una solución satisfactoria para todos los miembros del grupo. Es esta etapa que disponíamos i) de las mejores condiciones para captar si los significados compartidos por el grupo eran los que se esperaba científicamente para aquella materia de estudio y ii) de campo fértil para sembrar ideas que podrían conducir a una resignificación que fomentaría el aprendizaje significativo.

Dentro de esta propuesta, buscamos actuar como una facilitadora del aprendizaje, haciendo con que los alumnos participaran en su propio aprendizaje y mejorara su interacción con el grupo, los compañeros, y con el material didáctico. Para ello, es fundamental que el alumno pueda estudiar los problemas de su interés, y no, meramente, abstractos y descontextualizados de su futura área profesional.

5.3.2 Herramientas Computacionales

Entre las herramientas disponibles para la simulación de situaciones-problema, elegimos la panilla de cálculos[9] y el *software* Powersim[10], a causa de las razones que presentaremos posteriormente. Cabe señalar que pocos alumnos conocían la

9 Elegimos la Planilla de cálculos del OpenOffice porque es un *software* libre.
10 Tenemos la Powersim Constructor V2.51, que es gratuito.

planilla de cálculos y nadie tenía conocimiento acerca del *software* Powersim, entonces, inicialmente, hicimos una exposición sobre su funcionamiento y la utilidad de los principales íconos que serían utilizados en la construcción de modelos y de las simulaciones. Posteriormente, acompañábamos a los alumnos y les cuestionábamos cuando algo no nos parecía bien, hacíamos con que reflexionaran sobre los resultados obtenidos y les estimulábamos a mejorar el modelo construido o las simulaciones que estaban explorando.

Una planilla de cálculos es un aplicativo que posue herramientas para almacenar, manipular, calcular y analizar datos, que pueden ser presentados en forma gráfica. Nos permite implementar fácilmente cálculos recursivos acumulativos, por ejemplo, para determinar el saldo al final del mes en una cuenta de ahorros de la cual sabemos el capital inicial y la tasa de rendimiento, basta con digitar cuatro células de la planilla: el mes del ingreso inicial y su valor, el mes posterior y el acumulado de capital (bienes de capital en el mes anterior, más los rendimientos = capital veces la tasa de rendimiento). La extensión de esta fórmula a lo largo de la columna permite determinar el valor del capital al final de tantos meses, como usted desea. Las cifras encontradas se pueden representar en forma gráfica, y, si se aplica el algoritmo correctamente, las consecuencias de las modificaciones en los valores de parámetros y variables iniciales se pueden ver al instante.

En las actividades que hemos propuesto para ser desarrolladas con la planilla teníamos como principal objetivo que los estudiantes trabajaran con la manipulación de datos para ayudarles a interpretar, por ejemplo, el concepto de vida media de sustancias radiactivas y encontrar su constante de desintegración, trabajando con la idea de aproximación de la tasa de variación media para la tasa de variación instantánea (derivada).

El conocimiento sobre la derivada son los subsumidores esenciales para el aprendizaje significativo de ecuaciones diferenciales y, aunque, supuestamente, tuvieran que haber sido aprendidos en el curso de Cálculo I y II, nuestra experiencia y las entrevistas con los profesores que imparten esta asignatura durante muchos años, nos indicaron que la mayoría de los estudiantes no atribuían ningún significado a estos conceptos y, además, sabían, a lo sumo, una técnica de cálculo.

Hemos propuesto a los estudiantes muchas actividades en forma de preguntas, estimulándoles a interactuar con los datos de las tablas en la planilla de cálculos para encontrar respuestas. Para ello, los estudiantes tendrían que modificar los valores de los parámetros en las células, ello cambiaba los factores ya determinados en las fórmulas y comprobaban cómo este cambio afectaba a los datos de la tabla, tratando de interpretar el fenómeno en cuestión. Por ejemplo, en la Tabla 5.10, vamos a presentar un modelo de desintegración radiactiva, explorado por los estudiantes con la ayuda de la planilla de cálculos, en que las dos primeras columnas indican el número de átomos radiactivos (N) para diferentes valores de tiempo (t); la tercera columna muestra la variación de N (ΔN) por la variación de t (Δt), calculada con las cifras presentadas en las dos primeras columnas y la cuarta columna muestra la razón entre las columnas 3 y 2. A partir de esa planilla, los estudiantes puedieron observar que variando el valor de Δt el valor obtenido en la cuarta columna es constante y cuando Δt disminuye, la tasa de variación media tiende a la tasa de variacón instantánea, en este caso es la constante de desintegración radiactiva. Este tipo de ejercicio pretendía ayudar al estudiante a dar significado a las expresiones como la Ecuación 5.1.

$$\frac{\lim_{\Delta \to 0}\left[\frac{\Delta N}{\Delta t}\right]}{N}=k \quad \text{ou} \quad \frac{dN}{dt}=kN \qquad \text{Eq. 5.1}$$

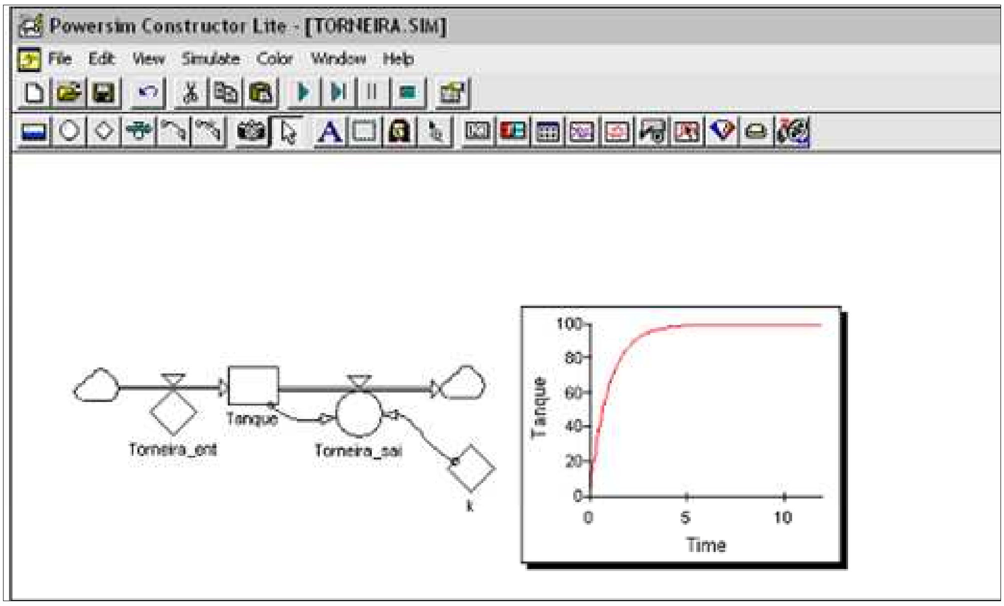
El uso de panillas de cálculos también es adecuado para la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, en la que el algoritmo producido por el estudiante puede basarse en el razonamiento conceptual apropiado para la situación-problema propuesta, y no la formulación matemática de la ecuación diferencial, como en el cálculo del interés compuesto.

Otro recurso computacional que elegimos para abordar las ecuaciones diferenciales, el Powersim, es un *software* que permite modelar un sistema a través de la elaboración de diagramas de flujo utilizando dos tipos básicos de variables: los niveles y las tasas, representados por la metáfora de los tanques y grifos. El tanque (o nivel) representa una cantidad que se acumula y el grifo (la tasa) conectado a un tanque representa el cambio en la cantidad en el tanque.

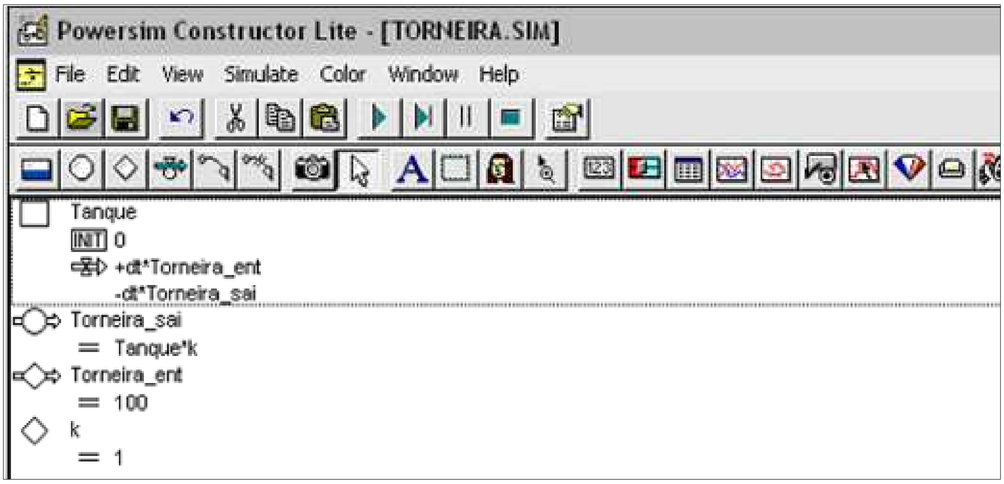
Tabla 5.10 - Una de las desintegraciones radiactivas exploradas por los estudiantes con la panilla de cálculos OpenOffice.

	Δt (segundos)	0,1	
t (segundos)	N	(ΔN/Δt)	(ΔN/Δt)/N
0,0	1000000		
0,1	991373	-86269	-0,087
0,2	982821	-85524,9	-0,087
0,3	974342	-84787,07	-0,087
0,4	965936	-84055,623	-0,087
0,5	957603	-83330,482	-0,087
0,6	949342	-82611,597	-0,087
0,7	941152	-81898,914	-0,087
0,8	933033	-81192,380	-0,087
0,9	924984	-80491,940	-0,087
1,0	917004	-79797,543	-0,087
1,1	909093	-79109,137	-0,087
1,2	901250	-78426,669	-0,087
1,3	893475	-77750,089	-0,087
1,4	885768	-77079,346	-0,087
1,5	878126	-76414,389	-0,087
1,6	870551	-75755,169	-0,087
1,7	863040	-75101,636	-0,087

Optamos por usar el *software* Powersim, exactamente, por el hecho de trabajar con íconos para modelar una situación-problema. Además, su uso facilita la comprensión de la relación entre las variables de las ecuaciones diferenciales y su comportamiento sin estar en posesión de la solución analítica. En nuestra propuesta, presentamos situaciones-problema contextualizadas a las que los estudiantes consiguen atribuir significados, por ejemplo, el nivel de agua en un tanque que se abastece de un grifo y tener un sumidero a través del cual el agua puede fluir, conforme se observa en la Figura 5.1. A los estudiantes se les pregunta acerca de las variables y parámetros que pueden afectar a este nivel (corriente del grifo, la zona de sumidero,...). Ellos podían interactuar con su modelo, hacer simulaciones y, además, podían variar los parámetros y reconstruían su modelo todas las veces que necesitaran a fin de producir resultados satisfactorios.



(a)



(b)

Figura 5.1 - Modelo de flujo de entrada y salida de agua en un tanque, aplicado en la capa de construcción de Powersim. a) Representación icónica usada para construir el modelo. b) La ventana de ecuaciones, generado automáticamente por Powersim, ya que han aplicado el modelo en la capa de la construcción.

Realizamos actividades con lápiz y papel en el aula, sin el uso del ordenador, para que los alumnos también resolvieran las ecuaciones diferenciales de forma manual, ya que es uno de los objetivos de la asignatura que, así como aprender a interpretar la ecuación diferencial y los parámetros involucrados, el estudiante sepa resolverlos analíticamente, utilizando las técnicas de resolución. En varias ocasiones, los estudiantes expresaron sus respuestas usando lápiz y papel y, luego, comparaban sus resultados con los que obtuvieron a través de las simulaciones realizadas en el ordenador, mediante el examen de las diferencias entre ambos resultados, cuando fuera necesario.

5.2.3 Materiales instruccionales

En nuestro trabajo, pretendemos identificar subsumidores que son necesarios para el aprendizaje de ecuaciones diferenciales a través de la entrevista que realizamos con los profesores y de nuestra experiencia, y los tuvimos en cuenta, durante el desarrollo de materiales de instrucción y en la mediación del profesor en la acompañamiento de las actividades prácticas.

Elaboramos el material, según una visión ausubeliana y las actividades incluyeron aplicaciones de EDOs, la solución de situaciones-problemas, la discusión de cuestiones teóricas, la interpretación de los resultados, la construcción de gráficos entre otros, utilizando como herramientas de apoyo la planilla de cálculos de OpenOffice y el *software* Powersim.

Como pretendíamos satisfacer las dos condiciones propuestas por Ausubel como esenciales para que el aprendizaje significativo ocurriera, centramos nuestro abordaje en actividades computacionales que estuvieran en consonancia con los intereses, necesidades y dificultades de los estudiantes en relación con los contenidos de ecuaciones diferenciales. Para ello, dimos prioridad a la interpretación y al análisis del comportamiento de las soluciones encontradas para las ecuaciones diferenciales, referentes a las situaciones-problema estudiadas, en vez de dar prioridad a la simple resolución analítica, como convencionalmente se hace. Las situaciones-problema se abordan en la Tabla 5.11. Las guías impresas de todas las actividades que constan en el Apéndice 2.

Los materiales instruccionales (guías) que elaboramos buscan respetar los dos principios programáticos propuestos por Ausubel (2003) como facilitadores del aprendizaje, es decir, la diferenciación progresiva y la reconciliación integrativa. Más concretamente, en relación al primer principio, buscamos abordar el contenido de ecuaciones diferenciales a partir de las ideas más generales e inclusivas, presentando una idea del todo y, luego, poco a poco, diferenciamos en términos de detalles y características específicas, clasificándolas en categorías, técnicas de resolución, tipos de soluciones, y gráficos. Para atender el segundo principio, tratamos de presentar y discutir con los alumnos las similitudes y diferencias entre los tipos de ecuaciones diferenciales, el comportamiento de las soluciones, las técnicas de resolución analítica, los gráficos y las aplicaciones que ya han sido abordadas. Al final de la unidad, hicimos una amplia reconciliación integrativa.

Tabla 5.11 – Situaciones-problema abordadas en la práctica pedagógica.

Situación-problema	***Ecuación diferencial***
Desintegración radiactiva	$\frac{dN}{dt}=kN$
El crecimiento de la población	$\frac{dP}{dt}=kP$
La absorción de medicinas	$\frac{dQ}{dt}=kQ$
Reacciones químicas	$\frac{dC_A}{dt}=kC_A$
Problemas de mezcla	$\frac{dQ}{dt}=T_{entrada}-T_{saída}$
Ley de Newton de enfriamiento	$\frac{dT}{dt}=k(T-T_m)$
Caída de cuerpos con la resistencia	$\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=g$
Circuitos eléctricos	$L\frac{di}{dt}+Ri=V$
El crecimiento de la población	$\frac{dP}{dt}=kP-\frac{k}{L}P^2$
Propagación de enfermedades	$\frac{dy}{dt}=ky(L-y)$

En el momento en que propusimos la guia de actividades 1, pretendíamos que los estudiantes trabajaran con la idea de tasa de variación, para luego establecer la relación con las ecuaciones diferenciales. Buscamos, a través de la ayuda de la planilla de cálculos, abordar el concepto de vida media, desintegración radiactiva, crecimiento exponencial, y a través de las simulaciones, los estudiantes fueron deafiados a encontrar la constante de desintegración y probar la solución de una ecuación diferencial. Los alumnos guardaron en el *TelEduc*[11] las tareas realizadas en la planilla de cálculos para que, posteriormente, la profesora consiguiera analizar con tranquilidad los procedimientos que cada pareja aplicó. Los alumnos entregaron a la profesora las actividades de lápiz y papel, cuando estaban debidamente resueltas.

En la guía 2 presentamos el uso de *software* Powersim. Desafiamos a los estudiantes a que construyeran los diagramas que representaran la situación-problema. Los alumnos construyeron tablas y gráficos y llevaron a cabo simulaciones, variando las tasas de entrada y salida, además analizaban el efecto que esto causaba en el gráfico y en las tablas de valores numéricos. Desarrollamos las guías 4 y 5 a través del uso del *software* Powersim, cuando queríamos explorar con los estudiantes situaciones que podían ser aplicadas a varios ámbitos, que involucraban la participación de los diversos cursos de origen de los estudiantes: el crecimiento de logística de la población para hacer un análisis comparativo con el crecimiento exponencial; circuitos eléctricos para relacionar con la asignatura de los Circuitos que es obligatoria en los cursos de Ingeniería y la caída de cuerpos que es un contenido abordado en las asiganturas del campo de la Física.

Los alumnos llevaron a cabo las actividades de las guías 3 y 6 sin el uso de los recursos computacionales. Los alumnos resolvieron los ejercicios, propuestos también en forma de situaciones-problema, analíticamente, a través del uso de recursos como papel, lápiz y una calculadora que les ayudó en los cálculos numéricos. En estas actividades tuvimos como principal objetivo que los estudiantes trabajaran un poco con las técnicas analíticas para la solución de ecuaciones diferenciales y repasaran los conceptos y aplicaciones.

En las guías propusimos una secuencia que mejor satishiciera el principio de diferenciación progresiva y tras, buscamos hacer una clausura, destacando las relaciones entre los diversos temas, conceptos, técnicas y aplicaciones abordados, a fin de potencializar la reconciliación integrativa. Esta última parte la realizamos a través de una breve presentación (Apéndice 3), utilizamos un proyector multimedia y proporcionamos momentos para la participación oral de los estudiantes.

---

11 El TelEduc es un ambiente de apoyo para la enseñanza y el aprendizaje a distancia, que está siendo desarrollado por el Centro de Tecnología de la Información Aplicadas Educación (NIED) y por el Instituto de Computación (IC) de la Universidad Estatal de Campinas (UNICAMP). Utilizamos este medio sólo para el almacenamiento de material.

5.3.4 Instrumentos de investigación

Realizamos la colecta de datos para el análisis a través de: i) las guías que los alumnos nos las entregaron, al final de cada clase, con las respuestas de común acuerdo del grupo; ii) las observaciones realizadas por la profesora, durante las clases, y registradas en su diario de clase; iii) un cuestionario aplicado, al final del semestre, a los estudiantes y iv) la entrevista semi-estructurada realizada, a finales del semestre, con veinte parejas de los estudiantes y grabadas en audio.

Buscamos, a lo largo de las clases, hacer cuidadosas observaciones del proceso de enseñanza-aprendizaje, con el fin de recoger informaciones que pudieran contribuir al análisis de nuestra investigación. Estas observaciones las registramos, formamos un diario de las clases. Analizamos las informaciones relevantes contenidas en este documento junto con otros materiales de colección: guías, entrevista y cuestionario.

Elaboramos los ítems del cuestionario (Apéndice 4) con el fin de evaluar a los estudiantes, individualmente, en relación a su participación en las actividades (motivación para aprender), comprensión conceptual, participación en grupos de trabajo, dificultades y sugerencias para mejorar el material y estrategias de implementación de una nueva práctica.

En la entrevista semi-estructurada pretendíamos colectar datos para evaluar a los estudiantes con respecto a los siguientes aspectos: la motivación, la participación en las actividades, la aceptación de la estrategia de enseñanza-aprendizaje propuesta, la interacción con los compañeros, las dificultades encontradas, a la importancia que se atribuye a los recursos computacionales y sugerencias de mejora. Entrevistamos a los estudiantes a partir de 10 preguntas básicas y de vez en cuando se les hicimos otras preguntas para aclarar determinados puntos o profundizar las opiniones de los alumnos. En la Tabla 5.12 presentamos las 10 preguntas de la entrevista y sus objetivos.

Tabla 5.12- Cuestiones de la entrevista con los estudiantes y sus objetivos.

Cuestiones	***Objetivos***
Q1: En general, me gustaría que comentaran un poco acerca de lo que les pareció la asignatura en su conjunto.	- Obtener informaciones sobre el interés de los estudiantes, los aspectos que les motivan a trabajar con este enfoque didáctico, así como su participación en las actividades
Q2: Si pensamos en términos de ecuaciones diferenciales, ¿creen que han aprendido algo con la utilización de los ordenadores? ¿Si lo han aprendido qué y cómo?	- Ver cómo los estudiantes percibieron el uso de recursos computacionales, su importancia o no en el proceso de enseñanza-aprendizaje de ecuaciones diferenciales.
Q3: ¿Cuáles fueron sus principales dificultades en relación a: a la asignatura, al contenido, a los programas informáticos (Planilla, Powersim) utilizados, a las matemáticas implicadas?	- Identificar las dificultades encontradas por los estudiantes.
Q4: En relación al trabajo en grupos, ¿qué opinan? ¿Ha tenido alguna ventaja o desventaja? ¿Cuál (es)?	- Evaluar cómo los estudiantes perciben la realización de actividades en grupos y la interacción con los compañeros.
Q5: Si algunos amigos de otros cursos les preguntasen, ¿cuáles son y para qué sirven? / ¿cuál es la importancia de las ecuaciones diferenciales, qué les dirían? Q6: ¿Percibieron alguna relevancia en el estudio de las ecuaciones diferenciales para el curso? ¿Qué/ Cuál?	- Verificar cómo los estudiantes perciben, si perciben la importancia del contenido de las ecuaciones diferenciales.
Q7: ¿Cuál es la diferencia entre la solución general y una solución particular de la ecuación diferencial? Q8: Considere la posibilidad de limpiar un río. Se sabe que la cantidad de contaminantes que se eliminan por mes es proporcional a la cantidad de contaminantes que se encuentra en el río en el tiempo t (en meses). ¿Cuál es la ecuación diferencial que expresa matemáticamente esta situación? ¿Qué informaciones pueden colectar sin resolverlas? ¿Cómo es tu solución gráfica? ¿Cómo resolverían esta ecuación diferencial?	- Evaluar las cuestiones conceptuales de las ecuaciones diferenciales.
Q9: ¿Cómo fue su participación (de ustedes) en la asignatura? ¿Qué opinan que se debería hacer para que se obtuviera más información? Q10: ¿Qué puede hacerse para mejorar en: - la asignatura? - el contenido? - los *softwares* (Planilla, Powersim) utilizados? - las matemáticas implicadas?	- Recoger las sugerencias para mejorar nuestra propuesta para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, ya que nuestro objetivo es contribuir para la mejoría del proceso de enseñanza-aprendizaje de ecuaciones diferenciales en cursos de nivel superior.

5.3.5 Síntesis de los resultados

En esta subsección presentamos los principales resultados que obtuvimos en el Estudio 1, a partir de las respuestas de los estudiantes a un cuestionario con escala de actitudes y de las declaraciones provenientes de la entrevista semi-estructurada. En forma complementaria, otros datos de nuestra observación participante y las respuestas de los estudiantes en las guías de las actividades están presentes en nuestra discusión.

5.3.5.1 Cuestionario aplicado a los estudiantes en el Estudio 1

Presentamos los resultados del cuestionario que aplicamos a los alumnos, al final del primer semestre de 2006. El cuestionario (Apéndice 4) fue respondido por un total de 55 estudiantes, en el último día de clase del semestre. Codificamos la escala de actitudes: CP (contempla plenamente), C (contempla), SO (sin opinión), D (desacuerdo) y DP (totalmente en desacuerdo). Analizamos la mayoría de las cuestiones cuantitativamente, como se observa en la Tabla 5.13, a continuación.

A partir de los resultados, podemos destacar que los estudiantes, en su mayoría:

- consideraron productivas las actividades realizadas en grupo (49 alumnos) y la participación de la profesora en el proceso (46 alumnos). El reconocimiento de la importancia de la interacción entre el profesor y su grupo, y de los estudiantes entre sí, están de acuerdo con las ideas de Vygotsky que la considera el factor esencial en el proceso de enseñanza-aprendizaje e indica que logramos desarrollar un entorno favorable a la negociación y el intercambio de significados como deseábamos;
- percibieron la importancia de las ecuaciones diferenciales (48 alumnos) y lograron establecer la relación entre este contenido y otros que estudiaron en sus cursos (42 alumnos). Este hecho era una de las dificultades de la asignatura de Ecuaciones Diferenciales y que motivaron este estudio: los estudiantes no percibían la importancia de los contenidos para su formación y, por ello, no les gustó la asignatura y demostraban una gran desmotivación durante las clases;

Tabla 5.13 - Los resultados del cuestionario sobre la opinión de los alumnos con respecto a la asignatura de ecuaciones diferenciales.

	CP	C	S	D	DP	Total
Considero que fui buen (buena) alumno(a).	11	39	5	0	0	55
Considero el contenido trabajado relevante para mi formación.	11	37	3	3	1	55
Tuve dificultades para entender, interpretar las actividades solicitadas.	6	32	5	11	1	55
Poco esfuerzo dedicado al estudio de la asignatura.	1	18	5	30	0	54
No asistí a la mayor parte de las clases de la asignatura.	0	0	1	12	42	55
Tengo la impresión de que aprendí bastante en esta asignatura.	2	38	10	5	0	55
La metodología favoreció mi aprendizaje.	6	31	12	6	0	55
Las actividades con el ordenador favorecieron mi aprendizaje.	10	34	3	7	0	54
Tuve dificultades para realizar las tareas con el ordenador.	1	12	3	30	9	55
Las actividades en equipo fueron productivas.	18	31	4	2	0	55
Tuve pocas iniciativas para resolver eventual falta de base.	1	9	12	28	4	54
Las clases deberían ser bien diferentes.	1	5	13	33	3	55
El tiempo para realizar las tareas fue suficiente.	5	33	7	10	0	55
Creo que fui muy participativo en mi equipo de trabajo.	17	36	1	0	0	54
Busqué siempre compensar mis deficiencias.	4	28	11	11	1	55
Creo que el contenido se presentó claramente.	5	32	14	4	0	55
Tuve dificultades en la realización de los cálculos.	0	34	2	17	2	55
Me gustaron las clases.	5	37	10	3	0	55
Creo que el tiempo en el aula fue bien provechoso.	3	35	10	6	0	54
Puedo construir las relaciones entre las ecuaciones diferenciales y otros contenidos estudiados.	4	38	10	3	0	55
Creo que el papel de la profesora ayudó em mi aprendizaje.	6	41	5	3	0	55

- consideraron que el uso de los ordenadores favoreció el aprendizaje (44 alumnos);
- acudieron a la mayoría de las clases (54 alumnos); se consideraron buenos estudiantes (50 alumnos); participararon en los trabajos en grupo (53 alumnos); les gustaron las clases (42 alumnos). Estos factores pueden demostrar la motivación de los alumnos para aprender y, conforme Ausubel, el factor de motivación es fundamental para que se produzca el aprendizaje significativo;
- fueron conscientes de sus dificultades para realizar los cálculos (34 alumnos). Este aspecto también nos motivó para la realización de nuestro trabajo: antes nuestras

clases de ecuaciones diferenciales se basaban en técnicas de resoluciones para obtener la solución analítica que implicaban cálculos considerados demasiados complicados por los estudiantes, que no entendían las ecuaciones diferenciales, pues ya que estaban demasiados preocupados por los cálculos. Estamos de acuerdo en que los cálculos son importantes, pero como nuestros alumnos ingresan a la facultad con muchas deficiencias en el contenido de las Matemáticas básicas, es importante encontrar otras formas de abordar el contenido de modo que podamos disminuir sus dificultades con el álgebra y promover de alguna manera la comprensión del significado, propósitos y utilidad de las ecuaciones diferenciales;

- tuvieron dificultades para entender e interpretar las actividades solicitadas (38 alumnos). Creemos que la razón de las dificultades encontradas por los estudiantes esté en la alteración de la manera como vienen trabajando desde que entraron en la universidad. A diferencia de la secuencia convencional de trabajo en el que los estudiantes asisten a una presentación de los contenidos en la pizarra, lo copian y resuelven algunos ejercicios patrones, nuestras actividades requirieron que los estudiantes interpretaran situaciones-problema, buscaran estrategias de resolución, comprendieran los procedimientos de desarrollo de estas estrategias e hicieran algunas simulaciones para obtener los resultados;
- consideraron que aprendieron mucho en la asignatura (40 alumnos);
- señalaron que el enfoque metodológico favoreció el aprendizaje (37 alumnos);
- consideraron que no había ninguna necesidad de mejoría significativa en el enfoque didáctico presentado (29 alumnos). Las principales sugerencias de los alumnos que se manifestaron en el cuestionario constan en la Tabla 5.14. En esta Tabla, presentamos argumentos de los estudiantes, y cuantificamos los que sugirieron la misma mejoría. Codificamos a los alumnos: Q1 (alumno 1), Q2 (alumno 2), ... Q55 (alumno 55).

A partir de los datos, realizamos un análisis de consistencia interna del cuestionario que aplicamos. Presentamos los resultados en la Tabla 5.15. El coeficiente de confiabilidad es una medida de autocorrelación, de la correlación interna entre los ítems, o de la consistencia interna del instrumento. Los métodos de fiabilidad interna tienen como objetivo estimar el coeficiente de fiabilidad de la puntuación total. Una medida de fiabilidad más utilizada es el cálculo de coeficiente alfa de Cronbach .

Tabla 5.14-Sugerencias de los alumnos para mejorar la lecciones.

Propuestas de mejora	***Ejemplos de argumento***	***Nº de alumnos***
Repasar el contenido básico	"repasar contenidos básicos de la enseñanza secundaria" (Q52)	1
Reducir el ritmo de las clases	"el tiempo fue poco. ..." (Q54)	1
Ejercitar más	"ejercicios para ser hechos en casa..."(Q26) "... ser un poco más ejercitada la teoría antes de ver las aplicaciones..."(Q10)	5
Disponer de clases más teóricas y explicativas	"antes de utilizar el ordenador sería interesante dar una mayor base de Eds ..."(Q45) "... una clase teórica para introducción de la cuestión ..."(P30)	7
Proporcionar más aplicaciones	"más trabajo hacia el área de actuación..."(Q52)	3
Dar más material de apoyo	"suministro de material didáctico..."(Q44) "Una fotocopia con algunas reglas importantes..."(P27)	4
Dar explicaciones claras por parte de la profesora	"una explicación más simple del contenido." (Q15)	5
No hay nada que mejorar o no respondió	"creo que las clases fueron bien aprovechadas, y me gustó utilizar el ordenador en el aprendizaje, ... Por ello, creo que fue muy bueno el método utilizado" (Q55) "creo que todo está muy bueno, no es necesario mejorar la clase..."(Q49) "seguir con este método de enseñanza mediante el uso de gráficos por ordenador y las planillas de cálculos en..."(Q48)	29
Más esfuerzo personal	"yo tal vez podría haber intentado más,..."(Q43) "... una mayor dedicación por mi parte..."(Q39)	5

El coeficiente alfa de Cronbach evalúa la consistencia interna que tiene por objetivo medir el mismo constructo (variable que desea medir). Obtuvimos este coeficiente a través de la varianza total del instrumento, de la varianza de cada ítem y de la suma de las varianzas de estos ítems. Calculamos el coeficiente alfa de Cronbach del cuestionario que utilizamos para la obtener la estimativa de la parcela fidedigna común a los ítems del cuestionario, resultando en 0,81. Según Moreira y Veit (2004), cuando se mide las actitudes e intereses, los valores aceptables del coeficiente de fiabilidad están a la orden de 0,70.

Tabla 5.15-Síntesis de análisis de consistencia interna del cuestionario.

Número de alumnos	**Promedio del escore total**	**Número de ítems**	**Coeficiente alfa**
55	77,02	21	0,81

5.3.5.2 Entrevista semi-estructurada con los alumnos en el Estudio 1

En esta subsección, presentamos los resultados de la entrevista semi-estructurada que realizamos con 20 parejas de los alumnos, durante aproximadamente 15 minutos por pareja, antes del final del primer semestre de 2006. Hicimos los registros sonoros en audio de las entrevistas y, posteriormente, las transcribimos a fin de facilitar su análisis.

Inicialmente, presentamos datos cuantitativos referentes a cada cuestión de la entrevista y destacamos que:

- en una evaluación general de la práctica pedagógica, 19 parejas se manifestaron positivamente. Una única pareja no comentó de forma positiva sobre la metodología de trabajo;
- en cuanto a la asistencia proporcionada por el ordenador, 9 parejas consideraron que el ordenador les ayudó porque permitió la visualización de la dinámica de la situación-problema, 7 parejas expresaron que el ordenador les ayudó, pero no sabían caracterizar de qué manera, 3 parejas entendieron que el ordenador no les ayudó y 1 pareja no opinó a respeto;
- las principales dificultades que los estudiantes señalaron estaban relacionadas con los cálculos que involucraban matemática básica (4 parejas) o derivadas e integrales (8 parejas). Cuatro parejas comentaron que tenían dificultades para resolver analíticamente las ecuaciones diferenciales, sólo dos parejas tenían

dificultades para entender las ecuaciones diferenciales y una pareja dijo que tenía dificultad para manejar el ordenador;

- en relación a la realización de las actividades por parejas, 16 se manifestaron positivamente, destacaron que este tipo de actividad había promovido la interacción, el debate y el intercambio de ideas. Cuatro parejas no se manifestaron;
- cuando les preguntamos sobre la importancia de las ecuaciones diferenciales, 13 parejas lograron explicárnosla bien y 7 nos la explicaron con gran dificultad;
- 19 parejas percibieron la relevancia en el estudio de las ecuaciones diferenciales para el curso y una pareja no percibió su relevancia;
- cuando les preguntamos las diferencias entre la solución general de la particular de una ecuación diferencial, 15 parejas nos las explicaron con claridad y 5 parejas nos las explicaron con gran dificultad;
- cuando les presentamos una situación-problema que involucra ecuación diferencial, 17 parejas lograron trazar el gráfico de la solución y/o presentar la solución analítica y 3 parejas tuvieron dificultades;
- para mejorar las clases, 3 parejas sugirieron que se redujera el número de clases en el laboratorio de informática y 4 parejas sintieron falta de una introducción de las ecuaciones diferenciales en la clase.

A continuación, presentamos un análisis cualitativo de las entrevistas, ejemplificándolo a través de los argumentos de los estudiantes. Tan pronto como colectamos los datos, a cada pareja se le atribuimos un código, Dn, en que el índice n está relacionado con la identificación de la pareja.

Para el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias los dos principales subsumidores son los conceptos de derivada e integral, que comprenden los principales conceptos y técnicas del curso de Cálculo Diferencial e Integral. Los estudiantes percidieron la importancia de este tipo de contenido para la comprensión de las ecuaciones diferenciales, pero había varias deficiencias en el ámbito de las técnicas de resolución analítica de integrales y derivadas, como puede observarse en algunas declaraciones.

"... las dificultades eran más en las ecuaciones que ya estudiamos en otras ocasiones que con la interpretación del problema ..."(D3)

"... la dificultad que tuve fue con la parte de las asignaturas anteriores, integrales ..."(D9)

A pesar de estas dificultades, los estudiantes asociaron el concepto-clave de derivada a la tasa de variación, el concepto esencial para la comprensión conceptual de las ecuaciones diferenciales. Destacamos algunos argumentos:

"... buen resumen, una ecuación diferencial tiene una derivada allí junto, entonces trabajaba con la tasa de variación ..."(D10)

"... es interesante la cuestión de las tasas, creo que esto es muy agradable para nosotros, tanto en la física, como en los circuitos, se utiliza ampliamente en la física en las cuestiones de la temperatura, variación de velocidad, y los circuitos a causa de amperaje. " (*D4)*

Entre las condiciones necesarias para la ocurrencia del aprendizaje significativo, Ausubel (2003) señala la predisposición de los estudiantes para aprender. Creemos que la forma en que abordamos el contenido de ecuaciones diferenciales generó una disposición para que los estudiantes aprendieran debido a las aplicaciones que trabajamos y al uso de recursos computacionales. Algunas declaraciones de los estudiantes:

"... me pareció interesante a causa de las guías, ya que obligó a la gente a pensar más, no sólo analizar la situación y saber hacer mecánicamente, me pareció muy agradable ..." (D3)

"... me gustó la asignatura debido a la manera de la profesora enseñar la parte más práctica, la caída de un cuerpo, dio un ejemplo en circuitos, desintegración radiactiva, mostró que hay en la práctica, que, por lo general, no la tenemos, en las asignaturas de ingeniería vemos los cálculos y no sabemos cómo aplicarlos, me pareció algo importante y es bueno para mí, me gustó la manera en que la profesora nos enseñó, dando ejemplos de cómo aplicar ..."(D5)

"... Creo que es muy importante porque tenemos varios ejemplos, la población, el crecimiento, que veo en mi propio trabajo que hemos de tener una lógica, por lo que tenemos que aprender a interpretar estos casos que encontramos seguido por ahí, si vamos a hacer una evaluación del impacto ambiental de la contaminación de un río, después de haber cursado la

asignatura que ve que todo va a través de una ecuación ... " (D3)

Según Vygotsky (MOREIRA, 2006) el factor que merece atención en el proceso de enseñanza-aprendizaje es la interacción social, que conduce al aprendizaje. El aprendizaje, considerado como el creador de la zona de desarrollo próximo, despierta diversos procesos internos de desarrollo que son capaces de operar sólo cuando la persona interactúa con personas de su entorno y cuando en cooperación con los compañeros. Es necesario que haya intercambio de significados dentro de la zona de desarrollo próximo del estudiante y esto ocurrió con varios estudiantes, como demuestran, por ejemplo, las siguientes afirmaciones:

> *"... aprendemos más porque tenemos que debatir la cuestión, porque a veces si hace individualmente y no lo sabemos, recogemos a la copia del colega, pero si hacemos por pareja, intentamos responder ye acabamos a aprendiendo, porque si usted no sabe y su colega está respondiéndole ejercicio él te va a enseñar por qué está respondiendode esa manera ... " (D3)*

> *"... Yo evolucioné más después de que comenzaron las clases en el laboratorio, porque en el aula yo intentaba y muchas veces no conseguía, pedía ayuda a los colegas y no podía llegar al final por sí solo, entonces estas lecciones que comenzamos a sentarse juntos ... " (D9)*

> *"... me gustó mucho el sistema de trabajar en grupos, usar la computadora, se puede discutir en el grupo, no es sólo una idea ..."(D9)*

> *"... aprendí más en el laboratorio que en el aula. Sabría una dificultad en el aula, que haciendo allí, es más fácil para usted buscar en el gráfico y analizar su descomposición o el crecimiento exponencial como realmente lo es. Es más fácil analizarlo poniendo en las tablas. Es un poco complicado al inicio, el formulario de la entrada, salida, pero pronto nos acostumbramos, resulta más fácil. " (D16)*

Nosotros producimos el material utilizado en el desarrollo de nuestro estudio para que fuera potencialmente significativo, especialmente en relación con el sentido lógico, es decir, que presentara características potenciales para que el alumno transformara el significado lógico del material en significado psicológico para sí. Las Figuras 5.2 y 5.3 y algunos argumentos de los estudiantes reflejan indicios de que hubo transformación del significado lógico en el significado psicológico y que el profesor y los estudiantes están compartiendo significados, por ejemplo:

> *"...la* [solución] *general sirve para resolver situaciones similares que se utilizan por lo general, entonces las situaciones que tienen datos específicos se utilizan las ecuaciones específicas para esa situación..." (D5)*
>
> *"... la solución particular está limitada a unos criterios y condiciones que sean dadas en el problema ..."(D3)*
>
> *"... decae en proporción de lo que tiene, conforme va reduciendo va decayendo menos***,** *eso cambia la proporción que va saliendo..."(D3)*
>
> *"...* [si la descontaminación de un río] *la contaminación va cayendo, va entrando agua limpia ... el gráfico empieza en alta y va reduciendo debido a que sólo el agua potable va entrar siempre dejando algo de contaminación.* [la cantidad de contaminantes que deja un mes es siempre el mismo?] *no porque la primera va más contaminantes porque el agua está más contaminada, ..., entonces cada vez va dejando una cantidad menor y la tendencia es llegar a una línea que es igual a cero, pero línea que la tendencia es a ser el infinito ..."(D10)*
>
> *"... La solución general es para muchos casos y la solución particular es un caso particular. Sólo una..." (D12)*

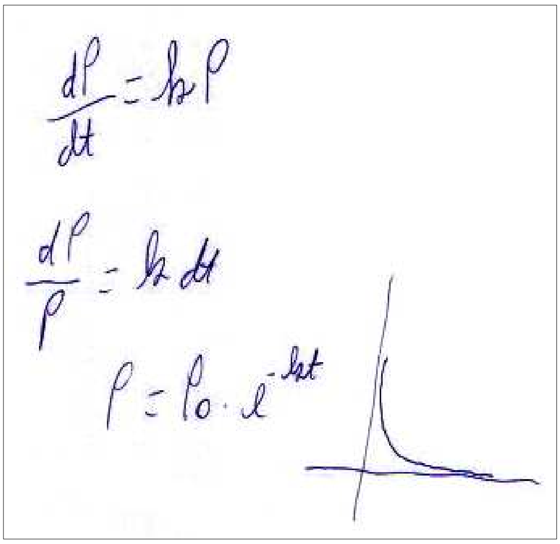


Figura 5.2: Respuesta presentada por la pareja D8 a la pregunta 8 del cuestionario.

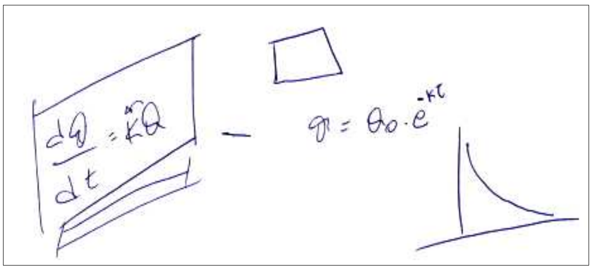


Figura 5.3: Respuesta presentada por la pareja D1 a la cuestión 8 del cuestionario.

Las Figuras 5.2 y 5.3 son soluciones presentadas por los alumnos a la pregunta 8 del cuestionario. Esto se refiere a una situación que implica la limpieza de un río a una tasa que es proporcional a la cantidad de contaminantes que están presentes en el río en un momento dado. En respuesta los estudiantes tienen una ecuación diferencial que describe la situación gráfica y su solución analítica.

A partir de entrevistas, con los estudiantes, pudimos comprender que ellos valoraron la metodología inversa, cuando el debate sobre el comportamiento de las soluciones precedía la presentación de la solución analítica, con argumentos como:

> *"... Yo pasé toda mi vida así, con esta didáctica, del profesor venir y enseñar la secuencia, la rutina del aula, los ejercicios, ejemplos, durante el bimestre todo el mundo estaba viendo los distintos casos y la aplicación de pronto, no teníamos la profesora explicando, este ejemplo ustedes tendrán que hacer ahora, o varias solicitudes, varios ejemplos, distintos tipos de aplicabilidad y en varios casos de la gente que cuando no terminen la ecuación, por supuesto, luego viene la ayuda de la Sra...". (D10)*

> *"... yo pienso distinto... porque utilizó la computadora, tuvo una asociación muy diferente y tal, en otra asignatura es el método directo, el profesor daba la hoja con el cálculo, el cálculo derecho, y daba el resultado. Aquí no sólo es el cálculo para realizar, tiene algún ejemplo que usted puso, que por ejemplo es el crecimiento de la población. Otro método de las reacciones químicas, la medicina, entonces, que aplicación tiene también, es una herramienta que voy a necesitar en mi vida, pero yo nunca me di cuenta y ni sabía que podía utilizar, sabiendo así de esa manera. "(D18)*

> *"Se trata de una cuestión diferente, una forma diferente de trabajar, recuerdo en 2002 cuando tuve, casi no vencía la copia de la pizarra, hacer bien la técnica, más trabajar juntos en equipo, en la computadora." (D13)*

Teniendo en cuenta los resultados de este Estudio 1, restructuramos nuestra propuesta de nueva aplicación, que presentamos en la secuencia como Estudio 2.

5.4 Estudio 2

La realización de los tres estudios es un proceso de mejoramiento de las prácticas pedagógicas adoptadas, de los materiales elaborados y de los instrumentos de colecta de datos. Los objetivos que los orientan son los mismos que presentamos anteriormente, por lo tanto, como el Estudio 2 es un intermediario entre los Estudios 1 y 3, no será muy detallado, sólo señalaremos las alteraciones introducidas en relación al Estudio 1. En la sección anterior, especificamos el Estudio 1, que es la base de los otros dos estudios y, en la sección posterior, presentaremos las mejorías realizadas a lo largo del proceso de desarrollo de los estudios, que ha culminado en el Estudio 3.

A partir del análisis de los datos del Estudio Preliminar y del Estudio 1, reformulamos nuestras guías de actividades y llevamos a cabo las modificaciones necesarias en la metodología de las clases para desarrollar el Estudio 2.

En el Estudio 2, realizamos la práctica pedagógica con los 31 alumnos de la asignatura de Cálculo III, de los cursos de Química Industrial y de Ingeniería (Informática, Producción, Automatización y Control, Ambiental) de UNIVATES-RS. Las clases ocurrieron en el periodo de la mañana, durante el primer semestre de 2007. La práctica pedagógica envolvió un total de 44 horas de clase en el horario regular de la asignatura, siendo 20 horas de clase con el *software* Powersim, 8 horas de clase con la planilla de cálculos de OpenOffice, y 16 horas de actividades de clase en que los alumnos utilizaron simplemente papel y lápiz. En este estudio enfocamos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y algunos casos de segundo orden.

Por sugerencia de los alumnos del Estudio 1, en el Estudio 2, inicialmente, trabajamos sólo con un *software*, el Powersim, para que los alumnos tuvieran más tiempo para asimilar mejor su sintaxis y sólo en la guía 8 presentamos la planilla de cálculos de OpenOffice para hacer un abordaje más numérico de las ecuaciones diferenciales. Añadimos las reconciliaciones integrativas, considerada por los alumnos como clave para una buena comprensión del contenido abordado.

En relación a los instrumentos para la colecta de datos, en el Estudio 2, incluimos el desarrollo y la aplicación de un test inicial y test final de conocimientos (Apéndice 5 y 6). También les aplicamos un cuestionario (Apéndice 7) y una entrevista (Apéndice 7) a los alumnos, pero esta vez por separado. Los objetivos que subyacen a la utilización de estos instrumentos se describen en la sección 5.3.4.

Los objetivos que guiaron la elaboración del test inicial y del test final de conocimientos, se encuentran en las Tablas 5.16 y 5.17, respectivamente. Establecimos estos objetivos a partir de los estudios de la literatura revisada, de las entrevistas con los profesores y del plan de asignatura en que desarrollamos los estudios, buscando considerar particularidades del contexto analizado. Estos testes fueron validados en relación al contenido por un conjunto de especialistas en el área, específicamente, cinco profesores con experiencia. Posteriormente obtuvimos el coeficiente de fiabilidad.

Tabla 5.16 - Los objetivos específicos del test sobre comprensión de derivada y nociones de ecuaciones diferenciales.

Dado(a):		*El alumno deberá ser capaz de:*	*Cuestiones*
expresión analítica que involucra la derivada	A	interpretar la notación de derivadas	3, 4, 6
	B	atribuir significado a la derivada	3, 4, 5
gráfico de funciones	C	interpretar adecuadamente el comportamiento de las funciones	16,18
	D	interpretar adecuadamente las tasas de variación	17, 24, 25
	E	interpretar gráficamente las derivadas de primer orden pertinentes	7, 8, 9, 10
gráfico de derivadas de funciones	F	describir el comportamiento de las funciones primitivas	26,27
descripción de una situación-problema	G	Hacer inferencias adecuadas sobre el comportamiento de la solución del problema de acuerdo con las condiciones indicadas	12,14
	H	Hacer inferencias adecuadas sobre el comportamiento de las tasas de variación de acuerdo con las condiciones indicadas	15, 19, 20
	I	interpretar el comportamiento de la solución de la ecuación correspondiente en la forma gráfica	11,21
	J	interpretar el comportamiento de las tasas de variación en la forma gráfica	13, 22, 23

Tabla 5.17 - Los objetivos específicos del test final sobre comprensión de derivada y de ecuaciones diferenciales.

Dado(a)		*El alumno debe ser capaz de:*	*Cuestiones*
gráfico de funciones	a	interpretar gráficamente el comportamiento de las tasas de variación	30,14
	b	Interpretar gráficamente las derivadas de primer orden pertinentes	1,2
	c	identificar la ecuación diferencial	15, 22, 31
gráficos de las derivadas de funciones	d	Describir el comportamiento de las funciones primitivas	16,17
descripción de una situación- problema	e	hacer inferencias apropiadas sobre el comportamiento de la solución del problema de acuerdo con las condiciones indicadas	4,24
	f	hacer inferencias apropiadas sobre el comportamiento de las tasas de variación de acuerdo con las condiciones dadas	5,7
	g	interpretar el comportamiento de la solución de la ecuación correspondiente en la forma gráfica	3,9
	h	interpretar el comportamiento de las tasas de variación en la forma gráfica	10,12
	I	identificar la ecuación diferencial en la forma analítica	6, 13, 23
	J	identificar la solución de la ecuación diferencial en la forma analítica	8, 11, 25
expresión analítica que involucra ecuaciones diferenciales	K	interpretar el comportamiento de las soluciones en la forma gráfica	19, 20, 26
	L	Hacer inferencias sobre el comportamiento de la solución	18, 29, 32
	M	identificar la solución de la ecuación diferencial en la forma analítica	21, 27, 28

5.4.1 Discusión de los resultados

Presentamos los principales resultados que obtuvimos en el Estudio 2, a partir de las respuestas de los alumnos a un cuestionario con escala de actitudes, de sus declaraciones en una entrevista semiestructurada y de las respuestas que obtuvimos en los testes de conocimientos (test inicial y test final). Además, otros datos provenientes de nuestra observación participante y de las guías de las actividades forman parte de nuestra discusión.

5.4.1.1 Test inicial de conocimiento aplicado a los alumnos en el Estudio 2

Presentamos los resultados obtenidos en el test inicial de conocimientos que aplicamos a los 28 alumnos en el primer día de clases del primer semestre de 2007. Este test estaba compuesto por dos cuestiones discursivas y 25 cuestiones objetivas, pero en este análisis no consideramos las cuestiones discursivas, porque muy pocos alumnos las respondieron. Analizamos los datos cuantitativamente, conforme los presentamos a continuación.

Análisis de fiabilidad

A partir de los resultados obtenidos en el test, calculamos el coeficiente alfa de Cronbach para estimar la parcela fidedigna común a los ítems del test, resultando en valores que se muestran en la Tabla 5.18.

Tabla 5.18 – Coeficiente alfa de Cronbach del test.

Número alumnos	***Número de ítems***	***Promedio de aciertos***	***Desviación patrón***	***Coeficiente alfa***
28	25	12,96	4,27	0,76

También calculamos el coeficiente de correlación de los puntajes en cada cuestión con la puntuación total y el coeficiente alfa de la puntuación total si el ítem fuera eliminado del test. En la Tabla 5.19 podemos observar que la eliminación únicamente del ítem 4 o sólo del ítem 13 son las que más aumentarían el coeficiente alfa del test. Sin embargo, si elimináramos estos dos ítems, el coeficiente alfa aumentaría sólo tres centésimos y decidimos no eliminarlos.

En la Tabla 5.20 presentamos los resultados obtenidos en la aplicación del test que muestra el número de alumnos que eligieron distintas alternativas. Los objetivos que motivaron la elaboración del test (Tabla 5.16) parecen relacionados con los ítems que lo componen.

Tabla 5.19 – Correlación ítem total y coeficiente alfa si el ítem especificado en la primera columna de la tabla es eliminado del test.

Ítem	***Correlación ítem-total***	***Coeficiente alfa si el ítem es eliminado***
3	0,09	0,77
4	0,04	0,78
5	0,41	0,75
6	0,65	0,73
7	0,38	0,75
8	0,60	0,74
9	0,37	0,75
10	0,31	0,76
11	0,46	0,75
12	0,44	0,75
13	0,03	0,78
14	0,42	0,75
15	0,56	0,74
16	0,38	0,75
17	0,35	0,75
18	0,29	0,76
19	0,35	0,76
20	0,81	0,72
21	0,61	0,74
22	0,27	0,76
23	0,20	0,76
24	0,51	0,74
25	0,24	0,76
26	0,65	0,73
27	0,31	0,76

Tabla 5.20 - Discriminación de las tomas de decisiones de los estudiantes. La correcta puntuación de las alternativas están en negrita.

Ítem	***Objetivo***	***Alternativas***					***Porcentaje de aciertos***
		A	B	C	D	E	
3	A e b	**16**	7	1	4	0	57,14%
4	A e b	1	4	9	**14**	0	50,00%
5	B	8	4	**15**	1	0	53,57%
6	A	0	**15**	13	0	0	53,57%
7	E	16	3	1	**8**	0	28,57%
8	E	6	**4**	15	3	0	14,29%
9	E	0	**6**	1	21	0	21,43%
10	E	**13**	6	7	2	0	46,43%
11	i	0	5	1	1	**21**	75,00%
12	G	10	2	3	**13**	0	46,43%
13	J	3	4	2	4	**15**	53,57%
14	G	10	0	**16**	2	0	57,14%
15	H	0	**21**	2	5	0	75,00%
16	C	3	0	**25**	0	0	89,29%
17	D	**25**	0	2	0	0	89,29%
18	C	0	2	0	**26**	0	92,86%
19	H	2	**20**	4	2	0	71,43%
20	H	0	13	**13**	2	0	46,43%
21	I	0	9	0	2	**17**	60,71%
22	J	2	**3**	9	5	9	10,71%
23	J	3	6	10	**2**	7	7,14%
24	D	8	**17**	2	1	0	60,71%
25	D	3	7	3	**15**	0	53,57%
26	F	16	**8**	4	0	0	28,57%
27	F	**15**	2	3	8	0	53,57%

Consideraciones

Percibimos que los alumnos obtuvieron un pequeño porcentaje de aciertos en las cuestiones relacionadas con los objetivos "e" y "j", es decir, los alumnos presentaron mucha dificultad para interpretar gráficamente las derivadas de primer orden y el comportamiento de las tasas de variación en la forma gráfica a partir de la descripción de una situación-problema. Este resultado indica la necesidad de repasar estos tópicos, antes de abordar las ecuaciones diferenciales, considerando que son subsumidores importantes para la comprensión de este contenido.

Ya las cuestiones que tienen un mayor porcentaje de aciertos están relacionadas con los objetivos "c" e "i", que involucran la interpretación del comportamiento de las funciones en la forma gráfica, y el objetivo "d" que se ocupa de la interpretación de las tasas de variación a partir de un gráfico dado. También son considerados importantes subsumidores para el aprendizaje de ecuaciones diferenciales.

En declaraciones informales, los alumnos afirmaron que habían considerado las alternativas de las cuestiones del test muy similares. Ello puede mostrar una falta de claridad de los alumnos en relación a los contenidos abordados y la dificultades en diferenciarlos.

5.4.1.2 Cuestionario aplicado a los alumnos en el Estudio 2

Presentamos los resultados obtenidos a través del cuestionario que les aplicamos a los alumnos al final de la primera mitad de 2007. Un total de 31 alumnos respondieron el cuestionario, en el último día de clase del semestre. Para el análisis de las actitudes utilizamos una escala Licker, codificada como: CP(contempla plenamente), C (contempla), SO (sin opinión), D (desacuerdo) y DP (totalmente en desacuerdo). Analizamos la mayoría de las preguntas cuantitativamente, conforme presentamos a continuación:

Como resultados positivos, podemos destacar que los alumnos, en mayoría:

- consideraron productivas las actividades en grupo (24 alumnos) y la participación de la profesora en el proceso (25 alumnos). El reconocimiento de la importancia de la interacción entre el profesor y el grupo, y de los alumnos entre sí, está en consonancia con las ideas de Vygotsky que considera la interacción el factor esencial en el proceso enseñanza-aprendizaje;

Tabla 5.21 Resultados del cuestionario sobre las opiniones de los alumnos en relación a la asignatura de las ecuaciones diferenciales.

	CP	C	S	D	DP	Total
Considero que fui buen (buena) alumno(a).	6	18	3	3	0	30
Considero el contenido trabajado relevante para mi formación.	6	19	5	0	1	31
Tuve dificultades para entender, interpretar las actividades solicitadas.	6	9	4	10	2	31
Poco esfuerzo dedicado al estudio de la asignatura.	1	8	7	12	3	31
No asistí a la mayor parte de las clases de la asignatura.	0	2	1	4	24	31
Tengo la impresión de que aprendí bastante en esta asignatura.	2	17	6	5	1	31
La metodología favoreció mi aprendizaje.	1	15	5	8	2	31
Las actividades con el ordenador favorecieron mi aprendizaje.	3	15	3	7	3	31
Tuve dificultades para realizar las tareas con el ordenador.	0	6	2	14	9	31
Las actividades en equipo fueron productivas.	11	13	5	1	1	31
Tuve pocas iniciativas para resolver eventual falta de base.	0	9	6	13	3	31
Las clases deberían ser bien diferentes.	1	6	5	14	4	30
El tiempo para realizar las tareas fue suficiente.	6	19	1	4	0	30
Creo que fui muy participativo en mi equipo de trabajo.	6	25	0	0	0	31
Busqué siempre compensar mis deficiencias.	2	16	5	8	0	31
Creo que el contenido se presentó claramente.	2	19	5	5	0	31
Tuve dificultades en la realización de los cálculos.	4	12	3	10	2	31
Me gustaron las clases.	5	15	8	3	0	31
Creo que el tiempo en el aula fue bien provechoso.	2	14	6	9	0	31
Puedo construir las relaciones entre las ecuaciones diferenciales y otros contenidos estudiados.	3	13	10	5	0	31
Creo que el papel de la profesora ayudó em mi aprendizaje.	1	24	4	2	0	31

- se dieron cuenta de la importancia de las ecuaciones diferenciales (25 alumnos). Este fue uno de los hechos complicados de la asignatura de las ecuaciones diferenciales que motivaron este estudio: los alumnos no percebían la importancia de los contenidos para su formación y, por ello no les gustaba la asignatura y demostraron desmotivación en las clases;
- estuvieron presentes en la mayoría de las clases (28 alumnos), esto no es tan común en otras asignaturas; se consideraron buenos alumnos (24 alumnos); participaron en trabajos en grupo (31 alumnos); les gustaron las clases (20 alumnos). Estos factores pueden demostrar la motivación de los alumnos para aprender y, conforme Ausubel,

el factor de motivación es esencial para que se ocurra el aprendizaje significativo.

Otros resultados que señalamos:

- la aprobación por el uso de los ordenadores no fue tan expresiva, 18 alumnos de un total de 31 alumnos consideraron que la utilización de los ordenadores estimuló el aprendizaje. Pudimos percibir que los alumnos no captaron muy bien el motivo de la utilización de la computadora, que era ayudar a interpretar la solución de ecuaciones diferenciales, y no, necesariamente, obtener la solución analítica como un instrumento cuando sean profesionales;
- los alumnos parecen contradecirse, ya que sólo la mitad de los alumnos señaló que la metodología favoreció el aprendizaje (16 alumnos), mientras que sólo 7 alumnos consideraron que las clases deberían ser diferentes; Además, 21 alumnos consideraron que el contenido les fue presentado de forma clara, 19 consideraron que aprendieron bastante en la asignatura. Por lo tanto, no se puede desechar la posibilidad de que los alumnos rellenaron los cuestionarios, mecánicamente, sin mucho envolvimiento[12];
- el hecho de varios alumnos no aprobar la metodología (10 alumnos), es coherente con el argumento de Habré (2003), en lo que se refiere a la resistencia de los alumnos a aceptar un nuevo abordaje metodológico: hay una creencia del gran poder de una respuesta simbólica contra una gráfica y, por lo tanto, los alumnos consideraron que una buena metodología era la formal la que favorecía la manipulación del lenguaje simbólico formal al creer que es más importante y útil que la gráfica (y numérica);
- sólo la mitad de los alumnos fueron conscientes de sus difícultades en la realización de los cálculos (16 alumnos) y admitieron que tuvieron dificultades para comprender e interpretar las actividades solicitadas (15 alumnos). Este dato no confiere con lo que observamos en el aula, durante el desarrollo de las actividades.

---

12 Esta conclusión es apoyada por el valor del coeficiente alfa obtenido en el test en la presente solicitud (= 0,31). En la primera aplicación de esta prueba, no se encontraron contradicciones en las que la proporción era de 0,81.

5.4.1.3 Entrevistas semi-estructuradas con los alumnos en el Estudio 2

En esta subsección, presentamos los resultados obtenidos de la entrevista semi-estructurada que realizamos con 10 alumnos, durante un período de aproximadamente 15 minutos por alumno, al final de la primera mitad de 2007. Para la elección de los 10 alumnos utilizamos el criterio de rendimiento y satisfacción con la metodología, es decir, seleccionamos para la entrevista a los alumnos que aprobaron la metodología (A3, A4, A5, A8, A9 y A10) y otros que no la aprobaron (A1, A2, A6 y A7), de éstos alguns demostraron un buen crecimiento en términos de aprendizaje de ecuaciones diferenciales (A5, A7, A8 y A9) y otros que sólo presentaron pequeños avances (A1, A2, A3, A4, A6 y A10). Realizamos estas evaluaciones en conformidad con nuestra percepción en el aula, teniendo en cuenta que pasamos mucho tiempo en contacto con los alumnos, ello nos permitió hacer la selección adecuada, de acuerdo con objetivos preestablecidos. La entrevista estaba compuesta por nueve preguntas básicas y, de vez en cuando, por otras preguntas para más aclaraciones o profundización de las opiniones de los alumnos. Además, seleccionamos tres cuestiones (10, 23 y 31) del test de conocimientos y se les pedimos a cada alumno que explicara la manera cómo procedió para elegir una de las alternativas. Hicimos grabaciones en audio de las entrevistas y, más tarde, las transcribimos a fin de facilitar su análisis.

Presentamos un resumen del discurso de los alumnos[13] relativos a cada una de las cuestiones de la entrevista, seguida de un análisis cualitativo y/o cuantitativo. Una vez que los datos fueron recogidos, a cada alumno se le asignó un código, An, donde el índice n se refiere a la identificación del alumno.

Pregunta 1: En términos generales, ¿podría comentar un poco acerca de lo que piensa de la asignatura en su conjunto?

A1: *"Me pareció que utilizamos pronto el ordenador, ya que no teníamos ni idea de cómo usar el programa en sí. No significa que no supiéramos hacerlo, pero hasta que entendiésemos qué se relacionaba con qué, cómo funcionaba, no conocíamos el programa, podríamos haber hecho el ejercicio en primer lugar a mano. Sí, porque tal vez tendríamos una idea, pensábamos cómo sería, porque a veces poníamos los datos, teníamos la respuesta, pero no sabíamos de dónde provenía. Teníamos un concepto de*

13 Transcribimos el discurso que toma pequeñas correcciones gramaticales, cuando la forma original tornaría el texto abominable

los gráficos sería más o menos así ...”

A2*: " En la computadora tuve bastante dificultad, no sé si yo no conseguía entender el asunto, el contenido. Conseguí entenderlo un poco, pero, en el momento, en el ordenador nosotros nos dábamos cuenta de que podíamos hacer las cosas que nosotros ... creábamos y, a veces salía algo totalmente equivocado. Hacíamos todo lo que hay en el ordenador y en el momento de hacer solos era más complicado. No teníamos el ordenador en la tabla, con el resultado. La primera asignatura que tuvimos hasta ahora con el uso de los ordenadores fue el Cálculo III. Tuvimos, anteriormente, la asignatura de Cálculo II, pero ya habíamos hecho en el aula y después trabajamos un poco en el ordenador ... ya hemos empezado a trabajar en los ordenadores y eso fue muy complicado. Prefiero hacer las cuentas en el aula que en el ordenador. "*

A3*: "Pensé que era muy bueno, es diferente,... me pareció interesante. La manera de hacer las cosas con la práctica... fue muy diferente de otras asignaturas, en la que uno tiene que quedarse allí todo el tiempo sólo escuchando y no hace casi nada. No entiendo cómo se va a utilizar el ordenador, creo que es mejor de esa manera ".*

A4*: "Mira, para mí de las tres asignaturas de cálculos que tuve, creo que fue la más provechosa... debido a la aplicación. Pues en la asignatura de Cálculo I, nosotros calculábamos, pero no veíamos ninguna aplicación práctica y la asignatura de Cálculo II es también más la teoría. Ahora, la asignatura de Cálculo III, no sé si a causa de la metodología y tal, ... Bueno, yo pensaba que era la mejor, de hecho, fue la mejor hasta el momento... a mí me gusta mucho calcular, pero no calcular para nada."*

A5*: "Bueno, creo que la asignatura es muy interesante, incluso más para el curso de Automoción y creo que voy a utilizarla mucho. Sentí un poco de falta de clase para hacerlo en la práctica... así tal vez el trabajo más brazal, logaritmos... al menos no tengo muchas ideas y, a continuación, cuando empezó a ser muy “*e^x*” , entonces, necesitábamos para utilizar el logaritmo y complicaba... y luego sentí falta de una parte más técnica, es que forma parte de las Matemáticas ".*

A6*: "... Lo que me llamó la atención es que fuimos mucho al laboratorio, ... la cuestión de las guías que me pareció interesante y fue diferente. Pero siento mucho pues a veces resolvía una guía sin conocer la otra bien. Pero si usted dejara cada clase para explicar todas las guías anteriores, probablemente eso perjudicaría al grupo, algo que no era necesario”.*

A7: "*Acerca de la asignatura, para nosotros del área de Ingeniería, fue muy interesante, pero tuvimos dificultad, yo personalmente, en la construcción de ecuaciones. Creo que si está parte fuera elaborada con modelos listos, que realmente más tarde los utilizaríamos para trabajar... me gustaría tener un modelo listo, lo utilizaría después en mi trabajo diario, sería más fácil... fue excelente, porque al menos ahora, cuando estoy mirando algunos trabajos más técnicos que hicimos, estoy viendo* *allí una Ecuación Diferencial. Yo sé por qué está allí, cómo está hecha. Yo puedo no saber para resolver, pero sé cómo és, como se está haciendo ese cálculo, porque... Lo hicimos en la logística, yo ya lo había visto allí, pero yo no conseguía saber cómo funcionaba. No hay duda acerca de la importancia de la asignatura. "*

A8*: "Pensé que era bueno usar la computadora, era diferente, divertido".*

A9*: "He encontrado un método diferente de enseñanza. Cada clase teníamos una variación. El hecho de haber ido al laboratorio fue importante para los alumnos, en mi opinión. Si miramos desde la práctica de la cuestión, tenemos varios ejemplos. Pudimos ver cómo funcionaban los gráficos,las tablas. Asociamos la parte analítica cuando tenemos una idea al menos. No es llegar, resolver un problema sin saber qué hacer... las otras clases son primera lecciones en el aula, con resolución estándar, problemas de trabajo y después para el laboratorio. Está tenía bastante la parte práctica, el uso de software. Sabes lo que estás haciendo ".*

A10*: "En mi opinión la asignatura fue buena. Me gustó la metodología de presentación, porque fue al laboratorio. También hubo una parte de la clase que me pareció buena. Bien, el grupo también colaboró un poco. Me gustó porque en el laboratorio ejemplificamos mejor, percibimos mejor lo que sucedía en la práctica "*

Consideraciones

En una evaluación de la práctica pedagógica, percibimos que los alumnos, en general, se manifestaron positivamente, aunque algunos criticaron el uso excesivo del ordenador (A1, A2 y A6). En contraste, otros elogiaron su uso (A8, A9 y A10). También hubo manifestaciones favorables en relación al abordaje de situaciones-problema. Entre las condiciones para la ocurrencia de aprendizaje significativo, Ausubel (2003) puso de relieve la predisposición de los alumnos a aprender. Creemos que la forma en que fue tratado el contenido de las ecuaciones diferenciales creó una disposición de los alumnos a aprender, debido a las aplicaciones que fueron trabajadas.

El uso de los recursos computacionales fue también un factor de motivación para muchos alumnos, pero para otros no tuvo ningún efecto. Necesitamos, en un nuevo estudio, revaluar la frecuencia de su uso, de modo que, al menos, no se convierta en un elemento que desmotive a los alumnos. A partir de las entrevistas con los alumnos, también pudimos percibir que se valoró la metodología inversa (A9), en que la discusión sobre el comportamiento de las soluciones precedía la presentación de la solución analítica.

Pregunta 2: Pensando en términos de ecuaciones diferenciales, usted considera que aprendió algo con la utilización de las computadoras? ¿En caso afirmativo, qué y cómo?

A1: *"Creo que sí, en los gráficos, los cuadros, porque a veces pensábamos que iba a crecer siempre y no crecía siempre... a veces haces a mano una parte y usted cree que sigue como está, siempre así.*

A2: "*No*"

A3: *"Creo que el ordenador no nos ayudó a entender las ecuaciones diferenciales".*

A4: *"Creo que el ordenador ayudó, ayudó algo, también porque calculamos, mucho cálculo, cálculo, sólo se queda en eso. Se puede utilizar otra herramienta para calcular, además de mostrar el gráfico que necesita en el momento y, a continuación, haga clic y listo... Bien más rápido... estimula más ya que, manualmente, tardaría mucho tiempo... imagínese calcular cosita por cosita, sólo para elaborar un gráfico ".*

A5*: "Creo que tal vez sería interesante el uso del ordenador después de que hubiésemos aprendido la teoría, porque usted tendría un complemento más y tendría que basarse mucho en el software... Del aula al software. El software es más para ver, para construir gráficos, es más la simulación. "*

A6*: "Creo que el software me ayudó más para presentar una tabla lista, para poder construirla, porque a mano no sería viable. Pienso en la cuestión gráfica, pues hacer todos los gráficos tampoco sería fácil y práctico. El software me ayudó seguramente a comprender eso. Además, estas cuestiones que hicimos en las últimas guías de partículas y la posición de todas las cosas y todo lo que involucraba aspectos de Física que sólo estudiamos en este semestre, creo que las entendí mejor que las otras, por increíble que parezca en la física creo que entendí mejor, porque había aceleración, aunque ya sabíamos que aceleración era la variación de velocidad en el tiempo. Por lo tanto, la gente no veía la ecuación, entonces decía que aquí no había variación, ya sabía lo que era. Creo que las he entendido mejor ".*

A7*: "El ordenador nos ayudó a comprender cómo funciona el cálculo. La única dificultad es que cuando estaba allí haciéndolo pensaba que era fácil, pero cuando tenía que construirlo... no sé por qué voy a memorizar todo esto, si la máquina* *me está haciendo las ecuaciones "*

A8*: "... El ordenador nos posibilitó tener una idea de cómo cada función se porta realmente, se porta cómo, y si está correcto..."*

A9*: " Por supuesto. El ordenador nos ayudó en todos los sentidos, es lo que pensé. Así, parte de la comprensión del gráfico y la tasa de variación, el diseño del gráfico. ¿Qué no era una parábola?... la comparación de los gráficos de la posición de la aceleración y de la velocidad, de modo que usted pueda entenderlas. Si hiciera el gráfico en el cuaderno yo no iba dibujarlo perfectamente ".*

A10: *"Sí, el ordenador me ayudó mucho. Pero para aclarar: si usted tiene un papel, usted piensa esto sucede así, pero allá en el ordenador hay un ejemplo más práctico. Consigue acompañar lo que sucede, y en ese método numérico también. Tal vez muchas clases se realizaron en el laboratorio, pero, en mi opinión, las clases en el laboratorio valieron la pena, todas quizás fueron un poco repetitivas. Pero todas valieron la pena".*

Consideraciones

En cuanto a la asistencia que el ordenador prestó, ocho alumnos consideraron que el aparato ayudó, debido a las siguientes razones: facilita la construcción de gráficos y tablas (A1, A4, A6 y A9), permite analizar el comportamiento de una función (A8), ayuda a entender las tasas de variación (A9), importante en las simulaciones (A5) y dos alumnos consideraron que el ordenador no les ayudó (A2 y A3).

Algunos alumnos criticaron el uso de Powersim, comentaron que debería ser utilizado un *software* que serviría formar a un futuro profesional y padronizar (usar el mismo *software* en todas las asignaturas de Cálculo). Percibimos que muchos alumnos no estaban entendiendo el uso de Powersim como una herramienta para el aprendizaje de EDOs, sino como una herramienta para uso futuro (como ocurre con *Autocad*, por ejemplo, importante herramienta para los arquitectos). Algunos alumnos cuestionaron "*¿Por qué estudiar tanto un software que nunca voy a usar?"*.

Pregunta 3: ¿Cuáles fueron sus principales dificultades en relación: a la asignatura? al contenido? A los *softwares* (Planilla de cálculos de OpenOffice, Powersim) utilizados? la matemática implicada?

A1: *"En la planilla de cálculos, poco de álgebra y derivados e integrales"*

A2: *"... comprender, interpretar ,..., powersim"*

A3: *"técnicas ..."*

A4: *"En cuanto a su utilización, ni tanto ahora, para entender al principio es complicado. Me pareció más fácil una planilla de cálculo, mucho más fácil, es que la otra yo nunca había utilizado. La planilla de cálculo estaba mucho más acostumbrada a usarla, no significa que era más fácil ".*

A5: *"Generalmente no, sólo en aquel contenido que era más fundamental. Derivadas también".*

A6: "*Sí, tuve que utilizar el software, en la Matemática básica ... aquella cuestión de la "e"*[14] *... Yo sí tenía que hacer una ecuación que exigía la" e ", tenía que averiguar cómo se la hacía, porque yo no lo sabía de memoria. No me parece muy difícil la resolución de ecuaciones, evidentemente, a veces había algunas integrales como en el caso de la "e" ... "*

A7: *"Yo sólo quería practicar diaria o frecuentemente. Yo no tendría dificultad. Pero, por lo general, no tengo tanta dificultad. También fue bueno en el ordenador, no fue fácil de hacer, yo no tenía mucho interés en Powersim, pues creo que no voy a utilizarlo. Utilizo mucho una planilla de cálculo, me gustaron las dos o tres clases, aprendí una o dos cositas de la planilla de cálculo..."*

A8: "*No sentí mucha dificultad...*"

A9: *"No, creo que no tuve dificultades. En el software manejábamos el Excel, me pareció tranquilo. Sólo la parte de entender el problema es lo principal, después resulta fácil".*

A10: *"En el laboratorio no. Un poco más en el aula, no sé si debido al hecho del Cálculo I y II haber sido insuficiente, o tal vez no conseguí aprovechar el tiempo necesario. Las ecuaciones derivadas e integrales fueron mi mayor dificultad. Las reglas, creo que todavía de otros cálculos que quedaron ".*

Consideraciones

Las principales dificultades encontradas por los alumnos están relacionados

[14] Si refiere a la función exponenciale e^x.

con los cálculos que involucran la matemática básica (A1, A5 y A6) o integrales y derivadas (A1, A5 y A10). Asimismo, destacaron la dificultad de entender e interpretar las situaciones (A2 y A9) y trabajar con el ordenador (A1, A2, A4 y A6). Para el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias los dos principales subsumidores son los conceptos de derivada e integral, que comprenden los principales conceptos y técnicas del curso de Cálculo Diferencial e Integral, pero muchos alumnos presentaban problemas en el dominio de estas técnicas.

Podemos señalar que, a pesar de todo el cuidado en elegir un *software* que se considera de simple manipulación, los alumnos todavía tienen dificultades en usarlo y entenderlo, tal vez sea por el poco uso de herramientas computacionales durante las clases.

Pregunta 4: En relación al trabajo en equipo, ¿qué te parece? Tiene alguna ventaja / desventaja? ¿Cuál (es)?

A1: *"... me pareció bueno el trabajo por pareja, ...nos ayudábamos siempre. ... Era muy bueno, me gusta trabajar por pareja"*

A2: *"Siempre me ha gustado trabajar en equipo, porque lo que yo no sabía las compañeras me lo explicaban".*

A3: " Me pareció fantástico el trabajo por pareja, el uno ayuda al otro”

A4*: "Valió la pena el trabajo en equipo a causa de los ejercicios que eran más reflexivos, tenía que construir las ecuaciones. Sólo si hace algo que no tiene nada que ver con lo que usted quiere y si no hay nadie que le diga que el ejercicio está incorrecto. No hay nadie que le diga que no se debe hacer el ejercicio así, pues hay un error. Así que tratamos de hacer de otra manera, pero a veces no se da cuenta del error. Entonces, a veces, yo estaba haciendo el ejercicio, y Maio dijo: "No, espere un minuto, vamos a hacerlo de otra manera no es así." Así que lo hicimos de mi manera y después de la suya, comparaba las dos maneras y se daba cuenta de que estaba equivocado. Me pareció que valía la pena a causa de ello ".*

A5: *"Me gustó hacer el trabajo por pareja, pero el problema es que se forma un grupo específico.Cree que piensa siempre de una manera... aprende el raciocinio de otra persona. Creo que vale la pena, porque entonces usted obtiene más información, porque si llega a hacerlo solo, permanecerá siempre en sus ideas... Creo que vale la pena el trabajo por parejas. Había cosas, como los logaritmos, yo los no* *sabía bien, pero mi pareja ya los sabía mucho más***.** *Así que aprendí con él. Fue muy interesante ".*

A6: *"Creo que es bueno hacer trabajo por parejas, ...nosotros nos ayudábamos pero a veces no conseguíamos salir del lugar .. a veces no seguíamos adelante, quiero decir, nos deteníamos, y ninguno sabía cómo seguir adelante. "*

A7: *"Estaba tranquilo***.** *Mi compañero se quedaba haciendo en el ordenador, pero yo no sabía cómo se hacía y siempre le preguntaba -" Oh, ¿cómo lo hace, ¿cómo hacerlo? "Siempre nos intercambiábamos ideas. Yo aprendí mucho, cuando estudié por pareja. "*

A8: *"Creo que es bueno hacer el trabajo por pareja... se puede discutir el asunto, intercambiar ideas con los compañeros. Tú tienes una idea y el compañero tiene otra, ahí tú puedes discutirlas.*

A9: *"Creo que el trabajo en el laboratorio tuvo una ventaja, cuando se lorealizó por pareja, hubo demasiada discusión por pareja. . En la parte analítica creo que no, no cambia mucho, porque cuando yo trabajo por pareja, no sé si estoy equivocado o no, no les pongo atención a los compañeros. Yo siempre he sido así, especialmente en las Matemáticas. Siempre me ha gustado hacer el ejercicio solo, desde la enseñanza secundaria, no hacía por pareja, no necesitaba ayuda ajena."*

A10: *"Me pareció muy bueno, una parte de la nota fue considerada en pareja y otra de forma individual. Esto me pareció bastante bueno... Me gusta el trabajo por pareja, principalmente, porque debatimos mucho. Creo que valió la pena."*

Consideraciones

En cuanto a la realización de las actividades en el laboratorio de informática en pareja, los diez alumnos se manifestaron positivamente, destacaron que este tipo de actividad favorecía la discusión y ayudaba en el intercambio de ideas, sólo un alumno se manifestó en contra de las actividades en pareja en los trabajos analíticos. Según Vygotsky (MOREIRA, 2006) el factor que merece mención en el proceso enseñanza-aprendizaje es la interacción social, pues desarrolla varios procesos internos de desarrollo que son capaces de operar sólo cuando la persona interactúa con la gente en su entorno y cuando está en cooperación con los compañeros .

Pregunta 5: Si algunos amigos de otra área preguntar, ¿qué son / para que sirven/ cual es la pertinencia de las ecuaciones diferenciales, ¿qué le diría a ellos?

Pregunta 6:¿Percebiste alguna relevancia en el estudio de las ecuaciones diferenciales para el curso? ¿Qué?

Para las preguntas 5 y 6 juntamos las respuestas, porque se confundían mucho. En respuesta a la pregunta 5, muchos alumnos ya contestaban a la 6, o cuando se les preguntaba la cuestión 6, decían que ya la habían contestado en la cuestión 5.

A1: *"Sí, creo que es importante, que ni en los átomos, o sea, como aquella de río, dos peces, por lo que será muy útil... es que la gente aprenda cómo seguirá, una parte cada vez mayor, entonces tiene que mantenerse constante, porque de lo contrario no será suficiente ".*

A2: *"Primeramente, iba a decir que las ecuaciones diferenciales no son tan difíciles, si usted sabe las integrales, las derivadas, ...ahora de memoria no me acuerdo de las ecuaciones, tendría que dar una mirada en las ecuaciones diferenciales sólo para acordarme de las aplicaciones".*

A3: *"Bueno, por lo que hemos visto hay aplicaciones, pero a veces es difícil lograr entender cómo ponerlas en práctica".*

A4: *"¿Cómo te lo puedo explicar? En el semestre vi bastante por los circuitos, había hecho los circuitos y no había examinado en la ecuación, ¿qué es esa cosa? Así que lo hice y ahora significa que he entendido el significado. Es más para calcular, con una variación, como se puede explicar? Va cambiando en función del tiempo, pero no varían en la misma cantidad... El cambio, no cambio constante ".*

A5: *"Bueno, lo que más vi fue en circuitos y, a continuación, que hace Circuitos en el segundo semestre, probablemente en mi curso indicaría hacer el Cálculo III y después hacer Circuitos... y, a continuación, que presidirá aquí él sabe mejor resolver, que no sólo obtener la fórmula ya listo y encontrar el origen de las variables, los términos. Consigue entender mejor de dónde viene la fórmula... creo que bastante la velocidad, en el tiempo, entonces usted puede calcular la aceleración o llegar a la posición y la aceleración de seguir adelante ".*

A6: *"Creo que fue la peor parte de las aplicaciones, me parece que es la parte más importante. Pensé que todas las cuestiones que se abordan en la guía fueron interesantes. Son cosas que realmente hacen que tú te detengas y pienses en la pregunta Hay un grifo abierto, hay cierta cantidad de agua que sale durante un tiempo y tal, son cuestiones que todo el mundo se ha parado para preguntárselas o ya las ha analizado, pero que la gente, en general, sabía cómo hacerlas..."*

A7: *"Creo que existe situaciones en que hay que haber un crecimiento, hay una salida, una pérdida, una muerte, o va a llegar a un punto que usted no tiene apoyo,* *en nuestra situación de Ingeniería Ambiental. Trabajamos mucho con la situación de apoyo ...va a hacer una aplicación para un producto en la agricultura, por ejemplo, ¿cuánto el suelo puede soportar ? Si usted hace un vertedero, ¿cuántos años el suelo va a soportar dicha cantidad x de los residuos producidos en esa ciudad?Si fuera el modelo que podría incluso llevar para nuestro trabajo para Ingeniería Ambiental, es la cuestión del problema del lugar de tratamiento, por ejemplo, usted hará una línea para capturar estos residuos en la ciudad. Se le hará un modelo, bueno cuando la gente viene a esta población, este nivel ya no es compatible, y viceversa. Aquella situación de tratamiento se completa, que sólo admiten un máximo de llegar a ese punto y, a continuación, no tienen dónde. Creo que de esa manera ".*

A8: *"Tiene importancia, pero no acuerdo de su importancia ."*

A9: *"Bueno sirve para mucha cosa. Oh, para analizar el tipo de crecimiento exponencial de algo ,la caída también. Situaciones de tasa de entrada, otra de salida".*

A10: *"... es un método para ver la derivación, pero no sólo la derivación de un caso, ¿cómo puedo explicártelo? En el caso de una vida media de un elemento químico, consigue analizar a través de una ecuación diferencial. En el caso de una población también, el crecimiento de la población "*

Consideraciones

Cuando solicitamos a los alumnos que hablaran sobre la importancia de las ecuaciones diferenciales, los diez alumnos afirmaron que percibían la pertinencia en el estudio de las ecuaciones diferenciales para el curso, pero tenían dificultades para explicársela. Este hecho indica que hay necesidad de una mayor interferencia de la profesora en el proceso de enseñanza-aprendizaje, para a través de la reconciliación integrativa ayudar a los alumnos a comprender los aspectos importantes del contenido, teniendo en cuenta que están acostumbrados a las clases tradicionales que no requieren esta habilidad.

Pregunta 7: Considere la posibilidad de descontaminar un río. Se sabe que la cantidad de contaminantes que se eliminan por mes es proporcional a la cantidad de contaminantes en el río en el tiempo t (en meses). ¿Cuál es la ecuación diferencial que expresa matemáticamente esta situación? ¿Qué información se puede recoger sin resolverla? ¿Cómo es su solución gráfica? ¿Cómo resolver esta ecuación diferencial?

A1: *"da una Ecuación Diferencial igual a la de la toalla, pero yo no me acuerdo para escribirla ... Creo que nunca el gráfico va a llegar a cero"* [El alumno no sabía escribir la ecuación diferencial y tenía una idea de gráfico, pero no consiguió esbozarlo].

A2: *"Creo que sí, porque hemos trabajado en la tasa, como de la población. Como la del río, no se sabe la tasa, es decir, tanto la contaminación que tendrá, podemos hacer una tasa, si la analizamos durante años, obtenemos un índice de cuánto aumentó o disminuyó a causa de la polución... nosotros habíamos hecho un gráfico de la población, daría lo mismo que... Suponemos que teníamos una tasa, que se iniciará en cien... Creo que crecerá cada vez más…. tiende a aumentar, como la población... "* [El alumno hizo un borrador de una curva de crecimiento exponencial, eso demuestra que hoy por hoy la tendencia es el aumento de la contaminación].

A3: *"La ecuación sería de desintegración radiactiva* [El alumno escribió la solución de la ecuación y no ecuación diferencial] *El gráfico es la cantidad de contaminantes a lo largo del tiempo... Si pensamos así sería como el mismo gráfico que por lo general se reducía, que se reduciría hasta tener una tasa próxima a cero, creo que no, no llegaría a cero... Qué sé yo, por las matemáticas, sería imposible llegar a cero, tiende a cero, nunca llega. "*[El alumno hizo correctamente el gráfico].

A4: *"Creo que será proporcional a la cantidad que tiene cada mes... yo no me acuerdo cómo se escribe la ecuación. Es la cantidad que usted tendrá, la cantidad inicial, menos la cantidad que sacará, quiero pensar un poco... si usted tiene una cantidad alfa que, por ejemplo, que va disminuyendo a cien... no llegará a cero, o va disminuyendo el tiempo. Por ejemplo, si es la mitad, la gente da más mitad, mitad, mitad.. Inicial menos de la cantidad inicial dividido por dos, dividido por el tiempo. Para intentar entonces, la cantidad inicial por el tiempo.Aquí es sólo la cantidad inicial ".* [El alumno hizo el esbozo del gráfico correctamente].

A5: [El alumno escribió la solución de la ecuación diferencial en lugar de escribir la ecuación e hizo el gráfico correctamente]. *"habría algún gráfico de la cantidad de contaminantes en función del tiempo, ... Por lo tanto,al principio pierde mucho de la contaminación y después disminuye cada vez más, ya que pone esa cantidad de acuerdo con la contaminación... no llegaría a quedarse cero matemáticamente hablando... porque siempre saca el porcentaje que tiene, es una cosa de arrojar una piedra en la pared., la piedra anduvo la mitad del camino, anduvo la mitad de la mitad y así sigue"*

A6: *"Sí, es una Ecuación Diferencial, es igual a la primera de las bacterias ... Yo me acuerdo que usted ha dicho alguna vez que siempre que estuviera escrito eso es igual a la ecuación. Era aquella de KDT supongo. Se trata de N algo igual a…falta algo... Falta alguna cosa. Ahí a veces era N. "* [El alumno escribió la correcta ecuación diferencial, su solución analítica y el esbozo del gráfico].

A7*: "Sería en una tasa variable... bien complicado, ... Sería más o menos igual que eso, y aquí tendría el inicial, en el caso. Esa sería la Ecuación Diferencial general, ... y el gráfico de la cantidad de los contaminantes que tendrán sobre el río en función del tiempo... estoy sacando. Él va disminuyendo. Entonces será una línea recta, crece proporcionalmente. Si saca sólo una tasa, no llegará a cero. Si saca de cero y sólo tiene cero, voy a sacar el 10%, va a llegar muy cerca ".* [El alumno no escribió la ecuación correctamente, confundió entre la ecuación y la solución de la ecuación y no consiguió esbozar el gráfico].

A8: *"Permíteme que intente* [El alumno, sin dificultad, escribió la ecuación correctamente]. *Creo que hemos entrado. El gráfico no se aproximaría de cero, porque tiene una proporción de lo que tiene, Proporcional que siempre va sacando".* [El alumno hizo la tabla correctamente, pero no supo resolver la ecuación diferencial].

A9: *"Sí, claro... sería la variación de la cantidad de contaminantes que está dentro. Por lo tanto, cada mes sale una cantidad de lo que tiene. Es proporcional a la cantidad que usted tenga. Yo no entendí bien ..."* [El alumno logró dibujar el gráfico, pero no consiguió escribir la ecuación y su solución].

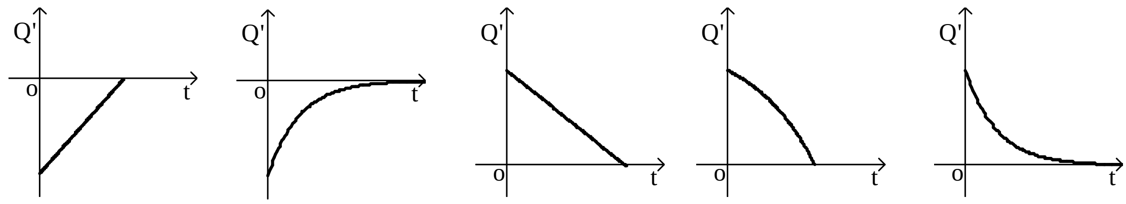
A10: *"Sí, eso se encajaría en una Ecuación Diferencial, pero no sé escribirla... suponemos que hay una gran cantidad de contaminantes, al principio, y un porcentaje será eliminado,... Dependiendo del porcentaje puede salir más, ... nunca llegaría a cero. "* [El alumno logró esbozar un gráfico].

Consideraciones

En esta cuestión tuvimos la intención de evaluar si el estudiante obtuvo un aprendizaje significativo del contenido de las ecuaciones diferenciales, pues presentamos una nueva situación en la que necesitaba utilizar los conocimientos que ya había asimilado, es decir, debía relacionar una ecuación diferencial a una situación-problema presentada, extraer informaciones pertinentes de esta situación y/o ecuación, asociarla a solución gráfica correspondiente y presentar la solución en forma analítica.

Cuando les presentamos a los estudiantes una situación-problema de una ecuación diferencial, tenían problemas para escribir la fórmula y solución analítica, refiriéndose con más frecuencia a la solución gráfica. También confundieron entre la escritura de la ED y la solución de una ED, es decir, cuando se les solicitaba a los estudiantes la ecuación, escribían la resolución, afirmaban que era la ecuación. Entonces nos percibimos que en las guías no exploramos suficientemente esta cuestión, que será considerada en la relaboración de la misma para el Estudio 3.

Pregunta 10 del test: Considere la posibilidad de un tanque con una cantidad inicial de agua, donde hay un agujero en la base a través de la cual, cada minuto, consigue el 10% de agua en el tanque. Cual gráfico que mejor representa la tasa de cambio en la cantidad de agua *(Q')* en el tanque en función de tiempo (t) es:



a) b) c) d) e)

A1: *"Sí, constante yo sabía que no lo era... Eliminé la C y la A... elegería la E. Porque diez por ciento es diez, después da nueve, entonces tiene que dar ocho. "*

A2: *"... había agua en el tanque, sólo salía el 10%, entonces si tenía una cantidad inicial, esa cantidad iba disminuyendo con el tiempo, el 10%. Por lo tanto, creo que elegí la E, porque como, comienza en una cantidad y a partir del momento que va disminuyendo el 10%, como no hay agua para reponer, alcanzará el límite que va a terminar el agua, no lo sé. Pensé y elegí este aquí, no sé si elegí lo correcto. Llega a cero, porque no tiene más agua para reponer lo que está saliendo ".*

A3: "Yo no me acuerdo lo que he señalado, pero creo que ha sido la E. Es el 10% que tiene que salir".

A4: *"Mira, eliminé la A, no tiene nada que ver porque es un gráfico recto, lineal. Entonces, la B realmente está subiendo aquí. No está bajando, aquí sería lo contrario. Pero aquí es diferente, aquél es el gráfico de la cantidad por el tiempo tiempo, aquí está el gráfico de la derivada. Sin embargo, como era el 10%, tuve duda,, aquí divididos en el tiempo, aquí está disminuyendo como si se tratase de un 50% y no el 10%. Si no me equivoco, creo que señalé la E, a causa del 10%, más o menos dividiendo el tiempo. Aquí llegaría a cero, de hecho si es contaminante nunca llegaría. Bueno, podría incluso llegar a cero. Puede sacar, sacar, que siempre habrá algo. Por lo tanto, es la E. "*

A5: *"Yo eliminaría la A y la C... Porque tendría que ser, la fórmula tendría que ser sólo x. Por lo tanto, creo que eliminaría la B, por ejemplo, porque ya parte parte bajo de cero, entonces ganaría el agua. Por lo tanto, entre la D y la E me quedaría con la E, porque, al principio, la cantidad sería mayor y entonces perdería más agua y luego se perdería cada vez menos ".*

A6: *"A B no porque es negativa aquí y no es constante. La A es también* *negativa, es constante, entonces creo que elijo la E, no estoy seguro, pero creo que me ha ayudado porque la mayoría de los gráficos son del mismo estilo ".*

A7: *"No, para mí puede ser que me equivoqué en el trabajo, pero hoy sería la E. Porque ella está saliendo una tasa, un porcentaje".*

A8: *"La E, va variando siempre, en tiempos menores varía menos."*

A9: *"Pensé que, al principio, la tasa de variación sería mayor, pues la cantidad inicial es mayor. Si fuera en litros, al principio va a salir 10 después para 90 dejará salir menos, sería decreciente la tasa de variación, entonces la A y la B no tendría como admitir. AC parece una constante, entonces no tiene como admitir también.Respondería la E, debido a la forma de la curva ".*

A10: *"... el gráfico que representa una tasa de cantidad que sale ... el agua sería la Q, entonces desconsideré a la A y la B porque son cantidades negativas... A C parece una constante, siempre disminuye igual, quedó entre la D y la E. Eso sería como un porcentaje que va disminuyendo, consideré la E. "*

Consideraciones

En esta cuestión tuvimos como objetivo evaluar si el alumno consigue interpretar gráficamente las tasas de variación a partir de situaciones-problema, y si diferencia gráficos de cantidad en relación al tiempo y gráficos de tasa de variación de cantidad en relación al tiempo. Todos los alumnos entrevistados se equivocaron al elegir la letra E, cuatro alumnos (A5, A6, A9 y A10), de inmediato, eliminaron las alternativas A y B, porque la curva estaba en parte negativa del eje vertical, justificaron que no era posible trabajar con cantidades negativas. Eso demuestra la confusión de los alumnos entre la cantidad y la tasa de variación de cantidad. Cinco alumnos (A1, A4, A5, A9 y A10) eliminaron las alternativas A y C, argumentaron que se trataba de rectas y, por lo tanto, la variación necesitaría ser constante y en este caso no lo sería por estar sahiendo siempre un percentual do que tiene, esta justificación también demuestra la confusión de los alumnos entre *Q(t)* y *Q'(t)*. Un alumno (A4) justificó la eliminación de la alternativa B por ser un gráfico creciente.

Pregunta 23 del test: En una región de muchos árboles, los trozos vegetales de la planta se acumulan en el suelo a una tasa de 5 gramos por cm^3 al año. Estos restos corresponden a una tasa del 70% al año. Q(t) representa la cantidad de desechos vegetales (g/cm^3) en el tiempo t. La ecuación que describe la tasa de cambio de desechos vegetales en el suelo como una función del tiempo es la siguiente:

a) $\frac{dQ}{dt}=5-0{,}7t$

b) $\frac{dQ}{dt}=5e^{0{,}7t}$

c) $\frac{dQ}{dt}=5t-0{,}7Q$

d) $\frac{dQ}{dt}=5-0{,}7Q$

A1: *"Yo iba a hacer con entrada y salida, Pues la salida es proporcional a lo que siempre a lo que tiene... La entrada entra siempre. No recuerdo más, pero creo que se va a hacer con entrada y salida . Admisión es constante, creo que la C o la D. "*

A2: *"Sí, no se descompuso todo, va a permanecer algo de lo que ya está todavía, viene más Creo que tendrás la cantidad inicial, que era el 5 y entonces usted todavía tiene el 70% que se descompuso, sólo que usted siempre tendrá más en el valor, ... Aquí tendrás el 5... y cada año acumula aquel 5, sólo el 70% se descompone. Entonces usted tendrá siempre un poco del inicio. Ahora aquí, resulta complicado para mí, averiguar cuál de estas ... Creo que sería la A, porque el 5 era la cantidad inicial que tienes y ese 0,7es el porcentaje que va a descomponerse en el tiempo. "*

A3: *"Yo no me acuerdo, creo que intentaría algo... yo no sabría elegir una cierta, A o B, me quedaría en duda entre ésas."*

A4: *"Eso, creo que había calculado. Era la cantidad inicial, que sería el 5. Supongo que, si no estoy equivocado marqué la A o D... la D... Porque yo no lo sé".*

A5: *"... Creo que la B eliminaría o no, déjame ver. Al principio dice la cantidad que tiene?* [No]*... entonces eliminaría la A, la C creo que también eliminaría la D también, creo que elegiría la B porque creo que tendría que hacer a partir de la* *cantidad inicial de la polución. Por lo tanto, variaría con el tiempo y no importa cuál cantidad inicial de la contaminación o acumulación de restos vegetales, entonces creo que sería más o menos ello... Por la B o la D, quizás, es que tendría que analizar con más calma, pero creo que elegería la B. "*

A6: *"Es, esa fue una de las que yo no sabía hacer, ni cómo ni por dónde empezar a hacerla... yo me acuerdo que aquí todo fue de 0,7. Pues t representa la cantidad de restos vegetales en el tiempo t. Creo que la C y la D no serían las más adecuadas ".*

A7: *"... es la D. Porque en esa está saliendo 70% de lo que tiene. Es porque la B tiene entrada".*

A8: *"La C no sé por qué."*

A9: *"En la B o K tuvo que ser negativo, ... fue eliminado pronto... estaba en duda entre la A y la D. Creo que respondí la B, pero creo que respondería ahora la D. Sería la cantidad que se acumula en los últimos años para que se descomponga, aquí la tasa de 70%?... No estoy considerando la tasa que viene cada año, que sería esa aquí porque tiene la tasa anual más 5 que usted tiene dentro, estaría faltando la entrada"*

A10: *"Entonces, el 30% siguen. Esta aquí me quedé en duda. Consideré esta ecuación B aquí. En el caso puse valores ficticios y resolví la ecuación con valores ficticios, todas. Ahora no recuerdo exactamente lo que puse. "*

Pregunta 31 del test: El gráfico en la Figura 6 representa y en función de t.

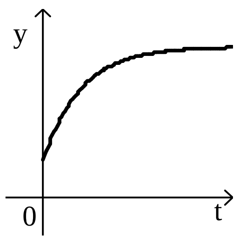


Figura 6: Gráfico de y en función de tiempo t.

Siendo a > 0 y b < 0, la ecuación diferencial que mejor representa esta situación es la siguiente:

a) $\frac{dy}{dt} = at + by$

b) $\frac{dy}{dt} = a\,e^{bt}$

c) $\frac{dy}{dt} = a + by$

d) $\frac{dy}{dt} = \frac{a}{b}\,y$

A1: [El alumno dice que no sabe cómo hacer esta cuestión]

A2: [El alumno dice que no sabe cómo hacer esta cuestión]

A3: *"No. Yo no recuerdo bien, no diría yo... intentaría la A."*

A4: *"Él es un exponencial, pero se detiene. Se estabiliza... la B."*

A5: *"Creo que es exponencial, debido a eso eligiría la B. Si se integren o se derivan sería más fácil en la B, porque voy a tener Y aislada ".*

A6: *"Usted tiene una cantidad inicial... Tiene un crecimiento también. Según el gráfico el crecimiento se detiene... No sé cuál elegí, pero ahora creo que es una cantidad inicial, teniendo en cuenta que la A es positiva y la B no lo es, elimino la categoría D, si la A es positiva, resultaría negativo a/ b. "*

A7: *"Cada vez que tiene un crecimiento y se estabiliza en un punto".*

A8: [El alumno dice que no sabe cómo hacer esta pregunta]

A9: *"Yo no recuerdo bien lo que puse, pero ahora pondría el gráfico B. El gráfico está creciendo. Al principio hay una diferencia mayor. Y la cantidad no llega a ser constante, pero creo que tiende a estabilizarse.*

***Profa**: ¿Y usted piensa que el gráfico es creciente y tiende a estabilizarse, debe tener entrada y salida, sólo entrada, sólo salida? Piense en una situación real ...*

***A9**: Porque si no disminuye tiene que ser entrada.*

***Profa**: Si hay sólo una entrada crees que el gráfico se estabiliza?*

***A9**: No, no. Él seguirá creciendo siempre. Tiene una salida también. El valor en el inicio ...Retiro la B y la D. .. Creo que elegiría la A a la C no teniendo en* *cuenta el tiempo. Ahora elegiría la A. "*

A10: [El alumno dice que no sabe cómo hacer esta pregunta]

Consideraciones

En estas cuestiones tuvimos como objetivo evaluar si el alumno puede asociar la ecuación diferencial a una situación-problema dada o a partir de un gráfico de la solución dada. Los diez alumnos entrevistados tuvieron muchas dudas para responder a estas dos preguntas y utilizaron justicaciones muy confusas. En la elección de una alternativa no estaban seguros de su elección o un argumento convincente. Percibimos que la asociación de la ecuación diferencial con su respectiva solución gráfica tienen que ser mejores exploradas en una otra aplicación de la propuesta.

Estimulamos al A9 a pensar más en la cuestión 31 del test, y , a partir de las preguntas que le hacíamos, percibimos cómo iba avanzando y mejorando sus argumentos y respuesta. Ello está de acuerdo con las ideas de Vygostky que trata de la importancia de la interacción en el proceso enseñanza-aprendizaje. En resumen, lo ideal sería acompañar a cada alumno para poder estimularlo y ayudarlo a través de preguntas que lo conduzcan al aprendizaje, pero esto no es posible debido al número de alumnos que tenemos en los grupos. Por consiguiente, intentamos una alternativa, hicimos con que los alumnos trabajaran en pequeños grupos y tratamos de darles la máxima asistencia.

Tratamos de preparar el material didáctico que utilizamos en el desarrollo del Estudio 2 para que fuera potencialmente significativo, especialmente en relación con el significado lógico, es decir, que presentaran características potenciales a fin de que el alumno transforme el significado lógico del material en su significado psicológico para sí, pero a traves de los argumentos de los alumnos percibimos que este material debe ser mejorado a fin de que no haya transformación del significado lógico del material en significado psicológico y para que profesores y alumnos compartan significados. Algunos factores que deben considerarse en la relaboración del material son las deficiencias de los alumnos en contenidos básicos de las matemáticas y la dificultad de adaptación de los alumnos a la metodología distinta, que requiere la participación activa, teniendo en cuenta que están acostumbrados a las clases tradicionales y los ejercicios que se limitan a reproducir los modelos presentados anticipadamente.

Pregunta 8: ¿Cómo fue su participación en la asignatura? ¿Qué cree usted que debería hacer para obtener más información?

Pregunta 9: ¿Qué se puede hacer para mejorar en:

i. **la asignatura?**
ii. **al contenido?**
iii. **a los *softwares* (Planilla de Cálculos, Powersim) utilizados?**
iv. **la matemática implicada?**

A1: *"Mira, creo que incluso busqué* [traté de aprender]*, no siempre hacía la tarea, hacía una o dos, si acertaba, paraba, porque a veces no daba tiempo, pero siempre cuando tenía alguna duda, preguntaba, ... A veces me olvido de algunas partes, no las podía olvidar. Pero creo que en los trabajos por pareja siempre intenté ayudar, siempre los hacíamos juntos, ... con sugerencias sólo pensé que tal vez para el próximo, los alumnos tenían que tal vez hacer un poco más a mano,¿cómo lo haces, cómo hacer las cosas? y luego hacer en el Powersim ".*

A2: *"Mire, profesora, no voy a mentirle, estoy verificando si la forma que estudio es incorrecta porque yo estudio mucho, hago todas las preguntas, trato de entender, pero no logro obtener un buen resultado. Eso, no es sólo en el cálculo, ocurre también en Física... Yo me empeñé en entender la materia, he estudiado para hacer analíticamente, tiene varias regletas usted tiene que seguirlas antes de comenzar a hacerlas totalmente. Por lo tanto, estudié todo, intenté ayudar, estoy siempre estudiando, pero no sé si de la forma que yo estudio o algo no me ayudan ".*

A3: *"Creo que debería haber hecho más cálculos, podría haber estudiado más. Creo que no buscaba más informaciones en los cálculos. Por lo tanto, me gustó la manera de las clases, la práctica... Creo que es una forma divertida, ... tal vez puede exigirnos un poco más a hacer los ejercicios ".*

A4: *"Creo que mi empeño no fue muy bueno ... Porque no dedicaba mucho, no estudiaba mucho, estudiaba sólo antes de la hora, hay derivada que hasta hoy no la sé... tengo que echar un vistazo antes ... Yo siempre creo que está bueno para mí, como he dicho antes, es la mejor hasta de la didáctica . Se puede poner más listado de ejercicios, ... sólo que con menos ejercicios. La clase está bien…. "*

A5: *"... Creo que podría haber estudiado un poco más en casa. Podría estudiar este contenido que se ha retrasado,como los logaritmos, ... yo no pude estudiarlo más por falta de tiempo, pero creo que debería haberme empeñado en estudiarlo un poco más. No tendría Sugerencia para esta asignatura, yo sólo podría* *exigirse más en el Cálculo I. Me pareció que debería saber mucho más para estar en l Cálculo II, por ejemplo, derivada e integral...Cuanto más utilice, más te aprenderá. Otra dificultad que tuve fue con las integrales y derivadas compuestas, si me preguntas, sabré una u otra, no las aprendí bien.El asunto fue bien trabajado, creo que todavía podría haber un poco más de ejercicios, se puede dejar tal vez algunas listas de ejercicios. Tal vez, lo que se podría hacer, se podrí dejar fotocopia de ejercicios. Creo que no es muy buena en clase, hay estudiantes de diversos cursos. "*

A6: *"Creo que podría haber estudiado más en casa, pero para las personas que trabajan es difícil que estudien fuera del horario. ¿Podría indicar más ejercicios, porque creo que ... las Matemáticas se las aprende haciendo ejercicios ".*

A7: *"Yo estudié bastante,... tengo mucha dificultad para entender lo que hay que hacer... Tal vez sería bueno adaptar más los cursos, por ejemplo, intentar trabajar con clases homogéneas*".

A8: *"Está bueno así. El mayor problema es la gente acostumbrarse a este modo de clase diferente".*

A9: *"Mi test* [original] *yo no la había hecho bien. He consultado los libros que usted ha indicado, he estudiado mucho, sobre todo si había una duda en integral ... el ordenador estaba tranquilo... mi participación ha sido activa, Me he empeñado bastante en aprender ... esa asignatura en relación a la enseñanza, a la metodología, al uso de software, me ha parecido muy buena. Es uno de los temas que no se puede faltar en clase. Cada lección es importante. Me pasé seis meses estudiando el asunto, entonces eso es lo que me interesa ".*

A10: *"Tal vez si hay más ejercicios, conseguimos mejorar el aprendizaje"*

Consideraciones

En estas dos cuestiones tuvimos el objetivo de evaluar el empeño del alumno en aprender los contenidos de ecuaciones diferenciales y sus acciones para superar las dificultades con la matemática básica. También tratamos de obtener sugerencias para la mejoría de la asignatura en relación al contenido de las ecuaciones diferenciales, al uso de los *softwares* utilizados y a la matemática implicada. Percibimos que los alumnos son conscientes de que necesitan estudiar más (A3, A4, A5 y A6). Para mejorar las clases, cinco estudiantes sugirieron que se disponibilizara más listas de ejercicios (A3, A4, A5, A6 y A10), que una vez más muestra la dependencia que tienen los estudiantes de los docentes. Dos alumnos sugirieron que se redujera el número de clases en el laboratorio de informática (A1 y A6).

5.4.1.4 Test final de conocimientos aplicados a los alumnos en el Estudio 2

Presentamos los resultados obtenidos del test final de conocimientos que se la aplicamos a los alumnos en el último día de clase de aplicación del Estudio 2. Un total de 30 alumnos respondieron el test. Analizamos los datos cuantitativamente, conforme presentamos a continuación:

Análisis de fiabilidad

A partir de los resultados obtenidos en el test, calculamos el coeficiente alfa de Cronbach para estimar la parcela fidedigna común a los ítems del test, como se muestra en el Tabla 5.22.

Tabla 5.22 – Coeficiente alfa de Cronbach del test.

Número alumnos	***Número de ítems***	***Promedio de aciertos***	***Desviación patrón***	***Coeficiente alfa***
30	32	17,93	4,73	0,74

También calculamos el coeficiente de correlación de los puntajes en cada cuestión con la puntuación total y el coeficiente alfa de la puntuación total si el ítem es eliminado del test. En la Tabla 5.23 podemos observar que la eliminación de los artículos 4 y 26 aumentarían el coeficiente alfa del test. Si eliminàramos los dos ítems, el coeficiente alfa sería de 0,76.

En la Tabla 5.24 presentamos los resultados obtenidos en la aplicación del test que muestra el número de alumnos que optaron por distintas alternativas. Los objetivos que motivaron la elaboración del test (Tabla 5.17) parecen que están relacionados con los ítems que componen el mismo.

Tabla 5.23 - Correlación ítem total y coeficiente alfa, y si el ítem especificado en la primera columna de la tabla fuese eliminado del test.

Ítem	***Correlación ítem total***	***Coeficiente alfa si el ítem es eliminado***
1	0,59	0,71
2	0,53	0,72
3	-	-
4	0,08	0,75
5	0,16	0,74
6	0,18	0,74
7	0,13	0,74
8	0,59	0,71
9	0,09	0,74
10	0,32	0,73
11	0,41	0,72
12	0,31	0,73
13	0,19	0,74
14	0,29	0,73
15	0,42	0,72
16	0,37	0,73
17	0,34	0,73
18	0,44	0,72
19	0,36	0,73
20	0,15	0,74
21	0,56	0,71
22	0,61	0,71
23	0,53	0,72
24	0,52	0,72
25	0,2	0,74
26	-0,01	0,75
27	0,11	0,74
28	0,23	0,74
29	0,4	0,73
30	0,65	0,71
31	0,24	0,74
32	0,11	0,74

Tabla 5.24 - Discriminación de las tomas de decisiones de los alumnos. La correcta puntuación de las alternativas están en negrita.

ítem	***objetivo***	***Alternativas***					***Porcentaje de aciertos***
		A	B	C	D	E	
1	B	13	3	2	**12**	0	40,00%
2	B	1	**12**	0	17	0	40,00%
3	G	0	0	0	0	**30**	100,00%
4	E	8	1	**20**	1	0	66,67%
5	F	1	**25**	1	3	0	83,33%
6	I	**15**	10	4	1	0	50,00%
7	F	0	**23**	3	4	0	76,67%
8	J	**15**	2	12	1	0	50,00%
9	G	0	1	0	2	**27**	90,00%
10	H	0	**6**	4	3	17	20,00%
11	J	6	0	**20**	4	0	66,67%
12	H	7	3	12	**5**	3	16,67%
13	I	**18**	2	6	4	0	60,00%
14	A	2	**23**	1	4	0	76,67%
15	C	1	10	1	**18**	0	60,00%
16	D	10	**13**	7	0	0	43,33%
17	D	**17**	2	4	7	0	56,67%
18	L	2	6	8	**14**	0	46,67%
19	K	**20**	2	2	1	5	66,67%
20	K	0	0	1	0	**29**	96,67%
21	M	**20**	3	6	1	0	66,67%
22	C	1	**15**	3	11	0	50,00%
23	I	2	7	12	**9**	0	30,00%
24	E	2	10	**15**	3	0	50,00%
25	J	5	15	**5**	5	0	16,67%
26	K	**8**	2	12	5	3	26,67%
27	M	7	4	4	**15**	0	50,00%
28	M	7	**16**	6	1	0	53,33%
29	L	**19**	5	4	2	0	63,33%

		Alternativas					
30	A	3	**18**	4	5	0	60,00%
31	C	2	13	**11**	4	0	36,67%
32	L	1	1	**25**	3	0	83,33%

Consideraciones

Percibimos que los alumnos tuvieron un número muy reducido de aciertos en las cuestiones que se relacionan con el objetivo "h" que está relacionado con la interpretación de las tasas de variación en la forma gráfica. Esta dificultad ya había aparecido en el teste inicial, sin embargo no fue suficientemente tratada en las guías de las actividades exploradas durante el Estudio 2. En lo que se refiere a la interpretación gráfica de la solución de una ecuación diferencial a partir de una situación dada, que se incluye en el objetivo "g", no parece ser problemático para los alumnos, así como hacer inferencias sobre el comportamiento de las tasas de variación, como a "f", resultado similar podemos encontrar en el test inicial que confirmamos en el test final. Pero, interpretar gráficamente las tasas de variación a partir de un gráfico dado fue un objetivo que tuvo bajo porcentaje de éxitos en el test inicial y una tasa alta de aciertos en el test final (objetivo "a"), ello indica que éste fue bien explorado en nuestras guías.

5.4.2 Comentario final sobre el Estudio 2

Los alumnos sintieron falta de más reconciliaciones integrativas durante el semestre, pues, conforme argumentaron, éstas les ayudaron a resumir el contenido y destacar conceptos esenciales del contenido abordado. Además, les ayudaron a comprender lo que ya había sido abordado, porque los alumnos tenían la impresión de que no estaban aprendiendo nada. En este comentario, los alumnos se referían a las técnicas analíticas, como si éste fuera el único tópico importante que deve ser aprendido. Sólo se sintieron más cómodos cuando vieron la reconciliación. En ésta se presentaron los diversos tópicos estudiados. Habre (2000) sostuvo que esto era un reflejo de la creencia en el poder de una respuesta analítica contra una gráfica, una consecuencia del énfasis a este enfoque en las clases tradicionales, en que mucho tiempo y esfuerzo se gastan en la construcción de habilidades de los alumnos en la manipulación del lenguaje simbólico formal. Como resultado de ello, los alumnos están más inclinados a creer que la representación simbólica de una función es más importante y más útil que la gráfica (y numérica).

Otro punto que destacamos es el hecho de que los alumnos tienen una necesidad muy fuerte de que alguien les diga si la respuesta está correcta o incorrecta, no confían en lo que hacen, son muy dependientes. Debido a esto siempre están pidiendo: "*profesor, venga a ver si ésta es la forma*" o se quedan todo el tiempo comparando su respuesta con la de la pareja. Además no tienen sus propias estrategias, explicamos: un día solicitamos a los alumnos que construyeran una tabla, en la planilla, para utilizar el método de Euler en una situación dada y quien se la entregaran, obtendrían unos puntos en la nota final. Pronto comenzaron a preguntar "*cómo puedo saber si está correcta*". Nos preguntamos que cómo no se dan cuenta de que pueden verificar con otros métodos que ya han aprendido. Por ejemplo, podrían utilizar la resolución analítica (se trata de una ecuación conocida) o la Powersim, teniendo en cuenta que éste fue muy utilizado durante las clases. En resumen, los alumnos no buscan formas alternativas de abordar o resolver una cuestión. Habre (2000) también mostró que los alumnos tenían dificultad para pensar simultáneamente de diferentes modos (gráfico y algebraicas). Ello puede ayudar a explicar por qué los alumnos no suelen utilizar diversas maneras de abordar los problemas. Rasmussen y Stephan (2002) señalaron la importancia de utilizar, equilibrada y simultáneamente, los métodos analíticos, gráficos y numéricos para análisis de EDs, en lugar de tratar cada uno de los métodos como técnicas separadas que deberían ser aprendidas en una secuencia lineal.

Los alumnos comentaron que odiaban recibir una pregunta que tiene por objeto ayudarles a llegar a la respuesta como respuesta de la pregunta que había hecho. Es decir, los alumnos no reciben una respuesta lista, necesitan pensar para obtenerla. Además, hubo una reclamación de que todo era nuevo, no tenían ningún modelo a seguir. Estos hechos son una consecuencia del estilo de clase tradicional a que los alumnos están acostumbrados.

Constatamos que los alumnos no entendían lo que hacían, resolvían los ejercicios mecánicamente, no intentaban construir una secuencia de las ideas involucradas en las actividades, no se empeñaban en comprender lo que estaban haciendo. Un ejemplo de ello es el hecho de que en la explicación inicial los alumnos comprendieron el funcionamiento de Powersim y lo utilizaron sin dificultades durante la clase, pero después de dos semanas sin el uso, muchos ya no sabían utilizar ni cualquier ícono básico. Los alumnos tenían grandes dificultades incluso para interpretar el orden de los ejercicios.

En resumen, es complicado trabajar de diferentes maneras cuando los alumnos están acostumbrados a la manera tradicional y, seguramente, en una primera asignatura habrá resistencia, así como ocurrió en los estudios presentados en la revisión de la literatura. Rowland y Jovanoski (2004), en su estudio, dejaron como sugerencia de mejoría pedagógica la inclusión de más cuestiones conceptuales o cualitativas en el tratamiento de la EDs, ya que éstas obligarán a los alumnos a cambiar el enfoque de la la simple manipulación para el enfoque en la comprensión. También sugirieron muchas discusiones en grupo. Desde la perspectiva de Rasmussen (2001), con la tecnología disponible actualmente, ya no tiene más sentido dar tanto énfasis a las soluciones analíticas, ya que las técnicas para obtenerlas son muy limitadas y no sirven para la mayoría de EDs, mientras que los métodos numéricos son fáciles de implementar a través de la ayuda de las tecnologías, en muchos casos, proporcionan soluciones fiables aproximadas. A partir de los métodos gráficos, se puede obtener mucha información importante relacionada a la solución de las EDs en estudio.

5.5 Estudio 3

En el Estudio 3, llevado a cabo en el primer semestre de 2008, desarrollamos otra práctica pedagógica. En esta práctica hicimos cambios en las guías de actividades (Apéndice 8), principalmente, para atender algunos objetivos específicos del abordaje de los contenidos de las ecuaciones diferenciales que antes no estaban contemplados en las guías elaboradas y aplicadas en los Estudios 1 y 2. Verificamos la falta de algunos objetivos a partir del análisis de el test de conocimientos aplicados en el Estudio 2.

En el Estudio 3, realizamos la práctica pedagógica, con 60 alumnos de la asignatura de Cálculo III pertenecientes a los cursos de Química Industrial y de Ingeniería (Informática, Producción, Automatización y Control, Ambiental) de *UNIVATES-RS*. Las clases ocurrieron por la noche, durante el primer semestre de 2008. La práctica pedagógica envolvió un total de 48 horas de clase en el calendario regular de la asignatura, incluida la aplicación de uno test inicial y final de conocimientos. Utilizamos 16 horas de clase con el *software* Powersim, realizamos 24 horas de actividades de clase utilizando simplemente el papel y lápiz y 8 horas de clase para la aplicación de test, la presentación ausubeliana y el enfoque de subsumidores. En este estudio abordamos las EDOs de primer orden y algunos casos de segundo orden.

En cuanto a la metodología de las clases, hicimos algunas modificaciones para la realización del Estudio 3, que son las siguientes:

- intensificamos las reconciliaciones integrativas, consideradas por los alumnos esenciales para una buena comprensión de los contenidos abordados;
- trabajamos un menor número de clases en el laboratorio de informática, porque a los alumnos les pareció un cambio muy brusco, si comparamos las asignaturas de Cálculo I y II, en las cuales casi no utilizaban los recursos computacionales, a la asignatura de Cálculo III, en que se está realizando este trabajo;
- dimos explicaciones generales que tardaban más, al comienzo de cada clase, pues, en los Estudios 1 y 2, los alumnos demostraron muchas dificultades en la interpretación de las tareas que tenían que realizar y como el grupo del Estudio 3 estaba compuesto por 60 alumnos, los atendimientos individualizados eran inviables. Esta dificultad, probablemente, se debe a las clases tradicionales a que los alumnos estaban acostumbrados, que no requieren mucha interpretación;
- redujimos el tamaño de las guías de actividades, abordando menos situaciones-problema, pero centradas en los objetivos propuestos. Debido al hecho de las guías ser muy largas, muchos alumnos no conseguían terminar todas las actividades y se sentían incómodos con esto.

En relación a las herramientas computacionales, por sugerencia de los alumnos en el Estudio 1 y 2, en el Estudio 3 trabajamos sólo con un *software*, el Powersim, a fin de que los alumnos tuvieran más tiempo para asimilar bien a su sintaxis y uso.

5.5.1 Reformulación de los materiales instruccionales

Relaboramos las guías de actividades a fin de contemplar más adecuadamente los objetivos generales propuestos en el capítulo 4 y los objetivos específicos que están en la Tabla 5.25. En esta tabla, los objetivos 3 y 4 están directamente relacionados con el contenido de las ecuaciones diferenciales y los objetivos 1 y 2 están relacionadas con los subsumidores que son importantes para que los alumnos puedan entender el contenido de las ecuaciones diferenciales. Según los resultados del test inicial, los alumnos presentaron mucha limitación en relación al dominio de los subsumidores, por ello consideramos esencial que estos tópicos fueran repasados durante las clases, eso justifica la inclusión de las actividades relacionadas en las guías. Además, elaboramos un material de apoyo a los alumnos con respecto a este tema (Apéndice 9).

Tabla 5.25 - Los objetivos específicos de las guías.

Dado(a):		***El alumno debe ser capaz de:***
1. gráfico de funciones	1.a	interpretar gráficamente el comportamiento de las tasas de variación
	1.b	interpretar gráficamente la derivada de primer orden
	1.c	hacer inferencias apropiadas sobre el comportamiento de la solución del problema
2. gráfico de derivada de funciones	2.a	describir el comportamiento de las soluciones
3. descripción de una situación-problema	3.a	Hacer inferencias sobre el comportamiento de la solución del problema
	3.b	Hacer inferencias sobre el comportamiento de las tasas de variación
	3.c	interpretar el comportamiento de la solución de la ecuación correspondiente en la forma gráfica
	3.d	interpretar el comportamiento de las tasas de variación en la forma gráfica
	3.e	asociar la ecuación diferencial correspondiente en la forma analítica
4. expresión analítica con ecuaciones diferenciales	4.a	interpretar el comportamiento de las soluciones en la forma gráfica
	4.b	hacer inferencias sobre el comportamiento de las soluciones
	4.c	identificar la solución de la ecuación diferencial en la forma analítica
	4.d	hacer análisis dimensional de los términos de la ecuación diferencial asociada a la situación-problema
	4.e	resolver analíticamente (pregunta abierta)

En las actividades propuestas en la guía 1, nuestro objetivo era familiarizar a los alumnos con el *software* Powersim y, a través del estudio de la situación-problema que involucra a un tanque de agua, en que hay un agujero por donde puede salir el agua y un grifo para llenarlo, investigar el comportamiento del nivel de agua en el tanque en función del tiempo y de la tasa de entrada y salida de agua en el tanque. Esta guía analiza también el comportamiento de la solución en la forma gráfica.

En la guía 2, teníamos como objetivo abordar la definición, la clasificación y la notación de una ecuación diferencial y, a través del estudio de las situaciones-problema que involucran la desintegración radiactiva, el crecimiento de la población y la absorción de medicinas, investigar el comportamiento de la solución y la tasa de variación de estas situaciones, de acuerdo con las condiciones establecidas, incluso en la forma gráfica. Asimismo, exploramos la asociación de la descripción de una situación-problema con la ecuación diferencial correspondiente en la forma analítica y el comportamiento de la solución de ecuaciones diferenciales de acuerdo con las condiciones dadas.

En las guías 3 y 5 nos centramos en la resolución analítica de las ecuaciones diferenciales y, a través del estudio de situaciones-problema, en la investigación del comportamiento de la solución y de la tasa de variación de estas situaciones. Además, exploramos la asociación de la descripción de una situación-problema con la ecuación diferencial correspondiente y su solución en la forma analítica, así como el análisis dimensional de algunas ecuaciones diferenciales que están involucradas en esta guía.

En las actividades de la guía 4, pretendíamos abordar el estudio de situaciones-problema que involucran la caída de cuerpos y circuitos eléctricos, y a partir de ello, investigar el comportamiento de la solución de ecuaciones diferenciales y su respectiva tasa de variación de las situaciones. También exploramos el análisis dimensional de las ecuaciones diferenciales involucradas en estas situaciones y su resolución analítica a través de la técnica de las variables separables.

Por último, en la guía 6, abordamos el estudio de una situación que involucra el movimiento de los objetos en la vertical, cuyo objetivo es representarla matemáticamente con una ecuación diferencial de segundo orden y analizar el comportamiento de las posibles soluciones y sus respectivas tasas de variación, teniendo en cuenta las condiciones dadas, incluso en la forma gráfica.

Ya sea utilizamos las guías susodichas, o impartimos clases expositivas-dialogadas, utilizando como recurso la pizarra y la tiza, conforme el cronograma que aparece en la Tabla 5.26. En estas clases explorábamos las técnicas de resolución analítica de ecuaciones diferenciales.

Tabla 5.26-Cronograma de las clases.

Clase	*Actividades*
1	Presentación Ausubeliana y test inicial
2	Guía 1 (laboratorio de informática)
3	Guía 2 (laboratorio de informática)
4	Clase en el aula para estudiar la técnica analítica de separarse
5	Guía 3 (en el aula)
6	Guía 4 (laboratorio de informática)
7	Clase en el aula para estudiar la técnica de análisis lineal de primer orden
8	Guía 6 (en el aula)
9	Guía 7 (laboratorio de informática)
10	Clase en el aula para estudiar la técnica analítica de ecuaciones lineales de segundo orden homogénea
11	Clase en el aula para estudiar la técnica analítica de ecuaciones lineales de segundo orden no homogéneas
12	Test final

5.5.2 Instrumentos de investigación

En el Estudio 3, perfeccionamos los instrumentos para la colecta de datos. Generamos una nueva versión de los testes (inicial y final) de conocimientos, con el fin de contemplar más uniformemente todos los objetivos propuestos y, además, revisamos las cuestiones de la entrevista semi-estructurada. Utilizamos para la colecta de datos el cuestionario del Estudio1 (Apéndice 4), las guías que los alumnos nos entregaron al final de cada clase y las observaciones realizadas por la profesora durante las clases.

Inicialmente, relaboramos y aplicamos el test inicial de conocimientos (Apéndice 10). Esto test está compuesta por 16 preguntas de selección múltiple que están relacionadas con los objetivos, conforme la Tabla 5.27. El test fue validado en relación al contenido por cinco profesores con experiencia y después de que se la aplicó a los alumnos de la asignatura de Cálculo III, obtuvimos el coeficiente de fiabilidad.

Como podemos observar en la Tabla 5.27, en el test inicial, incluimos cuestiones referentes a los subsumidores que son necesarios para la comprensión de los contenidos de ecuaciones diferenciales, y otras cuestiones que evalúan nociones intuitivas de los alumnos en relación al contenido de las ecuaciones diferenciales. Pero, esto test no contempla los objetivos que se refieren a la expresión analítica de ecuaciones diferenciales. Un estudio sobre los subsumidores importantes para el aprendizaje de un contenido específico y un levantamiento del dominio de estos subsumidores por los alumnos es considerado esencial por Ausubel (2003), cuando pretendemos alcanzar un aprendizaje significativo.

Revisamos el test final del Estudio 2 para cumplir más uniformemente los objetivos propuestos. La nueva versión del test (Apéndice 11), aplicada al final del desarrollo de la práctica pedagógica, se compone de 22 cuestiones, con dos preguntas abiertas y 20 preguntas de selección múltiple**.** La relación de las cuestiones con los objetivos están en la Tabla 5.27. Esto test también fue validada por cinco profesores con experiencia. Después de aplicársela a los alumnos de la asignatura de Cálculo III , obtuvimos el coeficiente de fiabilidad.

Hicimos algunas modificaciones en la entrevista semi-estructurada. En el Estudio 2 la entrevista estaba compuesta por 10 preguntas básicas, como la Tabla 5.12, y en el Estudio 3 partimos de siete preguntas básicas, idénticas a las del Estudio 2. Reemplazamos las cuestiones 5 y 6 del Estudio 2 por una única cuestión, pues conforme analizamos, los alumnos no las diferenciaban. La nueva cuestión es *"¿Has percibido alguna importancia en el estudio de las ecuaciones diferenciales? ¿Qué?"*. Eliminamos las cuestiones 7 y 8 del Estudio 2, pues pretendían evaluar las cuestiones conceptuales de las ecuaciones diferenciales y en el Estudio 3 evaluamos este objetivo en el test de conocimientos.

A continuación, presentamos los datos obtenidos con los instrumentos utilizados, así como su análisis.

Tabla 5.27 – Relación de los objetivos con las cuestiones del test inicial y del test final.

Dado(a):		***El alumno debe ser capaz de:***	***Cuestiones del test inicial***	***Cuestiones del test final***
1. gráfico de funciones	1.a	interpretar el comportamiento de las tasas de variación	2,3, 7	
	1.b	interpretar gráficamente la derivada de primer orden	4	
	1.c	hacer inferencias apropiadas sobre el comportamiento de la solución del problema	1,8	
2. gráfico de derivada de funciones	2.a	describir el comportamiento de las soluciones	5,6	1,11
3. descripción de una situación-problema	3.a	hacer inferencias apropiadas sobre el comportamiento de la solución del problema	10,14	2,4
	3.b	hacer inferencias sobre el comportamiento de las tasas de variación	11,12	5,6
	3.c	interpretar el comportamiento de la solución de la ecuación en forma gráfica	9,15	3,8
	3.d	interpretar el comportamiento de las tasas de variación en la forma gráfica	13,16	7,9
	3.e	asociar la ecuación diferencial correspondiente en la forma analítica		10,12
4. expresión analítica involucrando ecuaciones diferenciales	4.a	interpretar el comportamiento de las soluciones en la forma gráfica		16,18
	4.b	hacer inferencias sobre el comportamiento de las soluciones		15,17
	4.c	identificar la solución de la ecuación diferencial en la forma analítica		20,19
	4.d	hacer análisis dimensional de los términos de la ecuación diferencial asociada a la situación-problema		13,14
	4.e	resolver analíticamente (pregunta abierta)		21,22

5.5.3 Discusión de los resultados

Presentamos los principales resultados que obtuvimos en el Estudio 3, a partir de las respuestas obtenidas del cuestionario con la escala de actitudes, de las declaraciones dadas en la entrevista semi-estructurada y de las respuestas obtenidas en el test de conocimientos (test inicial y test final). Además, de forma complementaria, otros datos de nuestra observación participante y de las guías de las actividades están presentes en nuestra discusión.

5.5.3.1 Test inicial de conocimientos aplicado a los alumnos en el Estudio 3

Presentamos los resultados obtenidos del test inicial de conocimientos que 54 alumnos respondieron, en el primer día de clases del primer semestre de 2008. Analizamos los datos cuantitativamente, conforme presentamos, a continuación.

A partir de los resultados obtenidos en el test, calculamos el coeficiente alfa de Cronbach para estimar la proporción fiable a los ítems del test, resultando en 0,53. El promedio de aciertos por alumno fue 5,61, en un total de 16 cuestiones.

En la Tabla 5.28, presentamos los resultados obtenidos en la aplicación de el test que muestra el número de alumnos que eligieron distintas alternativas. Los objetivos que motivaron la elaboración del test (Tabla 5.27) parecen relacionados con los ítems del test.

Consideraciones

Analizamos los resultados del test inicial y percibimos que los alumnos tienen muchas deficiencias en relación a los subsumidores que son necesarios para la comprensión de las ecuaciones diferenciales, principalmente en la interpretación de las tasas de variación. En las cuestiones relacionadas con estos objetivos, los alumnos obtuvieron un pequeño porcentaje de aciertos, por ejemplo, en relación al objetivo 1.a (dado el gráfico de funciones, el alumno deberá ser capaz de interpretar el comportamiento de las tasas de variación) estaban las cuestiones 2, 3 y 7 del test y conforme la Tabla 5.28, en todas el porcentaje de respuestas correctas fue inferior al 40%. Podemos verificar que, en todas las cuestiones relacionados con los subsumidores (preguntas 1 a 8), el porcentaje de respuestas correctas fue inferior al 50%, incluso con la mitad del porcentaje de acieros inferior al 30%.

Tabla 5.28 – Discriminación de las elecciones realizadas por los alumnos. La correcta puntuación de las alternativas están en letra negrita.

Ítem	***Objetivo***	***Alternativas***					***Porcentaje de aciertos***
		A	B	C	D	Branco	
1	1.c	1	**26**	26	1	0	48,15%
2	1.a	21	**17**	5	8	3	31,48%
3	1.a	3	**20**	0	30	1	37,04%
4	1.b	**21**	6	9	15	3	38,89%
5	2.a	19	13	**14**	5	3	25,93%
6	2.a	13	29	**4**	2	6	7,41%
7	1.a	**14**	5	7	25	3	25,93%
8	1.c	6	18	14	**13**	3	24,07%
9	3.c	2	11	4	**36**	1	66,67%
10	3.a	17	3	**28**	6	0	51,85%
11	3.b	1	**44**	1	7	1	81,48%
12	3.b	8	**27**	11	5	3	50,00%
13	3.d	**8**	10	3	30	3	14,81%
14	3.a	7	23	**11**	10	3	20,37%
15	3.c	**14**	10	12	17	1	25,93%
16	3.d	10	10	**6**	22	6	11,11%

En cuanto a la interpretación gráfica, percibimos que los alumnos confundieron el gráfico de la función y el gráfico de la tasa de variación de función. Por ejemplo, en la pregunta dos, 21 alumnos señalaron como correcta la alternativa “a”, confundiendo los intervalos en los que la función es positiva y en que la derivada de la función es positiva. En la cuestión tres, en que solicitamos que los alumnos destacaran en qué punto del gráfico la derivada es cero, 30 alumnos eligieron la alternativa en que la función es igual a cero. Hubo la misma confusión en la cuestión seis, en que 29 alumnos eligieron la alternativa "b", teniendo en cuenta el respectivo gráfico como el de la población en función del tiempo y no de la variación de la población en función de la población, y en la cuestión siete, en que 25 alumnos eligieron la alternativa "d", de nuevo confunde el punto en que la función es cero y el punto en que la tasa de variación de la función es igual a cero.

Analizamos las cuestiones del test que se refieren a las nociones intuitivas de los alumnos en relación a las situaciones-problema que involucran ecuaciones diferenciales (cuestiones 9 a 16), los alumnos obtuvieron, en promedio, un mayor porcentaje de aciertos, pero de nuevo presentaron serios problemas en las cuestiones que involucran los gráficos, las tasas de variación, en el caso las cuestiones 13 y 16.

5.5.3.2 Cuestionario aplicado a los alumnos en el Estudio 3

Presentamos los resultados obtenidos a partir del cuestionario que aplicamos a los alumnos, al final del primer semestre de 2008. Un total de 54 alumnos respondieron el cuestionario, en el último día de clases del semestre. A fin de analizar las actitudes, utilizamos una escala Likert, codificado como: CP(contempla plenamente), C (contempla), SO (sin opinión), D (desacuerdo) y DP (totalmente en desacuerdo). Analizamos las preguntas cuantitativamente, conforme presentamos, a continuación.

Como resultados, podemos destacar que los alumnos, en su mayoría:

- reconocieron las dificultades que presentaban para comprender e interpretar las actividades solicitadas (37 alumnos). Los alumnos presentan estas dificultades, probablemente porque no les exigen esta habilidad en otras asignaturas y tampoco se la exploró durante su vida escolar. Debido al hecho de no conseguir interpretarlas, muchos alumnos afirmaron que no se les habían presentado el contenido de forma clara (19 alumnos). Además, desde la perspectiva de los alumnos, el contenido era presentado de formas clara, cuando seguía la secuencia a la que estaban acostumbrados, es decir, la clase tradicional, en que se presentan las definiciones técnicas y, posteriormente, se hacían ejercicios repetitivos;

Tabla 5.29-Resultados del cuestionario sobre las opiniones de los alumnos en relación a la asignatura de las ecuaciones diferenciales

	CP	C	S	D	DT
Considero que fui buen (buena) alumno(a).	10	37	4	2	0
Considero el contenido trabajado relevante para mi formación.	9	26	13	6	0
Tuve dificultades para entender, interpretar las actividades solicitadas.	13	24	4	9	4
Poco esfuerzo dedicado al estudio de la asignatura.	1	9	6	25	13
No asistí a la mayor parte de las clases de la asignatura.	0	0	2	13	39
Tengo la impresión de que aprendí bastante en esta asignatura.	4	20	10	15	5
La metodología favoreció mi aprendizaje.	3	19	8	17	7
Las actividades con el ordenador favorecieron mi aprendizaje.	7	19	8	14	6
Tuve dificultades para realizar las tareas con el ordenador.	5	14	8	19	8
Las actividades en equipo fueron productivas.	12	32	4	6	0
Tuve pocas iniciativas para resolver eventual falta de base.	0	7	12	21	14
Las clases deberían ser bien diferentes.	10	10	15	16	3
El tiempo para realizar las tareas fue suficiente.	4	21	5	17	6
Creo que fui muy participativo en mi equipo de trabajo.	9	40	2	3	0
Busqué siempre compensar mis deficiencias.	2	40	9	2	0
Creo que el contenido se presentó claramente.	3	23	9	15	4
Tuve dificultades en la realización de los cálculos.	6	29	5	12	2
Me gustaron las clases.	6	16	18	10	4
Creo que el tiempo en el aula fue bien provechoso.	9	17	14	11	3
Puedo construir las relaciones entre las ecuaciones diferenciales y otros contenidos estudiados.	0	33	15	6	0
Creo que el papel de la profesora ayudó en mi aprendizaje.	7	20	16	9	2

- consideraron productiva la realización de las actividades por parejas (44 alumnos) y se consideraron participativos en su grupo (43 alumnos). Los alumnos del Estudio 1 y 2 también reconocieron la importancia del trabajo en grupo;
- percibieron la importancia de las ecuaciones diferenciales, teniendo en cuenta que consiguen establecer la relación entre este contenido y los que habían sido estudiados en otras asignaturas (33 alumnos), además, se dieron cuenta de que el

contenido de las ecuaciones diferenciales era importante para su formación académica (35 alumnos). Es importante que el alumno perciba la relevancia del contenido para motivarse para el aprendizaje;

- tenían dificultades para percibir lo que habían aprendido en la asignatura, sólo 24 alumnos de un total de 54 alumnos afirmaron que habían aprendido mucho. Podemos atribuir esa dificultad tal vez al hecho de no ser relevante para los alumnos el aprendizaje en relación a la solución gráfica y/o numérica, conforme los alumnos, el aprendizaje se realizó, cuando se consigue resolver analíticamente. Esta dificultad está relacionado con el hecho de varios alumnos (24 alumnos) no aprobar la metodología y la percepción poco expresiva de que el ordenador ayudó en el aprendizaje (26 alumnos). Habre (2003) señala estos hechos también, cuando sostiene que hay resistencia por parte de los alumnos a aceptar un nuevo abordaje metodológico, porque hay una creencia de que lo importante es obtener una respuesta simbólica, la gráfica y la solución numérica son complementos, por lo tanto los alumnos consideran la metodología ideal la que favorece la manipulación del lenguaje simbólico formal, creyendo que es más útil e importante que la gráfica (y numérica).

A partir de los datos, realizamos un análisis de consistencia interna del cuestionario aplicado, resultando el coeficiente alfa en 0,60.

5.5.3.3 Test final de conocimientos aplicado a los alumnos en el Estudio 3

Presentamos los resultados obtenidos del test final de conocimientos que aplicamos a los alumnos, en el último día de clases del Estudio 3. El test fue respondida por 59 alumnos. Analizamos los datos cuantitativamente, conforme presentamos, a continuación.

A partir de los resultados que obtuvimos en el test, calculamos el coeficiente alfa de Cronbach para estimar la parcela fidedigna común a los ítems del test, resultando en 0,65. El promedio de aciertos de los alumnos fue 8,34 cuestiones de 20.

Asimismo calculamos el coeficiente de correlación de los puntajes en cada tema con la puntuación total y el coeficiente alfa de la puntuación total caso el ítem fuese retirado del test. En la Tabla 5.30 podemos observar que la eliminación de los ítems 4 y 15 aumentaría el coeficiente alfa del test. Si elimináramos dos ítems, el coeficiente alfa sería 0,67.

Tabla 5.30 - Correlación ítem-total y coeficiente alfa si el ítem especificado en la primera columna de la tabla es eliminado del test.

Ítem	***Correlación ítem- total***	***Coeficiente alfa si el ítem es eliminado***
1	0,44	0,63
2	0,49	0,62
3	0,24	0,64
4	0,15	0,66
5	0,19	0,65
6	0,27	0,65
7	0,34	0,64
8	0,42	0,63
9	0,65	0,60
10	0,34	0,64
11	0,35	0,64
12	0,52	0,62
13	0,6	0,60
14	0,38	0,63
15	0,19	0,66
16	0,28	0,65
17	0,23	0,65
18	0,41	0,65
19	0,41	0,63
20	0,36	0,64

En la Tabla 5.31 presentamos los resultados obtenidos en la aplicación del test, mostrando el número de alumnos que eligieron las distintas alternativas. Los objetivos que motivaron la elaboración del test (Tabla 5.27) parecen relacionados con los ítems del test.

Tabela 5.31 – Discriminación de las elecciones realizadas por los alumnos. La correcta puntuación de las alternativas están en negrita.

ítem	*objetivo*	*Alternativas*					*Porcentajed y aciertos*
		A	B	C	D	E	
1	2.a	27	3	**24**	4	1	40,68%
2	3.a	3	24	**28**	4	0	47,46%
3	3.c	0	5	0	**54**	0	91,53%
4	3.a	11	**45**	1	1	1	76,27%
5	3.b	1	**54**	1	3	0	91,53%
6	3.b	6	**31**	6	16	0	52,54%
7	3.d	**23**	12	13	11	0	38,98%
8	3.c	**23**	4	3	29	0	38,98%
9	3.d	9	25	**8**	17	0	13,56%
10	3.e	5	5	12	**37**	0	62,71%
11	2.a	24	21	**10**	4	0	16,95%
12	3.e	18	3	**25**	13	0	42,37%
13	4.d	**16**	28	4	11	0	27,12%
14	4.d	14	**15**	12	15	3	25,42%
15	4.b	**22**	6	18	13	0	37,29%
16	4.a	6	5	20	**27**	1	45,76%
17	4.b	5	20	22	**12**	0	20,34%
18	4.a	31	5	11	**12**	0	20,34%
19	4.c	**14**	20	18	6	1	23,73%
20	4.c	23	**12**	14	7	3	20,34%

En la Tabla 5.32 hay una comparación entre el porcentaje de aciertos en las cuestiones iguales del test inicial y final. Como ya hemos mencionado anteriormente, el test inicial fue respondida por 54 alumnos, pues los otros, seis, se matricularon, posteriormente, al principio del semestre. El test final fue respondida por 59 alumnos, porque tuvimos un alumno que desistió de la asignatura, éste sólo hizo el test inicial.

Tabla 5.32 – Comparación entre el porcentaje de aciertos en las cuestiones iguales a lo test inicial y final.

Numero de la cuestión		***Porcentaje de aciertos***	
test inicial	test final	test inicial	test final
5	1	25,93%	40,68%
6	11	7,41%	16,95%
9	3	66,67%	91,53%
10	4	51,85%	76,27%
11	5	81,48%	91,53%
12	6	50,00%	52,54%
13	7	14,81%	38,98%
14	2	20,37%	47,46%
15	8	25,93%	38,98%
16	9	11,11%	13,56%

Consideraciones

En la Tabla 5.32 podemos percibir que en todas las cuestiones el porcentaje de aciertos del test inicial en relación a la final aumentó. Sin embargo, para evaluar si las diferencias entre el promedio de aciertos por alumno en el test inicial y el test final son reales, utilizamos el test de la *t pareada* para compararlas. Inicialmente, calculamos los promedios de aciertos de cada alumno en las diez cuestiones de la Tabla 5.32 para los testes inicial y final y, a continuación, utilizando estos promedios, calculamos el valor de *t* para una distribución unicaudal pareada, obteniendo 5,91. Este resultado tiene significación estadística inferior al 1%, eso muestra que la posidilidad de haber ocurrido por casualidad es muy pequeña, por lo tanto, nos permite afirmar que las diferencias ocurrieron a causa de nuestro abordaje didáctico.

En la Tabla 5.32 podemos observar que en todas las cuestiones del test final que están relacionadas con los objetivos 4 (4.a, 4.b, 4.c, 4.d, 4.e) que involucran la expresión analítica de EDOs, los alumnos obtuvieron un porcentaje de aciertos inferior al 50%. Señalamos que, a pesar de trabajar el contenido de las ecuaciones diferenciales, de forma más cualitativa, la mayoría de los alumnos todavía querían resolver analíticamente cualquier situación en que aparecía una ecuación. Intentaron hacer ello en las cuestiones citadas, ello dificultó la realización del test, pues en esta perspectiva se volvió cansada y de difícil resolución. Este hecho está en consonancia con los resultados de Habre (2000), porque después de trabajar con el contenido de EDOs con enfoque cualitativo, sus alumnos, al final del estudio, intentaban resolver las situaciones propuestas de forma analítica. Sin embargo, es importante destacar que los alumnos comentaron que no estaban acostumbrados a este tipo de trabajo, es decir, no estaban acostumbrados a clases que exigían mucha interpretación y comprensión, además dijeron que estas habilidades necesitaban ser más exploradas.

A continuación, presentamos un análisis más detallado de los resultados de siete alumnos, dos aumentaron considerablemente el número de aciertos del test inicial para la final (A8 y A32)[15], tres no obtuvieron considerables avances (A10, A16 y A51) y dos alcanzaron bajo índice de aciertos (A49 y A59). También realizamos una entrevista semi-estructurada con estos alumnos, que presentaremos en la próxima subsección.

5.5.3.4 Análisis detallado de los resultados del test y de la entrevista semi-estructurada con los alumnos en el Estudio 3

En esta subsección, presentamos los resultados de la entrevista semi-estructurada que realizamos con siete alumnos, que elegimos debido a las razones expuestas anteriormente. La entrevista tuvo una duración aproximada de 20 minutos por alumno, la realizamos al final de la primera mitad de 2008. Esta entrevista estaba compuesta por siete cuestiones básicas, idénticas a las de la entrevista del Estudio 2, se le añadimos a la entrevista, ocasionalmente, preguntas para aclarar o profundizar más las opiniones de los alumnos. Además, seleccionamos cuestiones del test de conocimientos (1, 10, 18 y 19) y se les pedimos a los alumnos que nos explicaran cómo procedieron para elegir una de las alternativas. No solicitamos a todos los alumnos que contestaran las cuatro cuestiones del test. Cuando solicitamos a los alumnos que explicaran cómo respondieron ciertas cuestiones del test, pretendíamos colectar

15 Codificación que se utiliza para identificar a los alumnos. Alumno 1 (A1), Alumno2 (A2),... Alumno 60 (A60).

informaciones más detalladas sobre algún aspecto específico, lo que demonstramos, a continuación:

- Pregunta 1: Verificar si los que se equivocaron en la cuestión habían interpretado el gráfico dado como de la tasa de variación versus el tiempo o si lo confundieron con el de la función versus el tiempo.
- Pregunta 10: seguir el raciocinio de los alumnos para elegir la ecuación diferencial que mejor describe una situación-problema dada.
- Pregunta 18: evaluar si los alumnos conseguían dibujar gráficos de la función y la tasa de variación versus el tiempo, en situaciones crecientes y decrecientes.
- Pregunta 19: averiguar las estrategias utilizadas por los alumnos para elegir la alternativa que representa la solución analítica de una ecuación diferencial y una condición inicial dada.

Hicimos grabaciones en audio de las entrevistas y, posteriormente, las transcribimos para facilitar el análisis.

Ahora tenemos una descripción detallada de la participación y del rendimiento de los siete alumnos seleccionados, para lo cual hemos hecho un análisis cualitativo y cuantitativo, basado en el test final de conocimientos y en las entrevistas semi-estructuradas. Tan pronto como colectamos los datos, se le asignamos a cada alumno un código, An, donde el índice n se refiere a la identificación del alumno.

Para facilitar el análisis comparativo de desempeño de estos alumnos en los dos testes, presentamos en la Tabla 5.33 la relación entre las cuestiones en el mismo test inicial y final, es decir, la cuestión número 5 del test inicial es igual a la pregunta número 1 de la test final. En esta tabla las cuestiones, identificadas por los números correspondientes al ítem tuvo en el test, fueron reordenados de manera que fácilmente identificáramos las cuestiones comunes en los dos testes. También en la Tabla 5.33 presentamos las alternativas identificadas por los siete alumnos en cada una de las cuestiones del test, destacando en negrita las alternativas correctas.

Tabla 5.33 - Relación entre las cuestiones iguales en el test inicial y final. Y las alternativas señaladas por los alumnos en cada una de las cuestiones del test, destacando en negrita las correctas.

	Cuestiones iguales en los dos testes																			
Cuestión t.f	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	10	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Cuestión t.i	5	14	9	10	11	12	13	15	16	6	1	2	3	4	7	8	-	-	-	-
Alumno 8																				
Altenativa t.f	**c**	**c**	**D**	**b**	**b**	C	**A**	**a**	**c**	**c**	**d**	**c**	**a**	**b**	**a**	**d**	c	**d**	**a**	**b**
Altenativa t.i	**c**	b	**D**	a	**b**	**B**	C	c	d	b	**b**	**b**	**b**	**a**	**a**	-				
Alumno 32																				
Altenativa t.f	a	**c**	**D**	**b**	**b**	D	**A**	**a**	**c**	a	**d**	**c**	c	d	**a**	**d**	b	**d**	**a**	**b**
Altenativa t.i	b	b	**D**	**c**	**b**	**B**	**A**	**a**	d	b	**b**	d	d	d	c	b				
Alumno 10																				
Altenativa t.f	**c**	**c**	**D**	-	**b**	**B**	B	d	d	a	**d**	b	b	-	c	b	**d**	a	c	**b**
Altenativa t.i	a	d	B	a	**b**	**B**	D	b	a	a	**b**	d	d	**a**	d	c				
Alumno 16																				
Altenativa t.f	**c**	a	**D**	**b**	**b**	D	B	d	b	b	**d**	**c**	**a**	a	**a**	a	a	**d**	**a**	d
Altenativa t.i	-	**c**	**D**	**c**	**b**	A	B	b	b	b	**b**	d	d	-	d	c				
Alumno 51																				
Altenativa t.f	**c**	b	**D**	**b**	**b**	**B**	C	**a**	b	a	**d**	d	d	a	d	**d**	c	a	b	**b**
Altenativa t.i	a	b	**D**	a	**b**	D	B	**a**	d	a	**b**	a	**b**	**a**	d	**d**				
Alumno 49																				
Altenativa t.f	a	**c**	**D**	a	**b**	**B**	**A**	d	b	a	c	d	b	a	d	**d**	c	a	b	c
Altenativa t.i	a	b	B	a	c	**B**	C	d	b	b	c	a	d	**a**	d	b				
Alumno 59																				
Altenativa t.f	**c**	b	**D**	**b**	**b**	D	B	d	b	a	b	a	d	c	**a**	**d**	c	a	b	a

Alumno A8

El alumno A8 era muy interesado, tenía ganas de aprender, se quedaba después de la clase para hacer preguntas, porque tenía dificultades con matemáticas básica y cálculos con derivadas.

En la Tabla 5.33 podemos observar que este alumno acertó todas las preguntas que se había equivocado en el test inicial. Entre las preguntas que se repiten en los dos testes, sólo se equivocó en la cuestión 6 del test final que corresponde a la pregunta 12 del test inicial, pero segundo argumentó en la entrevista, esto ocurrió debido a un lapso. Los resultados del test final del alumno muestran el crecimiento que tuvo en términos de aprendizaje de contenidos de las ecuaciones diferenciales. En la entrevista, solicitamos a este alumno que hablara sobre la solución de los problemas 10 y 18 del test final y percebimos que nos la contestó correctamente, sin dificultades. A continuación, presentamos el resumen de la entrevista.

> ***Profa****: Me gustaría que comentaras sobre la asignatura como un todo, la metodología, ¿ qué te gustó?, ¿ qué no te gustó?*
> ***A8****: Bueno, en los otros cálculos nos no nos exigieron mucho, por eso muchas personas se desesperaron en la materia de Cálculo III, porque tenían que trabajar mucho, nos exigía mucho. Yo comencé a estudiarpor mí mismo, no me pareció tan difícil. Pienso que es un aspecto muy positivo de esa asignatura, usamos bastante otras metodologías, como el ordenador.*
>
> ***Profa****: ¿Piensas que el Powersim te ayudó a aprender algo?*
> ***A8****: Sí, yo pienso que sí, a visualizar las cosas, las variaciones, los límites, los crecimientos,….*
>
> ***Profa****: ¿Qué dificultades tuviste en la asignatura?*
> ***A8****: No tuve dificultades, diría que no tuve dificultades, la única complicación era el grupo, pues era grande (de 60 personas). Me parece un poco complicado.*
> ***Profa****:: ¿Tuviste dificultades con derivadas, integrales?*
> ***A8****: No, no las tuve.*
> ***Profa****: ¿ Y usando el Powersim?*
> ***A8****: No, eso estuvo bien.*
> ***Profa****: ¿Y a la hora de entender las ecuaciones diferenciales?*
> ***A8****: También eso estuvo bien.*
>
> ***Profa****: ¿Qué piensas sobre el trabajo en parejas?¿Cuáles son las ventajas y desventajas?*
> ***A8****: Yo pienso que en un grupo tan grande es bueno trabajar en parejas, porque muchas veces uno puede ayudar al otro cuando tienen dudas. Con un grupo grande el profesor queda un poco cargado, entonces si está en parejas, algunas veces uno de los dos sabe algo que el otro desconoce.*
> ***Profa****: ¿ Y las desventajas?*
> ***A8****: Yo pienso que no las hay.*
> ***Profa****: ¿Y sobre la importancia de las ecuaciones diferenciales?*
> ***A8****: Yo pienso que esas que el grupo aprendió son las que tenemos que saber para Ingeniería, depende mucho de la rama en la que tu vas a trabajar, pero pienso que es importante por lo menos saberlas, para tener una idea de cómo funciona la cosa.*

***Profa**: ¿ Cómo evalúas tu desarrollo, tu esfuerzo y tu empeño en la asignatura ?*
***A8**: Creo que podría haberme empeñado un poco más. Pero está bien así.*

***Profa**: ¿Qué sugerencias tienes para mejorar la asignatura ?*
***A8**: Nunca he pensado en eso.*
***Profa**: ¿No pensaste en eso, pero durante el semestre no se te ocurrió ninguna idea?*
***A8**:No. El grupo era muy grande, como te lo había dicho.*

***Profa**: Quería retomar contigo algunas cuestiones del test. Por ejemplo, la pregunta 10. La población de mosquitos crece a una tasa proporcional a la cantidad y los pájaros comen una cantidad fija m de mosquitos?*
***A8**: Yo me acuerdo de que me confundió aquella pregunta que lleva a la extinción.. No entendí si realmente llevaría a la extinción, si terminaría o si era una cosa que simplemente disminuiría.*
Bueno, en ésa, aumenta proporcionalmente y disminuye. Sería la (d).

***Profa**: Vamos a ver la pregunta 18. Nosotros tenemos esa situación: Si K es negativo, ¿ Cómo queda el esbozo del gráfico de la cantidad en relación al tiempo?*
***A8**: Si K es negativo, bueno, la cantidad va a disminuir…. Pienso que sería igual al (I).*
***Profa**: ¿Cómo sería el gráfico de la de variación de la cantidad en relación al tiempo?*
***A8**: Aquí el número de hormigas disminuiría. Como la variación sería alta, entonces disminuiría. Pienso que es así, yo elegiría (IV)*
***Profa**: Si K fuera positivo, ¿ cómo sería el gráfico de la cantidad en relación al tiempo?.*
***A8**: Bueno, ahí aumentaría con el tiempo. Cuanto mayor es la cantidad pienso que sería (II)*
***Profa**: ¿Y el gráfico de la variación de la cantidad en relación al tiempo?*
***A8**: Pienso que sería (V).*
***Profa**: ¿ Cuánto varía al inicio, cuánto varía después?*
***A8**: Bueno, al principio la variación sería pequeña.*
***Profa**: ¿Sería siempre igual?*
***A8**: Bueno, la variación aumenta con la cantidad, entonces cuanto mayor es la cantidad mayor será la variación. Ahí, pienso que aumentaría linealmente, como (V)*
***Profa**: ¿Y si K fuera 0, cómo sería el gráfico de la cantidad en relación al tiempo?*
***A8**: La cantidad sería constante, una recta.*
***Profa**: ¿Cómo sería el gráfico de la variación de la cantidad en relación al tiempo?*
***A8**: Ahí sería igual, sólo sería 0.*

Este alumno aprobó la metodología de trabajo, pero subrayó que era muy diferente a la que estaban acostumbrados, que les exigió mucha dedicación. Además, afirmó que probablemente al grupo no le había gustado esta forma de trabajo, porque en las asignaturas anteriores no les exigieron tanto empeño. Le pareció positivo el uso de Powersim, pues facilitaba la visualización de variaciones, crecimientos, ... Y dijo que se había empeñado bastante en aprender y no tenía dificultades en la asignatura. El único aspecto que destacó fue el número de alumnos en el grupo, eran muchos alumnos para una asignatura de esta naturaleza.

Alumno A32

El alumno A32 se mostró muy interesado, tenía facilidad en aprender, estudiaba por su cuenta, no preguntaba mucho. En la Tabla 5.33 podemos observar que este alumno, en el test inicial, tuvo sus errores concentrados en las cuestiones relativas a los subsumidores (preguntas 1 a 8), es decir, a partir de gráficos interpretar las tasas de variación y el comportamiento de las soluciones. La descripción del comportamiento de las soluciones, a partir del gráfico de la derivada de la función, sigue siendo problemático para este alumno, pues en el test final se equivocó en dos cuestiones (1 y 11) relacionadas a este objetivo. Otra dificultad se centró en el análisis dimensional de los términos de una ecuación diferencial asociada con la situación- problema (preguntas 13 y 14). Si no tenemos en cuenta estas dos dificultades destacadas, podemos afirmar que este alumno demostró un buen aprendizaje de los contenidos abordados.

Le solicitamos a este alumno que resolviera nuevamente las preguntas 10 y 18 de el test final y él las resolvió correctamente. Es importante destacar que a pesar de que el siñaló que el ordenador no le auxilió en su aprendizaje, cuando resolvió la cuestión 10, el alumno se refirió al término salida que está asociado con el Powersim. A continuación, presentamos el resumen de la entrevista de este alumno.

***Profa**: Me gustaría que comentaras sobre la asignatura como un todo, la metodología, ¿ qué te gustó?, ¿ qué no te gustó?*
***A32**: No lo sé, el Cálculo III fue un poco diferente, porque el grupo nunca ha trabajado con cálculo en el laboratorio, yo, por lo menos, nunca he trabajado con cálculo en el laboratorio y a mí me ha gustado. Yo entendí, entendí en la práctica…me gusta trabajar así, me gusta visualizar, entender para que sirve aquello. Entiendo mejor cuando se asocia con la práctica.*

***Profa**: ¿Y la pregunta sobre el uso de Powersim?*
***A32:** Me gustó*
***Profa**: ¿Piensas que el Powersim te ayudó a entender las ecuaciones*

diferenciales?

***A32:** Yo pienso que no, no cambió. Me pareció interesante visualizar…. Realmente para ecuaciones más difíciles es bueno saber, pero digamos que para lograr entender esto, no me gusta basarme mucho en el computador… yo prefiero entender de una forma, claro entiendo en el computador todo, pero me gusta realizar cálculos a mano, me gusta calcular.*

***Profa**: ¿Tuviste dificultades en el uso del Powersim?*

***A32**: No. Eso estuvo bien a la hora de construir los diagramas y de interpretarlos.*

***Profa**: ¿Y tuviste alguna otra dificultad en la asignatura?*

***A32**:Pienso que no tuve grandes dificultades.*

***Profa**: ¿Y con derivadas e integrales?*

***A32**: Esa parte fue un poco peor, porque las derivadas y las integrales yo las entendí más o menos, yo no las entendí muy bien.*

***Profa**: ¿Y resolver las ecuaciones diferenciales usando las técnicas?*

***A32**: No, porque allí era la parte más básica, no era tan complicada de resolverla.*

***Profa**: ¿E interpretar los problemas?*

***A32**: No, interpretar no.*

***Profa**: ¿Y montar las ecuaciones?*

***A32**: Depende la ecuación.*

***Profa**: En relación al trabajo por parejas, ¿ te gustó, o no?*

***A32**: Me gusta, me gusta trabajar en parejas, porque se discute bastante, algunas veces piensas algo y tu pareja te ayuda.*

***Profa**: ¿Tú percibes alguna desventaja al trabajar por parejas?*

***A32**: No. Depende si la gente se lleva muy bien, en el grupo somos compañeros desde el inicio de la carrera. Nosotros nos ayudábamos, si yo no entendía alguna cosa ella la entendía, me ayudaba. Por eso pienso que es bueno trabajar por parejas.*

***Profa**: . ¿ Y sobre la importancia de las ecuaciones diferenciales?*

***A32**: Yo pienso que sí, ellas sirven para alguna cosa. De repente un modelo logístico, pienso que para la Química o para Ingeniería ambiental tiene más utilidad.*

***Profa**: ¿y en relación a tu desarrollo, tu empeño, tu dedicación, tu forma de estudiar?*

***A32**: Me gusta poner bastante atención en clase, anoto siempre todo, por que en casa no estudio mucho.*

***Profa**: ¿y las sugerencias para mejorar la asignatura?*

***A32**: Me gusta trabajar en el computador, me gusta ver cómo es, prefiero calcular manualmente, pero no tengo nada en contra, porque existe ecuaciones más difíciles. Me gustó esa forma de trabajar. Pienso que el computador puede proporcionar cosas que en una clase común tú no las conseguirías.*

***Profa**: Quería retomar contigo algunas cuestiones del test. Por ejemplo, la*

pregunta 10. La población de mosquitos crece a una tasa proporcional a la cantidad y los pájaros comen una cantidad fija m de mosquitos?¿ Tú te acuerdas cuál de las ecuaciones diferenciales tú escogiste como la correcta para describir esta situación.
***A32**: Está la* [(a)] *aquí yo no la marcaría .*
***Profa**:Algún motivo ¿ por qué no?*
***A32**: Porque N es la salida. Entonces yo marcaría la (d).*

***Profa**: La pregunta 18 es una situación que estudiamos bastante, en muchos casos parecidos, pero ahora trata de la variación del número de hormigas por día. Entonces, por ejemplo, la variación de la cantidad de hormigas es proporcional a la cantidad de hormigas que tiene, y K entonces es una constante de proporcionalidad. Si K es positiva, ¿ cómo es el grafico de la cantidad de hormigas en función del tiempo?*
***A32**: El gráfico (II)*
***Profa**: ¿ Cómo quedaría el gráfico de la variación de hormigas en función del tiempo?*
***A32**: La variación está aumentando. Es difícil.*
***Profa**: ¡Es un gráfico creciente o decreciente?*
***A32:** Creciente.*
***Profa**: ¿Lineal o no?*
***A32**: No. Sería del tipo* [(II)].
***Profa**: Y si o K fuese igual a 0, ¿cómo sería la cantidad de hormigas en función del tiempo?*
***A32:** Constante.*
***Profa**: ¿Y cómo sería la variación de hormigas?*
***A32**: Si K fuera 0 aquí sería 0, la variación sería 0.*
***Profa**: ¿Y si K fuera negativo?*
***A32**: La variación sería decreciente.*
***Profa**: ¿Y la cantidad de hormigas?*
***A32:** La cantidad de hormigas sería decreciente y la variación también.*

Este alumno también consideró la metodología diferente a que estaba acostumbrado, destacó que era la primera asignatura en la que trabajaba en el laboratorio de informática. Le gustó esa manera de trabajo y dijo que se entendía mejor cuando se podía asociar con la práctica. A pesar de destacar el uso del ordenador como aspecto positivo de la asignatura por favorecer la visualización, le parecía que aprendía mejor haciéndolo a mano, prefería calcular todo, no le gustaba basarse en las respuestas del ordenador. Es probable que lo presentado esté vinculado a lo que ya presentamos varias veces en este trabajo, los alumnos creen que la resolución analítica es más precisa y más fiable.

El alumno A32 consideró que su empeño en la asignatura era bueno. Además, señaló que no había problemas para acompañar la asignatura y que le gustaba trabajar en pareja a causa de las discusiones..

Alumno A10

El alumno A10 es un alumno que en el comienzo del semestre estaba muy despreocupado por su aprendizaje, sentaba al fondo del aula, era muy apático. Cuando percebió que el aprendizaje dependía de él, pensó en dejar las clases, afirmó que no hacía nada en la asignatura que había cursado antes del Cálculo III, pero obtenía la aprobación a través de la ayuda de los compañeros y, por lo tanto, no se sentía preparado para esta asignatura. Entonces, le sugerimos que buscara ayuda con un profesor extra clase para repasar las técnicas de las derivadas e integrales y después solamente tenía que empeñarse en clase, pues seguramente obtendría éxito en su aprendizaje. De hecho, este alumno cambió, desde entonces, y logró buenos avances.

Entre las 10 preguntas comunes en los dos testes, en el test inicial este alumno acertó sólo dos y en el test final acertó cinco, eso demuestra que avanzó. En el test final, demostró una gran dificultad en la interpretación del comportamiento de las soluciones y las tasas de variación en la forma gráfica (preguntas 7, 9, 16 y 18) y también en el análisis dimensional de los términos de la ecuación diferencial asociada a la situación-problema (preguntas 13 y 14).

Le solicitamos a este alumno que respondiera a las preguntas 1 y 19 de el test final. Este alumno consiguió interpretar bien la pregunta 1 y dijo que no sabía la pregunta 19. En el test había escogido de forma aleatoria una alternativa para esta pregunta. Cuando le preguntamos sobre la forma de proceder para encontrar una respuesta dijo que sería necesario resolverla, pero no recordaba cómo hacerla. Luego presentamos el resumen de una entrevista con este alumno.

> ***Profa****: Me gustaría que comentaras sobre la asignatura como un todo, la metodología, ¿ qué te gustó?, ¿ qué no te gustó?*
> ***A10****: Yo pienso que tienen que disminuir el número de estudiantes del aula. Ya que no es posible que todos comprendan el contenido, será interesante disminuir para treinta, para la mitad. Sesenta es mucha gente. Hay personas que tardan un poco más para entender el tema, y el material que se trabaja, se tiene que realizar muy rápido. Es mucho contenido, hay pocos ejercicios, depende de cada uno, yo no soy un alumno ejemplar. Pero, podría ser más fácil, si tú consigues a ayudar a más gente ¿entiendes?, En el libro no consigo aprender. Por eso yo necesito que alguien esté a mi lado.*

Profa: ¿Eso sucede en todas las asignaturas?
A10*: No, principalmente en matemáticas. No significa que no sepa hacerlo, pero, en mi caso, cometo muchos errores de Álgebra. Son muchas cositas, se me olvidan muchas cosas.*
Profa*: ¿Estudias bastante?*
A10*: No, yo no soy un alumno que estudia mucho. Los fines de semana yo no me dedico mucho a los estudios. Esas aquí [las técnicas analíticas para resolver ecuaciones diferenciales] las estudié un poco, yo sólo miré los cálculos, no llegué a resolver nada.*
Profa*: ¿Aprendiste bastante en esta asignatura?*
A10*: Sí, un poco, yo estudié,, resolví las preguntas. Eso me ayudó.*

Profa*:¿Qué piensas de la metodología en general?*
A10*: ¿de la forma en la cual se dictaba la clase?*
Profa*: Sí, de la forma de trabajar los contenidos, de dar clase, de usar el ordenador y de usar problemas aplicados.*
A10*: La cuestión en el ordenador es interesante, pero para resolver eso aquí, para mí, en el ordenador no interfirió en nada. De repente para otros ya cambia. Pero pienso que el contenido tiene que ser explicado en la pizarra. Y debe ser muy bien explicado con muchos ejemplos, cuando tú deseas estudiar, tú tienes cómo volver al cuaderno y tener una solución, pienso que es más o menos eso.*
Profa*: ¿Lo importante para ti es resolver el ejercicio en la pizarra?*
A10*: Para mí lo es. Lo importante es resolver a mano, en el ordenador hay más una lógica, no se tiene mucho para resolver. Es más interpretación, también es interesante, pero son cosas así, a mí no me ayudó mucho a la hora de resolver, le llamaba, le pedía ayuda para aclarar un poco más. Es mucha gente en el aula, se debería disminuir, tener a lo máximo cuarenta alumnos en el aula.*

Profa*: ¿En qué tuviste dificultades?*
A10*: En todo, en general*
Profa*: ¿Derivadas e integrales?*
A10*: Ah, un poco siempre las tiene. En la forma de resolver las preguntas porque cuando me di cuenta de que no las sabía y era todo la misma cosa, sólo son maneras diferentes de resolverlas. Yo pensaba que era un contenido diferente de otro. No lo tenía todavía en mi cabeza, por eso pienso que se lo debe explicar más en la pizarra.*
Profa*: ¿Tuviste problemas al usar el Powersim?*
A10*: Ah, un poco yo pienso que sí. No me salí muy bien en las clases que tenía que utilizar el ordenador.*
Profa*: ¿Y para resolver una ecuación diferencial en forma analítica? ¿Por ejemplo las técnicas de separación de variables, las lineales, las homogéneas?*
A10*: Yo pensé que las sabía. Pero cuando las iba a hacer no las sabía. Hay ciertas cosas, que no te permiten avanzar. Por eso, si está equivocado, seguirá equivocado. Entonces es complicado.*

Profa*: ¿Piensas que es bueno trabajar por parejas?*
A10*: Me parece interesante porque cada uno tiene un conocimiento*

diferente del otro, una idea diferente del otro sobre la pregunta, algunas veces una persona conoce algo, y la otra persona sabe sobre otra cosa. Entonces, intercambias ideas, conocimientos. Yo pienso que al final es válido.

***Profa**: Y sobre la importancia de las Ecuaciones Diferenciales, ¿piensas que sirven para alguna cosa, en tu carrera te van a ser útiles?¿Cuál es tu carrera?*
***A10**: Es Ingeniería ambiental. Logré entender qué son esos dibujos, esas cosas. Yo pienso que eso me ayudaría en el caso de interpretar la pregunta, porque está diciendo algo. Pero es un modelo difícil, pienso que si tú las practicas, las memorizas.*
***Profa**: ¿Qué piensas de las explicaciones? ¿ lograrías relacionarlas con la Ingeniería ambiental ?*
***A10**: Ah, en el momento yo no lo sé , porque tienen que ver más con el futuro. Pero pienso que seguramente es importantísimo en la carrera. Aquella pregunta acerca de la despolución. Porque siempre vas a tener una tasa que está entrando. Una tasa que está saliendo. Realmente va a ser muy utilizado.*

***Profa**: ¿Cómo evalúas tu dedicación en esta asignatura?*
***A10**: Yo prefiero más lo teórico* [no gusta de as matemáticas], *no estoy en contra, admiro las matemáticas, pero no son para mí. Yo no me empeño tanto. Es que también es complicada. Las demás asignaturas se me facilitan un poco más a la hora de estudiarlas. Yo creo que es mejor leer que quedarse respondiendo una pregunta. Sé que las matemáticas es una asignatura grande. Pero no es mucho para mi área. Pero se tiene que trabajar.*

***Profa**: ¿Tienes sugerencias para mejorar la asignatura?, tú comentaste de disminuir el número de alumnos. ¿Tendrías otra?*
***A10**:No lo sé. Tendría que pensar un poco. Hay varias hipótesis. Pienso que menos estudiantes se le facilita tal vez un poco el trabajo a la Profe. Y se debe dar más ejemplos y cuestiones. Es posible realizar muchos ejercicios para quien desee estudiar en casa. Es bueno tener varios ejercicios siempre, puesto que si no se tiene los suficientes es posible realizar algunos en casa, pero es posible llegar muchas veces a resultados equivocados. Se confunde más. Pienso que sería eso.*

***Profa**: Quería preguntarte sobre algunas cuestiones de el test .*
***A10**: Iiiiiiiii.*
***Profa**: No te preocupes. La pregunta 1, es el gráfico de la derivada en relación al tiempo.*
***Profa**: Si en vez de dy/dt pusiéramos dT/dt, ¿es posible afirmar que la tasa de variación de la población en relación al tiempo. ¿Qué significa el gráfico en ese contexto?*
***A10**: Que la tasa de variación es negativa y constante*
***Profa**: ¿Qué significa eso en términos de población?*
***A10**: Que está disminuyendo.*
***Profa**: Debido a eso¿ Cuál es el gráfico que escogerías para la población*

en función del tiempo?
***A10**: Bueno, como aquí es constante es la (a) o la (c). Creo que es la (c).*
***Profa**: ¿Por qué es ésa?*
***A10**: Porque está decreciendo. Es muy lógico, por eso no lo discuto.*

***Profa**: ¿Y la pregunta 19. ¿Cómo piensas resolverla?*
***A10**: Me olvidé de todo. Tendría que realizar la integral, creo.*
***Profa**: ¿La resolverías?*
***A10**:Eso.*
***Profa**: ahora te pregunto: ¿qué es y(0)=8?*
***A10**: 0 **y** es igual a 8 y x es 0*
***Profa**: ¿Qué sucede en la alternativa b?*
***A10**: Va a dar 6.*
***Profa**: y debe ser 8.*
***A10**: Entonces, ésta se puede descartar*
***Profa**: ¿Hay otra que se puede descartar?*
***A10**: Ésa, la (a), vamos a ver. Ah, si se reemplazara por 0, quedaría 5+3 resultaría 8. Si se reemplazara la (c), quedaría 2+6, resultaría 8 también. Y la última quedaría 5.*
***Profa**: ¿ Ttú realizaste este análisis?*
***A10**: No, por eso yo afirmo que es cuestión de no saber interpretar. Yo quería resolverla, pero no tenía ninguna parecida en el cuaderno.*
***Profa**:Claro que la hicimos.*
***A10**: De esa forma no.*
***Profa**: No, no con alternativas.*
***A10**: . ¿ Tiene varias formas de resolver ese contenido?*
***Profa**: Exactamente.*
***A10**: Por eso es que me confundí. Por eso, queremos calcular, calcular y calcular. Porque estamos acostumbrados a realizar…si realizas en el cuaderno preguntas de ese tipo, rellenas el cuaderno, para ir captando cosas diferentes. Yo nunca había realizado un análisis de esa forma.*
***Profa**: Las personas dijeron que el test tardaba mucho. Claro porque ustedes quieren calcular todo.*
***A10**: Sí, realmente. Pero te das cuenta de que una cuestión es sólo cambiar eso, piensas: "no, es trampa", entonces voy a calcular.*

Para este alumno, la metodología tradicional es la ideal, en que la profesora siempre está explicando el contenido en la pizarra, con muchos ejemplos repetitivos. Este alumno consideró importante el uso del ordenador en la asignatura, pero afirmó que no le ayudó. Esto se justifica por el hecho del alumno estar preocupado por la resolución analítica, queda claro, cuando afirmó que teníamos que aprender analíticamente y el resto era sólo un complemento y como en el Powersim no se pretende resolver analíticamente, para el alumno, este *software* no contribuyó para su aprendizaje. Además, dijo que no era muy estudioso, tenía dificultades en toda asignaturas, a saber, las técnicas analíticas, derivadas, integrales, matemáticas básica, la interpretación y el uso de Powersim. Afirmó que era importante trabajar en parejas, porque estimulaba el intercambio de ideas y, además, sugirió que en la clase no debía haber tantos alumnos. Para él, las clases deberían ser en la pizarra y la profesora les debería dar muchos ejercicios a sus alumnos y siempre con las respuestas.

Alumno A16

El alumno A16 es un alumno muy esforzado, dedicado, que intenta aclarar sus dudas en los libros y/o con la profesora. Estudia en casa, se empeña en lograr un buen aprendizaje. El resultado de este alumno en el test fue una sorpresa negativa, ya que en clase parecía acompañar muy bien las actividades, su participación era muy activa, siempre con preguntas muy interesantes.

En cuanto a las dificultades, el A16 señaló las reglas derivadas e integrales. Como sugerencias para la mejora de la asignatura el alumno se refirió a la importancia del profesor en ayudar un poco más en la interpretación de los gráficos que envuelven las derivadas. A este alumno le solicitamos que resolviera las cuestiones 10, 18 y 19, el no presentó dificultades, pero cabe señalar su preocupación para resolver analíticamente todo, si no es de esta manera, no se sentía seguro con la respuesta.

> ***Profa****: Me gustaría que comentaras sobre la asignatura como un todo, la metodología, ¿ qué te gustó?, ¿ qué no te gustó?*
> ***A16****: No estoy acostumbrado a trabajar con ese tipo de guías, fue la primera vez. Me pareció interesante la estructura de las guías, un poco difíci,l al principio, para aprender, porque tenía que haber mucha interpretación y es algo que es poco abordado en las otras asignaturas de cálculos. Las personas se quedan en aquella parte repetitiva, repetitiva y para interpretar gráficos, ver aquello que tú estás calculando en el grafico, las personas casi no lo ven. Eso dificultó bastante, en esa parte que es solo de interpretación.*
>
> ***Profa****: ¿Piensas que el powersim te ayudó ra entender algo de ecuaciones diferenciales?*
> ***A16****: Nos ayudó a tener una noción de la práctica, porque son situaciones que vamos a encontrar en nuestro día a día.¿ Qué aconteció con las guías? El grupo puso la teoría y la práctica juntas, que es lo que vamos a necesitar en nuestra profesión. Sólo tenía teoría, teoría, teoría y nada práctico, eso facilitó. Yo estaba acostumbrado a realizarlo siempre de una forma mecánica, calculaba, calculaba y cuando necesitaba usarlo no sabía cómo*

hacerlo. En el cálculo I, cálculo II, teníamos que calcular, habíamos estudiado derivadas, integrales, cuando llegamos al cálculo III no las sabíamos usar, ni interpretar aquellos cálculos.
***Profa**: Lo percibí mucho en los gráficos. Ustedes no consiguen mirar el gráfico e interpretar qué es una tasa de variación.*
***A16**: Eso ocurre desde el cálculo I. Yo pienso que ese método es bien interesante, eso debería ser aplicado desde el cálculo I, II y III. Porque pienso que los alumnos obtendrían un mayor conocimiento. Pienso que en nuestro grupo, aunque haya sido sólo un semestre, tendrá más conocimientos que en los semestres anteriores en la parte práctica.*
***Profa** : Pero, están descontentos de cierta manera.*
***A16**: Ah, los compañeros son comodones, quieren repetición, y quieren que lo que estudian sea igual en el test . Cuando hay un profesor que propone cosas diferentes y exige mucho, a los estudiantes no les gusta, pero, sinceramente, creo que les gusta, pues aprenden más.*

***Profa**: ¿ Cuáles fueron tus principales dificultades?*
***A16**: Derivadas, integrales. Ahora en las ecuaciones diferenciales, no mucho, sólo lo que faltaba de los otros cálculos. Faltaba recordar muchas cosas.*
***Profa**: ¿E interpretar una ecuación diferencial?*
***A16**: En la interpretación también. Nadie nos enseñó a interpretar, porque si sólo miramos, no hay cómo saberla.*
***Profa**: ¿, Te pareció complicado usar el Powersim?*
***A16**: Al principio sí. Yo no lograba entender cómo funcionaba, pero después sí, allí tú comprendes cada comando, y queda muy bien.*
***Profa**: ¿Construir los diagramas?¿En percibir quién depende de quien?*
***A16**: Eso yo entendía, la relación que tenían, que entra, que sale. Yo la entendí.*

***Profa**: ¿Te parece importante trabajar por parejas?*
***A16**: Pienso que en las partes de las guías es muy interesante, porque pueden comentar, conversar y llegar a un acuerdo. Porque allí se discutía. Me pareció muy interesante.*
***Profa**: ¿Era fácil llegar a un acuerdo?*
***A16**: No de vez en cuando no. Algunas veces entregábamos el ejercicio incluso con dos respuestas.*

***Profa**: ¿Y en relación a la importancia de las ecuaciones diferenciales, piensas que son importantes, sirven para algo, van a ser útiles en tu carrera?*
***A16**: Cuando comencé a cursar el cálculo III pensaba que no. Pero después de ver las aplicaciones que realizamos en clase y dónde es aplicado. La pregunta del tratamiento de afluentes, pienso que va a ser muy útil.*

***Profa**: ¿Cómo evalúas y tu desarrollo, tu empeño, tu dedicación?*
***A16**: Mi desempeño es más en clase, porque en casa es difícil. Pero llegué a entender la propuesta de la asignatura. Yo no me empeñé mucho. Yo suelo prestar mucha atención en clase, en casa sólo repaso, porque memorizo más en clase. Mi memoria es muy visual, algunas veces en esas clases yo*

estaba perdida, no había mucha cosa escrita en la pizarra. Yo me sentía perdida, perdida, tenía que interpretar, yo no conseguía entender de dónde. En la cuarta clase comencé a entender lo que nos estaba siendo enseñando Mi pareja y yo comenzamos a entenderlo. En el primer trabajo en parejas, que tu entregaste las guías, comenzamos a entenderlas. Hasta el momento no lo habíamos entendido. Allí se comenzó a entender, después de que había el contenido en la pizarra, ahí logramos relacionar…era una cosa que nunca la habíamos visto, me equivoqué en la interpretación, era difícil.

***Profa**: ¿Y que tendrías de sugerencia para mejorar esta asignatura?*
***A16**: Ah, me pareció interesante la forma en que trabajaste con las guías, pienso que tiene que seguir mostrando la aplicación, y no tengo mucha sugerencia, creo que ayudarnos a interpretar un gráfico. Dar por lo menos una clase que te ayude "mira la tasa de variación es por ese motivo, tenemos esa base. Es la manera cómo nos preguntan las cosas, bajo presión, no conseguimos verlas. Dar una ayuda en la interpretación. Y no es difícil, el problema es interpretar el gráfico.Pero pienso que es esa parte. Y el resto yo concuerdo con esa parte de la aplicación, pienso que ese método tendría que ser adoptado por todos los profesores de cálculo y seguir una línea desde cálculo I, cálculo II y cálculo III. No necesita ser el mismo profesor, pero si sigue esa línea de raciocinio que exige interpretación y explora la parte práctica.*

***Profa**: Yo quiero ver contigo la pregunta 10 del test. Es aquella situación de los mosquitos, en que la tasa de crecimiento era proporcional a la población que tenía y al mismo tiempo una especie de pájaros estaban comiendo un número fijo de mosquitos. ¿Cuál es la ecuación que describe esa situación?*
***A16**: Pienso que sería la (d), aumenta en una tasa y disminuye el número fijo.*
***Profa**: Esa aquí, la pregunta 18, es aquella situación de las hormigas, en que la tasa de variación de la cantidad es proporcional a la cantidad que tiene. Considerando que **K** es positivo, ¿cuál es gráfico que representa la cantidad de hormigas en función del tiempo?*
***A16**: Va a estar siempre aumentando seríal (II).*
***Profa**: ¿Cómo sería el gráfico de la tasa de variación de la cantidad de hormigas en función del tiempo?*
***A16**: La constante es positiva. Ella va creciendo siempre el mismo valor, el mismo valor en relación al que tenía….no va a aumentar siempre la misma cantidad, entonces, ella no puede ser una recta. Ella va a ser media parábola.*
***Profa**: Y si K fuera negativo, ¿cuál sería el gráfico de la cantidad de hormigas en función del tiempo?*
***A16**: Sería lo contrario, l (I).*
***Profa**: ¿Cómo sería el gráfico de la tasa de variación de la cantidad de hormigas en función del tiempo?*
***A16**: Ella va disminuyendo…pero yo no sé si va a disminuir un valor cada vez menor….no recuerdo…. Es (III).*

Profa*: Y la pregunta 19, ¿llegaste a resolverla para encontrar la respuesta correcta o no?*

A16*: Yo no me acuerdo.*
Profa*: Tiene la ecuación, tiene la condición y era para ver cual era su solución particular.*
A16*:Pienso que la mitad la resolví, y no dio más tiempo. Porque algunas veces se demora mucho en la parte de la interpretación y entonces uno se queda allí comparando y de ahí uno no consigue más calcular todo… pero esa, no necesitaba calcularla, era sólo sustituir los valores, no me di cuenta y comencé a resolverla… 0 y es igual a 8 y x es 0, entonces es posible eliminar la (b) y la (d). No lo sé, tengo miedo de sustituir un número, r, pienso que está equivocado….*

En lo que respecta a la metodología, este alumno comentó que era distinto a lo que estaban acostumbrados, pues trabajaban con actividades muy repetitivas, que les exigían poca o ninguna interpretación. Destacó como positiva la relación entre la teoría y la práctica (aplicaciones), ya que era exactamente lo que irán a necesitar en el futuro. El alumno señaló que, en las asignaturas anteriores de cálculo, hacían todo mecánicamente, sin saber interpretar una respuesta de derivada o integral, y sugirió que desde el Cálculo I se trabajara con esta metodología del cálculo III, que requiere interpretación y la relación entre la teoría y la práctica. También señaló que debido al hecho de ésta ser una metodología diferente, en un primer momento, la profesora debería ayudar más en las actividades de interpretación. Cree que el Powersim facilita la visualización de cómo las situaciones se comportan.

Alumno A51

El alumno A51 era un alumno muy esforzado, tenía bastante dificultades, especialmente en matemática básica, no conseguía estudiar solo, necesitaba que alguien le ayudara y le preguntara constantemente. Entre las preguntas repetidas en los dos testes, el alumno acertó tres cuestiones más en el test final. Sus dificultades se centraron en interpretar el comportamiento de las tasas de variación en la forma gráfica (preguntas 7 y 9) y en las preguntas (13 a 20) que involucraban la ecuación diferencial en forma analítica.

Le solicitamos a este alumno que contestara a las preguntas 1, 10 y 19 de el test final. Percibimos que necesita de ayuda para pensar, si le cuestionamos, consigue obtener las respuestas correctas, pero tiene problemas para hacer los ejercicios solo. A continuación, presentamos el resumen de la entrevista con este alumno.

> ***Profa****: Me gustaría que comentaras sobre la asignatura como un todo, la metodología, ¿ qué te gustó?, ¿ qué no te gustó?*
> ***A51****: Primero usted mostró un preliminar de lo que sería la asignatura, sin poseer ningún conocimiento sobre el tema se fue aprendiendo poco a poco. Es fantástico tu método de trabajo, no hay como no aprender, si estudia un poco, consigue entenderlo. Pienso que se me facilitó un poco más esta asignatura que el cálculo II.*
>
> ***Profa****: Pensando en términos de ecuaciones diferenciales, ¿consideras que aprendiste algo con el uso del computador?*
> ***A51****: Powersim, sí es fantástico debería continuar. Es una pena que no pueda practicar en casa, porque sólo consigo tener contacto con él aquí…lo que yo lamento es el número de estudiantes para la asignatura que exige más explicación. No conseguías dar atención a los alumnos…pienso que tu método de trabajo es maravilloso.*
>
> ***Profa****: ¿Tú tuviste dificultades en la asignatura?*
> ***A51****:Sí, las tuve.*
> ***Profa****: ¿En qué? ¿En el Powersim?*
> ***A51****: No y sí, en el powersim a causa de las velocidades. Si te acuerdas, en el cálculo II era el último que salía del aula. Aquí hacemos los ejercicios despacio e intentamos hacerlo bien. Por ejemplo, en un cálculo allí en uno de los que realizamos en el powersim, que era de circuitos eléctricos, conseguí realizarlo y usé eso como base para otros ejemplos, pero no había llegado a resolver la ecuación de pérdida de temperatura y como yo también no estudié mucho, porque trabajo, después en la evaluación no conseguí resolver aquella por no haberla trabajado en clase Entonces, a causa de la velocidad y tal vez por dificultad mía, de asimilar rápido como algunas personas asimilan. Entonces yo admiro eso, no tengo esa capacidad, pero yo la hago despacio e intento realizarla de forma correcta.*
> ***Profa****: ¿Tuviste dificultades con integrales y derivadas?*
> ***A51:*** *Sí, tuve dificultades con derivadas e integrales, porque ya hace tiempo que cursé el cálculo II. Dejé un intervalo de medio año, pero fue muy importante aquella hoja que usted nos la dio al inicio.*
> ***Profa****: ¿De la revisión?*
> ***A51****: yo usé la revisión mucho, y conforme la íbamos usando, la fuimos poniendo en práctica. No tuve tanta dificultad, de la misma manera que todo el grupo.*
>
> ***Profa****: ¿Te parece positivo trabajar por parejas? ¿ tiene ventajas? ¿ cuáles son las desventajas?*
> ***A51:*** *Sí, es muy bueno, yo aprendí mucho con mi compañera y creo que ella también consiguió aprender conmigo un poco parte de la práctica que yo tengo en la interpretación. Ella era más especialista en la teoría y yo en la práctica. Creo que es muy interesante.*

***Profa**: ¿Percibiste alguna importancia en el estudio de las ecuaciones diferenciales?¿Qué?*
***A51**: Si, claro, pero claro que sirve, eso yo quería señalar. Los ejemplos prácticos que usted nos dio, pienso que es la mejor parte. La tasa de variación. Entonces, en las ecuaciones diferenciales, los ejemplos prácticos yo pienso que es lo mejor que nos puedes dar.*
***Profa**: ¿y en tu carrera ya tuviste alguna cosa relacionada con ecuaciones diferenciales?*
***A51**: Las ecuaciones diferenciales sólo ahora en física III, pero no se profundizó el contenido, entonces tuve un poco, las dos asignaturas se complementan, si…..En la asignatura de modelación yo sé que voy a necesitarla, las situaciones aplicadas van a facilitar mucho.*
***Profa**: y con relación a la resolución analítica de las ecuaciones diferenciales, las técnicas*
***A51**: Nosotros no practicamos. Es igual a mi trabajo, si realizo un ejercicio hoy y si no lo repito, dentro de tres meses o dos meses yo voy a tener que mirar, ver como lo hice. Pero si yo lo hice una vez, yo sé que voy a conseguir realizarlo de nuevo. Sé que lo voy a conseguir realizar. No nos centramos tanto en las técnicas, el enfoque fue en la interpretación, las técnicas no tuvieron ese enfoque como se tenía en otras épocas, en otras asignaturas. Pero eso con seguridad es un punto positivo, usted comentó que había otras técnicas de solución.*

***Profa**: ¿Cómo es que tu evalúas tu desarrollo, tu dedicación, tu participación, tu esfuerzo,?*
***A51**: Yo no practico los ejercicios todos los días. Yo espero, antes de la actividad de evaluación, para intentar resolver los problemas, para intentar aprenderlos, para recordarlos, para intentar aprenderlos, para recordarlos, a la hora de la evaluación. Yo intento resolver los problemas, cuando está más próximo de las evaluaciones. Para conciliar con el trabajo, entonces no se tiene mucho tiempo para estudiar, entonces esa es mi forma de estudiar.*

***Profa**: ¿Qué tendrías como sugerencia para mejorar esta asignatura?*
***A51**: Cualquier cosa que se intenta inventar, que es milagroso, no surte efecto. Mucha cosa podría haber, yo necesitaba, pero no tuve, fue una clase de refuerzo. Y si fuese posible un grupo menor también, porque tal vez podría quedar más tiempo para la práctica en clase.*

***Profa**: Yo tengo algunas preguntas del test. Por ejemplo, la pregunta 1, que es el gráfico de la derivada en relación al tiempo. ¿Cómo interpretas ese gráfico?*
***A51**: Es una constante, sería tipo 2x, Es constante la tasa de variación, es negativo, no sé qué más puedo decírtelo.*
***Profa**: ¿Cuál alternativa escogerías como correcta?*
***A51**: Es una recta. Como partiendo de lo negativo entonces sería …La (a).*
***Profa**: Si reemplazamos por un -2 en este gráfico y considerando que es un gráfico de variación de la población en relación al tiempo. ¿Qué sería ese menos 2?*
***A51**: Que la población está disminuyendo en la constante fija de -2…..Y el*

resultado de la población, la tasa de variación de la población es negativa, que dice, queda bajo cero.
***Profa**: ¿Si la población está disminuyendo puedes escoger un gráfico creciente? Ése es el gráfico de la variación de la población, y ése es el gráfico de la población en relación al tiempo, entonces ¿ la población era negativa y fue aumentando?*
***A51**: No, ahí no estaría de acuerdo, ahí tiene que ser la (c). La población está disminuyendo. Es que eso yo lo comenté antes, es necesario un mes antes, yo no vine preparado para responder ese tipo de pregunta.*

***Profa**: La otra es la pregunta 10. Es la población de mosquitos N que aumenta a una tasa que es proporcional a la población existente, y disminuye un número fijo m por mes que es lo que los pájaros comen. ¿Cuál de esas ecuaciones describe mejor esa situación?*
***A51**: K siempre como una tasa. Los pájaros comen una cantidad fija que es m. yo no puedo interpretar..…aumenta en una tasa proporcional la población existente…la población es N y el número fijo de mosquitos que comen es m. La m sería la reducción, entonces sería KN-m. La m es la cantidad que comen. Comen un número fijo. Sería la (d)…a la hora de el test , no lo pensé así. Bueno imagina que un cerebro que no está acostumbrado a practicar eso, que algunas veces es algo muy simple.*
***Profa**: ahora la pregunta 19. Tiene una ecuación diferencial y una condición dada para encontrar la solución particular. Coloque cuatro soluciones particulares y quiero saber cuál de ellas es solución de esa ecuación ¿Qué pensaste para escoger una alternativa?*
***A51**: Creo que señalé cualquier una, dejé esa para el fin, no tuve más tiempo para resolverla.*
***Profa**: que es y(0)=8?*
O que é y (0)=8?
***A51**: ah, x es 0 y y tiene que ser 8, está allí.*

En lo que refiere a la metodología, el alumno destacó que ésta favorece el aprendizaje, siempre que el alumno se empeñe y se involucre en el proceso. Asimismo, se mostró favorable al abordaje dado al contenido de ecuaciones diferenciales que exigió más interpretación y lo exploró gráfica, numérica y analíticamente, destacando que era diferente de otras asignaturas, en que el enfoque era puramente analítico. El alumno comentó de la importancia de los materiales sobre las derivadas e integrales (subsumidores necesarios para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales), disponibilizado por la profesora desde el primer día de clase. No se consideró un alumno con muchas dificultades, pero sabía sus limitaciones con derivadas e integrales y matemáticas básica. Sugirió la reducción del número de alumnos en clase.

Alumno A49

El alumno A49 era un alumno que reclamaba mucho de la metodología de trabajo, decía que quién debería enseñar el contenido era el profesor que no debería querer que el alumno aprendiera solo. Este alumno resentó muchas dificultades para interpretar las actividades solicitadas

Le solicitamos que contestara a las preguntas 1 y 19 de el test final. Resolvió, sin problemas, la cuestión 1, y como podemos observar en la Tabla 5.34, en el test el alumno se había equivocado en esta pregunta. La pregunta 19 ya fue más problemática, pero a medida que le instigábamos al alumno avanzaba en la direción de la respuesta correcta. Eso demuestra la poca habilidad de los alumnos para trabajar con cuestiones de interpretación y, ello, tal vez justifique un índice de resultados no satisfactorios en los testes finales, en general.

> ***Profa**: Me gustaría que comentaras sobre la asignatura como un todo, la metodología, ¿ qué te gustó?, ¿ qué no te gustó?*
> ***A49**: Nunca había trabajado con ese tipo de metodología antes. Porque ya tengo una graduación…yo soy farmacéutica…yo cursé todo mi enseñanza primaria y secundaria en una escuela publica. Y nunca estudié las matemáticas…. No sé qué es estudiar cálculo, no sé estudiarlos. Entonces, yo hacía los ejercicios, los hacía en clase y ello era lo suficiente. Yo nunca estudié, como usted siempre dice, era todo mecánico…había regla, la aplicaba, daba cierto, obtenía el resultado y estaba bien…ahora cuando yo comencé el primer día de clase, me pareció muy distinto. Porque desde las primeras guías, no estábamos seguros, no soy una persona insegura…..yo necesito saber si está bien o no lo está…y si el método que estoy usando es correcto. Tengo esa inseguridad, es algo mío…necesito tener ese resultado, visualizarlo , así encuentro la respuesta.*
> ***Profa**: La idea es que ustedes intentaron encontrar un camino para comprobar, usando o no el computador, interpretando la respuesta que genera, algunas veces no tiene (in)correcto, algunas veces es necesario verificar si es ideal o no.*
> ***A49**: Es que hasta ahora yo nunca había hecho eso. Siempre trabajo con el resultado y con respuestas, con formas de resolver que llegaba a una determinada respuesta, a una determinada respuesta afirmativa. Si alguien te decía que estaba correcta, estaba incorrecta o si había respuesta en el libro. tengo bastante dificultad En los problemas, algunas veces es distinguir eso. Algunas veces es algo muy obvio, yo realizo algunos caminos y no me parece obvio. Pero eso no es a causa de la metodología, pienso que fue posible entender algunos trabajos que se realizaron en física, que ya habíamos estudiado física, yo conseguí entender bien. A veces tengo esa dificultad de visualizar, algunas veces doy vueltas y vueltas al ejercicio y no*

consigo realizarlo…Pero, me parece bien interesante trabajar con algo aplicado.

***Profa**: y con relación al uso del computador, ¿ crees que fue importante para aprender alguna cosa, interfirió, fue un obstáculo?*
***A49**: Ah, el Powersim me pareció práctico, muy fácil, con él se visualiza muy bien. Me pareció que al montar un problema en él, yo lo comprendía mejor de lo que si lo realizara en un papel. Las constantes, las entradas las salidas, ésas conseguía visualizarlas mejor que si estuvieran sólo en el papel y tuviera que buscar todas aquellas informaciones…Después que aprendí a montarlo siempre es igual.*

***Profa**: ¿Tuviste dificultades con el Powersim?*
***A49: N**o, con el Powersim no.*
***Profa**: ¿Y otras dificultades con la asignatura?*
***A49**: Esa parte de la interpretación. Eso que fue un poco más complicado para mí. En grupo yo hacia más la parte de los cálculos y Ana hizo la parte más interpretativa. Lo que me faltaba, que sentí en esa asignatura, fue la interpretación.*
***Profa**: ¿Con derivadas e integrales?*
***A49**: No, eso no.*
***Profa**: ¿Resolver una ecuación diferencial analíticamente usando las técnicas?*
***A49**: Ah, aquellas me parecieron muy fáciles.*

***Profa**: ¿y trabajar en grupos que piensas?*
***A49**: Creo que es muy bueno, me gustó.*
***Profa**: ¿ Ves alguna desventaja, o que ventajas hay en trabajo en parejas.?*
***A49**: Ah la ventaja principal fue esa, que ni yo ni Ana, ocurrió todo bien, porque ella conseguía interpretar más fácil que yo, y yo lograba realizar el cálculo, desarrollar la ecuación o algo así. Nos completábamos muy bien, ella me ayudaba a interpretar y yo le ayudaba también. Yo soy más objetiva y ella se quedaba simulando, comprobando.*

***Profa**: ¿Piensas que las ecuaciones diferenciales es un contenido importante?*
***A49**: Sí, es muy interesante, hay uno sobre el tiempo de media vida de los medicamentos, eso no lo recordaba bien como se hacía. Ya lo había visto, porque en la facultad de farmacia yo había trabajado bastante con esas de media vida, absorción de medicamentos, eso recordé bastante.*

***Profa**: ¿Cómo evalúas tu desarrollo en esta asignatura, tu empeño? ¿ te dedicaste bastante?*
***A49**: Sinceramente, no me dediqué mucho.*
***Profa**: ¿Por qué?*
***A49**: Me podría haber dedicado más. Yo decidí, hasta llevé para mi casa el powersim, pero yo no realicé de nuevo ningún ejercicio. Así que no soy una alumna muy ejemplar. Yo no conseguía quedarme pensando sobre un ejercicio, yo intenté estudiar esa parte interpretativa, intenté desarrollarla más...*

***Profa**: ¿ Qué tendrías de sugerencias para mejorar esa asignatura?*
***A49**: Sólo esa última prueba que realicé que trataba del cierre de la asignatura fue muy larga. Me gusta leer, marcar, pensar y, al final de la noche, yo todavía había cuatro preguntas que no las había leído. Las dos últimas, más objetivas yo no verifiqué qué era.*
***Profa**: En relación a la metodología?*
***A49**: La metodología me gustó. Me gustó esa parte de ir para el computador, de trabajar junto, de intercambiar dudas, esto es bueno, bueno. Y me gustó esa parte de retomar los cálculos, la parte aplicada. Porque algunas veces hay asignaturas muy distantes una de otra.*

***Profa**: Me gustaría retomar contigo algunas preguntas del test. Inicialmente la pregunta 1, vamos a suponer que aquí fuera la variación de la población en relación al tiempo. ¿ Qué significaría ese menos 2?*
***A49**: Que ella va a disminuir, es la letra (c), creo que la había marcado.*
***Profa**:Ahora la pregunta 19.*
***A49**: yo no la recuerdo.*
***Profa**: Pero, por ejemplo, aquí hay una ecuación diferencial y una condición y, ¿ cuál de esas es la solución para este caso?*
***A49**: Yo ya substituí los valores de y y de x en la ecuación diferencial.*
***Profa**: ¿en la ecuación diferencial?*
***A49**: No, yo la iba a resolver*
***Profa**: o **y** tiene que ser 8 cuando x es 0. Entonces, ¿ podrías substituir en la solución?*
***A49**: En la (a) daría 8, en la (b) daría 6…pero como tiene que encontrar una respuesta las personas tienden a pensar que tienes que calcular.*
***Profa**: Pero, no todo se resuelve solamente calculando. Es posible resolver interpretando mucha cosa también.*
***A49**: ¡Verdad¡, dios mío, pero hace veinte años que yo sabía de una manera, ahora en un semestre, eso fue un choque. Imposible acostumbrarse a eso. Claro, ahora puedo ver que interpretando se llega a mucha cosa, no siempre todo se obtiene calculando. Hay muchas otras opciones de trabajar, de estudiar las Matemáticas que no es sólo calculando. Todo eso aquí fue un choque para mí, por lo menos en las primeras clases estaba nerviosa. No sabía cómo estudiaría eso aquí.*

***Profa**: Y la pregunta 10. Habla de la cantidad de mosquitos que aumenta a una tasa que es proporcional al N (número de mosquitos) y disminuye el número fijo m que es lo que los pájaros comen.*
***A49**: Ésa de aquí no la conseguía imaginar, yo me quedé bastante tiempo intentando responder esa pregunta. No conseguía interpretar m, yo sabía que disminuía, pero no sabia donde colocar, que iría a disminuir.*
***Profa**: Pero aquí dice que comen un número fijo m.*
***A49**: Yo me quedé con dudas porque no sabía si yo lo colocaba después de la igualdad o antes. Yo sólo sabía que iría a disminuir.*
***A49**: Debería haber una asignatura que ayudara a abrir el pensamiento, es una visión lógica y más interpretativa. Porque yo tengo 29 años, en mi enseñanza secundaria me quedaba en las clases de matemáticas, nunca estudié. Me bastaba con prestar atención en clase y realizar los cálculos.*

Este alumno, por un lado, se refirió mucho a sus dificultades para adaptarse a esta metodología de trabajo, sintió falta de respuestas en los ejercicios, y se sentía inseguro, no confiaba plenamente en su respuesta, pero, por otro lado, señaló que era importante trabajar con las aplicaciones, las situaciones de vida media, absorción de las medicinas, ...y que el Powersim ayudó en el proceso de visualización e interpretación, además de dar informaciones importantes de las situaciones tratadas. El alumno también señaló que, desde hace muchos años, que todo el aprendizaje en matemáticas en la escuela eran basados en cálculos y que sólo ahora se dio cuenta de que había otras maneras de estudiar las Matemáticas, no sólo se calculaba, pero era muy difícil acostumbrarse a ello. A este aluno le pareció positivo el trabajo por parejas, además, destacó que sus problemas estaban todos relacionados con la interpretación.

Alumno A59

El A59 es un alumno con muchas deficiencias en relación a los subsumidores, es esforzado, pero reclamaba mucho de la metodología de las clases, y por este motivo lo seleccionamos para la entrevista.

A este alumno le solicitamos que resolviera las cuestiones 1, 10 y 19 de el test final. A partir de ello, pudimos comprobar que necesitaba ayuda para pensar en la dirección correcta, tenía buenas ideas y avanzaba pero necesitaba que alguien le ayudara. A continuación el resumen de la entrevista de este alumno.

> ***Profa:*** *Me gustaría que comentaras sobre la asignatura como un todo, la metodología, ¿ qué te gustó?, ¿ qué no te gustó?*
> ***A59:*** P*ienso que el grupo era muy grande. Era un poco difícil trabajar de una forma individual... no sé si debido a la cantidad del contenido que nosotros teníamos o no... había poco ejercicio,... debido a la cantidad de alumnos era complicado solicitar algo... dificultó un poco.*
> ***Profa****: y esa forma de trabajar donde primero explorábamos una situación-problema en el computador, simulábamos y solo después íbamos al aula para resolver analíticamente?*
> ***A59****: Cuando estábamos en el computador, realizábamos la parte aplicada, pero, sabía bien qué estaba haciendo, no tenía una fórmula, no tenía nada que sirviera de base, entonces, era posible realizarlo haciendo uso del powersim, y después en el aula, veías una fórmula de lo que se había realizado en el powersim. Al principio, incluso por mi culpa, yo sufrí bastante, porque no conseguía entender, llegaba a clase , me detenía en mis dudas. Entendia lo que se pedía, pero no lo conseguía realizar.*
> ***Profa****: ¿ Piensas que en powersim ustedes no sabían qué estaban haciendo?*
> ***A59****: Yo entendía la tasa, está saliendo tanto por ciento. Yo entendía qué*

estabas pidiendo. Pero, muchas veces, no lograba realizar en el programa. Desde la mitad hasta el fin del curso yo sabía utilizar un poco mejor el software. Pero, al principio, no conseguía colocar las fórmulas propiamente, que era de poner una entrada, una salida y el hecho de estar o perdido se me dificultaba, había cosas que dificultaban el aprendizaje.
***Profa**: ¿Están acostumbrados a trabajar con esta metodología? ¿Cómo están acostumbrados a trabajar?*
***A59**: No, no en las otras asignaturas de cálculo fue básicamente clase expositiva. El profesor daba ejercicios en la pizarra, el grupo los realizaba... si trabajamos en el laboratorio, fueron muy pocas veces, pero no se restringió sólo a cálculos. Con excepción de las experimentales, en mi caso, es en el curso de Química, que vas al laboratorio no hice algunas salidas, hice algunos experimentos, en las otras clases el profesor pone en la pizarra o utiliza láminas, hay una dependencia de tener las cosas más listas. Tal vez, por eso, me sentí tan perdido en esta asignatura, usted explicaba en la pizarra para realizar varios ejercicios iguales... yo conseguía identificar qué era tasa, lo que era inicial lo que era final, de que manera yo tenía que aplicarlo, pero nunca en el primer momento. Siempre necesitaba pensar para conseguir realizar alguna cosa...Yo no estoy acostumbrado con esa dificultad, sin dificultad para obtener una buena nota. Pero cálculo de matemática básica, incluso en la secundaria siempre fue una materia bastante difícil para mí.*

***Profa**: ¿Piensas que conseguiste aprender algo de ecuaciones diferenciales?*
***A59**: Sí, yo pienso que sí me preguntaras hoy alguna cosa de los problemas que trabajamos bastante. Si me propusieras un problema aquí, tal vez sin estudiar yo intentaría realizarlo. Algo que yo consiga entender, pero todavía tengo dificultad, por ejemplo, para recordar todas las derivadas, con las más simples no tengo problemas. Yo diría que aquellas dificultades del cálculo II con las derivadas, yo mejoré un poco, pero no totalmente, en las situaciones aplicadas pienso que el aprendizaje fue mejor. En la parte de resolver problemas yo me daba cuenta de que conseguía identificar lo que era tal cosa, calcular, por ejemplo, el valor de K... eso yo lo conseguía realizar y resultaba más fácil resolver el problema.*

***Profa**: y en el uso del ordenador, ¿Piensas que te ayuda a aprender alguna cosa de ecuaciones diferenciales, ¿ o no?*
***A59**:Yo diría que para las ecuaciones diferenciales yo pienso que no. Por ejemplo, si necesitara calcular alguna cosa, yo sabría usar el powersim para darme una información que necesito, pero ver un gráfico e identificar una ecuación diferencial. Transferir eso a una fórmula, esas cosas no. Con una situación aplicada, me ayudó bastante, porque yo podía entender una situación cualquiera, identificar entradas y salidas y yo conseguiría llegar a una solución de un problema aplicado. Pero, antes del cálculo III, yo no lo tenía, cálculo eran fórmulas. Yo siempre que aplicaba, realizaba una relación con una fórmula, con un problema, y ahora estábamos teniendo una aplicación práctica, por eso intentaba asociar las cosas a los otros cálculos y quería las fórmulas, pero probablemente era un error hacer eso.*

Profa*: ¿en tu visión, resolviendo en el powersim no estabas resolviendo una ecuación diferencial?*
A59*: Sí, no, yo sabía que quería hallar, por ejemplo, el vaciado de un tanque, pero no tenía mucho sentido. Creo que ésa es la palabra, pues yo estaba acostumbrado a otra realidad, que era fórmula, cálculo en el papel, y era la novedad. Entonces, faltó, pienso que eso fue lo que me dejaba así un poco perdido.*
Profa*: Cuando lo hacías en el powersim, cuando encontrabas el gráfico y la tabla, ¿Ya estabas resolviendo una ecuación diferencial?*
A59*: Analíticamente no*
Profa*: No siempre necesita ser en forma analitica.*
A59*:Sí.*

Profa*: ¿Tuviste dificultades con la matemática básica, derivadas e integrales?*
A59*: Yo diría que sí. En el cálculo I y en el cálculo II, nosotros tuvimos derivadas e integrales, tuvimos casos más simples. Y tuvimos poco, tal vez por culpa nuestra, por que toda vez que la Profe nos ponía unas más difíciles, reclamábamos. Entonces, era algo totalmente nuevo y en los tres cálculos me sentí"perdido" por eso siempre me quedaba faltando algo.*
Profa*: ¿ Tuviste dificultades para trabajar con el powersim?*
A59*: al inicio yo tuve dificultades y no sé decir exactamente el motivo, tal vez por el hecho de software estar en una lengua extranjera, no sé pero después yo conseguía utilizarlo relativamente bienl, conseguía imaginar qué tenía y qué necesitaba y cuáles herramientas yo tenia que usar, porque de los recursos que disponía el sofware los usamos muy poco. Usamos solo un tanque, entrada, salida y eso era muy facil de montar, lo que acontecia muchas veces cuando tenia que colocar K, por eso se me dificultaba un poco, que no era ningun absurdo, pero obstaculizaba un poco. Pero despues que yo entendi la idea de que todo que tengo yo necesito colocarlo en el esquema, por eso después se me facilito un poco. En las primeras clases yo no sabia usar el, y me quedaba mirando para los alrededores para mirar quien lo estaba realizando, pedia para mi pareja pero en el final ya estaba dando algun tipo de consejo, me miraba relativamente bien.*
Profa*: ¿y dificultades con relación a la resolución analitica de las ecuaciones diferenciales tecnicas analiticas que abordamos?*
A59*: De las separables no y de las no separables muchas veces me quedaba intentando, miraba asi para ella de inmediato no conseguia percibir si era separable o no. No conseguia identificar, pero conseguia resolver ellas, algunas mas dificiles que otras, pero en ultimas las tecnicas no son tan dificiles.*

Profa*: ¿Qué te parece trabajar por parejas? ¿Te parece bueno o malo? ¿Por que?*
A59*: lo que yo encuentro malo tu tomas una pareja que es muy diferente de ti, no digo en la parte de su comportamiento, en la parte de intrucción. Que tu sabes hacer y tu pareja no sabe por eso muchas veces tienes que arrastrarlo, no se deja ver en nada, no te contribuye, eso es lo malo. Y bueno cuando tu pareja te puede ayudar, pero cuando no te ayudan es cuando lo considero ruin. Porque a la hora de resolver, tu esta intentando*

resolver en el caso del trabajo aquí en la asignatura, fue el caso en el cual yo estaba, con un poco de prisa por que yo no lo lograba salir del lugar y ahí el queda preguntando"que es lo que esta haciendo y como lo haces. Tu deseas decirle "o hacer asi, quedate quieta que tu me obstaculizas" eso yo creo que es malo, y en el caso del calculo III, fue mi caso. En la otra materia que yo estoy realizando, los dos nos complementamos, asi es facil trabajar. En las practicas lo que la gente hace por ejemplo, la pareja se divide el trabajo, lo cierto es que los dos logran realizar juntos lo pedido, pero los dos saben que eslo que se tiene para realizar, entoncesesto permite que se termine en la mitad del tiempo. En ese caso es bueno trabajar en parejas, pero en mi caso en calculo III en función de la pareja, si desmeritarla a ella, porque yo tambien no se mucho. Si hubiese conseguido otra pareja tal vez con alguno que lograra aportar mas, habria sido mejor. Pero como en verdad yo sabia un poco por eso no fue muy productivo.

***Profa**: Tu desempeño de una manera general. ¿Piensas que fue bueno, o que tendrías que haber hecho para haber aprendido más?*
***A59**: para la asignatura, sin comparar con las otras materias que yo ya realice, tanto en la graduación como en lo técnico, fue la discplina que yo diría que mas me comprometí, hasta fue la asignatura a la cual mas tiempo dedique., fue la que mas busque otros tipos de información. Por lo general yo no la busco, raramente solo cuando es un trabajo como es el caso de los seminarios que la gente va a buscar algun tipo de información. Pero para el contenido que el profesor hace expositivo, aquello que el realiza en el tablero para mi es suficiente y no necesito buscar otro tipo de información, entonces, en esa fue la que mas busque, que yo mas gaste tiempo para estudiar. Solo que podria haber comenzado antes, si hubiese comenzado a estudiar antes, no estaba entendiendo, pero continuaba sin entender, y por eso las ultimas semanas, la puerta parece que se abrio, de un momento para otro parece que se vio facil. Parce que le di al punto o como decimo nosotros "callo la ficha" me quedo facil*

***Profa**: ¿Percibiste alguna importancia en el estudio de ecuaciones diferenciales?¿Piensas que este contenido es importante para tu carrera?*
***A59**: yo diría que se mostro muy poco de lo útil…yo se que una materia de física la Profa hablo de integrales. En el caso de la integral definida, necesitábamos encontrar un valor en la suma, por ejemplo de 0 a 2 ella decía lo voy a pasar por encima por que ustedes no tienen base, pienso que era física I o II, ustedes no tienen base y no es posible hablar de esto con ustedes por que no lo van a entender, allí recuerdo que ella hablo de la integral.*
***Profa**: ¿Y pensando en términos de ecuaciones diferenciales?*
***A59**: después del campo que voy a seguir. Que ni hoy soy analista. Hoy eso no hace diferencia para mí, tal vez mañana yo voy a trabajar con el desarrollo, dependiendo en que área eso va a ser importante para mí. Entonces, yo consigo identificar un grado de importancia en el futuro, de inmediato, para mi no, no hacia mucho sentido, pero principalmente yo diría Calculo I y II. Yo hacia integral y realizaba derivadas. Yo hacia por hacer porque estaba en el currículo, en la parte de calculo III que tuve las situaciones practicas, pienso que mostro estar mas próximo de mi realidad.*

Lo halle difícil. Pero en verdad por ejemplo, voy a trabajar con fluidos, alguna cosa con líquidos, voy a tener que tener una noción para poder la parte que hicimos en el powersim yo la encuentro útil. De la misma forma si voy a trabajar con alguna cosa que esta creciendo exponencialmente, una concentración.

***Profa**: ¿Cuál sería tu sugerencia para mejorar la asignatura?*
***A59**: es complicado por lo siguiente: el alumno hoy, y pienso que por algunos años hasta cambiar, el esta acostumbrado a realizarlo mecánicamente. Y el necesita de realizar muchos ejercicios. Para que tú logres entender necesitas realizar muchos ejercicios. De ahí pienso que el ejercicio tendría haber ayudado un poco más. Solo que pienso el principal problema es el numero de alumnos por que ese tipo de caso que yo fui a cuestionar es que fui a aprender con otros, si el profesor tuviera mas tiempo para dedicar individualmente, tener la posibilidad de pasar en la clase, tener la disponibilidad del alumno preguntar mas, pienso que eso ayudara mas. Era mucha gente. La señora pasaba comenzaba en una punta y de ahí nunca conseguía pasar mas de que tres veces por cada pareja por noche. Como es mucha gente y de ahí muchas veces tú no llegas cuando se realiza una pregunta, entonces pienso que ese es el problema. La gran cantidad de alumnos y la cantidad de contenido que tiene que ser dado,…. Pero se tiene un cronograma par cumplir también, yo soy una persona que reflexiona y mira si estoy desempeñándome bien en una materia, acostumbro faltar a clase, hasta hablar en clase. De ahí entonces, eso comienza a generar desorden en el grupo, por el número de alumnos pero en la clase la gente se comportaba bien, puesto que estaban muy ocupados. Pero al mismo tiempo, si tú das la clase en el tablero y tú explicas para todos al mismo tiempo, en ese grupo a esa cantidad de alumnos es imposible. O si todos estuviesen acostumbrados a ese tipo de trabajo tiempo atrás, irían a estudiar más por cuenta propia. Porque algo que yo vi, por ejemplo, algunas cosas que no se exigieron para nosotros en el calculo I y no II que es, por ejemplo la derivación y la integración de exponenciales y otras un poco mas complicadas, fue exhaustivo en el III. Entonces, no es que este errado, pero así tu vienes de una línea de trabajo, derivando integrando un tipo de cosa. Nosotros nos esforzamos para la comprensión de la materia, tu cambiaste un poco de aquello que la gente estaba acostumbrado a realizar y eso dificulto. Si se hubiese seguido la misma línea, pienso que se habría facilitado. Tu estabas haciendo una cosa para intentar cambiar el método de enseñanza, si se estuviese viendo desde el I habría sido mas fácil, pero en la verdad como no veo, la gente venia de una línea, de ahí en el III eso cambio y eso dificulto la asignatura.*
***Profa**: **¿**Te parece interesante cambiar?*
***A59**: es bueno cambiar, pero so se hubiese comenzado en el calculo I y no en el II todo bien. Pero para mi fue peor el hecho de haber sido en el calculo I y en el II. De una forma en el I y en el II de una forma diferente. El hecho de tu haber cambiado la matemática el foco de la asignatura en el ultimo calculo, yo pienso que eso dificulto la vida de todo mundo.*

***Profa**: Me gustaría que tu pensaras sobre la pregunta 1 del test. ¿Recuerdas la alternativa escogida? ¿Por qué?*

A59*: recordar lo que yo había marcado no lo recuerdo, pero en el caso aquí el tiempo esta creciendo, solo que ni la derivada esta siendo constante.*
Profa*: ¿ Crees que está haciendo falta una constante aquí?*
A59*: no por ejemplo aquí, la derivada esta viniendo de una cosa que esta relacionada con la otra, solo ese valor, si tuviere un dividido por otro u un multiplicando el otro, el siempre esta dando el mismo número. Porque la taza de variación es constante.*
Profa*: ¿Qué significa el gráfico en una situación de población?*
A59*: ella esta creciendo. La población esta creciendo siempre igual. Ella esta aumentando el numero de habitantes, pero la taza de crecimiento es igual por eso yo creo que seria al alternativa (a).*
Profa*: solo si tu miras el gráfico, percibes que el es constante, pero esta en el semieje negativo.*
A59*: entonces esta decayendo. Realmente. Esto yo no lo percibí. Poe eso es que yo digo, que parece que yo no lo percibí, por eso es bueno tener a alguien que me este cuestionando para darme cuenta.*
Profa*: entonces, continuas escogiendo la alternativa (c)*
A59*: no, en el caso de ese decaimiento sería la alternativa (c)*

Profa*: otra que yo quiero preguntar es la pregunta 10. La población de mosquitos que aumenta a una tasa que es proporcional a la población existente, y que en el mismo ambiente tiene una especie de pájaros que comen un número fijo de esos mosquitos por unidad de tiempo.*
A59*: ah, ya se, se tiene que identificar N y m. Por lo que estoy viendo, si los pájaros comen una cantidad fija, va tener que del valor siempre disminuir. En el primer momento yo diría, por causa que los mosquitos están procreando, están creciendo a una taza fija, solo que de eso esta siendo disminuida una cantidad, si es aquello que los pájaros comen.*
Profa*: ¿Qué significa KN?*
A59*: K veces N es un factor multiplicando por un valor que debería ser, a cada instante, aumentado en el numero de mosquitos. A cada instante esta aumentando el número de mosquitos y disminuyendo el número fijo. Por lo que dice allí ella crece proporcional a la población que existe. Entonces a cada instante, en el mismo ambiente tiene una especie de depredadores, que comen un número fijo. Si yo tengo una población x que crece a una taza k durante un periodo. En ese mismo intervalo de tiempo que ellos llevan para multiplicar tiene otro que descuenta, que substrae un valor fijo. Entonces es la alternativa (d).*

Profa*:* ***¿****Y la pregunta 19. Aquí no tiene situación ninguna. Es una ecuación, una condición y cual de ellas sería la solución? ¿Tú irías a descartar alguna del inicio o no?*
A59*: yo no sé si es el caso de descartar. Mira, honestamente, yo no me encuentro muy bien para saberlo resolver, pero las alternativas (a) y (d) tienen números que no están presentes en la formula, en el primer momento no hacen mucho sentido para mi yo tengo el 6 aquí y lo tengo aquí.*
Profa*: ¿y que significa eso de aquí* [la condición inicial]*?*
A59*: eso es para aplicar cuando y vale 0, x sería 8. O cuando x es 0, y tiene que dar 8?*
Profa*: ¿Eso funciona en todas las alternativas?*

A59: en la (a) 5+3=8, en la (b) no se aproxima. 2+6=8 en la (c) se aproxima. Y en la (d) no se aproxima. Pero no había pensando en eso, intente resolverla y como no conseguí, marque cualquiera. Realmente cuando tu ves la ecuación allí, tu piensas que tienes que calcular alguna cosa, yo intente resolver todas las preguntas que están aquí, y hay me quedo poco tiempo para el test, tengo aquella visión de mirar intentar resolver para llegar a la respuesta.

Este alumno también sentía falta de clases tradicionales, ya que en Powersim no había cálculos para hacer. El alumno también señaló que en casi todas las demás asignaturas predominaban las clases expositivas, en que el profesor utilizaba las transparencias, el bolígrafo y la pizarra. Eso hace que el alumno dependa del profesor, pues espera las cosas listas. Además, afirmó que las cosas que, inicialmente, construía en Powersim eran mecánicas, no comprendía realmente lo que estaba haciendo, seguía otros modelos e iba adaptándolos. Sólo en una de las últimas clases con el Powersim, que comprendió el proceso de construcción en Powersim. Este alumno cree que aprendió con esta metodología, porque si hoy le presentaran una situación, probablemente tendría nociones de resolución e interpretación, por otra parte, dijo que si le pusieran una derivada, tendría que estudiarlas, investigando en los libros. También destacó que, en su opinión, las matemáticas siempre estaban relacionadas con las fórmulas, y que en esta asignatura había sido distinto.

En la entrevista con este alumno nos quedó claro una vez más el poder que los alumnos dan a una resolución analítica contra una gráfica o numérica, ya que consideró que el trabajo con ecuaciones diferenciales era sólo una parte de los cálculos, pues dijo que el Powersim era importante para interpretar las situaciones, los gráficos, pero no lo era para las ecuaciones diferenciales. Eso deja muy claro que mientras él estaba trabajando en *software*, no creía que estaba trabajando con ecuaciones diferenciales.

5.5.4 Comentarios finales sobre el Estudio 3

Inicialmente, recordemos las cuestiones que orientan esta investigación:

1. **¿Cuáles son las principales dificultades de los alumnos en el aprendizaje de ecuaciones diferenciales?**
2. **¿Cómo podemos ayudar a los alumnos para obtener un aprendizaje**

significativo de las ecuaciones diferenciales?

3. **¿Cómo podemos trabajar con los recursos para mitigar estas dificultades? ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de utilizar este tipo de herramienta en la enseñanza de ecuaciones diferenciales?**

Seguiremos buscando las respuestas a estas preguntas presentando, inicialmente, las acciones desarrolladas y nuestras expectativas al desarrollarlas y, posteriormente, una síntesis de los resultados obtenidos y los comentarios explicativos correspondientes.

Para obtener más pistas acerca de las principales dificultades de los alumnos en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales (**pregunta orientadora 1**), llevamos a cabo un Estudio Preliminar en el que hicimos una entrevista con cuatro profesores, investigamos en la literatura del área y utilizamos nuestra experiencia como profesor de este contenido. La síntesis de los resultados obtenidos se encuentra en la subsección 5.2.3.

Para ayudar a los alumnos a obtener un aprendizaje más significativo de las ecuaciones diferenciales (**pregunta orientadora 2**) cambiamos el enfoque tradicional de cómo se viene trabajando este contenido. Empezamos con situaciones-problema contextualizadas para motivar a los alumnos y estimularles a participar más activamente en el proceso enseñanza-aprendizaje. Las actividades propuestas requerían interpretación, y no simplemente la repetición de las técnicas. La atención se centró no sólo en la solución de analítica, sino también en soluciones gráficas y numéricas obtenidas con la ayuda de recursos computacionales. La realización de las actividades eran propuestas en parejas de manera que los alumnos pudieran discutir sus ideas. Y nuestra expectativa era de que con este abordaje diferenciado se criara condiciones en que se produjera un aprendizaje más significativo.

En cuanto al uso de recursos computacionales (**pregunta orientadora 3**), elegimos un *software* de fácil manejo, sintaxis sencilla y que permite al alumno realizar simulaciones para interpretar las situaciones-problema presentadas. Nuestras expectativas eran que esta herramienta motivara a los alumnos en el aprendizaje, porque podrían a través de simulaciones de las situaciones-problema, empezaran a entender las ecuaciones diferenciales y el comportamiento de sus soluciones sin la necesidad de resolverlas analíticamente, eso, generalmente, implica cálculos que son considerados difíciles por los alumnos.

Para evaluar las acciones propuestas con el fin de responder a las preguntas norteadoras 2 y 3, desarrollamos tres prácticas pedagógicas, que corresponden a los Estudios 1, 2 y 3. Estos tres estudios los desarrollamos a partir de los mismos objetivos, pero de un estudio a otro fuimos modificando los resultados obtenidos con la intención de mejorarlos. No todas las expectativas se cumplieron, conforme podemos observar en la discusión que sigue que está basada en los resultados del Estudio 3, pues los resultados de los otros dos estudios los presentamos en secciones anteriores.

Propusimos que los alumnos trabajaran en parejas para que pudieran interactuar, discutir resultados, ideas y fomentar el aprendizaje. En todos los instrumentos utilizados los datos comprueban que los alumnos consideraron este factor positivo. Por ejemplo, 44 alumnos de los 54 que respondieron al cuestionario aplicado (sección 5.5.3.2) afirmaron que las actividades en grupo fueron productivas y 49 alumnos se consideraron muy participativos en el grupo de trabajo. En las entrevistas destacaron la importancia de trabajar por pareja, pues favorece el debate y el intercambio de ideas. Veamos aquí algunos testimonios:

> *"Me gusta, me gusta trabajar en parejas, porque se discute bastante, algunas veces piensas algo y tu pareja te ayuda.."* (A32)

> **"***Me parece interesante porque cada uno tiene un conocimiento diferente del otro, una idea diferente del otro sobre la pregunta, algunas veces una persona conoce algo, y la otra persona sabe sobre otra cosa. Entonces, intercambias ideas, conocimientos. Yo pienso que al final es válido."*(A10)

Abordamos el contenido de forma contextualizada a través de situaciones-problema y los alumnos afirmaron que era interesante ver dónde el contenido de las ecuaciones diferenciales era aplicado. De esa forma, tenía más sentido estudiarlo y de ese modo les ayudaba relacionar teoría y práctica. Entre los 54 alumnos que respondieron al cuestionario, 33 alumnos consideraron que conseguiron establecer relaciones entre las ecuaciones diferenciales y otros contenidos estudiados y 35 alumnos consideraron que el contenido era pertinente para su formación. Estas cifras son muy satisfactorias, ya que la mayor queja de los alumnos a lo largo de la historia de esta asignatura es exactamente la cuestión referente a la percepción de la importancia del contenido. Las entrevistas también comprueban que los alumnos percibieron la importancia del contenido de las ecuaciones diferenciales. Veamos aquí algunos testimonios:

> "*Pero pienso que seguramente es importantísimo en la carrera. Aquella pregunta acerca de la despolución. Porque tú siempre vas a tener una tasa que está entrando. Una tasa que está saliendo. Realmente va a ser muy utilizado*". (A10)

.

> *"Sí claro, pero claro que sirve, eso yo quería señalar. Los ejemplos prácticos que usted nos dio, pienso que es la mejor parte. La tasa de variación. Entonces, en las ecuaciones diferenciales, los ejemplos prácticos yo pienso que es lo mejor que hay de mejor puedes enseñarnos."*(A51)

> *"¿Qué ocurrió con las guías? El grupo puso la teoría y la práctica juntas, que es lo que vamos a necesitar en nuestra profesión. Sólo había teoría, teoría, teoría y nada práctico, eso facilitó tanto para entender como ahora proceder para resolver un problema de ese tipo. Yo estaba acostumbrado a realizarlo siempre de una forma mecánica, calculaba, calculaba y cuando necesitaba usarlo no sabía cómo hacerlo." (A16¨)*

Trabajamos el contenido con abordaje gráfico, analítico y numérico. Los alumnos incluso consideraron interesante, pero se preocupaban mucho más por la solución analítica. Además, afirmaron que en nuestro abordaje dedicábamos poco tiempo a la solución analítica y que no se sentían cómodos. Este resultado está en consonancia con los resultados presentados por los autores de los trabajos analizados en el capítulo 2, que justifican que esta preocupación de los alumnos era proveniente del hecho de que estaban acostumbrados a trabajar prácticamente sólo con la forma analítica, especialmente en las clases de Cálculo Diferencial e Integral. Aquí hay algunos testimonios:

> **"***Yo prefiero entender de una forma, claro entiendo en el computador todo, pero me gusta realizar cálculos a mano, me gusta calcular!…"(A32)*

> *"Cuando estábamos en el computador, realizábamos la parte aplicada, pero, sabía bien qué estaba haciendo, no tenía una fórmula, no tenía nada que sirviera como referencia, entonces, era posible realizarlo haciendo uso del powersim, y después en el aula, veías una fórmula de lo que se había realizado en el powersim."(A59)*

La metodología utilizada en el aula exigía de los alumnos una participación muy activa, a través de cuestionamientos instigantes que les exigían interpretación y no una resolución mecánica.. Los alumnos no aprobaron esta metodología, pues en el cuestionario sólo 22 de los 54 alumnos consideraron que la metodología favoreció al aprendizaje y 26 alumnos afirmaron que el contenido les fue presentado de forma clara. De hecho, algunos alumnos cuestionaron la metodología, pues, de un lado, algunos dijeron que no conseguían aprender así, necesitaban que el profesor les explicara en la pizarra e hicieran ejercicios repetitivos, por otro lado, otros afirmaron que era una forma interesante de trabajo, quizás sea la ideal, pero a que no estaban acostumbrados, les exigía habilidades que nunca habían sido exploradas. Algunos alumnos argumentaron que todas las actividades era algo nuevo y se sentían falta de ejercicios "repetitivos", a los que están acostumbrados, creían que esta era la forma de aprender. También, se refirieron a la falta de clase expositiva en la pizarra, en que la profesora explica el contenido, hace varios ejemplos e inmediatamente después los alumnos los ejercitan. Veamos aquí algunos testimonios:

> "*Pero pienso que el contenido tiene que ser explicado en la pizarra. Y debe ser muy bien explicado con muchos ejemplos, cuando tú deseas estudiar, tú tienes cómo volver al cuaderno y tener una solución, pienso que es más o menos eso."(*(A10)
>
> *"Ah, los compañeros son comodones, quieren repetición, y quieren que lo que estudian sea igual en el test . Cuando hay un profesor que propone cosas diferentes y exige mucho, a los estudiantes no les gusta, pero, sinceramente, creo que les gusta, pues aprenden más. "*(A16)
>
> *"No nos centramos tanto en las técnicas, el enfoque fue en la interpretación, las técnicas no tuvieron ese enfoque como se tenía en otras épocas, en otras asignaturas. Pero eso con seguridad es un punto positivo, ... es que hasta ahora yo nunca había hecho eso. Siempre trabajo con el resultado y con respuestas, con formas de resolver que llegaba a una determinada respuesta, a una determinada respuesta afirmativa. Si alguien te decía que estaba correcta, estaba incorrecta o si había respuesta en el libro. tengo bastante dificultad En los problemas, algunas veces es distinguir eso"*.(A49)
>
> *"... no si se en función de la cantidad del contenido que nosotros teniamos o no... tenia poco ejercicio, ...tal vez por eso que yo me senti tan perdido en esta asignatura, la señora no iria para el tablero a explicar y realizar varios ejercicios iguales..."* (A59)

En cuanto a la utilización de los recursos computacionales en el aula, los alumnos tienen puntos de vista diferentes. Veintiséis alumnos destacaron que el *software* ayudó al aprendizaje y en la entrevista afirmaron que les facilitaba la visualización, les permitía hacer simulaciones, les permitía vincular la teoría con la práctica y les ayudaba con la interpretación. Pero también es importante señalar que la principal preocupación de la mayoría de los alumnos es por la resolución analítica y como este *software* no ayuda en esta tarea, no consideraron su uso importante. Muchos alumnos sólo consideraron que estaban estudiando las ecuaciones diferenciales cuando las resolvían analíticamente, una vez más señala el poder atribuido a una solución analítica en comparación con la gráfica y/o numérica. Aquí están algunos testimonios favorables y otros desfavorables.

> *"Sí, yo pienso que sí, a visualizar las cosas, las variaciones, los límites, los crecimientos,"* (A8)

> **"***No lo sé, el Cálculo III fue un poco diferente, porque el grupo nunca ha trabajado con cálculo en el laboratorio, yo, por lo menos, nunca he trabajado con cálculo en el laboratorio y a mí me ha gustado. Yo entendí, entendí en la práctica…me gusta trabajar así, me gusta visualizar, entender para que sirve aquello. Entiendo mejor cuando se asocia con la práctica.."*(A32)

> **"***Nos ayudó a tener una noción de la práctica, porque son situaciones que vamos a encontrar en nuestro día a día.¿ Qué ocurrió con las guías? El grupo puso la teoría y la práctica juntas, que es lo que vamos a necesitar en nuestra profesión. Sólo había teoría, teoría, teoría y nada práctico, eso facilitó nuestra profesión.***"**(A16)

> *"Ah, el Powersim me pareció práctico, muy fácil, con él se visualiza muy bien. Me pareció que al montar un problema en él, yo lo comprendía mejor de lo que si lo realizara en un papel. Las constantes, las entradas las salidas, ésas conseguía visualizarlas mejor que si estuvieran sólo en el papel y tuviera que buscar todas aquellas informaciones…Después que aprendí a montarlo siempre es igual*". (A49)

> ***"****La cuestión en el ordenador es interesante, pero para resolver eso aquí, para mí, en el ordenador no interfirió en nada. De repente para otros ya cambia. Pero pienso que el contenido tiene que ser explicado en la pizarra. Y debe ser muy bien explicado con muchos ejemplos, cuando tú deseas estudiar, tú tienes cómo volver al cuaderno y tener una solución, pienso que es más o menos eso."*(A10)

"yo diria que para las ecuaciones difrenciales yo pienso que no. Por ejemplo si necesitar calcular alguna cosa yo sabria usar el powersim para de el dar una información que yo necesito, pero ver un grafico identificar una ecuación diferencial. Traducir eso a una formula, esas cosas no. Con una situación aplicada, el ayudo bastante, porque yo puedo entender una situación culaquiera, identificar entradas y salidas y yo conseguiria llegar a una solución de un problema aplicado. Pero antes del calculo III yo no lo tenia, como es que lo voy a decir,calculo eran solo formulas. Yo siempre aplicaba, realizaba una relación con una formula, con un problema, y ahora estaba teniendo una aplicación practica por eso intentaba asociar las cosas con los otros calculos queriendo las formulas y las cosas no irian, pero problamente era un error hacer eso."(A59)

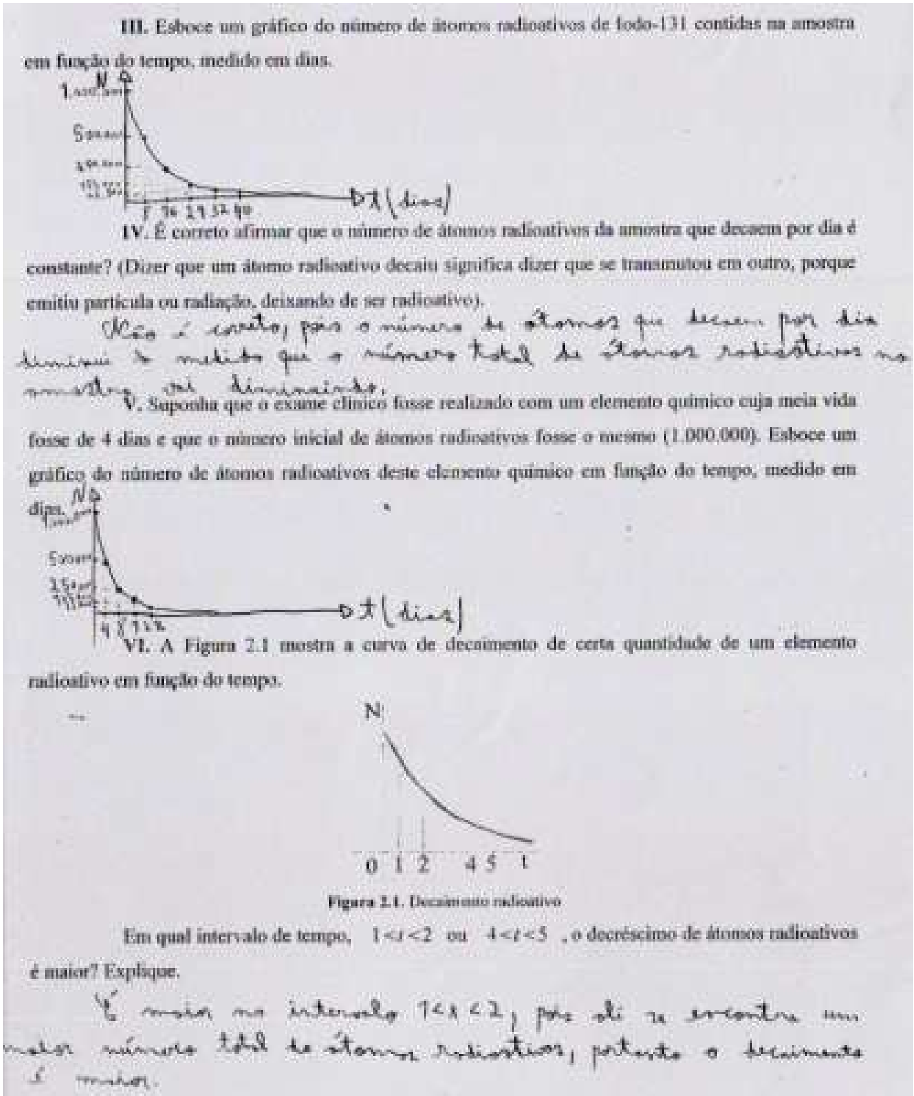
En resumen, podemos decir que nuestro principal objetivo era ayudar a los alumnos a obtener un aprendizaje significativo de las ecuaciones diferenciales, para ello llevamos a cabo actividades por pareja, usamos la metodología inversa, exigimos una participación más activa de los alumnos, trabajamos de una forma más contextualizada, elaboramos materiales de instrucción e investimos en el uso de recursos computaciones.

En términos de aprendizaje significativo, podemos afirmar que los resultados de el test final de conocimientos aplicados en el Estudio 3 no fueron tan satisfactorios como se esperaba, y una de las razones destacada por los alumnos fue la cantidad de preguntas en el test que hizo que su resolución se volviera agotadora. Pensabámos que los alumnos elegirían una alternativa para las cuestiones de el test utilizando diversas estrategias para resolverlas, pero eso no ocurrió, pues en todas las cuestiones en que aparecía una ecuación el primer intento era resolverla analíticamente, y de este modo, el test se volvió larga. Este hecho puede ser demostrado con pruebas de la entrevista, veamos algunas:

***"**Pienso que la mitad la resolví, y no dio más tiempo. Porque algunas veces se demora mucho en la parte de la interpretación y entonces uno se queda allí comparando y de ahí uno no consigue más calcular todo… pero esa, no necesitaba calcularla, era sólo sustituir los valores, no me di cuenta y comencé a resolverla…0 y es igual a 8 y x es 0, entonces es posible eliminar la (b) y la (d). No lo sé, tengo miedo de sustituir un número, r, pienso que está equivocado."*(A16)

***"**¡Verdad!, dios mío, pero hace veinte años que yo sabía de una manera, ahora en un semestre, eso fue un choque. Imposible acostumbrarse a eso. Claro, ahora puedo ver que interpretando se llega a mucha cosa, no siempre todo se obtiene calculando. Hay muchas otras opciones de trabajar, de estudiar las Matemáticas que no es sólo calculando. Todo eso* *aquí fue un choque para mí, por lo menos en las primeras clases estaba nerviosa. No sabía cómo estudiaría eso aquí.*."(A49)

A pesar de los resultados de el test no haber sido tan satisfactorios, a partir del análisis de guías (Anexo 2), creemos tener indicios de un aprendizaje significativo sobre el contenido de las ecuaciones diferenciales. Veamos algunas de las actividades llevadas a cabo por los alumnos.



III. Esboce um gráfico do número de átomos radioativos de Iodo-131 contidas na amostra em função do tempo, medido em dias.

IV. É correto afirmar que o número de átomos radioativos da amostra que decaem por dia é constante? (Dizer que um átomo radioativo decaiu significa dizer que se transmutou em outro, porque emitiu partícula ou radiação, deixando de ser radioativo).

Não é correto, pois o número de átomos que decaem por dia diminui à medida que o número total de átomos radioativos na amostra vai diminuindo.

V. Suponha que o exame clínico fosse realizado com um elemento químico cuja meia vida fosse de 4 dias e que o número inicial de átomos radioativos fosse o mesmo (1.000.000). Esboce um gráfico do número de átomos radioativos deste elemento químico em função do tempo, medido em dias.

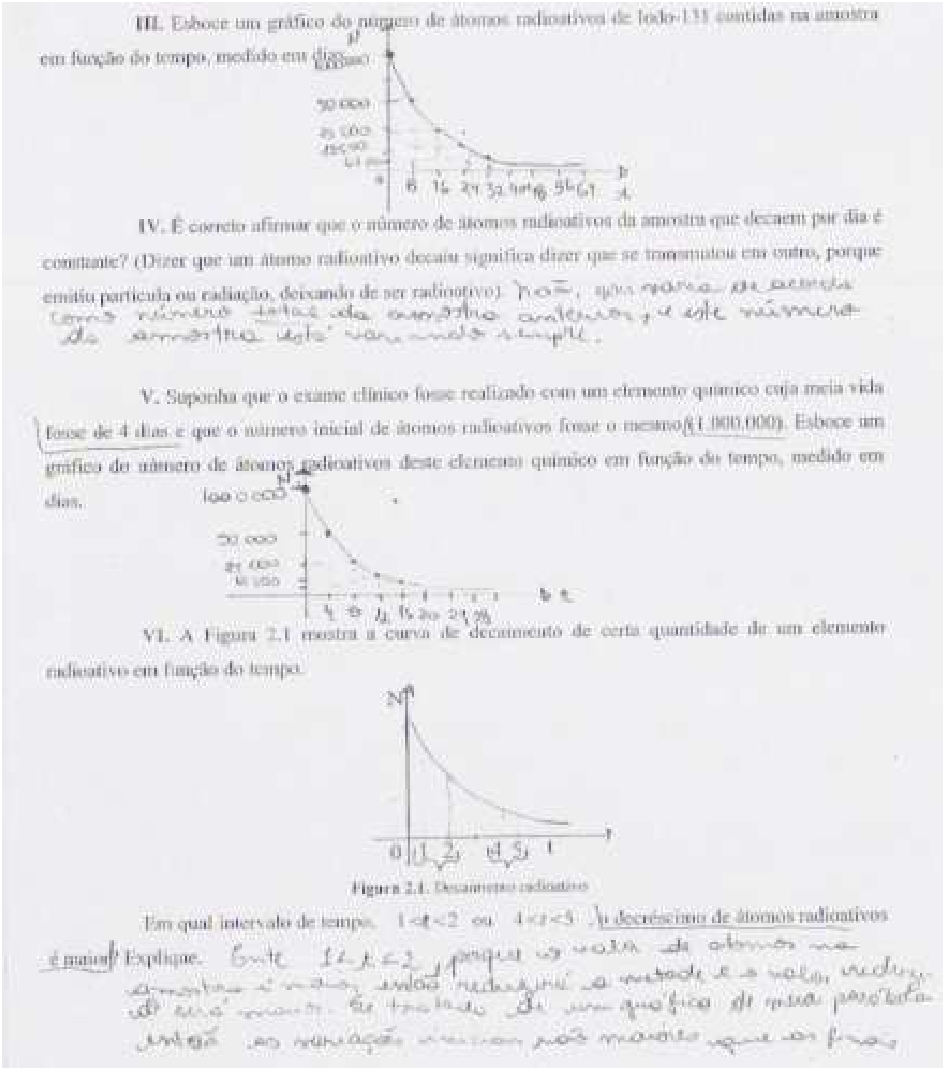
VI. A Figura 2.1 mostra a curva de decaimento de certa quantidade de um elemento radioativo em função do tempo.

Figura 2.1. Decaimento radioativo

Em qual intervalo de tempo, $1<t<2$ ou $4<t<5$, o decréscimo de átomos radioativos é maior? Explique.

É maior no intervalo $1<t<2$, pois ali se encontra um maior número total de átomos radioativos, portanto o decaimento é maior.

Figura 5.1 – Actividades desarolladas por el alumno A8.



III. Esboce um gráfico do número de átomos radioativos de Iodo-131 contidas na amostra em função do tempo, medido em dias.

IV. É correto afirmar que o número de átomos radioativos da amostra que decaem por dia é constante? (Dizer que um átomo radioativo decaiu significa dizer que se transmutou em outro, porque emitiu partícula ou radiação, deixando de ser radioativo).

V. Suponha que o exame clínico fosse realizado com um elemento químico cuja meia vida fosse de 4 dias e que o número inicial de átomos radioativos fosse o mesmo (1 000 000). Esboce um gráfico do número de átomos radioativos deste elemento químico em função do tempo, medido em dias.

VI. A Figura 2.1 mostra a curva de decaimento de certa quantidade de um elemento radioativo em função do tempo.

Figura 2.1. Decaimento radioativo

Em qual intervalo de tempo, $1<t<2$ ou $4<t<5$, o decréscimo de átomos radioativos é maior? Explique.

Figura 5.2 – Actividades desarolladas por los alumnos A16 y A24.

Mediante el análisis del material la guía de las actividades 1 pudimos percibir que la mayoría de los alumnos logró interpretar la situación-problema que involucra media vida, abordando las nociones intuitivas de ecuaciones diferenciales, la tasa de variación y la construcción del gráfico correspondiente, como podemos observar en las Figuras 5.1 y 5.2.

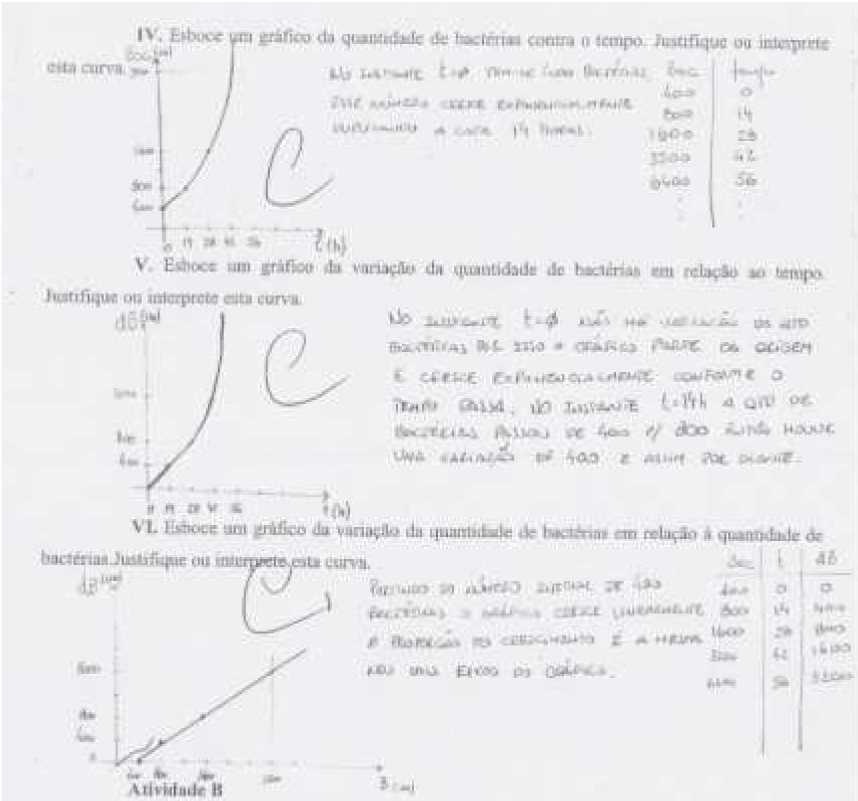


Figura 5.3 – Aticvidades desarolladas por los alumnos A32 e A33.

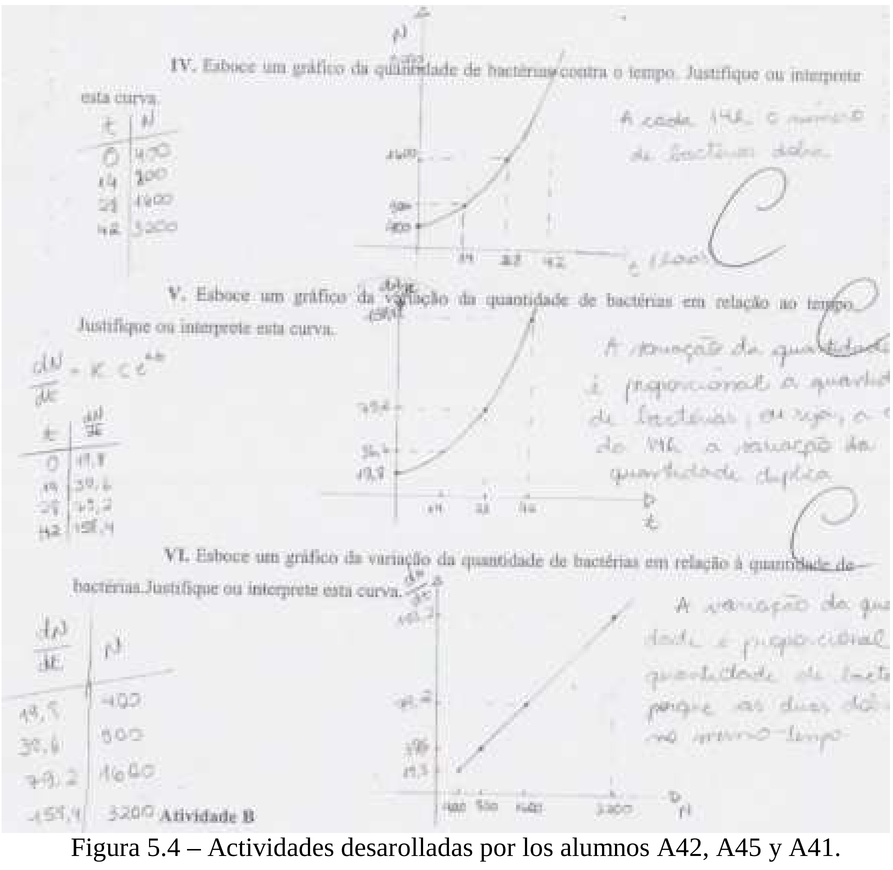


Figura 5.4 – Actividades desarolladas por los alumnos A42, A45 y A41.

Analizando las respuestas de los alumnos a las preguntas de la guía 3, pudimos percibir que estaban consiguiendo esbozar gráficos de función-solución y de la tasa de variación y resolver analíticamente las ecuaciones diferenciales, pero durante el proceso de solución de algunos presentaron errores de cálculo. Cabe destacar que los alumnos las resolvieron por pareja, sin la ayuda de la profesora para interpretar la situación-problema o resolver las ecuaciones involucradas. Los alumnos fueron capaces de diferenciar solución general de solución particular, aunque algunos no escribieron correctamente la solución particular. A partir de la posesión de la solución particular el alumnado realizaba los cálculos para diferentes valores de t (tiempo).

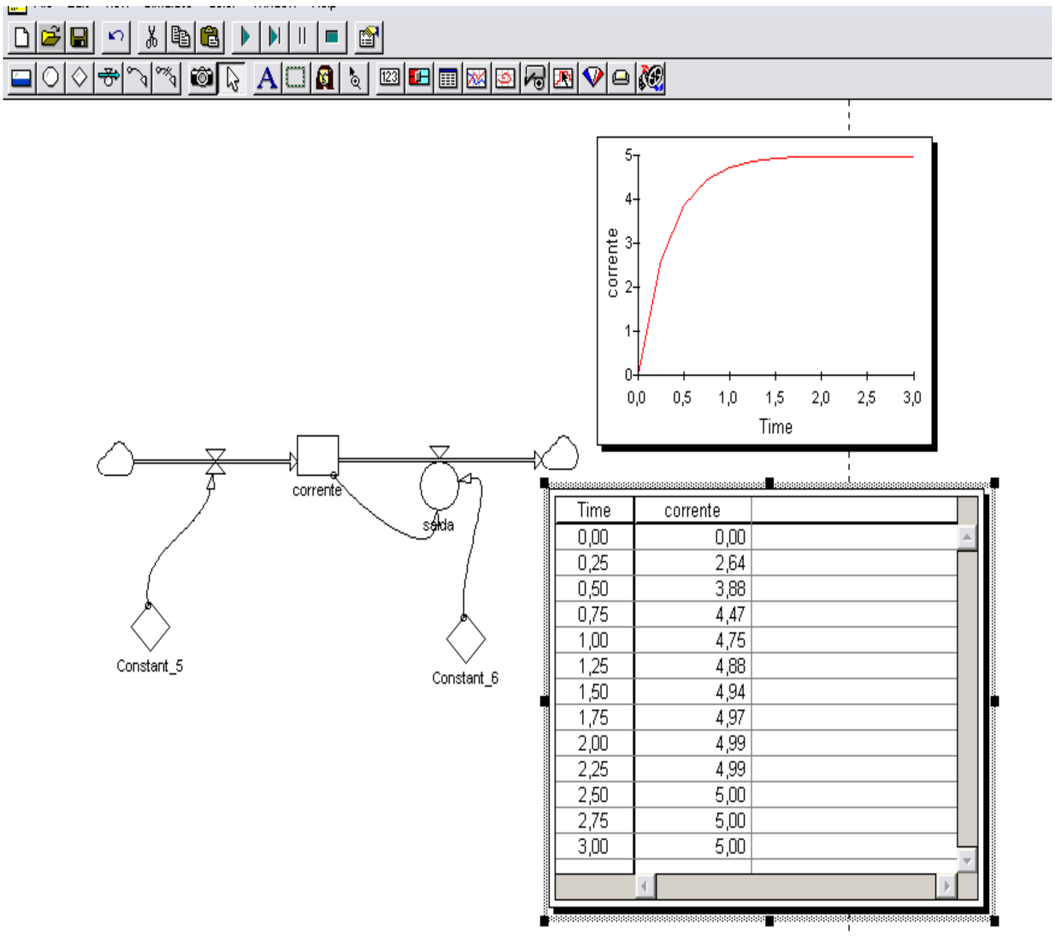


Figura 5.5 – Actividade desarollada por los alumnos A16 y A24.

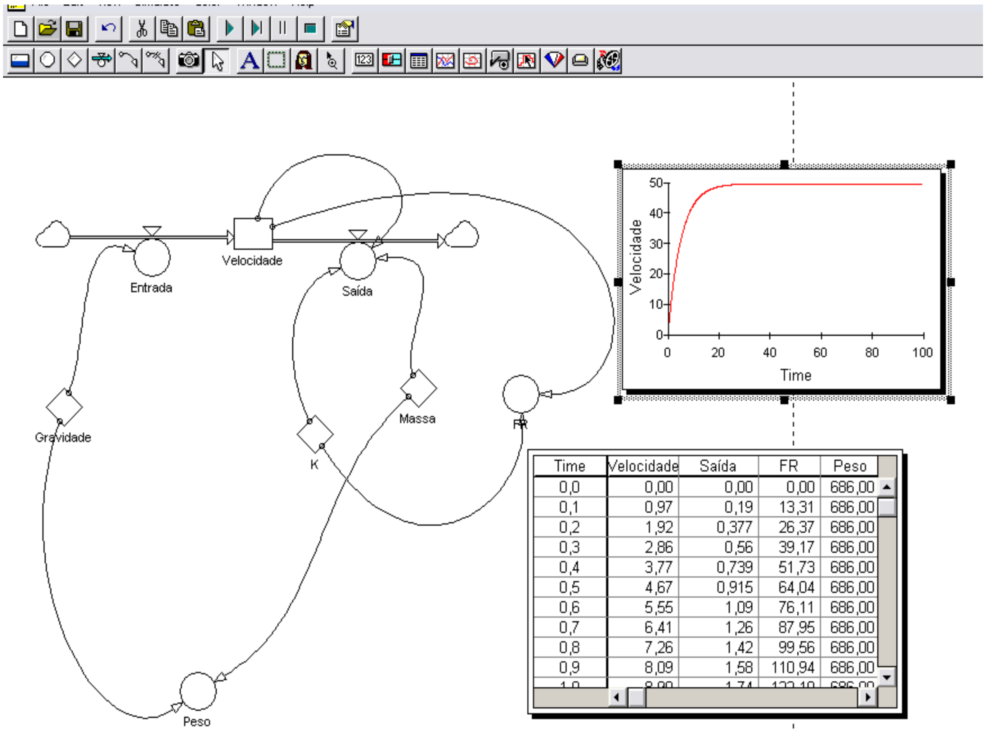
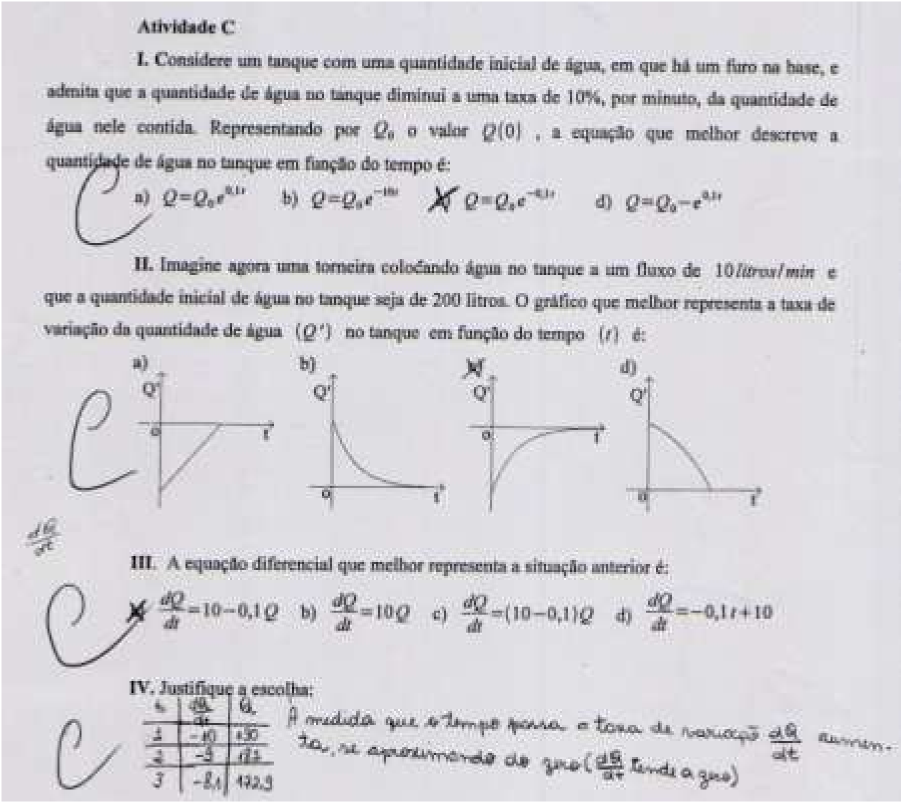


Figura 5.6 – Actividade desarollada por los alumnos A32 y A33.

En los materiales con respecto a esta guía de actividades queremos poner de relieve la creatividad de los alumnos en la construcción de modelos en el Powersim. La mayor dificultad para algunos alumnos fue en relación a la situación de los circuitos, porque no era un tema familiar para ellos.

En las Figuras 5.7 y 5.8 podemos percibir que los alumnos consiguen asociar la ecuación diferencial a una situación-problema, así como a su solución analítica. Asimismo podemos observar las diferentes maneras que los alumnos usaron para justificar sus respuestas. Destacamos que en la cuestión IV la justificación utilizada por los alumnos A16 y A24 estaba basada en las construcciones realizadas en el Powersim, pues la asociaron a entradas y salidas.


Atividade C

I. Considere um tanque com uma quantidade inicial de água, em que há um furo na base, e admita que a quantidade de água no tanque diminui a uma taxa de 10%, por minuto, da quantidade de água nele contida. Representando por Q_0 o valor $Q(0)$, a equação que melhor descreve a quantidade de água no tanque em função do tempo é:

C

a) $Q=Q_0e^{0,1t}$ b) $Q=Q_0e^{-10t}$ c) $Q=Q_0e^{-0,1t}$ d) $Q=Q_0-e^{0,1t}$

II. Imagine agora uma torneira colocando água no tanque a um fluxo de $10\,litros/min$ e que a quantidade inicial de água no tanque seja de 200 litros. O gráfico que melhor representa a taxa de variação da quantidade de água (Q') no tanque em função do tempo (t) é:

C

a) b) c) d)

$\frac{dQ}{dt}$

III. A equação diferencial que melhor representa a situação anterior é:

C

a) $\frac{dQ}{dt}=10-0,1Q$ b) $\frac{dQ}{dt}=10Q$ c) $\frac{dQ}{dt}=(10-0,1)Q$ d) $\frac{dQ}{dt}=-0,1t+10$

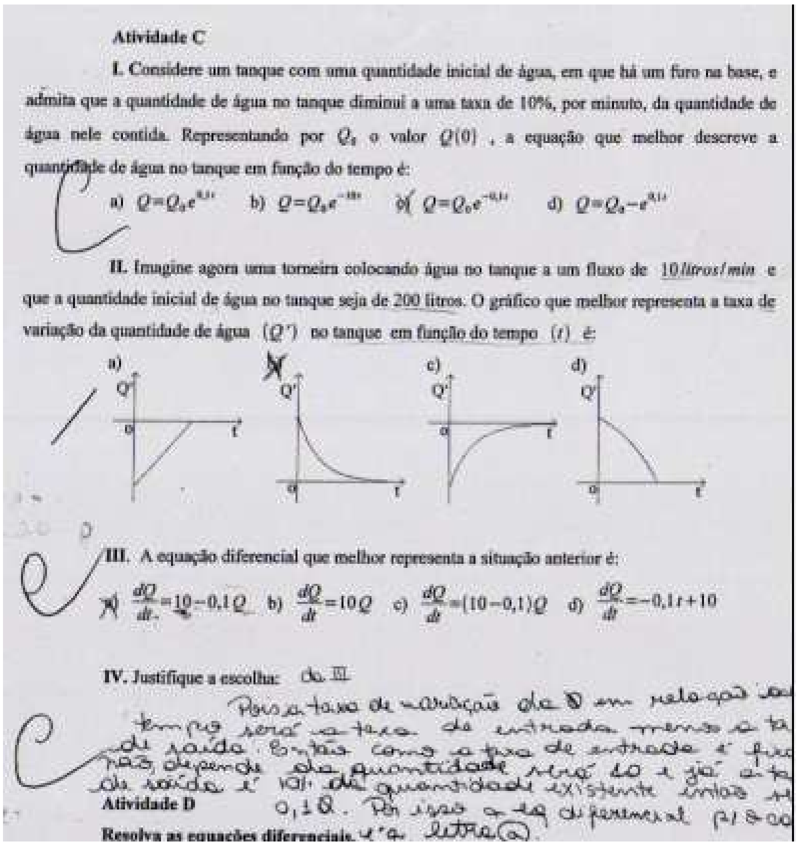
IV. Justifique a escolha:

C

t	$\frac{dQ}{dt}$	Q
1	-10	190
2	-9	181
3	-8,1	172,9

A medida que o tempo passa a taxa de variação $\frac{dQ}{dt}$ aumenta, se aproximando de zero ($\frac{dQ}{dt}$ tende a zero)

Figura 5.7 – Avtividades desarolhadas por los alumnos A17 y A49.


Atividade C

I. Considere um tanque com uma quantidade inicial de água, em que há um furo na base, e admita que a quantidade de água no tanque diminui a uma taxa de 10%, por minuto, da quantidade de água nele contida. Representando por Q_0 o valor $Q(0)$, a equação que melhor descreve a quantidade de água no tanque em função do tempo é:

C

a) $Q=Q_0e^{0,1t}$ b) $Q=Q_0e^{-10t}$ c) $Q=Q_0e^{-0,1t}$ d) $Q=Q_0-e^{0,1t}$

II. Imagine agora uma torneira colocando água no tanque a um fluxo de $10\,litros/min$ e que a quantidade inicial de água no tanque seja de 200 litros. O gráfico que melhor representa a taxa de variação da quantidade de água (Q') no tanque em função do tempo (t) é:

a) b) c) d)

III. A equação diferencial que melhor representa a situação anterior é:

C

a) $\frac{dQ}{dt}=10-0,1Q$ b) $\frac{dQ}{dt}=10Q$ c) $\frac{dQ}{dt}=(10-0,1)Q$ d) $\frac{dQ}{dt}=-0,1t+10$

IV. Justifique a escolha: da III

C

Pois a taxa de variação de Q em relação ao tempo será a taxa de entrada menos a taxa de saída. Então como a taxa de entrada é fixa não depende da quantidade será 10 e já a taxa de saída é 10% da quantidade existente então será 0,1Q. Por isso a eq diferencial p/ o caso é a letra (a).

Atividade D

Resolva as equações diferenciais.

Figura 5.8 – Actividades desarolhadas pos los alumnos A16 y A24.

Los resultados no atendieron a todas nuestras expectativas principalmente debido al hecho de que muchos alumnos no se han adaptado a la metodología. La encontraron muy difícil porque no estaban acostumbrados y no sabían trabajar de la manera propuesta. Subrayaron que ésta que era una metodología interesante, pero en su opinión también debería ser trabajada en otras asignaturas de Cálculo para que los alumnos pudieran adaptarse poco a pocos. A otros no les gustó la metodología porque les exigía una acción muy activa (no podía perder clases, no podía salir temprano, y había la necesidad de trabajar durante toda la clase). Otro punto destacado por los alumnos fue en relación al hecho de que las actividades eran realizadas sin un modelo, todos los ejercicios requerían interpretación y sentían falta de respuestas listas. Veamos aquí algunos testimonios.

> *"Bueno, en los otros cálculos nos no nos exigieron mucho, por eso muchas personas se desesperaron en la materia de Cálculo III, porque tenían que trabajar mucho, nos exigía mucho. Yo comencé a estudiar por mí mismo, no me pareció tan difícil. Pienso que es un aspecto muy positivo de esa asignatura, usamos bastante otras metodologías, como el ordenador".*(A8)

> ***"****No nos centramos tanto en las técnicas, el enfoque fue en la interpretación, las técnicas no tuvieron ese enfoque como se tenía en otras épocas, en otras asignaturas. Pero eso con seguridad es un punto positivo, usted comentó que había otras técnicas de solución.*"(A51)

> *"Eso ocurre desde el cálculo I. Yo pienso que ese método es bien interesante, eso debería ser aplicado desde el cálculo I, II y III. Porque pienso que los alumnos obtendrían un mayor conocimiento. Pienso que en nuestro grupo, aunque haya sido sólo un semestre, tendrá más conocimientos que en los semestres anteriores en la parte práctica"*(A16)

> *"... o si todos estuviesen acostumbrados a ese tipo de trabajo tiempo atrás, irían a estudiar más por cuenta propia. Porque algo que yo vi, por ejemplo, algunas cosas que no se exigieron para nosotros en el calculo I y no II que es, por ejemplo la derivación y la integración de exponenciales y otras un poco mas complicadas, fue exhaustivo en el III. Entonces, no es que este errado, pero así tu vienes de una línea de trabajo, derivando integrando un tipo de cosa. Nosotros nos esforzamos para la comprensión de la materia, tu cambiaste un poco de aquello que la gente estaba acostumbrado a realizar y eso dificulto. Si se hubiese seguido la misma línea, pienso que se habría facilitado. Tu estabas haciendo una cosa para intentar cambiar el método de enseñanza, si se estuviese viendo desde el I habría sido mas fácil, pero en la verdad como no veo, la gente venia de una línea, de ahí en el III eso cambio y eso dificulto la asignatura."*(A59)

También podríamos pensar que los materiales producidos y utilizados no son potencialmente significativos para el aprendizaje de ecuaciones diferenciales, sin embargo, durante el segundo semestre de 2007, en el curso de Licenciatura en Ciencias Exactas utilizamos el mismo material, pues como estos alumnos ya están acostumbrados a las metodologías de los trabajos que requieren una participación más activa en el proceso de construcción de los conocimientos no tuvieron dificultades en la realización de las tareas, o cuando surgían las dificultades sabían buscar ayuda para encontrar una solución.

Con estos alumnos trabajamos con similar metodología a de los Estudios 1, 2 y 3, explorando los mismos materiales y utilizando el *software* Powersim. Cabe señalar que en este grupo obtuvimos una nota buena en la evaluación institucional[16] (Tabla 5.34) y como profesora de esta asignatura, obtuve el mayor promedio de todos los profesores que imparten asignaturas en el curso de Ciencias Exactas, en el segundo semestre de 2007, conforme en la Tabla 5.35. En esta Tabla somos el Profesor 1 y de los demás profesores mantuvimos el anonimato. Además, en esta asignatura obtuve la mejor evaluación de todas las otras asignaturas que impartí en el semestre, conforme en la Tabla 5.36. En la evaluación institucional los alumnos voluntariamente rellenaron la ficha, eligieron las alternativas de la A a la E. Para calcular los promedios, las alternativas de las respuestas se convierten en números en una escala de 1 a 5, en la que "A" es igual a 5; "B" la 4; "C" la 3, "D" la 2 y, por último, "E" la 1. No se consideran no respuestas y tampoco "no se puede opinar" (k). Por lo tanto, cuanto más próximo es el promedio de 5, significa una mayor la satisfacción del alumno o que se pone de acuerdo con lo presentado en la afirmativa. Por el contrario, cuanto más próximo es el resultado de 1, representa una menor satisfacción del alumno o que no se pone acuerdo con lo presentado en la alternativa.

16 La evaluación institucional es una herramienta desarrollada por un equipo de profesores de la Univates y está disponible para todos los alumnos de la Graduación para evaluaren la labor de cada docente en las asignaturas que están estudiando y la infraestructura de Univates.

Tabla 5.34 - Opciones elegidas por los alumnos en la evaluación institucional de la asignatura de las Ecuaciones Diferenciales de la Licenciatura en Ciencias Exactas.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*K*
Pregunta 2 - Evaluar el desempeño del profesor	59	29	-	-	-	2
La claridad en la organización y el desarrollo de contenido	7	3	-	-	-	-
La capacidad de hacer ver la importancia de la asignatura es	7	3	-	-	-	-
El uso de fuentes alternativas de conocimiento (la literatura, los medios de comunicación electrónicos, la práctica de observación) se produce	7	3	-	-	-	-
La disposición para aclarar las preguntas presentadas por los alumnos se produce	9	1	-	-	-	-
La apertura del debate acerca de cómo actuar en la asignatura es	5	5	-	-	-	-
La claridad y la adecuación de los criterios de evaluación son	6	4	-	-	-	-
El uso de los resultados de la evaluación para mejorar el aprendizaje es	5	3	-	-	-	2
La actitud y ética de trabajo es	6	4	-	-	-	-
La enseñanza en general es	7	3	-	-	-	-

Tabla 5.35- Promedio y desviación patrón de los profesores en el curso de Licenciatura en Ciencias Exactas, obtenidas en la evaluación institucional en segundo semestre de 2007.

Profesor	*Promedio*	*Desviación patrón*
Profesor 1	**4,62**	**0,51**
Profesor 2	4,13	0,85
Profesor 3	4,07	0,96
Profesor 4	3,82	0,73
Profesor 5	4,08	0,90
Profesor 6	4,03	0,73
Profesor 7	4,50	0,63
Profesor 8	4,15	0,83
Profesor 9	4,39	0,66
Profesor 10	3,96	0,84
Profesor 11	3,74	0,89

Tabla 5.36 – Evaluación de las asignaturas impartidas en segundo semestre de 2007.

	Promedio en las asignaturas			
	Álgebra Lineal y Geometría Analítica (mañana)	***Álgebra Lineal y Geometría Analítica (noche)***	***Fundamentos de la Matemática***	***Equaciones Diferenciale s***
El desempeño del profesor	4,32	3,93	4,13	4,67
La planificación de las clases es	4,18	4,5	4,17	4,6
La claridad en la organización y el desarrollo de contenido es	4,25	4,1	4,17	4,7
La capacidad de hacer ver la importancia de la asignatura es	4,58	3,66	4,33	4,7
La criación de situaciones de eneñanza a partir de los conocimientos de los alumnos (su vivência, sus idéias y su experiência) se produce	3,67	3,79	3,33	4,7
El uso de fuentes alternativas de conocimiento (la literatura, los medios de comunicación electrónicos, la práctica de observación) se produce	3,58	3,31	3,45	4,7
La disposición para aclarar las preguntas presentadas por los alumnos se produce	4,83	4	4,5	4,9
La apertura del debate acerca de cómo actuar en la asignatura es	4,2	3,62	3,91	4,5
La claridad y la adecuación de los criterios de evaluación son	4,58	4,28	4,5	4,6
El uso de los resultados de la evaluación para mejorar el aprendizaje es	4,43	3,72	4,2	4,63
La actitud y ética de trabajo es	4,58	4,31	4,58	4,6
La enseñanza en general es	4,3	4,21	4,27	4,7

También en la asignatura de Tópicos Avanzados en Matemáticas del Programa de Master en Ciencia, trabajamos seis turnos, 4 horas cada clase, explorando el contenido de las ecuaciones diferenciales. Utilizamos algunos de los materiales y desarrollamos algunas de las actividades, conforme presentamos en la Tabla 5.37.

Tabla 5.37 - Breve descripción de las actividades con los alumnos de la Maestría en Enseñanza de Ciencias.

Clase	***Fecha***	***Calendario de Actividades***
1	17/05/08	Exploramos la familiaridad con el *software* Powersim través del estudio de la situación problema que involucra a un tanque de agua, donde hay un agujero donde se puede salir y un grifo de agua para llenar, los alumnos tendrían que investigar el comportamiento de nivel de agua en el tanque contra el tiempo y la tasa de entrada y salida de agua en el tanque. También se debatió el comportamiento de la solución en forma gráfica.
2	23/05/08	Introducimos el contenido de EDOs con una situación-problema con un estado de desintegración radiactiva y su asociación con la correspondiente ecuación diferencial y exploramos el concepto de vida media. Discutimos otros modelos exponenciales y una situación de la caída de cuerpos, siempre buscando incorporarse a la ecuación y su solución numérica y en la forma gráfica, utilizando el Powersim.
3	24/05/08	Exploramos la técnica analítica de EDOs separables y lineales de primer orden relacionados con las situaciones-problemas que ya han estudiado en las clases anteriores.
4	30/05/08	Exploramos la situación-problema con la ley de enfriamiento de Newton y de los problemas de mezcla. Usando el Powersim introducimos el EDOs de segundo orden con una situación de la caída de cuerpos explorando su posición en función del tiempo.
5	31/05/08	Exploramos la técnica analítica de EDOs lineales de segundo orden no homogéneas y homogénea.
6	06/06/08	Abordamos el Método de Euler EDOs del primer y segundo orden usando la Planilla de Cálculo de la OpenOffice.

Esta clase era compuesta de 17 alumnos, los cuales aprobaron la metodología de trabajo y los materiales utilizados, como puede verse a partir de las declaraciones que siguen:

> *"Para mí esta asignatura fue muy diferente de lo que esperaba ... El material producido, así como las actividades propuestas fueran excelentes para desarrollar el razonamiento lógico y problemas matemáticos y muestran que las situaciones problemas de las diferentes áreas de conocimiento pueden resolverse matemáticamente. Con el uso del software tuve una mayor claridad y visualización del contenido que se estaba trabajando, ayudando en la interpretación y la comprensión de la misma. Usted enseñanza muy bien, porque sabe eludir situaciones, de modo que los alumnos aprendan de forma clara y objetiva, mostrando los errores y / o corrigiéndolos, eso nos estimular a buscar la forma correcta de la resolución, a saber, la búsqueda de aprendizaje ... En la graduación estudié*

este contenido de una forma tan tradicional, el profesor ponía diferentes tipos de ecuaciones en la pizarra ejemplos, resolvía y daba un batería de ejercicios para resolver en casa ". (Alumno 1 de Master)

"Me gustó mucho el enfoque del asunto, creo que, como profesora tenemos que siempre intentar nuevos enfoques. No conocía el software Powersim con él se pude comprender las entradas, las salidas, las variables, se hicieron más clara". (Alumno 2 de Master)

El compromiso de estos alumnos en el desarrollo de las actividades también ha sido notable, como lo vemos en las actividades llevadas a cabo por un alumno en una escuela (Anexo 3).

Considerando las evidencias presentadas sobre la aceptación del material didáctico y la metodología de trabajo, creemos que podemos descartar los fallos a la estructuración lógica y a la aplicación de los materiales como factores cruciales para explicar por qué los alumnos no muestran resultados satisfactorios como se esperaba en el Estudio 3. No obstante, refuerza la hipótesis de que los alumnos necesitan tiempo para adaptarse a diferentes metodologías de las tradicionales, tanto en lo que respecta al desarrollo de actividades tales como evaluaciones, en que el desarrollo de el test de conocimientos es un ejemplo obvio, pues los alumnos querían calcular todo, haciendo con que su resolución se volviera amplia y agotadora, pero ésta es la forma a que están acostumbrados en las asignaturas de cálculo.

CONSIDERACIONES FINALES

Convencionalmente, el contenido de ecuaciones diferenciales se introduce a partir de la definición, posteriormente, se presentan técnicas de análisis para la resolución y, por último, se abordan algunas aplicaciones, tomadas de los libros de texto. La persistencia de los métodos de enseñanza tradicionales frente a las alternativas más innovadoras se debe a diversas razones, como describe Moreno y Azcárate (1997 y 2003), cuya síntesis presentada en el Capítulo 2, pero las razones que tienen más relevancia, según los autores, es la comodidad de los profesores y la despreocupación por la enseñanza. En general, los profesores prefieren atribuir las responsabilidades del fracaso de la enseñanza a sus alumnos, sus actitudes y su escasa formación matemática.

Somos conscientes de las dificultades presentadas por los alumnos en el aprendizaje de este contenido y la falta de motivación para estudiarlo. Hemos decidido introducir situaciones-problema relacionadas con los cursos de graduación para los cuales se ofrece. A partir de situaciones-problema contextualizadas, a la que los alumnos eran capaces de atribuir algún significado, nos centramos en el comportamiento de las soluciones de las ecuaciones diferenciales, exploradas a través del uso de un recurso computacional, para, posteriormente, presentar las técnicas de obtención de la solución analítica. Tratamos de centrarnos la enseñanza en el alumno y el estimular la interacción alumno-profesor-material-recursos, a fin de mitigar la exposición transmisiva del conocimiento. Entre los varios *softwares* disponibles en la actualidad, hemos optado por Powersim y por la Planilla de Cálculo de OpenOffice, porque permiten al alumno a hacer experimentos conceptuales, simulaciones, construir tablas y gráficos que ayudan en la interpretación de las aplicaciones presentadas. Además, los *softwares* son distribuidos gratuitamente, a los cuales el alumno tiene acceso a través de la *internet*.

En nuestra búsqueda sobre las investigaciones desarrolladas con enfoque en la enseñanza y/o aprendizaje de EDs, percibimos que hay muy pocos estudios que exploran este tema. En el Capítulo 2, presentamos algunas iniciativas que están siendo desarrolladas con el objetivo de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales. Los autores mencionan que algunos de los currículos de EDOs ya han sido modificados y que en algunos libros ya percibimos un intento de cambio en el enfoque de la enseñanza de la EDs, presentando situaciones que requieren una mayor interpretación, pero señalan que pocas investigaciones se hicieron sobre el efecto que este cambio causa en el aprendizaje de los alumnos.

En todos los datos que colectamos, buscamos indicios que permitieran evaluar los cuatro aspectos que fundamentan nuestro trabajo que son: la superación de las dificultades en el aprendizaje de los contenidos de las ecuaciones diferenciales, la contribución de la interacción social en el aprendizaje, la importancia del uso de recursos computacionales y la motivación para aprender generada por estos elementos interrelacionados en el medio ambiente de aula y por la contextualización de los problemas abordados.

En los datos colectados, independientemente del instrumento de colecta, quedó evidente la importancia y la productividad de la realización de las actividades en grupo, pues propiciaba discusiones y comparación de resultados e interpretaciones, permitiendo que los alumnos pueden ir más allá, si están trabajando de forma individual. La participación activa de los alumnos en el proceso educativo, buscando negociar significados con el profesor o interactuando con sus compañeros, con los recursos computacionales y con los materiales, parece haber sido relevante para el aprendizaje significativo. En las discusiones en grupo parecían análisis y conclusiones interesantes, por ejemplo, como una en la que un alumno, después de la construcción interesantes, por ejemplo, tras construir el primer esbozo de un gráfico sobre desintegración radiactiva llegó a la conclusión de que todas las curvas que involucran la vida media tiene la forma de exponenciales decrecientes.

Las actividades exploratorias de simulación también motivaron a los alumnos y los ayudaron a comprender mejor las aplicaciones presentadas, principalmente, por facilitar la visualización y por la agilidad con que suministran los resultados en la variación de parámetros. Eso hacía que los alumnos hicieran muchas simulaciones en un corto período de tiempo De acuerdo con el interés, la curiosidad y la necesidad que sentían a medida que los resultados no parecían satisfactorios. Cabe señalar que los alumnos fueron muy creativos en la construcción de modelos usando el Powersim, conforme podemos observar en el capítulo anterior. Este hecho demuestra que los alumnos estaban comprendiendo la construcción e interpretando la situación involucrada y no simplemente siguiendo mecánicamente las construcciones de la profesora. A pesar de que muchos alumnos han mencionado, en varios instrumentos de colecta de datos, que no habían percibido la importancia de utilizar el ordenador para el aprendizaje de ecuaciones diferenciales, cuando se les pidió que interpretaran situaciones-problema o ecuaciones diferenciales a menudo se referían a la entrada y salida, que es la base de las construcciones realizadas en el Powersim. Otro punto que destacamos es la dificultad de los alumnos para percibir que usando el Powersim también estaban explorando EDOs, y no sólo cuando las resolvían analíticamente. Ellos tienen dificultades para percibir que podemos utilizar abordajes diferentes para explorar el mismo contenido.

Los resultados de este estudio también muestran que los alumnos se quedaron más motivados por el hecho de trabajar con contenidos relacionados con su curso y que los recursos computacionales fueron importantes para la interpretación de las situaciones que involucraban las ecuaciones diferenciales. Observamos que la realización de actividades, que los alumnos utilizaron las simulaciones computacionales para explicarles el contenido a los compañeros y sus dudas el profesor, utilizándolas para externalizar su pensamiento y poner a prueba sus hipótesis.

Señalamos también que las parejas de los alumnos eran siempre muy comprometidas con las realización de tareas, pero, en las primeras clases, sus atenciones estaban centradas ejecutar lo solicitado de un modo mecánico, sin preocuparse por la comprensión del contenido. Como las guías presentaban cuestiones que estimulaban, que difícilmente podrían ser respondida sin una cierta comprensión, inicialmente los alumnos se volvieron ansiosos y muy dependientes de la profesora, les solicitan ayuda a menudo, tratando de asegurarse de que estaban haciéndolas de manera correcta. En esta etapa inicial, los alumnos expresaron su conformidad con el hecho de que la profesora no respondió directamente a las preguntas y con la falta de presentación previa de un modelo de una resolución que debería ser seguido. Después de la insistencia de la profesora y con la realización de las actividades, pudimos observar más confianza y entusiasmo de los alumnos en la realización de sus tareas. Sin embargo, notamos la dificultad de los alumnos con la metodología utilizada en la asignatura, que les exigía u comportamiento más activo y más interpretación,pues subrayaron que no estaban acostumbrados a esta fora de trabajo, pues el profesor suele explicar el contenido y, por tanto, a partir de ahí resulven los ejercicios similares a los desarrollados en la pizarra. Incluso entre los alumnos existe la iconcepción de que para aprender es necesario hacer muchos ejercicios repetitivos. Otros alumnos señalaron que consideraron la metodología importante, quizás sea la metodología ideal, pero debería ser adoptada en otras asignaturas, para que el alumno pudiera adaptarse a ella y desarrollara poco a poco la capacidad de interpretación, que nunca había sido explorado hasta el momento.

Cabe destacar que una concepción muy fuerte entre los alumnos es que las soluciones presentadas deben ser calculadas "exactamente". Cuando se le pidió alguna estimativa que no requería ningún cálculo, sino sólo una interpretación, los alumnos, en su mayoría, no ponían sólo la respuesta sin que hubiera un cálculo que la sostuviera. Por ejemplo, en las guías de las actividades 1, no aparecía forma analítica de ecuación diferencial y/o su solución, pero los alumnos insistieron en calcular las respuestas de las preguntas solicitadas. Del mismo modo, muchos alumnos no se sentían seguros en basarse en las respuestas dadas por el ordenador.

Percibimos que los alumnos siguen presentando dificultades para resolver analíticamente una ecuación diferencial debido a los errores cometidos en los cálculos que involucran las matemáticas elementales y cálculo diferencial e integral, pero podemos afirmar que en su mayoría consiguen resolver analíticamente las ecuaciones diferenciales ordinarias numéricamente a coeficientes constantes, y discutir su solución a partir de una ecuación dada la ayuda de recursos computacionales, más concretamente, el *softwar*e Powersim. También creemos haber motivado a los alumnos para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, no exigiéndolos los cálculos que consideran aburridos, al centrar las clases en la evaluación cualitativa de las soluciones de las ecuaciones diferenciales, presentadas y en su resolución numérica, con la ayuda de recursos computacionales, proporcionando así mejores condiciones para un aprendizaje significativo.

Es posible concluir que las actividades computacionales motivaron a los alumnos a aprender y facilitaron la visualización y resolución numérica de las situaciones problemáticas, sin embargo, no pareció ser suficiente para los alumnos sentirse bien y preparados para asistir a las asignaturas siguientes del curso, en que los profesores requieren una solución analítica, pues el tiempo invertido en las soluciones analíticas se ha reducido en nuestro abordaje. De hecho, los alumnos demostraron falta de habilidades matemáticas básicas y eso no puede ser ignorado. Sin embargo, una preocupación excesiva por la resolución analítica de ecuaciones diferenciales, presentadas con poca o ninguna vínculo con los intereses, principalmente profesionales, de los estudiantes de ingeniería no parece ser el camino. Creemos que trabajar con situaciones de probable interés de los alumnos es la forma más segura de participar en su propio aprendizaje, haciendo con que ellos mismos deseen supera sus dificultades.

En cuanto a la propuesta de actividades, podemos observar que los alumnos generalmente parecían estar satisfechos con la resolución de situacionesproblema en el aula, debido al hecho de poder ver las aplicaciones y las implicaciones de los aspectos teóricos, facilitando el establecimiento de las relaciones entre nuevos conocimientos y subsumidores adecuados, en su estructura cognitiva. Sin embargo, consideraron muy difíciles de interpretar y cuatro meses, que es la duración de una asignatura, es poco tiempo para desarrollar esta capacidad, a fin de producir resultados satisfactorios en términos de aprendizaje significativo de los contenidos.

En términos generales, el abordaje adoptado mostró resultados positivos en relación a la participación y la interacción de los alumnos entre sí, y con la profesora, con la materia de enseñanza y los recursos computacionales. Creemos que ello ha contribuido a una mejor comprensión de las ecuaciones diferenciales, conforme demuestran los resultados de los materiales producidos por los alumnos, aunque quedan una serie de dificultades relacionadas con el aprendizaje de este contenido. También subrayamos que al proponer a los alumnos una forma diferente de trabajo a que están acostumbrados, es necesario considerar que la adaptación de los alumnos a esta metodología será lenta, pues es es un proceso continuo que evoluciona poco a poco, corroborando los resultados de las investigaciones comentados en el capítulo 2, en los que los autores verificaron que a pesarde haber trabajado un semestre explorando el enfoque cualitativo de las ecuaciones diferenciales, los alumnos aún eligían como primera opción de resolución el método analítico.

Moreno y Azcárate (2003) señalan que la persistencia de los métodos de enseñanza tradicionales frente a las alternativas más innovadoras de enseñanza se debe a rzones, entre las que destacamos: i) los profesores creen que los alumnos aprenden por imitación y memorización y que no tendrían condiciones de trabajar de otra manera porque tienen poco conocimiento matemático y poca capacidad de raciocinio y creación ii) un nuevo abordaje exigiría del profesor más tiempo para preparar las clases y un reciclaje, porque su formación es muy deficiente en lo que respecta a las aplicaciones y lo que domina es la enseñanza de las técnicas. Hay un gran problema, porque la preocupación por la modificación de la acción docente debe ser una preocupación colectiva de los docentes y no aislada de un profesor, considerando que los alumnos necesitan tiempo para adaptarse a una metodología diferenciada y sentirse bien con ésta.

Podemos afirmar que la metodología propuesta, ejecutada y evaluada se mostró un medio viable para conducir a los alumnos a un aprendizaje significativo, aunque sus resultados serían más significativos si el proyecto pedagógico institucional proporcionará en varias asignaturas metodologías que exigieran mayor compromiso del alumno con su aprendizaje.

Por último señalamos algunas acciones indicadoras de nuestras perspectivas para la continuación de este trabajo:

- disponibilizar a la comunidad científica el test inicial y final de conocimientos como un instrumento para medir conocimientos sobre EDOs;
- crear módulos auxiliares para que los alumnos que tengan más dificultad puedan aprender los prerequisitos para la asignatura de Cálculo III que no haya sido aprendido. La disponibilización de un hipermedia que ofreciera la posibilidad del alumno responder a un test inicial y de acuerdo con sus resultados presentaran materiales de lectura y ejercicios con la intención de mitigar sus

dificultades, seríaun ejemplo de módulo auxiliar;

- en las asignaturas de Cálculo I y Cálculo II, introducir, poco a poco, una metodología que exija mayor participación de los alumnos y más interpretación de su parte, de modo que al cursar el cálculo III ya estén más preparados en esta metodología. Esta sugerencia fue presentada por varios alumnos durante sus estudios;
- perfeccionar la metodología utilizada con el objetivo de mejorar la capacidad de resolución analítica del EDOs por parte de los alumnos, introduciendo la utilización de herramientas computacionales para ayudar en esta tarea;
- al material existente, añadir algunas actividades de modelación matemática que involucren la construcción de modelos matemáticos con ecuaciones diferenciales a partir del el estudio de situaciones-problema que enfrentan los profesionales, que ya se han graduado en los cursos en sus actuaciones en el mercado laboral.

7 BIBLIOGRAFIA

ARAÚJO, R. L. M. et al. A planilha excel como instrumento pedagógico na formação de professores de matemática. **Zetetiké**, V.13, n.23, p.137-159, 2005.

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e Retenção de Conhecimentos: Uma Perspectiva Cognitiva.** Lisboa: Platano, 2003.

BOYCE, W. E. e DIPRIMA, R. C. **Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera**. México. Editora Limusa Wiley, 4ª edición, 2004.

BORSSOI, A. H. e ALMEIDA, L. M. W. Modelagem matemática e aprendizagem significativa: uma proposta para o estudo de equações diferenciais ordinárias. **Educação Matemática Pesquisa**, V.6, n.2, 2004.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. **Handbook of qualitative research.** Thousand Oaks. Sage, 1994.

DULLIUS, M. M. et. al. Problematizando el uso de recursos computacionales con profesores de matemática en un contexto de trabajo colaborativo. **Tecné, Episteme y Didaxis**, TEA, número extraordinario, 2007.

DULLIUS, M. M.; QUARTIERI, M. T. Uso de recursos computacionais para o ensino e a aprendizagem da matemática. **Revista Ciência e Tecnologia**, Ano X, n.16, 2007.

GASPAR, A. Cinqüenta Anos de Ensino de Física: Muitos Equívocos, alguns acertos e a necessidades recolocar o professor no centro do processo educacional. **Educação**. Ano 13, n.21, p.71-91, 2004.

HABRE, S. Exploring students'strategies to solve ordinary differential equations in a reformed setting**. Journal of Mathematical Behavior**. V.18, n.4, p.455-472, 2000.

HABRE, S. Investigating students' approval of a geometrical approach to differential equations and their solutions. **International Journal of Mathematical Educations in Science and Technology**. V.35, n.5, p.651-662, 2003.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A . **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MAYER, J. F. da C.e JÚNIOR, A. J. de S. A utilização do computador no processo de ensinar-aprender Cálculo: a constituição de grupos de ensino com pesquisa no interior da universidade. **Zetetiké**, V.10, n.17/18, p.113-148, 2002.

MOREIRA, M. A e VEIT, E. A **Texto de Apoio preparado para a asignatura de pós-graduação Bases Teóricas e Metodológicas para o Ensino Superior.** Instituto de Física, UFRGS, 2003 e 2004. Revisado em 2006.

MOREIRA, M. A. Investigación en Educación en Ciencias: Métodos Cualitativos. **Actas del PIDEC**: Textos de apoio do Programa Internacional de Doutorado em Ensino de Ciências da Universidades de Burgos (Convênio UFRGS). V.4, p.25-53, 2002.

MOREIRA, M. A. **Teorias de Aprendizagem**. São Paulo: EPU, 2003.

MOREIRA, M.A. **A Teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2006.

MORENO, M. M. e AZCÁRATE, C. G. Concepciones de los Profesores sobre la Enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales a Estudiantes de Química y Biología. Estudio de Casos. Revista **Enseñanza de las Ciencias,** V.15, n.1, p.21-34, 1997.

MORENO, M. M. e AZCÁRATE, C. G. Concepciones y Creencias de los Profesores Universitarios de Matemáticas acerca de la Enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales. Revista **Enseñanza de las Ciencias,** V.21, n.2, p.265-280, 2003.

PALIS, G de la R. Aproximações de um valor de bifurcação usando uma planilha. **Zetetiké**, Campinas-SP, V.8, n.13/14, p.117-131, 2000.

RASMUSSEN, C. New directions in differential equations A framework for interpreting students' understandings and difficulties**. Journal of Mathematical Behavior,** V.20, p.55-87, 2001.

ROQUE, W. L. Novas tecnologias computacionais e o ensino de Matemática. **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, V.2, n.1, p.101-114, 2000.

ROWLAND, D. R.; JOVANOSKI, Z. Student interpretations of the terms in first-order ordinary differential equations in modelling contexts. **International Journal of Mathematical Educations in Science and Technology,** V.35, n.4, p.503-516, 2004.

ROWLAND, D. R. Student difficulties with units in differential equations in modelling contexts. **International Journal of Mathematical Educations in Science and Technology,** V.37, n.5, p.553-558, 2006.

SANTOS, A. de C. K. dos; CHO, Y.; ARAUJO, I. S.; GONÇALVES, G. P. **Modelagem computacional utilizando STELLA**. Rio Grande: Editora da Furg, 2002.

STEPHAN, M.; RASMUSSEN, C. Classroom mathematical practices in differential equations**. Journal of Mathematical Behavior**, V.21, p.459-490, 2002.

VERGNAUD, G. **Lev Vygotski Pedagogo e Pensador do Nosso Tempo.** Porto Alegre: GEEMPA, 2004.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

VILLARREAL, M. E. O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas. **Revista Bolema**, resenha da Tese de Doutorado, São Paulo, V.17, p.114-121, 1999.

ZILL, D. G. **Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado**. México. Editora Thomson Learning, 7ª edición, 2002.

APÉNDICE 1

Cuestionario aplicado a los alumnos en el Estudio Preliminar

Questionário

1. Idade do aluno: _________________

2. Trabalha ( ) sim ( ) não

Em caso positivo, em que atividade?
____

3. Assinale com um X a coluna correspondente à alternativa que melhor expresse sua opinião sobre o seu desempenho nesta disciplina, de acordo com os seguintes códigos:
CP - concordo plenamente
C - concordo
SO - sem opinião
D - discordo
DT - discordo totalmente

	CP	***C***	***SO***	***D***	***DT***
Considero que fui um bom aluno					
Acredito que esta disciplina é importante para a minha carreira					
Dediquei pouco esforço ao estudo desta disciplina					
Não assisti a maior parte das aulas desta disciplina					
Tenho a impressão que aprendi bastante nesta disciplina					

4. Descreva o que são equações diferenciais.

5. Fale sobre a importância delas, exemplificando.

6. Qual a relevância das condições de contorno em uma equação diferencial?

7. Quais os tipos de dificuldades que vocês enfrentou na aprendizagem de equações diferenciais?

8. O que você imagina que poderia ser feito para melhorar as aulas e facilitar a sua aprendizagem?

APÉNDICE 2

Guías de actividades del Estudio 1

Guia de Atividades 1

Materiais radioativos – e especialmente seu lixo – é um tema que preocupa a sociedade contemporânea, tendo em vista suas possíveis conseqüências danosas à vida (humana, vegetal e animal). Materiais radioativos apresentam em sua composição elementos químicos que não são estáveis, porque seus núcleos emitem partículas ou energia eletromagnética.

Atividade A1

Consideremos o caso do iodo-131, utilizado nos exames de tiróide, cuja meia-vida é de oito dias[17]. Isto significa que o número de núcleos instáveis, capazes de emitir partículas ou radiação, cairá à metade em 8 dias, e novamente à metade após mais 8 dias e assim por diante. Considerando que no instante inicial existam $N=1000000$ átomos radioativos foi construída em uma planilha eletrônica a tabela TA1.

Tabela TA1: Número de átomos radioativos para diferentes valores de tempo, medido em dias.

t (dias)	N
0	1000000
8	500000
16	250000
24	125000
32	62500
40	31250
48	15625
56	7813
64	3906
72	1953
80	977
88	488
96	244
104	122

17 http://www.cnen.gov.br/cnen_99/educar/apostilas/radio.pdf

I. Quantos átomos radioativos tem ao final de 64 dias?

II. Quantos dias demorarão para que haja em torno de 100 átomos radioativos?

III. Esboce um gráfico do número de átomos radioativos de Iodo-131 em função do tempo, medido em dias.

IV. É correto afirmar que o número de átomos radioativos que decaem por dia é constante? (Dizer que um átomo radioativo decaiu significa dizer que se transmutou em outro, porque emitiu partícula ou radiação, deixando de ser radioativo).

V. Suponha que o exame clínico fosse realizado com um elemento químico cuja meia vida fosse de 4 dias e que o número inicial de átomos radioativos fosse o mesmo (1.000.000). Esboce um gráfico do número de átomos radioativos deste elemento químico em função do tempo, medido em dias.

VI. Construa a tabela TA1 na planilha eletrônica e uma semelhante para o elemento químico do item V. Gere na planilha os gráficos solicitados nos itens III e V e verifique se seus esboços foram satisfatórios.

As curvas geradas são chamadas curvas de decaimento. Que forma analítica lhe parece que têm estas curvas?

Atividade B1

Nesta atividade você trabalhará com a planilha intitulada **iodo.sxc**, que se encontra no material de apoio do Teleduc. As duas primeiras colunas desta planilha apresentam os mesmos valores que a tabela TA1. A terceira coluna apresenta $\Delta N/\Delta t$, calculado a partir das diferenças dos valores apresentados nas duas primeiras colunas. A quarta coluna apresenta a razão entre as colunas 3 e 2, ou seja, $(\Delta N/\Delta t)/N$.

Você pode mudar o valor de Δt tanto quanto julgar necessário para observar que qualquer que seja o valor atribuído para Δt, o valor obtido na quarta coluna é constante.

I. Mude o valor de Δt para 1, depois para 0,5, para 0,1 e finalmente para 0,01. Verifique que a quarta coluna converge para um certo valor, que designaremos por *k*. Qual é o valor de *k*? E a sua unidade? *k* é chamada de constante de decaimento radioativo.

Escrevendo em forma de equação as etapas seguidas nos cálculos da planilha **iodo.sxc** e no item I, temos:

$$\frac{\lim\limits_{\Delta t \to 0}\left[\dfrac{\Delta N}{\Delta t}\right]}{N} = k \qquad \text{ou} \qquad \frac{dN}{dt} = kN \qquad \text{Eq. 1}$$

A Eq. 1 é chamada de uma equação diferencial, porque envolve a derivada de uma função desconhecida (N).

No item I. você deve ter concluído que a constante de decaimento radioativo é $k=0{,}0866/dias$. Ao resolver a Atividade A, alguns de vocês, provavelmente, observaram que a forma da curva de decaimento parece ser a de uma exponencial decrescente.

Então, vamos tentar a seguinte solução:

$$N=N_0 \cdot e^{-kt} \qquad \text{Eq. 2}$$

onde N_0 é a quantidade inicial de átomos radioativos considerado.

II. Construa na planilha **iodo.sxc** uma quinta coluna, na qual deverá constar o valor da função exponencial da Eq. 2.

Comparando os valores obtidos com os da coluna 2, você observa que a Eq. 2 descreve muito bem este decaimento radioativo, ou seja, parece ser solução da equação diferencial apresentada na Eq. 1.

III. De fato, isto pode ser provado analiticamente, lembrando a derivada de uma exponencial, pois se $N=N_0 \cdot e^{-kt}$, $\frac{dN}{dt}=-kN_0 \mathrm{e}^{-kt}=-kN$, que é exatamente a Eq. 1.

Sabendo-se que a solução da equação diferencial Eq. 1 tem a forma dada na Eq. 2, podemos obter a constante de decaimento *k* de uma modo mais simples, que não requer o uso de limite. Basta lembrar que, por definição, meia-vida é o tempo necessário para que o número de átomos radioativos decaia à metade. Vamos representar a meia-vida por τ.

$$\frac{N}{N_0}=\frac{1}{2}=e^{(-k\tau)}$$

Calculando o logaritmo natural dos dois lados desta equação, temos:

$$\ln(0{,}5)=-k\tau \quad \text{ou} \quad k=\frac{-\ln(0{,}5)}{\tau}=\frac{0{,}69315}{\tau} \qquad \text{Eq.3}$$

Então, se a meia-vida do iodo-131 é $\tau=8\,dias$, a constante de decaimento dada pela Eq.3 é $k=0{,}0866/dias$.

IV. Determine a constante de decaimento de um elemento que cuja meia vida é 5730 anos.

Atividade C1

Os cientistas aprenderam a deduzir a idade de ossos, pedras, planetas e estrelas através da medida da quantidade de isótopos existentes no material em estudo. Para isto há diferentes métodos, dependendo da escala de tempo em que trabalham. Por exemplo, para estudar um período que vai até cerca de 40 ou 50 mil anos atrás, pode ser usado o método do C^{14}, que consiste em determinar qual a proporção de C^{12} e C^{14} existente na amostra. Apesar do C^{14} ser radioativo – decaindo em N^{14} - nos seres vivos a absorção de dióxido de carbono do ar mantém constante os níveis de C^{12} e C^{14}. Então, a proporção entre estes dois isótopos é fixa e bem conhecida. A partir da morte, não há reposição de C^{14} e conseqüentemente sua quantidade começa a diminuir. Comparando-se o nível de C^{14} com a quantidade total de carbono, é possível calcular há quanto tempo a planta ou o animal está morto. A meia-vida do C^{14} é de 5730 anos[18]. Considere que foi encontrado um osso fossilizado com 20% da quantidade de C^{14} usualmente encontrada num ser vivo e resolva as seguintes atividades:

I. Estime a idade do osso.

II. Usando a Eq. 3 para determinar a constante de decaimento do C^{14} e a Eq. 2 para obter o número de átomos radioativos na amostra, construa na planilha uma tabela com duas colunas, uma para o tempo e outra para o número de átomos de C^{14}. Considere que a quantidade inicial era de 1000000 de átomos radioativos.

III. Verifique se a sua estimativa do item I está adequada aos resultados da tabela.

IV. Esboce a curva do número de átomos contra o tempo, medido em anos.

18Informações obtidas na revista National Geographic Brasil, de setembro de 2001.

V. Faça na planilha eletrônica este gráfico e compare com a sua previsão.

Atividade D1

Questões relacionadas a crescimento populacional são de interesse dos mais diversos setores da sociedade, por exemplo é importante saber a projeção da população de um país, estado ou município para planejar ações que objetivam suprir as necessidades da sociedade no campo da educação, saúde, trabalho, entre outras. Os biólogos buscam usar este conhecimento para proteger os recursos do meio ambiente para que não ocorra a extinção de uma ou de várias espécies. Existem várias formas de descrever o crescimento populacional, e destas, uma das mais conhecidas é o Modelo de Malthus. Ele é chamado o Modelo de Crescimento Exponencial, pois a taxa de variação da população em relação ao tempo é proporcional à população existente no instante t, o que resulta na mesma Equação Diferencial $\frac{dP}{dt}=kP$ da atividade B (Eq. 1). Este modelo supõe que as taxas de nascimento e morte são constantes, a população irá (de)crescer exponencialmente, ou seja, o modelo malthusiano descreve como as populações crescem ou decrescem quando nada mais acontece (ausência de quaisquer fatores perturbadores) e mesmo sabendo que existem estes fatores, o modelo nos dá uma descrição razoável para o crescimento populacional dentro de seu contexto de validade.

I. De acordo com o censo realizado, em 2000, a taxa de crescimento anual da população do RS era de aproximadamente 1,2%. Considerando que o RS estava com

10.187.798[19] pessoas, construa uma tabela com duas colunas, uma com os anos de 2000 a 2020 e outra para o tamanho da população do RS em cada um destes anos, considerando que a cada ano população é igual a do ano anterior mais 1,2%.

II. Construa na planilha uma terceira coluna, na qual deverá constar o valor da função exponencial da Eq. 2, mas fique atento, será que o sinal negativo da equação deve ficar? Por que? (Dica: considere o ano de 2000 como tempo 0)

III. Construa o gráfico da população contra o tempo, em anos.

IV. Segundo projeção do IBGE este ano a população do RS chega a 10.963.219 pessoas e a taxa anual com que a população está crescendo é de 1,07%. Construa na planilha uma tabela para calcular uma projeção do tamanho da população do RS até 2020. Compare com os dados do item I.

V. Em 1960, a população do RS era de 5.366.720 pessoas. Em 2000 este número praticamente dobrou, se continuasse com este crescimento, qual seria a população do RS em 2040?

VI. Qual deveria ser a taxa aproximada de crescimento anual para a população chegar a este valor?

19 www.ibge.gov.br

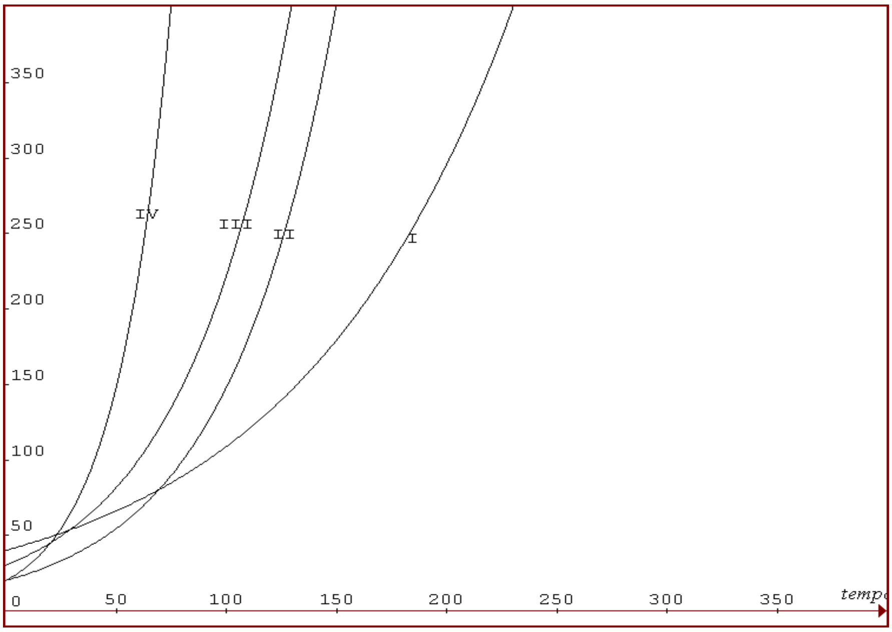
VII) Considerando que cada uma das curvas abaixo representa uma população em função do tempo, determine:

a) a curva que representa a maior população inicial;

b) a curva que representa a maior taxa de crescimento da população;

c) as duas curvas que representam a mesma população inicial;

d) as duas curvas que representam a mesma taxa de crescimento.



Guia de Atividades 2

Ao modelar um sistema podemos representá-lo de várias maneiras e uma destas é através da elaboração de diagramas de fluxo utilizando a metáfora de Forrester[20]. Forrester considera que existem dois tipos fundamentais de variáveis: os **níveis** e as **taxas**. Estes podem ser simulados usando o *software* Powersim. O Powersim usa a metáfora de tanques e torneiras. O tanque (estoque ou nível) representa uma quantidade cujo valor inicial pode crescer ou decrescer. Uma torneira (taxa) conectada a um tanque decide quão rápido a quantidade no tanque está mudando. As constantes são representadas por um losango. O Powersim permite a construção de um modelo através da conexão desses objetos básicos e, fornecendo apenas as relações algébricas o programa gera as equações que regem o modelo. Também permite a obtenção de gráficos de quaisquer variáveis contra outras, e contra o tempo, e gera uma tabela de dados.

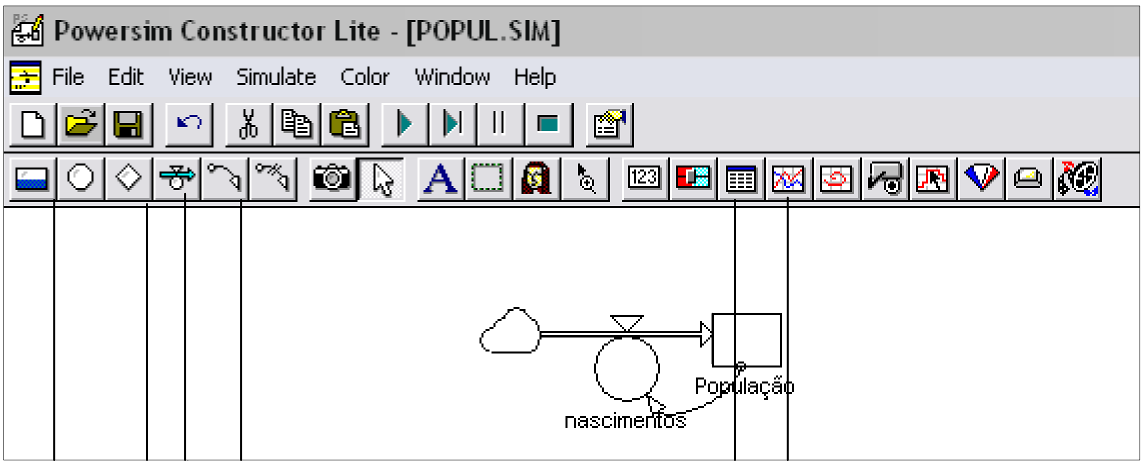


Figura 2.1. Tela principal do *software* Powersim com um exemplo de fluxo da população.

Usado para interligar uma variável com outra

Permite criar um gráfico de qualquer variável apresentada no diagrama.

Serve para criar uma válvula que pode ser ligada à caixa, atuando semelhante a uma torneira que coloca ou retira água de um tanque.

Permite criar uma tabela de qualquer variável apresentada no diagrama.

Usado para representar as constantes

Representa o nível de uma variável. Este vari conforme a taxa de entrada e/ou saída de uma ou mais variáveis que influenciam a caixa.

20FORRESTER, J. W. Principles of systems. Portland, OR.: Productivity Press, 1990.

Na situação apresentada, o nível representa uma população, e a taxa representa nascimentos desta população. O elo de população para nascimentos, indica que o tamanho da população influência a taxa de nascimentos. A nuvem pode representar "sumidouros", onde o fluxo começa ou termina, fora do sistema.

Vamos construir o diagrama representado acima, considerando que estamos trabalhando com uma população de coelhos, cuja quantidade inicial é de 100 coelhos e esta população está crescendo a uma taxa 8% ao ano. Podemos construir tabelas e gráficos referentes a esta situação.

Agora consideremos também que exista uma taxa de morte desses coelhos a um percentual de 2%. Podemos representar esta situação conforme diagrama abaixo.

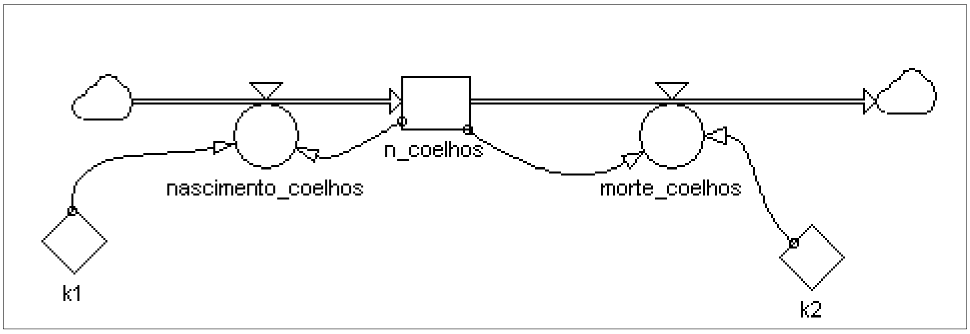


Figura 2.2. População com taxa de nascimento e taxa de morte.

Atividade A2

I) Considere um tanque com uma quantidade inicial de 1000 litros de água, em que há um furo na base por onde, a cada hora, sai 10% da água que tem no tanque. Construa, com auxílio do *software* Powersim, um diagrama (conforme Figura A1) para representar esta situação.

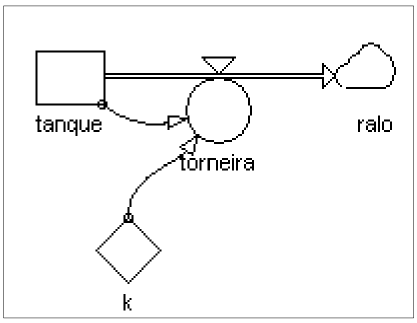


Figura A1: Fluxo de saída de água

II. O que acontece com a quantidade de água no tanque à medida que o tempo passa?

III. Esboce o gráfico da **quantidade de água no tanque** em função do tempo.

IV. Esboce o gráfico da **quantidade de água que sai do ralo** em função do tempo.

V. Construa os gráficos do item III e IV com auxílio do Powersim.

VI. Analisando o gráfico do item IV, podemos observar que a curva é decrescente, como se pode explicar? Se considerarmos o tempo em horas, é correto afirmar que a quantidade de água que sai pelo ralo a cada hora é a mesma? Justifique ou comprove sua resposta.

VII. Acrescente no diagrama do Powersim uma torneira colocando água no tanque a um fluxo de $10\, litros/hora$. O que acontece com a quantidade de água no tanque à medida que o tempo passa?

VIII. Suponha que o tanque de capacidade total de 1000 litros se encontra, no instante inicial, com 500 litros. Escolha valores para a taxa de entrada e saída de água tais que:

a) a quantidade de água no tanque seja menor que 1 litro em aproximadamente 20 horas.

b) o tanque encha em aproximadamente 25 horas.

c) o nível de água do tanque não se altere.

Atividade B2

Quando uma droga (por exemplo, penicilina, aspirina) é administrada a um indivíduo, ela entra na corrente sangüínea e, então, é absorvida pelo organismo no decorrer do tempo. Pesquisas médicas mostraram que a quantidade de uma droga presente nesta corrente tende a decrescer a uma taxa proporcional à quantidade de droga presente.

I. Warfarin é uma droga utilizada como anticoagulante21, sua meia-vida é de 37 horas. Após interromper o uso da droga, a quantidade que permanece no corpo do paciente diminui a uma taxa que é proporcional à quantidade restante. Quantas horas são necessárias para que o nível da droga no corpo seja reduzido a 25% do nível original?

II) Considerando que a quantidade inicial seja de 5 miligramas construa, no Powersim, o diagrama da situação e faça o gráfico da quantidade de Warfarin no corpo do paciente em função do tempo, desde a interrupção do uso da droga até 5 dias após.

III) Construa a tabela do exercício anterior e verifique se a sua resposta da questão I confere.

IV) Se dobrarmos o valor da quantidade inicial, quanto tempo levará para que o nível do medicamento no corpo se reduza a metade? E a 25% da quantidade inicial?

21HUGHES-HALLET, D. Et al Cálculo Volume 2, LTC Editora, 1997, pág 504.

Guia de Atividades 3

Atividade A3

O tempo de geração é o intervalo de tempo requerido para que a população em uma cultura de microorganismos duplique em número. A bactéria *Mycobacterium tuberculosis,* causadora da tuberculose, possui um tempo de geração de aproximadamente 14 horas[22] .

I. Sabendo que uma cultura de bactérias cresce a uma taxa que é proporcional a quantidade de bactérias existentes no instante t, escreva uma equação diferencial que represente a situação e resolva-a para encontrar a solução geral.

II. Determine a taxa de crescimento da cultura de bactérias *Mycobacterium tuberculosis*.

III. Considerando que existam inicialmente 200 bactérias, determine a solução particular para este caso.

IV. Esboce um gráfico da quantidade de bactérias contra o tempo.

22PELCZAR Jr., M. J. Et al. Microbiologia Conceitos e Aplicações, Makron Books, 2005.

V. Determine o número de bactérias depois de 5 horas e depois de 20 horas.

VI. Quando o número de bactérias alcançará 50000?

Atividade B3

A penicilina G (agente eficaz para o tratamento de meningite meningogócica) quando administrada por um jovem de 20 a 30 anos, tem meia-vida de 20,7 minutos[23]. Como sabemos, a quantidade de uma droga presente no organismo tende a decrescer a uma taxa proporcional à quantidade de droga presente. Esta situação pode ser descrita pela mesma equação diferencial do exercício anterior e portanto terá a mesma solução geral.

I. Determine a taxa de decrescimento da penicilina G no corpo do indivíduo.

II. Considerando que um indivíduo de 20 anos ingeriu em dose única 5ml dessa droga, determine a solução particular para este caso.

III. Em quanto tempo o indivíduo terá 1 ml da droga no organismo.

IV. A quantidade de droga presente 1 hora após ingerí-la.

23CRAIG, C.R., STITZEL R.E. Farmacologia Moderna, Guanabara Koogan, 1996.

Atividade C3: Variação de temperatura

A lei de variação de temperatura de Newton estabelece que: *a taxa de variação de temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio ambiente.* Considerando que a temperatura do corpo depende do tempo e que a temperatura do meio ambiente permanece constante no decorrer da experiência, a equação diferencial que descreve a situação acima é $\frac{dT}{dt}=k(T-T_m)$ onde T é a temperatura do corpo no instante t, T_m é a temperatura constante do meio ambiente, $\frac{dT}{dt}$ é a taxa segundo a qual a temperatura do corpo varia e k é uma constante de proporcionalidade que depende do material com que o corpo foi construído.

I. Por exemplo, uma xícara de café sobre a mesa da cozinha esfria a uma taxa proporcional à diferença de temperatura entre o café e o ar que o cerca, então:

a) A medida que o café esfria, a taxa na qual ele esfria diminui, aumenta ou permanece sempre igual? Explique.

b) A longo prazo, a temperatura do café aproxima-se de zero? Explique.

c) A longo prazo, a taxa de resfriamento tende a zero? Explique.

d) Esboce um gráfico para a temperatura do café em função do tempo.

II. Suponha que a temperatura de uma xícara de café recém preparado seja de $90^\circ C$. Um minuto mais tarde a temperatura já diminuiu para $80^\circ C$ numa sala de temperatura constante $20^\circ C$.

a) Sabendo que a equação diferencial da variação da temperatura é separável, resolva-a e escreva a solução particular para a situação apresentada.

b) Esboce o gráfico da temperatura contra o tempo.

c) Determine a temperatura do café após 5 minutos nesta sala.

d) Considere que alguém deseja tomar este café a uma temperatura de $50^\circ C$, quanto tempo precisará esperar desde o momento que ele foi preparado.

Atividade D3: Problema de mistura

Um problema de mistura pode ser representado por um tanque preenchido, até um nível especificado, com uma solução que contém uma quantidade conhecida de substância solúvel (por exemplo cloro). A solução completamente misturada flui do tanque a uma taxa conhecida, e ao mesmo tempo uma solução com uma concentração conhecida de uma substância solúvel é acrescentada ao tanque a uma taxa conhecida que pode ou não ser diferente da taxa de vazão. À medida que o tempo passa, a quantidade de substância solúvel no tanque irá, em geral, variar, e o problema de mistura usual procura determinar a quantidade de substância no tanque num instante especificado. A descrição matemática desta situação pode ser representada por

$$\frac{dQ}{dt} = taxa\ de\ entrada - taxa\ de\ saída$$

Este tipo de problema serve como modelo para muitos outros fenômenos: descarga e filtragem de poluentes em um rio, injeção e absorção de medicamentos na corrente sanguínea, migração de espécies para dentro e para fora de um sistema ecológico, reações químicas, entre outros.

I. Consideremos que um tanque contenha 500 litros de salmoura (isto é, água na qual foi dissolvida uma certa quantidade de sal). Uma outra salmoura é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de $4\,l/min$; a concentração de sal nessa segunda salmoura é de $3\,kg/l$. Quando a solução no tanque estiver bem misturada, ela será bombeada para fora à mesma taxa de entrada. Supondo que o tanque contenha inicialmente 50 kg de sal:

a) Resolva a equação diferencial e encontre a solução particular para a situação apresentada.

b) Estime a quantidade de sal no tanque a longo prazo?

c) Qual é o efeito no limite da quantidade de sal , ao se duplicar o valor da concentração de entrada?

d) Qual o efeito sobre o limite da quantidade de sal, ao se duplicar o valor da taxa de saída?

Atividade E3

As reações químicas de primeira ordem podem ser descritas pela equação diferencial $\frac{dC_A}{dt}=-kC_A$, na qual C_A é a concentração do reagente *A*, *k* a constante da reação (depende da natureza da reação e da temperatura) e *t* o tempo decorrido desde o início da reação.

Considerando a decomposição $2N_2O_5(g)\rightarrow 4NO_2(g)+O_2(g)$, a tabela abaixo[24] apresenta a concentração de pentóxido de nitrogênio, N_2O_5, em relação ao tempo, a uma temperatura de $67°C$.

Tempo (min)	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***8***	***10***
Concentração de N_2O_5 (mol/l)	***0,160***	***0,113***	***0,080***	***0,056***	***0,040***			

I. Considerando que a equação diferencial desta situação é a mesma da atividade A.I e A.II , portanto a solução geral será a mesma. Use esta solução e as condições fornecidas pela tabela para encontrar a solução particular.

II. Preencha a tabela com a concentração de N_2O_5 após 5, 8 e 10 minutos.

III. Calcule o tempo necessário para a concentração cair de 0,160 para 0,100 mol/l

24MASTERTON, W.L, et. al. Princípios de Química, LTC Editora, 1990.

Guia de Atividades 4

O modelo exponencial ajustou-se ao crescimento da população mundial e da população de várias regiões muito bem durante décadas, e mesmo séculos, mas com o tempo as taxas de crescimento relativo tendem a diminuir. É o que também podemos verificar com a população do RS abordada no Guia 1. O modelo exponencial tem que falhar em algum momento, pois ele prevê que a população continuará a crescer sem limites à medida que o tempo passa, e isto não pode ser verdade para sempre. Geralmente as populações crescem dentro de sistemas ecológicos que podem somente suportar um certo número de indivíduos ou ainda, o crescimento pode ser inibido por efeitos da concentração, emigração, doença, guerra, falta de alimentos, entre outros. Devemos reconhecer que um modelo mais realístico deve refletir o fato de que um dado ambiente tem recursos limitados. O primeiro modelo que atende à variação da taxa de crescimento foi formulada por Pierre F. Verhurst, em 1837. Ele é chamado o **Modelo Logístico** ou **Modelo de Verhulst-Pearl**. Este modelo incorpora fatores limitantes ao crescimento desenfreado da população em estudo, pois supõe que, vivendo num determinado meio, uma população deverá crescer até um limite máximo sustentável, ou seja, tende a se estabilizar.

No modelo logístico, a taxa de variação da população pode ser expressa por: $\frac{dP}{dt}=kP-\frac{k}{L}P^2$; onde k é coeficiente de crescimento (este coeficiente é específico de cada população e é calculado baseado no índice de mortes e nascimentos da população em estudo, além de outros fatores como alimentação disponível) e L é a capacidade de suporte populacional do meio, ou seja, o nível máximo de população sustentável.

Também podemos escrever a equação do crescimento logístico a partir de $\frac{dP}{dt}=taxa\,nascimento-taxa\,morte$, nessas taxas já estão sendo considerados os fatores como alimentação, doenças, entre outros. No modelo exponencial estudado, a constante k usada para trabalhar com o crescimento populacional do RS já estava considerando os índices de nascimento e morte, as taxas foram inseridas em uma única constante de crescimento, pois em $\frac{dP}{dt}=KP$, $k=k_1(taxa\,nascimento)-k_2(taxa\,morte)$ e portanto podemos escrever $\frac{dP}{dt}=(k_1-k_2)P$ ou $\frac{dP}{dt}=k_1P-k_2P$. Trabalhamos o crescimento de coelhos usando esta idéia.

Na equação do crescimento logístico só temos uma diferença, é que k_2P^2, podemos interpretar isto como uma forma de atribuir um peso maior aos efeitos da "superpopulação" nos óbitos do que nos nascimentos, devido aos fatores limitantes do meio que suporta uma população máxima L.

Atividade A4

I. O crescimento populacional de um determinado município é modelado pela equação diferencial $\frac{dP}{dt}=0{,}012P-0{,}000000375P^2$. Qual é a capacidade de suporte desta população?

II. Para quais valores de P a população está aumentando? E diminuindo?

III. Considerando que neste município, atualmente (ano de 2006) existem 10000 habitantes, construa, no Powersim, um diagrama para representar esta situação.

IV. Construa o gráfico do número de indivíduos contra o tempo.

Atividade B4

I. Em 1950, a população do Brasil era de aproximadamente 51,944 milhões de pessoas, usando o modelo de crescimento logístico construa, com auxílio do *software* Powersim, um diagrama para representar esta situação, considerando que $k=0{,}04182402/anos$ e $L=248{,}656$ milhões de pessoas[25]. (Dica: Considere o ano de 1950 como tempo zero.)

II. O que acontece com a população à medida que o tempo passa?

III. Construa o gráfico da população em função do tempo.

IV. De acordo com o censo do IBGE[26], em 2000 a população do Brasil era de aproximadamente 171,279 milhões de pessoas, este valor confere com o do modelo logístico.

V. Simule, com auxílio do Powersim, cada uma das situações abaixo e responda, em cada caso, se a população está crescendo, decrescendo ou permanecendo constante.

a) A população inicial $P(0)$ está entre 0 e L.

b) A população inicial $P(0)$ está acima da capacidade limite $(P>L)$.

c) A população se aproxima da capacidade limite $(P\rightarrow L)$.

VI. Seguindo o crescimento do modelo logístico, em que ano aproximadamente a população do Brasil começa a se estabilizar?

---

25 Dados obtidos em BASSANEZI, R. C. Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática, Editora Contexto, 2004.

26 www.ibge.gov.br

Guia de Atividades 5

<u>Circuito elétrico</u>

Na aula de hoje vamos trabalhar com equações que podem ser usadas para descrever, com certo grau de aproximação, o comportamento de circuitos elétricos representados esquematicamente na Figura 1.

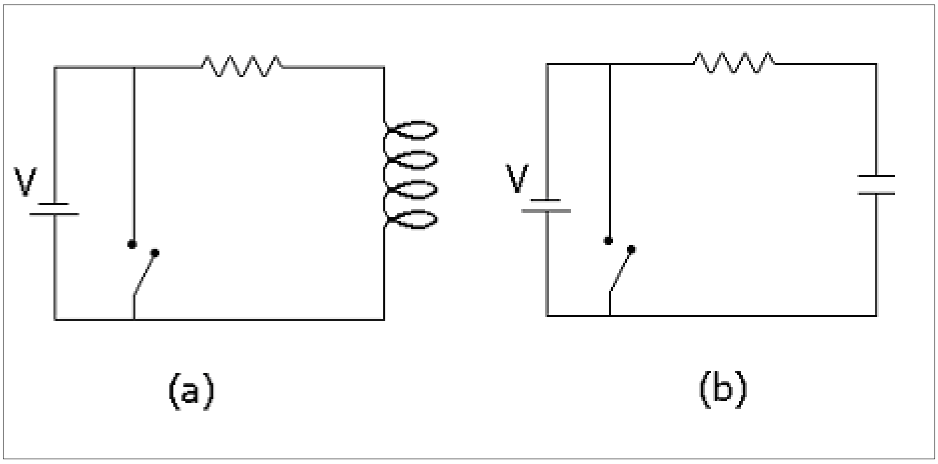
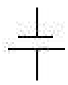


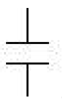
Figura 1: Circuitos elétricos tipo (a) RL e (b) RC.

Os componentes elétricos que compõem estes circuitos são:

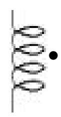


- fonte de tensão contínua (bateria, pilha ou gerador elétrico), capaz de fornecer uma certa diferença de potencial (voltagem), *V*, medida em volts (V);

- resistor (resistências, lâmpadas), que possui uma certa resistência elétrica, *R*, medida em ohms (Ω). Para muitos resistores, *R* não depende da corrente que circula pelo resistor, ou seja, é uma constante. (Estes são chamados resistores ôhmicos.)



- capacitor, que possui, uma certa capacitância, *C*, medida em farad (F);



- indutor (bobina), que possui indutância *L*, medida em henrys (H)

Sobre circuitos elétricos precisamos lembrar:

iii. que a diferença de potencial, também chamada queda de potencial, entre os terminais de resistores, capacitores e indutores, quando por eles circula uma corrente *i*, é dada pelas expressões mostradas na Figura 2.

iv. a soma algébrica das quedas de potencial em um laço fechado de um circuito (malha) é igual à voltagem fornecida fonte de tensão.

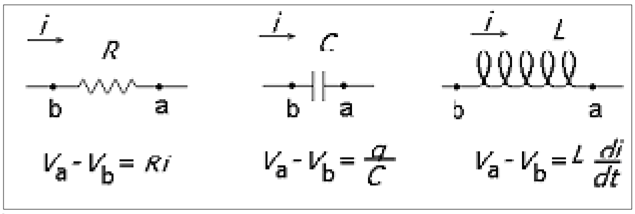


Figura 2: Diferença de potencial em vários elementos de um circuito elétrico, quando é percorrido por uma corrente elétrica *i*.

Com estas informações, podemos verificar que a equação diferencial que rege a corrente que circula por um circuito do tipo RL, mostrado na Figura 1.a, é dada por:

$$L\frac{di}{dt}+Ri=V \qquad \text{Eq. 1}$$

Atividade A5

I. Supondo que a bateria fornece uma voltagem constante de 60V, que a resistência é constante e igual a 12 Ω, a indutância é 4 *H* e que a corrente no instante inicial é nula ($I(0)=0$) represente no Powersim esta situação.

II. Esboce o gráfico da corrente contra o tempo.

III. O que acontece com o valor da corrente a longo prazo?

<u>Queda de corpos</u>

Um corpo de massa *m* em queda vertical, fica sujeito à resistência do ar, que é proporcional à sua velocidade. Atuam sobre o corpo, de massa *m*, a força gravitacional, responsável pelo seu peso, $F_1 = mg$, e a força resistiva do ar, $F_2 = -k\,v$, sendo *k* uma constante positiva, que depende do formato e rugosidade da superfície do corpo e de propriedades do ar. (O sistema de referência aponta para baixo, e *v* representa a componente da velocidade na direção do eixo.) Assim, a componente da força na direção do eixo é dada por: $F = F_1 + F_2 = mg - kv$.

De acordo com a Segunda Lei de Newton, temos que: $F = m\,a = m\dfrac{d\,v}{dt}$, então, $mg - kv = m\dfrac{dv}{dt}$ ou $v' + \dfrac{k}{m}v = g$ que rege o movimento do corpo.

Atividade B5

I. Imagine um pára-quedista saltando de um avião. Quando ele salta, qual é a sua velocidade?

II. O que acontece com a velocidade do pára-quedista enquanto ele está caindo? E a resistência do ar?

III. Considerando a massa de 70 kg, $g = 9{,}8\,m/s^2$ e $k = 13{,}72$ construa um diagrama no Powersim para representar esta situação.

IV. Construa o gráfico da velocidade contra o tempo.

V. Qual é a velocidade limite do pára-quedista?

VI. Em quanto tempo o pára-quedista chega na velocidade limite?

VII. Antes de chegar na velocidade limite a força de resistência é maior, menor ou igual ao peso do pára-quedista? A força de resistência do ar aumenta, din
ou não varia? Explique.

Guia de Atividades 6

Atividade A6

Uma conta bancária rende juros de modo contínuo a uma taxa anual constante *r*. O saldo y da conta satisfaz a equação diferencial $\frac{dy}{dt}=ry$. Resolva a equação diferencial para encontrar a solução geral e encontre a solução particular considerando que $r=7\Delta$ e o depósito inicial foi de R$ 1.000,00.

Atividade B6

A equação diferencial $\frac{dT}{dt}=K(T-Ta)$ descreve a temperatura, em função do tempo, de um bolo tirado do forno com uma temperatuta $100^\circ C$ e colocado num ambiente de temperatura constante $25^\circ C$. Cinco minutos depois, a temperatura do bolo é de $70^\circ C$. Resolva a equação diferencial para encontrar a solução geral e a solução particular e determine em quanto tempo a temperatura do bolo atingirá $40^\circ C$.

Atividade C6

Uma pedra é solta de um andar alto de um edifício. A equação diferencial que representa a variação da velocidade é dada por $v' + \frac{k}{m} v = g$.

a) Resolva esta equação diferencial.

b) Considere $m=2\,kg$ e $k=6{,}5\,kg/s$ e encontre a solução particular. Lembre-se que a velocidade inicial é zero.

c) Use a solução particular para calcular a velocidade limite da pedra.

d) Use a solução particular para calcular em quanto tempo a pedra chega na velocidade limite.

Atividade D6

Suponha que um gerador fornece uma voltagem constante de 110V, que a resistência é constante e igual a 550 Ω, que a indutância é 4 *H* e que a corrente no instante inicial é nula (*I*(0)=0). A equação diferencial que rege a corrente que circula por este circuito RL é $L\frac{di}{dt}+Ri=V$.

a) Resolva a equação diferencial para encontrar a solução geral e a solução particular.

b) Qual o valor limite da corrente?

c) Esboce o gráfico da corrente contra o tempo.

d) Quando a corrente atinge 90% do seu valor limite?

Guia de Atividades 7

Atividade A7

Suponha que uma população cresce de acordo com o modelo logístico $\frac{dP}{dt} = kP - \frac{k}{L} P^2$.

a) Resolva a equação diferencial para encontrar a solução geral.

b) Considere que inicialmente existam 10.000 habitantes e que $k = 0{,}04 / ano$ e $L = 50.000$ habitantes e encontre a solução particular.

c) Determine o número de pessoas depois de 5 anos e depois de 10 anos.

d) Quando a população chegará a 20.000 pessoas?

Atividade B7

A equação diferencial $\frac{dy}{dt} = ky(L - y)$ descreve a taxa de disseminação de uma doença em função do tempo (em dias) numa população de L indivíduos, onde y representa o número de indivíduos que têm a doença no instante t e *k* é uma constante de proporcionalidade positiva que depende da natureza da doença e dos padrões de comportamento dos indivíduos. A taxa segundo a qual a doença se espalha irá depender de quantos indivíduos estão afetados (*y*) e de quantos não estão (*L*-*y*). Resolva a equação diferencial para encontrar a solução geral do número de indivíduos que têm a doença no instante t.

I. A equação diferencial $\frac{dy}{dt} = 0{,}0002\, y(5000 - y)$ descreve a taxa de variação do número de pessoas que contraíram uma certa doença, em função do tempo, em dias.

a) Considerando que inicialmente 100 pessoas estavam infectadas, resolva a equação diferencial para obter a função que fornece o número de pessoas doentes em função do tempo.

b) Determine o número de pessoas doentes depois de 5 dias, 10 dias e 20 dias.

c) Quando o número de pessoas doentes chegará a 4.000?

II) Suponha que em um alojamento universitário existam 1000 estudantes. Após as férias, 20 estudantes do alojamento retornam com gripe e, 5 dias mais tarde, 35 estudantes tem gripe.

a) Resolva o problema de valor inicial e use os dados para encontrar o valor de k.

b) Determine o número de estudantes com gripe depois de 10 dias e 20 dias.

APÉNDICE 3

Apresentación Ausubeliana del Estudio 1

Equações Diferenciais

- O que são?
- Classificação.
- Para que servem?
- Como se resolve?
- Tipos de solução.

Definição e Classificação

São equações que envolvem uma função e suas derivadas

- Equações diferenciais ordinárias – EDO

Exemplo: $\frac{dN}{dt} = kN$

- Equações diferenciais parciais – EDP

Exemplo: $\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0$

Aplicações

- Decaimento radioativo: $\frac{dN}{dt}=kN$
- Crescimento populacional: $\frac{dP}{dt}=kP$
- Absorção de medicamentos: $\frac{dy}{dt}=ky$
- Reações químicas: $\frac{dC_A}{dt}=kC_A$

Aplicações

- Problemas de mistura: $\frac{dQ}{dt}=taxa_{entrada}-taxa_{saída}$
- Queda de corpos: $v'+\frac{k}{m}v=g$
- Circuitos Elétricos: $L\frac{di}{dt}+Ri=V$
- Resfriamento de corpos: $\frac{dT}{dt}=k(T-T_m)$

Aplicações

- Modelo Logístico: $\frac{dP}{dt} = kP - \frac{k}{L} P^2$

- Disseminação de doenças: $\frac{dy}{dt} = ky(L-y)$

Técnicas Analíticas de Resolução

- Separação de variáveis: $M(y)\,dy = N(x)\,dx$

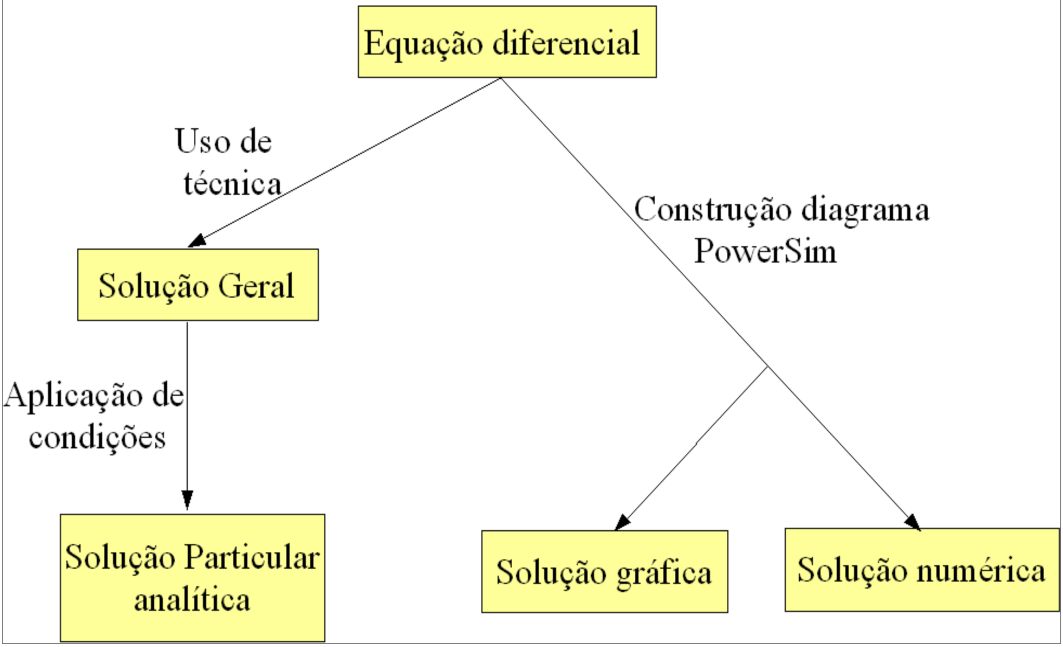
  Resolução: $\int M(y)\,dy = \int N(x)\,dx$

- Lineares: $y' + p(x)\,y = q(x)$

  Resolução: $FI : e^{\int p(x)\,dx}$

  $$\int \frac{d(y \cdot FI)}{dx} = \int q(x) \cdot FI$$

Soluções



Exemplos de solução analítica

Equação diferencial → Solução Geral → Condições → Solução Particular

$$\frac{dP}{dt}=kP \rightarrow P=P_0 e^{kt} \rightarrow \begin{matrix} P_0=1.000 \; pessoas \\ k=0{,}02/anos \end{matrix} \rightarrow P=1.000\, e^{0{,}02t}$$

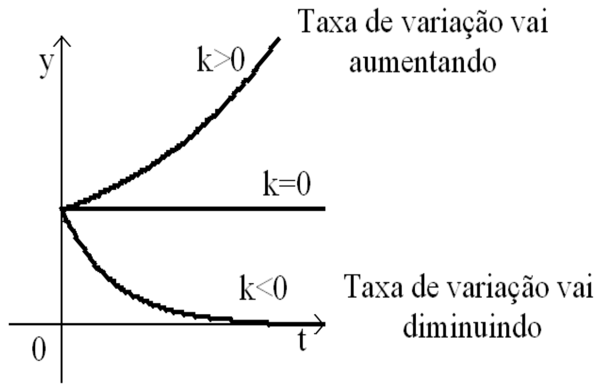
$$L\frac{di}{dt}+Ri=V \rightarrow i=\frac{V}{R}+C\, e^{\frac{-R}{L}t} \rightarrow \begin{matrix} V=60\,V \\ R=12\, ohms \\ L=4\, mH \\ i(0)=0\,A \end{matrix} \rightarrow i=\frac{60}{12}-5\, e^{\frac{-12}{0{,}004}t}$$

$$\frac{dT}{dt}=k(T-T_m) \rightarrow T=C\, e^{kt}+T_m \rightarrow \begin{matrix} C=50\,^\circ C \\ T_m=25\,^\circ C \\ k=-0.07/min \end{matrix} \rightarrow T=50\, e^{-0.07t}+25$$

Exemplos de solução gráfica

Crescimento e decaimento exponencial

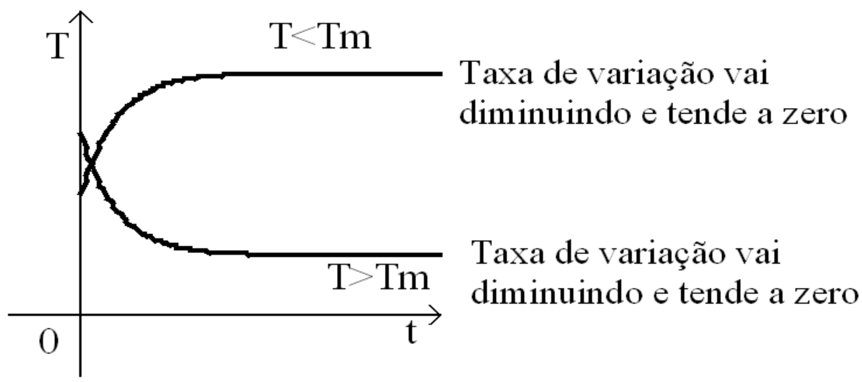
$$\frac{dy}{dt} = ky$$



Exemplos de solução gráfica

Lei do Resfriamento de Newton

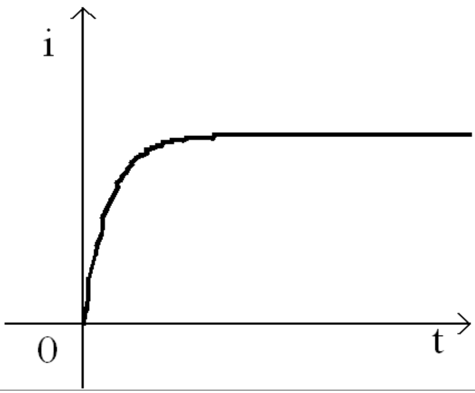
$$\frac{dT}{dt} = k\,(T - T_m)$$



Exemplos de solução gráfica

Circuito Elétrico RL

$$L\frac{di}{dt}+Ri=V$$

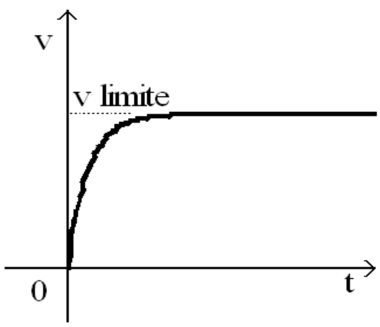


Taxa de variação vai diminuindo e tende a zero

Exemplos de solução gráfica

Queda de corpos

$$v'+\frac{k}{m}v=g$$

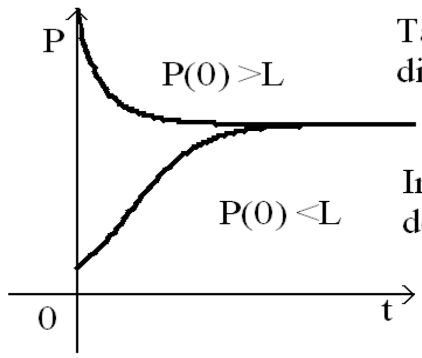


Taxa de variação vai diminuindo e tende a zero

Exemplos de solução gráfica

Crescimento logístico

$$\frac{dP}{dt} = kP - \frac{k}{L}P^2$$



Taxa de variação vai diminuindo e tende a zero

Inicialmente a taxa de variação aumenta, depois diminui e tende a zero

APÉNDICE 4

Cuestionario aplicado a los alumnos en el Estudio 1

Questionário dos alunos

1. Idade: ___________________
2. Trabalha: (   ) sim   (   ) não
Em caso positivo, em que atividade?
____
3. Curso de graduação que freqüenta:
____
4. O foco deste questionário é a aprendizagem das equações diferenciais. Assinale com um X a coluna correspondente à alternativa que melhor expresse sua opinião sobre o seu desempenho nesta disciplina, de acordo com os seguintes códigos:
CP – concordo plenamente
C – concordo
SO – sem opinião
D – discordo
DT – discordo totalmente

	CP	***C***	***SO***	***D***	***DT***
Considero que fui bom (boa) aluno(a).					
Considero o conteúdo trabalhado relevante para a minha formação.					
Tive dificuldades para entender, interpretar as atividades solicitadas.					
Dediquei pouco esforço ao estudo desta disciplina.					
Não assisti a maior parte das aulas desta disciplina.					
Tenho a impressão que aprendi bastante nesta disciplina.					
A metodologia favoreceu minha aprendizagem.					
As atividades com o computador favoreceram o meu aprendizado.					
Tive dificuldades para realizar as tarefa com o computador.					
As atividades em grupo foram produtivas.					
Tive poucas iniciativas para resolver eventual falta de embasamento.					
As aulas deveriam ser bem diferentes.					
O tempo para realizar as tarefas foi suficiente.					
Considero que fui bastante participativo no meu grupo de trabalho.					
Busquei sempre compensar minhas deficiências.					
Considero que o conteúdo foi apresentado de forma clara.					
Tive dificuldades para realizar os cálculos.					
Gostei das aulas.					
Considero que o tempo das aulas foi bem aproveitado.					
Consigo estabelecer relações entre as equações diferencias e outros conteúdos estudados.					
Considero que a atuação da professora contribuiu para a minha aprendizagem.					

5. O que você imagina que poderia ser feito para melhorar as aulas e facilitar a sua aprendizagem?

APÉNDICE 5

Test inicial del Estudio 2

Centro Universitário UNIVATES

Disciplina de Cálculo III - 2007/A

Professora Maria Madalena Dullius

Este teste é constituído por 27 questões, sendo 2 questões de resposta livre e 25 questões de escolha múltipla. Dentre as alternativas escolha **apenas uma**, a que melhor responde à questão, assinalando-a na grade em anexo.

Não faça marcas nestas folhas. Responda a todas as questões no anexo.

1) Em suas próprias palavras, como você define a derivada?

2) Descreva, em linguagem discursiva, a expressão $\frac{dy}{dx}$.

As questões de 3 a 6 referem-se ao seguinte enunciado:
Seja $T(t)$ a temperatura em $°C$ e t o tempo em min .

3) Qual a unidade de $T'(t)$?
a) $°C/min$
b) $°C$
c) min
d) $nenhuma\ ; T'(t)\ é\ adimensional$

4) O que significa $T'(5)$?
a) A temperatura de $5°C$.
b) Uma variação de temperatura de $5°C/min$.
c) A temperatura no instante $t=5\,min$.
d) A taxa instantânea de variação da temperatura, no instante $t=5\,min$.

5) Se a taxa de variação da temperatura em função do tempo é constante e menor do que zero, podemos afirmar que:
a) a temperatura é negativa.
b) a variação de temperatura está diminuindo.
c) a temperatura está diminuindo.
d) nada se pode afirmar.

6) Qual o significado da expressão $\frac{dT}{dt}$?
a) A temperatura dividida pelo tempo.
b) A taxa de variação da temperatura em relação ao tempo.
c) A derivada da temperatura dividida pela derivada do tempo.
d) A variação da temperatura dividida pela derivada do tempo.

As questões de 7 a 9 referem-se ao gráfico da função $y = f(x)$ mostrado na Figura 1.

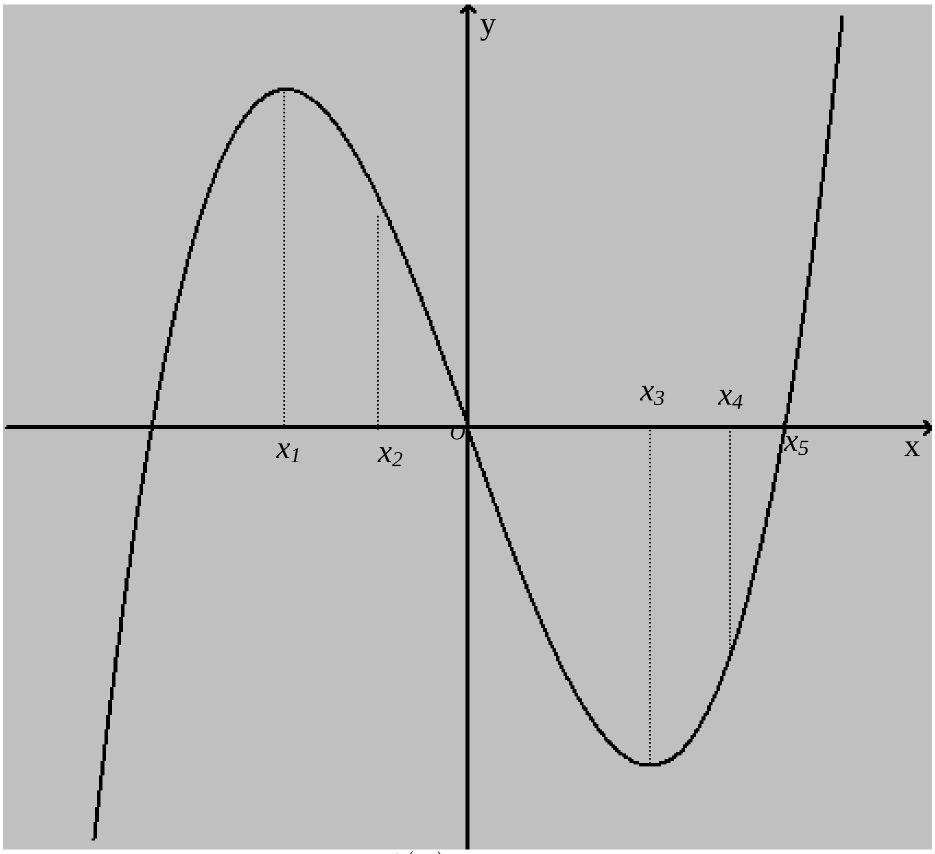


Figura 1: Gráfico da função $y = f(x)$

7) Em qual dos seguintes pontos indicados no eixo x da Figura 1, o valor de $f'(x)$ é maior?

a) x_1 b) x_2 c) x_3 d) x_4

8) Em qual dos seguintes pontos indicados no eixo x da Figura 1, o valor de $f'(x)$ é menor?

a) x_1 b) x_2 c) x_3 d) x_4

9) Em qual dos seguintes pontos indicados no eixo x da Figura 1, o valor de $f'(x)$ é zero?

a) x_2 b) x_3 c) x_4 d) x_5

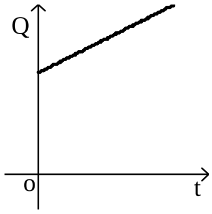
10) Se o gráfico de uma função for uma parábola, então o gráfico da derivada desta função será:

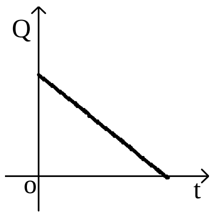
a) uma reta.
b) uma parábola.
c) uma hipérbole.
d) uma curva que não pode ser definida sem ter a função explícita.

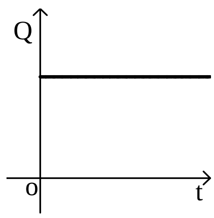
As questões de 11 a 15 referem-se ao seguinte enunciado:

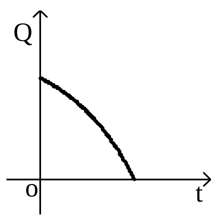
Considere uma toalha molhada colocada para secar em um varal. Sabe-se que ela seca ao ar livre a uma taxa que é proporcional à quantidade de água existente na toalha e, que a cada duas horas a quantidade de água na toalha se reduz a metade.

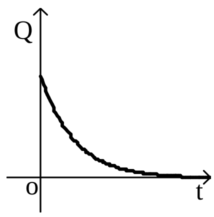
11) Qual gráfico melhor representa a quantidade de água (Q) na toalha em função do tempo (t), após ela ter sido colocada no varal?

a)


b)


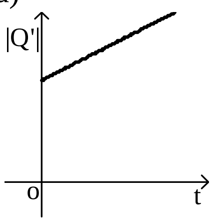
c)


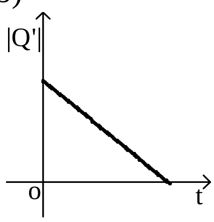
d)


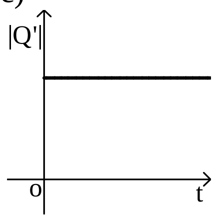
e)


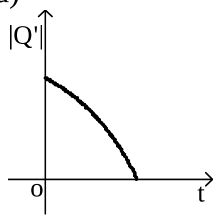
12) Quantas horas são necessárias para que a quantidade de água na toalha seja reduzida a 25% da quantidade inicial (ao ser colocada no varal)?
a) 1 hora
b) 2 horas
c) 3 horas
d) 4 horas

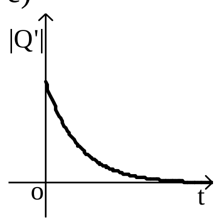
13) Qual gráfico melhor representa o módulo da taxa de saída de água $(|Q'|)$ na toalha em função do tempo (t), após ela ter sido colocada no varal?

a)


b)


c)


d)


e)


14) Se dobrarmos a quantidade inicial de água na toalha, o tempo que leva para que a quantidade inicial de água se reduza à metade:
a) dobra.
b) se reduz à metade.
c) não se altera.
d) quadruplica.

15) Se considerarmos o tempo em horas, é correto afirmar que:
a) em todas as horas a quantidade de água que sai da toalha é a mesma.
b) a quantidade de água que sai da toalha, por hora, vai diminuindo.
c) a quantidade de água que sai da toalha, por hora, vai aumentando.
d) a taxa de variação da quantidade de água na toalha é constante.

As questões de 16 a 18 referem-se ao seguinte enunciado:
Cada uma das curvas da figura 2 representa o saldo em uma conta bancária na qual foi feito um único depósito inicial.

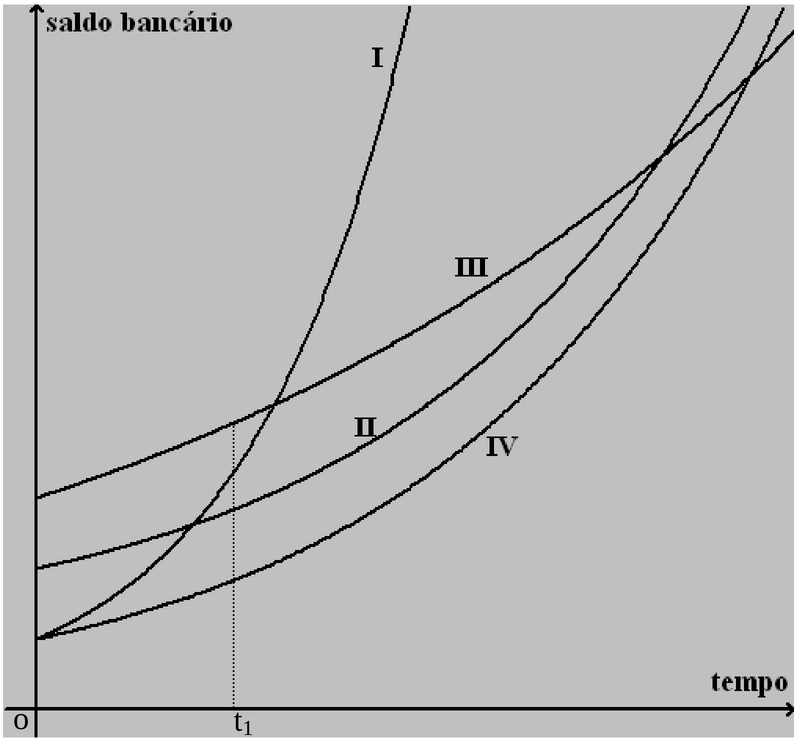


Figura 2: Gráfico do saldo bancário em função do tempo

16) A curva que representa o maior depósito inicial é:
a) I b) II c) III d) IV

17) A curva que no instante t_1 apresenta a maior taxa de crescimento do saldo da conta bancária é:
a) I b) II c) III d) IV

18) As duas curvas que representam o mesmo depósito inicial são:
a) I e III b) II e IV c)II e III d) I e IV

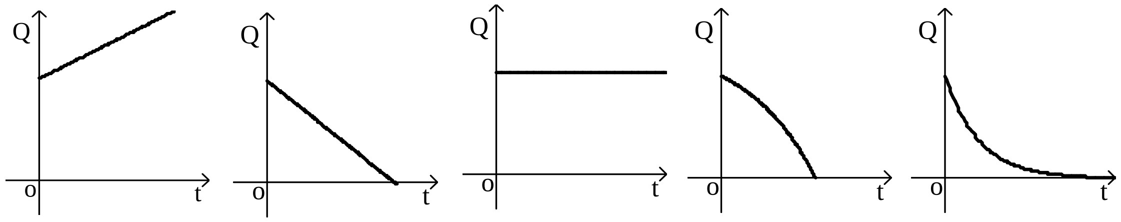
As questões 19 e 20 referem-se ao seguinte enunciado:
Após um ovo ser fervido em água, ele é deixado sobre uma mesa e esfria a uma taxa proporcional à diferença entre a temperatura do ovo e a temperatura do ar que o cerca (Lei do resfriamento de Newton). Considere que a temperatura do ar permaneça constante $(20^{\circ}C)$.

19) À medida que o ovo esfria, o módulo da taxa de resfriamento:
a) não se altera, porque a temperatura do ar é constante.
b) diminui, pois a diferença entre a temperatura do ovo e a temperatura do ar que o cerca diminui.
c) aumenta, porque a temperatura do ovo diminui.
d) tende a um valor constante diferente de zero.

20) A longo prazo, o módulo da taxa de resfriamento do ovo:
a) aumenta até $20\,^{\circ}C$.
b) aproxima-se da temperatura ambiente.
c) tende a zero.
d) tende a um valor constante diferente de zero.

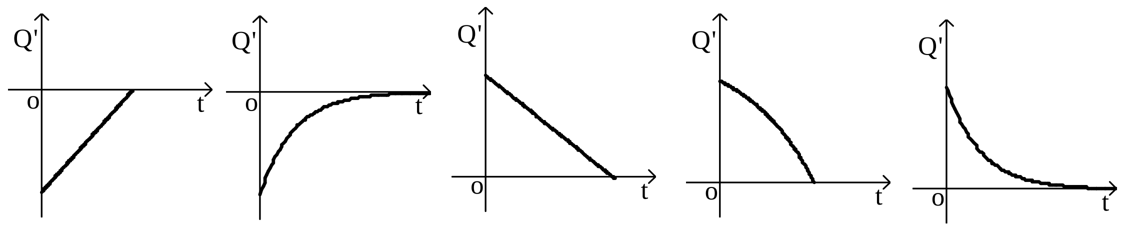
As questões de 21 a 23 referem-se ao seguinte enunciado:
Considere um tanque com uma quantidade inicial de água, em que há um furo na base por onde, a cada minuto, sai 10% da água existente no tanque.

21) Qual gráfico melhor representa a quantidade de água (Q) no tanque em função do tempo (t) é:



a) b) c) d) e)

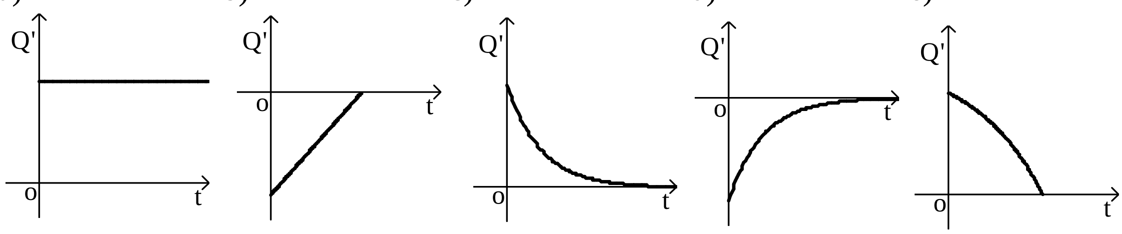
22) Qual gráfico melhor representa a taxa de variação da quantidade de água (Q') no tanque em função do tempo (t) é:



a) b) c) d) e)

23) Imagine agora uma torneira colocando água no tanque a um fluxo de $10\,litros/min$ e que a quantidade inicial de água no tanque é de 200 litros. O gráfico que melhor representa a taxa de variação da quantidade de água (Q') no tanque em função do tempo (t) é:

a) b) c) d) e)



As questões 24 e 25 referem-se ao seguinte enunciado:

O gráfico da figura 3 representa o tamanho de uma população (P), em número de pessoas, em função do tempo (t), em anos.

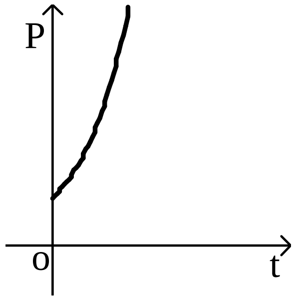


Figura 3: Gráfico de uma população em função do tempo

24) É correto afirmar que:
a) inicialmente a população está aumentando mais.
b) inicialmente a população está aumentando menos.
c) todos os anos a população aumenta do mesmo número de pessoas.
d) somente analisando o gráfico não é possível avaliar o crescimento da população.

25) Entende-se a derivada da população em função do tempo no instante t_1, como sendo:
a) o valor da população no instante t_1.
b) a variação do valor da população no intervalo de tempo entre $t=0$ e $t=t_1$.
c) a variação do valor da população no intervalo de tempo entre $t=0$ e $t=t_1$, dividida por t_1.
d) a taxa instantânea de variação da população, no instante $t=t_1$.

As questões 26 e 27 referem-se ao seguinte enunciado:

O gráfico da figura 4 representa a taxa de variação de uma certa população (P') em função do tempo (t), em anos.

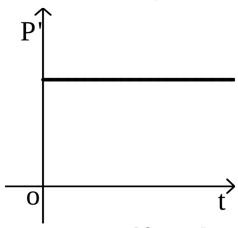


Figura 4: Gráfico da taxa de variação de uma população em função do tempo.

26) É correto afirmar que:
a) a população não está aumentando nem diminuindo.
b) todos os anos o aumento no número de pessoas é o mesmo.
c) todos os anos a população aumenta com o mesmo percentual.
d) o percentual de óbitos é, necessariamente, nulo no período considerado.

27) A função que melhor descreve o tamanho da população em função do tempo é:

a) linear b) quadrática
c) exponencial d) constante

Centro Universitário UNIVATES
Disciplina de Cálculo III - 2007/A
Professora Maria Madalena Dullius
Aluno: ________________________________

Folha de respostas

1.____
____

2.____
____

Dentre as alternativas escolha **apenas uma**, a que melhor responde à questão, assinalando-a na grade.

questão	***alternativa***				
3	a	b	c	d	
4	a	b	c	d	
5	a	b	c	d	
6	a	b	c	d	
7	a	b	c	d	
8	a	b	c	d	
9	a	b	c	d	
10	a	b	c	d	
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	
15	a	b	c	d	
16	a	b	c	d	
17	a	b	c	d	
18	a	b	c	d	
19	a	b	c	d	
20	a	b	c	d	
21	a	b	c	d	e
22	a	b	c	d	e
23	a	b	c	d	e
24	a	b	c	d	
25	a	b	c	d	
26	a	b	c	d	
27	a	b	c	d	

APÉNDICE 6

Test final del Estudio 2

Centro Universitário UNIVATES
Disciplina de Cálculo III - 2007/A
Professora Maria Madalena Dullius

Este teste é constituído por 32 questões de escolha múltipla. Dentre as alternativas escolha **apenas uma**, a que melhor responde à questão, assinalando-a na grade em anexo.
Não faça marcas nestas folhas. Responda a todas as questões no anexo.

As questões 1 e 2 referem-se ao gráfico da função $y=f(x)$ mostrado na Figura 1.

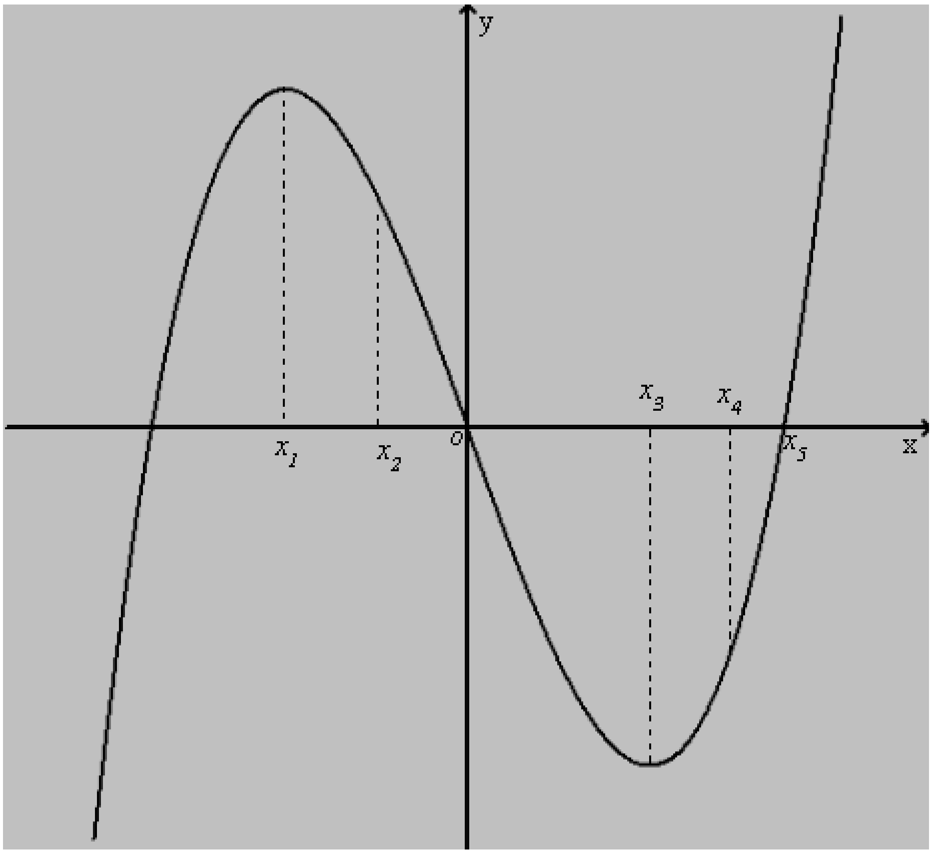


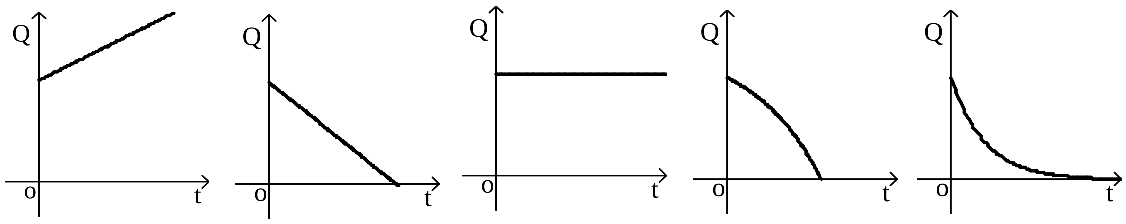
Figura 1: Gráfico da função $y=f(x)$

1) Em qual dos seguintes pontos indicados no eixo x da Figura 1, o valor de $f'(x)$ é maior?
a) x_1 b) x_2 c) x_3 d) x_5

2) Em qual dos seguintes pontos indicados no eixo x da Figura 1, o valor de $f'(x)$ é zero?
a) x_2 b) x_3 c) x_4 d) x_5

As questões de 3 a 6 referem-se ao seguinte enunciado:
Considere uma toalha molhada colocada para secar em um varal. Sabe-se que ela seca ao ar livre a uma taxa que é proporcional à quantidade de água existente na toalha e que a cada duas horas a quantidade de água na toalha se reduz à metade da quantidade existente.

3) Qual gráfico melhor representa a quantidade de água (Q) na toalha em função do tempo (t), após ela ter sido colocada no varal?



a) b) c) d) e)

4) Se dobrarmos a quantidade inicial de água na toalha, o tempo que leva para que a quantidade inicial de água se reduza à metade:
a) dobra.
b) se reduz à metade.
c) não se altera.
d) quadruplica.

5) Se considerarmos o tempo em horas, é correto afirmar que:
a) em todas as horas a quantidade de água que sai da toalha é a mesma.
b) a quantidade de água que sai da toalha, por hora, vai diminuindo.
c) a quantidade de água que sai da toalha, por hora, vai aumentando.
d) a taxa de variação da quantidade de água na toalha é constante.

6) Seja k uma constante, a equação diferencial que melhor representa esta situação é:
a) $\frac{dQ}{dt}=kQ$
b) $\frac{dQ}{dt}=kt$
c) $\frac{dQ}{dt}=kt-Q$
d) $\frac{dQ}{dt}=Q-k$

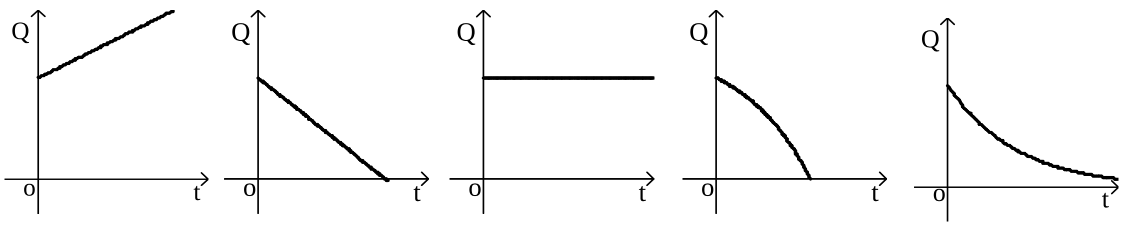
As questões 7 e 8 referem-se ao seguinte enunciado:
Após ser fervido em água, um ovo é deixado sobre uma mesa e esfria a uma taxa proporcional à diferença entre a temperatura do ovo e a temperatura do ar que o cerca (Lei do resfriamento de Newton). Considere que a temperatura do ar permaneça constante $(20^\circ C)$.

7) À medida que o ovo esfria, o módulo da taxa de resfriamento:
a) não se altera, porque a temperatura do ar é constante.
b) diminui, pois a diferença entre a temperatura do ovo e a temperatura do ar que o cerca diminui.
c) aumenta, porque a temperatura do ovo diminui.
d) tende a um valor constante diferente de zero.

8) Sendo C uma constante arbitrária que depende das condições iniciais e k um parâmetro associado à taxa de resfriamento, podemos dizer que a equação que melhor descreve a temperatura (T) do ovo em função do tempo (t) é:
a) $T=20+Ce^{kt}$
b) $T=20e^{kt}$
c) $T=Ce^{kt}-20$
d) $T=20Ce^{kt}$

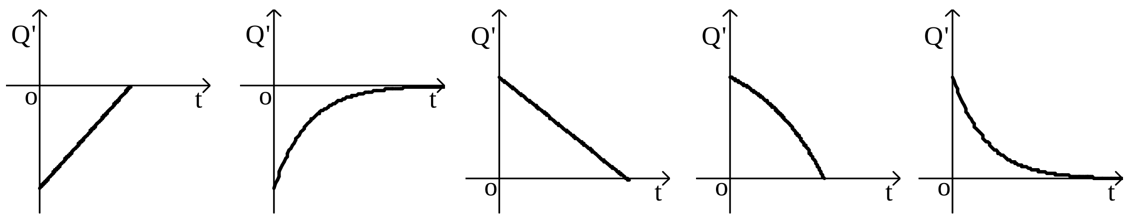
As questões de 9 a 13 referem-se ao seguinte enunciado:
Considere um tanque com uma quantidade inicial de água, em que há um furo na base, e admita que a quantidade de água no tanque diminui a uma taxa de 10%, por minuto, da quantidade de água nele contida.

9) Qual gráfico melhor representa a quantidade de água (Q) no tanque em função do tempo (t) é:



a) b) c) d) e)

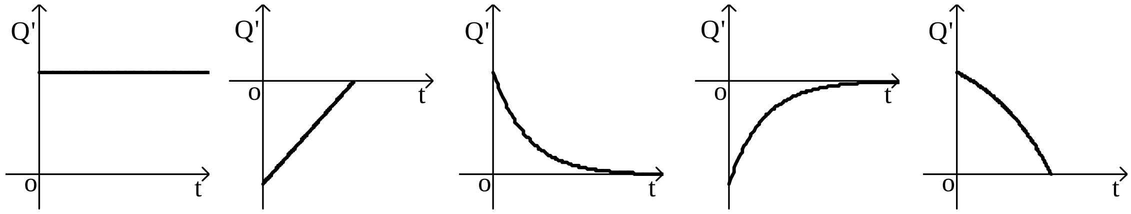
10) Qual gráfico melhor representa a taxa de variação da quantidade de água (Q') no tanque em função do tempo (t) é:



a) b) c) d) e)

11) Representando por Q_0 o valor $Q(0)$, a equação que melhor descreve a quantidade de água no tanque em função do tempo é:
a) $Q=Q_0e^{0,1t}$
b) $Q=Q_0e^{-10t}$
c) $Q=Q_0e^{-0,1t}$
d) $Q=Q_0-e^{0,1t}$

12) Imagine agora uma torneira colocando água no tanque a um fluxo de $10\, litros/min$ e que a quantidade inicial de água no tanque seja de 200 litros. O gráfico que melhor representa a taxa de variação da quantidade de água (Q') no tanque em função do tempo (t) é:



a) b) c) d) e)

13) A equação diferencial que melhor representa esta situação é:

a) $\frac{dQ}{dt}=10-0,1Q$

b) $\frac{dQ}{dt}=10Q$

c) $\frac{dQ}{dt}=(10-0,1)Q$

d) $\frac{dQ}{dt}=-0,1t+10$

As questões de 14 e 15 referem-se ao seguinte enunciado:

O gráfico da figura 2 representa o tamanho de uma população (P), em número de pessoas, em função do tempo (t), em anos.

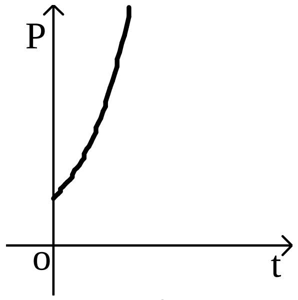


Figura 2: Gráfico de uma população em função do tempo

14) É correto afirmar que:
a) inicialmente a população está aumentando mais.
b) inicialmente a população está aumentando menos.
c) todos os anos a população aumenta do mesmo número de pessoas.
d) somente analisando o gráfico não é possível avaliar o crescimento da população.

15) Seja k uma constante qualquer, a equação diferencial que melhor representa esta situação é:

a) $\frac{dP}{dt}=k+t$

b) $\frac{dP}{dt}=kt+P$

c) $\frac{dP}{dt}=k+P$

d) $\frac{dP}{dt}=kP$

As questões 16 e 17 referem-se ao seguinte enunciado:

O gráfico da figura 3 representa a taxa de variação de uma certa população (P') em função do tempo (t), em anos.

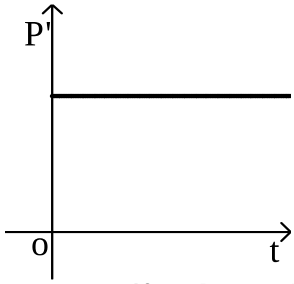


Figura 3: Gráfico da taxa de variação de uma população em função do tempo.

16) É correto afirmar que:
a) a população não está aumentando nem diminuindo.
b) todos os anos o aumento no número de pessoas é o mesmo.
c) todos os anos a população aumenta com o mesmo percentual.
d) o percentual de óbitos é, necessariamente, nulo no período considerado.

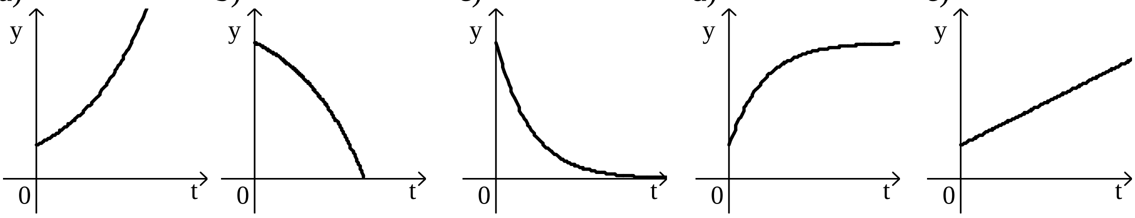
17) A função que melhor descreve o tamanho da população em função do tempo é:
a) linear
b) quadrática
c) exponencial
d) constante

As questões de 18 a 21 referem-se à seguinte equação diferencial: $\frac{dy}{dt}=ky$, onde $y>0$.

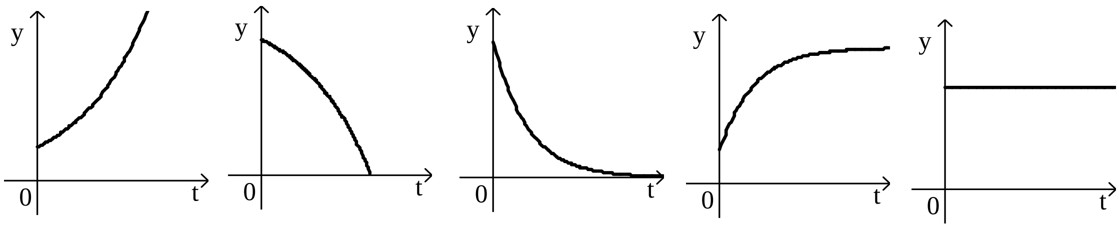
18) É correto afirmar que:
a) para qualquer k o valor de y aumenta exponencialmente.
b) se $k=0$ o valor de y tende a zero.
c) para $k\geq 0$ o valor de y aumenta exponencialmente.
d) se $k=0$ o valor de y não varia.

19) Se $k>0$, o gráfico que melhor representa y em função de t é:

a) b) c) d) e)



20) Se $k=0$, o gráfico que melhor representa y em função de t é:



a) b) c) d) e)

21) A solução da equação diferencial que satisfaz $y(0)=y_0$ é:

a) $y=y_0 e^{kt}$

b) $y=y_0+e^{kt}$

c) $y=y_0+kt$

d) $y=y_0-e^{kt}$

22) O gráfico da figura 4 representa y em função do tempo t.

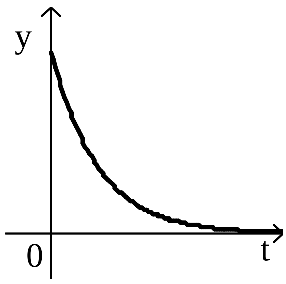


Figura 4: Gráfico de y em função do tempo t.

Sabendo que $k<0$, a equação diferencial que melhor representa esta situação é:

a) $\dfrac{dy}{dt}=k+t$

b) $\dfrac{dy}{dt}=ky$

c) $\dfrac{dy}{dt}=y-k$

d) $\dfrac{dy}{dt}=y-kt$

As questões de 23 a 25 referem-se ao seguinte enunciado:

Em uma região de muitas árvores, os restos vegetais se acumulam no solo a uma taxa de 5 gramas por cm^3 por ano. Estes restos se decompõem a uma taxa de 70% ao ano. $Q(t)$ **representa a quantidade de restos vegetais** (g/cm^3) **no tempo** t **.**

23) A equação que descreve a taxa de variação de restos vegetais no solo em função do tempo é:

a) $\frac{dQ}{dt}=5-0{,}7t$

b) $\frac{dQ}{dt}=5e^{0{,}7t}$

c) $\frac{dQ}{dt}=5t-0{,}7Q$

d) $\frac{dQ}{dt}=5-0{,}7Q$

24) É correto afirmar que:

a) a longo prazo o acúmulo de restos vegetais tende a zero.

b) o acúmulo de restos vegetais aumenta infinitamente.

c) a longo prazo o acúmulo de restos vegetais tende a se estabilizar em um valor diferente de zero.

d) o acúmulo de restos vegetais diminui infinitamente.

25) Dado que $Q(0)=Q_0$, a equação que melhor descreve a quantidade do acúmulo de restos vegetais no solo em função do tempo é:

a) $Q=5e^{-0{,}7t}$

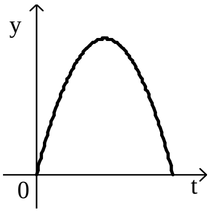
b) $Q=Q_0e^{-0{,}7t}$

c) $Q=\frac{50}{7}+(Q_0-\frac{50}{7})e^{-0{,}7t}$

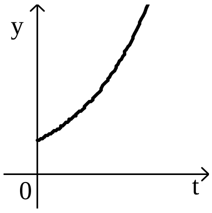
d) $Q=5+(Q_0-\frac{50}{7})e^{-0{,}7t}$

As questões 26 e 27 referem-se à seguinte equação diferencial $\frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} = b$.

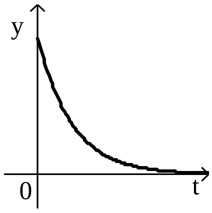
26) Se $a = 0$ e b é uma constante negativa, o gráfico que melhor representa y em função de t é:



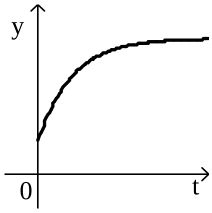
a)



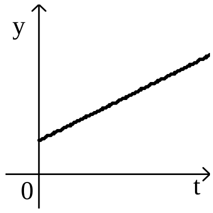
b)



c)



d)



e)

27) Se a é uma constante qualquer e $b = 0$, a equação que representa a solução da equação diferencial é:

a) $y = ce^{-at}$

b) $y = c_1 e^{-at} + c_2 e^{at}$

c) $y = c_1 e^{-at} + c_2 t\, e^{-at}$

d) $y = c_1 e^{-at} + c_2$

28) Dada a equação diferencial $\frac{dy}{dt} + ay = b$, onde a é uma constante qualquer e $b = 0$, a equação que melhor representa a solução da equação diferencial é:

a) $y = c + e^{-at}$

b) $y = ce^{-at}$

c) $y = c_1 e^{-at} + c_2 e^{bt}$

d) $y = c - at$

29) Dada a equação diferencial $\frac{dy}{dt} = ky(L - y)$, e sabendo que $y(0) = y_0 < L$, é correto afirmar que:

a) y tende a L com o passar do tempo.

b) y aumenta infinitamente.

c) y tende a zero.

d) y diminui infinitamente.

30) O gráfico da figura 5 representa y em função do tempo t.

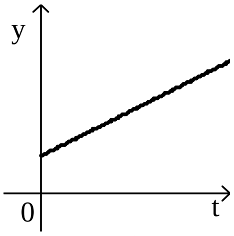
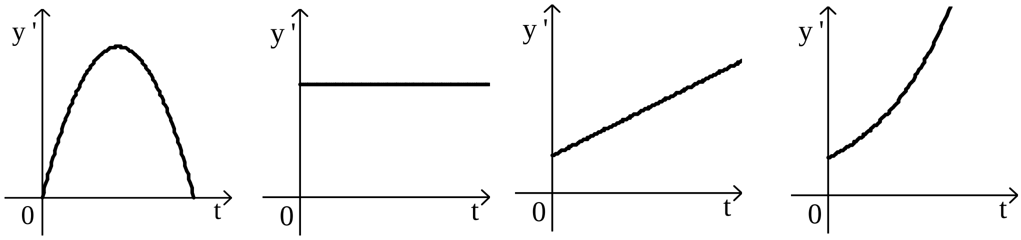


Figura 5: Gráfico de y em função do tempo t.

O gráfico que melhor representa y' em função de t é:



a) b) c) d)

31) O gráfico da figura 6 representa y em função do tempo t.

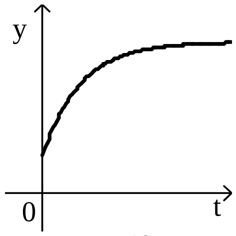


Figura 6: Gráfico de y em função do tempo t.

Sendo $a>0$ e $b<0$, a equação diferencial que melhor representa esta situação é:

a) $\frac{dy}{dt}=at+by$

b) $\frac{dy}{dt}=ae^{bt}$

c) $\frac{dy}{dt}=a+by$

d) $\frac{dy}{dt}=\frac{a}{b}y$

32) Em uma região, o número de pessoas infectadas, por dia, por uma doença é representada pela equação $\frac{dN}{dt}=kN$. Se $k>0$ é correto afirmar que:

a) o número de pessoas infectadas em função do tempo não varia.
b) o número de pessoas infectadas em função do tempo aumenta em mesmo número todos os dias.
c) o número de pessoas infectadas em função do tempo aumenta o mesmo percentual todos os dias.
d) o número de pessoas infectadas tende a zero.

Centro Universitário UNIVATES   Cálculo III - 2007/A
Professora Maria Madalena Dullius   Aluno: ____________________

Folha de respostas

Dentre as alternativas escolha **apenas uma**, a que melhor responde à questão, assinalando-a na grade.

questão	***alternativa***				
1	a	b	c	d	
2	a	b	c	d	
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	
5	a	b	c	d	
6	a	b	c	d	
7	a	b	c	d	
8	a	b	c	d	
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	
14	a	b	c	d	
15	a	b	c	d	
16	a	b	c	d	
17	a	b	c	d	
18	a	b	c	d	
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e
21	a	b	c	d	
22	a	b	c	d	
23	a	b	c	d	
24	a	b	c	d	
25	a	b	c	d	
26	a	b	c	d	e
27	a	b	c	d	
28	a	b	c	d	
29	a	b	c	d	
30	a	b	c	d	
31	a	b	c	d	
32	a	b	c	d	

APÉNDICE 7

Questiones de la entrevista semi-estructurada del Estudio 2

Entrevista semi-estruturada

1. De forma geral, gostaria que comentasses um pouco sobre o que achaste da disciplina como um todo.

2. Pensando em termos das equações diferenciais, consideras que tenhas aprendido alguma coisa com o uso do computador? Se tiveres, o que e como?

3. Quais foram as tuas principais dificuldades em relação:
- à disciplina?
- ao conteúdo?
- aos *softwares* (excel, powersim) utilizados?
- à matemática envolvida?

4. Em relação ao trabalho em grupo, o que achaste? Percebeste alguma vantagem/desvantagem? Qual(is)?

5. Se alguns amigos de outra área perguntassem, o que são/para que servem/qual a importância das equações diferenciais, o que dirias a eles?

6. Percebeste alguma relevância no estudo de equações diferenciais para o curso? O quê?

7. Qual a diferença entre solução geral e solução particular de uma equação diferencial?

8. Considere que estejas despoluindo um rio. Sabe-se que a quantidade de poluentes que são eliminados por mês é proporcional a quantidade de poluentes que têm no rio no instante t (em meses). Qual é a equação diferencial que expressa matematicamente essa situação? Que informações vocês podem coletar sem resolvê-la? Como é a sua solução gráfica? Como resolverias esta equação diferencial?

9. Como foi o teu envolvimento com a disciplina? O que achas que deverias ter feito para aprender mais?

10. O que pode ser feito para melhorar em relação:
- à disciplina?
- ao conteúdo?
- aos *softwares* (Excel, Powersim) utilizados?
- à matemática envolvida?

APÉNDICE 8

Guías de actividades del Estudio 3

Guia de Atividades 1

Nestas atividades temos como objetivo sua familiarização com o *software* Powersim e, através do estudo de uma situação-problema que envolve um tanque d´água, em que há uma furo por onde pode sair água e uma torneira para enchê-lo, investigar o comportamento do nível de água no tanque em função do tempo e da taxa de entrada e saída de água no tanque. Também o comportamento da solução do problema na forma gráfica será discutida.

Ao modelar um sistema podemos representá-lo de várias maneiras e uma destas é através da elaboração de diagramas de fluxo utilizando a metáfora de Forrester[27]. Forrester considera que existem dois tipos fundamentais de variáveis associados a sistemas dinâmicos: os **níveis** e as **taxas**. Estes podem ser simulados usando o *software* Powersim. O Powersim usa a metáfora de tanques, torneiras e canos. O tanque (estoque ou nível) representa uma quantidade cujo valor inicial pode crescer, decrescer ou permanecer igual. Uma torneira (taxa) conectada a um tanque decide quão rapidamente a quantidade no tanque varia. As constantes são representadas por um losango. O Powersim permite a construção de um modelo através da conexão desses objetos básicos e, fornecendo apenas as relações algébricas o programa gera as equações diferenciais que regem o modelo. Também permite a obtenção de gráficos de quaisquer variáveis contra outras, e contra o tempo, e gera uma tabela de dados.

Na Figura 1.1, apresentamos uma situação onde o nível representa uma população, a taxa representa nascimentos desta população e o k é a constante de crescimento. As setas que ligam a população e o k com a taxa, indicam que a taxa de nascimentos depende do tamanho da população e do valor do k. A nuvem representa uma "fonte" fora do sistema onde o fluxo começa e não existe um ícone específico para criá-la, ela surge junto com o ícone da válvula (torneira). Se a válvula é de entrada a nuvem representa uma "fonte" e aparece no início da válvula e se esta for de saída, a nuvem representa um "sumidouro" onde o fluxo termina, e aparece no final da válvula.

27FORRESTER, J. W. Principles of systems. Portland, OR.: Productivity Press, 1990.

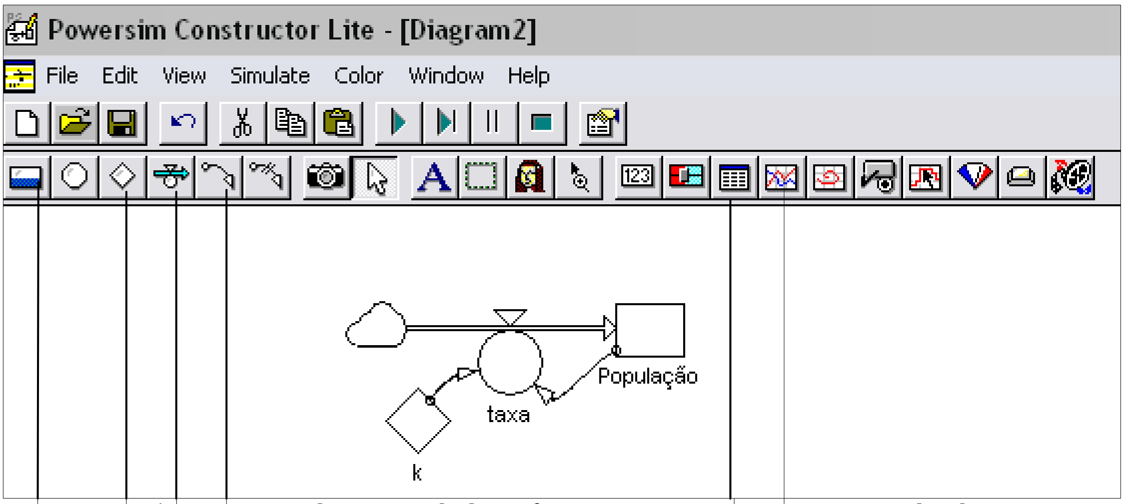


Figura 1.1. Tela principal do *software* Powersim com um exemplo de crescimento populacional.

Usado para interligar uma variável com outra

Permite criar um gráfico de qualquer variável do diagrama.

Serve para criar uma válvula que pode ser ligada à caixa, atuando de modo semelhante a uma torneira que coloca ou retira água de um tanque.

Permite criar uma tabela de qualquer variável apresentada no diagrama.

Usado para representar as constantes

Representa o nível de uma variável. Este varia conforme a taxa de entrada e/ou saída de uma ou mais variáveis que influenciam a caixa.

Vamos construir o diagrama representado acima, considerando que estamos trabalhando com uma população de coelhos, cuja quantidade inicial é de 100 coelhos e esta população está crescendo a uma taxa 8% ao ano.

Para inserir os valores das constantes e variáveis no diagrama, clicamos duas vezes no objeto, por exemplo o tanque, e abre uma janela, conforme a Figura 1.2. Digitamos o valor e clicamos em OK para confirmar. Quando definimos o valor de um objeto que possui dependência de outro, por exemplo a taxa, precisamos definir como estes se relacionam. Veja a Figura 1.2.

Podemos construir tabelas e gráficos referentes a esta situação. Para tal, selecionamos o ícone correspondente, conforme Figura 1.1 e depois clicamos duas vezes sobre o gráfico ou tabela para definir as variáveis.

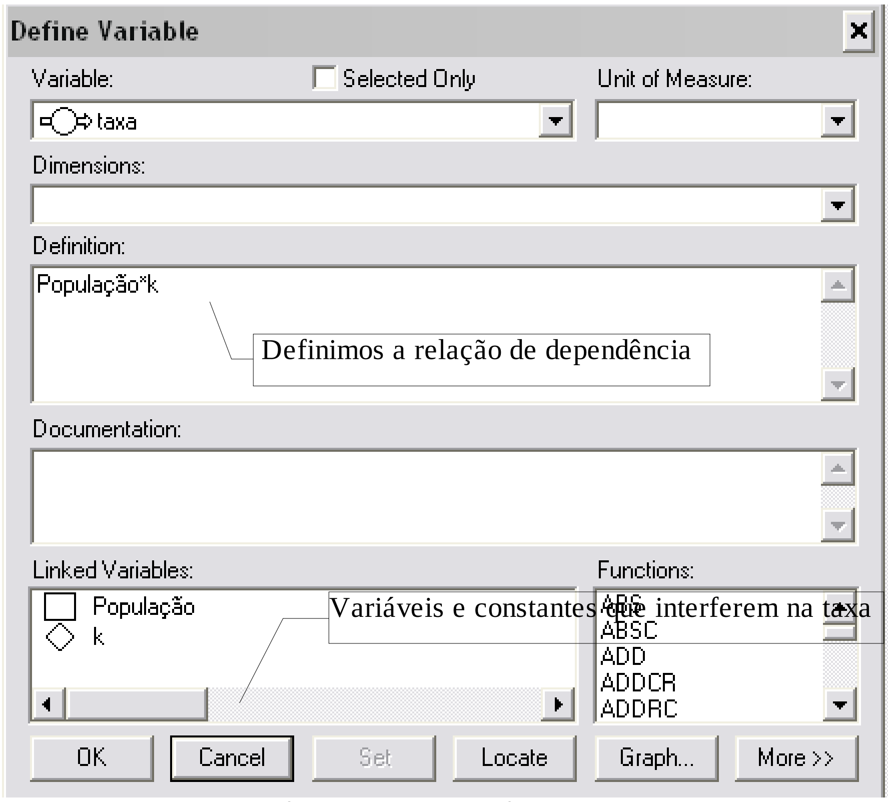


Figura 1.2. Tela onde definimos os valores e funções das constantes e variáveis.

Agora consideremos também que exista uma taxa de morte desses coelhos a um percentual de 2%. Podemos representar esta situação conforme diagrama da Figura 1.3, onde k_1 e k_2 são constantes associadas às taxas da natalidade e mortalidade da população.

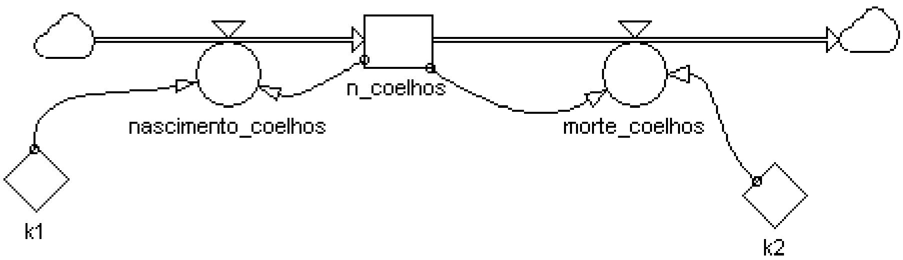


Figura 13. População com taxa de nascimento e taxa de morte.

Atividade A

Considere um tanque com uma quantidade inicial de 100.000 litros de água, em que há um furo na base por onde, a cada hora, sai 10% da água existente no tanque.

I. Esboce o gráfico da **quantidade de água no tanque** em função do tempo.

II. Esboce o gráfico da **quantidade de água que sai para o "sumidouro"** em função do tempo.

III. Construa, com auxílio do *software* Powersim, um diagrama (conforme Figura 1.4) para representar esta situação. Note que o furo na base é representado por uma torneira que retira água do tanque.

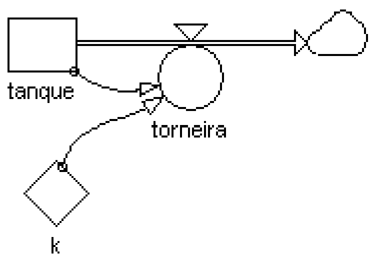


Figura 1.4. Fluxo de saída de água

IV. Construa os gráficos do item I e II com auxílio do Powersim.

V. Como se pode explicar o comportamento da curva descrita no gráfico do item II? Se considerarmos o tempo em horas, é correto afirmar que a quantidade de água que sai do tanque a cada hora é a mesma? Justifique sua resposta.

VI. Acrescente, no diagrama do Powersim, uma torneira colocando água no tanque a um fluxo de $1.000\, litros/hora$. O que acontece com a quantidade de água no tanque a medida que o tempo passa?

VII. Suponha que o tanque de capacidade total de 100.000 litros se encontra, no instante inicial, com 50.000 litros. Escolha valores para a taxa de entrada e saída de água tais que:

a) a quantidade de água no tanque seja menor que 100 litros em aproximadamente 20 horas.

b) o tanque encha em aproximadamente 25 horas.

c) o nível de água do tanque não se altere.

Considerações:

- Para construir diagramas no Powersim para outras situações-problema você pode usar como base os já construídos e simplesmente adaptar as entradas e saídas, os valores das constantes e as relações de dependência.

Guia de Atividades 2

Nestas atividades temos como objetivo abordar a definição, solução e notação de uma equação diferencial e, através do estudo de situações-problema que envolvem o decaimento radioativo, o crescimento populacional e a absorção de medicamentos, investigar o comportamento da solução e da taxa de variação destas situações de acordo com as condições fornecidas, inclusive na forma gráfica. Também exploraremos a associação da descrição de uma situação-problema com a correspondente equação diferencial na forma analítica. E finalmente abordaremos o comportamento da solução de equações diferenciais de acordo com as condições fornecidas.

Materiais radioativos – e especialmente seu lixo – é um tema que preocupa a sociedade contemporânea, tendo em vista suas possíveis conseqüências danosas à vida (humana, vegetal e animal). Materiais radioativos apresentam em sua composição elementos químicos que não são estáveis, porque seus núcleos emitem partículas ou energia eletromagnética.

Atividade A

Consideremos o caso do iodo-131, utilizado nos exames de tiróide, cuja meia-vida é de oito dias[28]. Isto significa que o número de núcleos instáveis, capazes de emitir partículas ou radiação, cairá à metade em 8 dias, e novamente à metade após mais 8 dias e assim por diante. Considerando que no instante inicial existam $N = 1.000.000$ átomos radioativos em certa amostra, construímos a Tabela 2.1.

---

28 http://www.cnen.gov.br/cnen_99/educar/apostilas/radio.pdf

Tabela 2.1: Número de átomos radioativos para diferentes valores de tempo (em dias).

t (dias)	N
0	1000000
8	500000
16	250000
24	125000
32	62500
40	31250
48	15625
56	7813
64	3906
72	1953
80	977
88	488
96	244
104	122

I. Quantos átomos radioativos haverá na amostra ao final de 64 dias?

II. Quantos dias demorarão para que haja em torno de 30 átomos radioativos?

III. Esboce um gráfico do número de átomos radioativos de Iodo-131 contidas na amostra em função do tempo, medido em dias.

IV. É correto afirmar que o número de átomos radioativos da amostra que decaem por dia é constante? (Dizer que um átomo radioativo decaiu significa dizer que se transmutou em outro, porque emitiu partícula ou radiação, deixando de ser radioativo).

V. Suponha que o exame clínico fosse realizado com um elemento químico cuja meia vida fosse de 4 dias e que o número inicial de átomos radioativos fosse o mesmo (1.000.000). Esboce um gráfico do número de átomos radioativos deste elemento químico em função do tempo, medido em dias.

VI. A Figura 2.1 mostra a curva de decaimento de certa quantidade de um elemento radioativo em função do tempo.

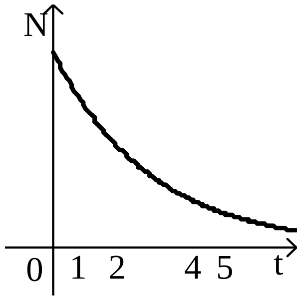


Figura 2.1. Decaimento radioativo

Em qual intervalo de tempo, $1<t<2$ ou $4<t<5$, o decréscimo de átomos radioativos é maior? Explique.

Atividade B

Como podemos construir, no *Powersim,* a situação descrita na atividade A?

Para fazer o diagrama da situação precisamos ter o valor inicial e a taxa de decrescimento k, que em situações de meia-vida é chamada de constante de decaimento radioativo.

I. Construa um diagrama no *Powersim* considerando $k=0.1/dias$ e depois verifique as equações que o programa gerou.

Você encontrará a equação *taxa = n_atomos* k*

A taxa significa a taxa de variação instantânea que pode ser descrita pela derivada, portanto, temos:

$$\frac{dN}{dt}=kN, \qquad \text{Eq. 1}$$

onde N representa o número de átomos e $\frac{dN}{dt}$ a taxa de variação do número de átomos em função do tempo. A Eq.1 informa que **a taxa de variação do número de átomos em relação ao tempo é proporcional ao número de átomos existentes no instante t**.

A Eq. 1 é chamada de uma equação diferencial, porque envolve a derivada de uma função desconhecida (N). A solução desta equação diferencial é

$$N=N_0 \cdot e^{-kt}, \qquad \text{Eq. 2}$$

onde N_0 é a quantidade inicial de átomos radioativos considerado.

Isto pode ser provado analiticamente, lembrando a derivada de uma exponencial, pois se $N = N_0 \cdot e^{-kt}$, $\frac{dN}{dt} = -kN_0 \mathrm{e}^{-kt} = -kN$, que é exatamente a Eq. 1.

Sabendo-se que a solução da equação diferencial Eq. 1 tem a forma dada na Eq. 2, podemos obter a constante de decaimento *k* de um modo simples. Basta lembrar que, por definição, meia-vida é o tempo necessário para que o número de átomos radioativos decaia à metade. Vamos representar a meia-vida por τ. Usando a Eq. 1 obtemos

$$\frac{N}{N_0} = \frac{1}{2} = e^{(-k\tau)}$$

Calculando o logaritmo natural dos dois lados desta equação, temos:

$$\ln(0,5) = -k\tau \quad \text{ou} \quad k = \frac{-\ln(0,5)}{\tau} = \frac{0,69315}{\tau} \qquad \text{Eq.3}$$

Então, se a meia-vida do iodo-131 é $\tau = 8\,dias$, a constante de decaimento dada pela Eq.3 é $k = 0,0866/dias$.

II. Use a constante de decaimento encontrada e construa um diagrama no Powersim para representar a atividade A.

III. Gere a tabela e o gráfico da atividade anterior e compare os resultados com os da atividade A.

Atividade C

Os cientistas aprenderam a deduzir a idade de ossos, pedras, planetas e estrelas através da medida da quantidade de isótopos existentes no material em estudo. Para isto há diferentes métodos, dependendo da escala de tempo em que trabalham. Por exemplo, para estudar um período que vai até cerca de 40 ou 50 mil anos atrás, pode ser usado o método do C^{14}, que consiste em determinar qual a proporção de C^{12} e C^{14} existente na amostra. Apesar do C^{14} ser radioativo – decaindo em N^{14} - nos seres vivos a absorção de dióxido de carbono do ar mantém constante os níveis de C^{12} e C^{14}. Então, a proporção entre estes dois isótopos é fixa e bem conhecida. A partir da morte, não há reposição de C^{14} e consequentemente sua quantidade começa a diminuir.

Comparando-se o nível de C^{14} com a quantidade total de carbono, é possível calcular há quanto tempo a planta ou o animal está morto. A meia-vida do C^{14} é de 5730 anos[29] . Considere que foi encontrado um osso fossilizado com 20% da quantidade de C^{14} usualmente encontrada num ser vivo e resolva as seguintes atividades:

I. Estime a idade do osso. Justifique sua resposta.

II. Conforme o texto, a meia-vida do C^{14} é $\tau = 5730$ anos. Use este valor na Eq. 3 para determinar a constante de decaimento do C^{14} . Considere uma quantidade inicial de 1.000.000 átomos radioativos, represente a situação no *Powersim* e gere a tabela do número de átomos em função do tempo.

III. Verifique se a sua estimativa do item I está adequada aos resultados da tabela.

IV. Esboce a curva do número de átomos contra o tempo, medido em anos.

V. Faça no *Powersim* este gráfico e compare com a sua previsão.

VI. Faça no *Powersim* o gráfico da taxa de variação do número de átomos $\left(\frac{dN}{dt}\right)$ em relação ao número de átomos (*N).* Que curva você obteve? Como você justifica ou interpreta esta curva?

VII. Faça no *Powersim* o gráfico de $\frac{dN}{dt}$ em relação ao tempo *t.* Que curva você obteve? Como você justifica ou interpreta esta curva?

29Informações obtidas na revista National Geographic Brasil, de setembro de 2001.

Atividade D

Questões relacionadas a crescimento populacional são de interesse dos mais diversos setores da sociedade, por exemplo é importante saber a projeção da população de um país, estado ou município para planejar ações que objetivam suprir as necessidades da sociedade no campo da educação, saúde, trabalho, entre outras. Os biólogos buscam usar este conhecimento para proteger os recursos do meio ambiente para que não ocorra a extinção de uma ou de várias espécies. Existem várias formas de descrever o crescimento populacional, e destas, uma das mais conhecidas é o Modelo de Malthus. Ele é chamado o Modelo de Crescimento Exponencial, pois **a taxa de variação da população em relação ao tempo é proporcional à população existente no instante t**:

$$\frac{dP}{dt} alfa\, kP$$

ou seja, o que resulta na mesma Equação Diferencial $\frac{dP}{dt} = kP$ da atividade B (Eq. 1). Este modelo supõe que as taxas de nascimento e morte são constantes, a população irá (de)crescer exponencialmente, ou seja, o modelo malthusiano descreve como as populações crescem ou decrescem quando nada mais acontece (ausência de quaisquer fatores perturbadores) e mesmo sabendo que existem estes fatores, o modelo nos dá uma descrição razoável para o crescimento populacional dentro de seu contexto de validade.

I. De acordo com o censo realizado em 2000, a taxa de crescimento anual da população do RS era de aproximadamente 1,2%. Considerando que o RS estava com 10.187.798[30] pessoas, construa, no *Powersim,* um diagrama para representar a situação.(Dica: considere o ano de 2000 como tempo 0).

II. Construa o gráfico da população contra o tempo, em anos e verifique o tamanho da população do RS em 2020, se continuar com este crescimento.

III. Construa o gráfico da taxa de variação da população $\left(\frac{dP}{dt}\right)$ em relação à população (*P*). Que curva você obteve? Como você justifica ou interpreta esta curva?

30 www.ibge.gov.br

IV. Construa o gráfico de $\frac{dP}{dt}$ em relação ao tempo *t*. Que curva você obteve? Como você justifica ou interpreta esta curva?

V. Em 1960, a população do RS era de 5.366.720 pessoas. Em 2000 este número praticamente dobrou, se continuasse com esta taxa de crescimento, qual seria a população do RS em 2040?

Atividade E

Quando uma droga (por exemplo, penicilina, aspirina) é administrada a um indivíduo, ela entra na corrente sangüínea e, então, é absorvida pelo organismo no decorrer do tempo. Pesquisas médicas mostraram que a **quantidade de uma droga na corrente sangüínea tende a decrescer a uma taxa proporcional à quantidade de droga presente** .

I. Expresse matematicamente a frase em negrito do parágrafo anterior.

II. Warfarin é uma droga utilizada como anticoagulante31, sua meia-vida é de 37 horas. Após interromper o uso da droga, a quantidade que permanece no corpo do paciente diminui a uma taxa que é proporcional à quantidade restante. Quantas horas são necessárias para que o nível da droga no corpo seja reduzido a 25% do nível original?

III. Considerando que a quantidade inicial seja de 5 miligramas construa, no *Powersim*, o diagrama da situação e faça o gráfico da quantidade de Warfarin no corpo do paciente em função do tempo, desde a interrupção do uso da droga até 5 dias após.

IV. Construa no Powersim uma tabela de valores e verifique se a sua resposta da questão I confere.

31 HUGHES-HALLET, D. et al Cálculo Volume 2, LTC Editora, 1997, pág 504.

V. Se dobrarmos o valor da quantidade inicial, quanto tempo levará para que o nível do medicamento no corpo se reduza a metade? E a 25% da quantidade inicial?

VI. Construa o gráfico da taxa de variação da quantidade de droga $\left(\frac{dQ}{dt}\right)$ em relação à quantidade (Q*)*. Justifique a curva que você obteve?

Atividade F

I. Dada a equação diferencial $\frac{dy}{dt}=ky$, em que situações a curva que representa a solução será crescente? E decrescente?

Considerações:

- Equações diferenciais são equações que envolvem uma função e suas derivadas em relação a uma ou mais variáveis independentes, ou seja, são equações que fornecem informações sobre a taxa de variação de uma função desconhecida.
- Todas as situações em que **a taxa de variação da quantidade em relação ao tempo é proporcional à quantidade existente no instante t** pode ser descrita pela equação diferencial $\frac{dy}{dt}=ky$.
- Em situações de meia-vida, para calcular o valor da constante de decaimento faz-se $k=\frac{\ln(0{,}5)}{meia-vida}$.
- Para equações diferenciais $\frac{dy}{dt}=ky$, com $k\neq 0$, o gráfico da solução sempre será uma exponencial crescente ou decrescente, dependendo do valor da constante *k*.
- Para equações diferenciais $\frac{dy}{dt}=ky$, com $k\neq 0$, o gráfico de $\frac{dy}{dt}$ em relação a *y* sempre será uma reta, crescente ou decrescente, dependendo do valor da constante *k*.
- Para equações diferenciais $\frac{dy}{dt}=ky$, com $k\neq 0$, o gráfico de $\frac{dy}{dt}$ em relação a *t* sempre será uma exponencial crescente.

Guia de Atividades 3

Nestas atividades temos como objetivo abordar a resolução analítica de equações diferenciais e, através do estudo de situações-problema que envolvem o crescimento de uma cultura de bactérias, a lei do Resfriamento de Newton, a mistura de soluções e reações químicas, investigar o comportamento da solução e da taxa de variação destas situações e suas equações diferenciais de acordo com as condições fornecidas, inclusive na forma gráfica. Exploraremos também a associação da descrição de uma situação-problema com a correspondente equação diferencial na forma analítica e a análise dimensional de algumas equações diferenciais envolvidas neste guia.

Atividade A

O tempo de geração é o intervalo de tempo requerido para que a população em uma cultura de microorganismos duplique em número. A bactéria *Mycobacterium tuberculosis,* causadora da tuberculose, possui um tempo de geração de aproximadamente 14 horas[32] .

I. Sabendo que **uma cultura de bactérias cresce a uma taxa que é proporcional a quantidade de bactérias existentes no instante t**, escreva uma equação diferencial que represente a situação e resolva-a para encontrar a solução geral.

II. Determine a constante de crescimento, com a respectiva unidade de medida, da cultura de bactérias *Mycobacterium tuberculosis*.

III. Considerando que existam inicialmente 400 bactérias, determine a solução particular para este caso.

32 PELCZAR Jr., M. J. Et al. Microbiologia Conceitos e Aplicações, Makron Books, 2005.

IV. Esboce um gráfico da quantidade de bactérias contra o tempo. Justifique ou interprete esta curva.

V. Esboce um gráfico da variação da quantidade de bactérias em relação ao tempo. Justifique ou interprete esta curva.

VI. Esboce um gráfico da variação da quantidade de bactérias em relação à quantidade de bactérias.Justifique ou interprete esta curva.

Atividade B

A lei de resfriamento de Newton estabelece que: *a taxa de variação de temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio ambiente.* Considerando que a temperatura do corpo depende do tempo e que a temperatura do meio ambiente permanece constante no decorrer da experiência, a equação diferencial que descreve a situação acima é $\frac{dT}{dt}=k(T-T_m)$ onde T é a temperatura do corpo no instante *t*, T_m é a temperatura constante do meio ambiente, $\frac{dT}{dt}$ é a taxa segundo à qual a temperatura do corpo varia e *k* é uma constante de proporcionalidade que depende do material com que o corpo foi construído.

Por exemplo, uma xícara de café sobre a mesa da cozinha esfria a uma taxa proporcional à diferença de temperatura entre o café e o ar que o cerca, então:

I. A medida que o café esfria, a taxa de resfriamento diminui, aumenta ou permanece sempre igual? Explique.

II. A longo prazo, a temperatura do café aproxima-se de zero? Explique.

III. A longo prazo, a taxa de resfriamento tende a zero? Explique.

Suponha que a temperatura de uma xícara de café recém preparado seja de $90^\circ C$. Cinco minutos mais tarde a temperatura já diminuiu para $60^\circ C$ numa sala à temperatura constante $20^\circ C$.

IV. Sabendo que a equação diferencial da variação da temperatura é separável, resolva-a e escreva a solução particular para a situação apresentada.

V. Esboce o gráfico da temperatura contra o tempo.

VI. Determine a temperatura do café após 10 minutos nesta sala.

VII. Considere que alguém deseja tomar este café a uma temperatura de $50^\circ C$. Quanto tempo precisará esperar desde o momento em que ele foi preparado.

Atividade C

Um problema de mistura pode ser representado por um tanque preenchido, até um nível especificado, com uma solução que contém uma quantidade conhecida de substância solúvel (por exemplo cloro). A solução completamente misturada flui do tanque a uma taxa conhecida, e ao mesmo tempo uma solução com uma concentração conhecida de uma substância solúvel é acrescentada ao tanque a uma taxa conhecida que pode ou não ser diferente da taxa de vazão. À medida que o tempo passa, a quantidade de substância solúvel no tanque irá, em geral, variar, e o problema de mistura usual procura determinar a quantidade de substância no tanque num instante especificado. A descrição matemática desta situação pode ser representada por

$$\frac{dQ}{dt} = taxa\ de\ entrada - taxa\ de\ saída$$

Este tipo de problema serve como modelo para muitos outros fenômenos: descarga e filtragem de poluentes em um rio, injeção e absorção de medicamentos na corrente sanguínea, migração de espécies para dentro e para fora de um sistema ecológico, reações químicas, entre outros.

Consideremos que um tanque contenha 500 litros de salmoura (isto é, água na qual foi dissolvida uma certa quantidade de sal). Uma outra salmoura é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 4 *ℓ/min*; a concentração de sal nessa segunda salmoura é de 3 *kg/ℓ*. Quando a solução no tanque estiver bem misturada, ela será bombeada para fora à mesma taxa de entrada. Supondo que o tanque contenha inicialmente 50 *kg* de sal:

I. Escreva a equação diferencial para a situação apresentada.

II. Estime a quantidade de sal no tanque a longo prazo.

III. Qual é o efeito no limite da quantidade de sal, ao se duplicar o valor da concentração de entrada?

IV. Qual o efeito sobre o limite da quantidade de sal, ao se duplicar o valor da taxa de saída?

V. Considere dois tanques (A e B) que contenham salmoura. Cada um deles tem duas torneiras, uma por onde entra salmoura no tanque e outra por onde sai. Os fluxos de entrada e saída são os mesmos nos dois tanques e as curvas que representam a taxa de variação da quantidade de sal na água está representada no gráfico da Figura 3.1. Sabendo que inicialmente os dois tanques possuíam a mesma quantidade de sal e água, qual deles tem maior taxa de entrada de sal? Explique.

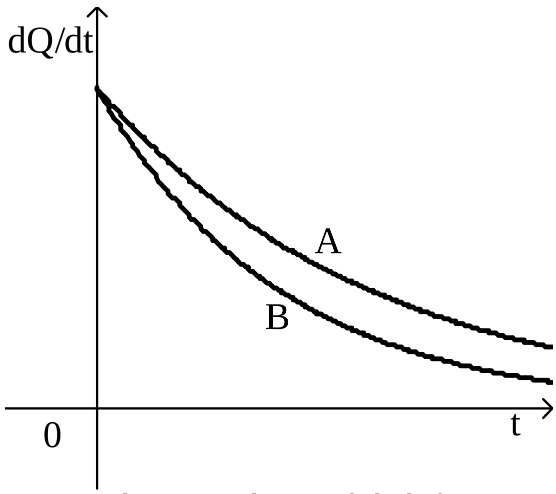


Figura 3.1. Taxa de variação da quantidade de água em um tanque

Atividade D

As reações químicas de primeira ordem podem ser descritas pela equação diferencial $\frac{dC_A}{dt} = -kC_A$, na qual C_A é a concentração do reagente *A*, *k* a constante da reação (depende da natureza da reação e da temperatura) e *t* o tempo decorrido desde o início da reação.

Considerando a decomposição $2N_2O_5(g) \rightarrow 4NO_2(g) + O_2(g)$, a tabela abaixo[33] apresenta a concentração de pentóxido de nitrogênio, N_2O_5, em relação ao tempo, a uma temperatura de $67^\circ C$.

Tempo (min)	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***8***	***10***
Concentração de N_2O_5 (mol/l)	***0,160***	***0,113***	***0,080***	***0,056***	***0,040***			

33MASTERTON, W.L, et. al. Princípios de Química, LTC Editora, 1990.

I. A equação diferencial desta situação é a mesma da atividade A, portanto a solução geral também será a mesma. Usando as condições fornecidas na tabela, encontre a solução particular.

II. Preencha a tabela com a concentração de N_2O_5 após 5, 8 e 10 minutos.

III. Calcule o tempo necessário para a concentração cair de 0,160 para 0,100 *mol/ℓ*.

IV. Qual a unidade de medida do *k* nesta situação?

Guia de Atividades 4

Nestas atividades temos como objetivo abordar o estudo de situações-problema que envolvem a queda de corpos e circuitos elétricos, e a partir destas, investigar o comportamento da solução de equações diferenciais e a respectiva taxa de variação das situações de acordo com as condições fornecidas, inclusive na forma gráfica. Também exploraremos a associação da descrição de uma situação-problema com a correspondente equação diferencial na forma analítica, a análise dimensional das equações diferenciais envolvidas nestas situações e a sua resolução analítica pela técnica das separáveis.

Circuito elétrico

Agora vamos trabalhar com equações que podem ser usadas para descrever, com certo grau de aproximação, o comportamento de circuitos elétricos representados esquematicamente na Figura 4.1.

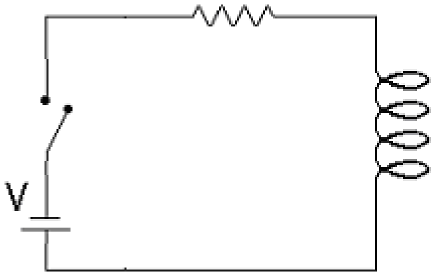
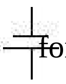


Figura 4.1: Circuito elétrico tipo RL com o indutor inicialmente carregado.

Os componentes elétricos que compõem este circuito são:

-  fonte de tensão contínua (bateria, pilha ou gerador elétrico), capaz de fornecer uma certa diferença de potencial (voltagem), *V*, medida em volts (V);
-  resistor (resistências, lâmpadas), que possui uma certa resistência elétrica, *R*, medida em ohms (Ω). Para certos resistores, *R* não depende da corrente que circula pelo resistor, ou seja, é uma constante. (Estes são chamados resistores ôhmicos.)
-  indutor (bobina), que possui indutância *L*, medida em henrys (H)

Sobre circuitos elétricos precisamos lembrar:

v. que a diferença de potencial entre os terminais de resistores e indutores, quando por eles circula uma corrente *i* e o indutor está carregando, é dada pelas expressões mostradas na Figura 4.2.

vi. a soma algébrica das quedas de potencial ao longo de um laço fechado de um circuito elétrico deve ser igual a soma das elevações de potencial.

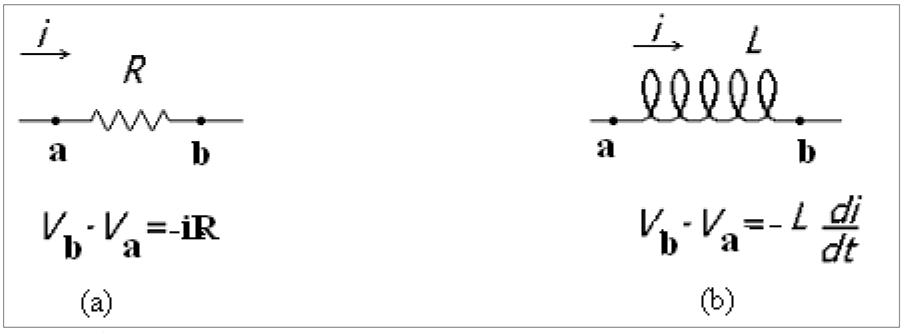


Figura 4.2. Diferença de potencial em a) um resistor percorrido por uma corrente elétrica *i*, e b) um indutor que está sendo carregado.

Com estas informações, podemos verificar que a equação diferencial que rege a corrente que circula pelo circuito RL mostrado na Figura 4.1, ao fecharmos a chave é:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V \qquad \text{Eq. 1}$$

Atividade A

Considerando o circuito elétrico mostrado na Figura 4.1, suponha que a fonte de tensão fornece uma voltagem constante de 60V, que a resistência é constante e igual a 12 Ω, a indutância é de 40 mH, que a corrente no instante inicial é nula ($i(0)=0$) e que a chave foi fechada.

I. Construa um diagrama no Powersim para representar esta situação.

II. Construa o gráfico da corrente contra o tempo e verifique o que acontece com o valor da corrente a longo prazo.

III. Construa o gráfico da taxa de variação da corrente $\left(\frac{di}{dt}\right)$ em função do tempo e justifique qualitativamente o traçado desta curva.

IV. Em qual intervalo de tempo, $0 < t < 5$ ou $5 < t < 10$, a taxa de variação da corrente em função do tempo é maior? Explique.

V. Construa o gráfico da taxa de variação da corrente $\left(\frac{di}{dt}\right)$ em função da corrente e explique-o.

VI. Arbitre alguns valores entre 0 e 100V para a diferença de potencial, estabelecida pela fonte de tensão contínua do circuito elétrico mostrado na Figura 4.1, mantendo os outros parâmetros fixos. Qual a influência da alteração de V no(a):

a) curva da corrente elétrica versus tempo?

b) valor da corrente elétrica a longo prazo?

c) comportamento da taxa de variação da corrente elétrica em função do tempo?

VII. Tendo em mente a mesma sistemática do exercício anterior, arbitre alguns valores para a resistência elétrica do resistor entre 0 e 20 ohms, mantendo os outros parâmetros com os mesmos valores do exercício I. Qual a influência da alteração de R no(a):

a) curva da corrente elétrica versus o tempo?

b) valor da corrente elétrica a longo prazo?

c) comportamento da taxa de variação da corrente elétrica em função do tempo?

VIII. Resolva, analiticamente, a equação $L\frac{di}{dt}+Ri=V$ para encontrar a solução geral.

IX. Use as condições fornecidas para encontrar a solução particular.

X. Calcule o valor da corrente no instante $t=0{,}25\,s$ e $t=1\,s$ e compare os resultados com os obtidos no Powersim.

Queda de corpos

Um corpo de massa *m* em queda vertical, fica sujeito à resistência do ar, que é proporcional à sua velocidade. Atuam sobre o corpo, de massa *m*, a força gravitacional, responsável pelo seu peso, $F_1 = -mg$, e a força resistiva do ar, $F_2 = -kv$, sendo *k* uma constante positiva, que depende do formato e rugosidade da superfície do corpo e de propriedades do ar. Um dos eixos do sistema de referência adotado é vertical e tem seu sentido positivo arbitrado para cima, e *v* representa a componente da velocidade na direção deste eixo. Assim, a componente da força na direção do eixo é força dada por: $F = F_1 + F_2 = -mg - kv$.

De acordo com a Segunda Lei de Newton, temos que: $F = ma = m\dfrac{dv}{dt}$, então, a equação que rege o movimento do corpo é

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - kv \text{ ou } v' + \frac{k}{m}v = -g$$

Eq. 2

Atividade B

Uma esfera de arremesso de peso com massa igual a $7{,}2\,kg$ cai de um helicóptero em pleno vôo. Considere que $g = 9{,}8\,m/s^2$ e $k = 0{,}5$.

I. Qual a unidade de medida do *k?*

II. Construa um diagrama no Powersim para representar esta situação.

III. Construa o gráfico do módulo da velocidade contra o tempo e analise se a taxa de variação da velocidade da esfera do momento que ela cai do helicóptero até imediatamente antes de atingir o solo aumenta, diminui ou permanece sempre igual.

IV. Durante a queda, a velocidade da esfera tende a zero? Comente.

V. Qual é a velocidade máxima (velocidade limite) atingida pela esfera durante sua queda?

VI. O que se alteraria no gráfico da velocidade contra o tempo se o k fosse zero?

Atividade C

Considere agora, o caso da esfera, com massa igual a $7{,}2\,kg$, $g = 9{,}8\,m/s^2$ e $k = 0{,}5\,kg/s$ lançada verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 100m/s.

I. Simule esta situação no Powersim.

II. Construa o gráfico do módulo da velocidade contra o tempo e descreva o comportamento da taxa de variação da velocidade da esfera desde o momento que ela foi lançada até atingir o chão.

III. Resolva, analiticamente, a equação $v' + \frac{k}{m} v = g$ para encontrar a solução geral.

IV. Use as condições fornecidas para encontrar a solução particular.

V. Calcule o valor da velocidade no instante $t=1\,s$ e $t=20\,s$ e compare os resultados com os obtidos no Powersim.

Atividade D

Considere a eq. dif. dada por $\frac{dy}{dt}+a\,y=b$ e trace o perfil do gráfico de *y* versus *t*, nos seguintes casos:

I. $a=b=0$

II. $a=0$ e *b* é uma constante qualquer

III. *a* é uma constante qualquer e *b* é uma constante qualquer

IV. *a* é uma constante qualquer e $b=0$

Guia de Atividades 5

Nestas atividades temos como objetivo abordar a resolução analítica de equações diferenciais e, através do estudo de situações-problema investigar o comportamento da solução e da taxa de variação destas situações e suas equações diferenciais de acordo com as condições fornecidas, inclusive na forma gráfica. Exploraremos também a associação da descrição de uma situação-problema com a correspondente equação diferencial e sua solução na forma analítica.

Atividade A

I. O gráfico da Figura 1 representa y em função do tempo t.

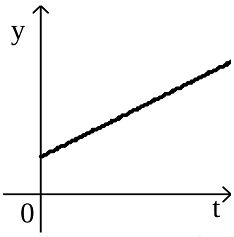
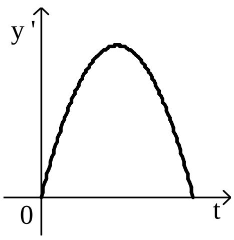


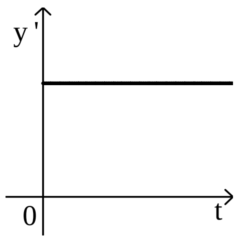
Figura 1: Gráfico de y em função do tempo t.

O gráfico que melhor representa y' em função de t é:

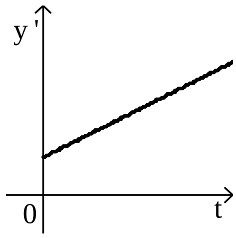
a)



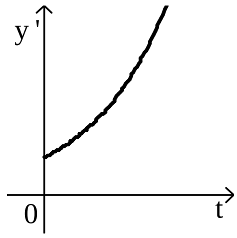
b)



c)



d)



Justifique a escolha:

Atividade B

I. Dada a equação diferencial $\frac{dy}{dt}+ay=b$, onde a é uma constante qualquer e $b=0$, a equação que melhor representa a solução da equação diferencial é:

a) $y=c+e^{-at}$ b) $y=ce^{-at}$ c) $y=c_1e^{-at}+c_2e^{bt}$ d) $y=c-at$

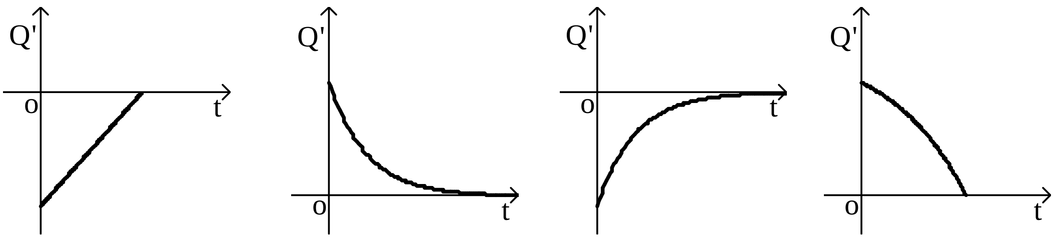
Justifique a escolha:

Atividade C

I. Considere um tanque com uma quantidade inicial de água, em que há um furo na base, e admita que a quantidade de água no tanque diminui a uma taxa de 10%, por minuto, da quantidade de água nele contida. Representando por Q_0 o valor $Q(0)$, a equação que melhor descreve a quantidade de água no tanque em função do tempo é:

a) $Q=Q_0e^{0,1t}$ b) $Q=Q_0e^{-10t}$ c) $Q=Q_0e^{-0,1t}$ d) $Q=Q_0-e^{0,1t}$

II. Imagine agora uma torneira colocando água no tanque a um fluxo de $10\,litros/min$ e que a quantidade inicial de água no tanque seja de 200 litros. O gráfico que melhor representa a taxa de variação da quantidade de água (Q') no tanque em função do tempo (t) é:



a) b) c) d)

III. A equação diferencial que melhor representa a situação anterior é:

a) $\dfrac{dQ}{dt}=10-0,1Q$ b) $\dfrac{dQ}{dt}=10Q$ c) $\dfrac{dQ}{dt}=(10-0,1)Q$ d) $\dfrac{dQ}{dt}=-0,1t+10$

Justifique a escolha:

Atividade D

Resolva as equações diferenciais.

I. $(1+x)dy-y\,dx=0 \quad y(1)=-4$

II. $xy'+y=e^{(-2x)}$

Atividade E

I. O gráfico da Figura 2 representa a taxa de variação de uma certa população (P') em função do tempo (t), em anos.

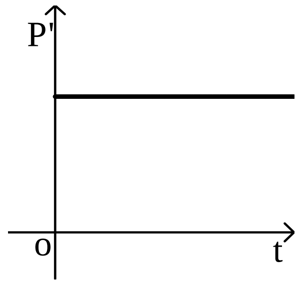


Figura 2: Gráfico da taxa de variação de uma população em função do tempo.

É correto afirmar que:

a) a população não está aumentando nem diminuindo.

b) todos os anos o aumento no número de pessoas é o mesmo.

c) todos os anos a população aumenta com o mesmo percentual.

d) o percentual de óbitos é, necessariamente, nulo no período considerado.

Atividade F

I. O gráfico da Figura 3 representa y em função do tempo t.

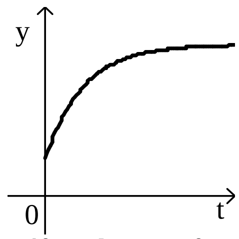


Figura 3: Gráfico de y em função do tempo t.

Sendo $a>0$ e $b<0$, a equação diferencial que melhor representa esta situação é:

a) $\frac{dy}{dt}=at+by$ b) $\frac{dy}{dt}=ae^{bt}$ c) $\frac{dy}{dt}=a+by$ d) $\frac{dy}{dt}=\frac{a}{b}y$

Justifique a escolha:

Atividade G

Uma conta bancária rende juros de modo contínuo a uma taxa anual constante *r*. O saldo y da conta satisfaz a equação diferencial $\frac{dy}{dt} = ry$.

I. Resolva a equação diferencial para encontrar a solução geral.

II. Encontre a solução particular considerando que $r = 7\Delta / ano$ e o depósito inicial foi de R$ 1.000,00.

III. Esboce o gráfico da solução deste problema e justifique o traçado.

IV. O que seria alterado no perfil da curva deste gráfico se:

a) a taxa de crescimento fosse 15% em vez de 7%?

b) se o depósito inicial fosse de R$5.000,00 em vez de RS1.000,00?

Atividade H

I. A equação diferencial que representa a variação da velocidade de uma barra de ferro que se desprende do alto de um prédio é dada por $v' + \frac{k}{m} v = g.$ Resolva-a para encontrar a solução geral.

II. Considere que a barra tem uma massa de 70 kg, que $g = 9{,}8\, m/s^2$, $k = 13{,}72\, kg/s$ e encontre a solução particular. Lembre-se que a velocidade inicial é zero.

III. Estime a velocidade limite da barra.

IV. Qual a velocidade da barra no instante $t = 10\, s$ **?**

V. Esboce o gráfico que representa a solução do problema proposto e justifique o traçado.

Guia de Atividades 6

Nestas atividades, abordando o estudo de uma situação que envolve o movimento de objetos na vertical, objetivamos representá-la matematicamente com uma equação diferencial de segunda ordem e analisar o comportamento de possíveis soluções e respectivas taxas de variação levando em consideração as condições fornecidas, inclusive na forma gráfica.

Movimento de objetos na vertical, sob ação da gravidade e resistência do ar

No guia de atividades 4 quando abordamos a situação que envolve queda de corpos (com resistência do ar) nos concentramos na velocidade de um corpo que cai. Agora vamos investigar, também, a variação da posição do corpo com o tempo e considerar que ele pode se mover tanto para cima quanto para baixo.

Vamos adotar um sistema de referência cujo eixo vertical aponta para cima. Assim, quando o corpo se move para cima sua velocidade é positiva e para baixo, negativa. A equação que rege a velocidade do corpo é:

$$v' + \frac{k}{m} v = -g \qquad \text{Eq. 1}$$

Seja $x(t)$ a posição do corpo do instante *t*. Das relações cinemáticas usuais temos: $v = \frac{dx}{dt}$ e $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$. Portanto, escrevendo a Eq. 1 em termos de *x*, teremos uma equação diferencial de segunda ordem:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m}\frac{dx}{dt} = -g \qquad \text{Eq. 2}$$

Atividade A

Considere a esfera de arremesso de peso do guia 4, com massa igual a $7{,}2\,kg$ e que cai de um helicóptero parado no ar.

I. Considere $g = 9{,}8\,m/s^2$ e $k = 0{,}5\,kg/s$ e construa no Powersim um diagrama para explorar a velocidade nesta situação. Lembre-se que a velocidade inicial é zero.

II. Construa o gráfico da velocidade contra o tempo e analise se o módulo da taxa de variação da velocidade aumenta, diminui ou permanece sempre igual.

III. Construa no Powersim um diagrama para explorar a posição da esfera em função do tempo.

IV. Construa o gráfico da posição contra o tempo e analise se o módulo da taxa de variação da posição aumenta, diminui ou permanece sempre igual à medida que o tempo passa.

V. O que se alteraria no gráfico da posição contra o tempo se:

a) aumentarmos ou diminuirmos o valor do k?

b) k fosse zero?

Atividade B

Considere agora, que a mesma esfera de arremesso de peso da atividade A, com massa igual a $7{,}2\,kg$, $g = 9{,}8\,m/s^2$ e $k = 0{,}5\,kg/s$ é lançada verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 100m/s.

I. Construa um diagrama no Powersim para explorar a posição da esfera em função do tempo nesta situação e construa o gráfico da posição contra o tempo. Quando trabalhamos com situações de lançamento, desprezando a resistência do ar, a curva que descreve a posição contra o tempo é uma parábola e no caso com resistência a curva também resultou numa parábola? Comente.

II. Qual é a altura máxima atingida pela esfera?

III. Em quanto tempo a esfera chega na altura máxima?

IV. Em quanto tempo a esfera chega no chão?

V. O tempo que a esfera leva para chegar à altura máxima é o mesmo que leva para retornar da altura máxima ao chão? Comente.

VI. Descreva o comportamento da taxa de variação da posição da esfera em função do tempo desde o momento que ela foi lançada até atingir o chão.

VII. Se *k* fosse muito maior que $0{,}5\,kg/s$ qual seria a alteração:

a) na altura máxima atingida pela esfera?

b) no tempo que leva para atingir a altura máxima?

c) no gráfico da posição contra o tempo? Se aproximou ou afastou mais de uma parábola?

VIII. Se *k* fosse zero, qual seria a alteração:

a) na altura máxima atingida pela esfera?

b) no tempo que leva para atingir a altura máxima?

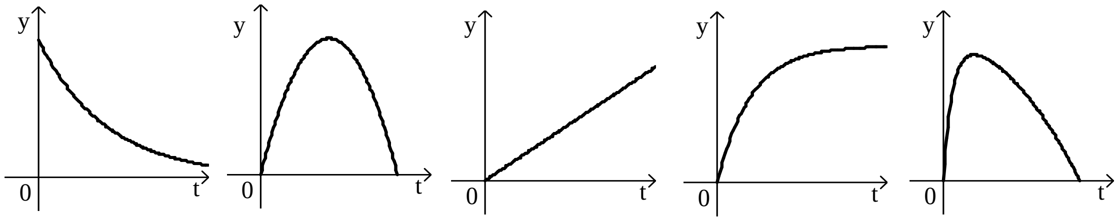
c) no gráfico da posição contra o tempo? Seria uma parábola?

Atividade C

Considere a eq. dif. dada por $\frac{d^2 y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} = b.$ Com base nos resultados da atividades A e B, escolha o perfil mais adequado do gráfico de *y* versus *t*, nos seguintes casos:

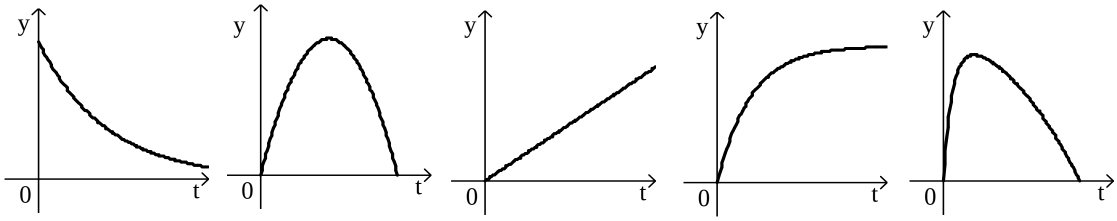
I. $a = b = 0$

a) b) c) d) e)



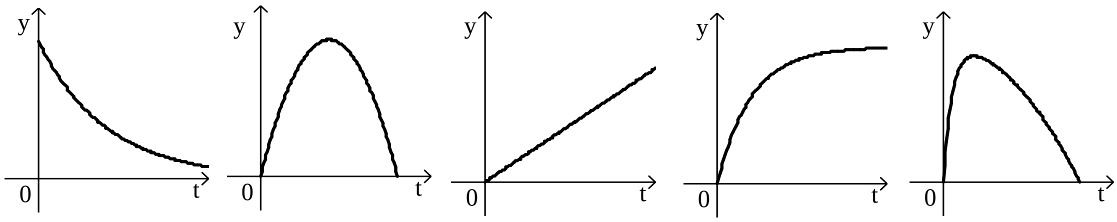
II. $a = 0$ e $b = -10$

a) b) c) d) e)



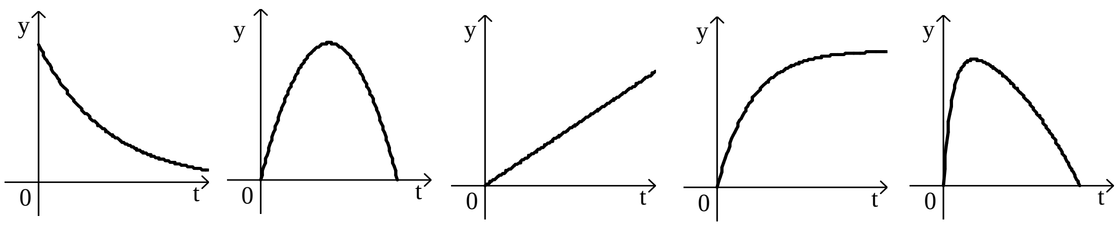
III. $a = 1$ e $b = 0$

a) b) c) d) e)



IV. $a = 1$ e $b = -10$

a) b) c) d) e)



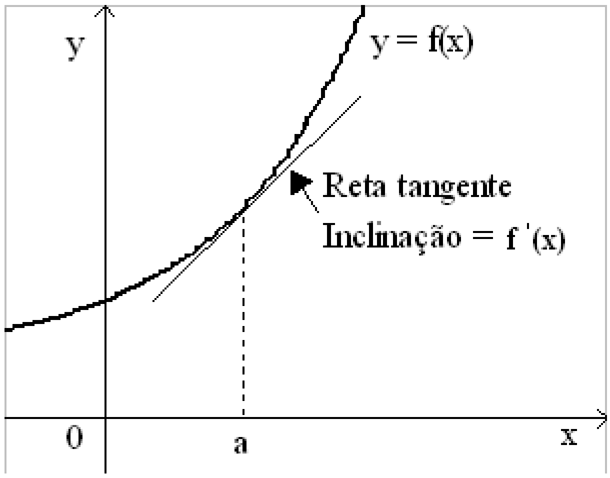
APÉNDICE 9

Material de revisión sobre derivadas e integrales usado en el Estudio 3

Importante relembrar

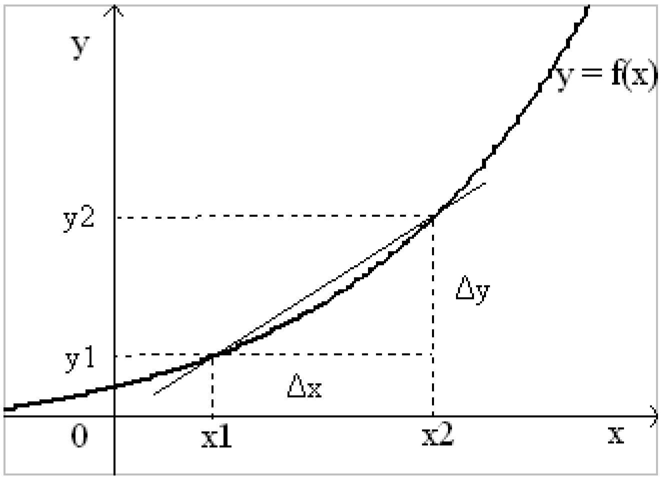
Derivada

A derivada de uma função $y = f(x)$ é a taxa de variação instantânea de *y* em relação a *x*. Geometricamente a derivada de *f(x)* em um ponto $x = a$ é a inclinação da reta tangente à curva no ponto *a*. Veja o gráfico a seguir.

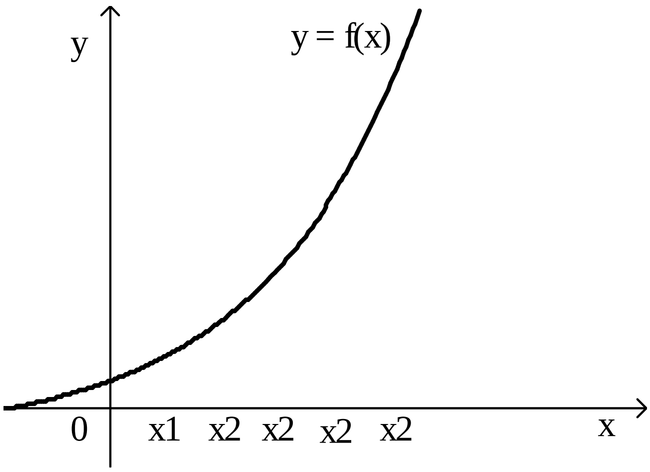


Taxa de variação

A taxa de variação média de uma função $y = f(x)$ num determinado intervalo $\Delta x = x_2 - x_1$ é determinada por $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$, que é a inclinação da reta secante que passa por x_1 e x_2, onde $x_2 = x_1 + \Delta x$.

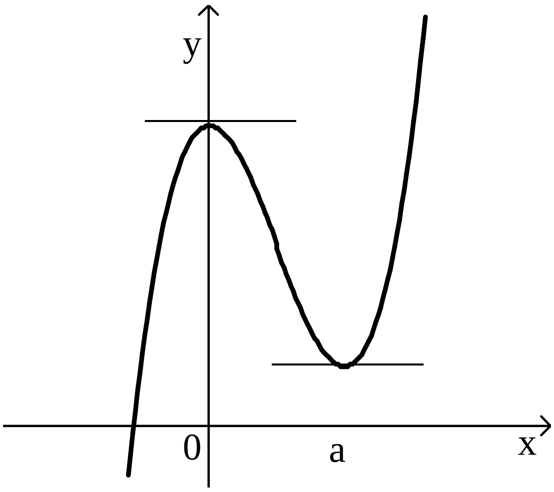


À medida que aproximarmos o ponto x_2 de x_1, o valor de Δx se torna menor e a reta secante se aproxima da reta tangente à curva em x_1, conforme figura abaixo. Assim, a taxa de variação instantânea é determinada por $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = \frac{dy}{dx}$, que é a inclinação da reta tangente em x_1.



Interpretação geométrica

Para uma função $y = f(x)$, cujo gráfico é mostrado abaixo,

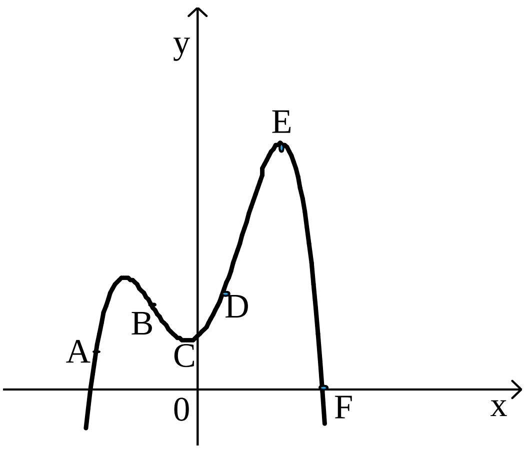


podemos concluir que:

- em $x=0$ e $x=a$ a reta tangente à curva é zero, ou seja, a derivada é zero $(f'(x)=0)$. Estes pontos são os pontos críticos da função;
- a curva é crescente em $x<0$ e $x>a$, nestes intervalos a derivada é positiva $(f'(x)>0)$;
- a curva é decrescente em $0<x<a$, neste intervalo a derivada é negativa $(f'(x)<0)$.

Exercite

1. Para a função representada no gráfico abaixo, responda:



a) Em quais pontos y' é positiva?

b) E negativa?

c) E nula?

d) Em qual dos pontos indicados y' é maior?

e) Em qual dos pontos indicados y é maior?

f) Em qual dos pontos indicados y é positivo?

g) E negativo?

h) E nulo?

2. Esboce um possível gráfico de $y=f(x)$ dadas as seguintes informações:

- $f'(x)>0$ em $1<x<3$
- $f'(x)<0$ para $x<1$ e $x>3$
- $f'(x)=0$ em $x=1$ e $x=3$

3. Esboce um possível gráfico de $y=f(x)$ dadas as seguintes informações:

- $f(2)=0$
- $f(4)=0$
- $f'(x)>0$ para $x>3$
- $f'(x)<0$ para $x<3$
- $f'(3)=0$

Algumas regras de derivação

Função	***Derivada***
$y=k$	$y'=0$
$y=x^n$	$y'=nx^{n-1}$
$y=u^n$	$y'=nu^{n-1}\cdot u'$
$y=u\cdot v$	$y'=u'\cdot v+u\cdot v'$
$y=\frac{u}{v}$	$y'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$
$y=e^x$	$y'=e^x$
$y=e^{u(x)}$	$y'=e^u\cdot u'$
$y=\ln x$	$y'=\frac{1}{x}$
$y=\cos x$	$y'=-sen\,x$
$y=sen\,x$	$y'=\cos x$

4. Calcule a derivada das seguintes funções

a) $y=3x^4-2x+8$

b) $y=e^x\cdot 4x$

c) $y=\frac{x+4}{x^2}$

d) $y=\frac{3}{x^4}$

e) $y=\frac{3}{x}$

f) $y=e^{x+3}$

g) $y=e^{3x}$

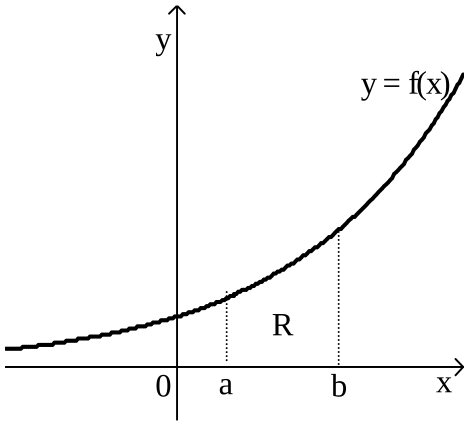
h) $y=e^{x^3}$

i) $y=4\ln x$

Integral

A integral fornece a variação total de uma função a partir de sua taxa de variação e geometricamente representa a área abaixo de uma curva no intervalo considerado.

Dado o seguinte gráfico de y em função de x,



quando $f(x)$ é positiva e $a<b$, a área sob a curva no intervalo de *a* a *b* é dada por $R=\int_a^b f(x)\,dx.$

Para resolver, usamos o Teorema Fundamental do Cálculo

$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$ onde $F'(x)=f(x)$.

A integral indefinida de uma função $y=f(x)$ representa a família de antiderivadas de $f(x)$ e é representada por $\int f(x)\,dx=F(x)+C$.

Algumas regras de integração

$\int k\,dx = kx + c$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\int e^x\,dx = e^x + c$
$\int e^{kx}\,dx = \frac{e^{kx}}{k} + c$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + c$
$\int \cos x\,dx = sen\,x + c$
$\int sen\,x\,dx = -\cos x + c$

5. Resolva as integrais

a) $\int (3x^4 - 2x + 8)\,dx$

b) $\int 4e^{3x}\,dx$

c) $\int \frac{4}{x^2}\,dx$

d) $y = \frac{3}{x^4}$

e) $y = \frac{3}{x}$

f) $\int e^{x+3}\,dx$

g) $y = e^{3x}$

h) $y = e^{x^3}$

i) $y = 4\ln x$

j) $\int \sqrt{x}\,dx$

Também é importante lembrar que

$e^{2x+3} = e^{2x} \cdot e^3$

$e^{\ln(2x)} = 2x$

$\ln e = 1$

Para que você tenha um bom aproveitamento da disciplina de Cálculo III é essencial a compreensão dos tópicos abordados neste material.

Bom Trabalho

Professora Maria Madalena Dullius

APÉNDICE 10

Test inicial del Estudio 3

Centro Universitário UNIVATES
Disciplina de Cálculo III
Professora Maria Madalena Dullius

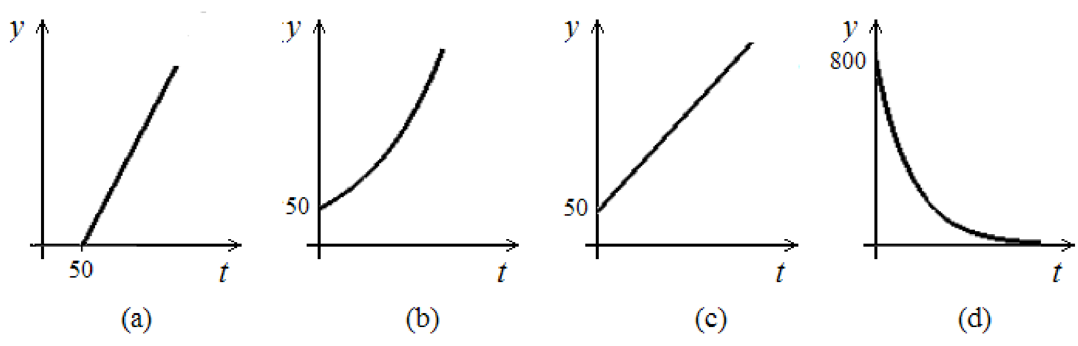
Este teste é constituído por 16 questões de escolha múltipla. Dentre as alternativas, escolha apenas uma, a que melhor responde à questão, assinalando-a na grade em anexo. Se você não tiver nenhum palpite a respeito de alguma questão, deixe-a em branco.

...

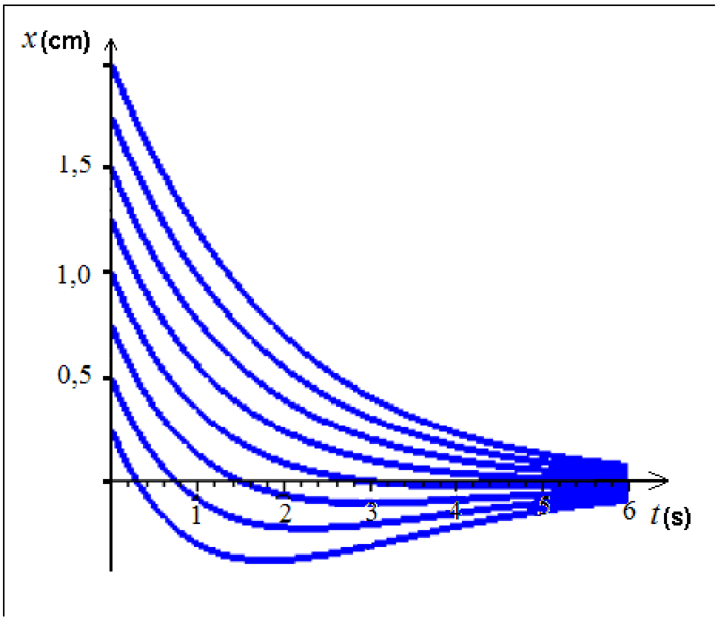
1. Na tabela abaixo, estão representados os valores de uma função $y(t)$, para diversos valores de t.

t	y
0	50
3	100
6	200
9	400
12	800

Indique qual dos gráficos abaixo melhor representa y em função de t.



2. No gráfico abaixo, apresentamos algumas soluções $x(t)$ de um problema de valor inicial, que descreve oscilações livres com amortecimento crítico, em um sistema massa-mola:



Com relação à taxa média de variação da posição (x) em função do tempo, pode-se concluir que:

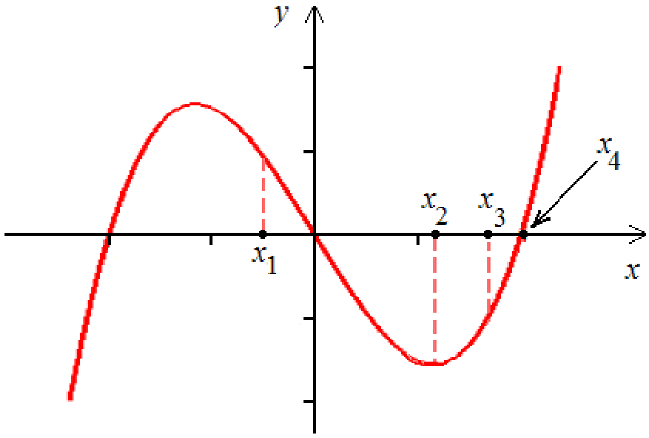
(a) para a curva que corresponde $x(0) = 0,5$ *cm*, a taxa média de variação da posição, para t de 0 a 0,8 *s* é positiva e para t de 0,8 *s* a 6 *s* é negativa.

(b) se $x(0) < 1$ *cm*, a taxa média de variação será negativa nos intervalos iniciais, passando a positiva nos intervalos finais.

(c) se $x(0) > 1$ *cm*, a taxa média de variação da posição será positiva nos intervalos iniciais, passando a negativa nos intervalos finais.

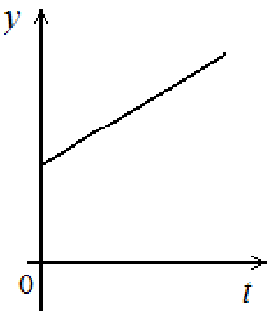
(d) para a curva que corresponde a $x(0) = 2$ *cm*, a taxa média de variação da posição por unidade de tempo, para t de 0 a 1 *s* é negativa e, em módulo, menor que aquela para t de 1 *s* a 6 *s*, que também é negativa.

3. Dado o gráfico abaixo, de uma função $y = f(x)$, em qual dos seguintes pontos indicados sobre o eixo dos x, tem-se que o valor de $\frac{df}{dx}$ é *zero*?

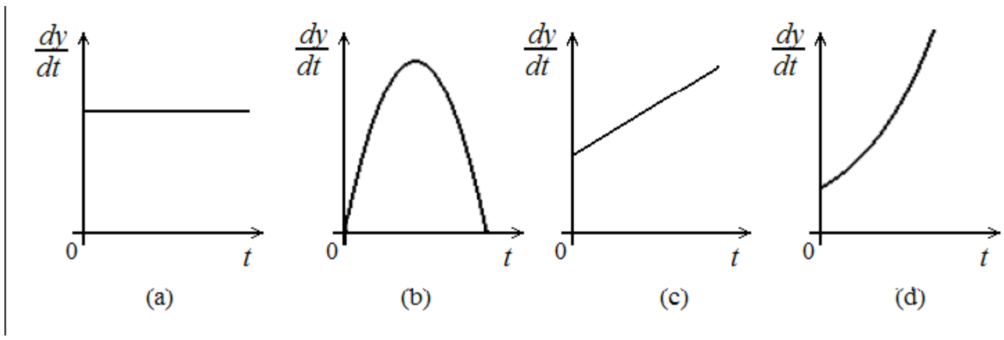


(a) x_1 **(b)** x_2 **(c)** x_3 **(d)** x_4

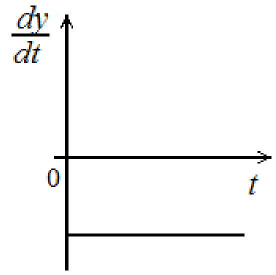
4. Sabendo que o gráfico que representa y em função de t é



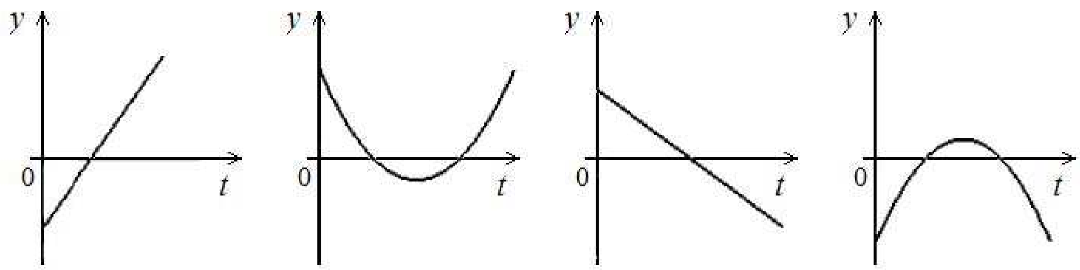
indique qual dos gráficos abaixo melhor representa $\frac{dy}{dx}$ em função de t:



5. Sabendo que o gráfico de $\dfrac{dy}{dx}$ em função de t é

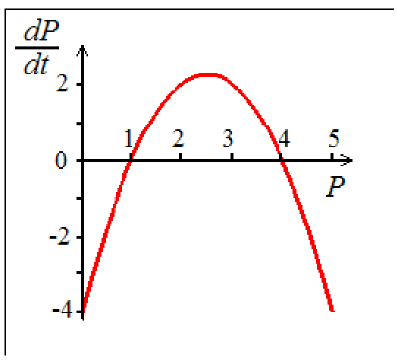


indique qual dos gráficos abaixo melhor representa uma primitiva y em função de t:



(a) (b) (c) (d)

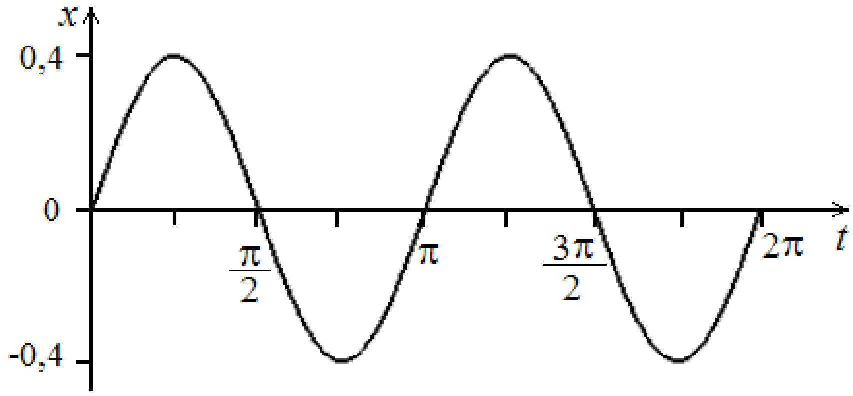
6. A partir do seguinte gráfico para $\dfrac{dP}{dt}$ *versus* P, para $0 \leq P \leq 5$, sendo $P(t)$ o tamanho de uma população em um instante qualquer t, medido em unidades de 1.000 habitantes, podemos concluir que, com o passar do tempo:



(a) se $P(0) < 1$, a população aumentará, aproximando-se de 1.
(b) se $P(0) = 2{,}5$, a população permanecerá constante.
(c) se $P(0) > 4$, a população diminuirá, aproximando-se de 4.
(d) se $1 < P(0) < 4$, a população diminuirá, aproximando-se de 1.

As questões 7 e 8 referem-se ao seguinte enunciado:

No gráfico abaixo, apresentamos a solução $x(t)$ de um problema de valor inicial, que descreve oscilações livres, não amortecidas, em um sistema massa-mola, durante o intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$ *s*. As posições situam-se sobre um eixo horizontal *x*, com origem na posição de equilíbrio do sistema massa-mola, e foi adotado o sentido "para a direita" como o sentido positivo.



7. Do gráfico acima, pode-se concluir que:

(a) a taxa média de variação da posição, para *t* de $3\pi/4$ *s* a π *s*, é positiva.

(b) a taxa média de variação da posição, para *t* de 0 a $\pi/4$ *s*, é igual àquela para *t* de $\pi/4$ *s* a $\pi/2$ *s*.

(c) a taxa média de variação da posição, para *t* de $7\pi/4$ *s* a 2π *s*, é negativa.

(d) a taxa instantânea de variação da posição, em $t = \pi/2$ *s*, é igual a zero.

8. Ainda com o mesmo enunciado da questão 7, pode-se afirmar que:

(a) entre $t = 0$ e $t = \pi/2$ *s*, não há ponto de retorno.

(b) em $t = \pi/2$ *s*, tem-se um ponto de retorno.

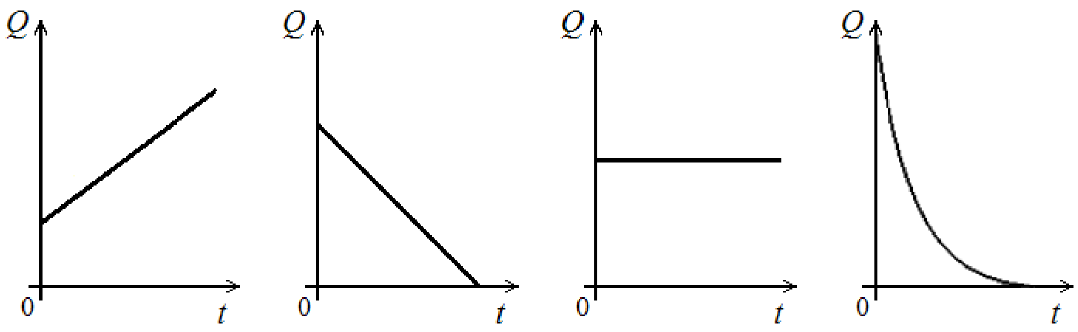
(c) entre $t = 0$ e $t = 2\pi$ *s*, há dois pontos de retorno.

(d) em $t = 3\pi/4$ *s*, tem-se um ponto de retorno.

As questões 9 a 11 referem-se ao seguinte enunciado:

Considere uma toalha molhada, colocada para secar em um varal. Sabe-se que ela seca ao ar livre a uma taxa que é proporcional à quantidade de água existente na toalha e que, a cada duas horas, a quantidade de água na toalha se reduz à metade da quantidade existente.

9. Qual gráfico melhor representa a quantidade de água Q na toalha, em função do tempo t após ela ter sido colocada no varal?



(a) (b) (c) (d)

10. Se dobrarmos a quantidade inicial de água na toalha, o tempo que leva para que a quantidade de água se reduza à metade:
(a) dobra.
(b) reduz-se à metade.
(c) não se altera
(d) quadruplica.

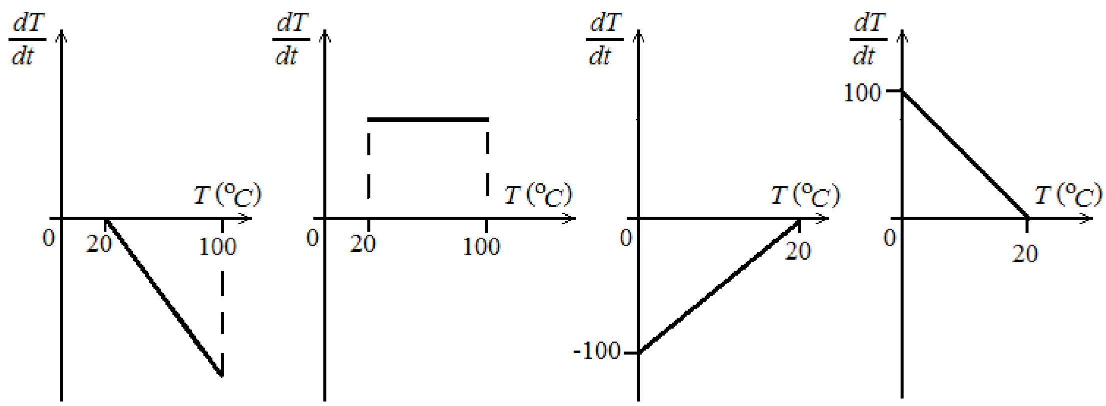
11. Se considerarmos o tempo em horas, é correto afirmar que:
(a) em todas as horas, a quantidade de água que sai da toalha é a mesma.
(b) a quantidade de água que sai da toalha, por hora, vai diminuindo.
(c) a quantidade de água que sai da toalha, por hora, vai aumentando.
(d) a taxa de variação da quantidade de água na toalha é constante.

As questões 12 e 13 referem-se ao seguinte enunciado:

Após ser fervido em água, um ovo à temperatura $T_0 = 100_oC$ é deixado sobre uma mesa e esfria a uma taxa proporcional à diferença entre a temperatura do ovo e a temperatura do ar que o cerca (Lei do resfriamento de Newton). Considere que a temperatura do ar permaneça constante em 20_oC.

12. À medida que o ovo esfria, o módulo da taxa de resfriamento:
(a) não se altera, porque a temperatura do ar é constante.
(b) diminui, pois a diferença entre a temperatura do ovo e a temperatura do ar que o cerca diminui.
(c) aumenta, porque a temperatura do ovo diminui.
(d) tende a um valor constante diferente de zero.

13. Qual o gráfico que melhor representa o comportamento da taxa de variação da temperatura do ovo, em função da própria temperatura T?



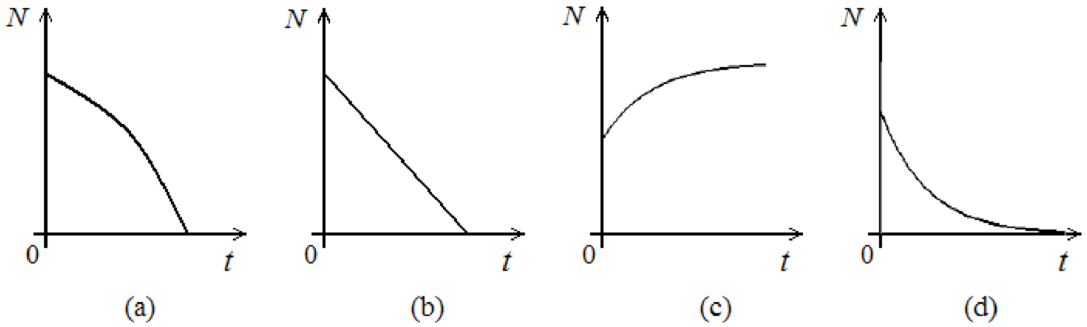
(a) (b) (c) (d)

14. Em uma região de muitas árvores, os restos vegetais se acumulam no solo a uma taxa de 4 g/cm_2 por ano. Estes restos se decompõem a uma taxa de 9% ao ano. $Q(t)$ representa a quantidade de restos vegetais por unidade de área (g/cm_2) no instante t. É correto afirmar que a quantidade de restos vegetais por unidade de área a longo prazo:
(a) tende a zero.
(b) aumenta infinitamente.
(c) tende a se estabilizar em um valor constante não nulo.
(d) tem um comportamento oscilatório periódico.

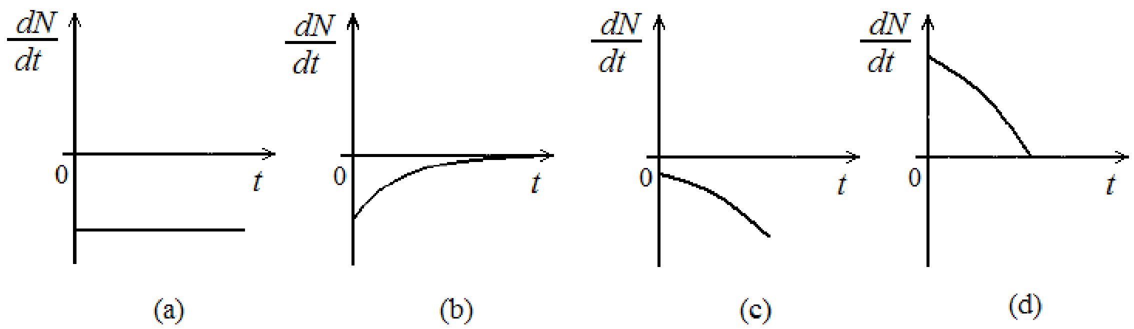
As questões 15 e 16 referem-se ao seguinte enunciado:

Suponha que uma população $N(t)$ de mosquitos, em um certo instante t, na ausência de outros fatores, aumente a uma taxa, em cada instante, proporcional à população existente, e que, no mesmo ambiente exista uma espécie de pássaros predadores, que comem um número fixo m (constante positiva) de mosquitos por unidade de tempo, que leva a extinção da população de mosquitos.

15. Qual dos seguintes gráficos poderia representar a população $N(t)$ de mosquitos, em função do tempo t?



16. Qual dos seguintes gráficos poderia representar a taxa de variação $\frac{dN}{dt}$ da população de mosquitos, em função do tempo t?



Centro Universitário UNIVATES
Disciplina de Cálculo III - 2008/A
Professora Maria Madalena Dullius
Aluno: ________________________________

Folha de respostas

Dentre as alternativas escolha **apenas uma**, a que melhor responde a questão, assinalando-a na grade.

questão	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***	***12***	***13***	***14***	***15***	***16***
alternativa	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b
	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c
	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d

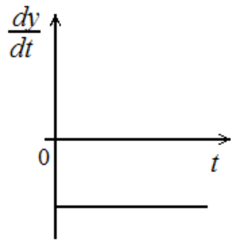
APÉNDICE 11

Test final del Estudio 3

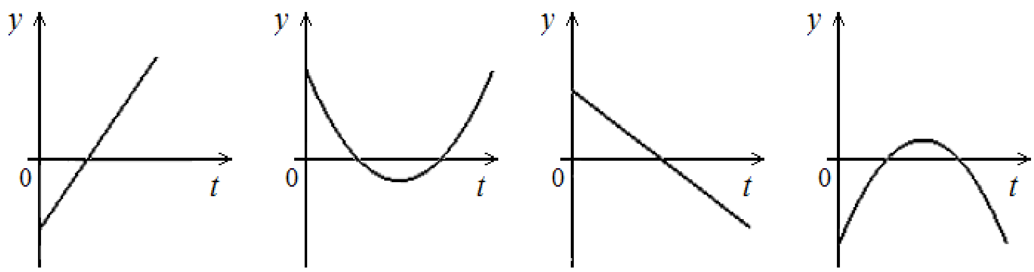
Centro Universitário UNIVATES
Disciplina de Cálculo III
Professora Maria Madalena Dullius

Este teste é constituído por 20 questões de escolha múltipla e duas questões abertas. Dentre as alternativas, escolha apenas uma, a que melhor responde à questão, assinalando-a na grade em anexo. Se você não tiver nenhum palpite a respeito de alguma questão, deixe-a em branco.

1. Sabendo que o gráfico de $\frac{dy}{dt}$ em função de t é



indique qual dos gráficos abaixo melhor representa uma primitiva y em função de t:



(a) (b) (c) (d)

2. Em uma região de muitas árvores, os restos vegetais se acumulam no solo a uma taxa de 4 g/cm^2 por ano. Estes restos se decompõem a uma taxa de 9% ao ano. $Q(t)$ representa a quantidade de restos vegetais por unidade de área (g/cm^2) no instante t. É correto afirmar que a quantidade de restos vegetais por unidade de área a longo prazo:

(a) tende a zero.

(b) aumenta infinitamente.

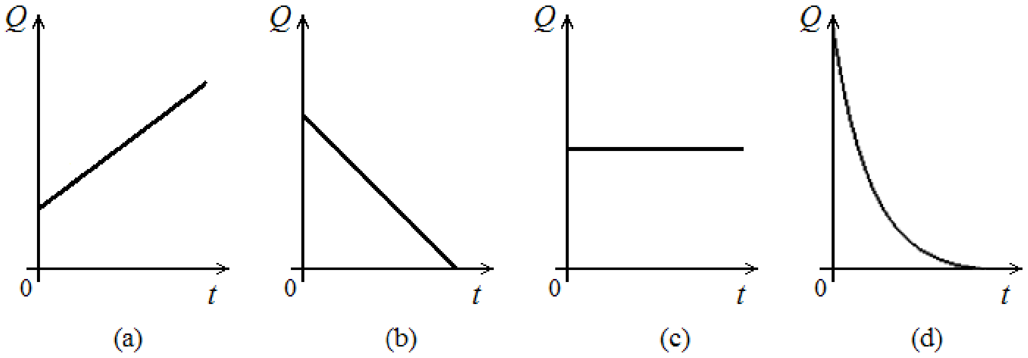
(c) tende a se estabilizar em um valor constante não nulo.

(d) tem um comportamento oscilatório periódico.

As questões 3 a 5 referem-se ao seguinte enunciado:

Considere uma toalha molhada, colocada para secar em um varal. Sabe-se que ela seca ao ar livre a uma taxa que é proporcional à quantidade de água existente na toalha e que, a cada duas horas, a quantidade de água na toalha se reduz à metade da quantidade existente.

3. Qual gráfico melhor representa a quantidade de água *Q* na toalha, em função do



tempo *t* após ela ter sido colocada no varal?

4. Se dobrarmos a quantidade inicial de água na toalha, o tempo que leva para que a quantidade de água se reduza à metade:

   (a) dobra.

   (b) reduz-se à metade.

   (c) não se altera

   (d) quadruplica.

5. Se considerarmos o tempo em horas, é correto afirmar que:

   (a) em todas as horas, a quantidade de água que sai da toalha é a mesma.

   (b) a quantidade de água que sai da toalha, por hora, vai diminuindo.

   (c) a quantidade de água que sai da toalha, por hora, vai aumentando.

   (d) a taxa de variação da quantidade de água na toalha é constante.

As questões 6 e 7 referem-se ao seguinte enunciado:

Após ser fervido em água, um ovo à temperatura T_0 = 100ºC é deixado sobre uma mesa e esfria a uma taxa proporcional à diferença entre a temperatura do ovo e a temperatura do ar que o cerca (Lei do resfriamento de Newton). Considere que a temperatura do ar permaneça constante em 20ºC.

6. À medida que o ovo esfria, o módulo da taxa de resfriamento:

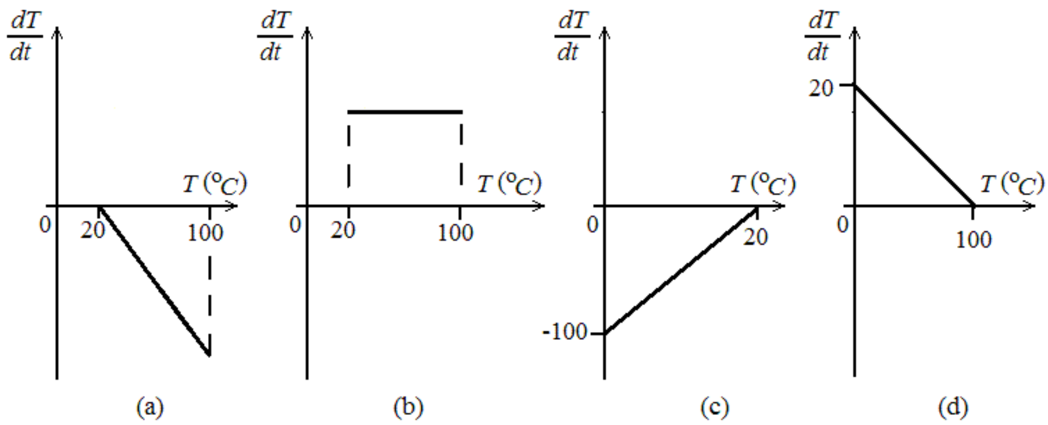
   (a) não se altera, porque a temperatura do ar é constante.

   (b) diminui, pois a diferença entre a temperatura do ovo e a temperatura do ar que o cerca diminui.

   (c) aumenta, porque a temperatura do ovo diminui.

   (d) tende a um valor constante diferente de zero.

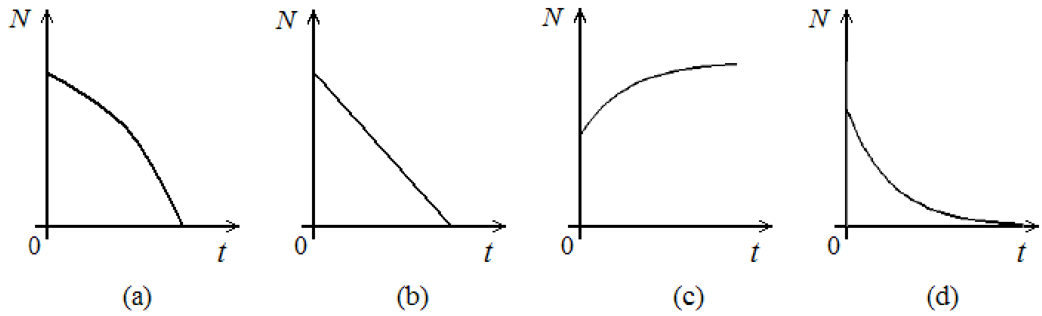
7. Qual o gráfico que melhor representa o comportamento da taxa de variação da temperatura do ovo, em função da própria temperatura T?



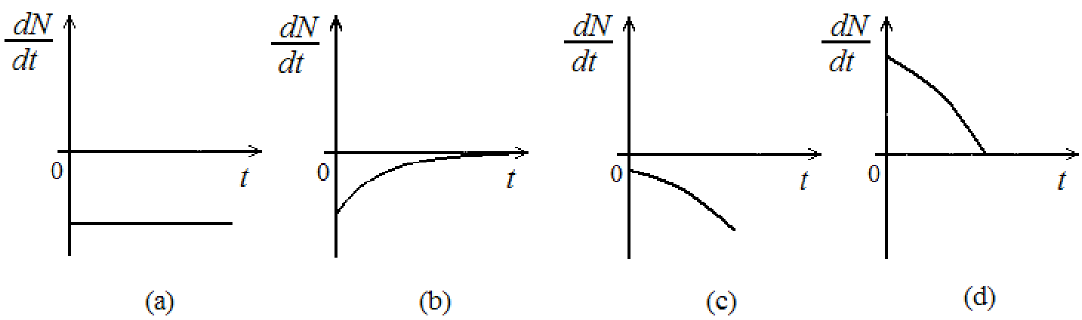
As questões 8, 9 e 10 referem-se ao seguinte enunciado:

Suponha que uma população *N*(*t*) de mosquitos, em certo instante *t*, na ausência de outros fatores, aumente a uma taxa, em cada instante, proporcional à população existente, e que, no mesmo ambiente exista uma espécie de pássaros predadores, que comem um número fixo *m* (constante positiva) de mosquitos por unidade de tempo, que leva à extinção da população de mosquitos.

8. Qual dos seguintes gráficos poderia representar a população $N(t)$ de mosquitos, em função do tempo t?



9. Qual dos seguintes gráficos poderia representar a taxa de variação $\frac{dN}{dt}$ da população de mosquitos, em função do tempo t?



10. Pergunta-se: qual das alternativas abaixo apresenta uma equação diferencial satisfeita pela população de mosquitos, sendo k e m duas constantes não negativas.

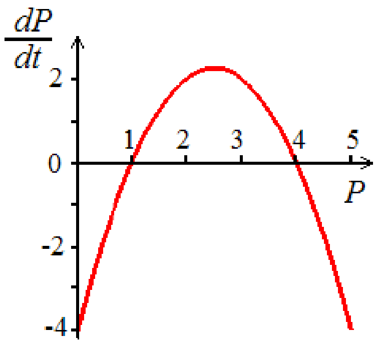
(a) $\dfrac{dN}{dt} = k \cdot N - m$

(b) $k \cdot \dfrac{dN}{dt} = -N + m$

(c) $\dfrac{dN}{dt} - m = k \cdot N$

(d) $\dfrac{dN}{dt} + k \cdot N = m$

11. A partir do seguinte gráfico para $\dfrac{dP}{dt}$ *versus* P, para $0 \leqslant P \leqslant 5$, sendo $P(t)$ o tamanho de uma população em um instante qualquer t, medido em unidades de 1.000 habitantes, podemos concluir que, com o passar do tempo:



(a) se $P(0) < 1$, a população aumentará, aproximando-se de 1.

(b) se $P(0) = 2{,}5$, a população permanecerá constante.

(c) se $P(0) > 4$, a população diminuirá, aproximando-se de 4.

(d) se $1 < P(0) < 4$, a população diminuirá, aproximando-se de 1.

12. No contexto de teorias de aprendizagem, identifique qual das equações diferenciais abaixo constitui um modelo matemático adequado para o caso em que uma pessoa deva memorizar uma quantidade M de informação e que a quantidade de informações em sua memória em um determinado instante de tempo *t*, *A(t)*, aumenta a uma taxa proporcional à quantidade de informações que faltam ser memorizadas e diminui (isto é, a pessoa esquece) a uma taxa proporcional à quantidade já memorizada.

(a) $\frac{dA}{dt}=k_1\cdot A-k_2\cdot M$, onde k_1 e k_2 são constantes positivas

(b) $k_1\cdot\frac{dA}{dt}=M-k_2\cdot A$, onde k_1 e k_2 são constantes positivas

(c) $\frac{dA}{dt}=k_1\cdot(M-A)-k_2\cdot A$, onde k_1 e k_2 são constantes positivas

(d) $\frac{dA}{dt}=k_1\cdot A-k_2\cdot(M-A)$, onde k_1 e k_2 são constantes positivas

13. O crescimento populacional de um determinado município num certo período de tempo, pode ser representado pelo modelo logístico,

$$\frac{dP}{dt}=k\cdot P-\frac{k}{L}\cdot P^2$$

onde *k* é o coeficiente de crescimento e *L* é a capacidade de suporte populacional do meio. Sabendo que *P* e *L* representam número de pessoas, e t é medido em anos, a unidade de medida do *k* é:

(a) 1/ano

(b) pessoas/ano

(c) 1/pessoa

(d) pessoas . ano

14. Considere a equação diferencial:

$$\frac{dN}{dt}=rN\left(1-\frac{N}{k}\right)-\frac{BN^2}{A^2-N^2},$$ onde *r, K, A, B* são constantes positivas,

que descreve o crescimento de uma população de lagartas *N*(*t*), sujeita à predação por pássaros a uma taxa dada por $\frac{BN^2}{A^2-N^2}$.

Efetuando a análise dimensional das diversas quantidades envolvidas, concluímos que

(a) $[B] = [r] = [t]^{-1}$

(b) $[A] = [K] = [N]$

(c) $[r] = [K] = [N]$

(d) $[B] = [A] = [t]^{-1}$

15. Dada a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = B - ky\,,$$

onde *B* e *k* são constantes positivas e $B \neq ky$, podemos afirmar que, a longo prazo:

(a) *y* tende a um valor diferente de zero

(b) *y* aumenta infinitamente

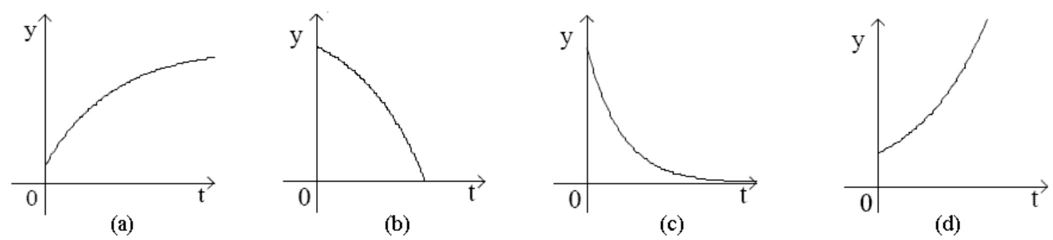
(c) *y* tende a zero

(d) *y* diminui infinitamente

16. Dada a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}2\,y - 100\,,$$

e considerando, $y(0) = 1000$, qual das curvas abaixo melhor representa uma possível solução?



17. Dada a equação diferencial $\frac{dy}{dt} = 0{,}2\,y - 100$, podemos afirmar, com relação ao comportamento das soluções, que:

a) para qualquer que seja o valor de *y*(0), à medida que o tempo passa, *y* tende a um valor constante diferente de zero

b) para qualquer que seja o valor de *y*(0), à medida que o tempo passa, *y* tende a zero

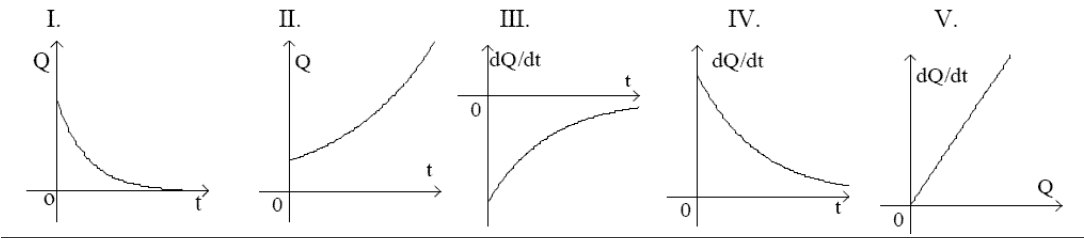
c) para qualquer que seja o valor de *y*(0), à medida que o tempo passa, *y* tende ao infinito

d) para y(0)<500, à medida que o tempo passa, y tende a zero.

18. Em uma região, a taxa de variação do número formigas, por dia, é representada pela equação

$$\frac{dQ}{dt}=kQ$$

onde *Q* representa o número de formigas e *k* é uma constante de proporcionalidade. Considerando *Q>0* e os gráficos abaixo,



podemos afirmar que

(a) se k>0 somente o gráfico II está correto

(b) se k=0 somente o gráfico V está correto

(c) se k<0 os gráficos I e IV estão corretos

(d) se k<0 os gráficos I e III estão corretos

19. Assinale qual das alternativas abaixo é a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx}=6-2y \qquad y(0)=8$$

(a) $y=3+5e^{-2x}$

(b) $y=6e^{-2x}$

(c) $y=6+2e^{-2x}$

(d) $y=4+e^{-2x}$

20. O deslocamento $x(t)$, com relação à posição de equilíbrio, de um corpo de massa m, preso na extremidade de uma mola de constante elástica k, e sujeito à uma força motora $F(t)$, é descrito pelo seguinte problema de valor inicial:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=F(t)\ ; \quad x(0)=x_0\ ; \quad x'(0)=v(0)=v_0$$

Identifique qual das alternativas abaixo é a solução da situação específica:

m = 1 kg, k = 36 N/m, $F(t)=3\,sen(4t)$ N, $x_0=v_0=0$ = 0

(a) $3\,sen(4t)+\cos(36t)-1$

(b) $\frac{-1}{10}sen(6t)+\frac{3}{20}sen(4t)$

(c) $\cos(2t)-sen\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$

(d) $\frac{1}{3}\cos(4t)-\cos\left(6t-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{3}$

21. Um corpo de massa 25 gramas é arremessado verticalmente para cima, a partir do solo, no instante de tempo $t = 0$, com uma velocidade inicial 48m/s. Considere que a resistência do ar seja proporcional ao módulo da velocidade do corpo, mas em sentido contrário, com constante de proporcionalidade k = 1/80 $N.s/m$. Resolva o problema de

valor inicial constituído pela equação diferencial linear

$$\frac{dv}{dt}=6-g-\frac{k}{m}v\ ,$$

juntamente com a condição inicial dada e determine a velocidade do corpo 10 segundos após ser arremessado.

Sugestão:

Comece por resolver o problema de valor inicial constituído pela equação diferencial linear de 1ª. ordem para $v(t)$, juntamente com a condição inicial dada.

22. Obtenha a solução do problema de valor inicial:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+5\frac{dx}{dt}+6x=0\ , \quad x(0)=2m\ ; \quad x'(0)=v_0=0{,}5\,m/s$$

que descreve oscilações livres (sem força motora) de um objeto de massa 1kg, preso na extremidade de uma mola cuja constante elástica é 6 N/m, em um meio que oferece uma resistência proporcional à velocidade, sendo a constante de amortecimento igual a 5 Ns/m. A variável dependente $x(t)$ é o deslocamento, em metros, com relação à posição de equilíbrio em um instante t segundos.

Centro Universitário UNIVATES
Disciplina de Cálculo III - 2008/A
Professora Maria Madalena Dullius
Aluno: _______________________________

Folha de respostas

Dentre as alternativas escolha **apenas uma**, a que melhor responde a questão, assinalando-a na grade.

Questão	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***	***12***	***13***	***14***	***15***	***16***	***17***	***18***	***19***	***20***
	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
Alternativa	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b
	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c
	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d

Questão 21

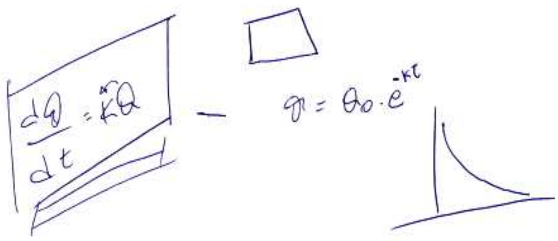
Questão 22

ANEXO 1

Transcrición de la entrevista realizada con los alumnos (Estudio 1)

Dupla 1	
São dois alunos que conseguiam realizar as atividades, mas tinham por hábito solicitar a ajuda da professora, pois queriam que esta facilitasse o trabalho dando sugestões, mesmo antes que eles tivessem tentado. Além disso queriam resolver tudo por cálculos, não faziam estimativas, aproximações.	
Questões	Fragmentos de respostas
Q1	A1: Ah, não posso reclamar, achei legal, o que eu tinha um pouco de dificuldade foi essa última aula (resolver a equação logística), ... Ali ficou um pouquinho vago pra mim, ... no geral, as primeiras, de decaimento foi mais tranqüilo. A2: Eu só senti dificuldade sabe quando, ... eu tinha uma dúvida e a professora não me explicava.
Q2	A1: Um programinha legal, gostei, ajudou bastante na questão de visualizar, como "funciona" a equação. A2: Das tabelas e coisas. De repente talvez, para um outro tipo de "função" a gente não consiga montar direitinho, fazer o esquema.
Q3	A1: A questão matemática, ... a questão do "ln" do "e" ficou tranqüilo pra nós, mas um pouco talvez as derivadas, ... Questão do conteúdo achei interessante, tanto que a gente trabalhou muito ... a gente não pegou nada assim, ah, resolvam isso. M: E o que que acharam mais difícil do conteúdo? A2: Ah certamente foi resolver as equações A1: Resolver as equações, a questão de sair da equação e chegar até a fórmula geral. A2: É, a parte de montar, de fazer a derivada A1: Dependia tanto da matemática quanto do entendimento e quanto das formas de resolução. M: E quanto ao *software*? A1: A gente aprendeu ...achei bem interessante. A2: ... no primeiro dia nós usamos aquela tabela do excel, nós sentimos um pouco também de dificuldade porque a gente não sabe nada de, não utiliza excel no dia a dia. A1: É ali ficou um pouco vago mas eu assim consegui fazer.
Q4	A2: Trabalho em grupo a gente quase sempre faz. A1: É normalmente a gente faz isso em aula, acho que é da própria engenharia

Q5	A2: É que nem, eu posso citar aqueles exemplos que a professora deu, serve para calcular a radiação, a meia vida, ... A1: É que na verdade tá sempre dentro de algumas situações, mas o estudar é tão difícil que o cara nem percebe que é uma equação diferencial, ela ta lá, ... aqui a gente percebeu que daquilo ali se formava, ... envolve uma porcentagem, várias aplicações estão dentro e a gente não percebe quando estuda aquilo, ... absorção de medicamento, ... química, biologia. A2: É verdade, ...é tudo essa forma aqui pra calcular, mas não disseram que isso talvez seria uma equação. A1: É, da onde veio, normalmente nesse nosso caso estudado ali é essencial. A2: Já dão pronta a particular ou a geral, te dão pronta não precisa partir duma integral resolver isso aí. M: Qual é a característica que o modelo precisa ter para se enquadrar na equação diferencial? A1: tem que ter a derivada da equação M: E quando vai ter a derivada? ... A2: Normalmente não é uma coisa digamos assim, linear A1: Pode ser linear também A2: É, também, tem as linear, mas não é constante A1: É, não é, existe crescimento ou decaimento ou uma variação
Q6	A2: pra algumas coisas, pra cadeira (disciplina) de circuitos elétricos, eu já tenho essa cadeira, e eu vou ter que fazer ela de novo, lá a gente tinha isso aí só que o professor fazia, simplesmente tacava as coisas no quadro, eu até achava complicado o jeito que ele fazia sabe, daí agora vendo que a professora passou que são equações, isso vai me ajudar agora pra fazer novamente a disciplina. A1: esse último trabalho que a senhora pediu pra entregar, ... a gente fez sobre o aquecimento de uma máquina e o nosso resultado foi sobre a transferência de calor, temperatura, ia acumulando calor, calor, calor, até que chegava um ponto que ela não funcionava mais, perdia produtividade, então, isso acontece muito, na parte da produção, produção normal, ... por que não tá funcionando, ... é uma equação diferencial, é uma coisa que nós vamos passar pelo curso, ... pra gente perceber o que ta acontecendo, como acontece e quanto tempo acontece
Q7	A1: a geral tem não importando se a quantidade é uma o outra, a particular é pra casos específicos A2: tem que ter a quantidade inicial tem que ter a constante, que é necessário A1: tipo bem geral mesmo, geral é geral e a particular é particular, cada caso a geral pode te “ informar” resultado diferentes

Q8	A1: seria a derivada da quantidade de poluentes igual a taxa de quantidade de poluentes A1: Tendo que a quantidade é proporcional a taxa e a taxa vai variar conforme a quantidade inicial, provavelmente, certamente, por que uma depende da outra, ela tem essa cara aqui,  M: sabendo que o modelo matemático é assim, que informações importantes vocês conseguem tirar em relação a esses poluentes, só olhando a equação? A1: podemos criar, tem como criar a fórmula geral dela M: qual é? A1: a geral dela seria, a quantidade igual a uma quantidade inicial, ou uma constante...multiplicada por “e” e taxa pelo tempo M: e a solução gráfica? A1: é decaimento, no caso ta caindo, matematicamente nunca chegaria ao fim os poluentes, teria mínimas partículas, pelo fato do decaimento A2: no início a quantidade que perderia seria muito maior também, do que no final, no final a diminuição seria assim quase zero, praticamente manteria o que tem e não diminuiria muito A1: cada vez perde menos devido a menor quantidade de poluentes
Q9	A1: meu envolvimento, eu não perdi nenhuma aula, podia ter estudado mais em casa, certamente, mas é uma coisa que todo adolescente diz que vai fazer e nunca faz, não adianta, tipo final de semana ou sábado de noite, em vez de ir pra festa a gente podia ter ficado em casa estudando A2: a gente tentava na aula fazer, tirava as dúvidas A1: é extra classe a gente podia ter estudado um pouco mais A2: feito os trabalhos que a professora deu
Q10	A1: foi interessante por que não foi aquela coisa, ..., vocês pegam o livro e façam o cálculo, resolvam, entende, sem saber a gente tava resolvendo, ... A2: é acredito que se fosse de outra forma a gente ia botar a cabeça naquilo ia começar a escrever, escrever e escrever e não ia parar mais até chegar a uma resposta A1: calcular um monte de coisa que tu não sabe. A galera de fora diz fazer cálculo é uma loucura, bem aplicado assim, do lado de aplicação a gente não pode reclamar

Dupla 2	
São dois alunos que trabalhavam com muito empenho na realização das atividades, discutiam muito, e procuravam fazer as tarefas com muito perfeccionismo.	
Questões	Fragmentos de respostas
Q1	A1: o conteúdo era complicado, eu não sei, porque também a gente não teve nada ainda com cálculo inicial mais forte, A2: foi boa vamos dizer, por causa que dava pra assimilar no computador, e *software*s
Q2	A1: eu acho que ajuda, tu consegue ver o que tu calculou de uma outra forma, ajuda completar o teu cálculo, ver na prática A2: não tinha só que imaginar assim, ah o decaimento é dessa forma, lá tu consegue visualizar nos gráficos ...
Q3	A1: pra mim foi essa parte de derivadas, integral... toda essa parte, eu não lembro, eu não sei se eu não peguei isso no início ou como é que ficou, pra mim eu tive bastante dificuldade nessa parte M:e em relação ao conteúdo de equações diferencias? A1: não, o conteúdo é tranqüilo, assim dá pra entender perfeitamente, até pela lógica nem tanto pelo cálculo mas lendo o problema já tem mais ou menos uma noção do que pode acontecer, mas é conseqüência dessa dificuldade nas derivadas é que tava complicando um pouco M: vocês tiveram dificuldades com uso do computador? A1: não, com o computador não
Q4	A1:eu acho que é bom, tem uma dúvida, tem como tirar A2: os dois pensando juntos facilita o raciocínio, e ainda mais se não dá pra terminar em aula aí pode, que nem um sozinho em casa pensando é uma coisa, agora os dois juntos conversam e pensam daí é mais fácil M: e desvantagens? A1: eu não vi desvantagens, se os dois vão e tentam fazer, não tem problema, tem algum problema quando um vai pela carona...
Q5	A2: utilidades muito úteis nas disciplinas que envolvem variação A1: eu sei que futuramente vai ter cadeiras (disciplinas) que nós vamos precisar de cálculos M: vocês saberiam dizer para que elas servem e quando se usa? A2: sim, serve pra como uma taxa de variação que varia ao longo do tempo, que nem circuitos é um exemplo, nós temos que usar só que não temos lá equação que nem a professora dá, a derivada disso, tinha a fórmula e daí com essa fórmula nós ia resolvendo o circuito em etapas M: vocês saberiam dizer que tipo de situações, que tipo de problemas, qual é a característica que precisa ter uma situação ou um problema pra ele resultar numa equação diferencial? A2: uma variação A1: uma variação ao longo do tempo, não sendo uma variação constante A2: vai ter uma variação que pode ser crescente ou decrescente ao longo do tempo

Q6	A2: eu acho que sim, por que vai ter problemas e situações, que vão ser obrigados a usar as equações diferenciais pra resolver
Q7	A2: ... na equação geral pode ser obtido o resultado em qualquer instante de tempo A1:... é tipo uma fórmula, A2: bota o tempo, o tempo pode ser, o tempo 1, o tempo 6 A1: ai vai ter o resultado A2: e a particular já é até certo instante de tempo, até num determinado momento, vamos dizer que vai variar alguma coisa só, naquele momento vai servir essa equação, é uma solução particular, vai ser só pra aquele determinado momento A1: pra aquele determinado instante de tempo
Q8	A1: quanto maior a taxa de variação, menor vai ser a taxa de poluentes. Ela é proporcional? M: é, a taxa de variação é proporcional a quantidade de poluentes A1: então, se diminuir a taxa de variação, diminui a quantidade de poluentes A2: derivada do valor dos poluentes dividido pelo intervalo de tempo, igual a A1: a quantidade de poluentes A1: então vai ficar, vamos supor que a quantidade de poluentes é o P A2: derivada de poluentes dP A1: derivada de poluentes sobre derivada de tempo “vai ser” diretamente proporcional a quantidade de poluentes que tem, a quantidade de poluentes A1: se aumenta, se a quantidade de poluentes é alta em função do tempo, a quantidade de poluentes também vai ser alta M: como seria a solução dessa equação? Solução geral A1: isso aqui ficaria, P seria a quantidade de poluentes, que agora, ai é o P inicial, aí fica vezes “e na menos KT” A2: é menos porque vai diminuir $\frac{dP}{dt} = P \cdot K$ $P = P_0 \cdot e^{-kt}$
Q9	A2: eu acho que o que a gente poderia ter feito é ter mais em dia essa questão de derivada, sei lá, ter ido buscar sozinho, o que a gente não pegou, que a gente teve lá nos outros cálculos

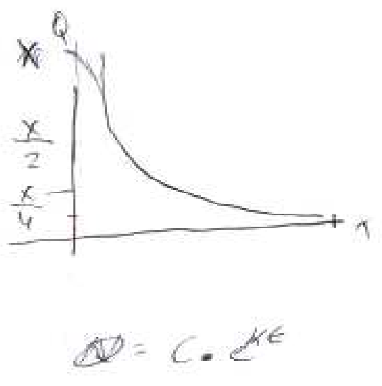
Q10	A1: eu acho que melhorar, a gente não teria como falar o que melhorar, ... A2: é o problema é assim, não foi da maneira com que foi tratado o uso de *software*s, o uso das atividades ali eu acho que ta legal, a questão de suprir necessidades, que a gente não tinha umas ou outras coisas, e isso vai acabar voltando a ter que repassar coisas que não é do conteúdo de agora que, revisar, revisar, revisar coisas de outros cálculos pra daí passar essa parte da matéria que é referente a cálculo III, isso que é brabo não dá pra ficar, sei lá quanto tempo aí retomando, retomando matéria que é coisa que já repetiu e a gente já sabe, deveria saber, mas cálculo é complicado pra nós

Dupla 3	
São dois alunos que demonstravam muita facilidade para realizarem as tarefas solicitadas, discutiam muito.	
Questões	Fragmentos de respostas
Q1	A1: eu achei interessante, diferente das outras disciplinas que nós tínhamos feito de Cálculo I, II, a forma como nós trabalhamos achei bastante proveitosa A2: eu achei interessante em função dos guias porque forçou a gente a raciocinar mais, e não só olhar a situação e fazer aquela coisa mecânica sabe, forçou a gente a pensar mais, tem aplicação, achei bem legal
Q2	A1: na minha opinião ele ajudou e, eu acredito que a gente devia ter mais, tanto nas outras disciplinas, assim como nessa também, a gente poderia aprender mais a trabalhar com aquele sistema, eu acho que de repente amanhã a gente se forma, a gente vai ocupar bastante isso aí. A2: é que fica mais fácil pra ti visualizar, a partir do momento que tu joga lá, monta um gráfico, tem uma noção, muda até a tua "interpretação", assim, achei um pouco de dificuldade no início até em função de não ter muito conhecimento com planilha, até a gente se habituar, começar a entrar no ritmo, usar os programas foi interessante
Q3	A2: é, em função da gente não ter um conhecimento básico dos comandos lá na planilha, e até porque a gente nunca tinha trabalhado M: dificuldades em conteúdo, equações diferenciais, compreensão do conteúdo? A1: eu acho que nós pegamos bem A2: é, claro que algumas dificuldades surgiram no meio do caminho em função de resolver um cálculo, as vezes a dificuldade nem era na interpretação pra chegar na equação mas lá pra resolver, mas a gente sempre procurou e tentou resolver tudo na aula, não deixa nada pra trás pra não fica com dúvidas pendentes A1: as vezes as dificuldades eram mais em equações que nós já passamos em outras épocas do que com a interpretação do problema

Q4	A2: a gente já se conhece de outras disciplinas então esse contato fica mais fácil, por que não é uma pessoa totalmente desconhecida, eu acho que fica interessante a partir do momento que a gente trabalha como dupla, a gente até conseguiu fazer de um completar o trabalho do outro, de ter as opiniões diferentes chegar num final comum pros dois A1: e a gente aprende mais porque tu ta discutindo o assunto, porque se as vezes tu faz individual e não sabe, pega o do colega e copia, fica sem saber, mas em dupla se tu ta tentando responder tu acaba aprendendo, porque se tu não sabe o teu colega ta respondendo ele vai te ensinar por que ele ta respondendo daquela maneira M: algumas desvantagens de trabalhar em duplas? A2: acho que não, até porque a gente não precisou se encontrar fora, a gente conseguiu acompanhar durante as aulas, mas talvez se tivesse que ter se encontrado em outro horário fora da aula pra fazer teria tido dificuldades mas assim não A1: não tivemos maiores dificuldades não
Q5	A1: eu acho que é muito importante porque nós tivemos vários exemplos, população, crescimento, isso eu vejo no meu próprio trabalho também que a gente tem que ter uma lógica, por isso a gente tem que saber interpretar, esses casos a gente encontra seguido aí fora, se tu vai fazer uma avaliação de impacto ambiental de uma poluição de um rio tu, analisando bem agora, depois que a "gente passou pela disciplina", tu vê que tudo passa por uma equação M: tudo o que? Quando passa por uma equação? Quando a situação pode ser modelada por uma equação? A1: tipo assim, um exemplo, teve uma contaminação de um rio, se a gente for analisar uma contaminação, o produto que tu vai aplicar pra corrigir, pra tirar essa contaminação e tal, tu vai te que te uma equação pra aplicar
Q7	A1: a solução particular é restrita a uns critérios e condições que sejam dados no problema A2: é que a gente sempre fazia a solução particular em função de dados que eram dados, que eram colocados, então a partir de dados estabelecidos a gente tirava uma equação particular

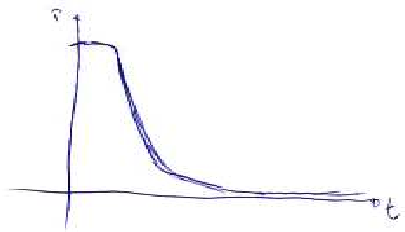
Q8	A1:pode A2: fica parecida com a da meia vida, vai reduzir a partir do que tu tem A1: eu acho que é que nem as que nós fazia simplesmente só o que entrava o que saia...tinha o percentual ...em relação ao tempo M: todo mês vai sair a mesma quantidade? $Q_F = Q_i \cdot K^t$ $Q . Q .$ A2: não, vai mudar por que A1: vai diminuindo A2: decai na proporção do que tem, conforme vai diminuindo vai decaindo menos, vai mudar a proporção que vai saindo
Q9	A1: acho que deveria ter praticado mais em casa, na aula as vezes até, devido até ao pouco horário que a gente tinha, a gente acabava não fazendo todos, e em casa nem sempre eu fiz, agora em sala de aula eu acho que nós aproveitamos bem o horário A2: é talvez até ter esclarecido algumas dúvidas que a gente deixou pra te perguntar, ter buscado em livros
Q10	A1: eu achei uma forma como foi trabalhado diferente, eu acho que poderia ser seguido esta forma, trabalho em grupo, informática, isso aí faz com que a gente, seja uma coisa diferente do que a gente vinha fazendo A2: é, e até em função de tu ter um prazo de tentar, pelo menos, ah era a nossa meta no final da aula entregar aquele guia pronto, eu acho de colocar um prazo de tempo, de não ter, sei lá duas três semanas em função de um exercício, eu não tenho nada que poderia ser mudado, achei bem interessante a forma que foi feito.

<table>
<tr><td colspan="2"> Dupla 4 São dois alunos que tinham facilidade para realizar as tarefas, trabalhavam em conjunto com outra dupla e os quatro rendiam muito bem, tinham poucas dúvidas e tinham discussões muito produtivas. Calculavam muito.</td></tr>
<tr><td>Questões</td><td align="center">Fragmentos de resposta</td></tr>
<tr><td align="center">Q1</td><td>A1: é uma disciplina que, não vou calcular muito, ...
A2: é interessante a questão das taxas, eu acho que isso foi bem legal, pra nós tanto em física, quanto em circuitos, é usado muito em física por questão de temperatura, variação de velocidade, e circuitos por causa da amperagem</td></tr>
<tr><td align="center">Q2</td><td>A2: Eu pessoalmente acharia que isso numa sala de aula “produziria” mais
A1: Pega mais. Eu acho que dá muita matação no computador, porque o pessoal se “estende” muito, se prende muito, se fosse só fazer a simulação
A2: quando tu ta na frente de um micro tu ta na rede, tu nunca ta na frente só de um computador, entra num site entra num outro
A2: o computador ele tira um pouco de atenção
A1: ele tira atenção, ... se tu ta em sala de aula tu tem que batalhar mais, ... como o Marcos falou: usar os computadores só pra demonstrar</td></tr>
<tr><td align="center">Q3</td><td>A1: derivadas, integrais
M: e o conteúdo de equações?
A2: a idéia das equações não
A1: não, não é o problema
A2: não é tão complicado, ... a gente conseguia sacar as coisas só lendo o problema, não precisava da ajuda externa
A1: a lógica era sempre a mesma, tu conseguia interpretar logo
M: vocês tiveram dificuldade para usar o computador?
A2: não
A1: não</td></tr>
<tr><td align="center">Q4</td><td>A1: trabalhar em grupo é legal
A2: se tiver um grupo bom
A1: ... quando tu começa a tirar dúvidas entre duplas tu começa a interagir sabe, a gente começa a ver o porque
A2: ... porque que deu isso, ah eu fiz assim, será que esse é o caminho certo,</td></tr>
</table>

Q5	A1: tu vai encontrar uma equação particular para calcular a temperatura daquela máquina, naquele tempo A2: tem utilidade lógico, não sei se agora no curso, acho que em física, física III, física II que a gente viu trocas de calor, ali teve só que a taxa era fixa, não era uma taxa, era calculada através de toda equação, ... era só jogar os valores, então não tinha aquele raciocínio todo de como que funciona A2: é, isso foi legal, e com circuitos também, física e circuitos foi assim, já tava pronta a equação, quem talvez fez cálculo III antes entendeu melhor a jogada em relação ao tempo, isso é legal, em algumas disciplinas tem a ver sim M: e vocês saberiam explicar qual é a característica básica que precisa ter numa situação para poder ser modelada com uma equação diferencial A2: uma variação em relação ao tempo, uma variação, digamos, de entrada, saída A1: uma variação não constante
Q7	A2: a particular tu define uma coisa A1: a geral tu pode usar em mil, cem, e a particular só em um A2: a particular, ah tipo, tem um lugar que a população começou em dez mil, é particular A1: a particular só varia o tempo, a geral tu vai variar a constante
Q8	A2: seria a mesma coisa da taxa de saída daquelas caixa d’água M: escrevam a equação, como é que fica a equação A1: a taxa do que tem dentro é igual a constante vezes a variação do tempo, é igual a constante vezes o que ta saindo A2: tem que acha a constante A1: é a taxa  M: como seria o gráfico da quantidade de poluentes em função do tempo? A1: é um gráfico que começa, sai bastante depois vai A2: vai tender a zero A2: digamos que entra água limpa né, então a quantidade de poluentes é constante ali dentro, constante digamos sem ter tratamento, a partir do momento que é tratada então vai diminuindo A1: é ai começa na “ bera” do gráfico

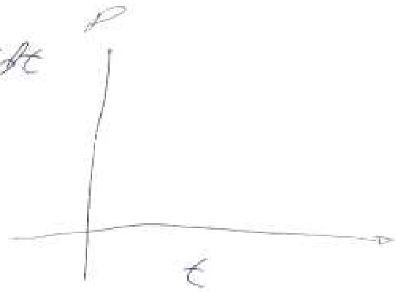
Q9	A1: acho que em sala de aula nós devia calcular mais, nós devia exercitar mais A2: eu acho que teria que ser trabalhado um pouco mais, só que eu acho também que os exercícios eram bastante extensos por que a gente se perdia muito em fatores como cálculo I, vai derivar, vai integrar, a gente perdia muito tempo pra terminar os exercícios, a própria equação em si não é difícil, entender a equação não é complicado, o complicado é trabalhar nela, é transformar ela, isso que atrasava muito
Q10	A2: eu acho que diminuir um pouco o uso do computador e usar mais sala de aula A1: é trabalhar um pouco mais em cima a equação A1: na hora que tu tiver sozinho ali pra fazer não vai saber fazer sem o computador na frente eu não sei isso que pode acontecer, então eu acho que, isso é a única questão que pode vir a influenciar, ..por que lendo e fazendo no computador eu fazia tranqüilo, agora pegar ali sentar só com a folhinha é complicado

Dupla 5 São dois alunos que trabalhavam muito lentamente, tinham dificuldades para interpretar as atividades.	
Questões	Fragmentos de respostas
Q1	A1: foi boa a disciplina, mas, tipo eu senti que faltou cálculo do ano passado A2: eu gostei da disciplina por causa do jeito de mostrar a parte mais prática, a queda de um corpo, a professora deu um exemplo nos circuitos, decaimento radioativo, isso aí, mostrou na prática, o que a gente geralmente não tem, nas disciplinas de engenharia a gente vê os cálculos e não sabe como aplicar, isso eu achei uma coisa importante e foi bom pra mim, gostei do jeito que a professora passou, dando exemplos de como aplicar, a gente nem se deu conta que tava aplicando equações diferenciais nas coisas que a gente fazia
Q2	A2: ele ajudou assim na parte mecânica A1: pra entender não, pra fazer sim
Q3	A2: ao conteúdo ali na derivada A1: que nem eu disse, o conteúdo passado, cálculo I, cálculo II faltou, o entendimento assim, eu fracassei um pouco A2: pouco estudo também eu acho.... M: pra usar o *software*? A1: pra usar o *software* também não, depois que a gente pegou o que que tinha que fazer no computador, beleza M: e o conteúdo das equações em si, vocês tiveram dificuldades? A2: no início eu tava patinando, ... faltou embasamento
Q4	A2: trabalhar em grupo ... o cara ajuda o outro A1: é bom também pra quem ta um pouquinho atrás da matéria, isso também ajuda o aprendizado, ... uma parte lógica lá que eu não entendi ele explicou de um jeito diferente do que eu estava pensando daí eu entendi, duas versões diferentes a gente consegue sair de um problema, não vai pra frente, daí um mostra um outro caminho.
Q5	A1: a nível de curso a gente sabe, até usamos alguma coisa em cálculo, circuitos, mas acho um problema dos professores não ligar uma matéria a outra, que vai ser usado pra circuitos, às vezes não tem essa ligação, os professores não dizem que é uma em função da outra M: Vocês saberiam dizer pra alguém de fora quando uma situação pode ser modelada através de uma equação diferencial, qual é a característica que essa situação precisa ter? A1:é tipo uma taxa, vai ter uma equação, tipo aquelas entradas de água, uma coisa assim, crescimento A2: a equação talvez não mas uma situação, tu vai ter uma equação e uma variação, e essa equação vai variar, tu vai ter uma taxa, pode ser uma de entrada uma de saída, umas podem ter crescimento outras tu vai perder alguma coisa, vai dar uma equação e as variáveis

Q7	A1: a geral serviria pra todas, a equação geral serve pra todas, aí cada uma com os dados, tu vai colocar um dado pra achar de repente a constante ou achar o valor inicial ou uma coisa desse tipo, a geral serve pra resolver situações semelhantes que tu vai usar aquela geral, aí as situações que tiver algum dado tu vai ter as equações especificas pra aquela situação
Q8	A1: um total P de poluição pelo tempo, a gente vai ter, vai ta variando a poluição com o passar do tempo, aí aqui um menos pra dizer que ta saindo a poluição, sei lá se é óleo, se ta saindo óleo, e uma constante pra dizer quanto que ta saindo e a poluição em si né, ai seria, a variação da poluição pelo tempo e quanto ta saindo disso aqui M: e olhando pra essa equação que informações vocês já conseguem tirar dela? A2: vai começar a partir de um valor e vai até o mínimo, com o tempo vai ficar totalmente mínimo M: como seria a solução geral? A2: da pra fazer por separáveis M: como ficaria o gráfico da quantidade de poluentes que tem no rio em função do tempo? $\frac{dP}{dt} = -KP$ $\frac{dP}{P} = K\,dt$  A1: esse gráfico ia começar num valor inicial, do valor inicial de poluição ia descendo e aí com o tempo ia tendendo a ficar limpo, no início começa maior, no início ficaria maior a queda de poluição, ai tu vai tirando, no final tu vai tirando menos por que tem menos pra ti tirar, então vai diminuindo
Q9	A2: talvez um pouquinho mais de dedicação em sala de aula, mais voltado ao conteúdo mesmo, porque assim todo mundo tem problema, e a gente, as vezes, em casa nem pega livro ou tem uma outra matéria que, por exemplo, eu tenho umas matérias que eu considero mais difíceis que o cálculo, aí a gente presta muita atenção naquelas e esquece do cálculo, então aproveitar mais o tempo em sala de aula resolvendo os cálculos em si.

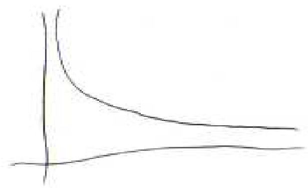
Q10	A1: exercícios em sala de aula, eu acho que mais exercícios na sala A2: é que tipo no computador, daí tem internet, nós não vamos ficar ficar direto fazendo só as coisas por causa da internet, daí já começa a ver outras coisas já começa a dar barulho, daí já desconcentra, na sala de aula acho que ia se concentrar mais A1 : mas não tirar a aula do laboratório pra gente poder saber que dá pra fazer com o computador e assim facilita a modelagem de entrada e saída..., isso é bom pra ti saber que tem ferramentas pra facilitar o serviço A2: eu acho que primeiro mais teoria e depois começar no computador

Dupla 6	
São dois alunos que inicialmente tinham muita dificuldade, mas foi notório o crescimento deles, tanto no uso do computador como na interpretação das atividades.	
Questões	Fragmentos de respostas
Q1	A1: olha eu achei bem interessante, acho que diferente do que a gente vinha trabalhando, que a gente consegue trazer situações reais, que tu vai poder aplicar um dia A2: cálculo I a gente aprende a como calcular a equação já feita, aí não, a gente aprende a fazer a equação A1: isso que eu achei bem mais interessante, essa parte tu consegue uma coisa prática, numa empresa, a gente trabalha numa empresa já tem uma idéia como é que funciona isso, a gente já consegue levar, trazer essa parte prática junto com o cálculo, e eu acho que é isso que a gente vai ter que fazer como futuros engenheiros, é bem esse o nosso trabalho acho bem interessante "a informática"
Q2	A2: eu acho que o computador é uma ferramenta indispensável, então tu vai ter que te acostumar a trabalhar com ele, isso também vem a contribuir, não tem mais porque a gente hoje em dia fazer as coisas manual
Q3	A1: eu só tive dificuldade de "e" , "ln" essas coisas, mas tipo quando a senhora explicou daí no final eu já tava entendendo melhor M: e pra usar o computador alguma dificuldade? A1: pra elaborar sabe, só pra saber como formar, depois que pegou o jeito daí vai indo, é fácil de elaborar
Q4	A1: o bom é que é dois pensando, tinha muita coisa que ele pega que eu não pego, tinha coisa que eu pego e que ele não aí é mais fácil de se ajudar M: e desvantagens? A1: não... só tem pontos positivos
Q5	A2: eu ia responder que foi a única coisa que eu acho que eu vou usar, de mais interessante, no meu dia-dia, no meu trabalho A2: tipo numa fábrica, pra resolver problemas da fábrica, não que eu sei resolver mas ah tipo, muitas vezes tu, o pessoal vai tudo pela lógica, daí eu vou poder fazer uma equação e dizer certo o que acontece naquele setor M: que situações resultam uma equação diferencial, quais as características que a situação ou o problema devem ter? A1: uma taxa A2: tipo existe uma variação do inicio pro fim, ou aumenta ou diminui, e com essa equação tu vai poder determinar em qualquer ponto qual é que vai ser a quantidade, tanto de temperatura, como a quantidade de sal, como a quantidade de produtos, tu vai poder ter a qualquer instante a quantidade que tem, a partir de elaborada a equação

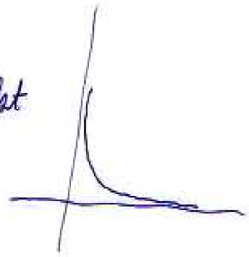
Q7	A1: a geral é formada basicamente por letras, e a particular já tem dados, já são fornecidos dados do problema, tipo tempo ou K que é a variação, a constante, a particular você já coloca dados dentro dela A2: já vai ter dados particulares daquele problema, tu quer calcular a taxa então tu pega aqueles dados e joga lá naquela tua fórmula na geral e aplica isso e tu tem o resultado
Q8	A1: seria em função do tempo, seria uma constante vezes a.... seria uma coisa assim $\frac{dP}{dt} = KP$ $\frac{dP}{P} = Kdt$ $\int$  A2: o nível de poluentes que o rio tem naquele instante, o rio tem um tanto de poluentes, e daí tu vai por cada tempo ver quanto é que ele vai tirar, calcular essa constante, continuar resolvendo essa equação aqui M: a quantidade que sai por mês é igual todos os meses? A2: não, é proporcional a poluição e cada pouco ela A1: a tendência é ela diminuir e aí eu acho estabilizar A2: não, não vai estabilizar, ela vai, ta ela vai ter que estabilizar uma hora, se tiver zero um, mas ainda vai continuar saindo, mas tende a um número muito pequeno tende a zero, não a zero não por que sempre o número vai ser divisível, mas tende a um número muito pequeno A1: é muito pequeno é, como não ta entrando A 2: Tende a zero, não chega a zero, mas tende a um número muito pequeno
Q9	A1: eu particularmente acho que esse sistema aí, essa didática fez com que a gente se empenhasse bastante nas aulas, também acho que quando a gente queria um algo a mais a gente tinha que estudar em casa, normalmente os outros a gente estuda quando tem uma prova, e não, a gente tem que estar sempre se preparando pra próxima aula, tem que estar bem preparado, pelo menos é assim que eu enxergava e que eu encarava essa disciplina aí A2: eu gostei bastante dessa disciplina que eram as equações, eu acho que eu vou ocupar bastante, eu me interessei bastante por essa parte porque eu vou ocupar bastante

Q10	A2: eu acho que é o que a turma inteira acha, que o problema ta mais no inicio, a gente não sabe a base pra poder resolver essa equação, tipo as regrinhas, porque agora é fácil de entender como essa equação vai ser feita e, só que tu tem que saber as regrinhas pra ir resolvendo ela M: tem alguma sugestão pra melhorar isso? A2: teria que ver desde Cálculo I, em Cálculo III o conteúdo não é difícil, só que tu tem que ter uma base pra poder desenvolver ele A1: eu acho assim, que cada vez mais tem que ser direcionado ao profissional que está sendo preparado, eu acho que quanto mais conseguir conciliar com o trabalho, com o futuro trabalho de um engenheiro melhora, então eu acho que esta didática que tu usava foi muito boa nesse sentido, eu acho que deveria ser sempre seguir por esse caminho, cada vez mais relacionar com o mercado, com o engenheiro, a empresa, com a prática, a meu ver isso seria muito interessante

Dupla 7 São dois alunos que trabalhavam sem dificuldades, pois um tinha facilidades no manuseio do computador e o outro conseguia interpretar com facilidade as atividades.	
Questões	Fragmentos de respostas
Q1	A1: um pouco de dificuldade, porque eu acho que foi das cadeiras anteriores, como derivada, integral, mas o Sandro pegou bem a matéria, consegui pegar com ele diversas coisas que eu estava com dificuldade, foi bom, mas a disciplina pra mim ocorreu tranqüilamente, como é que eu achei que devia ter saído sabe, com trabalhos, provas, tranqüilo, como é que ao decorrer eu pensei que ia ser, foi normal A2: eu gostei, principalmente de resolver direto uma situação pelas equações diferenciais sabe, problemas aplicáveis, então é fácil ver de onde que tu tirou, que nem a gente tem bastante isso na química também, a gente usa bastante equação diferencial, mas a gente sempre tem elas prontas, não tem que desenvolver elas, e aqui nós aprendemos da onde que ela surgiu
Q2	A1: eu acho que computador ajudou quando a gente tinha aquelas duvidas lá de gráficos, de vez em quando alguma constante que tu tava meio em dúvida
Q3	A2: de entender não, as vezes, dependendo do problema, tirar as informações pra montar ficava um pouco complicado, mas aí tu pensava bastante e chegava no resultado A1: ah aqui é a entrada e aqui é a saída, a gente ficava em dúvidas numas coisas dessas, quando a gente teve que fazer isso lá no computador isso aí também tirou umas dúvidas nossas, depois que tu monta, a gente vê como funciona e tal, isso ajuda
Q4	A2: o bom de fazer trabalho em grupo é que as vezes um do grupo tem as dúvidas e o outro não, daí o que tem duvida e o que não tem acabam se completando, consegue desenvolver melhor
Q5	A1: pelo meu curso eu vejo, os colegas que estão mais adiantados estão fazendo uma cadeira (disciplina) de modelagem, Controle I, Controle II, eles tão usando bastante o que que a gente esta vendo agora
Q6	A2: toda vez que tiver uma taxa de variação de qualquer coisa tu sabe que vai ter que fazer uma diferencial, daí tem varias coisas que envolvem, que nem, a gente em “Operações elementares” usa direto equação diferencial porque a gente trabalha com fluxo de um rio, precisa ver as diferenças de temperaturas embaixo e em cima
Q7	A1: a solução geral ela se aplica a qualquer tipo de cálculo e a solução particular é especifica pro cálculo que tu esta estudando, já tem o valor de uma constante, daí tu consegue achar a constante pra integral, consegue achar uma equação especifica que encaixe num caso que tu quer

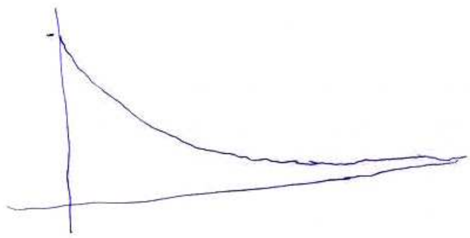
Q8	A2: a variação da quantidade de poluentes em função do tempo A1: é igual A2: tem que ser a quantidade de poluentes inicial, vezes uma constante que é a quantidade que iria sair $\frac{\partial Q}{\partial t} = Q_0 \cdot K$  M: Sai sempre a mesma quantidade de poluentes por mês? A2: não, a quantidade nunca é constante
Q9	A1: eu poderia ter buscado um pouco mais de conteúdo, eu fiquei no que a gente aprende em aula, se bem que eu acabei vendo isso em aula de físico-química, a gente usa bastante A2: muitas vezes o cara não busca fora, vê em aula acha que esta bom, a gente se deixa levar por isso na verdade.
Q10	A1: eu gostei bastante do desenvolvimento da aula, então eu gostei do método que foi aplicado, porque eu acho que dá para ter uma visão bem legal do que é o conteúdo e como tu aplica, aqui dá para ver muito mais aplicado, tem uma ferramenta que tu pode usar no computador e tu vê que já tem o gráfico pronto e quando a gente tem muita interpretação gráfica, na área da química, fica muito mais fácil de interpretar o que a equação esta querendo dizer

Dupla 8 Esta dupla trabalhava em conjunto com a dupla vizinha. Só solicitavam ajuda quando entravam em conflito.	
Questões	Fragmentos de respostas
Q1	A1: eu entendi bem nessa última aula que tu passou as aplicações, isso eu entendi direitinho, nos outros dias eu senti um pouquinho de dificuldades no desenvolvimento A2: eu achei legal, gostei do conteúdo e tal, só achei um pouco difícil, tive um pouco de dificuldade por falta até de conteúdos anteriores
Q2	A2: eu acho que o computador pra mim não ajudou A1: principalmente o Powersim, esse de entrada e saída até, de repente dava uma noção melhor, eu acho que esse da entrada e saída que era o que a gente fazia, dá até pra ter no computador, porque tu enxerga
Q3	M: vocês tiveram dificuldade pra usar o *software?* A2: no principio não M: e dificuldades pra entender o conteúdo? A2: questão de entender o que é, o conceito eu entendi até relativamente bem, mas a questão assim, práticas pra resolver, as técnicas eu tive um pouco mais de dificuldades A1: eu tive dificuldade para interpretar o problema, na matemática depois que vai resolvendo até dá
Q4	A2: eu acho que é vantagem porque quando um não sabe o outro pode ajudar, acho que facilita, agiliza
Q5	A1: a aplicação, esse negócio que a gente viu da absorção do medicamento, das reações químicas, crescimento populacional A2: eu acho que quem vai trabalhar com o desenvolvimento de um produto, uma linha de produção, vai se deparar com situações que vai ter taxa de variações e tal que, vai te obrigar que tu modele aquela situação M: Vocês saberiam dizer qual é a característica básica que a situação precisa ter para ser modelada através de uma equação diferencial? A2: uma taxa de variação que seja dada em torno de uma equação, que varie em função do tempo
Q6	A2: a meu ver é muito importante
Q7	A2: é que a geral modela uma situação que pode acontecer várias A1: várias soluções A2: várias soluções, só que quando é particular tu tem solução pra aquele modelo especifico, tu tem quantidade inicial, tu tem dados pra aquele modelo, pra aquela situação A2: pra modelo da situação, tem várias situações que seguem o mesmo padrão

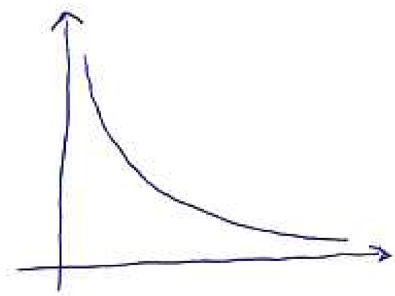
Q8	A1: dá, eu acho que sim M: qual é a equação que dá? A2: só entra água limpa no rio? M: entra água limpa A2: vou chamar P a poluição, a constante K, já que não tem a taxa de entrada $\frac{dP}{dt} = -kP$ $\frac{dP}{P} = k\,dt$ $P = P_0 \cdot e^{-kt}$  M: se vocês olharem pra essa equação que dados, que informações vocês já conseguem tirar, o que vocês já sabem falar sobre o modelo só olhando pra essa equação? A2: o principal “passo”, que você falou, da variação da poluição que sai do rio ser proporcional a poluição que ainda resta ali M: a cada mês sai a mesma quantidade de poluentes? A2: não, depende da quantidade que tem, ao longo do tempo vai diminuindo a quantidade de poluente que sai do rio A2: “tende a zero”
Q9	A2: é realmente teve um momento que a gente poderia ter aproveitado mais, principalmente as aulas de computação A1: de repente conversar um pouco menos, se distrair um pouco menos
Q10	A2: eu acho que em relação a matemática básica não tem muito o que fazer, eu acho que cada um tem que se puxar, e já a questão do computador eu acho que deveria ser menos utilizado, acho que aula teórica é mais produtiva A2: acho que o computador vem depois, acho que primeiro tem que entender o que ta acontecendo A1: com certeza A2: entender no geral o que representa o conceito, como calcular e tal, aí depois partir pra uma ferramenta que vai facilitar o Cálculo

<table>
<tr><td colspan="2">Dupla 9
Este grupo tinha muitos problemas, se desconcentrava facilmente, tinha muita dificuldade para trabalhar com o Powersim, não conseguia interpretar as atividades solicitadas.</td></tr>
<tr><td>Questões</td><td>Fragmentos de respostas</td></tr>
<tr><td>Q1</td><td>A1: eu achei que eu evolui bastante depois que começou as aulas de laboratório, por que na sala eu tentava e de vez em quando eu trancava, pedia pra outro, eu não conseguia chegar até o final sozinho, depois dessas aulas a gente começou a sentar junto, fazer mesmo
A2: eu também notei isso, que no inicio a gente tinha bastante dificuldade, pelo menos eu, eu olhava, puxa, como é que eu vou começar, daí a gente ia desenvolvendo, um falava uma coisa, tenta assim, cada um dava a sua opinião, nessa parte eu achei bom, de fazer em grupo
A3 : é isso é legal, fazer em dupla e laboratório, eu achei que facilitou pra mim</td></tr>
<tr><td>Q2</td><td>A : a cálculo tipo de um número exato, com a equação, tu chegaria a equação geral, depois tu resolve ali no computador, ele te dá os valores melhor
A: eu achei legal essa parte do software por que hoje em dia nas empresas, eles não vão dizer tu sabe fazer no papel ali, é eles querem um valor mais exato, e o software dá aquele valor
A: é e o software que a gente usou aqui na cadeira podemos usar também depois
A : outra área vamos dizer
M: mas vocês acham que ele ajudou a entender o conteúdo de equações diferenciais?
A: pra mim pelo menos sim</td></tr>
<tr><td>Q3</td><td>A: não
A: a dificuldade que eu tive foi essa parte das cadeiras anteriores, integrais
A: aquela hora da equação diferencial, de fazer a equação geral e a particular
A: é o conteúdo das cadeiras anteriores</td></tr>
<tr><td>Q4</td><td>A: eu gostei
A: eu acho que eu aprendi bem mais no grupo do que antes
M: qual é a desvantagem de trabalhar em grupo?
A: da muita conversa
A: dá muito barulho o cara não se concentra, não cada grupo individual eu digo todos os grupos</td></tr>
</table>

Q5	A: é uma máquina, entrada e saída, entra mais sai mais, o método de vendas, que todo mês dava tal venda, só que daí tinha que descontar sempre funcionário, luz, telefone, o sistema tinha que fazer isso automático, descontar tudo e ver o quanto sobra, cada mês M: tu saberia dizer quando uma situação, qual é a característica básica da situação para ela resultar numa equação diferencial? A: ela tem que ter aquela variação sempre, pelo menos foi o que eu entendi, um exemplo, no meu serviço trabalho num provedor, eu tenho um limite de banda que eu posso fornecer para os clientes, só que a medida dos dias, dos meses, dos anos, aquela quantidade de clientes vai aumentando, e aí eu tenho que ver aquela relação, aquela variação que eu vou ter pra poder jogar, poder fornecer a banda pro cliente e ter também a banda disponível, e ainda levar em conta valores
Q6	A: (falaram ao mesmo tempo).... "faz parte da formação"
Q7	A: bom a geral faz a equação pro problema inteiro e a particular é pra tal equação A: ela dá condições, tu monta a particular em cima daquela condição A: é tu pega a particular em cima da geral

Q8	A: é a fórmula aquela, pode ser “poluentes’igual ao volume inicial A: será que não é aquele “dP por dt” A: a derivada de P pelo t, o K A: seria a poluição inicial, aqui tem daí uma constante e o tempo, só que aqui acho que ela é negativo por causo que decresce, mas não tenho certeza disso $\frac{dP}{dt} = KP \rightarrow N = N_0 . e^{kt}$  M: se olharem pra equação, que informações vocês já conseguem obter em relação aos poluentes do rio, a sua saída? A: é agente vai ter um valor inicial, a gente vai ter um tempo também né, e a A: tem a entrada em função do tempo, a quantidade que vai ter no rio vai ser determinada pelo que entra A: vai diminuindo, é e vai chegar a zero por que ele sai A: e entra água limpa A: a quantidade do rio vai ficar a mesma porque entra água e ta saindo poluentes, mas vai chegar um tempo que não vai mais ter poluentes, e ai tu vai montar o gráfico, é o tempo no caso, a quantidade que vai sair em relação ao tempo
Q9	A: diferenciais eu acho que seria mais tempo junto pra gente consegui resolver todas
Q10	A: eu gostei bastante do sistema de trabalhar em grupo, o uso do computador, no grupo tu pode discutir, não tem uma só idéia A: na minha opinião, quanto mais usar o computador, eu acho que mais seria pro mercado de trabalho A: faltou um pouquinho, pelo menos da minha parte, essa parte das integrais das derivadas, talvez buscar, de ter buscado isso um pouco antes já, antes de ter começado a fazer as diferenciais A: foi melhor em grupo da maneira que foi feito, isso pra mim foi bom

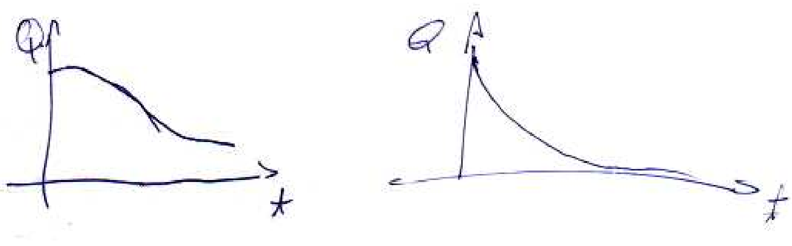
Dupla 10	
São dois alunos que se empenhavam bastante, mas tinham pouca experiência com o uso do computador e por isso tinham dificuldades, mas aos poucos foram evoluindo	
Questões	Fragmentos de respostas
Q1	A1: eu achei diferente, demorei um pouco pra assimilar o que tava acontecendo A2: até porque não teve uma parte introdutória, foi direto pro laboratório, e um pouco eu acho também que dificultou foi não conhecer o programa, eu nunca tinha visto A1: eu também não, eu passei a minha vida inteira assim, essa didática de o professor vir daí mostrar aquela seqüência, a rotina da aula, os exercícios, exemplos, no decorrer do bimestre a gente foi vendo os diversos casos e aplicando logo, não tivemos a senhora explicando, esse exemplo agora vocês vão fazer, não, foram aplicações diversas, foram diversos exemplos, diversos tipos de aplicabilidade nos diversos casos e a gente ia fazendo envolvendo, e quando tu acaba na equação, claro daí vinha o auxílio da senhora, então isso é que eu senti, eu custei pra me localizar no que que tava acontecendo, foi mais isso
Q2	A2: eu acredito que sim, é uma coisa que a gente tem como aplicar mais tarde, é um recurso a mais, não precisa ta fazendo no papel, mas o problema de não conhecer o programa, isso eu acho que trancou um pouco
Q3	M: vocês tiveram dificuldades então pra usar o Powersim? A1: não A2: eu acho que mais na interpretação na hora de colocar no programa A1: pra montar o sistema A2: pra montar o sistema no programa, até o conteúdo não, o programa sim M: com a matemática básica algum problema? A1: não, nós trancamos algumas vezes A2: mas não foi o principal, o principal eu acho que foi o programa, montar no programa A1: eu tive dificuldades, eu demorava mais pra fazer as coisas, eu trancava as vezes, na seqüência matemática, eu noto que eu tenho algumas deficiências, que não era de aplicação das equações diferenciais, era coisa mais básica
Q4	A2: ah, eu acho que tu consegue trocar as informações um com o outro A1: uma coisa que um não lembra o outro lembra M: e desvantagens? A: desvantagens, não sei, acho que não, não tem desvantagens

Q5	A1: que são de aplicabilidade bem geral, em diversos casos a gente viu que eu percebi, são bastante aplicáveis em diversas áreas, tanto de situações rotineiras do cotidiano M: em que casos, qual é a característica básica para poder modelar com uma equação diferencial? A1: uma variação, uma taxa de variação A2: é todas as situações que a gente viu, eu acho que até o programa serviu muito pra isso, pra ver onde pode ser aplicado, isso é uma coisa que o programa foi assim bem útil, por que fazendo na sala tu não vê, aí tu enxerga as situações A1: bom resumindo, uma equação diferencial tem uma derivada ali junto, daí trabalha com taxa de variação
Q6	A1: tem aplicabilidade, a gente acha aplicabilidade direto nas equações de física, tem em química, físico-química
Q7	A1: a geral dá a fórmula genérica do sistema do caso, e daí a especifica tu utiliza os valores sugeridos no teu caso
Q8	A: dá M: como é que fica essa equação $\frac{dP}{dt} = kP$ $P = c \cdot e^{kt}$  M: olhando para essa equação que informações importantes ela fornece? A1: a poluição vai caindo, se vai entrando água limpa A2: o gráfico começa alto e vai caído, porque entrando só água limpa sempre vai saindo alguma coisa de poluição junto A1: vai chegar no final que vai ter só água limpa M: a quantidade de poluentes que sai por mês é sempre igual? A2: não porque primeiro vai sair mais, vai sair mais poluentes porque a água está mais poluída A1: mas o volume vai sempre ser o mesmo porque ta entrando água limpa A2: primeiro vai sair maior quantidade de poluentes, o poluente vai sair mais concentrado aí depois ela vai sair mais diluído A1: daí vai sair cada vez uma menor quantidade e a tendência é chegar numa linha que se encontre a nula, mas essa linha a tendência é ser o infinito

Q9	A1: eu acho que eu podia ter feito mais exercícios A2: eu também acho
Q10	A1: eu não sei, mas aplicabilidade teve bastante, a gente trabalhou bastante, não sei se de uma outra maneira a gente renderia mais A2: tudo bem, eu acho que as situações que foram colocadas foram muito úteis por que a gente viu como funciona na prática, as situações mostraram isso, só que eu bato na tecla do programa, eu acho não conhecer o programa isso ajuda muito pra travar, eu acho que talvez dando uma introdução ao programa

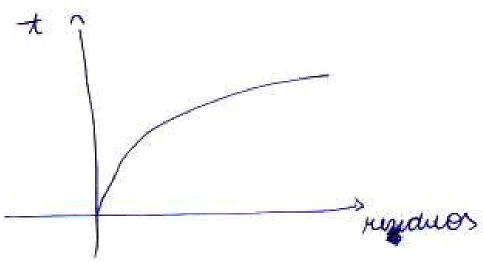
Dupla 11

São dois alunos muito tímidos, que questionavam pouco e trabalhavam bastante independentemente.

Questões	Fragmentos de respostas
Q1	Aluno 1: Eu achei que foi bom. Eu achei interessante porque a gente pegou um pouco de cada área, tipo fez cálculo, usou o computador. Isso eu achei importante.
Q2	Aluno 1: Acho que sim.
Q3	Aluno 2: Não.
Q4	Aluno 2: Tem discussão sabe Aluno 1: O que um não sabe o outro sabe e pode ser que aprende.
Q5	M: Vocês saberiam dizer pra esta pessoa que situação pode ser modelada como Equação Diferencial, qual a característica básica que tem que ter pra se poder.... Aluno 2: Acho que seria a função exponencial.
Q6	Aluno 1: Eu acho que é. M: Por quê? Aluno 1: Ah, pra fazer cálculo.
Q7	Aluno 1: Acho que particular é aplicada pra cada Aluno 2: Tipo uma determinada função. Aluno 1: É, no instante e no tempo. M: E a geral? Aluno 1: A geral serve daí para vários exemplos. Se quer saber a população de coelhos, usar aquela fórmula da equação, para saber a população, de qualquer coisa, de água que sai do cano. E daí, a particular tem, tipo a população de coelhos cresce num determinado, 10% ao ano. E sempre varia.
Q8	

Q10	Aluno 2: Eu acho que a atividade com o computador faz diferença para aprender. M: Aprender como? Aluno 2: Sei lá. Aluno 2: Melhorar a atividade. Aluno 1: Tipo se desse pra fazer os exercícios em casa, sabe. Se tivesse um polígrafo pra... M: Mas não tinha? Aluno 1: Tinha.

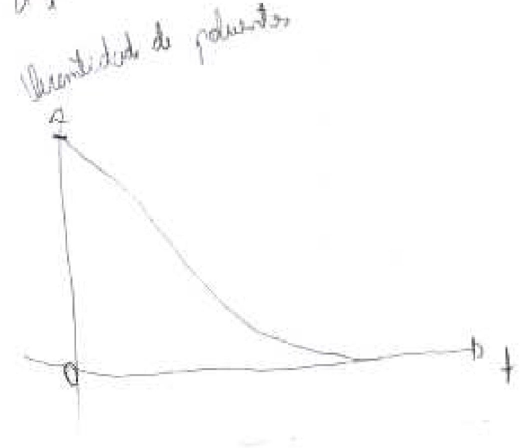
Dupla 12	
São duas alunas muito inseguras, tinham facilidade para seguir modelos, exercitar técnicas, mas dificuldades para interpretar situações-problema.	
Questões	Fragmentos de respostas
Q1	Aluno 1: Eu achei bom. Aluno 2: Eu também achei. A gente aprendeu bastante de equações diferenciais. Aluno 1: Agora que eu fui ler de novo eu sabia, sabe. Aluno 2: Eu e a Débora, a gente se comunica por e-mail, sabe. Eu disse pra ela que eu peguei as lâminas, tipo eu queria olhar. Ah, como a gente foi boba, sabe. Muita coisa que era óbvia, bem fácil de fazer e chegou na hora de fazer e a gente não sabia fazer. Aluno 1: Eu acho que depois estudando de novo tu revê, assim.
Q2	Aluno 1: Acho que sim. M: O que, por exemplo, aonde ele foi importante? Aluno 2: As áreas do gráfico, que a gente tinha dúvida de fazer, que a gente não tinha certeza, sabe. Um lá a gente trocou, tipo tava que a gente mudou, ficou invertido, depois ficou certo. A parte dos gráficos, da tabela, pra calcular os valores é bem mais fácil. Não precisa ficar calculando tudo a mão.
Q3	M: Tiveram dificuldade pra usar o computador? Aluno 1: Não, o computador acho que não. M: Alguma outra dificuldade em relação ao conteúdo, ou as equações em si, ou a Matemática básica? Aluno 2: Acho que mais no início porque depois foi. M: Pra entender o que são equações diferenciais? Aluno 2: Acho que foi mais na hora de resolver, aplicar. M: O cálculo? Aluno 1: É.
Q4	Aluno 1: Eu acho bom, porque às vezes quando a senhora explica a gente não entende, sabe. Aluno 2: É, quando ela explicava eu conseguia entender, sabe. Do jeito que ela me explica eu entendo. Do jeito que o outro explica às vezes é mais fácil, sabe. Ela pode me ajudar a entender de uma maneira melhor, acho que é legal esse trabalho. M: Perceberam alguma desvantagem por ser em dupla? Aluno 1: Não.
Q5	Aluno 2: Para muitas coisas. Para minha vida, várias questões, dúvidas, pra tudo. Aluno 1: No meu curso é mais a parte de
Q6	Aluno 1: Acho que sim. M: Por que? Aluno 1: Eles pedem como se faz.

Q7	Aluno 2: A solução geral só tem uma equação. Só tem tipo uma E daí não tem números, são valores. A solução geral serve para bastantes casos e a solução particular é um caso específico. É só um, né. Calcular só um não, às vezes tem o valor da taxa de entrada, sei lá, alguma coisa assim. Daí tu põe um lá como tipo uma solução particular, daí tu tem aquele valor para conseguir descobrir outros, né. É complicado. Que a velocidade não era igual a zero. Tinha alguns valores que a gente conseguia colocar como solução particular.
Q8	Aluno 1: Eu acho que a taxa de entrada é igual a taxa de saída. Aluno 2: É, eu acho que K X i. M: Não tem entrada de poluentes, só saída. Tá limpando o rio. Aluno 1: Então a taxa de saída é proporcional... Aluno 2: Como a professora disse, é proporcional a? M: A quantidade de poluentes que ainda tão dentro do rio. Como é que seria a solução, vocês conseguem enxergar a solução disso aí? Como vocês iam resolver isso, essa equação? Aluno 1: Ia calcular. M: Tá, iam resolver até o final, vocês enxergam como ficaria a solução dela sem resolver? Aluno : M: Ou a solução gráfica, como seria o gráfico da quantidade de poluentes em função do tempo? Aluno 1: Uma curva. Ia variar o que ia sair. $\frac{dy}{dx} = K \cdot y$ $\frac{dy}{y} = K \cdot dx$ 
Q9	Aluno 1: Eu acho que devia ter estudado em casa de vez em quando. Aluno 2: Pra mim é básico, falta de tempo eu acho.

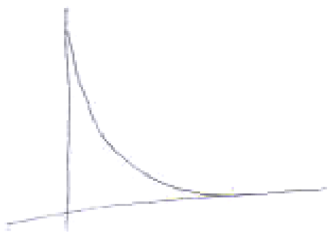
Q10	Aluno 2: Na minha parte, sabe, eu acho assim o, que quando a gente usa o computador precisa saber o que a gente vai fazer, sabe. Se a agente tivesse tido uma base antes, eu acho que nós não estaríamos tão boiando que nós tava no início. Às vezes não sabia o que a gente tava fazendo. M: Uma base de que? Aluno 2: Tipo das equações diferenciais. Porque daí na primeira via tinha as fórmulas, tudo a gente sabia o que era. A gente não sabia como a gente tinha que fazer, porque a gente não sabia até como resolver as equações diferenciais, sabe, pelo fato das separáveis, essa coisas. Até para você conferir, né.

Dupla 13	
São dois alunos que conseguiam trabalhar muito bem em dupla, pois um deles possuía mais facilidade para trabalhar com o computador e outro com o conteúdo matemático, e por isso se ajudavam muito.	
Questões	Fragmentos de respostas
Q1	Aluno 1: Para uma sexta-feira tava bom. Aluno 2: Foi um coisa diferente, uma maneira diferente de trabalhar, me lembro em 2002 quando tive, quase não vencia copiar do quadro, saber fazer bem a técnica, né mais trabalhar em grupo, né em computador.
Q2	Aluno 1: eu acho que ajudou, mas eu acho que poderia fazer o inversamente, primeiro fazer o conteúdo na sala de aula, depois fazer tipo no laboratório, propiciando a formulazinha ali no computador, responder na sala de aula, fazer no papel, na hora de fazer na cabeça botar no papel a idéias da cabeça. Eu acabei me confundindo muito com a dinâmica no laboratório de informática, com o *software*. M: Vocês acham que o computador ajuda em que, quando e como? Aluno 1: Ele ajuda, é uma coisa assim que facilita, como ele foi feito para isso, como se fosse uma calculadora, ele ajuda a situação, né tudo bem detalhado, a conta certa, o tempo, o gráfico certo, como se fosse uma conta de cabeça e depois usa uma fórmula lógica e não se torna complicado e infelizmente eu vejo que tá. É a mesma coisa que tu aprender a fazer uma conta primeiro na calculadora e depois tentar fazer na cabeça, uma coisa básica assim de tabuada, por exemplo, como se fosse aprender primeiro na calculadora para depois fazer a tabuada, mais ou menos, não sei se tu me entendeu. Como se tivesse usando uma calculadora para fazer a tabuada, aí depois na sala de aula. M: Tu acha que o que fizemos no computador foi na verdade a mesma coisa que a gente faz em sala de aula depois? Aluno 1: Não, foi uma coisa assim mais, tipo um atalho. O uso do *software*, eu acho que primeiro a gente tem que ter aquela com as últimas aulas para usar em sala de aula, pra depois a gente ter ido no. Aluno 2: Foi até melhor que na aula, em sala de aula depois... Aluno 1: Ou de repente começar com uma aula no computador.
Q3	M: Vocês tiveram dificuldades em usar o computador? Aluno 1: Não. M: Pra usar o *software*? E alguma outra dificuldade? Aluno 1: Era um *software* que eu não conhecia, né, mas quando nós pegamos a manha foi. M: Dificuldades pra entender o conteúdo? Aluno 1: Não. Aluno 2: Entendi.

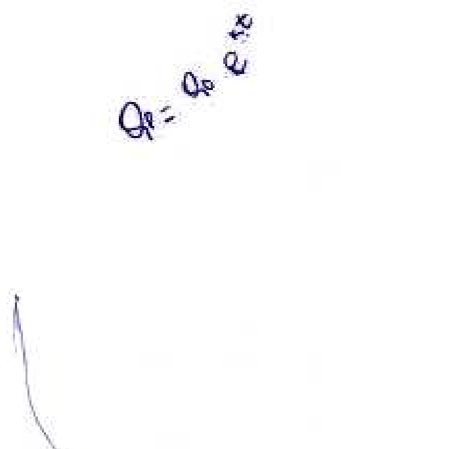
Q4	Aluno 1: Um ajuda o outro. Aluno 2: Por exemplo nós dois, né na parte de computador eu sou craque e então ele já quer mais baixar, fazer pá, pá e aí quando era resolver conta, coisa assim, eu tinha um pouco de facilidade, tudo ajuda sabe, no lógico.
Q5	Aluno 1: É um conteúdo que eu achava bah, onde o cara vai usar isso na vida assim, depois metade do conteúdo foi bem prático a situação, conseguia chegar a situação. No começo achei bem se elas pedem. M: E como é que você iria dizer para estas pessoas quando elas podem ser usada? Aluno 1: É até minha namorada, ela é essa semana, né ela tá fazendo um tipo de cálculo, tá fazendo um soro, uma substância que tu periodicamente tem que dar praticamente para a pessoa e na aula tu aprende tudo na regra de três. Eu não vou explicar para ela que tá errado, a discussão com outra pessoa, independente de qualquer medicamento vai ter uma equação diferencial, eu não vou explicar isso pra ela, assim que é uma equação diferencial. M: Por que não? Aluno 1: Porque pra mim, bem nós tivemos Cálculo II, né eu acho que nós já temos um caminho um pouco mais científico, quando eu vi aquilo lá eu. M: O que tu viu? Aluno 1: Vi tipo um trabalho no caso, eu via que elas tão, ela não perguntou o que é, eu vi o trabalho dela e não ela chegou até mim e perguntou o que era. M: Qual seria a, você acha que todas as situações podem ser modeladas com equação diferencial ou qual é a característica básica que a situação ou caso tem que ter para resultar numa equação diferencial? Aluno 1: Não é todas as coisas. Aluno 2: Tem que ter uma variável, né. Aluno 1: Uma variável exponencial, no nosso trabalho agora, foi difícil nós achar uma situação não encontrada naquela lista que tu passou, mas lógico tivemos que nos basear, nós também podia pensar um pouco mais na.
Q6	Aluno 2: Por exemplo, o nosso trabalhinho aqui que foi feito já, ele é bem prático sabe, porque é uma situação do dia-a-dia da empresa e tu pode fazer um controle de qualidade, pode trabalhar na área de tratamento de doenças também. Aluno 1: Agora vem o aspecto tecnológico do que a gente sabe de conteúdo programático vai ser bem usado, o que a gente teve até agora foi bem pouquinho, mas bem usado, o que a gente teve até agora foi bem pouquinho, mas a conversa de corredor sobre o conteúdo programático isso aqui é a base do
Q7	Aluno 2: A solução geral ela é geral em todas as situações e a particular tem os valores e dados diferentes. Aluno 1: A particular é pra aquela solução geral. A variável muda, a particular tem menos variáveis que a geral.

Q8	Aluno 1: é um exemplo, né de meia-vida pela razão que vai ter, podemos ter meia-vida, vai ser o número de poluentes igual ao número inicial ah, ai meu K, no caso, seria a meia-vida, meu K seria negativo. Como eu vou representar meu K, na hora de fazer. Posso colocar? M: Pode. Esta é a equação diferencial que podemos usar nesta situação? Aluno 1: Pra mim seria uma equação geral. M: Como é que seria o gráfico da quantidade de poluentes do rio em função do tempo? Aluno 1: Seria uma decrescente. M: A quantidade de poluentes que sai por mês é sempre a mesma? Aluno 1: Não. M: É mais no início ou mais no fim? Aluno 1: É mais no início. Vai saindo sempre a metade do que ficou dentro desse rio. Vai fechando, fechando, fechando. $N = N_0 \cdot e^{(K)\cdot t}$ $\frac{dY}{dt}$ = Quantidade de poluentes inicial • taxa de saída poluentes. 
Q9	Aluno 2: De repente ter se interessado mais, ter ido atrás, outros exemplos assim. Ter calculado, por exemplo, o município de Lajeado, a população total, ter feito algumas...
Q10	Aluno 1: Eu acho que não, os exemplos são bem usuais e são bem atuais também, medicamentos, população, poluição, contaminação, sobre, sei lá, de repente o pessoal mais da Engenharia não, foi bem acessível. Aluno 2: De repente, que nem pessoal que vem do Cálculo II recente, nós estamos bem enferrujados, 3 a 4 anos atrás, daí é meio complicado, mas sei lá tá na hora de, de repente de parar um pouquinho. A gente esquece. Aluno 1: Tem que atacar a Matemática em geral.

Dupla 14	
São dois alunos que estavam com dificuldade para trabalhar com o computador.	
Questões	Fragmentos de respostas
Q1	Aluno 1: Bom, como eu e o Carlos estávamos falando, no começo, eu achei n=muito fácil, né, sabe porque eu me lembro e tal, eu comecei a achar bastante interessante quando começou a aparecer vírus e daí apareceu cálculos que eram muito interessantes, calculando coisas eu achei muito legal também o computador tem que saber usar. Eu achei muito legal. Aluno 2: Eu também achei bom, só que a gente usou bastante o computador, eu acho que na nossa carreira, profissão, a gente vai usar bastante, nada que tenha feito a mão, cálculo. Eu achei a falta de atividades assim, direcionada a cada meio, a cada Engenharia.
Q2	Aluno 2: Ajudar, ajudar acho que não, mas eu acho bom porque precisa ter uma certa , faz falta. Aluno 1: É porque tudo Eu acho que vai chegar um ponto que aquela coisa do computador de fazer, eu acho que
Q5	Aluno 2: Ah, eu acho muito interessante, muito importante também justamente por esta questão de taxa, é uma coisa de cálculo que dá para usar. M: Você ia dizer pra essa pessoa se ela quer saber pode ser usado quando? Aluno 1: Ue, pode ser usado, na corrente, né no dia-a-dia, no laboratório, claro depende do que vai ser solucionado, M: O que tem precisa ter numa situação, para ela poder ser modelada por uma equação diferencial? Para ela resultar numa equação diferencial, qual é a exigência básica? Ou qualquer caso pode ser, qual é a característica essencial que tem uma equação diferencial? Aluno 2: Uma taxa.
Q6	M: Qual é o teu curso? Aluno 1: Ambiental. Ambiental eu acho que foi bem proporcional, por exemplo, tem uma empresa e tu vai lá, calcula uma hora, aí quanto de dejetos foi jogado no rio. Daí tu vai ali, bota lá o tempo e vê aquela quantidade que deu, procura uma constante e depois tu usa isso pra saber quanto tempo, quanto dejeto deu.
Q7	Aluno 1: Tipo geral é para todos, não tem nenhuma constante e a particular já é específica é para caso, aquele que você tiver uma constante, no caso que você já tem, por exemplo, uma quantidade de .

Q8	Alunos conversam entre si... Como seria a solução da equação, teria uma idéia de como seria a solução? Aluno 1: A solução? M: Ou a solução gráfica, como fica o gráfico da quantidade? Aluno 2: O gráfico digamos... M: Pode desenhar também. A quantidade de poluentes que tem em função do tempo. Aluno 2: Tem um monte, conforme vai variando, conforme vai passando o tempo vai demorar mais. Porque aqui vai ter menos pra taxa agir em cima. M: A quantidade que sai por mês é a mesma? Aluno 2: Não. Cada mês vai ter uma taxa menor porque não vai ficar menor. Aluno 1: A taxa é menor porque a taxa tradicional. Aluno 2: Aqui vai sempre sendo menor, ao mesmo tempo. Aluno 1: Essa equação não tá certa. $dt = Q($ $\frac{dQ}{dt} = k(Q-Qs)$ 

Dupla 15 São duas alunas muito dedicadas e perfeccionistas, tinham dificuldades em aceitar respostas que eram estimadas.	
Questões	Fragmentos de respostas
Q1	Aluno 1: eu gostei, a gente teve bastante dificuldade nas primeiras aulas, a gente não tinha nem idéia do que a gente tava botando. M: Nas primeiras aulas do computador? Aluno 1: É, no computador. A gente achou que a gente teve um pouco de dificuldade. Aluno 2: Mas foi bem interessante assim, o cálculo no computador.
Q2	Aluno 2: Eu acho que essas atividades ajudaram bastante porque tipo, vê o exemplo, não adianta saber só calcular, mas tem que saber onde aplicar, né a maioria das vezes a gente não sabe onde aplicar e calculava errado. M: Onde o computador entra, como ajuda? Aluno 2: Na parte de gráficos. Aluno 1: É. Aluno 2: O gráfico ajudou bastante pra a gente ter uma noção.
Q3	M: Vocês tiveram dificuldade para usar o *software*? Aluno 2: Nas primeiras aulas, né nas primeiras aulas a gente balançou, mas nas últimas tava uma beleza. M: E dificuldades pra entender o conteúdo de equações? Aluno 1: Um pouco assim. Aluno 2: Durante um tempo, mas agora não. M: Tá tranquilo? E a Matemática básica atrapalhou vocês pra fazer as contas? Aluno 2: É, principalmente na integral, agora, né.
Q4	Aluno 1: É melhor. Aluno 2: Eu acho melhor. M: É alguma desvantagem em trabalhar em dupla? Aluno 1: Não.
Q5	Aluno 2: ah, é importante, eu acho importante porque vários exemplos que a gente fez de atividade que eu acho que são calculadas em cima de equações diferenciais. Uma das matérias mais importantes de cálculo. M: O que você iria dizer para esta pessoa que não tem noção nenhuma de qual é a característica, que a situação ou caso precisa ter para se enquadrar numa equação diferencial. Quando ele resulta numa equação diferencial? Aluno 2: Tem que ter uma taxa de variação, uma constante, né. Uma coisa, ah, dependendo do tempo, né uma quantidade dependendo do tempo e nisso tu calcula uma quantidade num exato momento, mas isso na constante, tem que botar tudo ali.
Q6	Aluno 1: Acho que é.

Q7	Aluno 1: A geral a gente, abrange todo o conteúdo, né. Aluno 2: Pode calcular várias coisas diferentes usando uma equação geral e a particular já é um exemplo específico, usa dados a frio, coisa inteira e coloca nele.
Q8	Aluno 2: Não entra poluente? M: Não entra poluente. Eu tô querendo limpar o rio, então a quantidade que eu tô tirando por mês é proporcional a quanto têm dentro ainda naquele mês. Aluno 1: Não é aquele que muda, né não entra nada. M: E por que tu acha que não dá uma equação diferencial? Aluno 1: Porque não tem nenhuma, nada depende do tempo, não necessita do tempo, mas tu tem só uma entrada. Aluno 2: Não, entrada não tem. Não pode ser a meia-vida? Tipo, vai saindo. Vai ter uma constante e vai saindo em função do tempo. Se for em 10 dias, sai tanto, pela metade uma coisa assim. Quando a gente faz, por exemplo, meia-vida também não entrava mais nada, só diminuía o valor. Aluno 1: É, pois é mesmo. M: Como seria o gráfico da quantidade de poluentes que tem no rio em função do tempo? Aluno 2: Eu acho que ele desce, ele vai descendo, né depois ele fica, até chegar a zero. M: A quantidade de poluentes que sai todos os meses é a mesma? Aluno 2: Acho que não. Aluno 2: Não é a mesma. A saída dele é constante, né acho que não. Porque se ele decai como, pela metade digamos, ele não vai ser, cada vez  vai sair menos, né. Cada vez vai sair menos e vai ter menos.
Q9	Aluno 2: Ah, eu acho que a gente podia ter trazido mais exemplos pra tentar, a não se aqueles exemplos alí, né buscar mais pra tentar enquadrar numa daquelas que a gente já tinha feito.

Q10	Aluno 2: É, eu preferia assim, eu acho que podia ter tido umas duas ou três aulas antes de ir pro computador. Na primeira e segunda aula, a gente colocava aquilo, mas não sabia o que era, porque que tava acontecendo aquilo, porque tava decaindo. É eu acho interessante antes de ir pra sala de computação. Aluno 1: É, com certeza. É a gente sabia o que era, mas nós duas não sabia direito o que era taxa de entrada, o que era saída, o que era as constantes, isso era nossa maior dificuldade.

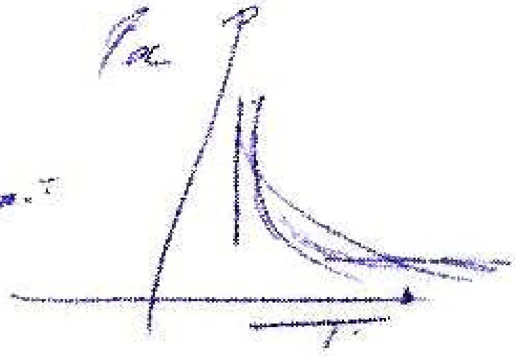
Dupla 16	
São dois alunos que se preocupavam muito com a interpretação, tinham interesse em entender bem o que estavam fazendo e os resultados que obtinham com as simulações.	
Questões	Fragmentos de respostas
Q1	Aluno 1: Como um todo? Eu achei interessante tipo a abordagem, ir pro laboratório, a própria construção, coisa assim. É diferente, por exemplo, quando eu fiz outra disciplina de Matemática, de Cálculo, não tinha era só a gente não concordava com o professor. Aluno 2: Eu aprendi mais no laboratório do que em sala de aula. Saberia uma dificuldade em sala de aula, que fazendo ali, fica mais fácil tu olhando o gráfico e analisando tal, o decaimento dele ali ou o crescimento exponencial, dele como é que ele é. É mais fácil analisar ele assim, botando as tabelas. É um pouco complicado assim no início lá, tu formar a entrada, a saída, mas depois se a gente vai acostumando fica mais fácil. Aluno 1: Não sei se a gente concorda, mas tipo é muito gosto pessoal, mas eu sou um cara que aprende mais na prática, fazendo. Nesse sentido foi interessante a nossa ida pro laboratório.
Q5	Aluno 2: Pode ser relacionado isso ao dia-a-dia, a vivência pessoal? M: Como tu irias explicar para ela? Aluno 1: Tipo, eu vejo relacionado ao meu trabalho, de repente. Sei lá, tamanho ou espaço de armazenamento de, um HD, por exemplo, quanto maior o espaço disponível dele, menor vai ser o tempo de gravação. Menor vai ser o tempo de acesso ao dado gravável, uma coisa assim. Daqui a pouco é importante pra calcular uma coisa assim, até pra ver a abertura de uma rede. Aluno 2: No meu dia-a-dia não tem tanto. No meu curso eu utilizo bastante, tô utilizando bastante nas cadeiras de CPI, derivadas primeira, segunda ordem, é que a gente utiliza mais. Na segunda ordem porque a gente tem que analisar um circuito, tem uma equação inicial. Tem um módulo aí desse módulo a gente tem que achar a equação, derivar ela, vai ter a derivada primeira, segunda ordem que deriva e acha uma função no tempo, essa equação vai ser no tempo. Qualquer tempo que a gente tiver a gente vai achar, por exemplo, a corrente. Essa corrente pode ser até em minutos.
Q6	M: Então, pro curso de vocês, as equações diferenciais têm importância? Aluno 1: Pra mim tem. Aluno 2: Pro meu curso sim, bastante. M: Mas para pessoas fora, o que que vocês poderiam dizer pra elas? Qual é a condição básica pra situação cair numa equação diferencial ou todas as situações, todos os casos resultam numa equação diferencial? Aluno 2: Se a gente não explicar desde o início pra pessoa, ela não vai entender. Vai ser difícil, né. Ela vai ter que ter apenas essa vai base. M: E que base? Aluno 2: A base equações diferenciais, aprender como fazer ela, ver a primeira ordem, depois o valor, como fazer a equação. Aluno 1: N coisas envolvidas, mesmo o tempo de acesso, mesma constante. Aluno 2: A gente usa em crescimento populacional...

Q7	Aluno 1: Solução geral, eu acho que ela é adaptável a qualquer situação dentro de um tempo. E a solução mais específica é adaptável, tipo é um valor para aquele tempo. Aluno 2: A outra tu pode até, na que a estrutura deu, praticamente pra todas um padrão, na geral. A particular tem tudo. Aluno 1: A particular tem um foco mais direcionado, como ponto específico e a geral ela é mais aberta.
Q8	Aluno 1: Dá pra usar aquela, tem uma fórmula que tem entrada e saída. Aluno 2: A quantidade é o t maiúsculo. Ai a entrada e a saída. Aluno 1: Nós não vamos ter entrada, zero. Aluno 2: Daí vai ter uma taxa de saída negativa. A saída é proporcional a quantidade, por mês. ...quanto mais saí, menos poluentes têm, seria isso? E quanto mais saí menos poluentes, maior a proporção. Aluno 1: Quanto mais poluentes tu retirar, menos vai sobrar. Mais água. Aluno 2: Vai ser sempre proporcional. Pela metade a primeira vez, outra vez sai metade do que sobrou. Vai tendo cada vez a metade que se fosse, se sai a metade cada vez. Aluno 1: é quase uma meia-vida, só que a meia-vida tem um valor de saída fixo e total. E o valor é variável, o valor de saída. M: Qual vai ser a solução gráfica? Aluno 1: Decaído, decaimento. Fica assim, trazido do total que tinha. Aluno 2: Quanto? Aluno 1: Até ela se estabilizar. Aluno 2: Aqui poluente, aqui é tempo. Quanto maior é o tempo, menor a quantidade de poluente restante, alguma coisa assim. Até que num dado momento, depois se muito tempo... Aluno 1: Cada vez vai sair menos porque não tem entrada de poluentes, não tem como aumentar poluentes. Cada vez vai saindo, saindo. A tendência é diminuir até estabilizar. Aluno 2: Tem um tempo longo até estabilizar. Aluno 1: A é, não vai tem que ficar zero. Ela vai ficar bem próxima, ela vai ser considerada zero depois do tempo final. Aluno 2: Vai tirar mais um percentual, daquele mais um percentual, mais um percentual. Aluno 1: Nunca chega a zero praticamente, nunca. É que nem aquele exemplo que a senhora deu do quadradinho. Aluno 2: É isso. Aluno 1: Vai ser metade do quadradinho. Aluno 2: é metade, é metade, é metade.

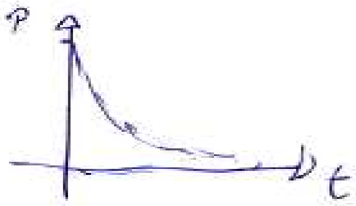
$$\frac{dQ}{dt} = \text{Taxa entrada} - \text{Taxa saída}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \text{saída}$$

$$Q = Q_0 e^{\ldots t}$$

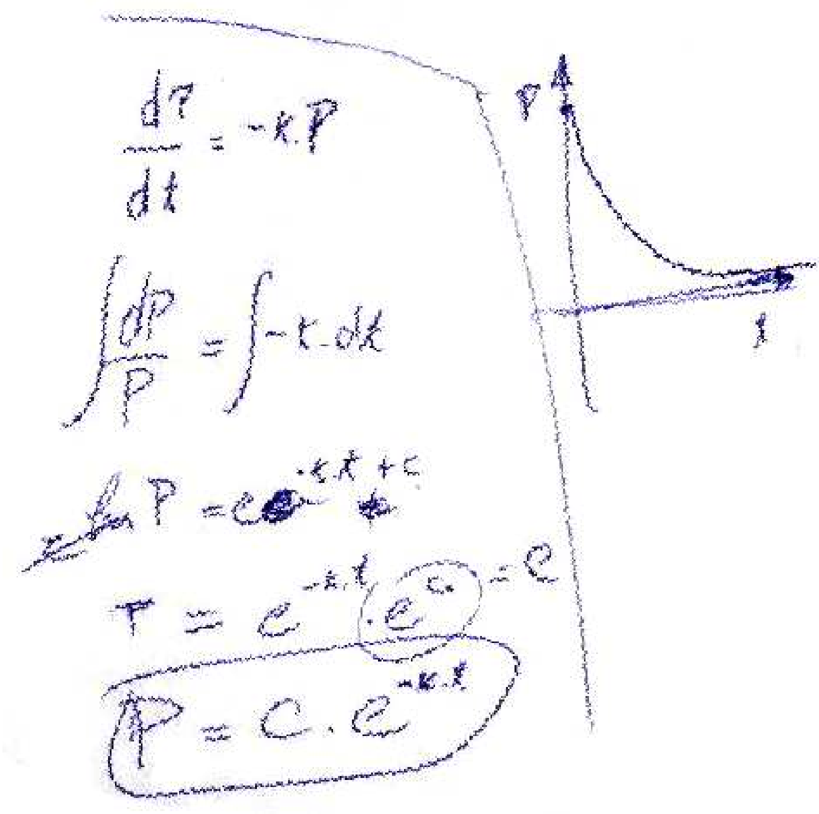


Dupla 17	
São alunos que realizavam as atividades sem problemas, discutiam bastante entre eles e eram bastante objetivos nas respostas, mas não aprovavam muito o uso do computador, preferiam resolver manualmente.	
Questões	Fragmentos de respostas
Q1	Aluno 1: Eu a princípio, a minha idéia é que eu consegui compreender um pouquinho melhor do que no Cálculo II, eu tava mais perdido, porque era muito, muito mecânico daí deu para dar uma olhada no que como é que funciona, o que pede essa equação. Aluno 2: Eu já acho que me perdi um pouco, na hora do computador. Aluno 3: Eu achava que antes nós fazendo no computador deu uma certa confusão assim. Talvez a senhora tentou colocar a matéria de vez assim pra nós no computador, não deu uma introdução antes, entende. Talvez aí deu uma complicada só, uma confundida, depois quando a gente começou fazer na mão, no lápis mesmo, no papel ali, eu compreendi melhor a situação. Aluno 1: Fica mais fácil, quando tu explica, né ali era mais pra gente desenvolver sozinho.Era uma coisa nova, né diferente.
Q5	Aluno 1: O que eu entendi eu acho que é uma coisa mais interessante pra calcular tipo uma taxa, de como no meu curso, tem uma área, tem um aterro e alguma coisa que vai saindo, daí tem uma variação de horas, quanto vai encher o reservatório. Aluno 3: Pra ter uma estimativa da população de uma cidade, né. Aluno 1: Eu acho que alguma equação tem que ter uma variável, tem que ter uma constante, não sei, alguma coisa que vai, uma constante vai ter que me dizer, tempo para alguma coisa, não sei.
Q6	Aluno 3: Olha, eu acredito que sim. Aluno 1: Eu achei que é importante, é interessante, é uma coisa que agora já tem utilidade. Aluno 2: É pra equações diferenciais, tu vai precisar para Química IV...
Q7	Aluno 1: A solução geral é uma, é como diz geral, a particular tu já vai atribuir valor pra uma constante. Tu vai ter tipo uma concentração inicial.

Q8	Aluno 1: Creio que sim. M: E se vocês fossem resolver ela como iriam fazer? Aluno 3: Integral. Aluno 1: Não, antes de integral eu ia fazer...separar ela. M: Vocês tem uma noção de como seria a resposta? Aluno 3: Ah, então ficaria K aqui, vou botar C. Aluno 1: É na Kt. M: E o gráfico da quantidade de poluentes que tem no rio em função do tempo? Aluno 3: Ele decresce. Aqui seria o poluente que vai de um ponto mais alto e vai decrescendo, talvez tendendo a zero, mais próximo do zero pelo menos. Aluno 1: Então ela vai decair. M: E a quantidade de poluentes que estão sendo retirados por mês é igual todos os meses? Aluno 1: Eu acho que não porque cada vez que eu tiro, daqui a pouco vai ter menos, mas eu vou tirar vai ser menos do que eu tirei no começo? Aluno 3: É, com certeza.
Q9	$\frac{dP}{dt} = -KP$ $P = -K \cdot e^{Kt}$ 

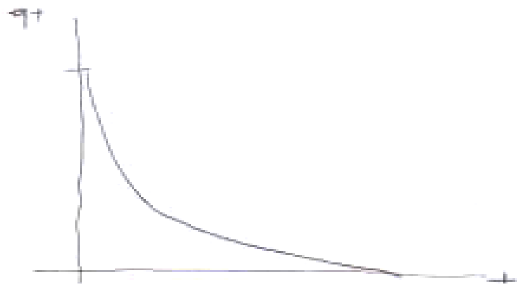
Dupla 18	
São dois alunos que apresentavam as atividades com muitos detalhes. Demonstravam muita satisfação com a metodologia utilizada na disciplina.	
Questões	Fragmentos de respostas
Q1	Aluno 1: Eu acho, eu fiz Cálculo, né da PUC a 5 anos atrás, mas eu achei diferente essa aqui porque usou o computador, teve uma associação bem diferente, lá o método era direto, o professor dava a folha com o cálculo, o cálculo direto aí, e achava o resultado e deu. Já aqui não, não é só o cálculo pra fazer, tem algum exemplo que tu tava colocando aquele da associação, aquela do crescimento populacional. Outro método de reações químicas, do medicamento, então, quer dizer assim tem uma aplicação também, a Cálculo I é o primeiro, vai continuar, é uma ferramenta que vou precisar na minha vida profissional, mas eu nunca me dei por conta e nem sabia que eu poderia utilizar dessa forma assim. Aluno 2: É muito mais objetivo.
Q2	Aluno 1: Eu acho que sim. O uso do computador foi mais para comprovar o que a gente estava fazendo, se estava certo ou errado, como chegar ao gráfico mais detalhado como fica, fica mais exata, em tal ponto. Aluno 2: É mais para auxiliar mesmo, porque no meu caso eu preferia da aula em sala de aula, dos cálculos.
Q3	M: Vocês tiveram dificuldades pra usar o *software*? Aluno 2: Não. Aluno 1: Eu ainda faltei, ainda no dia que, no dia de explicar a matéria, eu ainda faltei naquele dia, mas matéria nova, sei lá, na outra aula acabei perguntando tal e tal como é que funciona, comecei a fazer também aí, entendi fácil, fácil. M: Vocês tiveram dificuldades em entender o conteúdo equações diferenciais? Aluno 2: Não. No início eu me assustei um pouco... Aluno 1: Eu não achei dificuldades, eu não tenho mais dificuldades na matéria de Cálculo.

Q4	Aluno 1: Eu acho que a maior vantagem que tem é tu, é a troca de informações, um ajuda o outro, um pouco mais de dificuldade na descrição como é que eu vou fazer e tal, às vezes eu vou fazer e não consigo achar e tem um lá, olha eu tenho a solução então pode trocar. Aluno 2: Pode tirar a dúvida com a colega, qualquer coisa assim. M: E desvantagens? Aluno 1: Não sei, não tem desvantagens. Na verdade, quando a aula era, no início quando foi em dupla, a prova e mais, eu não achei, eu achei normal, quando foi a dupla, a mesma coisa, eu ficava meio pensando se tinha alguma e a professora na hora da prova em dupla, quando era prova em dupla era mais difícil, mais exigido tudo mais, e a gente fica naquela coisa, com o pé atrás Aluno 2: Sempre com o pé atrás, como prova com consulta.
Q5	Aluno 1: A importância. Olha depois que eu, se eu não tivesse visto esta disciplina, ou teria visto em outra instituição ou se o método fosse diferente desse aqui, eu acho que só tu fazendo mais Engenharias para ti aplicar, mas depois a gente viu que, pô tá pra calcular é, reações químicas, tipo medicamentos, até crescimento populacional tem uma associação direta, é uma ferramenta, é um outro meio de tu chegar a um resultado para ti calcular, uma fórmula tal, tem também um cálculo que vai te auxiliar em relação
Q6	Aluno 2: Com certeza. Aluno 1: Principalmente esta parte das diferenciais, das equações diferenciais aí, mas eu gostei muito também quando na parte do início do curso quando teve o raciocínio lógico da pessoa, aquela coisa, seqüência.
Q7	Aluno 1: Eu acho que a solução geral tem elementos, que são constantes, não tem valor exato, tem um valor, tipo, como se fosse e que a gente botou aqui é só as letras, então tem elementos, só que não tem um valor exato pra elas. Aí, tem o valor, por exemplo, tem o valor do T, tem o valor da parte inicial, por exemplo, 50, a constante que tu tem que vai dar a resolução, que vai ter um valor, tu bota 0,01 e o t que vai ser, é o diferencial. Aluno 2: É a particular como o nome já diz, pra aquela constante.

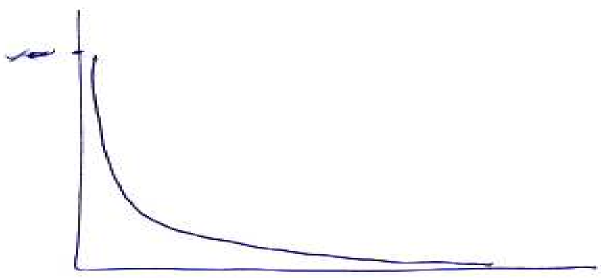
Q8	Aluno 1: Essa aqui, acho que dá. A quantidade de poluição que tem no rio. Então inicial em relação ao tempo, ... M: E a solução para essa equação? Aluno 1: Ah, resolve aquele método das separáveis. M: E o gráfico? A solução gráfica? Aluno 1: Como tá decrescendo, o rio tá despoluindo, tá saindo a poluição. Só que nunca vai ter poluição zero. Sempre tem uma poluição, mas...Vai chegar um ponto que ele vai ficar constante, ter valores bem próximos a zero. Não vou dizer, alguns dizem que vai chegar a zero, mas a gente sabe que na área ambiental, a gente sabe que não existe poluição zero. 
Q9	Aluno 1: Eu acho que fui bem. Não houve dificuldade. No primeiro momento que a gente começou a parte do tempo depois entramos em equações diferenciais eu até achei, pelo tempo que fazia, que nem eu falei pra ti, pô cinco anos, tenho medo que não vou lembrar direito mais. Consegui com tranqüilidade.
Q10	Aluno 2: O computador, ele é tipo uma ajuda também, uma ajuda pra nós, no caso os cálculos grandes. Depois no computador daí tu já via. Porque tu sem querer tu acaba voltando pros cálculos, nas equações.

Dupla 19 Esta dupla é bastante heterogênea, um dos alunos possui uma capacidade muito boa para interpretar as situações abordadas enquanto que o outro era muito dedicado mas precisava de um modelo a seguir.	
Questões	Fragmentos de respostas
Q1	Aluno 1: Eu achei bem interessante a matéria em si. Aluno 2: Eu achei bem diferente. Nós aprendemos a matéria também, só que foi bastante prático, a informática, o programa. Aluno 1: Coisas mais complicadas que nós achamos, eu e ele também tava comentando que foi na parte de usar o computador. Aluno 2: Até pegar o jeito. Aluno 1: É. No Powersim foi a parte mais complicada, mas na parte depois de traçar os gráficos... M: Vocês acharam difícil usar o Powersim? Aluno 2: Não. Até pegar o jeito. Depois que descobrimos para o que era aquela função, já pegamos um pouco de experiência em fazer as equações, pra poder visualizar. Aluno 1: Mais fácil, é. Depois que tinha tido aula, umas duas aulas, se tivesse dado pra nós em aula mesmo, acho que na prática é mais fácil o cálculo, que a gente não teve dificuldade nenhuma no cálculo.
Q2	Aluno 2: Ajudou. Aluno 1: Ajudou. Aluno 2: No raciocínio. Aluno 1: É. Aluno 2: De ver as coisas no computador. Aluno 1: Porque lembro das aulas de computador, depois usava o computador pra as questões oh, verifique se era conforme, como tá na tabela assim. Aluno 2: Que nem aquela do exemplo do coelho, tu via certinho aqui entrando, o tratamento de coelhos, ah vai depende de tal taxa, tava lá tal. E a saída a mesma coisa, tu via que dependia daquela coisa.
Q3	Aluno 2: Um pouco. Aluno 2: Circuitos elétricos. M: Tiveram dificuldade com a Matemática, o cálculo? Aluno 2: Talvez se lembrar um pouco. Aluno 1: Da integral. Aluno 2: Eu ia te perguntar bastante coisa básica, que eu não lembrava mais. Aluno 1: A integral, assim e tal. Aluno 2: Mas do conteúdo em si, consegui ir bem.
Q4	Aluno 1: É bem bom que a gente tirava as dúvidas. Principalmente eu que tive mais dificuldade do que ele. Professora: Vocês perceberam alguma desvantagem em trabalhar em dupla? Aluno 2: Não, eu acho que não.

Q5	Aluno 2: Olha, eu acho importante porque, pra fazer o trabalho que a gente tem visto aqui, a nível de físico-química e de física tem bastante matéria que envolve as equações, derivadas, não ordinárias. Aluno 1: É que no nosso dia-a-dia. Aluno 2: Parciais. Aluno 1: Se tu pensar no nosso dia-a-dia, é cálculo. Aluno 2: Tem bastante... M: Quais são, qual é a exigência pra situação, pro caso do dia-a-dia pra resultar numa equação diferencial? Qual é a exigência básica para a situação, pro modelo? Aluno 2: Tem que ter alguma coisa variando conforme o tempo.
Q6	Aluno 1: É importante. Pra gente calcular. Pegar a parte de projeto de doenças. Aluno 2: Até reações químicas.
Q7	Aluno 2: A solução particular é daquele... Aluno 1: Exata. Aluno 2: Daquele exemplo exato. Aluno 1: E a particular não. Aluno 2: E a geral é mais ampla, sobre aquele assunto.

Q8	Aluno 2: Não tem nada entrando? M: Não. Aluno 2: Só saindo. Aluno 2: Pode pegar qualquer letra. Pode. Só que é negativo porque vai sair. M: como é que vocês iam resolver ela? Aluno 2: Por separáveis. M: E a solução gráfica da quantidade de poluentes que têm no rio em função do tempo. Aluno 1: Vai decrescendo. Aluno 2: Vai caindo assim até chegar, até despoluir tudo. Até chegar no zero. A curva é proporcional ao que tem. Aluno 1: Vai chegando até diminuir tudo. É isso? $\frac{dN}{dt} = -kN$ $N = Ce^{-kt}$ 
Q9	Aluno 2: Eu acho que eu devia ter talvez ido atrás dessas coisas mais básicas, né do Cálculo I e II. Aluno 1: É, tive muita dificuldade na integral. Aluno 2: Se eu tivesse ido atrás, só dado uma revisada, né se me lembrava de alguma coisa, ia facilitar.
Q10	Aluno 2: Talvez uma pequena revisão de conteúdo anterior. M: Matemática básica? Aluno 2: É, só pra refrescar um pouco a memória. Aluno 1: Talvez uma aula de integral. Mas é do interesse do aluno.

Dupla 20 São dois alunos que apresentaram muitas dificuldades para compreender e realizar as atividades.	
Questões	Fragmentos de respostas
Q1	Aluno 1: Eu achei um pouco difícil, mas não pela disciplina, acho um pouco por mim, porque como a senhora mesmo comentou, eu não acabei me esforçando tanto assim. Aí, só que a respeito da disciplina, a respeito da empregação disso aí no, no eu pude notar, até conversei com meu chefe, pude notar assim que emprega, pelo menos no meu caso, que trabalha numa indústria de laticínios então, vou utilizar assim bastante, até prá programar uma produção de alguma coisa, estimar o tempo de, no caso que a gente fez o trabalho, quanto tempo vai terminar o montante de leite em um silo, numa entrada x, numa saída x. Aluno 1: Mas eu achei bastante interessante a aula.
Q5	Aluno 1: Eu diria que, fazer projeções, vou falar do meu caso. Fazer projeções de, como é que posso explicar, como eu especifiquei a pouco da quantidade de leite. O produtor teria um tanto, por exemplo, com uma entrada x e uma saída x, fazer projeções em cima, projeções na indústria.
Q6	Aluno 2: Eu acho que sim. Por que tudo que é que é envolvido em Química ali pega no serviço dele aí. Aluno 1: Cai metade aí. E que nem foi fazer, como ele fez, dar aula, envolve Química também, o negócio da meia-vida, o remédio também é Química.
Q7	Aluno 1: Solução geral seria uma solução pra um caso, pra um determinado caso. Aluno 2: Integrado. Aluno 1: Particular seria... Aluno 2: Processo. Aluno 1: Pra um determinado caso específico é, onde eu teria alguns dados já, como a taxa de variação, por exemplo, seria mais ou menos isso.

Q8	Aluno 1: Dá, acho que sim. Eu vou considerar como sujeira, vou colocar como s então, seria Ts sobre a derivada do tempo, que seria igual a constante que é menos s que tá saindo. Aluno 2: Pode ser o K Aluno 1: É, K é a constante de sujeira, seria isso, daí tem que fazer pelo método da. Aluno 2: Separação. M: Como fica o gráfico? Aluno 1: Daria um gráfico decrescente. Aluno 1: É decrescente, vamos supor aqui é a quantidade inicial, daí o gráfico deixa de ser decrescente, tendendo a zero porque vai, porque ele é em relação, a como a senhora disse. M: Proporcional. Aluno 1: Isso, proporcional a quantidade inicial. M: Dá pra dizer que a quantidade de poluentes que eu tiro todos os meses é a mesma? Aluno 1: Não, acho que não, porque a senhora tem é, vou estipular um número 10, sei lá quanto posso estipular, 10 poluentes por unidade, eu não sei qual é a unidade, 10 poluentes daria para calcular é, a senhora tem uma constante, uma taxa constante de 50%, vou tirar mais alto pra, daí eu vou ficar com 5, né daí desses 5, 50% vai dar 2,5 e assim respectivamente. $\frac{ds}{dt} = -KS$ $\int \frac{ds}{S} = \int -K\,dt$ $S = C \cdot e^{-Kt}$ 

ANEXO 2

Algunas guías escaneados con las respostas de los alumnos en el Estudio 3.

Então, se a meia-vida do iodo-131 é $\tau = 8\,dias$, a constante de decaimento dada pela Eq.3 é $k = 0{,}0866 / dias$.

II. Use a constante de decaimento encontrada e construa um diagrama no Powersim para representar a atividade A.

III. Gere a tabela e o gráfico da atividade anterior e compare os resultados com os da atividade A.

Atividade C

Os cientistas aprenderam a deduzir a idade de ossos, pedras, planetas e estrelas através da medida da quantidade de isótopos existentes no material em estudo. Para isto há diferentes métodos, dependendo da escala de tempo em que trabalham. Por exemplo, para estudar um período que vai até cerca de 40 ou 50 mil anos atrás, pode ser usado o método do C^{14} , que consiste em determinar qual a proporção de C^{12} e C^{14} existente na amostra. Apesar do C^{14} ser radioativo – decaindo em N^{14} - nos seres vivos a absorção de dióxido de carbono do ar mantém constante os níveis de C^{12} e C^{14} . Então, a proporção entre estes dois isótopos é fixa e bem conhecida. A partir da morte, não há reposição de C^{14} e consequentemente sua quantidade começa a diminuir. Comparando-se o nível de C^{14} com a quantidade total de carbono, é possível calcular há quanto tempo a planta ou o animal está morto. A meia-vida do C^{14} é de 5730 anos[2]. Considere que foi encontrado um osso fossilizado com 20% da quantidade de C^{14} usualmente encontrada num ser vivo e resolva as seguintes atividades:

I. Estime a idade do osso. Justifique sua resposta.

Cerca de 12000 anos, pois, em 11460 anos, haverá 25% da quantidade de C^{14} encontrada em um ser vivo.

II. Conforme o texto, a meia-vida do C^{14} é $\tau = 5730$ anos. Use este valor na Eq. 3 para determinar a constante de decaimento do C^{14} . Considere uma quantidade inicial de 1.000.000 átomos radioativos, represente a situação no *Powersim* e gere a tabela do número de átomos em função do tempo. $k = -0{,}000120968$

III. Verifique se a sua estimativa do item I está adequada aos resultados da tabela.

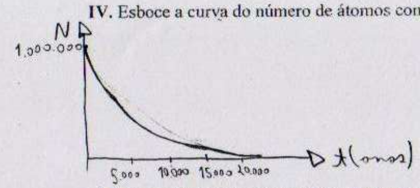
100% → 1.000.000
20% → 200.000

100% → 1.000.000
x → 234.191,53
x = 23,419153%

Houve um erro de apenas 3% na estimativa.

2 Informações obtidas na revista National Geographic Brasil, de setembro de 2001.

IV. Esboce a curva do número de átomos contra o tempo, medido em anos.



V. Faça no *Powersim* este gráfico e compare com a sua previsão.

VI. Faça no *Powersim* o gráfico da taxa de variação do número de átomos $\left(\frac{dN}{dt}\right)$ em relação ao número de átomos (*N*). Que curva você obteve? Como você justifica ou interpreta esta curva? A curva é aproximadamente linear. Significa que a taxa de decaimento diminui numa proporção fixa em relação ao número de átomos.

VII. Faça no *Powersim* o gráfico de $\frac{dN}{dt}$ em relação ao tempo *t*. Que curva você obteve? Como você justifica ou interpreta esta curva? O gráfico começa com uma inclinação de módulo alto e diminui com o tempo devido à diminuição do número de átomos.

Atividade D

Questões relacionadas a crescimento populacional são de interesse dos mais diversos setores da sociedade, por exemplo é importante saber a projeção da população de um país, estado ou município para planejar ações que objetivam suprir as necessidades da sociedade no campo da educação, saúde, trabalho, entre outras. Os biólogos buscam usar este conhecimento para proteger os recursos do meio ambiente para que não ocorra a extinção de uma ou de várias espécies. Existem várias formas de descrever o crescimento populacional, e destas, uma das mais conhecidas é o Modelo de Malthus. Ele é chamado o Modelo de Crescimento Exponencial, pois **a taxa de variação da população em relação ao tempo é proporcional à população existente no instante t:**

$$\frac{dP}{dt} \alpha kP$$

ou seja, o que resulta na mesma Equação Diferencial $\frac{dP}{dt} = kP$ da atividade B (Eq. 1). Este modelo

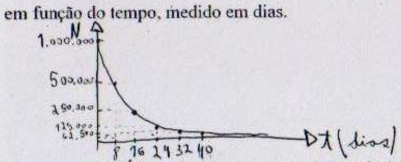
I. Quantos átomos radioativos haverá na amostra ao final de 64 dias?

3906.

II. Quantos dias demorarão para que haja em torno de 30 átomos radioativos?

120 dias.

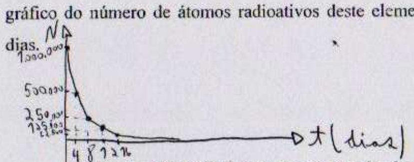
III. Esboce um gráfico do número de átomos radioativos de Iodo-131 contidas na amostra em função do tempo, medido em dias.



IV. É correto afirmar que o número de átomos radioativos da amostra que decaem por dia é constante? (Dizer que um átomo radioativo decaiu significa dizer que se transmutou em outro, porque emitiu partícula ou radiação, deixando de ser radioativo).

Não é correto, pois o número de átomos que decaem por dia diminui à medida que o número total de átomos radioativos na amostra vai diminuindo.

V. Suponha que o exame clínico fosse realizado com um elemento químico cuja meia vida fosse de 4 dias e que o número inicial de átomos radioativos fosse o mesmo (1.000.000). Esboce um gráfico do número de átomos radioativos deste elemento químico em função do tempo, medido em dias.



VI. A Figura 2.1 mostra a curva de decaimento de certa quantidade de um elemento radioativo em função do tempo.

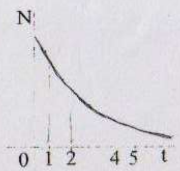


Figura 2.1. Decaimento radioativo

Em qual intervalo de tempo, $1<t<2$ ou $4<t<5$, o decréscimo de átomos radioativos é maior? Explique.

É maior no intervalo $1<t<2$, pois ali se encontra um maior número total de átomos radioativos, portanto o decaimento é maior.

Atividade B

Como podemos construir, no *Powersim*, a situação descrita na atividade A?

Para fazer o diagrama da situação precisamos ter o valor inicial e a taxa de decrescimento k, que em situações de meia-vida é chamada de constante de decaimento radioativo.

I. Construa um diagrama no *Powersim* considerando $k=0.1/dias$ e depois verifique as equações que o programa gerou.

Você encontrará a equação $taxa = n\_atomos * k$

A taxa significa a taxa de variação instantânea que pode ser descrita pela derivada, portanto, temos:

$$\frac{dN}{dt}=kN \quad , \qquad \text{Eq. 1}$$

onde N representa o número de átomos e $\frac{dN}{dt}$ a taxa de variação do número de átomos em função do tempo. A Eq.1 informa que **a taxa de variação do número de átomos em relação ao tempo é proporcional ao número de átomos existentes no instante t.**

A Eq. 1 é chamada de uma equação diferencial, porque envolve a derivada de uma função desconhecida (N). A solução desta equação diferencial é

$$N=N_0 \cdot e^{-kt} \quad , \qquad \text{Eq. 2}$$

onde N_0 é a quantidade inicial de átomos radioativos considerado.

Isto pode ser provado analiticamente, lembrando a derivada de uma exponencial, pois se

$N=N_0 \cdot e^{-kt}$, $\frac{dN}{dt}=-kN_0 e^{-kt}=-kN$, que é exatamente a Eq. 1.

Sabendo-se que a solução da equação diferencial Eq. 1 tem a forma dada na Eq. 2, podemos obter a constante de decaimento k de um modo simples. Basta lembrar que, por definição, meia-vida é o tempo necessário para que o número de átomos radioativos decaia à metade. Vamos representar a meia-vida por τ . Usando a Eq. 1 obtemos

$$\frac{N}{N_0}=\frac{1}{2}=e^{(-k\tau)}$$

Calculando o logaritmo natural dos dois lados desta equação, temos:

$$\ln(0,5)=-k\tau \quad \text{ou} \quad k=\frac{-\ln(0,5)}{\tau}=\frac{0,69315}{\tau} \qquad \text{Eq. 3}$$

Atividade G

Uma conta bancária rende juros de modo contínuo a uma taxa anual constante *r*. O saldo y da conta satisfaz a equação diferencial $\frac{dy}{dt} = ry$.

I. Resolva a equação diferencial para encontrar a solução geral.

$$\frac{dy}{dt} = ry \qquad FI = e^{\int -r\,dt} \qquad FI = e^{-rt+c}$$

$$\frac{dy}{dt} - ry = 0$$

$$e^{-rt} \cdot \frac{dy}{dt} - ry \cdot e^{-rt} = 0 \cdot e^{-rt}$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(y \cdot e^{-rt}\right) dt = \int 0\,dt$$

$$y \cdot e^{-rt} = C$$

$$\boxed{y = \frac{C}{e^{-rt}}}$$

C

II. Encontre a solução particular considerando que $r = 7\%/ano$ e o depósito inicial foi de R$ 1.000,00.

$$1000 = \frac{C}{e^{-0{,}07t}}$$

$$C = 1000 \cdot e^{-0{,}07t}$$

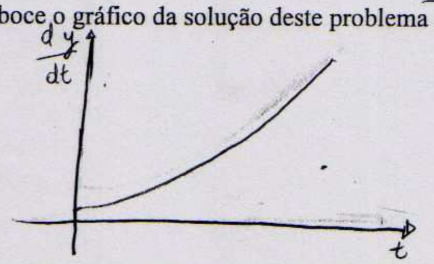
$$C = 1000 \cdot e^{0{,}07 \cdot 1}$$

$$C = 1072{,}50$$

$$\boxed{y = \frac{1072{,}50}{e^{0{,}07t}}}$$

C

III. Esboce o gráfico da solução deste problema e justifique o traçado.



C

IV. O que seria alterado no perfil da curva deste gráfico se:

a) a taxa de crescimento fosse 15% em vez de 7%?

A curva cresceria mais rapidamente.

C

b) se o depósito inicial fosse de R$5.000,00 em vez de RS1.000,00?

A quantidade de juros/ano seria >, então a curva também cresceria + rapidamente.

C

Guia de Atividades 5

Nestas atividades temos como objetivo abordar a resolução analítica de equações diferenciais e, através do estudo de situações-problema investigar o comportamento da solução e da taxa de variação destas situações e suas equações diferenciais de acordo com as condições fornecidas, inclusive na forma gráfica. Exploraremos também a associação da descrição de uma situação-problema com a correspondente equação diferencial e sua solução na forma analítica.

Atividade A

I. O gráfico da Figura 1 representa y em função do tempo t.

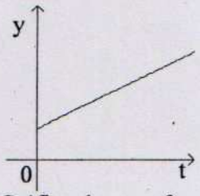
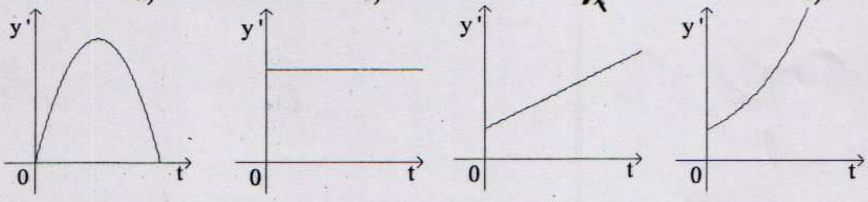


Figura 1: Gráfico de y em função do tempo t.

O gráfico que melhor representa y' em função de t é:

a) b) c) d)



II. Justifique a escolha:

Porque a taxa de variação $\frac{dy}{dt}$ cresce proporcionalmente ao tempo "t", da m
forma que o y cresce em função do tempo

Atividade B

I. Dada a equação diferencial $\frac{dy}{dt}+ay=b$, onde a é uma constante qualquer e $b=0$, a equação que melhor representa a solução da equação diferencial é:

a) $y=c+e^{-at}$ b) $y=ce^{-at}$ c) $y=c_1e^{-at}+c_2e^{bt}$ d) $y=c-at$

II. Justifique a escolha:

$\frac{dy}{dt}+ay=0$ $\quad FI = e^{\int a\,dt}$ $\quad FI = e^{at}$ $\rightarrow y=\frac{c}{e^{at}}$ $\quad \boxed{y=ce^{-at}}$

$e^{at}\cdot\frac{dy}{dt}+ay\cdot e^{at}=0\cdot e^{at}$

$\int\frac{d}{dt}(y\cdot e^{at})dt=\int 0\,dt$

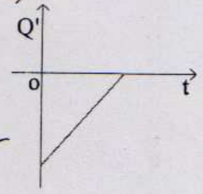
$y\cdot e^{at}=c$

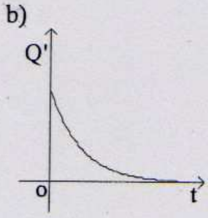
Atividade C

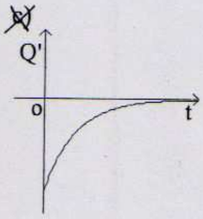
I. Considere um tanque com uma quantidade inicial de água, em que há um furo na base, e admita que a quantidade de água no tanque diminui a uma taxa de 10%, por minuto, da quantidade de água nele contida. Representando por Q_0 o valor $Q(0)$, a equação que melhor descreve a quantidade de água no tanque em função do tempo é:

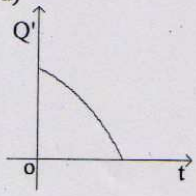
a) $Q=Q_0e^{0,1t}$ b) $Q=Q_0e^{-10t}$ ~~c)~~ $Q=Q_0e^{-0,1t}$ d) $Q=Q_0-e^{0,1t}$

II. Imagine agora uma torneira colocando água no tanque a um fluxo de $10\,litros/min$ e que a quantidade inicial de água no tanque seja de 200 litros. O gráfico que melhor representa a taxa de variação da quantidade de água (Q') no tanque em função do tempo (t) é:

a) 

b) 

~~c)~~ 

d) 

$\frac{dQ}{dt}$

III. A equação diferencial que melhor representa a situação anterior é:

~~a)~~ $\frac{dQ}{dt}=10-0,1Q$ b) $\frac{dQ}{dt}=10Q$ c) $\frac{dQ}{dt}=(10-0,1)Q$ d) $\frac{dQ}{dt}=-0,1t+10$

IV. Justifique a escolha:

t	$\frac{dQ}{dt}$	Q
1	-10	190
2	-9	181
3	-8,1	172,9

A medida que o tempo passa a taxa de variação $\frac{dQ}{dt}$ aumenta, se aproximando do zero ($\frac{dQ}{dt}$ tende a zero)

Atividade D

Resolva as equações diferenciais.

I. $(1+x)dy-y\,dx=0 \quad y(1)=-4$

$(1+x)dy = +y\,dx$

$\frac{(1+x)}{dx} = \frac{y}{dy}$

$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{(1+x)}$

$e^{\ln y} = e^{\ln(1+x)+C}$

$\boxed{y=(1+x)\cdot C}$

$-4=(1+1)\cdot C$

$-4=2C$

$\frac{-4}{2}=C$

$\boxed{C=-2}$

$y=(1+x)\cdot(-2)$

$\boxed{y=-2-2x}$

II. $xy'+y=e^{(-2x)}$ $\div(x)$ $\quad FI = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$

$$\frac{\cancel{x}y'}{x} + \frac{y}{x} = \frac{e^{(-2x)}}{x}$$

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{e^{(-2x)}}{x} \quad (\cdot x)$$

$$\int \frac{dy}{dx}\cdot x + y\cdot\frac{x}{x} = \int e^{(-2x)}\cdot\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}$$

$$y\cdot x = \frac{e^{-2x}}{-2} + C$$

$$\boxed{y = \frac{e^{-2x}}{-2x} + \frac{C}{x}}$$

C

Atividade E

I. O gráfico da Figura 2 representa a taxa de variação de uma certa população (P') em função do tempo (t), em anos.

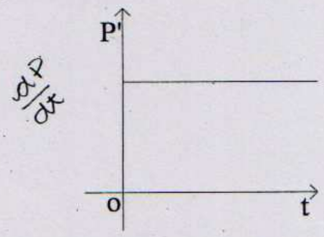


Figura 2: Gráfico da taxa de variação de uma população em função do tempo.

É correto afirmar que:

~~a)~~ a população não está aumentando nem diminuindo.

b) todos os anos o aumento no número de pessoas é o mesmo.

c) todos os anos a população aumenta com o mesmo percentual.

d) o percentual de óbitos é, necessariamente, nulo no período considerado.

Atividade F

I. O gráfico da Figura 3 representa y em função do tempo t.

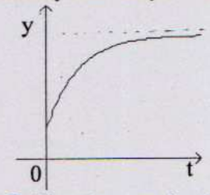


Figura 3: Gráfico de y em função do tempo t.

C

Sendo $a>0$ e $b<0$, a equação diferencial que melhor representa esta situação é:

a) $\frac{dy}{dt}=at+by$ b) $\frac{dy}{dt}=ae^{bt}$ ~~c)~~ $\frac{dy}{dt}=a+by$ d) $\frac{dy}{dt}=\frac{a}{b}y$

II. Justifique a escolha:

Enquanto o y aumenta a variação $\frac{dy}{dt}$ diminui.

Atividade H

I. A equação diferencial que representa a variação da velocidade é dada por $v' + \frac{k}{m} v = -g$. Resolva-a para encontrar a solução geral.

$FI = e^{\int \frac{k}{m} dt}$

$F_I = e^{\frac{k}{m}t}$

$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} \cdot v = -g$

$e^{\frac{k}{m}t} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v \cdot e^{\frac{k}{m}t} = -g\, e^{\frac{k}{m}t}$

$\int \frac{d}{dt}\left(v \cdot e^{\frac{k}{m}t}\right) dt = \int -g\, e^{\frac{k}{m}t}\, dt$

$v \cdot e^{\frac{k}{m}t} = -g \cdot \frac{e^{\frac{k}{m}t}}{\frac{k}{m}} + C$

$v = \dfrac{-g\, \cancel{e^{\frac{k}{m}t}}}{\frac{k}{m}\, \cancel{e^{\frac{k}{m}t}}} + \dfrac{C}{e^{\frac{k}{m}t}}$

$v = -\frac{g}{\frac{k}{m}} + \frac{C}{e^{\frac{k}{m}t}} \rightarrow \boxed{v = -g\frac{m}{K} + Ce^{-\frac{K}{m}t}}$

Solução Geral

C

II. Considere que a barra tem uma massa de 70 kg, que $g = 9{,}8\, m/s^2$, $k = 13{,}72\, kg/s$ e encontre a solução particular. Lembre-se que a velocidade inicial é zero.

$t = 0$

$0 = -9{,}8 \cdot \frac{70}{13{,}72} + C\, e^{-\frac{13{,}72}{70} \cdot t}$

$0 = -50 + C\, e^{-0{,}196t}$

$0 = -50 + C \cdot e^{0}$

$C = \frac{50}{1} = 50$

$\boxed{v = -50 + 50\, e^{-0{,}196t}}$ Solução Particular

C

III. Estime a velocidade limite da esfera. Aumentando t o e tende a zero

$v = -50 + 50\, e^{-t}$

$v = -50 + 0 = -50$ $\boxed{v = |-50| = 50\, m/s}$ Velocidade limite

C

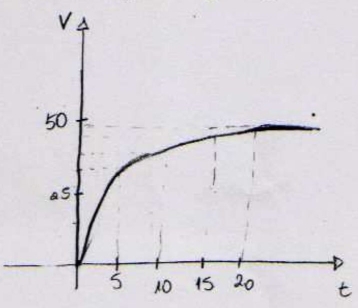
IV. Qual a velocidade da esfera no instante $t = 10\, s$?

$v = -50 + 50\, e^{-0{,}196 \cdot 10}$

$v = -42{,}93\, \frac{m}{s}$

C

V. Esboce o gráfico que representa a solução do problema proposto e justifique o traçado.



t	v
0	0
5	-31,23
10	-42,93
15	-47,35
20	-49,000

C+

A velocidade aumenta até o limite máximo. (50m/s)

ii. a soma algébrica das quedas de potencial ao longo de um laço fechado de um circuito elétrico deve ser igual a soma das elevações de potencial.

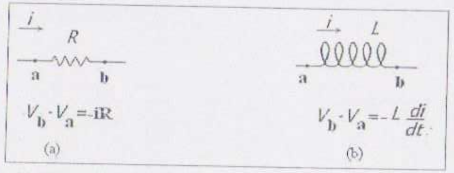


Figura 4.2. Diferença de potencial em a) um resistor percorrido por uma corrente elétrica i, e b) um indutor que está sendo carregado.

Com estas informações, podemos verificar que a equação diferencial que rege a corrente que circula pelo circuito RL mostrado na Figura 4.1, ao fecharmos a chave é:

$$L\frac{di}{dt}+Ri=V \qquad \frac{di}{dt}=\frac{V}{L}-\frac{R}{L}i \qquad \text{Eq. 1}$$

Atividade A

Considerando o circuito elétrico mostrado na Figura 4.1, suponha que a fonte de tensão fornece uma voltagem constante de 60V, que a resistência é constante e igual a 12 Ω, a indutância é de 40 mH, que a corrente no instante inicial é nula ($i(0)=0$) e que a chave foi fechada.

I. Construa um diagrama no Powersim para representar esta situação.

II. Construa o gráfico da corrente contra o tempo e verifique o que acontece com o valor da corrente a longo prazo.

III. Construa o gráfico da taxa de variação da corrente $\left(\frac{di}{dt}\right)$ em função do tempo e justifique qualitativamente o traçado desta curva. Forma-se uma parábola decrescente em função da entrada ser fixa e a saída aumentar até atingir o valor obtido na entrada.

IV. Em qual intervalo de tempo, $0<t<5$ ou $5<t<10$, a taxa de variação da corrente em função do tempo é maior? Explique. A variação é maior entre $0<t<5$ mas os valores da taxa p/ cada instante são maiores entre $5<t<10$ em função da taxa de saída aumentar até se equiparar c/ os valores da entrada.

V. Construa o gráfico da taxa de variação da corrente $\left(\frac{di}{dt}\right)$ em função da corrente e explique-o. A medida em que os valores da corrente aumentam em função de sua entrada, a taxa se reduz p/ que valores de entrada e saída se equivalam.

VI. Arbitre alguns valores entre 0 e 100V para a diferença de potencial, estabelecida pela fonte de tensão contínua do circuito elétrico mostrado na Figura 4.1, mantendo os outros parâmetros fixos. Qual a influência da alteração de V no(a):

a) curva da corrente elétrica versus tempo? (40) a curva é semelhante porém com o valor máximo menor.
(80) a curva é semelhante porém c/ o valor máximo maior.

b) valor da corrente elétrica a longo prazo?
(40) Tende a 3A e não mais a 5A.
(80) " " " " "

c) comportamento da taxa de variação da corrente elétrica em função do tempo?
(40) semelhante c/ valor máximo menor.
(80) " " " " maior.

Ω VII. Tendo em mente a mesma sistemática do exercício anterior, arbitre alguns valores para a resistência elétrica do resistor entre 0 e 20 ohms, mantendo os outros parâmetros com os mesmos valores do exercício I. Qual a influência da alteração de R no(a):

a) curva da corrente elétrica versus o tempo?
(5) vai atingir valores maiores em um tempo maior
(18) irá aumentar mais rapidamente em um período de tempo menor

b) valor da corrente elétrica a longo prazo?
(5) tende 10A
(18) tende 3A

c) comportamento da taxa de variação da corrente elétrica em função do tempo?
(5) decai em um período maior
(18) irá decair em um tempo menor.

VIII. Resolva, analiticamente, a equação $L\frac{di}{dt}+Ri=V$ para encontrar a solução geral.

$$\frac{di}{dt}=\frac{V}{L}-\frac{R}{L}.i$$

$K = \frac{\ln 0{,}5}{(\text{meia vida})}$

Então, se a meia-vida do iodo-131 é $\tau = 8\,dias$, a constante de decaimento dada pela Eq.3 é $k = 0{,}0866/dias$.

II. Use a constante de decaimento encontrada e construa um diagrama no Powersim para representar a atividade A.

III. Gere a tabela e o gráfico da atividade anterior e compare os resultados com os da atividade A.

Atividade C

Os cientistas aprenderam a deduzir a idade de ossos, pedras, planetas e estrelas através da medida da quantidade de isótopos existentes no material em estudo. Para isto há diferentes métodos, dependendo da escala de tempo em que trabalham. Por exemplo, para estudar um período que vai até cerca de 40 ou 50 mil anos atrás, pode ser usado o método do C^{14}, que consiste em determinar qual a proporção de C^{12} e C^{14} existente na amostra. Apesar do C^{14} ser radioativo - decaindo em N^{14} - nos seres vivos a absorção de dióxido de carbono do ar mantém constante os níveis de C^{12} e C^{14}. Então, a proporção entre estes dois isótopos é fixa e bem conhecida. A partir da morte, não há reposição de C^{14} e consequentemente sua quantidade começa a diminuir. Comparando-se o nível de C^{14} com a quantidade total de carbono, é possível calcular há quanto tempo a planta ou o animal está morto. A meia-vida do C^{14} é de 5730 anos[2]. Considere que foi encontrado um osso fossilizado com 20% da quantidade de C^{14} usualmente encontrada num ser vivo e resolva as seguintes atividades:

I. Estime a idade do osso. Justifique sua resposta.

Entre 11.460 anos e 17.190 anos.
(pelo devido a sua meia vida.

$$C^{14}\begin{cases} 100\% \;—\; 0 & \text{anos} \\ 50\% \;—\!\!\to 5730 \\ 25\% \;—\; \approx 11460 \\ 12{,}5\% \;—\; 17190 \end{cases}$$

Tel. **II.** Conforme o texto, a meia-vida do C^{14} é $\tau = 5730$ anos. Use este valor na Eq. 3 para determinar a constante de decaimento do C^{14}. Considere uma quantidade inicial de 1.000.000 átomos radioativos, represente a situação no *Powersim* e gere a tabela do número de átomos em função do tempo. taxa. $K = \frac{\ln 0{,}5}{5730} = 0{,}00012\,0968$

III. Verifique se a sua estimativa do item I está adequada aos resultados da tabela.

Sim está.

2 Informações obtidas na revista National Geographic Brasil, de setembro de 2001.

IV. Esboce a curva do número de átomos contra o tempo, medido em anos.

V. Faça no *Powersim* este gráfico e compare com a sua previsão.

Está correta. OK

VI. Faça no *Powersim* o gráfico da taxa de variação do número de átomos $\left(\frac{dN}{dt}\right)$ em relação ao número de átomos (N). Que curva você obteve? Como você justifica ou interpreta esta curva? Uma reta crescente, devido a taxa de variação ser constante.

VII. Faça no *Powersim* o gráfico de $\left(\frac{dN}{dt}\right)$ em relação ao tempo t. Que curva você obteve? Como você justifica ou interpreta esta curva? Meia parábola, que a taxa diminui em relação ao tempo, na de forma linear.

Atividade D

Questões relacionadas a crescimento populacional são de interesse dos mais diversos setores da sociedade, por exemplo é importante saber a projeção da população de um país, estado ou município para planejar ações que objetivam suprir as necessidades da sociedade no campo da educação, saúde, trabalho, entre outras. Os biólogos buscam usar este conhecimento para proteger os recursos do meio ambiente para que não ocorra a extinção de uma ou de várias espécies. Existem várias formas de descrever o crescimento populacional, e destas, uma das mais conhecidas é o Modelo de Malthus. Ele é chamado o Modelo de Crescimento Exponencial, **pois a taxa de variação da população em relação ao tempo é proporcional à população existente no instante t:**

$$\frac{dP}{dt} \propto kP$$

ou seja, o que resulta na mesma Equação Diferencial $\frac{dP}{dt} = kP$ da atividade $\boxed{B}$ (Eq. 1). Este modelo

ii. a soma algébrica das quedas de potencial ao longo de um laço fechado de um circuito elétrico deve ser igual a soma das elevações de potencial.

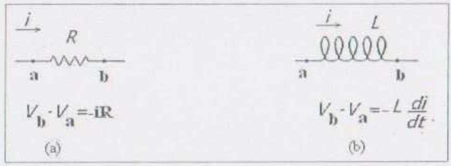


Figura 4.2. Diferença de potencial em a) um resistor percorrido por uma corrente elétrica *i*, e b) um indutor que está sendo carregado.

Com estas informações, podemos verificar que a equação diferencial que rege a corrente que circula pelo circuito RL mostrado na Figura 4.1, ao fecharmos a chave é:

$$L\frac{di}{dt}+Ri=V \qquad \frac{di}{dt} = \frac{V}{L} - \frac{Ri}{L} \qquad \text{Eq. 1}$$

Atividade A

Considerando o circuito elétrico mostrado na Figura 4.1, suponha que a fonte de tensão fornece uma voltagem constante de 60V, que a resistência é constante e igual a 12 Ω, a indutância é de 40 mH, que a corrente no instante inicial é nula ($i(0)=0$) e que a chave foi fechada.

I. Construa um diagrama no Powersim para representar esta situação.

ok.

II. Construa o gráfico da corrente contra o tempo e verifique o que acontece com o valor da corrente a longo prazo.

A longo prazo a corrente se aproxima de 5 A.

III. Construa o gráfico da taxa de variação da corrente $\left(\frac{di}{dt}\right)$ em função do tempo e justifique explica qualitativamente o traçado desta curva. parábola decrescente, pois a taxa
O gráfico é uma de variação é a diferença entre a taxa de entrada e a taxa de saída, e a taxa de entrada é constante mas a taxa de saída é crescente em relação ao tempo, por isso

IV. Em qual intervalo de tempo, $0<t<5$ ou $5<t<10$, a taxa de variação da corrente em função do tempo é maior? Explique.

No intervalo de $0<t<5$, porque como a taxa de variação da corrente depende da taxa de entrada e saída, e a taxa de saída cresce em relação ao tempo, então a variação será maior nesse intervalo porque o tempo é menor, ou seja a taxa de entrada nesse intervalo será muito mais que a de saída.

V. Construa o gráfico da taxa de variação da corrente $\left(\frac{di}{dt}\right)$ em função da corrente e explique-o. O gráfico tem a forma de uma reta decrescente, pois a medida que a corrente aumenta a taxa de variação diminui. Por exemplo.

t	di/dt	corrente
0	1,5	0
1	1,05	1,5
2	0,735	2,55
3	0,515	3,29

VI. Arbitre alguns valores entre 0 e 100V para a diferença de potencial, estabelecida pela fonte de tensão contínua do circuito elétrico mostrado na Figura 4.1, mantendo os outros parâmetros fixos. Qual a influência da alteração de V no(a):

a) curva da corrente elétrica versus tempo? A curva da corrente muda a altura devido a mudança do valor de V.

b) valor da corrente elétrica a longo prazo? A medida que você aumenta o V, o valor da corrente a longo prazo aumenta e se você diminui o V, o valor da corrente diminui

c) comportamento da taxa de variação da corrente elétrica em função do tempo?
Aumenta e diminui proporcionalmente pelo valor da voltagem.

VII. Tendo em mente a mesma sistemática do exercício anterior, arbitre alguns valores para a resistência elétrica do resistor entre 0 e 20 ohms, mantendo os outros parâmetros com os mesmos valores do exercício I. Qual a influência da alteração de R no(a):

a) curva da corrente elétrica versus o tempo? A curva da corrente muda de inclinação.

b) valor da corrente elétrica a longo prazo? A medida que aumenta a R o valor da corrente a longo prazo diminui e a medida que você diminui a R o valor da corrente a longo prazo aumenta

c) comportamento da taxa de variação da corrente elétrica em função do tempo?
A medida que diminui a R a taxa de variação demora mais para tender a zero.

VIII. Resolva, analiticamente, a equação $L\frac{di}{dt}+Ri=V$ para encontrar a solução geral.

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V$$
$$L\frac{di}{dt} = V - Ri$$
$$\frac{di}{dt} = \frac{V}{L} - \frac{Ri}{L} \qquad \frac{di}{dt} = \frac{V-Ri}{L}$$
$$\frac{di}{dt} + \frac{Ri}{L} = \frac{V}{L} \qquad \frac{L\,di}{V-Ri} = dt$$
$$di + \frac{Ri}{L} = \frac{V}{L}\cdot dt$$

Guia de Atividades 3

105

Nestas atividades temos como objetivo abordar a resolução analítica de equações diferenciais e, através do estudo de situações-problema que envolvem o crescimento de uma cultura de bactérias, a lei do Resfriamento de Newton, a mistura de soluções e reações químicas, investigar o comportamento da solução e da taxa de variação destas situações e suas equações diferenciais de acordo com as condições fornecidas, inclusive na forma gráfica. Exploraremos também a associação da descrição de uma situação-problema com a correspondente equação diferencial na forma analítica e a análise dimensional de algumas equações diferenciais envolvidas neste guia.

Atividade A

O tempo de geração é o intervalo de tempo requerido para que a população em uma cultura de microorganismos duplique em número. A bactéria *Mycobacterium tuberculosis,* causadora da tuberculose, possui um tempo de geração de aproximadamente 14 horas[1].

I. Sabendo que **uma cultura de bactérias cresce a uma taxa que é proporcional a quantidade de bactérias existentes no instante t,** escreva uma equação diferencial que represente a situação e resolva-a para encontrar a solução geral.

Equação Diferencial $\frac{dN}{dt} = KN$

$\int \frac{dN}{N} = \int K\,dt$

$\ln N = Kt + C$

$e^{\ln N} = e^{Kt+C}$

$\boxed{N = C\,e^{Kt}}$ Solução Geral

II. Determine a constante de crescimento, com a respectiva unidade de medida, da cultura de bactérias *Mycobacterium tuberculosis.* $t = 14h$

$\frac{dN}{dt} = K.N = K\,C\,e^{Kt}$

$KN = KC\,e^{Kt}$

$\frac{N}{C} = e^{Kt} = 2$

$\ln e^{Kt} = \ln 2$

$Kt = \ln 2$

$K = \frac{\ln 2}{14}$ $K = 0{,}04951/hora$

constante de crescimento → K.

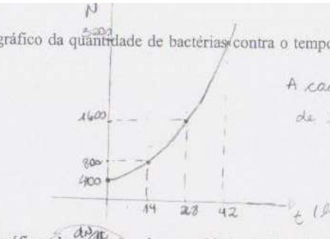
III. Considerando que existam inicialmente 400 bactérias, determine a solução particular para este caso.

$N = C.\,e^{Kt}$

então $\boxed{N = 400\,e^{0{,}04951t}}$ Solução Particular

IV. Esboce um gráfico da quantidade de bactérias contra o tempo. Justifique ou interprete esta curva.

t	N
0	400
14	800
28	1600
42	3200

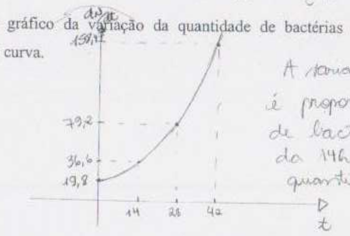


A cada 14h o número de bactérias dobra

V. Esboce um gráfico da variação da quantidade de bactérias em relação ao tempo. Justifique ou interprete esta curva.

$\frac{dN}{dt} = K\,C\,e^{Kt}$

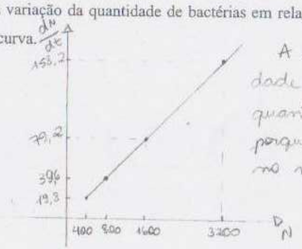
t	$\frac{dN}{dt}$
0	19,8
14	39,6
28	79,2
42	158,4



A variação da quantidade é proporcional a quantidade de bactérias, ou seja, a cada 14h a variação da quantidade duplica

VI. Esboce um gráfico da variação da quantidade de bactérias em relação à quantidade de bactérias. Justifique ou interprete esta curva.

$\frac{dN}{dt}$	N
19,8	400
39,6	800
79,2	1600
158,4	3200



A variação da quantidade é proporcional quantidade de bactérias porque as duas dobram no mesmo tempo.

Atividade B

A lei de resfriamento de Newton estabelece que: *a taxa de variação de temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio ambiente.* Considerando que a temperatura do corpo depende do tempo e que a temperatura do meio ambiente permanece constante no decorrer da experiência, a equação diferencial que descreve a situação acima é $\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$ onde T é a temperatura do corpo no instante t, T_m é a temperatura constante do meio ambiente, $\frac{dT}{dt}$ é a taxa segundo à qual a temperatura do corpo varia e k é uma constante de proporcionalidade que depende do material com que o corpo foi construído.

1 PELCZAR Jr., M. J. Et al. Microbiologia Conceitos e Aplicações, Makron Books, 2005.

Por exemplo, uma xícara de café sobre a mesa da cozinha esfria a uma taxa proporcional à diferença de temperatura entre o café e o ar que o cerca, então:

I. A medida que o café esfria, a taxa de resfriamento diminui, aumenta ou permanece sempre igual? Explique.

A medida que o café esfria, a diferença entre ele e o ar que o cerca diminui, sendo assim, a taxa de resfriamento também diminui.

II. A longo prazo, a temperatura do café aproxima-se de zero? Explique.

A longo prazo, a temperatura do café aproxima-se da temperatura do ar que o cerca. Se a temperatura do ar for zero, a do café se aproximará de zero

III. A longo prazo, a taxa de resfriamento tende a zero? Explique.

Sim. Porque a diferença de temperatura entre o ar e o café diminui, aproximando-se, fazendo com que a taxa, que é proporcional a diferença, tenda a zero

Suponha que a temperatura de uma xícara de café recém preparado seja de $90^\circ C$. Cinco minutos mais tarde a temperatura já diminuiu para $60^\circ C$ numa sala à temperatura constante $20^\circ C$.

IV. Sabendo que a equação diferencial da variação da temperatura é separável, resolva-a e escreva a solução particular para a situação apresentada.

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_m)$$

$$\int \frac{dT}{(T-T_m)} = \int K\,dt$$

$$\ln(T - T_m) = Kt + C$$

$$e^{\ln(T-T_m)} = e^{Kt+C}$$

$T - T_m = Ce^{Kt}$ Solução Geral

$$T = Ce^{Kt} + T_m$$

$$90 = Ce^{K(0)} + 20$$

$$C = 70^\circ C$$

$\boxed{T = 70e^{Kt} + 20}$ Solução Particular

V. Esboce o gráfico da temperatura contra o tempo.

$$60 = 70e^{K(5)} + 20$$

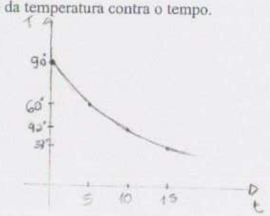
$$40 = 70e^{K(5)}$$

$$e^{K(5)} = 0{,}571$$

$$\ln e^{5K} = \ln 0{,}571$$

$$5K = -0{,}559$$

$$K = -0{,}1119$$



t	T
0	90°
5	60°
10	42,35°
15	33,06°

VI. Determine a temperatura do café após 10 minutos nesta sala.

$t = 10$ min

$$T = 70\,e^{10(-0{,}1119)} + 20$$

$$T = 42{,}36^\circ C$$

VII. Considere que alguém deseja tomar este café a uma temperatura de $50^\circ C$. Quanto tempo precisará esperar desde o momento em que ele foi preparado.

$$50 = 70e^{t(-0{,}1119)} + 20$$

$$\frac{30}{70} = e^{t(-0{,}1119)}$$

$$\ln e^{t(-0{,}1119)} = \ln 0{,}4285$$

$$t(-0{,}1119) = -0{,}8472$$

$$t = 7{,}5 \text{ min}$$

Atividade C

Um problema de mistura pode ser representado por um tanque preenchido, até um nível especificado, com uma solução que contém uma quantidade conhecida de substância solúvel (por exemplo cloro). A solução completamente misturada flui do tanque a uma taxa conhecida, e ao mesmo tempo uma solução com uma concentração conhecida de uma substância solúvel é acrescentada ao tanque a uma taxa conhecida que pode ou não ser diferente da taxa de vazão. À medida que o tempo passa, a quantidade de substância solúvel no tanque irá, em geral, variar, e o problema de mistura usual procura determinar a quantidade de substância no tanque num instante especificado. A descrição matemática desta situação pode ser representada por

$$\frac{dQ}{dt} = \textit{taxa de entrada} - \textit{taxa de saída}$$

Este tipo de problema serve como modelo para muitos outros fenômenos: descarga e filtragem de poluentes em um rio, injeção e absorção de medicamentos na corrente sanguínea, migração de espécies para dentro e para fora de um sistema ecológico, reações químicas, entre outros.

Consideremos que um tanque contenha 500 litros de salmoura (isto é, água na qual foi dissolvida uma certa quantidade de sal). Uma outra salmoura é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 4 *l/min*; a concentração de sal nessa segunda salmoura é de 3 *kg/l*. Quando a solução no tanque estiver bem misturada, ela será bombeada para fora à mesma taxa de entrada. Supondo que o tanque contenha inicialmente 50 *kg* de sal:

I. Escreva a equação diferencial para a situação apresentada.

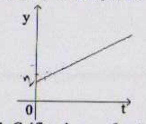
0,1 kg/l

Guia de Atividades 5

Nestas atividades temos como objetivo abordar a resolução analítica de equações diferenciais e, através do estudo de situações-problema investigar o comportamento da solução e da taxa de variação destas situações e suas equações diferenciais de acordo com as condições fornecidas, inclusive na forma gráfica. Exploraremos também a associação da descrição de uma situação-problema com a correspondente equação diferencial e sua solução na forma analítica.

Atividade A

I. O gráfico da Figura 1 representa y em função do tempo t.

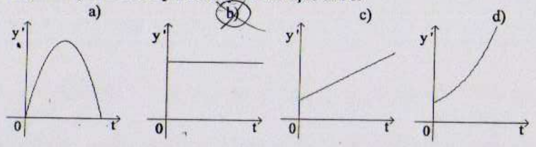


$y = 2t+2$

$y' = 2$

Figura 1: Gráfico de y em função do tempo t.

O gráfico que melhor representa y' em função de t é:



II. Justifique a escolha: letra b, pois a derivada é relacionada com a taxa de variação. E neste caso a taxa de variação é constante, no momento em que y sobe meio o tempo também sobe meio, portanto a variação é constante e o gráfico da derivada será uma reta (pois é gráfico de variação).

Atividade B

I. Dada a equação diferencial $\frac{dy}{dt}+ay=b$, onde a é uma constante qualquer e $b=0$, a equação que melhor representa a solução da equação diferencial é:

a) $y=c+e^{-at}$ b) $y=ce^{-at}$ c) $y=c_1e^{-at}+c_2e^{bt}$ d) $y=c-at$

II. Justifique a escolha:

$b=0$

$\frac{dy}{dt} = -ay$

$\int \frac{dy}{y} = \int -a\,dt$

$\ln y = -at + C$

$y = e^{-at} \cdot C$

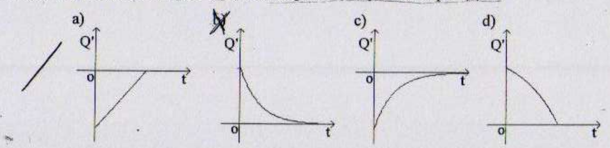
Pois de acordo com a resolução analítica ao lado chegamos a este resultado. É uma situação onde temos uma constante negativa, há um decaimento, o gráfico gerado por esta situação seria exponencial decrescente, pode-se observar este tipo de eq. diferencial

Atividade C

I. Considere um tanque com uma quantidade inicial de água, em que há um furo na base, e admita que a quantidade de água no tanque diminui a uma taxa de 10%, por minuto, da quantidade de água nele contida. Representando por Q_0 o valor $Q(0)$, a equação que melhor descreve a quantidade de água no tanque em função do tempo é:

a) $Q=Q_0e^{0,1t}$ b) $Q=Q_0e^{-10t}$ c) $Q=Q_0e^{-0,1t}$ d) $Q=Q_0-e^{0,1t}$

II. Imagine agora uma torneira colocando água no tanque a um fluxo de $10\,litros/min$ e que a quantidade inicial de água no tanque seja de 200 litros. O gráfico que melhor representa a taxa de variação da quantidade de água (Q') no tanque em função do tempo (t) é:



III. A equação diferencial que melhor representa a situação anterior é:

a) $\frac{dQ}{dt}=10-0,1Q$ b) $\frac{dQ}{dt}=10Q$ c) $\frac{dQ}{dt}=(10-0,1)Q$ d) $\frac{dQ}{dt}=-0,1t+10$

IV. Justifique a escolha: da III

Pois a taxa de variação da Q em relação ao tempo será a taxa de entrada menos a taxa de saída. Então como a taxa de entrada é fixa não depende da quantidade será 10 e já a taxa de saída é 10% da quantidade existente então será 0,1Q. Por isso a eq diferencial p/ o caso é a letra a.

Atividade D

Resolva as equações diferenciais.

I. $(1+x)dy-y\,dx=0$ $y(1)=-4$

$(1+x)dy = y\,dx$

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{(1+x)}$

$e^{\ln y} = e^{\ln(1+x)+C}$

$y=(1+x).C$

$y = C(1+x)$

$-4 = C(1+1)$

$-4 = C.2$

$-2 = C$

Então:

$y = -2(1+x)$

II. $xy'+y=e^{(-2x)}$ $\div x$ $\quad F_i: e^{\int \frac{1}{x}dx}$ $\quad F_i: x$

$y'+\frac{y}{x}=\frac{e^{(-2x)}}{x}$ (x)

$\int \frac{d}{dx}(y\cdot x)dx=\int e^{(-2x)}dx$

$y\cdot x=\frac{e^{-2x}}{-2}+C$

$\boxed{y=-\frac{e^{-2x}}{2x}+\frac{C}{x}}$

Atividade E

I. O gráfico da Figura 2 representa a taxa de variação de uma certa população (P') em função do tempo (t), em anos.

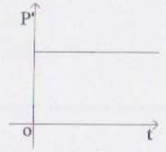


Figura 2: Gráfico da taxa de variação de uma população em função do tempo.

É correto afirmar que:

a) a população não está aumentando nem diminuindo.

~~b)~~ todos os anos o aumento no número de pessoas é o mesmo.

c) todos os anos a população aumenta com o mesmo percentual.

d) o percentual de óbitos é, necessariamente, nulo no período considerado.

Atividade F

I. O gráfico da Figura 3 representa y em função do tempo t.

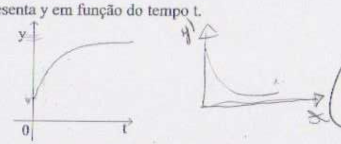


Figura 3: Gráfico de y em função do tempo t.

Sendo $a>0$ e $b<0$, a equação diferencial que melhor representa esta situação é:

a) $\frac{dy}{dt}=at+by$ b) $\frac{dy}{dt}=ae^{bt}$ ~~c)~~ $\frac{dy}{dt}=a+by$ d) $\frac{dy}{dt}=\frac{a}{b}y$

II. Justifique a escolha:

Pois a variação do y está diminuindo, e o valor de y tende a se estabilizar em um valor limite maior que a.

Atividade G

Uma conta bancária rende juros de modo contínuo $\boxed{\text{a uma taxa anual constante } r}$ O saldo y da conta satisfaz a equação diferencial $\frac{dy}{dt}=ry$.

I. Resolva a equação diferencial para encontrar a solução geral.

$\frac{dy}{dt}=ry$ $\quad \ln y = rt + C$

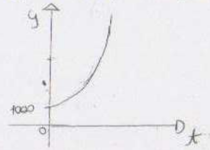
$\int \frac{dy}{y}=\int r\,dt$ $\quad y=e^{rt}\cdot C$

$\boxed{y=C\cdot e^{rt}}$ Sol. geral

II. Encontre a solução particular considerando que $r=7\%/ano$ e o depósito inicial foi de R$ 1.000,00.

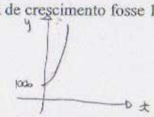
$\boxed{y=1000\cdot e^{0{,}07t}}$ Sol particular

III. Esboce o gráfico da solução deste problema e justifique o traçado.



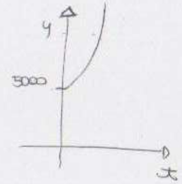
IV. O que seria alterado no perfil da curva deste gráfico se:

a) a taxa de crescimento fosse 15% em vez de 7%?



Mudaria a inclinação da curva, pois ela cresceria mais rápido. Portanto a variação seria maior.

b) se o depósito inicial fosse de R$5.000,00 em vez de R$1.000,00?



Mudaria a altura e a inclinação da curva. Pois a inclinação também depende da quantidade inicial.

Nestas atividades temos como objetivo abordar a resolução analítica de equações diferenciais e, através do estudo de situações-problema que envolvem o crescimento de uma cultura de bactérias, a lei do Resfriamento de Newton, a mistura de soluções e reações químicas, investigar o comportamento da solução e da taxa de variação destas situações e suas equações diferenciais de acordo com as condições fornecidas, inclusive na forma gráfica. Exploraremos também a associação da descrição de uma situação-problema com a correspondente equação diferencial na forma analítica e a análise dimensional de algumas equações diferenciais envolvidas neste guia.

Atividade A

O tempo de geração é o intervalo de tempo requerido para que a população em uma cultura de microorganismos duplique em número. A bactéria *Mycobacterium tuberculosis,* causadora da tuberculose, possui um tempo de geração de aproximadamente 14 horas[1].

I. Sabendo que **uma cultura de bactérias cresce a uma taxa que é proporcional a quantidade de bactérias existentes no instante t**, escreva uma equação diferencial que represente a situação e resolva-a para encontrar a solução geral.

$$\boxed{\frac{dB}{dt} = kB} \Rightarrow \frac{dB}{B} = kdt \Rightarrow \frac{1}{B}dB = kdt = \int \frac{1}{B}dB = \int k\,dt \Rightarrow \ln B = kt + B_0$$

$$e^{\ln B} = e^{kt+B_0} \Rightarrow \boxed{B = B_0 . e^{kt}} \rightarrow \text{solução geral}$$

II. Determine a constante de crescimento, com a respectiva unidade de medida, da cultura de bactérias *Mycobacterium tuberculosis.* $B = B_0 . e^{kt} \Rightarrow 20 = 10 . e^{k.14} \Rightarrow$

$2 = e^{k14} \Rightarrow \ln 2 = \ln e^{k14} \Rightarrow 0.69314718 = k14 \Rightarrow$

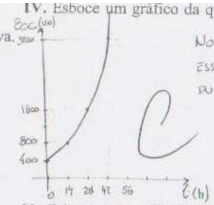
$k = \frac{0.69314718}{14} \Rightarrow \boxed{k = 0{,}049510512\ \cancel{bac}/h}$

Bac	tempo
10	0
20	14
40	28
80	42
160	56

III. Considerando que existam inicialmente 400 bactérias, determine a solução particular para este caso.

$B_0 = 400 \Rightarrow \boxed{B = 400 . e^{0{,}049510512t}} \rightarrow$ Solução Particular

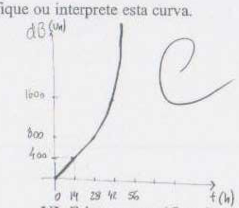
IV. Esboce um gráfico da quantidade de bactérias contra o tempo. Justifique ou interprete esta curva.



No instante $t = \emptyset$ tem-se 400 bactérias, esse número cresce exponencialmente duplicando a cada 14 horas.

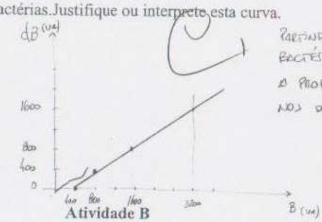
Bac	tempo
400	0
800	14
1600	28
3200	42
6400	56
⋮	⋮

V. Esboce um gráfico da variação da quantidade de bactérias em relação ao tempo. Justifique ou interprete esta curva.



No instante $t = \emptyset$ não há variação da qtd bactérias por isso o gráfico parte da origem e cresce exponencialmente conforme o tempo passa. No instante $t = 14h$ a qtd de bactérias passou de 400 p/ 800 então houve uma variação de 400 e assim por diante.

VI. Esboce um gráfico da variação da quantidade de bactérias em relação à quantidade de bactérias. Justifique ou interprete esta curva.



Partindo do número inicial de 400 bactérias o gráfico cresce linearmente e a proporção do crescimento é a mesma nos dois eixos do gráfico.

Bac	t	dB
400	0	0
800	14	400
1600	28	800
3200	42	1600
6400	56	3200

Atividade B

A lei de resfriamento de Newton estabelece que: *a taxa de variação de temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio ambiente.* Considerando que a temperatura do corpo depende do tempo e que a temperatura do meio ambiente permanece constante no decorrer da experiência, a equação diferencial que descreve a situação acima é $\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$ onde

T é a temperatura do corpo no instante t, T_m é a temperatura constante do meio ambiente, $\frac{dT}{dt}$ é a taxa segundo à qual a temperatura do corpo varia e k é uma constante de proporcionalidade que depende do material com que o corpo foi construído.

1 PELCZAR Jr., M. J. Et al. Microbiologia Conceitos e Aplicações, Makron Books, 2005.

Atividade H

I. A equação diferencial que representa a variação da velocidade é dada por

$v' + \frac{k}{m} v = -g$. Resolva-a para encontrar a solução geral.

$\frac{dv}{dt} + \frac{Kv}{m} = -g$

$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{kv}{m}$ $\boxed{b = \frac{K}{m}}$

$\frac{dv}{dt} = -g - bv$

$\frac{dv}{-g-bv} = \int dt$

$\frac{1}{b} \ln(-g-bv) = t + C$

$\cancel{\ln}(-g-bv) = -bt - bC$

$-g - bv = e^{-bt} \cdot C$

$-bv = C \cdot e^{-bt} + g$

$-v = \frac{C \cdot e^{-bt}}{b} + \frac{g}{b}$

$v = -\frac{C \cdot e^{-K/m\, t}}{K/m} - \frac{g}{K/m}$

$v = -\frac{m \cdot C \cdot e^{-K/m\, t}}{K} - \frac{g\,m}{K}$

$v = -\frac{m}{K}(Ce^{-K/m\, t} + g)$

Sol. geral

II. Considere que a barra tem uma massa de 70 kg, que $g = 9{,}8\, m/s^2$, $k = 13{,}72\, kg/s$ e encontre a solução particular. Lembre-se que a velocidade inicial é zero.

$V(0) = 0$

$0 = -\frac{m}{K}(C \cdot e^0 + g)$

$0 = C + g$

$C = -g$

$v = -\frac{m}{K}(-g \cdot e^{-K/m\, t} + g)$

$v = -\frac{m}{K} g (e^{-K/m\, t} - 1)$

$v = -\frac{70}{13{,}72} \cdot 9{,}8 \left(e^{-\frac{13{,}72}{70} \cdot t} - 1\right)$

$v = -50(e^{-0{,}196 \cdot t} - 1)$

III. Estime a velocidade limite da esfera.

A velocidade limite estimada da esfera é ~49,99 praticamente 50.

$t = 50$ $v = 49{,}99$

$t = 70$ $49{,}99$

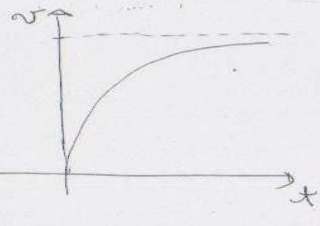
$t = 100$ $49{,}99$

IV. Qual a velocidade da esfera no instante $t = 10\,s$?

$v = -50(e^{-0{,}196 \cdot 10} - 1)$

$v \approx 42{,}957\, m/s$

V. Esboce o gráfico que representa a solução do problema proposto e justifique o traçado.



A velocidade aumenta em relação ao tempo. mas tende a se estabilizar em um valor maior que 0, que seria o valor limite da velocidade

Guia de Atividades 6

Nestas atividades, abordando o estudo de uma situação que envolve o movimento de objetos na vertical, objetivamos representá-la matematicamente com uma equação diferencial de segunda ordem e analisar o comportamento de possíveis soluções e respectivas taxas de variação levando em consideração as condições fornecidas, inclusive na forma gráfica.

Movimento de objetos na vertical, sob ação da gravidade e resistência do ar

Posição da partícula   v= variação da posição em rel. ao tempo

No guia de atividades 4 quando abordamos a situação que envolve queda de corpos (com resistência do ar) nos concentramos na velocidade de um corpo que cai. Agora vamos investigar, também, a variação da posição do corpo com o tempo e considerar que ele pode se mover tanto para cima quanto para baixo.

Vamos adotar um sistema de referência cujo eixo vertical aponta para cima. Assim, quando o corpo se move para cima sua velocidade é positiva e para baixo, negativa. A equação que rege a velocidade do corpo é:

$$\frac{dv}{dt} = -\left(g + \frac{K}{m} v\right)$$

$$\dot{v} + \frac{k}{m} v = -g \qquad \text{Eq. 1}$$

Seja $x(t)$ a posição do corpo do instante t. Das relações cinemáticas usuais temos: $v = \frac{dx}{dt}$ e $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$. Portanto, escrevendo a Eq. 1 em termos de x, teremos uma equação diferencial de segunda ordem:

2ª segunda ordem

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}\frac{dx}{dt} = -g \qquad \text{Eq. 2}$$

$$x'' + \frac{K}{m} x' = -g$$

Atividade A

Considere a esfera de arremesso de peso do guia 4, com massa igual a $7,2\,kg$ e que cai de um helicóptero parado no ar.

I. Considere $g = 9,8\,m/s^2$ e $k = 0,5\,kg/s$ e construa no Powersim um diagrama para explorar a velocidade nesta situação. Lembre-se que a velocidade inicial é zero.

II. Construa o gráfico da velocidade contra o tempo e analise se o módulo da taxa de variação da velocidade aumenta, diminui ou permanece sempre igual.

t	v	v'
0	0	0
1	-9,8	-9,12
2	-18,92	-8,49
3	-27,41	
4	-35,30	
5		

com o passar do tempo o módulo da taxa da variação da velocidade diminui

III. Construa no Powersim um diagrama para explorar a posição da esfera em função do tempo.

IV. Construa o gráfico da posição contra o tempo e analise se o módulo da taxa de variação da posição aumenta, diminui ou permanece sempre igual à medida que o tempo passa.

A taxa de variação da posição aumenta c/ o passar do tempo. Mas aumenta mais no início.

V. O que se alteraria no gráfico da posição contra o tempo se:

a) aumentarmos ou diminuirmos o valor do k?

aumenta o K - a taxa de variação diminui
diminui o K - a taxa de variação aumenta.

b) k fosse zero?

a taxa de variação aumentará

Atividade B

Considere agora, que a mesma esfera de arremesso de peso da atividade A, com massa igual a $7,2\,kg$, $g = 9,8\,m/s^2$ e $k = 0,5\,kg/s$ é lançada verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 100m/s.

I. Construa um diagrama no Powersim para explorar a posição da esfera em função do tempo nesta situação e construa o gráfico da posição contra o tempo. Quando trabalhamos com situações de lançamento, desprezando a resistência do ar, a curva que descreve a posição contra o tempo é uma parábola e no caso com resistência a curva também resultou numa parábola? Comente.

Nos dois casos o gráfico é uma parábola. Mas quando há resistência do ar a altura máxima é menor e no mesmo tempo a posição varia menos.

II. Qual é a altura máxima atingida pela esfera?

390,92

III. Em quanto tempo a esfera chega na altura máxima?

8 segundos.

IV. Em quanto tempo a esfera chega no chão?

Entre 17 e 18 segundos.

V. O tempo que a esfera leva para chegar à altura máxima é o mesmo que leva para retornar da altura máxima ao chão? Comente.

É praticamente a mesma, mas varia para mais de 1 à 1,5 segundos.

VI. Descreva o comportamento da taxa de variação da posição da esfera em função do tempo desde o momento que ela foi lançada até atingir o chão.

A taxa de variação aumenta até chegar nos 8 segundos, nos primeiros 4 seg. aumenta mais depois começa a aumentar menos, até atingir o limite máximo. Após os 8 seg. diminui, diminuindo inicialmente menos e depois cada vez mais rápido.

VII. Se k fosse muito maior que $0{,}5\,kg/s$ qual seria a alteração:

a) na altura máxima atingida pela esfera?

A altura máxima seria menor. 214,91

b) no tempo que leva para atingir a altura máxima?

O tempo seria menor. 5 seg.

c) no gráfico da posição contra o tempo? Se aproximou ou afastou mais de uma parábola?

A posição varia menos. Se afastou de uma parábola depois de um tempo [illegible] quase vira uma reta. Nos primeiros segundos a taxa de variação aumenta até a altura máxima, depois começa a diminuir (quase uma constante). Isso devido ao aumento de resistência.

VIII. Se k fosse zero, qual seria a alteração:

a) na altura máxima atingida pela esfera?

561,00 A altura aumenta

b) no tempo que leva para atingir a altura máxima?

leva 11 segundos, mais tempo.

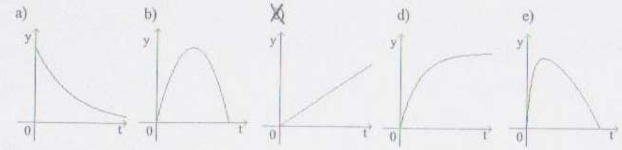
c) no gráfico da posição contra o tempo? Seria uma parábola?

Sim será uma parábola. Pois a taxa de variação de lançamento é praticamente a mesma de queda.

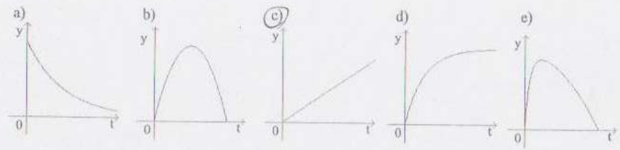
Atividade C

Considere a eq. dif. dada por $\frac{d^2y}{dt^2}+a\frac{dy}{dt}=b$. Com base nos resultados da atividades A e B, escolha o perfil mais adequado do gráfico de y versus t, nos seguintes casos:

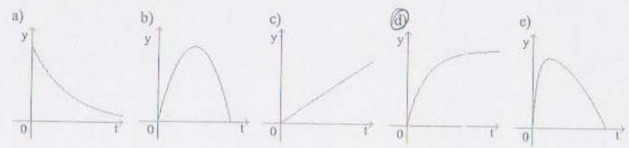
I. $a=b=0$



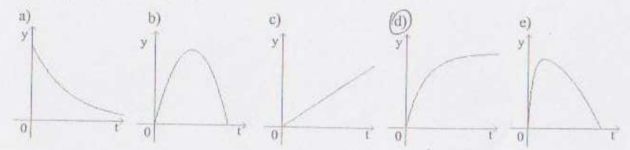
II. $a=0$ e $b=-10$



III. $a=1$ e $b=0$



IV. $a=1$ e $b=-10$



Guia de Atividades 6

Nestas atividades, abordando o estudo de uma situação que envolve o movimento de objetos na vertical, objetivamos representá-la matematicamente com uma equação diferencial de segunda ordem e analisar o comportamento de possíveis soluções e respectivas taxas de variação levando em consideração as condições fornecidas, inclusive na forma gráfica.

Movimento de objetos na vertical, sob ação da gravidade e resistência do ar

No guia de atividades 4 quando abordamos a situação que envolve queda de corpos (com resistência do ar) nos concentramos na velocidade de um corpo que cai. Agora vamos investigar, também, a variação da posição do corpo com o tempo e considerar que ele pode se mover tanto para cima quanto para baixo.

Vamos adotar um sistema de referência cujo eixo vertical aponta para cima. Assim, quando o corpo se move para cima sua velocidade é positiva e para baixo, negativa. A equação que rege a velocidade do corpo é:

$$\boxed{v' + \frac{k}{m} v = -g} \quad \text{Eq. 1}$$

Vel do corpo

$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{k}{m} v$

Seja $x(t)$ a posição do corpo do instante t. Das relações cinemáticas usuais temos:

$v = \frac{dx}{dt}$ e $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$. Portanto, escrevendo a Eq. 1 em termos de x, teremos uma equação diferencial de segunda ordem:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}\frac{dx}{dt} = -g} \quad \text{Eq. 2}$$

Eq diferencial de 2ª ordem

Atividade A → Esfera caindo de um helicóptero

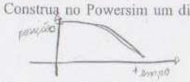
Considere a esfera de arremesso de peso do guia 4, com massa igual a $7{,}2\,kg$ e que cai de um helicóptero parado no ar.

I. Considere $g = 9{,}8\,m/s^2$ e $k = 0{,}5\,kg/s$ e construa no Powersim um diagrama para explorar a velocidade nesta situação. Lembre-se que a velocidade inicial é zero.

II. Construa o gráfico da velocidade contra o tempo e analise se o módulo da taxa de variação da velocidade aumenta, diminui ou permanece sempre igual.

O módulo da taxa de variação diminui

III. Construa no Powersim um diagrama para explorar a posição da esfera em função do tempo.



IV. Construa o gráfico da posição contra o tempo e analise se o módulo da taxa de variação da posição aumenta, diminui ou permanece sempre igual à medida que o tempo passa.

O módulo da taxa de variação da posição aumenta com o passar do tempo,

V. O que se alteraria no gráfico da posição contra o tempo se:

a) aumentarmos ou diminuirmos o valor do k?

* Se aumentarmos K, a taxa de variação da posição diminui
* " diminuirmos K, a taxa de variação da " aumenta

} com o passar do tempo

b) k fosse zero?

* A taxa de var da posição aumenta com o passar do tempo

Atividade B

Considere agora, que a mesma esfera de arremesso de peso da atividade A, com massa igual a $7{,}2\,kg$, $g = 9{,}8\,m/s^2$ e $k = 0{,}5\,kg/s$ é lançada verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 100m/s.

I. Construa um diagrama no Powersim para explorar a posição da esfera em função do tempo nesta situação e construa o gráfico da posição contra o tempo. Quando trabalhamos com situações de lançamento, desprezando a resistência do ar, a curva que descreve a posição contra o tempo é uma parábola e no caso com resistência a curva também resultou numa parábola? Comente.

Sim, se considerarmos a resistência do ar a velocidade é menor, em consequência a esfera leva mais tempo p/ chegar na posição final

II. Qual é a altura máxima atingida pela esfera?

$v = 0$

$h = 390\,m$

III. Em quanto tempo a esfera chega na altura máxima?

$t = 8\,s$

IV. Em quanto tempo a esfera chega no chão?

$17 < t < 18$

V. O tempo que a esfera leva para chegar à altura máxima é o mesmo que leva para retornar da altura máxima ao chão? Comente.

Não A queda é mais lenta porque a taxa de variação da veloci-
dade diminui, fazendo com que a velocidade aumente mais devagar,
ando em consideração que a velocidade na altura máxima é zero.

VI. Descreva o comportamento da taxa de variação da posição da esfera em função do tempo desde o momento que ela foi lançada até atingir o chão.

A taxa de variação da posição da esfera diminui até ficar
gativa. A partir daí, ela continua diminuindo, ficando negativa e
"mais e mais negativa"

VII. Se k fosse muito maior que $0,5\,kg/s$ qual seria a alteração:

a) na altura máxima atingida pela esfera?

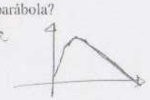
A altura máxima diminuiria

b) no tempo que leva para atingir a altura máxima?

Diminui bastante

c) no gráfico da posição contra o tempo? Se aproximou ou afastou mais de uma parábola?

O gráfico se afastou de ser uma parábola



VIII. Se k fosse zero, qual seria a alteração:

a) na altura máxima atingida pela esfera?

Altura máxima aumenta bastante

b) no tempo que leva para atingir a altura máxima?

Aumentou um pouco

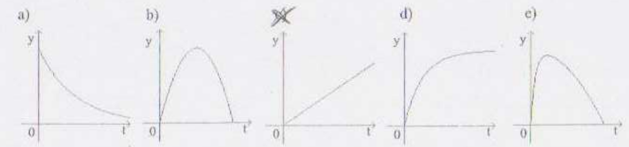
c) no gráfico da posição contra o tempo? Seria uma parábola?

Sim

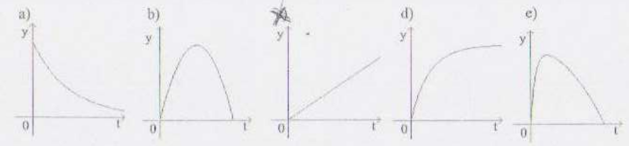
Atividade C

Considere a eq. dif. dada por $\frac{d^2y}{dt^2}+a\frac{dy}{dt}=b$. Com base nos resultados da atividades A e B, escolha o perfil mais adequado do gráfico de y versus t, nos seguintes casos:

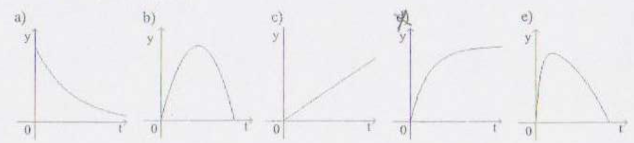
I. $a=b=0$



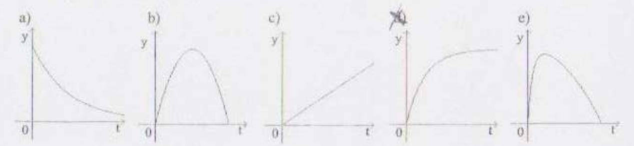
II. $a=0$ e $b=-10$



III. $a=1$ e $b=0$



IV. $a=1$ e $b=-10$



Guia de Atividades 6

Nestas atividades, abordando o estudo de uma situação que envolve o movimento de objetos na vertical, objetivamos representá-la matematicamente com uma equação diferencial de segunda ordem e analisar o comportamento de possíveis soluções e respectivas taxas de variação levando em consideração as condições fornecidas, inclusive na forma gráfica.

Movimento de objetos na vertical, sob ação da gravidade e resistência do ar

No guia de atividades 4 quando abordamos a situação que envolve queda de corpos (com resistência do ar) nos concentramos na velocidade de um corpo que cai. Agora vamos investigar, também, a variação da posição do corpo com o tempo e considerar que ele pode se mover tanto para cima quanto para baixo.

Vamos adotar um sistema de referência cujo eixo vertical aponta para cima. Assim, quando o corpo se move para cima sua velocidade é positiva e para baixo, negativa. A equação que rege a velocidade do corpo é:

$$v' + \frac{k}{m} v = -g \qquad \text{Eq. 1}$$

Seja $x(t)$ a posição do corpo do instante t. Das relações cinemáticas usuais temos:

$v = \frac{dx^{(\text{posição})}}{dt_{(\text{tempo})}}$ e $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$. Portanto, escrevendo a Eq. 1 em termos de x, teremos uma equação diferencial de segunda ordem:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}\frac{dx}{dt} = -g \quad \rightarrow \quad x'' + \frac{k}{m} x' = -g \qquad \text{Eq. 2}$$

Atividade A

Considere a esfera de arremesso de peso do guia 4, com massa igual a $7{,}2\,kg$ e que cai de um helicóptero parado no ar.

I. Considere $g = 9{,}8\,m/s^2$ e $k = 0{,}5\,kg/s$ e construa no Powersim um diagrama para explorar a velocidade nesta situação. Lembre-se que a velocidade inicial é zero.

II. Construa o gráfico da velocidade contra o tempo e analise se o módulo da taxa de variação da velocidade aumenta, diminui ou permanece sempre igual.

A taxa de variação da velocidade diminui com o passar do tempo, tendendo a zero

III. Construa no Powersim um diagrama para explorar a posição da esfera em função do tempo.

IV. Construa o gráfico da posição contra o tempo e analise se o módulo da taxa de variação da posição aumenta, diminui ou permanece sempre igual à medida que o tempo passa.

O módulo da taxa de variação da posição aumenta com o passar do tempo tendendo a 141 m/s, que é a velocidade máxima que a esfera atinge até chegar ao chão.

V. O que se alteraria no gráfico da posição contra o tempo se:

a) aumentarmos ou diminuirmos o valor do k?

Se aumentarmos o valor do k, a velocidade máxima da esfera diminui, assim o valor máximo da taxa de variação da posição também diminui e vice-versa

b) k fosse zero?

Se k=0, o valor máximo da velocidade aumenta porque a queda é constante, assim, o valor máximo da taxa de variação também aumenta.

Atividade B

Considere agora, que a mesma esfera de arremesso de peso da atividade A, com massa igual a $7{,}2\,kg$, $g = 9{,}8\,m/s^2$ e $k = 0{,}5\,kg/s$ é lançada verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 100m/s.

I. Construa um diagrama no Powersim para explorar a posição da esfera em função do tempo nesta situação e construa o gráfico da posição contra o tempo. Quando trabalhamos com situações de lançamento, desprezando a resistência do ar, a curva que descreve a posição contra o tempo é uma parábola e no caso com resistência a curva também resultou numa parábola? Comente.

Sim. Porque o que muda é que a velocidade e a altura diminuem mas o comportamento da curva é o mesmo

II. Qual é a altura máxima atingida pela esfera?

Altura máxima é 390,92 m

III. Em quanto tempo a esfera chega na altura máxima?

t = 8s

Guia de Atividades 6

Nestas atividades, abordando o estudo de uma situação que envolve o movimento de objetos na vertical, objetivamos representá-la matematicamente com uma equação diferencial de segunda ordem e analisar o comportamento de possíveis soluções e respectivas taxas de variação levando em consideração as condições fornecidas, inclusive na forma gráfica

Movimento de objetos na vertical, sob ação da gravidade e resistência do ar

No guia de atividades 4 quando abordamos a situação que envolve queda de corpos (com resistência do ar) nos concentramos na velocidade de um corpo que cai. Agora vamos investigar, também, a variação da posição do corpo com o tempo e considerar que ele pode se mover tanto para cima quanto para baixo.

Vamos adotar um sistema de referência cujo eixo vertical aponta para cima. Assim, quando o corpo se move para cima sua velocidade é positiva e para baixo, negativa. A equação que rege a velocidade do corpo é:

$$\dot{v}+\frac{k}{m}v=-g \qquad \text{Eq. 1}$$

Seja $x(t)$ a posição do corpo do instante t. Das relações cinemáticas usuais temos: $v=\frac{dx}{dt}$ e $a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$. Portanto, escrevendo a Eq. 1 em termos de x, teremos uma equação diferencial de segunda ordem:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}\frac{dx}{dt}=-g \quad \Rightarrow \ddot{x}+\frac{k}{m}\dot{x}=-g \qquad \text{Eq. 2}$$

Atividade A

Considere a esfera de arremesso de peso do guia 4, com massa igual a $7{,}2\,kg$ e que cai de um helicóptero parado no ar.

I. Considere $g=9{,}8\,m/s^2$ e $k=0{,}5\,kg/s$ e construa no Powersim um diagrama para explorar a velocidade nesta situação. Lembre-se que a velocidade inicial é zero.

II. Construa o gráfico da velocidade contra o tempo e analise se o módulo da taxa de variação da velocidade aumenta, diminui ou permanece sempre igual.

A taxa de variação da velocidade diminui com o passar do tempo, tendendo a zero

III. Construa no Powersim um diagrama para explorar a posição da esfera em função do tempo.

IV. Construa o gráfico da posição contra o tempo e analise se o módulo da taxa de variação da posição aumenta, diminui ou permanece sempre igual à medida que o tempo passa.

O módulo da taxa de variação da posição aumenta com o passar do tempo tendendo a 141 m/s, que é a velocidade máxima que a esfera atinge até chegar ao chão.

V. O que se alteraria no gráfico da posição contra o tempo se:

a) aumentarmos ou diminuirmos o valor do k?

Se aumentarmos o valor do k, a velocidade máxima da esfera diminui, assim, o valor máximo da taxa de variação da posição também diminui e vice-versa

b) k fosse zero?

Se k=0, o valor máximo da velocidade aumenta porque a caída é constante, assim, o valor máximo da taxa de variação também aumenta.

Atividade B

Considere agora, que a mesma esfera de arremesso de peso da atividade A, com massa igual a $7{,}2\,kg$, $g=9{,}8\,m/s^2$ e $k=0{,}5\,kg/s$ é lançada verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 100m/s.

I. Construa um diagrama no Powersim para explorar a posição da esfera em função do tempo nesta situação e construa o gráfico da posição contra o tempo. Quando trabalhamos com situações de lançamento, desprezando a resistência do ar, a curva que descreve a posição contra o tempo é uma parábola e no caso com resistência a curva também resultou numa parábola? Comente.

Sim. Porque o que muda é que a velocidade e a altura diminuem mas o comportamento da curva é o mesmo

II. Qual é a altura máxima atingida pela esfera?

Altura máxima é 390,92 m

III. Em quanto tempo a esfera chega na altura máxima?

$t = 8s$

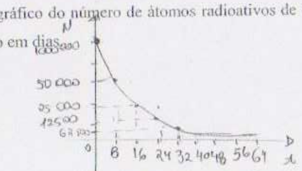
I. Quantos átomos radioativos haverá na amostra ao final de 64 dias?

Haverá após 64 dias 3906.

II. Quantos dias demorarão para que haja em torno de 30 átomos radioativos?

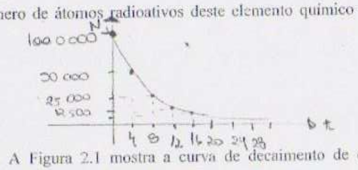
120 dias.

III. Esboce um gráfico do número de átomos radioativos de Iodo-131 contidas na amostra em função do tempo, medido em dias.



IV. É correto afirmar que o número de átomos radioativos da amostra que decaem por dia é constante? (Dizer que um átomo radioativo decaiu significa dizer que se transmutou em outro, porque emitiu partícula ou radiação, deixando de ser radioativo). Não, pois varia de acordo com o número total da amostra anterior, e este número da amostra está variando sempre.

V. Suponha que o exame clínico fosse realizado com um elemento químico cuja meia vida fosse de 4 dias e que o número inicial de átomos radioativos fosse o mesmo (1.000.000). Esboce um gráfico do número de átomos radioativos deste elemento químico em função do tempo, medido em dias.



VI. A Figura 2.1 mostra a curva de decaimento de certa quantidade de um elemento radioativo em função do tempo.

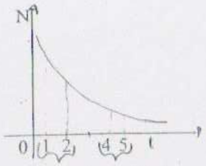


Figura 2.1. Decaimento radioativo

Em qual intervalo de tempo, $1<t<2$ ou $4<t<5$, o decréscimo de átomos radioativos é maior? Explique. Entre $1<t<2$, porque o valor de átomos na amostra é maior, então reduzirá a metade e o valor reduzido será maior. Se tratando de um gráfico de meia parábola então as variações iniciais são maiores que as finais.

Atividade B

Como podemos construir, no *Powersim*, a situação descrita na atividade A?

Para fazer o diagrama da situação precisamos ter o valor inicial e a taxa de decrescimento k, que em situações de meia-vida é chamada de constante de decaimento radioativo.

I. Construa um diagrama no *Powersim* considerando $k=0.1/dias$ e depois verifique as equações que o programa gerou.

Você encontrará a equação $taxa = n\_atomos * k$

A taxa significa a taxa de variação instantânea que pode ser descrita pela derivada, portanto, temos:

derivada de at. em relação ao tempo.

$$\frac{dN}{dt}=kN \quad \text{Eq. 1}$$

eq. diferencial

onde N representa o número de átomos e $\frac{dN}{dt}$ a taxa de variação do número de átomos em função do tempo. A Eq.1 informa que **a taxa de variação do número de átomos em relação ao tempo é proporcional ao número de átomos existentes no instante t.**

A Eq. 1 é chamada de uma equação diferencial, porque envolve a derivada de uma função desconhecida (N). A solução desta equação diferencial é

$$N=N_0 \cdot e^{-kt} \quad \text{Eq. 2}$$

onde N_0 é a quantidade inicial de átomos radioativos considerado.

Isto pode ser provado analiticamente, lembrando a derivada de uma exponencial, pois se

$N' = -kN_0e^{-kt}$

$N=N_0 \cdot e^{-kt}$, $\frac{dN}{dt}=-kN_0e^{-kt}=-kN$, que é exatamente a Eq. 1.

Sabendo-se que a solução da equação diferencial Eq. 1 tem a forma dada na Eq. 2, podemos obter a constante de decaimento k de um modo simples. Basta lembrar que, por definição, meia-vida é o tempo necessário para que o número de átomos radioativos decaia à metade. Vamos representar a meia-vida por τ. Usando a Eq. 1 obtemos

$$\frac{N}{N_0}=\frac{1}{2}=e^{(-k\tau)}$$

$N = N_0 e^{kt}$

$500000 = 1000000\, e^{k \cdot 8}$

$\frac{5}{10} = e^{k8}$

$\frac{1}{2} = e^{k8}$

$\ln \frac{1}{2} = \ln e^{8k}$

Calculando o logaritmo natural dos dois lados desta equação, temos: $\ln \frac{1}{2} = 8k(\ln e)$

$$\ln(0{,}5)=\boxed{-k\tau} \quad \text{ou} \quad k=\frac{-\ln(0{,}5)}{\tau}=\frac{0{,}69315}{\tau} \quad \text{Eq. 3}$$

$\frac{\ln 0{,}5}{8} = k$

$k = -0{,}0866$

supõe que as taxas de nascimento e morte são constantes, a população irá (de)crescer exponencialmente, ou seja, o modelo malthusiano descreve como as populações crescem ou decrescem quando nada mais acontece (ausência de quaisquer fatores perturbadores) e mesmo sabendo que existem estes fatores, o modelo nos dá uma descrição razoável para o crescimento populacional dentro de seu contexto de validade.

fel.

I. De acordo com o censo realizado em 2000, a taxa de crescimento anual da população do RS era de aproximadamente 1,2%. Considerando que o RS estava com 10.187.798[3] pessoas, construa, no *Powersim*, um diagrama para representar a situação.(Dica: considere o ano de 2000 como tempo 0).

ok

fel. **II.** Construa o gráfico da população contra o tempo, em anos e verifique o tamanho da população do RS em 2020, se continuar com este crescimento.

será de 12 951 229,6 pessoas.

fel. **III.** Construa o gráfico da taxa de variação da população $\left(\frac{dP}{dt}\right)$ em relação à população (P). Que curva você obteve? Como você justifica ou interpreta esta curva?

Se obteve uma reta, isto significa que a taxa de variação não varia.

fel. **IV.** Construa o gráfico de $\frac{dP}{dt}$ em relação ao tempo t. Que curva você obteve? Como você justifica ou interpreta esta curva? Uma meia parábola crescente, a medida que o tempo aumenta a taxa aumenta também.

V. Em 1960, a população do RS era de 5.366.720 pessoas. Em 2000 este número praticamente dobrou, se continuasse com esta taxa de crescimento, qual seria a população do RS em 2040?

1960 —— 5366720
2000 —— 10187798
2040 —— 15008876

1960 —— 5366720
2000 —— 10733440
2040 —— 16100160

3 www.ibge.gov.br

Atividade D

As reações químicas de primeira ordem podem ser descritas pela equação diferencial $\frac{dC_A}{dt} = -kC_A$, na qual C_A é a concentração do reagente A, k a constante da reação (depende da natureza da reação e da temperatura) e t o tempo decorrido desde o início da reação.

Considerando a decomposição $2N_2O_5(g) \rightarrow 4NO_2(g) + O_2(g)$, a tabela abaixo[2] apresenta a concentração de pentóxido de nitrogênio, N_2O_5, em relação ao tempo, a uma temperatura de $67°C$.

Tempo (min)	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*8*	*10*
Concentração de N_2O_5 *(mol/l)*	*0,160*	*0,113*	*0,080*	*0,056*	*0,040*	[illegible]	0,009	0,007

I. A equação diferencial desta situação é a mesma da atividade A, portanto a solução geral também será a mesma. Usando as condições fornecidas na tabela, encontre a solução particular.

$N = C \cdot e^{kt}$ Solução Geral

$0,16 = C \cdot e^{k0}$

$C = 0,16$

$0,113 = 0,16 \cdot e^{k \cdot 1}$

$\ln 0,7 = \ln e^{k1}$

$K = -0,347$

$N = 0,16 \cdot e^{-0,347t}$ Solução particular

II. Preencha a tabela com a concentração de N_2O_5 após 5, 8 e 10 minutos.

$N = 0,16 \cdot e^{-0,347(5)}$ $N = 0,16 \cdot e^{-0,347(8)}$ $N = 0,16 \cdot e^{-0,347(10)}$

N = 0,02[illegible] mol/l N = 0,009 mol/l N = 0,007 mol/l

III. Calcule o tempo necessário para a concentração cair de 0,160 para 0,100 *mol/l*.

$0,1 = 0,16 \cdot e^{-0,347t}$

$\ln 0,625 = \ln e^{-0,347t}$

[illegible]

t = 1,35 min

IV. Qual a unidade de medida do *k* nesta situação?

K = 0,347/min

2 MASTERTON, W.L, et. al. Princípios de Química, LTC Editora, 1990.

Por exemplo, uma xícara de café sobre a mesa da cozinha esfria a uma taxa proporcional à diferença de temperatura entre o café e o ar que o cerca, então:

I. A medida que o café esfria, a taxa de resfriamento diminui, aumenta ou permanece sempre igual? Explique.

DIMINUI, POIS A MEDIDA QUE O CAFÉ ESFRIA E APROXIMA-SE DA TEMPERATURA AMBIENTE A VARIAÇÃO DA TEMPERATURA DO CAFÉ EM RELAÇÃO À TEMPERATURA AMBIENTE TENDE A ZERO, PORTANTO A TAXA DE RESFRIAMENTO DIMINUI NESTE PROCESSO. NO COMEÇO ESTA TAXA É ALTA POIS HÁ UMA GRANDE DIFERENÇA DE TEMPERATURA, QUANDO AS TEMPERATURAS APROXIMAM-SE A TAXA CAI.

II. A longo prazo, a temperatura do café aproxima-se de zero? Explique.

NÃO. A TEMPERATURA LIMITE DE RESFRIAMENTO DO CAFÉ É A TEMPERATURA AMBIENTE. O PROCESSO DE RESFRIAMENTO CONSISTE EM TROCA DE CALOR ENTRE O CAFÉ E O AMBIENTE CESSANDO QUANDO O CAFÉ CHEGAR MUITO PRÓXIMO DA TEMPERATURA AMBIENTE.

III. A longo prazo, a taxa de resfriamento tende a zero? Explique.

SIM. INICIALMENTE A VARIAÇÃO DO CALOR DO CAFÉ EM RELAÇÃO AO AMBIENTE É ELEVADA DIMINUINDO CONFORME A TEMPERATURA DO CAFÉ APROXIMA-SE DA TEMPERATURA AMBIENTE, PORTANTO ESSA VARIAÇÃO A LONGO PRAZO TENDE A ZERO.

Suponha que a temperatura de uma xícara de café recém preparado seja de $90°C$. Cinco minutos mais tarde a temperatura já diminuiu para $60°C$ numa sala à temperatura constante $20°C$.

IV. Sabendo que a equação diferencial da variação da temperatura é separável, resolva-a e escreva a solução particular para a situação apresentada.

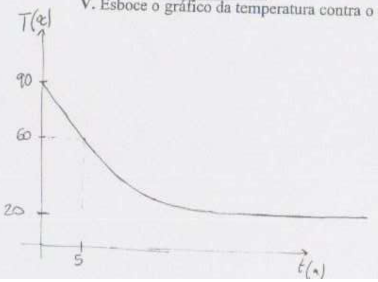
$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m) \rightarrow \frac{dT}{(T-T_m)} = k\,dt \therefore \frac{1}{(T-T_m)}dT = k\,dt \therefore \int \frac{1}{(T-T_m)}dT = \int k\,dt \Rightarrow$

$\ln(T - T_m) = kt + C \rightarrow e^{\ln(T-T_m)} = e^{kt + T_0} \rightarrow \boxed{T = T_0 . e^{kt} + T_m} \rightarrow$ SOL. GERAL

$T_m = 20°C$ $\quad 60 - 20 = 90 . e^{k5} \rightarrow \frac{40}{90} = e^{k5} \Rightarrow 0{,}4444 = e^{k5} \Rightarrow \frac{\ln(0{,}4444)}{5} = k \rightarrow k = -0{,}162186$

$\boxed{T = 90 . e^{-0{,}162186 . 5} + 20} \rightarrow$ SOLUÇÃO PARTICULAR

V. Esboce o gráfico da temperatura contra o tempo.



T	t
90°	0
60°	5

Atividade D

As reações químicas de primeira ordem podem ser descritas pela equação diferencial $\frac{dC_A}{dt} = -kC_A$, na qual C_A é a concentração do reagente A, k a constante da reação (depende da natureza da reação e da temperatura) e t o tempo decorrido desde o início da reação.

Considerando a decomposição $2N_2O_5(g) \rightarrow 4NO_2(g) + O_2(g)$, a tabela abaixo[2] apresenta a concentração de pentóxido de nitrogênio, N_2O_5, em relação ao tempo, a uma temperatura de $67°C$.

Tempo (min)	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*8*	*10*
Concentração de N_2O_5 (mol/l)	***0,160***	***0,113***	***0,080***	***0,056***	***0,040***	0,028	0,0099	0,0049

I. A equação diferencial desta situação é a mesma da atividade A, portanto a solução geral também será a mesma. Usando as condições fornecidas na tabela, encontre a solução particular.

$C = C_0 . e^{+kt} \rightarrow 0{,}113 = 0{,}160 . e^{+k1} \rightarrow \frac{0{,}113}{0{,}160} = e^{k} \rightarrow 0{,}70625 = e^{k} \Rightarrow$

$\ln(0{,}70625) = k \rightarrow \boxed{k = -0{,}347785}$

$\boxed{C = 0{,}16e^{-0{,}347785t}} \rightarrow$ SOLUÇÃO PARTICULAR

II. Preencha a tabela com a concentração de N_2O_5 após 5, 8 e 10 minutos.

$t = 5 \rightarrow C = 0{,}16e^{-0{,}347785 . 5} \rightarrow C = 0{,}028$ mol/l

$t = 8 \rightarrow C = 0{,}16e^{-0{,}347785 . 8} \rightarrow C = 0{,}0099$ mol/l

$t = 10 \rightarrow C = 0{,}16e^{-0{,}347785 . 10} \rightarrow C = 0{,}0049$ mol/l

III. Calcule o tempo necessário para a concentração cair de 0,160 para 0,100 *mol/l*.

$0{,}1 = 0{,}16e^{-0{,}347785t} \rightarrow \frac{0{,}1}{0{,}16} = e^{-0{,}347785t} \rightarrow \ln(0{,}625) = e^{-0{,}347785t}$

$\frac{-0{,}47}{-0{,}347785} = t \rightarrow \boxed{t = 1{,}35\,s}$

IV. Qual a unidade de medida do k nesta situação?

$\boxed{k = \frac{mol/l}{s}}$

2 MASTERTON, W.L, et. al. Princípios de Química, LTC Editora, 1990.

ANEXO 3

Algunas actividades escaneados con las respostas de los alumnos de la Maestría

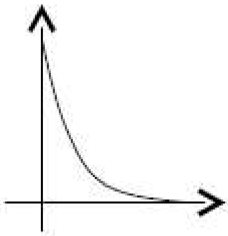
ALUNO 1

Atividades realizadas com o software Powersim
Aula 5 - Tópicos Avançados de Matemática
(Dia 23/maio/2008)

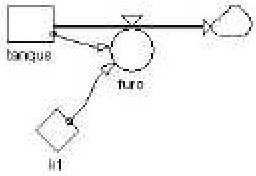
Atividades 1 - Atividade A

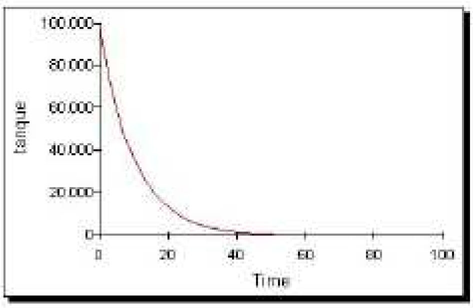
Considere um tanque com uma quantidade inicial de 100.000 litros de água, em que há um furo na base por onde, a cada hora, sai 10% da água existente no tanque.

I. Esboce o gráfico da quantidade de água no tanque em função do tempo.



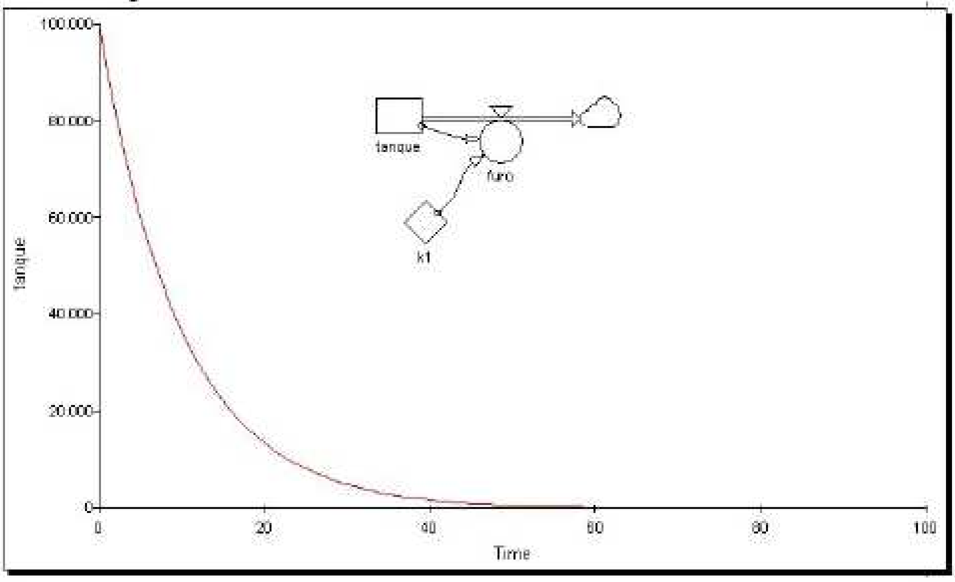
II. Construa, com auxílio do *software* Powersim, um diagrama (conforme Figura 1.4) para representar esta situação. Note que o furo na base é representado por uma torneira que retira água do tanque.





Time	tanque	furo
0	100.000,00	10.000,00
1	90.483,75	9.048,38
2	81.873,09	8.187,31
3	74.081,84	7.408,18
4	67.032,03	6.703,20
5	60.653,09	6.065,31
6	54.881,19	5.488,12
7	49.658,56	4.965,86
8	44.932,93	4.493,29
9	40.657,00	4.065,70
10	36.787,98	3.678,80
11	33.287,14	3.328,71
12	30.119,45	3.011,95
13	27.253,21	2.725,32
14	24.659,73	2.465,97
15	22.313,06	2.231,30
16	20.189,68	2.018,97
17	18.268,38	1.826,84
18	16.529,92	1.652,99
19	14.956,89	1.495,69
20	13.533,56	1.353,36
21	12.246,57	1.224,57

III. Construa o gráfico do item I com auxílio do Powersim.

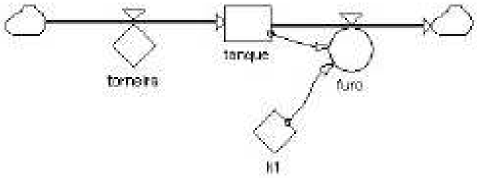


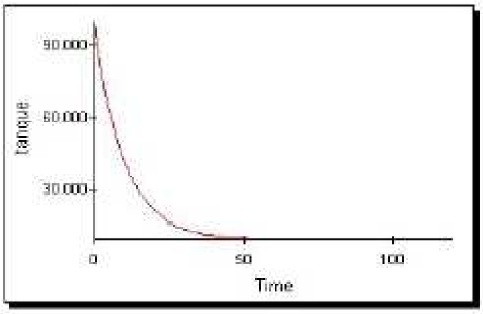
IV. Se considerarmos o tempo em horas, é correto afirmar que a quantidade de água que sai do tanque a cada hora é a mesma? Justifique sua resposta.

Time	tanque	furo
0	100.000,00	10.000,00
1	90.483,75	9.048,38
2	81.873,09	8.187,31
3	74.081,84	7.408,18
4	67.032,03	6.703,20
5	60.663,09	6.065,31
6	54.881,19	5.488,12
7	49.658,56	4.965,86
8	44.932,93	4.493,29
9	40.657,00	4.065,70
10	36.787,98	3.678,80
11	33.287,14	3.328,71
12	30.119,45	3.011,95
13	27.253,21	2.725,32
14	24.659,73	2.465,97
15	22.313,05	2.231,30
16	20.189,68	2.018,97
17	18.268,38	1.826,84
18	16.529,92	1.652,99
19	14.956,89	1.495,69
20	13.533,55	1.353,36
21	12.245,67	1.224,57

Justificativa: Não, a quantidade de água que sai do tanque varia de acordo com a quantidade de água que está no interior do tanque. A água que sai do tanque equivale a 10% do que temos dentro do mesmo.

V. Acrescente, no diagrama do Powersim, uma torneira colocando água no tanque a um fluxo de 1.000 *litros/hora*. O que acontece com a quantidade de água no tanque a medida que o tempo passa?





Time	tanque	furo	torneira
0	100.000,00	10.000,00	1.000,00
1	91.436,38	9.143,54	1.000,00
2	83.685,78	8.368,58	1.000,00
3	76.673,66	7.667,37	1.000,00
4	70.328,83	7.032,88	1.000,00
5	64.587,78	6.458,76	1.000,00
6	59.393,07	5.939,31	1.000,00
7	54.692,71	5.469,27	1.000,00
8	50.439,84	5.043,96	1.000,00
9	46.591,30	4.659,13	1.000,00
10	43.109,18	4.310,92	1.000,00
11	39.958,43	3.995,84	1.000,00
12	37.107,51	3.710,75	1.000,00
13	34.527,89	3.452,79	1.000,00
14	32.193,75	3.219,38	1.000,00
15	30.081,74	3.008,17	1.000,00
16	28.170,71	2.817,07	1.000,00
17	26.441,54	2.644,15	1.000,00
18	24.876,92	2.487,69	1.000,00
19	23.461,20	2.346,12	1.000,00
20	22.180,20	2.218,02	1.000,00
21	21.021,10	2.102,11	1.000,00
22	19.972,30	1.997,23	1.000,00

Atividades 2

Atividade A

Consideremos o caso do iodo-131, utilizado nos exames de tiróide, cuja meia-vida é de oito dias. Isto significa que o número de núcleos instáveis, capazes de emitir partículas ou radiação, cairá à metade em 8 dias, e novamente à metade após mais 8 dias e assim por diante. Considerando que no instante inicial existam N=1.000.000 átomos radioativos em certa amostra...

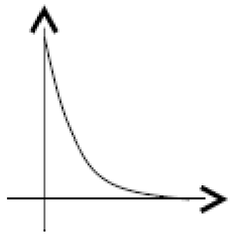
I. Quantos átomos radioativos haverá na amostra ao final de 64 dias?

Pela tabela do exercício, verifica-se que haverá 3906 átomos radioativos na amostra ao final de 64 dias.

II. Quantos dias demorarão para que haja em torno de 30 átomos radioativos?

Dando continuidade aos dados presentes na tabela do exercício, verifica-se que: 112 dias = 61 átomos radioativos presentes; 120 dias = 30,5 átomos radioativos presentes. Logo, serão necessários em torno de 120 dias para que haja em torno de 30 átomos radioativos.

III. Esboce um gráfico do número de átomos radioativos de Iodo-131 contidas na amostra em função do tempo, medido em dias.



IV. É correto afirmar que o número de átomos radioativos da amostra que decaem por dia é constante? (Dizer que um átomo radioativo decaiu significa dizer que se transmutou em outro, porque emitiu partícula ou radiação, deixando de ser radioativo).

Não, a taxa de variação é constante (meia-vida a cada 8 dias), mas o número de átomos radioativos da amostra que decaem varia conforme a quantidade inicial de átomos presentes na amostra, sendo sempre igual a metade da quantidade antecessora (no intervalo de 8 dias).

V. A Figura 2.1 mostra a curva de decaimento de certa quantidade de um elemento radioativo em função do tempo.

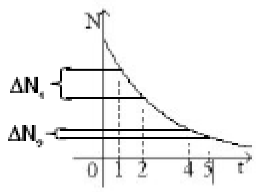


Figura 2.1. Decaimento radioativo

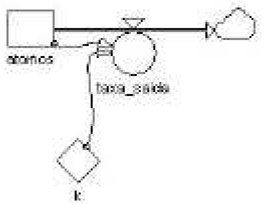
Em qual intervalo de tempo, $1<t<2$ ou $4<t<5$, o decréscimo de átomos radioativos é maior? Explique.

Conforme representação na figura ao lado, a $\Delta N_1 > \Delta N_2$. A taxa de variação é constante (meia-vida a cada 8 dias), mas o número de átomos radioativos da amostra que decaem varia conforme a quantidade inicial de átomos presentes na amostra, sendo sempre igual a metade da quantidade antecessora (no intervalo de 8 dias).

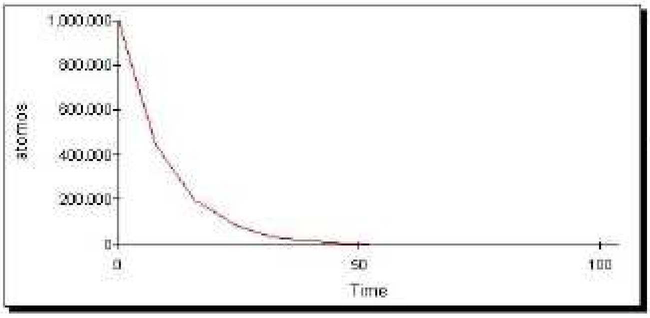
Atividade B

Como podemos construir, no *Powersim*, a situação descrita na atividade A?

I. Construa um diagrama no *Powersim* considerando k=0.1/ dias e depois verifique as equações que o programa gerou.



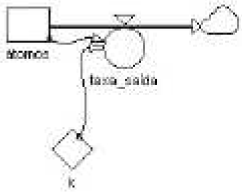
Time	atomos
0	1.000.000,00
8	449.719,47
16	202.247,60
24	90.954,68
32	40.904,09
40	18.395,37
48	8.272,75
56	3.720,42
64	1.673,14
72	752,45
80	338,39
88	152,18
96	68,44
104	30,78



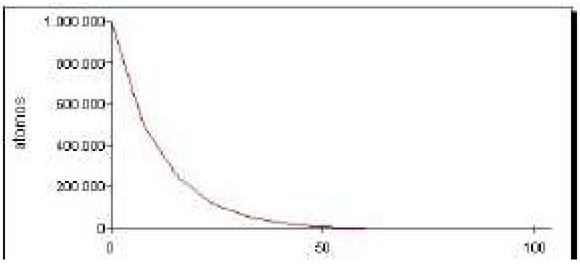
Então, se a meia-vida do iodo-131 é T=8 dias , a constante de decaimento dada pela Eq.3 (ln(0,5)=k.T) é k=−0,0866/ dias.

II. Use a constante de decaimento encontrada e construa um diagrama no *Powersim* para representar a atividade A.

III. Gere a tabela e o gráfico da atividade anterior e compare os resultados com os da atividade A.



Time	atomos
0	1.000.000,00
8	500.220,98
16	250.221,03
24	125.165,81
32	62.610,56
40	31.319,12
48	15.666,48
56	7.836,70
64	3.920,08
72	1.960,91
80	980,89
88	490,66
96	245,44
104	122,77

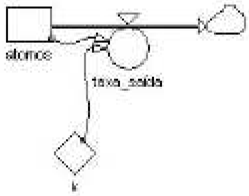


Atividade C

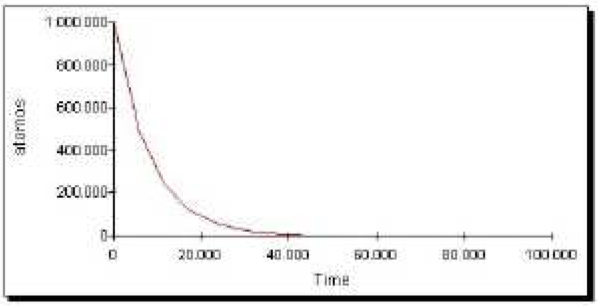
I. Estime a idade do osso. Justifique sua resposta.

Aproximadamente, 13500 anos. Se o osso encontrado apresenta 20% da quantidade de C^{14} e partindo-se de um osso com quantidade inicial de 100 átomos radioativos, então se completam duas meias-vidas (50 e 25) e uma parte da próxima (0,35). Ou seja, 2,35 x 5730 = 13465,5 anos.

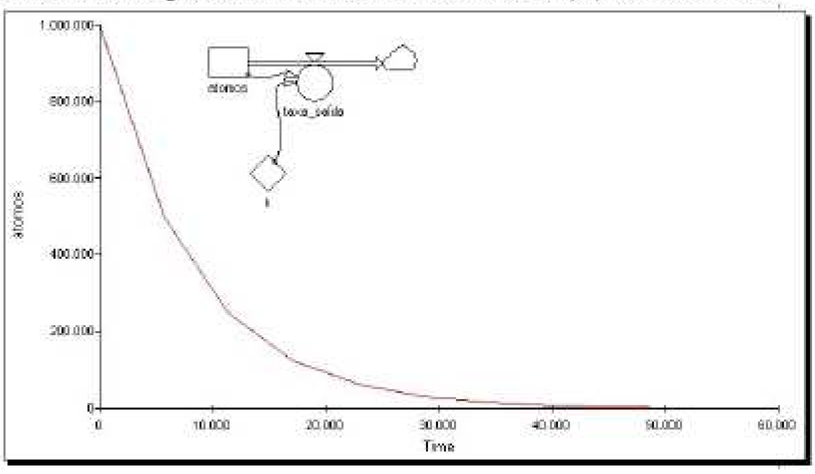
II. Conforme o texto, a meia-vida do C^{14} é T=5730 anos. Use este valor na Eq. 3 (**ln(0,5)=k.T**) para determinar a constante de decaimento do C^{14} . Considere uma quantidade inicial de 1.000.000 átomos radioativos, represente a situação no *Powersim*, gere a tabela do número de átomos em função do tempo e verifique se a sua estimativa do item I está adequada aos resultados da tabela.



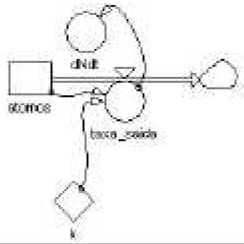
Time	atomos
0	1.000.000,00
5.730	500.220,98
11.460	250.221,03
17.190	125.165,81
22.920	62.610,56
28.650	31.319,12
34.380	15.666,48
40.110	7.836,70
45.840	3.920,08
51.570	1.960,91
57.300	980,89
63.030	490,66
68.760	245,44
74.490	122,77
80.220	61,41
85.950	30,72
91.680	15,37
97.410	7,69

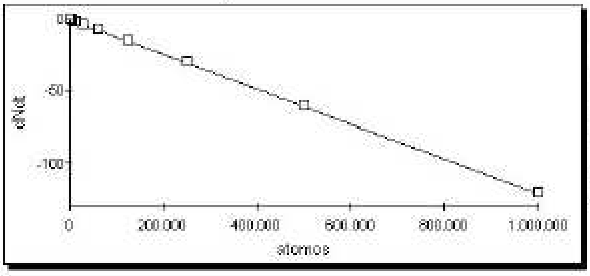


III. Faça no *Powersim* o gráfico do número de átomos contra o tempo, medido em anos.



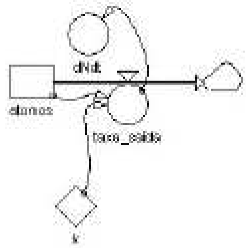
IV. Faça no *Powersim* o gráfico da taxa de variação do número de átomos (dN/dt) em relação ao número de átomos (N). Que curva você obteve? Como você justifica ou interpreta esta curva?

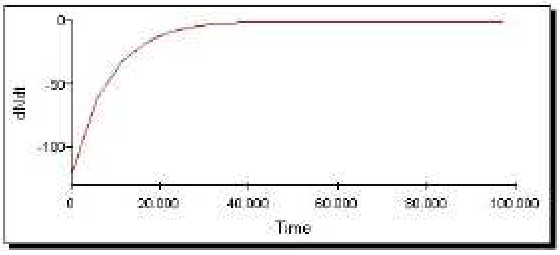




Time	atomos	dNdt
0	1.000.000,00	-120,97
5.730	500.220,98	-60,51
11.460	250.221,03	-30,27
17.190	125.165,81	-15,14
22.920	62.610,56	-7,57
28.650	31.319,12	-3,79
34.380	15.666,48	-1,90
40.110	7.836,70	-0,948
45.840	3.920,08	-0,474
51.570	1.960,91	-0,237
57.300	980,89	-0,119
63.030	490,66	-0,0594
68.760	245,44	-0,0297
74.490	122,77	-0,0149
80.220	61,41	-0,00743
85.950	30,72	-0,00372
91.680	15,37	-0,00186
97.410	7,69	-0,00093

V. Faça no *Powersim* o gráfico de dN/dt em relação ao tempo t. Que curva você obteve? Como você justifica ou interpreta esta curva?





Time	atomos	dNdt
0	1.000.000,00	-120,97
5.730	500.220,98	-60,51
11.460	250.221,03	-30,27
17.190	125.165,81	-15,14
22.920	62.610,56	-7,57
28.650	31.319,12	-3,79
34.380	15.666,48	-1,90
40.110	7.836,70	-0,948
45.840	3.920,08	-0,474
51.570	1.960,91	-0,237
57.300	980,89	-0,119
63.030	490,66	-0,0594
68.760	245,44	-0,0297
74.490	122,77	-0,0149
80.220	61,41	-0,00743
85.950	30,72	-0,00372
91.680	15,37	-0,00186
97.410	7,69	-0,00093

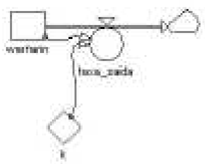
Atividade D

I. Expresse matematicamente a frase em negrito do parágrafo anterior (**"...quantidade de uma droga na corrente sangüínea tende a decrescer a uma taxa proporcional à quantidade de droga presente."**).

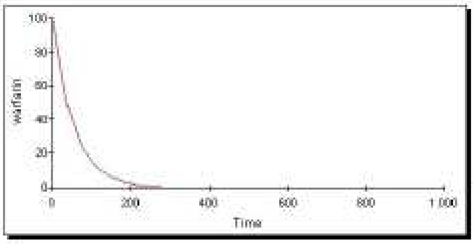
$$\frac{d_N}{d_t} = kN \text{, sendo } k < 0.$$

II. *Warfarin* é uma droga utilizada como anticoagulante, sua meia-vida é de 37 horas. Após interromper o uso da droga, a quantidade que permanece no corpo do paciente diminui a uma taxa que é proporcional à quantidade restante. Quantas horas são necessárias para que o nível da droga no corpo seja reduzido a 25% do nível original?

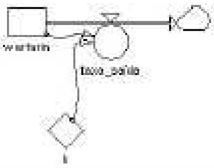
Se a meia-vida é 37 horas, 25% da quantidade de *Warfarin* será o nível da droga no organismo depois de 74 horas. Assim: 0h=100%; 37h=50%; 74h=25%. Utilizando o *PowerSim*:



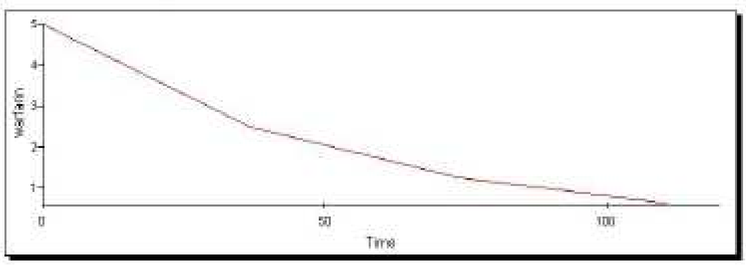
Time	warfarin
0	100,00
37	50,02
74	25,02
111	12,52
148	6,26
185	3,13
222	1,57
259	0,786
296	0,394
333	0,197
370	0,0989
407	0,0496
444	0,0248
481	0,0124
518	0,00624
555	0,00313
592	0,00157
629	0,000786



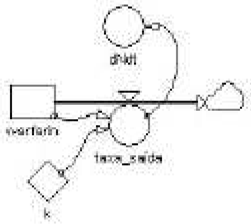
III. Considerando que a quantidade inicial seja de 5 miligramas construa, no *Powersim*, o diagrama da situação e faça o gráfico da quantidade de *Warfarin* no corpo do paciente em função do tempo, desde a interrupção do uso da droga até 5 dias após. **(5 dias = 120h)**



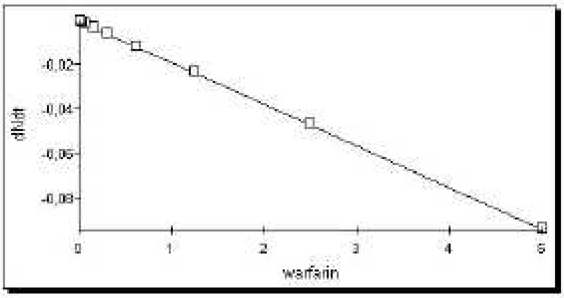
Time	warfarin
0	5,00
37	2,50
74	1,25
111	0,627



IV. Construa no *Powersim* uma tabela de valores e verifique se a sua resposta da questão I confere.

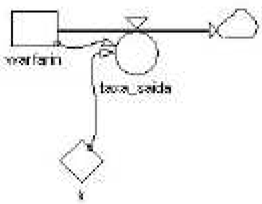


Time	warfarin	dNdt
0	5,00	-0,0937
37	2,50	-0,0469
74	1,25	-0,0234
111	0,627	-0,0117
148	0,314	-0,00589
185	0,158	-0,00295
222	0,0789	-0,00148
259	0,0396	-0,000741
296	0,0198	-0,000371

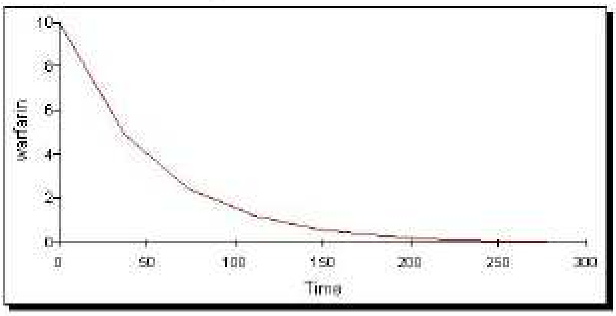


V. Se dobrarmos o valor da quantidade inicial, quanto tempo levará para que o nível do medicamento no corpo se reduza a metade? E a 25% da quantidade inicial?

Se a meia-vida é 37 horas, 50% (metade) da quantidade de *Warfarin* será o nível da droga no organismo depois de 37 horas e 25% depois de 74 horas. Utilizando o *PowerSim*:



Time	warfarin
0	10,00
37	5,00
74	2,50
111	1,25
148	0,627
185	0,314
222	0,158
259	0,079
296	0,0396



Atividade E

O tempo de geração é o intervalo de tempo requerido para que a população em uma cultura de microorganismos duplique em número. A bactéria *Mycobacterium tuberculosis*, causadora da tuberculose, possui um tempo de geração de aproximadamente 14 horas.

I. Sabendo que uma cultura de bactérias cresce a uma taxa que é proporcional a quantidade de bactérias existentes no instante t, escreva uma equação diferencial que represente a situação.

$$\frac{d_N}{d_t} = kN \text{, sendo } k > 0.$$

II. Determine a constante de crescimento, com a respectiva unidade de medida, da cultura de bactérias *Mycobacterium tuberculosis*.

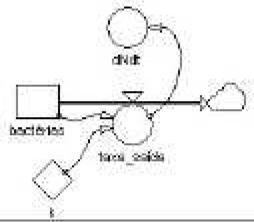
$$\ln(2) = k \cdot 14$$

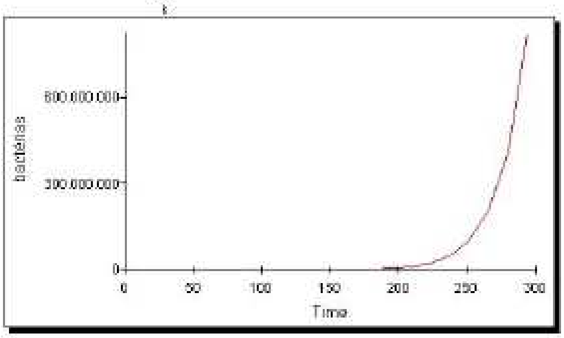
$$\frac{\ln(2)}{14} = k$$

$$k \cong 0{,}05 \text{ / h}$$

III. Considerando que existam inicialmente 400 bactérias, simule esta situação no *Powersim*, construa o gráfico da quantidade de bactérias contra o tempo e justifique ou interprete esta curva.

As bactérias duplicam no intervalo de tempo de 14 horas. A relação quantidade de bactérias X tempo é uma função crescente, a cada 14h o número de bactérias dobra. Utilizando o *PowerSim*:

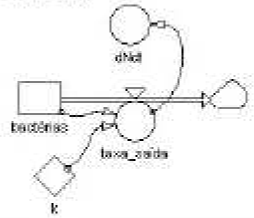


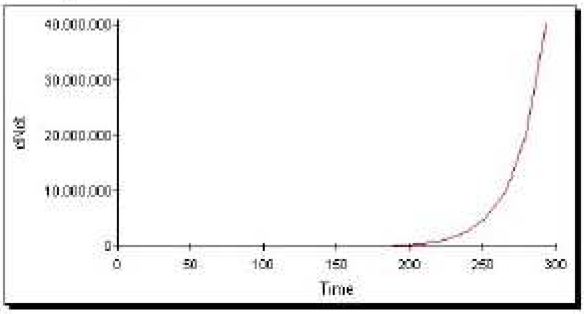


Time	bactérias	dNdt
0	400,00	19,80
14	799,40	39,58
28	1.597,59	79,10
42	3.192,79	158,08
56	6.380,77	315,92
70	12.751,94	631,36
84	25.484,70	1.261,76
98	50.931,08	2.521,62
112	101.785,55	5.039,45
126	203.418,01	10.071,33
140	406.530,06	20.127,51
154	812.448,67	40.224,75
168	1.623.675,35	80.389,00
182	3.244.908,57	160.657,09
196	6.484.936,65	321.072,53
210	12.960.119,3	641.662,15
224	25.900.745,5	1.282.359,20
238	51.762.534,4	2.562.789,63
252	103.447.214	5.121.724,63
266	206.738.636	10.235.745,8
280	413.166.721	20.456.096,3

IV. Construa o gráfico da variação da quantidade de bactérias em relação ao tempo. Justifique ou interprete esta curva.

A variação dN/dt duplica no intervalo de tempo de 14 horas. A relação dN/dt X tempo é uma função crescente, a cada 14h a variação da quantidade de bactérias dobra. Utilizando o *PowerSim*:

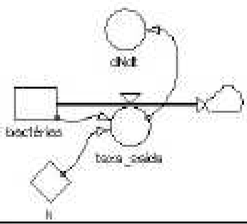


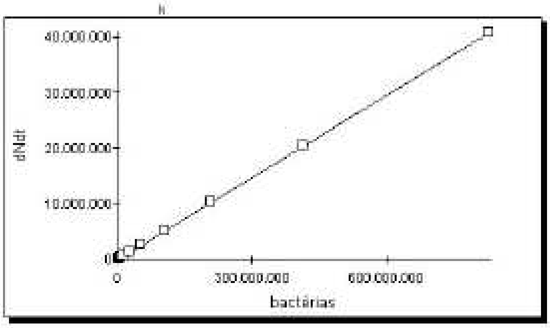


Time	bactérias	dNdt
0	400,00	19,80
14	799,40	39,58
28	1.597,59	79,10
42	3.192,79	158,08
56	6.380,77	315,92
70	12.751,94	631,36
84	25.484,70	1.261,76
98	50.931,08	2.521,62
112	101.785,56	5.039,45
126	203.418,01	10.071,33
140	406.530,06	20.127,51
154	812.448,67	40.224,75
168	1.623.675,35	80.389,00
182	3.244.908,57	160.657,09
196	6.484.936,56	321.072,53
210	12.960.119,3	641.662,15
224	25.900.745,5	1.282.359,20
238	51.762.534,4	2.562.789,63
252	103.447.214	5.121.724,63
266	206.738.836	10.235.745,8
280	413.166.721	20.456.096,3

V. Construa o gráfico da variação da quantidade de bactérias em relação à quantidade de bactérias. Justifique ou interprete esta curva.

A relação dN/dt X quantidade de bactérias é uma função crescente, a cada 14h ambas grandezas aumentam. Utilizando o *PowerSim*:





Time	bactérias	dNdt
0	400,00	19,80
14	799,40	39,58
28	1.597,69	79,10
42	3.192,79	158,08
56	6.380,77	315,92
70	12.751,94	631,36
84	25.484,70	1.261,76
98	50.931,08	2.521,62
112	101.785,55	5.039,45
126	203.418,01	10.071,33
140	406.530,06	20.127,51
154	812.448,67	40.224,75
168	1.623.675,35	80.389,00
182	3.244.908,67	160.657,09
196	6.484.936,55	321.072,53
210	12.960.119,3	641.662,15
224	25.900.745,5	1.282.359,20
238	51.762.534,4	2.562.789,63
252	103.447.214	5.121.724,63
266	206.738.836	10.235.745,8
280	413.166.721	20.456.096,3

Atividade F

I. Dada a equação diferencial dy / dt = ky, em que situações a curva que representa a solução será crescente? E decrescente?

CRESCENTE: $\frac{d_y}{d_t} = ky$**, sendo k > 0. Exemplo: Atividade E.**

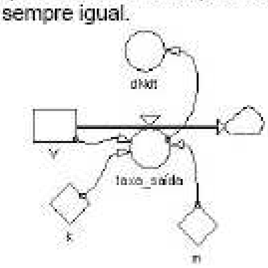
DECRESCENTE: $\frac{d_y}{d_t} = ky$**, sendo k < 0. Exemplo: Atividade D.**

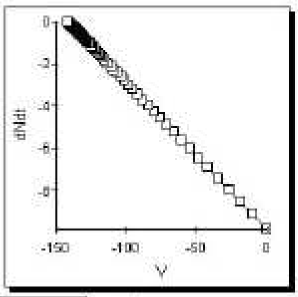
Atividade G

Uma esfera de arremesso de peso com massa igual a 7,2 kg cai de um helicóptero parado no ar. Considere que g=9,8m/s² e k=0,5.

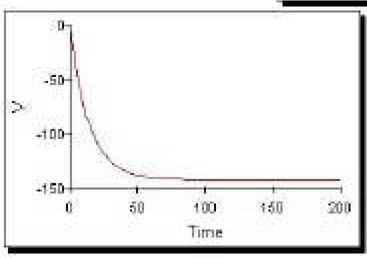
I. Qual a unidade de medida do k?
0,5kg/s

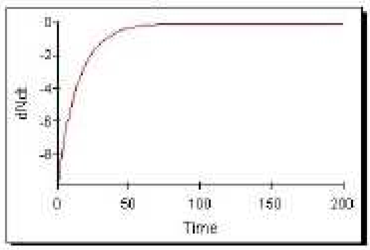
II. Construa um diagrama no *Powersim* para representar esta situação, construa o gráfico do módulo da velocidade contra o tempo e analise se a taxa de variação da velocidade da esfera do momento que ela cai do helicóptero até imediatamente antes de atingir o solo aumenta, diminui ou permanece sempre igual.





Time	V	dVdt
0	0,00	-9,80
1	-9,47	-9,14
2	-18,30	-8,53
3	-26,54	-7,96
4	-34,23	-7,42
5	-41,40	-6,93
6	-48,09	-6,46
7	-54,33	-6,03
8	-60,15	-5,62





III. Durante a queda, a velocidade da esfera tende a zero? Comente.
Não. É um movimento acelerado.

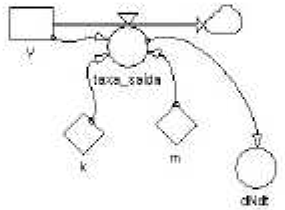
IV. Qual é a velocidade máxima (velocidade limite) atingida pela esfera durante sua queda?
Aproximadamente 141m/s.

V. O que se alteraria no gráfico da velocidade contra o tempo se o k fosse zero?
Verificando a equação da "taxa de saída" do *PowerSim*: taxa_saída = 9.8+k*V/m. Se k=0, taxa_saída = 9.8.

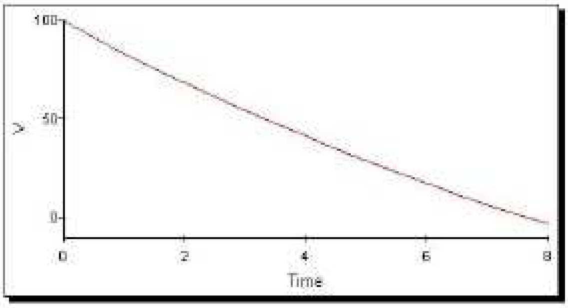
Atividade H

Considere agora, o caso da esfera, com massa igual a 7,2kg, g=9,8m/s² e k=0,5kg/s lançada verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 100m/s.

I. Simule esta situação no *Powersim*, construa o gráfico do módulo da velocidade contra o tempo e descreva o comportamento da taxa de variação da velocidade da esfera desde o momento que ela foi lançada até atingir o chão.



Time	V	dNdt
0,0	100,00	-16,74
0,5	91,77	-16,17
1,0	83,82	-15,62
1,5	76,15	-15,09
2,0	68,73	-14,57
2,5	61,57	-14,08
3,0	54,65	-13,60
3,5	47,97	-13,13
4,0	41,52	-12,68
4,5	35,29	-12,25
5,0	29,27	-11,83
5,5	23,45	-11,43
6,0	17,84	-11,04
6,5	12,41	-10,66
7,0	7,17	-10,30
7,5	2,11	-9,95
8,0	-2,78	-9,61



Atividade I

Considere a eq. dif. dada por dy/dt + ay = b e trace o perfil do gráfico de y versus t, nos seguintes casos:

I. a=b=0

dy/dt = 0 ????????

II. a=0 e b é uma constante qualquer.

y = b . t → função linear. Gráfico é uma reta.

III. a é uma constante qualquer e b é uma constante qualquer

y = K . e^{-at} + b/a → função exponencial. Gráfico uma curva exponencial que tende na vertical a y=b/a.

IV. a é uma constante qualquer e b=0

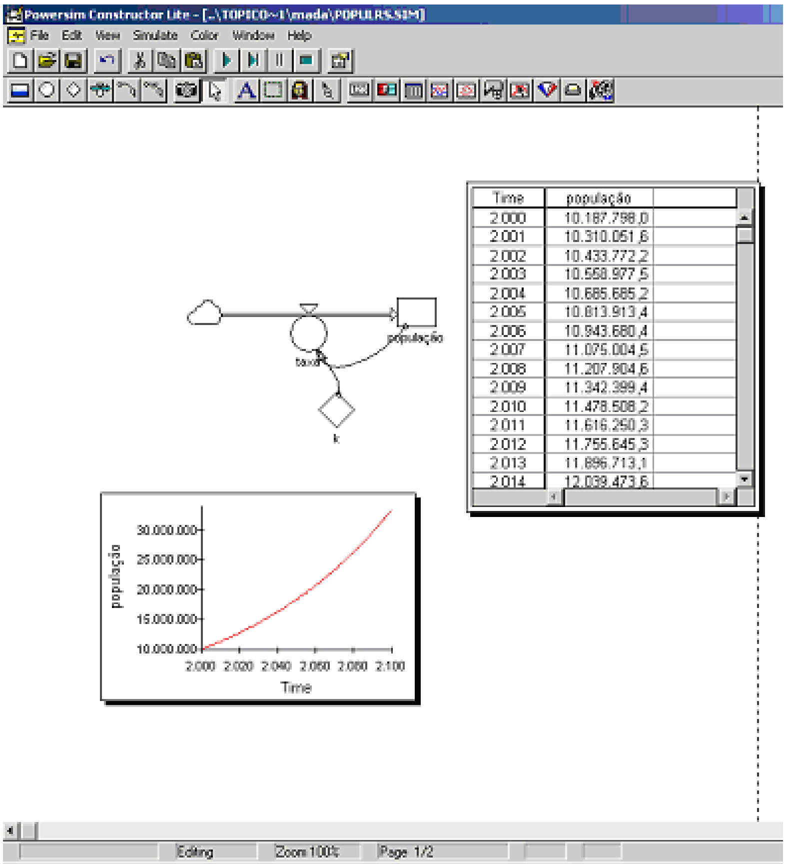
y = K . e^{-at} → função exponencial. Gráfico uma curva exponencial que tende na vertical a y=0.

ALUNO 2

Atividades realizadas com o software Powersim

Aula 3 - Tópicos Avançados de Matemática
(Aula dia 17/maio)

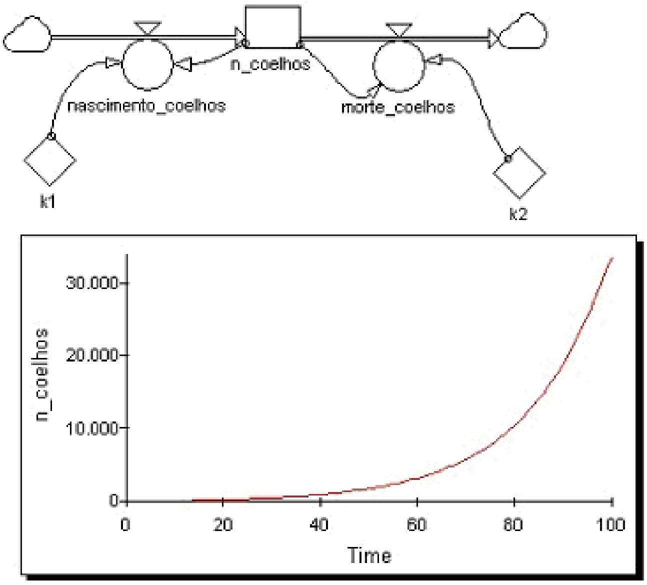
Vamos construir o diagrama considerando que estamos trabalhando com uma população de coelhos, cuja quantidade inicial é de 100 coelhos e esta população está crescendo a uma taxa 8% ao ano.

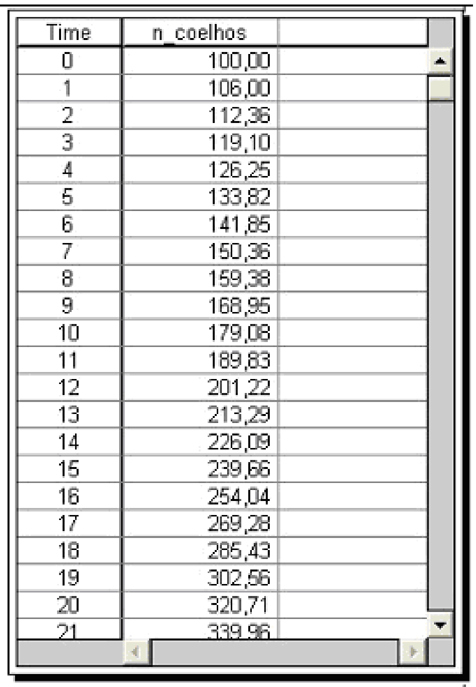


Agora consideremos também que exista uma taxa de morte desses coelhos a um percentual de 2%.

Atividade A

Considere um tanque com uma quantidade inicial de 100.000 litros de água, em

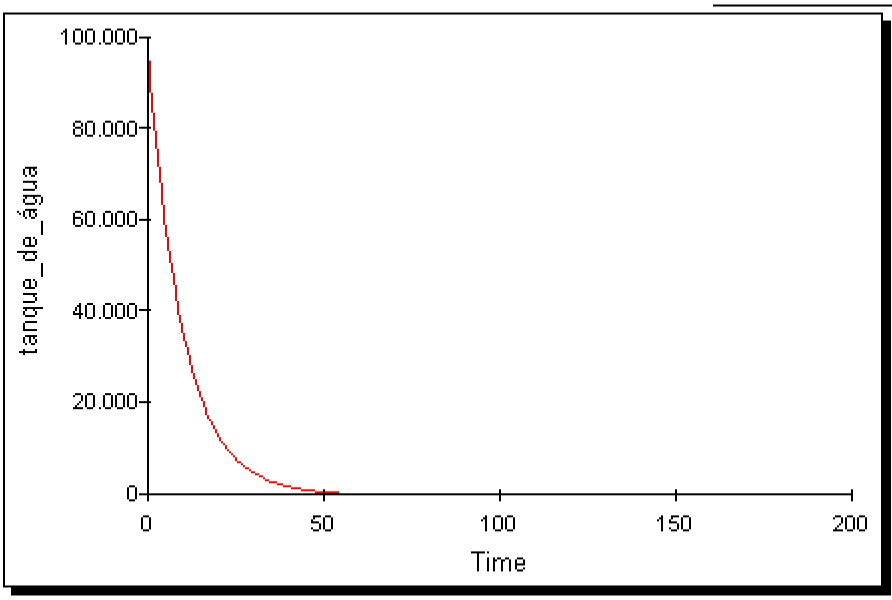




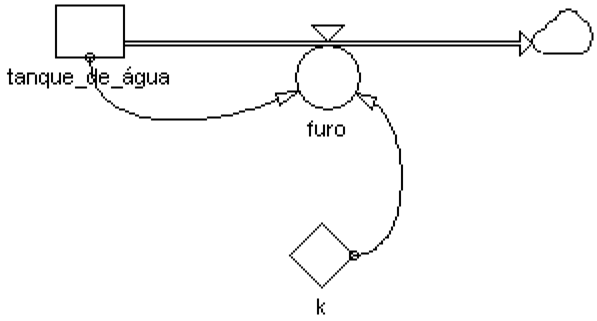
Time	n_coelhos
0	100,00
1	106,00
2	112,36
3	119,10
4	126,25
5	133,82
6	141,85
7	150,36
8	159,38
9	168,95
10	179,08
11	189,83
12	201,22
13	213,29
14	226,09
15	239,66
16	254,04
17	269,28
18	285,43
19	302,56
20	320,71
21	339,96

que há um furo na base por onde, a cada hora, sai 10% da água existente no tanque.

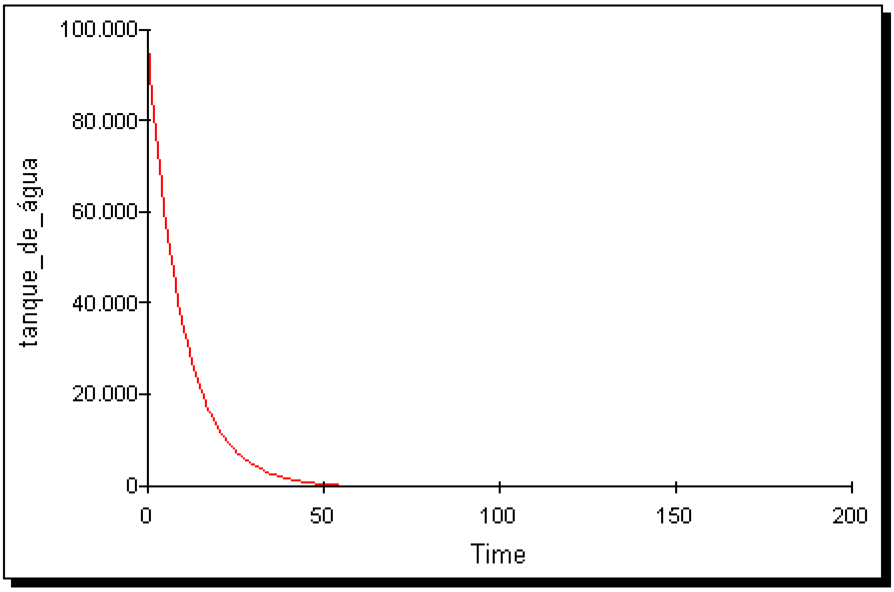
I. Esboce o gráfico da **quantidade de água no tanque** em função do tempo.



II. Construa, com auxílio do *software* Powersim, um diagrama (conforme Figura 1.4) para representar esta situação. Note que o furo na base é representado por uma torneira que retira água do tanque.

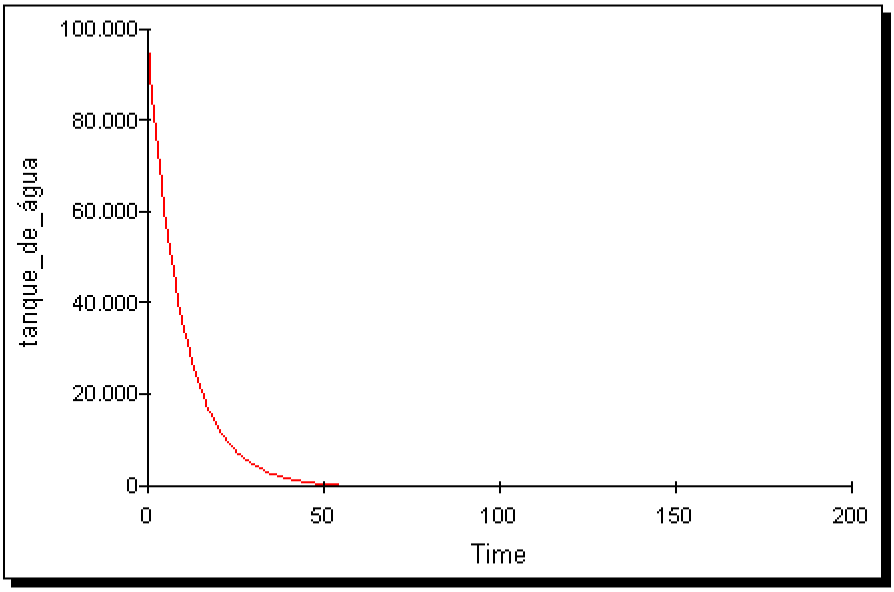


Time	tanque_de_água
187	0,000756
188	0,000684
189	0,000619
190	0,00056
191	0,000507
192	0,000459
193	0,000415
194	0,000376
195	0,00034
196	0,000307
197	0,000278
198	0,000252
199	0,000228
200	0,000206

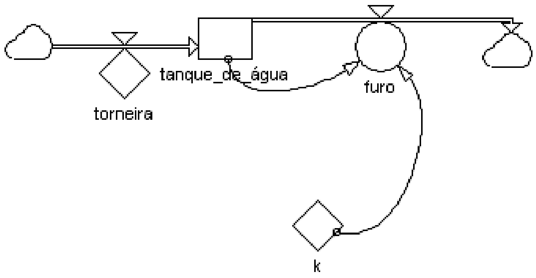


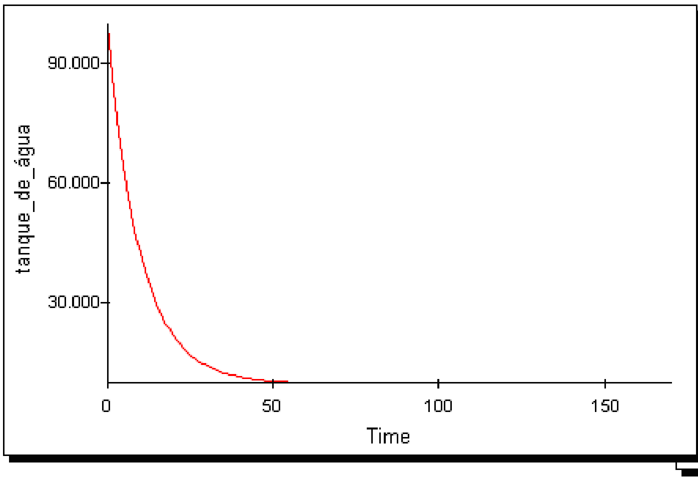
III. Construa o gráfico do item I com auxílio do Powersim.

IV. Se considerarmos o tempo em horas, é correto afirmar que a quantidade de água que sai do tanque a cada hora é a mesma? Justifique sua resposta. Não pois é sempre 10% do que sobra, que sai.



V. Acrescente, no diagrama do Powersim, uma torneira colocando água no tanque a um fluxo de 1.000 *litros/hora*. O que acontece com a quantidade de água no tanque a medida que o tempo passa?





Time	tanque_de_água
157	10.000,01
158	10.000,01
159	10.000,01
160	10.000,01
161	10.000,01
162	10.000,01
163	10.000,01
164	10.000,01
165	10.000,01
166	10.000,01
167	10.000,01
168	10.000,00
169	10.000,00
170	10.000,00

VI. Suponha que o tanque de capacidade total de 100.000 litros se encontra, no instante inicial, com 50.000 litros. Escolha valores para a taxa de entrada e saída de água tais que:

a) a quantidade de água no tanque seja menor que 100 litros em aproximadamente 20 horas.

b) o tanque encha em aproximadamente 25 horas.

c) o nível de água do tanque não se altere.

Aula de 23 de maio de 2008.

Todos os gráficos solicitados no powersim também estão em anexo, e as respostas estão em negrito, itálico e sublinadas .

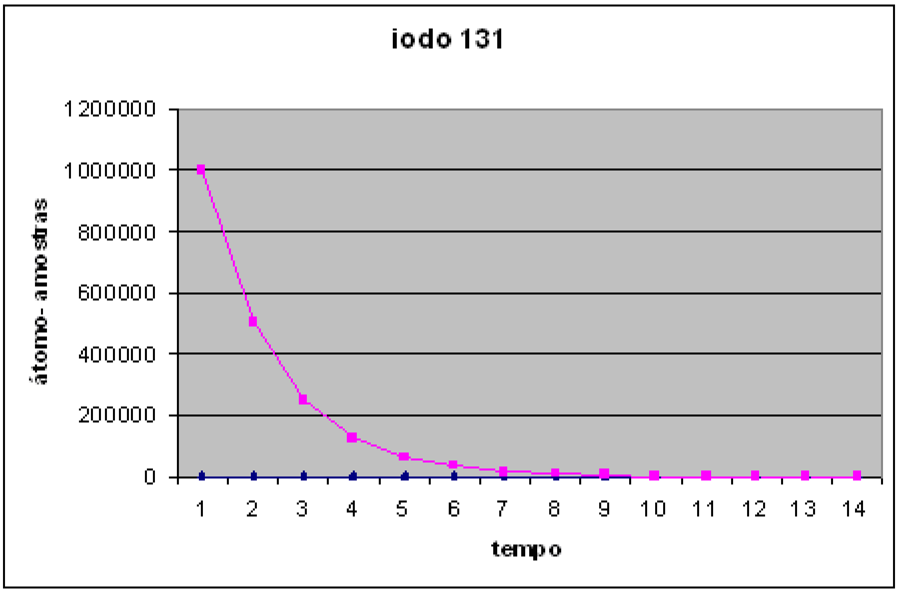
Atividade A

Consideremos o caso do iodo-131, utilizado nos exames de tiróide, cuja meia-vida é de oito dias 1. Isto significa que o número de núcleos instáveis, capazes de emitir partículas ou radiação, cairá à metade em 8 dias, e novamente à metade após mais 8 dias e assim por diante. Considerando que no instante inicial existam N=1.000.000 átomos radioativos em certa amostra, construímos a Tabela 2.1.

I. Quantos átomos radioativos haverá na amostra ao final de 64 dias?

II. Quantos dias demorarão para que haja em torno de 30 átomos radioativos?

Tabela 2.1: Número de átomos radioativos para diferentes valores de tempo (em dias).



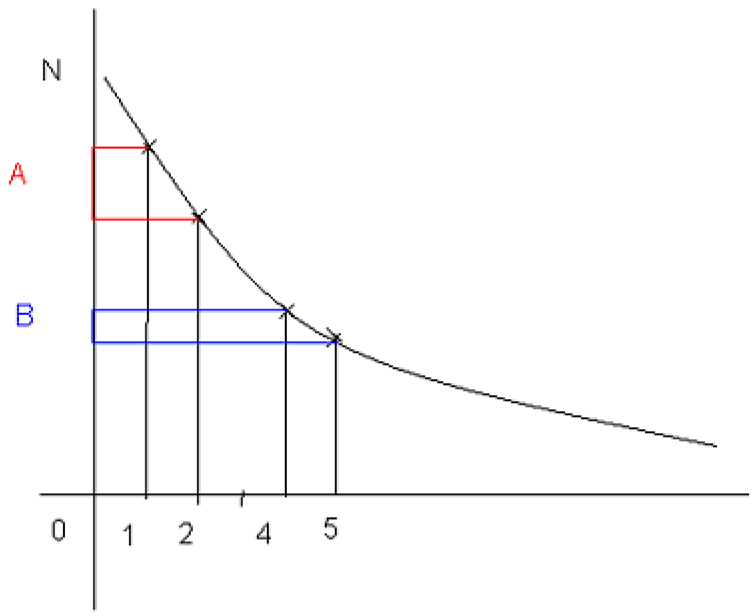
III. Esboce um gráfico do número de átomos radioativos de Iodo-131 contidas na amostra em função do tempo, medido em dias***.(veja na tabela anterior)***

IV. É correto afirmar que o número de átomos radioativos da amostra que decaem por dia é constante? (Dizer que um átomo radioativo decaiu significa dizer que se transmutou em outro, porque emitiu partícula ou radiação, deixando de ser radioativo).

Não, só ver na tabela ou no gráfico. Se fosse constante daria um gráfico que lembraria uma função linear. A função que lembra este gráfico é uma função

exponencial, onde não são constantes os decréscimos.

V. A Figura 2.1 mostra a curva de decaimento de certa quantidade de um elemento radioativo em função do tempo. Em qual intervalo de tempo, 1<t<2 ou 4<t<5 , o decréscimo de átomos radioativos é maior? Explique.

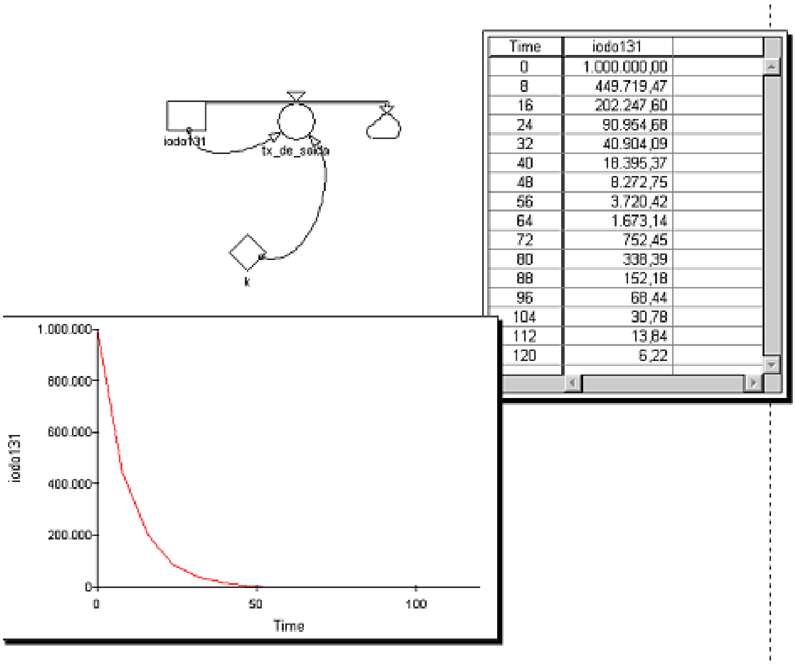


Entre 1 e 2 pois a medida da reta N é maior nesse intervalo. Veja no exemplo ("parecido) do gráfico anterior

A medida entre 1 e 2 em vermelho/A, é sem dúvida maior que e entre 4 e 5 que está em azul /B

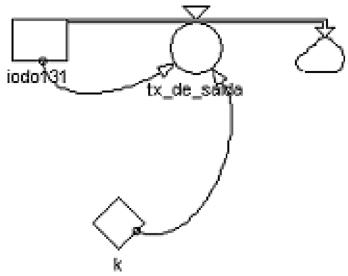
Atividade B

Como podemos construir, no Powersim, a situação descrita na atividade A? ***com k = 0,1***

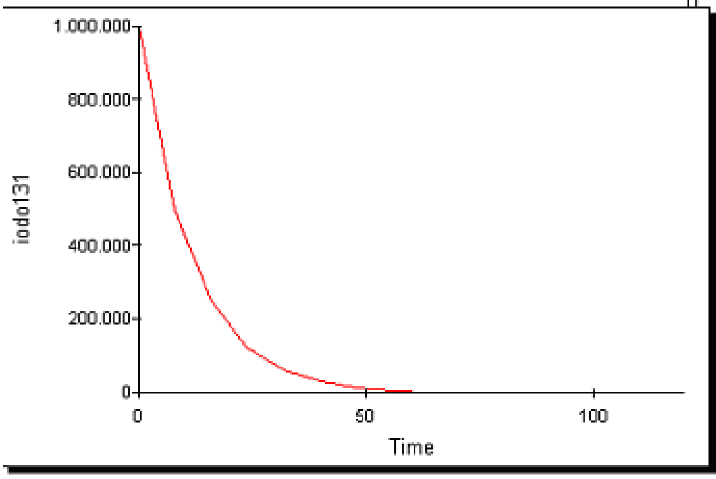


Time	iodo131
0	1.000.000,00
8	449.719,47
16	202.247,60
24	90.954,68
32	40.904,09
40	18.395,37
48	8.272,75
56	3.720,42
64	1.673,14
72	752,45
80	338,39
88	152,18
96	68,44
104	30,78
112	13,84
120	6,22

II. Use a constante de decaimento encontrada e construa um diagrama no Powersim para representar a atividade A***. com k=-0,0866/ dias , este com os dados muito mais próximos aos da tabela – o que seria o ideal.***



Time	iodo131
0	1.000.000,00
8	500.394,16
16	250.394,31
24	125.295,85
32	62.697,31
40	31.373,37
48	15.699,05
56	7.855,71
64	3.930,95
72	1.967,03
80	984,29
88	492,53
96	246,46
104	123,33
112	61,71
120	30,88



III. Gere a tabela e o gráfico da atividade anterior e compare os resultados com os da atividade A.***(ver item anterior)***

Atividade C

Os cientistas aprenderam a deduzir a idade de ossos, pedras, planetas e estrelas através

Da medida da quantidade de isótopos existentes no material em estudo. Para isto há diferentes métodos, dependendo da escala de tempo em que trabalham. Por exemplo, para estudar um período que vai até cerca de 40 ou 50 mil anos atrás, pode ser usado o método do C14 , que consiste em determinar qual a proporção de C12 e C14 existente na amostra. Apesar do C14 ser radioativo – decaindo em N14 - nos seres vivos a absorção de dióxido de carbono do ar mantém constante os níveis de C12 e C14 .Então, a proporção entre estes dois isótopos é fixa e bem conhecida. A partir da morte, não háreposição de C14 e consequentemente sua quantidade começa a diminuir. Comparando-se o nível de C14 com a quantidade total de carbono, é possível calcular há quanto tempo a planta ou o animal está morto. A meia-vida do C14 é de 5730 anos2 . Considere que foi encontrado um osso fossilizado com20% da quantidade de C14 usualmente encontrada num ser vivo e resolva as seguintes atividades:

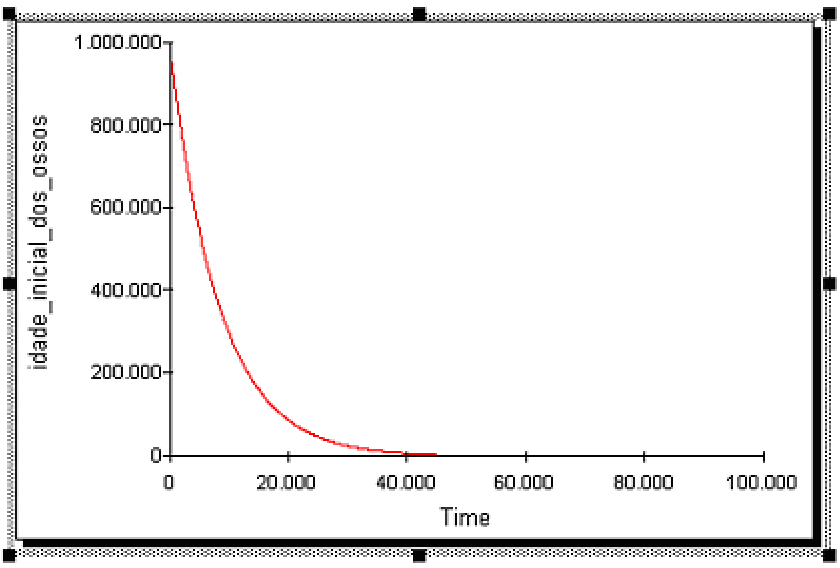
I. Estime a idade do osso. Justifique sua resposta.

Em torno de 1800 anos

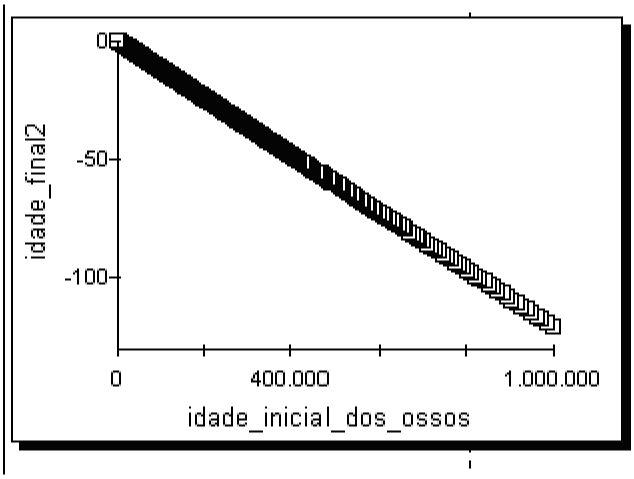
II. Conforme o texto, a meia-vida do C14 é τ=5730 anos. Use este valor na Eq. 3 para determinar a constante de decaimento do C14 . Considere uma quantidade inicial de 1.000.000 átomos radioativos, represente a situação no Powersim, gere a tabela do número de átomos em função do tempo e verifique se a sua estimativa do item I está adequada aos resultados da tabela.

Time	e_inicial_dos_os	idade_final
1.100	875.407,80	105,
1.200	864.881,91	104,
1.300	854.482,58	103,
1.400	844.208,29	102,
1.500	834.057,55	100,
1.600	824.028,85	99,
1.700	814.120,74	98,
1.800	804.331,76	97,
1.900	794.660,49	96,
2.000	785.105,50	94,
2.100	775.665,40	93,
2.200	766.338,81	92,
2.300	757.124,37	91,
2.400	748.020,72	90,
2.500	739.026,52	89,
2.600	730.140,48	88,
2.700	721.361,28	87,

III. Faça no Powersim o gráfico do número de átomos contra o tempo, medido em anos.



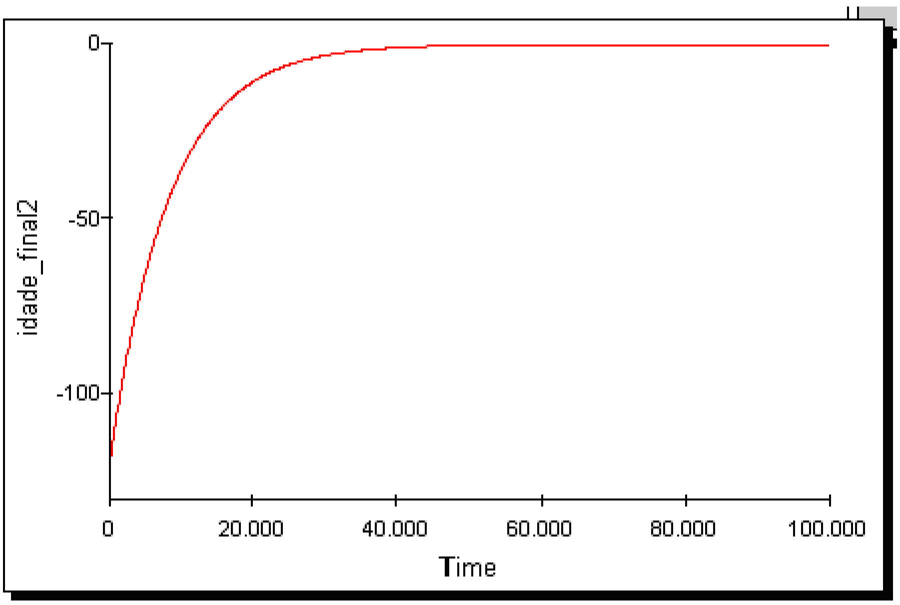
IV. Faça no Powersim o gráfico da taxa de variação do número de átomo (dN/ dt) em relação ao número de átomos (N). Que curva você obteve? Como você justifica ou



interpreta esta curva?

O gráfico gerou uma reta decrescente pois a razão é sempre a mesma vai diminuindo na mesma proporção. Na verdade dN/dt= -0,086.N começa no 1000000 e pelo gráfico passa pelo zero mas no contexto não chega a zero

V. Faça no Powersim o gráfico de dN/dt em relação ao tempo t. Que curva você obteve? Como você justifica ou interpreta esta curva?



Curva que lembra uma função exponencial, no tempo varia de 8 em 8 e no y a variação é diferente, nos mesmos intervalos(1º momento varia 250000, no 2º momento varia

125000 e assim por diante)

Atividade D

Quando uma droga (por exemplo, penicilina, aspirina) é administrada a um indivíduo, ela entra na corrente sangüínea e, então, é absorvida pelo organismo no decorrer do tempo. Pesquisas médicas mostraram que a quantidade de uma droga na corrente sangüínea tende a decrescer a uma taxa proporcional à quantidade de droga presente .

I. Expresse matematicamente a frase em negrito do parágrafo anterior.

“**é absorvida pelo organismo no decorrer do tempo.”**

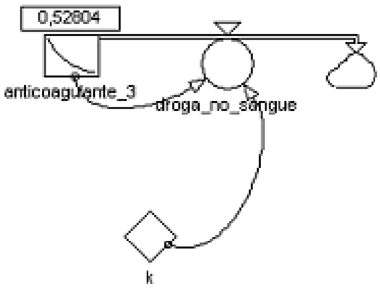
“**quantidade de uma droga na corrente sangüínea tende a decrescer a uma taxa proporcional à quantidade de droga presente .”**

II. Warfarin é uma droga utilizada como anticoagulante 3, sua meia-vida é de 37 horas. Após interromper o uso da droga, a quantidade que permanece no corpo do paciente diminui a uma taxa que é proporcional à quantidade restante. Quantas horas são necessárias para que o nível da droga no corpo seja reduzido a 25% do nível original?

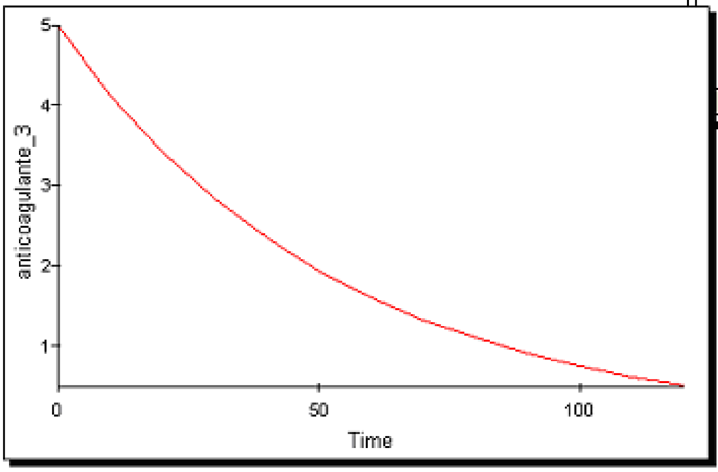
Em torno de 74 horas = 3 dias e 2 horas

0 hora	100% do anticoagulante
37 horas	50% do anticoagulante
74 horas= 3 dias e 2 horas	25% do anticoagulante

III. Considerando que a quantidade inicial seja de 5 miligramas construa, no *Powersim*, o diagrama da situação e faça o gráfico da quantidade de Warfarin no corpo do paciente em função do tempo, desde a interrupção do uso da droga até 5 dias após.



Time	anticoagulante_3
0	5,00
10	4,15
20	3,44
30	2,85
40	2,36
50	1,96
60	1,62
70	1,35
80	1,12
90	0,926
100	0,768
110	0,637
120	0,528

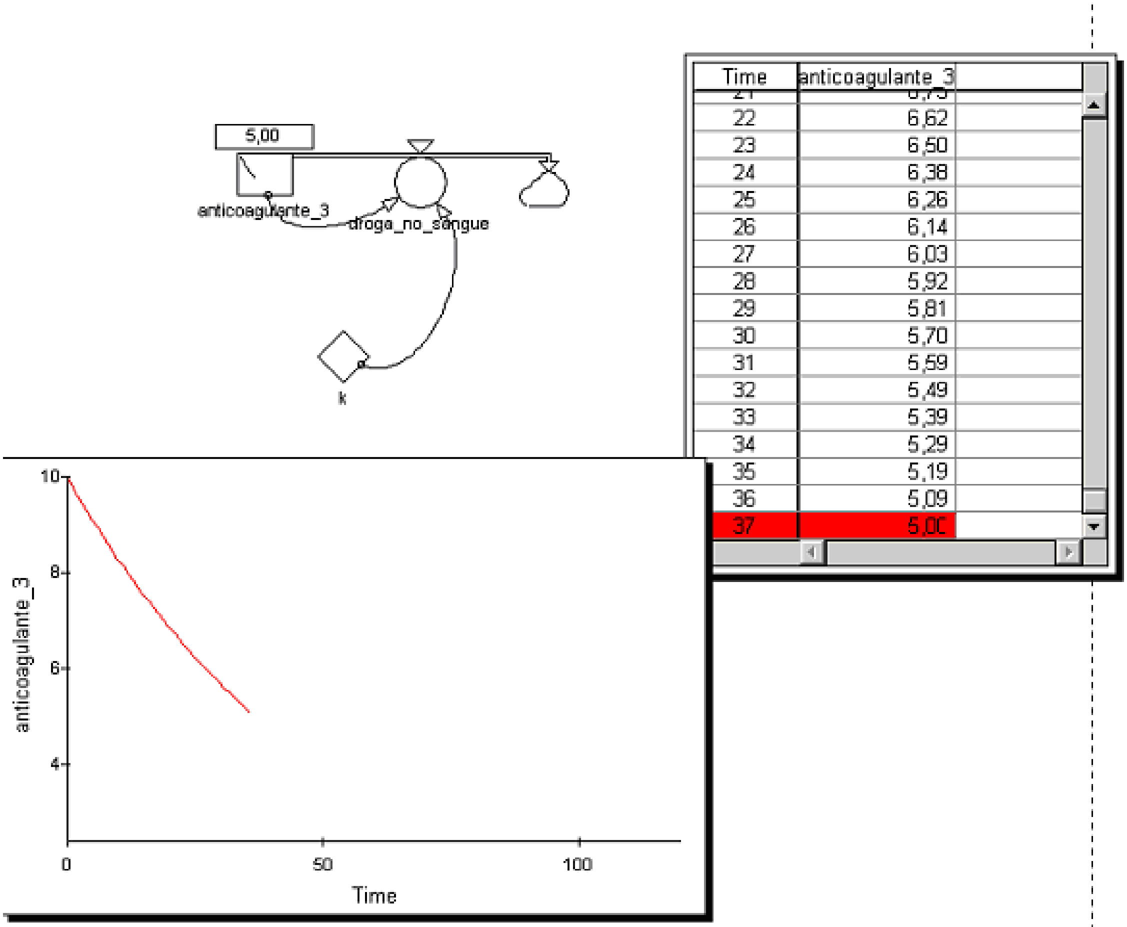


IV. Construa no Powersim uma tabela de valores e verifique se a sua resposta da questão I confere.

Time	anticoagulante_3
0	100,00
37	50,02
74	25,02
111	12,52
148	6,26
185	3,13
222	1,57

V. Se dobrarmos o valor da quantidade inicial, quanto tempo levará para que o nível do medicamento no corpo se reduza a metade? E a 25% da quantidade inicial?

Metade: em 37 horas- veja na tabela



Time	anticoagulante_3
22	6,62
23	6,50
24	6,38
25	6,26
26	6,14
27	6,03
28	5,92
29	5,81
30	5,70
31	5,59
32	5,49
33	5,39
34	5,29
35	5,19
36	5,09
37	5,00

Atividade E

O tempo de geração é o intervalo de tempo requerido para que a população em uma cultura de microorganismos duplique em número. A bactéria *Mycobacterium tuberculosis*, causadora da tuberculose, possui um tempo de geração de aproximadamente 14 horas .

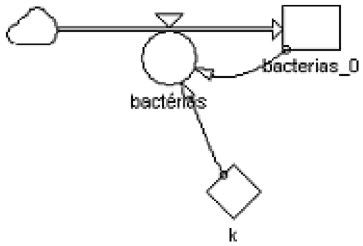
I. Sabendo que uma cultura de bactérias cresce a uma taxa que é proporcional a quantidade de bactérias existentes no instante t, escreva uma equação diferencial que represente a situação.

$$\frac{dN}{dt} = k\, N_0 * e^{kt}$$

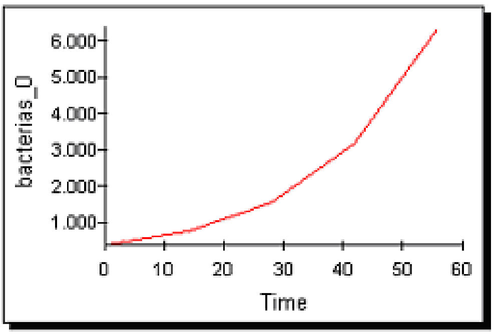
II. Determine a constante de crescimento, com a respectiva unidade de medida, da cultura de bactérias *Mycobacterium tuberculosis*.

K= 0,69315/ 14=0,495107 nºbac/ h(cresce em torno de 50%)

III. Considerando que existam inicialmente 400 bactérias, simule esta situação no Powersim, construa o gráfico da quantidade de bactérias contra o tempo e justifique ou



Time	bacterias_0
0	400,00
14	799,40
28	1.597,60
42	3.192,81
56	6.380,84



interprete esta curva.

Tanto o gráfico como a tabela, não correspondem em valores exatos o que aconteceria, pois segundo os dados a cada 14 horas dobraria a quantidade de bactérias, porém o valor chega bem perto.

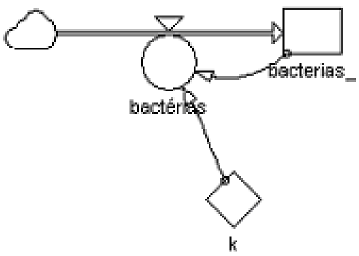
Veja na tabela: nas primeiras 14 horas teriam que ter 800 bactérias e tem-se 799,4 (em torno de 800).

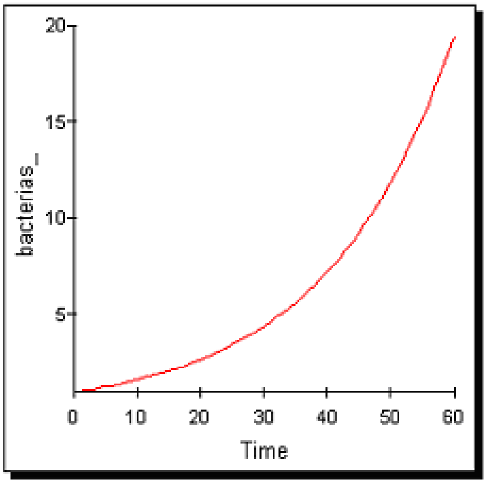
Interpretando o gráfico tem-se que a cada 14 horas o número de bactérias dobrará.

IV. Construa o gráfico da variação da quantidade de bactérias em relação ao tempo.

Justifique ou interprete esta curva.

O gráfico lembra uma função exponencial, nele mostra o crescimento de bactérias em função do tempo ou seja a cada 14 horas o nº de bactérias dobra, observando na tabela em 28horas o nº de bactérias dobra novamente(2*2= 4), é só colocar a quantidade de bactérias inicial que já se tem as quantidades em cada hora.





Time	bacterias_
0	1,00
1	1,05
2	1,10
3	1,16
4	1,22
5	1,28
6	1,35
7	1,41
8	1,49
9	1,56
10	1,64
11	1,72
12	1,81
13	1,90
14	2,00
15	2,10
16	2,21
17	2,32
18	2,44
19	2,56
20	2,69
21	2,83
22	2,97
23	3,12
24	3,28
25	3,45
26	3,62
27	3,81
28	4,00
29	4,20

V. Construa o gráfico da variação da quantidade de bactérias em relação à quantidade de bactérias. Justifique ou interprete esta curva.

Quanto maior o nº inicial maior será o crescimento das bactérias, a cada 14h a população das bactérias cresce 100%, é praticamente um crescimento linear.