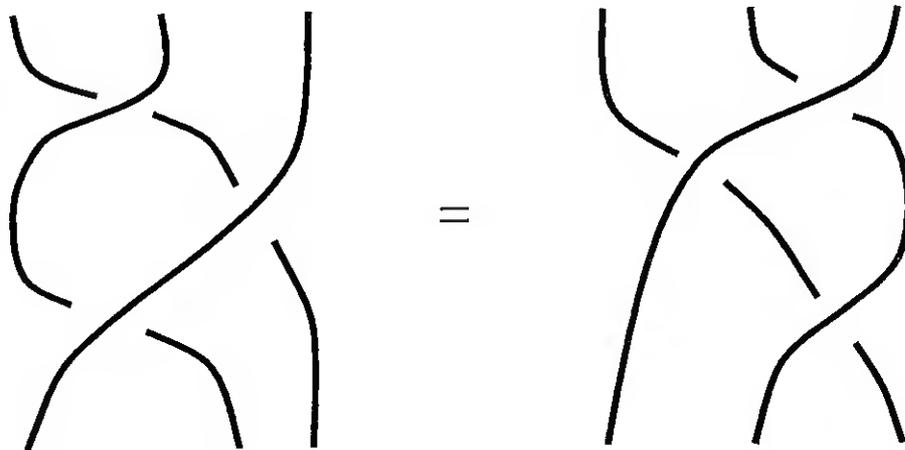


Universidade do Algarve

Operadores de Yang-Baxter
e
a Categoria dos Emaranhados



Marco Mackaaij

1998

UNIVERSIDADE DO ALGARVE
SERVIÇO DE DOCUMENTAÇÃO

7	12/199	28835
545/11		
P. 10		

Universidade do Algarve

**Operadores de Yang-Baxter
e
a Categoria dos Emaranhados**

Trabalho de síntese, a que se refere a
alínea b), n.º 2 do artigo 58.º, do ECDU,
elaborado para efeitos de prestação de
provas de aptidão pedagógica e capaci-
dade científica

Marco Mackaaij

Assistente Estagiário da Área Departamental de Matemática da
Unidade de Ciências Exactas e Humanas da Universidade do Algarve

Faro

Julho de 1998

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço à Luz por me ter apoiado sempre, mesmo nos momentos em que a minha natureza optimista era posta a prova.

Agradeço à minha orientadora Prof^a. Doutora Maria da Graça Rendeiro Marques o ter-me possibilitado a realização das provas na área de Topologia Algébrica bem como o trabalho de correcção do texto.

Agradeço a Prof. Doutor Roger Picken pelo apoio que me tem dado para encontrar o meu caminho no mundo matemático Português. Também lhe agradeço pela leitura crítica que fez de uma versão preliminar deste trabalho e pelas sugestões que me deu para melhorar o texto.

The reasonable man adapts himself to the world, the unreasonable one persists in trying to adapt the world to himself. Therefore all progress depends on the unreasonable man.

George Bernhard Shaw

Índice

Introdução	1
Capítulo 1	2
Capítulo 2	10
Capítulo 3	17
Capítulo 4	23
Capítulo 5	30
Capítulo 6	40
Capítulo 7	43
Bibliografia	52

Introdução

Todos nós conhecemos o famoso truque do prestidigitador: mostra uma corda com um grande nó no meio e de repente puxa as duas pontas da corda cada uma para o seu lado e o nó desaparece misteriosamente. Se pensarmos dois segundos percebemos que a admiração dos espectadores vem do facto do homem - normalmente são homens que fazem este truque - não largar as pontas da corda enquanto a desemaranha. O prestidigitador também não utiliza uma faca, como Alexandre Magno fez para resolver o problema do nó de Górdias. Estes dois reparos são importantes porque explicam a essência das regras que regem a teoria dos nós. Quando um matemático fala de um nó quer dizer um nó numa corda com as duas pontas atadas e as manipulações permitidas não envolvem cortes da corda. O problema que estuda um teórico de nós tem a ver com a imagem enganadora dos nós. Procura saber quando dois nós, possivelmente com aparências completamente diferentes, podem ser obtidos um do outro através de manipulações. Ou seja, o teórico de nós quer saber se o prestidigitador vai conseguir desemaranhar o nó ou não, antes deste esticar a corda.

Muitas tentativas têm sido feitas ao longo dos últimos dez anos para resolver este problema. Podemos desiludir imediatamente o leitor ao dizer que nenhuma destas “soluções” é satisfatória. As soluções que associam um número a cada nó não os distinguem perfeitamente; há sempre dois nós diferentes que não podem ser obtidos um do outro através das manipulações permitidas e vão ter o mesmo número. Outras soluções são perfeitas no sentido de distinguirem os nós todos uns dos outros, mas ou não há nenhum algoritmo para calcular os objectos matemáticos associados aos nós, ou o algoritmo é tão complicado que há dezenas de pessoas a trabalhar numa teoria própria sobre os ingredientes matemáticos envolvidos. De qualquer maneira continua a haver muitas perguntas interessantes para estudar na teoria de nós.

O tópico em que o autor se concentra neste trabalho é o das novas estruturas algébricas que surgiram com a aplicação à teoria dos nós de soluções de certas equações matriciais, as equações de Yang-Baxter, oriundas da mecânica estatística e da teoria dos modelos completamente integráveis na física. Estas soluções são as chamadas *R-matrizes* (*R-matrices*). A razão destas *R-matrizes* serem interessantes para a teoria de nós vem do facto delas se “portarem” como os cruzamentos dos nós sob certas manipulações. O autor deste trabalho é algebrista “puro sangue”, portanto percebe muito pouco de física, logo não exige nenhum conhecimento prévio ao leitor. O que interessa aqui é o formalismo algébrico desenvolvido por matemáticos como Freyd e Yetter [12,35], Joyal e Street [17], Turaev [30,32,33] e Reshetikhin[30]. A questão é simples:

Dada uma *R*-matriz, será possível construir um invariante de nós a partir dela e, se for, o que é que precisamos mais para a construção?

Este problema foi quase resolvido por Turaev em [32,33]. O que falta, no entanto, é um algoritmo que possibilite a qualquer pessoa responder a esta pergunta para uma *R*-matriz concreta em, digamos, cinco minutos (se calhar com a ajuda de um computador). Neste trabalho mostramos um algoritmo que segue directamente de uma leitura atenta de [33].

1. Nós, enlaces, tranças e emaranhados

A seguinte definição é a formalização dos nós que discutimos na introdução.

Definição 1.1. *Um enlace (link) é a reunião disjunta em \mathbf{R}^3 de um número finito de subvariedades difeomorfas ao círculo S^1 . Um nó (knot) é um enlace com apenas uma componente conexa.*

Dizemos que um enlace é orientado se cada um dos nós que formam o enlace é orientado. Neste trabalho um enlace quer dizer sempre um enlace orientado. Todos os resultados neste trabalho são válidos para enlaces, mas muitas vezes só falamos de nós, por conveniência. O “jogo” só começa com as manipulações que admitimos. Neste trabalho admitimos só isotopias de ambiente (*ambient isotopies*).

Definição 1.2. *Sejam L e L' dois enlaces. Uma isotopia de ambiente de L em L' é uma função contínua $H: \mathbf{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^3$ tal que*

- 1) $H(\bullet, t): \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ é um difeomorfismo para todo o $t \in [0, 1]$,
- 2) $H(\bullet, 0) = id_{\mathbf{R}^3}$,
- 3) $H(L, 1) = L'$.

A isotopia preserva a orientação se $H(\bullet, t)$ é um homeomorfismo que preserva a orientação de cada uma das componentes do enlace. Neste trabalho uma isotopia quer dizer sempre uma isotopia de ambiente orientada. É óbvio que a relação de isotopia de ambiente de enlaces é uma relação de equivalência. Dizemos que dois enlaces são isotópicos se pertencem à mesma classe de equivalência.

O problema com esta relação de equivalência é ser extremamente difícil indicar uma isotopia concreta entre dois nós isotópicos em geral. O que se faz habitualmente é desenhar os nós num papel, portanto faz-se uma projecção no plano, e depois mostra-se, mais ou menos, como é que se pode transformar um nó no outro através de manipulações que correspondem a isotopias em \mathbf{R}^3 . Ainda mais difícil é mostrar que dois nós, ou enlaces, não são isotópicos. Em 1926 Reidemeister [28] teve uma ideia luminosa e formalizou a ideia dos desenhos. Ele usou o facto de haver sempre um plano em que se pode projectar o nó de maneira que a projecção só tem um número finito de singularidades e um número finito de intersecções, que são todas intersecções transversais de dois arcos do nó, os *cruzamentos* (*crossings*). Depois estudou a transformação destes cruzamentos sob a acção das isotopias e notou que só havia três transformações básicas, os chamados *movimentos de Reidemeister* (*Reidemeister moves*).

Definição 1.3. *Um enlace está em posição geral relativamente ao plano $\mathbf{R}^2 \times \{0\}$ se a função $\pi: L \rightarrow \mathbf{R}^2 \times \{0\}$, tal que $\pi(x, y, z) = (x, y)$, tem as seguintes propriedades:*

- 1) $\#\{\pi^{-1}(x, y)\} \leq 2$, para todos $x, y \in \pi(L)$,
- 2) As intersecções, i.e. os pontos (x, y) com $\pi^{-1}(x, y) = 2$, são todas transversais,
- 3) O número de intersecções é finito,
- 4) π é uma imersão.

As intersecções são os chamados cruzamentos. Dos dois arcos que se cruzam num cruzamento, o arco mais longe do plano de projecção chama-se arco de *sobrecruzamento* (*overcrossing*) e o outro chama-se arco de *subcruzamento* (*undercrossing*). Para não perder

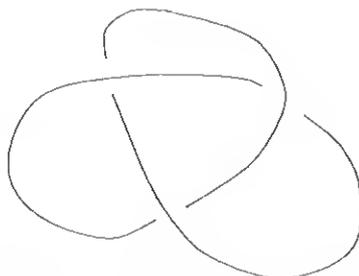


Figura 1.1. O trevo (trifólio)

informação topológica essencial do enlace L distinguimos os arcos de sobrecruzamento dos de subcruzamento de maneira habitual (veja fig. 1.1) na projecção $\pi(L)$.

Uma projecção destas, com a informação dos sobrecruzamentos e subcruzamentos incluída, chama-se um *diagrama de enlace* (*link diagram*). Um resultado clássico que há sempre uma transformação linear de \mathbf{R}^3 que permite colocar um enlace em posição geral relativamente ao plano $\mathbf{R}^2 \times \{0\}$ e, a menos de isotopia em \mathbf{R}^3 , um diagrama de enlace em \mathbf{R}^2 determina um único enlace em posição geral em \mathbf{R}^3 (ver por exemplo [6,28]). Temos agora que “transportar” a relação de equivalência entre enlaces em \mathbf{R}^3 para diagramas de enlaces em \mathbf{R}^2 .

Definição 1.4. *Um diagrama de enlace D , em \mathbf{R}^2 , diz-se em posição geral se a função altura $h: D \rightarrow \mathbf{R}$, definida por $h(x, y) = y$, tem apenas um número finito de máximos e mínimos locais e, entre esses e os cruzamentos de D , não há dois que correspondem ao mesmo valor de h .*

É óbvio que é sempre possível colocar um diagrama de enlace em posição geral com um difeomorfismo de \mathbf{R}^2 , puxando os “pontos críticos” de h para cima e para baixo até terem alturas diferentes. A razão de querermos pôr os diagramas em posição geral é que isso nos permite “cortar” o diagrama entre os extremos locais e os cruzamentos e assim estudar a alteração dos “pedaços elementares” que constituem o diagrama sob uma isotopia. O próximo teorema é o famoso resultado de Reidemeister.

Teorema 1.5. *Dois diagramas de enlace em posição geral correspondem a enlaces isotópicos se e só se um pode ser obtido do outro através de uma isotopia de diagramas e/ou um número finito de movimentos de Reidemeister I, II e III (veja fig. 1.2).*

Como consideramos enlaces orientados cada desenho representa um número de movimentos semelhantes onde os arcos são orientados de todas as maneiras possíveis.

Daqui por diante neste trabalho falamos só de enlaces embora muitas vezes estejamos a falar de diagramas de enlace na verdade. Utilizando o teorema de Reidemeister identificamos um enlace com um diagrama de enlace em posição geral que o represente.

O teorema de Reidemeister permite-nos construir vários invariantes de enlaces de uma maneira bastante elementar. Basicamente é uma questão de associar um número a cada diagrama de enlace e garantir que este número fique invariante sob os movimentos de

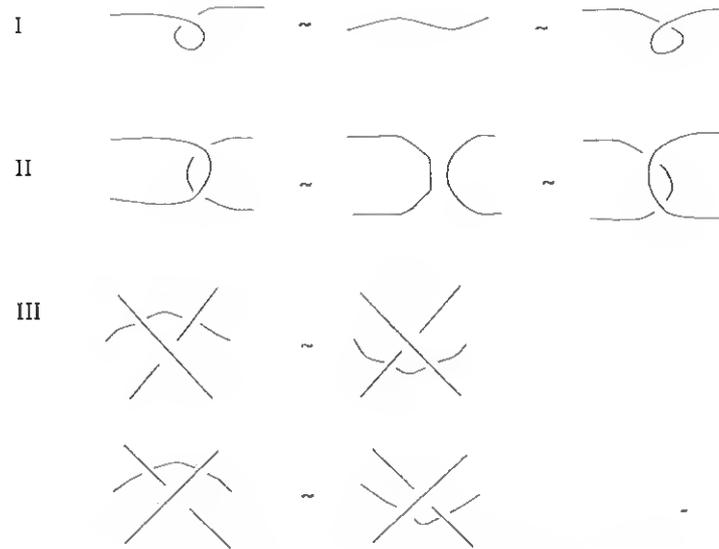


Figura 1.2. Os movimentos de Reidemeister

Reidemeister. Um exemplo de um número invariante sob os movimentos de Reidemeister II e III é a *contorção* (*writhe*), que vamos definir agora.

Definição 1.6. Considere um enlace L . Damos um sinal $\epsilon(P)$ a cada cruzamento P como na figura 1.3. A contorção $W(L)$ de L é o número inteiro definido por

$$w(L) = \sum_{P \in C(L)} \epsilon(P),$$

onde $C(L)$ é o conjunto de todos os cruzamentos de L .

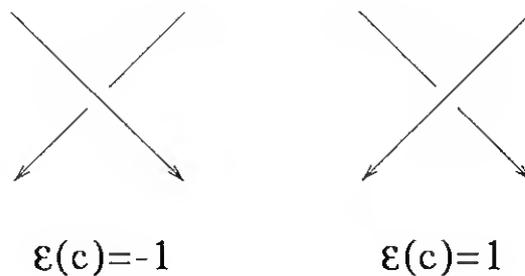


Figura 1.3

Verifica-se facilmente que a contorção é invariante sob os movimentos de Reidemeister II e III, mas não é invariante sob o movimento I. Um invariante que respeita todos os movimentos de Reidemeister é o invariante que iniciou a nova era na teoria de nós,

o célebre *polinómio de Jones* (*Jones polynomial*). Este invariante de nós é a aplicação $J: \{\text{enlaces}\} \rightarrow \mathbf{Z}[q, q^{-1}]$ que satisfaz:

- a) $J(K) = J(K')$ se $K \sim K'$,
- b) $J(U) = 1$,
- c) $q^2 J(K_+) - q^{-2} J(K_-) = (q - q^{-1})J(K_0)$,

em que U é o nó trivial e (K_+, K_-, K_0) é um triplo de nós que são iguais a menos da vizinhança de um cruzamento (ver fig. 1.4).

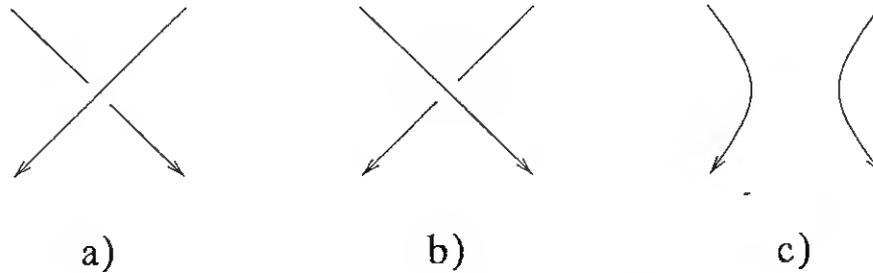


Figura 1.4. a) K_+ , b) K_- , c) K_0

Note-se que estas propriedades provam a unicidade de J . É fácil generalizar este invariante para enlaces impondo a condição

$$J(U^d) = 1,$$

onde U^d é o enlace trivial com d componentes conexas. Oficialmente isto não é o polinómio de Jones, mas é uma renormalização. A dificuldade que surge nesta definição é a demonstração da existência de J . É preciso construir este “polinómio”, que é um polinómio de Laurent em q e q^{-1} para qualquer nó. Adiamos esta construção do polinómio de Jones para o penúltimo capítulo, onde também damos uma construção do famoso *polinómio de HOMFLY* (*HOMFLY-polynomial*), que é uma generalização do polinómio de Jones. É a aplicação $H: \{\text{enlaces}\} \rightarrow \mathbf{Z}[x, x^{-1}, y, y^{-1}]$ tal que

- a) $H(K) = H(K')$ se $K \sim K'$,
- b) $H(U) = 1$,
- c) $xH(K_+) + x^{-1}H(K_-) = yH(K_0)$.

O polinómio de Jones foi inventado por Jones [16] em 1984 e provocou um grande entusiasmo entre os matemáticos interessados na teoria de nós. O entusiasmo era devido ao facto deste invariante ter propriedades bastante diferentes dos outros invariantes existentes naquela altura, como por exemplo o polinómio de Alexander (ver [1]). Além disso a construção de Jones sugeria uma relação profunda entre *R-matrizes* e invariantes de nós.

Definição 1.7. Uma *R-matriz* é um automorfismo $R \in \text{Aut}(V \otimes V)$, onde V é um espaço vectorial de dimensão finita sobre um corpo \mathbf{F} com característica 0 satisfazendo a equação de Yang-Baxter em $V \otimes V \otimes V$

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}.$$

R_{ij} significa que R actua só nos factores i e j deixando o outro factor igual. Esta equação aparece no trabalho de C.N. Yang e R.J. Baxter (ver [4,34]) e desempenha um papel fundamental na teoria de sistemas quânticos completamente integráveis e na teoria da mecânica quântica estatística. A importância destas R-matrizes para a teoria de nós é fácil de compreender e foi essencialmente descoberta por Jones em [16]. Considerando só o movimento de Reidemeister III obtemos uma equação parecida com a equação na definição 1.7. Associamos um automorfismo σ a um cruzamento com sinal positivo e σ^{-1} a um cruzamento com sinal negativo e multiplicamos os automorfismos de baixo para cima. Esta equação é

$$\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12} = \sigma_{23}\sigma_{12}\sigma_{23}.$$

As soluções desta equação chamam-se *operadores de Yang-Baxter (Y-B operators)*. A relação com as R-matrizes é fácil de exprimir. Seja P a matriz de permutação dos factores em $V \otimes V$, i.e. $P_{kl}^{ij} = \delta_l^i \delta_k^j$. Então R é uma R-matriz se e só se PR e RP são operadores de Yang-Baxter. Isto sugere que certas R-matrizes podem ser utilizadas para a construção de invariantes de nós. O primeiro a mostrar uma maneira de o fazer foi Turaev [32]. Num artigo posterior [33] generalizou a sua construção identificando melhor as estruturas algébricas que definem a ligação entre a teoria de nós e as R-matrizes. Para explicar esta ligação temos que introduzir a noção de *emaranhados (tangles)*.

Definição 1.8. *Sejam k e l dois números inteiros não negativos. Um emaranhado L do tipo (k, l) é a reunião disjunta de um número finito de subvariedades de $\mathbf{R}^2 \times [0, 1]$ difeomorfas com o intervalo $[0, 1]$ tal que o bordo de L satisfaça*

$$\partial L = L \cap (\mathbf{R}^2 \times \{0, 1\}) = ([k] \times \{0\} \times \{0\}) \cup ([l] \times \{0\} \times \{1\}).$$

($[n]$ designa o conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ para qualquer número inteiro não negativo.)



Figura 1.5. Um emaranhado

Os emaranhados do tipo $(0, 0)$ são precisamente os enlaces. Um emaranhado chama-se orientado quando as subvariedades que o definem são orientados. Daqui por diante todos os emaranhados neste trabalho são orientados. É fácil generalizar a noção de isotopia de ambiente para emaranhados. Dizemos também que um emaranhado está em posição geral

relativamente a $\mathbf{R} \times [0, 1]$ se $\pi: \mathbf{R}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} \times [0, 1]$ satisfaz as mesmas condições que no caso dos enlaces e

$$\partial\pi(L) = ([k] \times \{0\}) \cup ([l] \times \{0\}).$$

Também existe a generalização do teorema de Reidemeister em termos de diagramas de emaranhados. Daqui por diante quando falamos de emaranhados não especificamos se estamos a falar de emaranhados mesmo ou de diagramas de emaranhados. O contexto não deve deixar dúvidas sobre a interpretação. A vantagem dos emaranhados sobre enlaces é que formam uma categoria em termos matemáticos. Isso permite-nos analisar as suas propriedades em termos algébricos. Antes de definir esta categoria devemos dizer que houve dois matemáticos que tiveram esta ideia independentemente um do outro. Já mencionámos Turaev, cujos resultados em [33] vamos utilizar neste trabalho. O outro matemático que teve a ideia dos emaranhados foi Yetter. Em [35] ele define emaranhados pela primeira vez e em [11] Freyd e Yetter obtém resultados que também aparecem no trabalho de Turaev. A razão do autor utilizar os resultados de Turaev e não os de Yetter é simples. Quando o autor começou a trabalhar neste assunto não tinha os artigos de Yetter. De resto Yetter nunca publicou resultados que expliquem que tipo de operadores de Yang-Baxter induzem invariantes de enlaces. Ele limitou-se a indicar as estruturas algébricas importantes sem dar um algoritmo. Turaev preocupou-se com este problema em [32,33] e conseqüentemente utilizamos os seus resultados neste trabalho.

Vamos definir agora a categoria dos emaranhados orientados \mathcal{E} .

Definição 1.9. *Os objectos de \mathcal{E} são sequências finitas $\epsilon = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ em que $\epsilon_i = \pm 1$. Um morfismo entre $\epsilon = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ e $\zeta = \{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$ é uma classe de equivalência de emaranhados orientados do tipo (n, m) . Tanto em cima como em baixo, uma ponta de um fio (strand) é associada a $+1$ quando o fio é orientado para baixo nessa ponta e a -1 quando é orientado para cima. Note-se que n não precisa de ser igual a m . A sequência vazia também é considerada um objecto de \mathcal{T} e os endomorfismos deste objecto são as classes de equivalência de enlaces. A composição de dois morfismos f e g com alvo(g) = fonte(f) é obtida pondo f em cima de g . Portanto “lemos” os emaranhados de baixo para cima. A identidade em $\epsilon = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ é o emaranhado trivial com n fios soltos orientados conforme os ϵ_i .*

Mais tarde (cap. 5) mostraremos a vantagem desta interpretação dos emaranhados.

Só damos o teorema do Turaev no capítulo 5 porque falta ainda introduzir muita terminologia de estruturas algébricas nas categorias que estudamos. No entanto preferimos dar alternadamente definições e resultados parciais que envolvem estas definições em vez de dar uma lista sem fim de conceitos novos logo no princípio. Nesta linha de pensamento vamos estudar primeiro os conceitos algébricos que aparecem no estudo de uma subcategoria de \mathcal{E} . Esta subcategoria é formada pelas tranças (braids).

Definição 1.10. *Uma trança do tipo n é um emaranhado L do tipo (n, n) com alvo(L) = fonte(L) = $(+, \dots, +)$. O conjunto dos objectos de \mathcal{T} é portanto o conjunto dos números inteiros não negativos. Por definição a única trança do tipo 0 é o emaranhado vazio.*

A categoria das tranças \mathcal{T} é a seguinte.

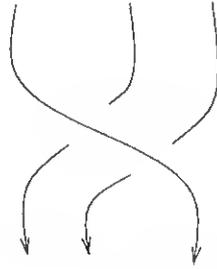
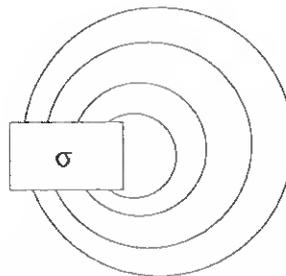


Figura 1.6. Uma trança

Definição 1.11. A categoria \mathcal{T} é a subcategoria de \mathcal{E} com os números inteiros não negativos como objectos. Um endomorfismo de n é uma classe de equivalência de tranças com n fios. Não há morfismos entre dois números diferentes.

No primeiro artigo sobre a relação de R-matrizes e invariantes de enlacs [32] Turaev não utilizou emaranhados mas tranças. Neste artigo Turaev utilizou a relação entre tranças e enlacs que é baseada no conceito do *fecho* (*closure*) de uma trança. Seja σ uma trança com n fios. Então o fecho $\bar{\sigma}$ de σ é por definição o enlace obtido por *fechar* σ como na fig. 1.7.

Figura 1.7. O fecho de uma trança, $\bar{\sigma}$

Há dois teoremas que mostram a relação entre tranças fechadas e enlacs.

Teorema 1.12. (Alexander, [1]) *Seja L um enlace qualquer. Então existe sempre uma trança σ da maneira que o enlace $\bar{\sigma}$ seja isotópico com L .*

Para compreender a relação entre tranças fechadas e enlacs, temos que estudar a relação de equivalência que a isotopia de ambiente nos enlacs induz no conjunto das tranças fechadas. Sejam β e τ tranças com o mesmo número de fios. É fácil ver que $\tau\beta\tau^{-1}$ é isotópico como enlace com $\bar{\beta}$ através de vários movimentos de Reidemeister II (ver fig. 1.8). Chamamos a $\tau\beta\tau^{-1}$ a trança conjugada de β por τ . Outras operações que não alteram a classe de isotopia do fecho de uma trança β são os chamados *movimentos de Markov* (Markov moves). Seja $\sigma_i = (\downarrow^{\otimes(i-1)} X^+ \downarrow^{\otimes(n-1-i)}) (\downarrow^{\otimes j}$ quer dizer j fios soltos orientados para

baixo, e para a definição de X^+ ver fig. 3.1). Se β tem n fios, então podemos mostrar que o fecho de $\beta\sigma_n^{\pm 1}$ é isotópico como enlace com $\bar{\beta}$ através de um movimento de Reidemeister I (ver fig. 1.9). O seguinte teorema de Markov mostra que estas operações bastam para obter a desejada relação de equivalência.

Teorema 1.13. (Markov, [5,6,19]) *Sejam σ_1 e σ_2 duas tranças. Então $\overline{\sigma_1}$ é isotópico com $\overline{\sigma_2}$ se e só se σ_1 pode ser obtido por σ_2 por um número finito das seguintes operações:*

- 1) isotopias de tranças (correspondentes a mov. de Reidemeister III),
- 2) conjugação por uma trança (correspondentes a mov. de Reidemeister II),
- 3) movimentos de Markov (correspondentes a mov. de Reidemeister I).

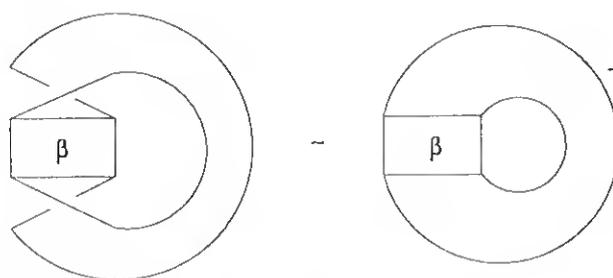


Figura 1.8. Conjugação por uma trança, $\overline{\tau\beta\tau^{-1}} = \bar{\beta}$

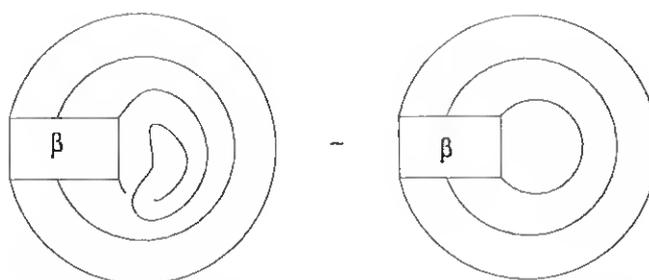


Figura 1.9. Um movimento de Markov, $\overline{\beta\sigma_n^{\pm 1}} = \bar{\beta}$

Para a ideia da prova do teorema 1.12 ver [19], para uma prova rigorosa ver [5,6]. Para uma prova do teorema 1.13 ver [5].

2. Categorias entrançadas

Supõe-se conhecida a noção de categoria, de functor entre duas categorias e de equivalência de duas categorias. Do nosso ponto de vista no entanto uma categoria em geral não tem estrutura suficiente. O leitor pode pensar no exemplo de um algebrista que não quer estudar conjuntos em geral mas sim aqueles que têm uma estrutura algébrica específica. No nosso caso queremos uma estrutura categórica análoga à estrutura algébrica de monoide.

Definição 2.1. *Uma categoria C chama-se monoidal se existe um functor $\otimes: C \times C \rightarrow C$ e um objecto I em C tais que*

$$(M \otimes N) \otimes L = M \otimes (N \otimes L)$$

e

$$I \otimes M = M \otimes I = M$$

para todos os objectos M, N e L de C .

Quando existem tal functor e tal objecto chama-se produto tensorial a \otimes e objecto unidade ou simplesmente unidade a I . Note-se que I , se existe, é único. Normalmente a este tipo de categorias chama-se categorias monoidais estritas. Em geral pode se substituir as igualdades em cima por isomorfismos que por sua vez têm que satisfazer outras igualdades. No entanto Mac Lane [24] prova que qualquer categoria monoidal é equivalente a uma categoria monoidal estrita. Com esta equivalência podemos tratar isomorfismos canónicos, que definem a associatividade e a unidade como no exemplo a seguir, como igualdades.

Exemplo 2.2. *O exemplo mais evidente de uma categoria monoidal é a categoria de espaços vectoriais de dimensão finita sobre um corpo \mathbf{F} , $\text{Vect}_{\mathbf{F}}$ com o produto tensorial normal e unidade \mathbf{F} .*

Em vez de espaços vectoriais em geral também se pode considerar a categoria H -mod de módulos de dimensão finita de uma álgebra H . Só que neste caso não sabemos definir o produto tensorial entre dois módulos M e N em H -mod. Podemos tomar o produto tensorial dos espaços vectoriais M e N , mas não sabemos definir a acção de H em $M \otimes N$. Para isso temos que introduzir a noção de *co-produto*.

Exemplo 2.3. *Uma bi-álgebra H sobre \mathbf{F} é uma algebra sobre \mathbf{F} com unidade 1 que além do produto tem um co-produto, que é um homomorfismo de algebras $\Delta: H \rightarrow H \otimes H$, e uma co-unidade, que é outro homomorfismo de algebras $\epsilon: H \rightarrow \mathbf{F}$ que satisfazem as seguintes regras:*

$$(\Delta \otimes id)\Delta = (id \otimes \Delta)\Delta$$

$$(\epsilon \otimes id)\Delta = (id \otimes \epsilon)\Delta = id.$$

A primeira regra chama-se co-associatividade e a segunda chama-se co-unicidade. Se pomos $\Delta(x) = \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)}$, então é fácil ver que a categoria de módulos de dimensão finita sobre H se torna numa categoria monoidal com a acção \triangleright de H em $M \otimes N$ definida por

$$x \triangleright (m \otimes n) = \sum x_{(1)} \triangleright m \otimes x_{(2)} \triangleright n.$$

A associatividade do produto tensorial é assegurado pela co-associatividade do co-produto de H .

Exemplos de bi-álgebras não são difíceis de encontrar.

Exemplo 2.4. A álgebra $\mathbf{F}[G]$ de um grupo finito G é naturalmente uma bi-álgebra com co-produto $\Delta(g) = g \otimes g$ e co-unidade $\epsilon(g) = 1$ para todos os $g \in G$. A dual de $\mathbf{F}[G]$, gerada pelas funções características em G , também é uma bi-álgebra, como aliás é sempre o caso da dual de uma bi-álgebra de dimensão finita. A estrutura de bi-álgebra é definida de seguinte maneira: produto $\delta_g \delta_h = \delta_h^g \delta_g$, unidade $\sum_{g \in G} \delta_g$, co-produto $\Delta(\delta_g) = \sum_{kl=g} \delta_k \otimes \delta_l$ e co-unidade $\epsilon(\delta_g) = \delta_e^g$.

Exemplo 2.5. A álgebra envolvente universal $U(\mathcal{G})$ de uma álgebra de Lie \mathcal{G} também é uma bi-álgebra com co-produto $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$ e co-unidade $\epsilon(x) = 0$ para todo o $x \in \mathcal{G}$.

Uma categoria monoidal extremamente importante, pelo menos neste trabalho, é a categoria das tranças \mathcal{T} . Veremos que esta categoria nos permite interpretar as propriedades topológicas de enlaces em termos algébricos, embora numa versão categórica. No primeiro parágrafo explicámos graficamente as tranças e mostrámos como é que formam uma categoria. Vamos definimos a estrutura monoidal de \mathcal{T} .

Exemplo 2.6. Para definir a estrutura monoidal temos que definir o produto tensorial nos objectos e nos morfismos. Se m e n são dois objectos em \mathcal{T} o seu produto tensorial é $m \otimes n = m + n$ e o produto tensorial $f \otimes g$ de dois morfismos $f \in \text{End}(n)$ e $g \in \text{End}(m)$ obtém-se pondo g ao lado direito de f . O objecto unidade é o 0.

Note que esta definição não é algébrica porque os morfismos continuam a ser objectos topológicos. Mais tarde vamos ter que definir \mathcal{T} de uma maneira estritamente algébrica e o resultado mais importante, obtido por Turaev em [33] e Shum em [31], é que as duas definições são equivalentes. Também existe a noção de functor monoidal, que é um functor $F: C \rightarrow D$ de uma categoria monoidal C para uma categoria monoidal D que respeita as estruturas monoidais, i.e. $F(M \otimes N) = F(M) \otimes F(N)$ e $F(I) = I$.

A vantagem de toda esta “categorificação” de monoides é que nos oferece mais estruturas possíveis. Por exemplo um monoide é comutativo ou não é, mas uma categoria monoidal também pode ser quase comutativa (quasi-comutative), ou seja a falta de comutatividade às vezes é controlável. Isto porque objectos não idênticos numa categoria podem ser isomorfos, o que pode ser considerado uma maneira controlada de serem diferentes. Esta hipótese não existe ao nível de monoides uma vez que dois elementos de um monoide são iguais ou não são. Para definir esta quase comutatividade temos que recorrer à definição de transformação natural (natural transformation).

Definição 2.7. Dados dois funtores $F, G: C \rightarrow D$ define-se uma transformação natural $\phi: F \rightarrow G$ como uma família de morfismos $\{\phi_X: F(X) \rightarrow G(X)\}$ em D indexados pelos objectos de C que satisfazem

$$\phi_Y F(f) = G(f) \phi_X$$

para quaisquer $X, Y \in \text{Obj}(C)$ e qualquer $f \in \text{Hom}(X, Y)$.

Um isomorfismo natural é uma transformação natural ϕ em que todos os morfismos ϕ_X são isomorfismos. Seja agora $\tau: C \times C \rightarrow C \times C$ o functor que troca a ordem dos factores no produto cartesiano, i.e. $\tau(M, N) = (N, M)$ e $\tau(f, g) = (g, f)$ para todos os objectos M, N e todos os morfismos f, g em C . Então podemos definir a quase comutatividade de seguinte maneira:

Definição 2.8. Uma categoria monoidal C chama-se quase comutativa se existe um isomorfismo natural c entre os funtores \otimes e $\otimes \tau$, i.e. que existem isomorfismos $c_{M,N}: M \otimes N \rightarrow N \otimes M$ para todos os objectos (M, N) de $C \times C$ que satisfazem

$$c_{M',N'}(f \otimes g) = (g \otimes f)c_{M,N}$$

para quaisquer $(M, N), (M', N') \in \text{Obj}(C \times C)$ e quaisquer $f \in \text{Hom}(M, M')$ e $g \in \text{Hom}(N, N')$.

Neste trabalho estamos interessados em categorias monoidais quase comutativas especiais, chamadas *categorias entrançadas (braided categories)*.

Definição 2.9. Uma categoria quase comutativa C chama-se entrançada se o isomorfismo natural c , a trança em C (braiding), entre os funtores \otimes e $\otimes \tau$ satisfaz as duas identidades triangulares

$$c_{L \otimes M, N} = (c_{L, N} \otimes \text{id}_M)(\text{id}_L \otimes c_{M, N})$$

e

$$c_{L, M \otimes N} = (\text{id}_M \otimes c_{L, N})(c_{L, M} \otimes c_N).$$

Note-se que há uma diferença entre uma *trança (braid)* e uma *trança numa categoria monoidal (braiding)*. No caso de $c^2 = \text{id}$ a trança chama-se simétrica. O primeiro artigo em que surge a definição de uma categoria monoidal entrançada é [17]. Só mais tarde aparecem as aplicações na teoria de nós em [32,33], [12], [31].

Exemplo 2.10. A categoria $\text{Vect}_{\mathbb{F}}$ é uma categoria monoidal simétrica com $c_{M,N} = \sigma_{M,N}$, onde σ é definido por

$$\sigma_{M,N}(m \otimes n) = n \otimes m.$$

Note que σ não é igual a τ porque σ é um isomorfismo natural e τ é um functor.

Exemplo 2.11. A categoria das tranças é também um exemplo de uma categoria entrançada, neste caso não simétrica. A trança é dada na figura 2.1. A prova das propriedades na definição 2.9 é gráfica e é dada nas figuras 2.2 e 2.3.

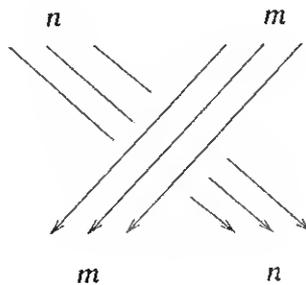


Figura 2.1. A trança $c_{m,n}$

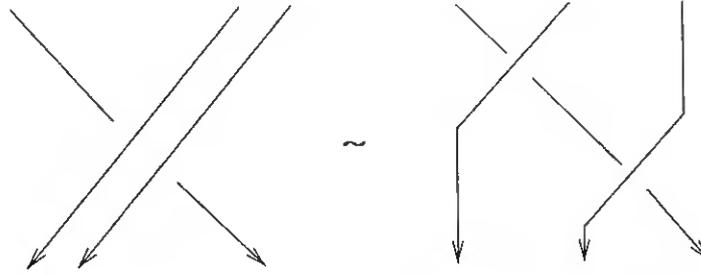


Figura 2.2. $c_{m+n,l} = (c_{m,n} \otimes \text{id})(\text{id} \otimes c_{n,l})$

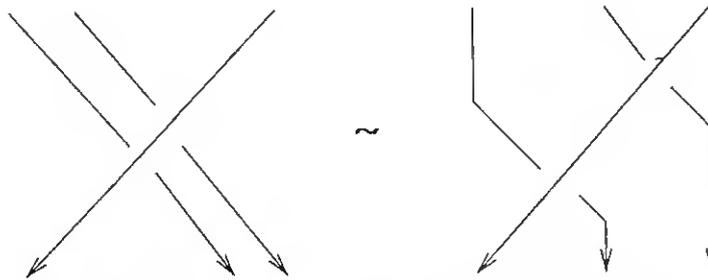


Figura 2.3. $c_{m,n+l} = (\text{id} \otimes c_{m,n})(c_{n,l} \otimes \text{id})$

Falta explicar quando as categorias no exemplo 2.3 são entrançadas. Como a acção de H no produto de dois módulos é dada pelo co-produto em H é lógico que para a categoria $H\text{-mod}$ ser “quase comutativa” H tenha que ser “quase co-comutativa”.

Definição 2.12. Uma bi-álgebra H chama-se quase co-comutativa se existe um elemento invertível $R \in H \otimes H$ que satisfaz

$$\bar{\Delta}(x) = R\Delta(x)R^{-1},$$

onde $\bar{\Delta}$ troca a ordem dos factores no co-produto, i.e. $\bar{\Delta}(x) = \sum x_{(2)} \otimes x_{(1)}$.

Uma bi-álgebra chama-se co-comutativa se $R = 1$. Para que a categoria $H\text{-mod}$ seja verdadeiramente entrançada temos que impôr mais duas condições.

Definição 2.13. Uma bi-álgebra quase co-comutativa chama-se entrançada se $R = \sum s_i \otimes t_i$ satisfaz as duas seguintes relações:

$$(\Delta \otimes \text{id})(R) = R_{13}R_{23} = \sum s_i \otimes s_j \otimes t_i t_j$$

e

$$(\text{id} \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12} = \sum s_i s_j \otimes t_j \otimes t_i.$$

Neste caso R chama-se a R -matriz universal de H .

O seguinte lema explica o termo “ R -matriz universal”.

Lema 2.14. *Seja H uma bi-álgebra entrançada, sendo R a R -matriz universal. Então R satisfaz*

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}.$$

Isto mostra que, em qualquer representação de H , a R -matriz universal induz uma verdadeira R -matriz, i.e. uma solução da equação de Yang-Baxter.

Dem.

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{12}((\Delta \otimes \text{id})(R)) = ((\bar{\Delta} \otimes \text{id})(R))R_{12} = R_{23}R_{13}R_{12}.$$

□

Não é difícil provar o seguinte lema.

Teorema 2.15. *Seja H uma bi-álgebra. A categoria monoidal $H\text{-mod}$ é entrançada se H é entrançada. No sentido contrário, se $H\text{-mod}$ é entrançada e H tem dimensão finita, então H é entrançada.*

Dem. Dada uma bi-álgebra entrançada com R -matriz universal $R = \sum s_i \otimes t_i$ define-se a trança em $H\text{-mod}$ por

$$c_{M,N}(m \otimes n) = \sigma_{M,N}(R \triangleright (m \otimes n)) = \sum (t_i \triangleright n) \otimes (s_i \triangleright m).$$

A condição na definição 2.12 garante que $c_{M,N}$ é um morfismo em $H\text{-mod}$ e é claro que as condições que listámos na definição de R -matriz universal implicam que c acima definida é realmente uma trança.

No sentido contrário, se $H\text{-mod}$ é entrançada e H tem dimensão finita então H é naturalmente um objecto em $H\text{-mod}$ com a acção dada pelo produto e podemos definir

$$R = \sigma_{H,H}(c_{H,H}(1 \otimes 1)).$$

Note que R é invertível, porque $\sigma_{H,H}$ e $c_{H,H}$ são isomorfismos. A naturalidade de c implica

$$c_{M,N}(m \otimes n) = (\bar{n} \otimes \bar{m})(c_{H,H}(1 \otimes 1)) = \sigma_{M,N}((\bar{m} \otimes \bar{n})(R)) = \sigma_{M,N}(R \triangleright (m \otimes n)),$$

onde $\bar{m}: H \rightarrow M$ e $\bar{n}: H \rightarrow N$ são as aplicações H -lineares definidas por $\bar{m}(1) = m$ e $\bar{n}(1) = n$. A H -linearidade de $c_{H,H}$ agora implica

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(x)R &= \sigma_{H,H}(\Delta(x)\sigma_{H,H}(R)) = \sigma_{H,H}(\Delta(x)c_{H,H}(1 \otimes 1)) \\ &= \sigma_{H,H}(c_{H,H}(\Delta(x))) = \sigma_{H,H}(\sigma_{H,H}(R\Delta(x))) = R\Delta(x) \end{aligned}$$

para todos os $x \in H$. É óbvio que as condições na definição 2.9 provam que R satisfaz condições na definição 2.13. □

Para dar um exemplo, não trivial, de uma bi-álgebra entrançada temos que elaborar exemplo 2.4 mais um pouco.

Exemplo 2.16. Vamos definir uma estrutura de bi-álgebra em $\mathbf{F}[G] \otimes \mathbf{F}(G)$ que não é a estrutura canónica no produto tensorial. Definimo-la de seguinte maneira:

$$(g \otimes \delta_h)(m \otimes \delta_n) = \delta_n^{m^{-1}hm}(gm \otimes \delta_n),$$

$$1 = \sum_{h \in G} (e \otimes h),$$

$$\Delta(g \otimes \delta_h) = \sum_{kl=h} (g \otimes \delta_k) \otimes (g \otimes \delta_l),$$

$$\epsilon((g \otimes \delta_h)) = \delta_e^h.$$

É um exercício fácil verificar que

$$R = \sum_{g,h \in G} (g \otimes \delta_h) \otimes (e \otimes \delta_g)$$

define uma R -matriz universal.

O leitor mais familiar com a teoria das bi-álgebras deve ter notado que este exemplo define o dobro quântico (*quantum double*) $D(G)$ de $\mathbf{F}[G]$. Esta construção em geral produz uma bi-álgebra entrançada a partir de uma bi-álgebra qualquer. A categoria das representações de $D(G)$ é mais difícil de descrever. Óbviamente um $D(G)$ -módulo terá que ser um espaço vectorial V com estruturas de $\mathbf{F}[G]$ -módulo e de $\mathbf{F}(G)$ -módulo ao mesmo tempo. As duas acções têm que ser compatíveis de maneira que V seja um *bimódulo cruzado* (*crossed bimodule*). Sem explicar o que é um bimódulo cruzado em geral, podemos dizer o que isto quer dizer neste caso particular. O leitor interessado pode ler [18,25] para saber mais. Não é difícil provar (ver [25]) que um $\mathbf{F}(G)$ -módulo é simplesmente um espaço vectorial G -graduado $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$, sendo a acção dada por $v \triangleleft a = v(a|v)$ com $a \in \mathbf{F}(G)$ e $v \in V$ um vector com grau $|v| \in G$. Note-se que a acção aqui é considerada uma acção à direita. A compatibilidade com a G -acção é agora fácil de descrever. Pode se provar que um $D(G)$ -módulo é precisamente um espaço vectorial G -graduado $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$, tal que $hV_g \subseteq V_{hgh^{-1}}$ para todos os $g, h \in G$. Seja agora $W = \bigoplus_{g \in G} W_g$ um outro $D(G)$ -módulo, então pode-se mostrar também que a trança $c_{V,W}$ definida no teorema 2.15 é a aplicação $c_{V,W}: V_g \otimes W_h \rightarrow W_h \otimes V_{hgh^{-1}}$ definida por $v \otimes w \mapsto w \otimes h \triangleright v$.

O dobro quântico foi inventado por Drinfeld [8,9,10] para mostrar que as álgebras de Hopf $U_h(\mathcal{G})$ são entrançadas, em que $U_h(\mathcal{G})$ é a quantização da álgebra universal envolvente de uma álgebra de Lie complexa semi-simples de dimensão finita \mathcal{G} . Estas bi-álgebras são os exemplos mais célebres dos grupos quânticos e Drinfeld mostrou que elas não são dobros quânticos elas próprias mas sim quocientes de dobros quânticos, o que basta para que sejam entrançadas (o termo que Drinfeld usa é *quasi-triangular*). Sem explicarmos a teoria dos grupos quânticos, que está ligado à teoria dos sistemas completamente integráveis na física, queremos dar o exemplo mais simples de $U_h(sl(2))$, a quantização da álgebra universal envolvente $U(sl(2))$ em que $sl(2)$ é a álgebra de Lie complexa semi-simples gerada por H, X_+, X_- com produto de Lie definida por $[H, X_\pm] = \pm 2X$, $[X_+, X_-] = H$.

Exemplo 2.17. $U_h(sl(2))$ é a álgebra não comutativa gerada sobre o anel $\mathbf{C}[[\hbar]]$ por 1 e H, X_+, X_- com relações

$$HX_+ - X_+H = 2X_+, \quad HX_- - X_-H = -2X_-, \quad X_+X_- - X_-X_+ = \frac{q^H - q^{-H}}{q - q^{-1}},$$

com $q = e^{\frac{\hbar}{2}}$. Isto forma uma bi-álgebra com

$$\Delta(H) = H \otimes 1 + 1 \otimes H, \quad \Delta(X_{\pm}) = X_{\pm} \otimes q^{\frac{H}{2}} + q^{-\frac{H}{2}} \otimes X_{\pm},$$

$$\epsilon(H) = \epsilon(X_{\pm}) = 0.$$

$U_h(sl(2))$ é entrançada sobre $\mathbf{C}[[\hbar]]$ com R-matriz universal

$$R = q^{\frac{H \otimes H}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - q^{-2})}{[n]!} (q^{H_2} X_+ \otimes q^{-\frac{H}{2}} X_-)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

com

$$[n] = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}, \quad [n]! = [n][n-1] \cdots [1].$$

O leitor já deve ter notado que temos o problema da convergência de R , que fica resolvido se usarmos o isomorfismo de álgebras

$$U_h(sl(2)) \cong U(sl(2))[[\hbar]]$$

e usarmos o produto tensorial topológico

$$U(sl(2))[[\hbar]] \bar{\otimes} U(sl(2))[[\hbar]] = (U(sl(2)) \otimes U(sl(2)))[[\hbar]].$$

Para o isomorfismo e os pormenores sobre este produto tensorial veja [Dri] e [Kas]. Em [Dri] Drinfeld também mostra que $U_h(sl(2))$ é um quociente do dobro quântico da subálgebra de Hopf gerada por H e X_+ , donde vem a fórmula de R .

Uma representação de $U_h(sl(2))$, por exemplo, é dada por

$$\rho(H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \rho(X_+) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(X_-) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Não é difícil ver que nesta representação R fica

$$\rho(R) = q^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q - q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix},$$

que é uma R-matriz como explicámos no teorema 2.15. Esta R-matriz é muito conhecida porque induz o “polinómio de Jones” (ver [16]). Explicaremos isto no penúltimo capítulo.

Exemplo 2.18. Em [15] Jimbo definiu deformações $U_q(\mathcal{G})$ ligeiramente diferentes de $U_h(\mathcal{G})$. De facto $U_q(\mathcal{G}) \subset U_h(\mathcal{G})$ para $q = e^{\frac{h}{2}}$. $U_q(sl(2))$ é a álgebra (não comutativa) livremente gerada por $1, q^{\frac{H}{2}}, q^{-\frac{H}{2}}, X_+, X_-$ e as relações

$$q^{\frac{H}{2}} q^{-\frac{H}{2}} = q^{-\frac{H}{2}} q^{\frac{H}{2}} = 1, q^{\frac{H}{2}} X_{\pm} - X_{\pm} q^{-\frac{H}{2}} = q^{\pm 1} X_{\pm}, X_+ X_- - X_- X_+ = \frac{q^H - q^{-H}}{q - q^{-1}}.$$

Isto forma uma álgebra de Hopf com

$$\begin{aligned} \Delta(q^{\pm \frac{H}{2}}) &= q^{\pm \frac{H}{2}} \otimes q^{\pm \frac{H}{2}}, \Delta(X_{\pm}) = X_{\pm} \otimes q^{\frac{H}{2}} + q^{-\frac{H}{2}} \otimes X_{\pm}, \\ \epsilon(q^{\pm \frac{H}{2}}) &= 1, \epsilon(X_{\pm}) = 0, S(q^{\pm \frac{H}{2}}) = q^{\mp \frac{H}{2}}, S(X_{\pm}) = -q^{\pm 1} X_{\pm}. \end{aligned}$$

Como se nota tomamos aqui q um número complexo qualquer e tudo é definido sobre \mathbb{C} . Sendo assim $U_q(sl(2))$ não é entrançada, porque R definida no exemplo 2.17 não é um elemento de $U_q(sl(2)) \otimes U_q(sl(2))$. A representação fundamental de $U_q(sl(2))$ é dada por

$$\rho(q^{\pm \frac{H}{2}}) = \begin{pmatrix} q^{\pm \frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & q^{\mp \frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

As representações de X_{\pm} são iguais às representações no exemplo 2.17.

3. A universalidade da categoria das tranças

Neste capítulo vamos mostrar a relação que existe entre a topologia das tranças e a estrutura algébrica das categorias entrançadas. Nesta relação os operadores de Yang-Baxter, e a sua generalização categórica, vão desempenhar um papel fundamental. Para isso temos primeiro que definir \mathcal{T} de uma maneira completamente algébrica, o que nos leva à noção de geradores de uma categoria monoidal. Na teoria de grupos muitas vezes utilizamos uma apresentação de um grupo por um número finito de elementos e um número finito de relações entre eles. Entende-se então que todos os elementos do grupo são produtos finitos de geradores e as relações entre os vários elementos do grupo são todos deduzíveis das relações entre os geradores. Um exemplo é o grupo diedral de ordem $2n$ que é gerado por ρ, σ com as relações $\rho^n = 1, \sigma^2 = 1$ e $\rho\sigma = \sigma\rho^{n-1}$. De uma maneira análoga pode se definir uma categoria monoidal por um número finito de morfismos geradores que satisfazem um número finito de relações.

Definição 3.1. Seja C uma categoria monoidal e f_1, \dots, f_m um número finito de morfismos em C . Então diz-se que C é gerada por f_1, \dots, f_m se todos os morfismos em C são composições finitas de produtos tensoriais de um número finito de morfismos $g_i, i = 1, \dots, k$ com $g_i = id_{V_i}$ ou $g_i \in \{f_1, \dots, f_m\}$ com V_i um objecto qualquer em C para todo o $i = 1, \dots, k$.

Do mesmo modo que temos relações entre elementos de um grupo podemos agora definir relações entre morfismos de uma categoria. Portanto uma relação \mathcal{R} em C é um conjunto de pares (f, g) com f e g morfismos em C . Dizemos que dois morfismos (h, j) são equivalentes modulo \mathcal{R} se existem factorizações $h = h_1 \cdots h_n$ e $j = j_1 \cdots j_n$ com $h_i = j_i$ ou $(h_i, j_i) \in \mathcal{R}$ para todo o $i = 1, \dots, n$. Aqui entende-se que \cdot pode ser o produto tensorial ou a composição em C .

Definição 3.2. Seja C uma categoria monoidal gerada por um número finito de morfismos f_1, \dots, f_n e \mathcal{R} uma relação entre estes geradores. Neste caso dizemos que C é gerada por f_1, \dots, f_n modulo \mathcal{R} se dois morfismos f e g em C são iguais em C se e só se f e g são equivalentes modulo \mathcal{R} .

Note que por C ser uma categoria monoidal \mathcal{R} tem que ter pelo menos os pares que definem associatividade e unicidade da composição e do produto tensorial e o par que define a lei distributiva entre a composição e o produto tensorial, i.e.

$$(f \otimes g)(f' \otimes g') = ff' \otimes gg'.$$

Dizemos que C é livremente gerada por f_1, \dots, f_n se \mathcal{R} só contém estes pares. Em geral não pomos explicitamente estas relações na definição de \mathcal{R} para poupar espaço. Deliberadamente fomos um pouco inexactos nas nossas definições para não aborrecer o leitor com demasiado formalismo categórico. Esperamos que a ideia tenha ficado clara e que o leitor interessado recorra a [33] ou [18] para definições mais técnicas. Vamos agora usar esta terminologia para definir \mathcal{T} algebricamente. Olhando bem para uma trança vemos que podemos sempre “manobrá-la” de forma que os cruzamentos fiquem em níveis diferentes. Depois podemos cortá-la entre os cruzamentos e obtemos um produto de sobre-cruzamentos e sub-cruzamentos. Dando os nomes X^+ e X^- às tranças “elementares” desenhadas na figura 3.1 vemos o seguinte.

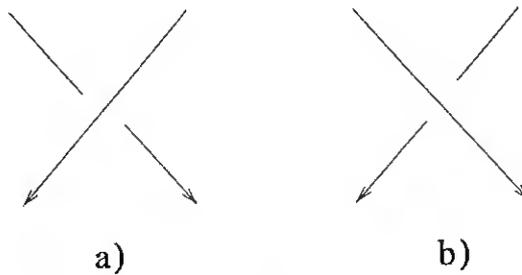


Figura 3.1. a) X^+ , b) X^-

Lema 3.3. A categoria monoidal \mathcal{T} é gerada por X^+ e X^- modulo

$$X^+X^- = X^-X^+ = id_2$$

e

$$(X^+ \otimes id_1)(id_1 \otimes X^+)(X^+ \otimes id_1) = (id_1 \otimes X^+)(X^+ \otimes id_1)(id_1 \otimes X^+).$$

Dem. A prova é óbvia pela definição das tranças. A classe de equivalência de uma trança L consta de todas as tranças que podem ser obtidas de L através de um número finito de:

- 1) isotopias de diagrama, correspondentes a relações do tipo

$$(id_{i-1} \otimes X^+ \otimes id_{n-1-i})(id_{j-1} \otimes X^+ \otimes id_{n-1-j})$$

$$= (\text{id}_{j-1} \otimes X^+ \otimes \text{id}_{n-1-j})(\text{id}_{i-1} \otimes X^+ \otimes \text{id}_{n-1-i})$$

com $|i - j| > 1$,

- 2) Movimentos de Reidemeister II, correspondentes à primeira condição neste lema,
- 3) Movimentos de Reidemeister III, correspondentes à segunda condição neste lema.

Relações do tipo

$$(f \otimes g)(f' \otimes g') = (ff' \otimes gg')$$

seguem da unicidade da composição e da distributividade da composição e do produto tensorial cujas relações estão sempre contidas em R , como foi explicado em cima. Explícitamente

$$\begin{aligned} & (\text{id}_{i-1} \otimes X^+ \otimes \text{id}_{n-1-i})(\text{id}_{j-1} \otimes X^+ \otimes \text{id}_{n-1-j}) \\ &= (\text{id}_{i-1} \otimes X^+ \otimes \text{id}_{j-i-1} \otimes X^+ \otimes \text{id}_{n-1-j}) \\ &= (\text{id}_{j-1} \otimes X^+ \otimes \text{id}_{n-1-j})(\text{id}_{i-1} \otimes X^+ \otimes \text{id}_{n-1-i}). \end{aligned}$$

Aqui assumimos $1 \leq i < j - 1 \leq n - 1$ o que basta para a prova. Para uma prova mais exacta deste lema o leitor pode ler o artigo do inventor das tranças, E. Artin [2,3]. \square

Agora sim temos uma definição completamente algébrica em termos de geradores e relações. Embora a maior parte das provas dos lemas e teoremas sobre \mathcal{T} vão ser gráficas por ser mais conveniente, podíamos provar tudo algebricamente usando as relações entre os geradores X^+ e X^- . De facto o lema 3.3 mostra que a cada desenho corresponde uma expressão algébrica e vice versa.

Temos um nome geral para morfismos como X^\pm .

Definição 3.4. *Seja V um objecto de uma categoria monoidal (C, \otimes, I) e c_V um automorfismo em $V \otimes V$. Então c_V chama-se um operador de Yang-Baxter em V se satisfaz*

$$(c_V \otimes \text{id})(\text{id} \otimes c_V)(c_V \otimes \text{id}) = (\text{id} \otimes c_V)(c_V \otimes \text{id})(\text{id} \otimes c_V).$$

Lema 3.5. *Em qualquer categoria monoidal entrançada a trança $c_{V,V}$ é um operador de Yang-Baxter em V .*

Dem. Temos

$$\begin{aligned} & (c_{V,V} \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes c_{V,V})(c_{V,V} \otimes \text{id}_V) = c_{V \otimes V, V}(c_{V,V} \otimes \text{id}_V) \\ &= (\text{id}_V \otimes c_{V,V})c_{V \otimes V, V} = (\text{id}_V \otimes c_{V,V})(c_{V,V} \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes c_{V,V}). \end{aligned}$$

A primeira e a terceira identidade são consequências directas das propriedades na definição 2.9 da trança c e a segunda identidade é uma consequência da naturalidade de c . \square

Também é fácil provar o seguinte lema:

Lema 3.6. *Seja $F: C \rightarrow D$ um functor monoidal entre duas categorias monoidais. Se $c_V \in \text{Aut}(V \otimes V)$ é um operador de Yang-Baxter num objecto V em C , então $F(c_V) \in \text{Aut}(F(V) \otimes F(V))$ é um operador de Yang-Baxter em $F(V)$.*

Podemos agora definir a *universalidade* da categoria \mathcal{T} .

Teorema 3.7. *Seja C uma categoria entrançada e V um objecto de C . Então existe um único functor monoidal $F: \mathcal{T} \rightarrow C$ com $F(1) = V$ que respeita as estruturas entrançadas, i.e. $F(X^+) = c_{V,V}$.*

Dem. A prova da unicidade e a prova da existência são essencialmente as mesmas. Exigimos que F seja monoidal, portanto, se $F(1) = V$ temos $F(n) = V^{\otimes n}$ e se $F(X^+) = c_{V,V}$ temos

$$F(\text{id}_i \otimes X^+ \otimes \text{id}_j) = \text{id}_{V^{\otimes i}} \otimes c_{V,V} \otimes \text{id}_{V^{\otimes j}}.$$

Também vemos

$$F(X^+)F(X^-) = F(X^+X^-) = F(\text{id}_2) = \text{id}_2,$$

portanto $F(X^-) = c_{V,V}^{-1}$. A unicidade e a existência são então consequências do lema 3.3□

Há, no entanto, uma maneira ligeiramente diferente de definir a universalidade de \mathcal{T} . Embora não nos traga nada de inesperado no caso das traças, só infelizmente alguns problemas técnicos, vai-nos preparar para o teorema que queremos provar no caso dos emaranhados (cor. 5.19) que classifica certas estruturas em categorias entrançadas. Definimos agora uma nova categoria $YB(C)$ partindo de uma categoria monoidal C .

Definição 3.8. *Os objectos de $YB(C)$ são pares (V, c_V) em que V é um objecto de C e c_V é um operador de Yang-Baxter em V . Um morfismo $f: (V, c_V) \rightarrow (W, c_W)$ em $YB(C)$ é um morfismo $f: V \rightarrow W$ em C tal que $(f \otimes f)c_V = c_W(f \otimes f)$. A identidade em (V, c_V) é simplesmente id_V .*

Precisamos de definir mais uma categoria para poder formular a universalidade de \mathcal{T} na sua versão mais geral.

Definição 3.9. *Sejam C e D duas categorias monoidais. Então $\text{Mon}(C, D)$ é a categoria monoidal dos funtores monoidais entre C e D . Os objectos de $\text{Mon}(C, D)$ são os funtores monoidais e os morfismos entre $F, G: C \rightarrow D$ são todas as transformações monoidais naturais entre F e G .*

Vamos definir um functor $\Theta: \text{Mon}(\mathcal{T}, C) \rightarrow YB(C)$ sendo C uma categoria monoidal qualquer. Supomos que temos um functor monoidal $F: \mathcal{T} \rightarrow C$. Sabemos que $c_{1,1} = X^+$ é um operador de Yang-Baxter em 1 na categoria \mathcal{T} , portanto o lema 3.5 implica que $c_V = F(c_{1,1})$ é um operador de Yang-Baxter em $V = F(1)$ na categoria C . Então podemos definir $\Theta(F) = (V, c_V)$. Falta agora definir Θ para morfismos. Seja $\eta: F \rightarrow G$ uma transformação natural em $\text{Mon}(\mathcal{T}, C)$, então $\eta_1: F(1) \rightarrow G(1)$ é um morfismo em C . Temos que verificar que η_1 satisfaz

$$(\eta_1 \otimes \eta_1)F(c_{1,1}) = G(c_{1,1})(\eta_1 \otimes \eta_1).$$

Mas isto sai directamente da naturalidade de η , portanto Θ define realmente um functor de $\text{Mon}(\mathcal{T}, C)$ para $YB(C)$. De facto é este functor que define a universalidade da categoria \mathcal{T} . Antes de dar o teorema da universalidade queremos relembrar a definição exacta de uma equivalência de categorias.

Definição 3.10. *Seja $F: C \rightarrow D$ um functor. Então F define uma equivalência de categorias se existe um functor $G: D \rightarrow C$ e isomorfismos naturais*

$$\eta: id_D \rightarrow FG \text{ e } \theta: GF \rightarrow id_C.$$

Esta definição não é muito prática para utilizar nas demonstrações que vamos dar, pelo que vamos dar um critério útil que mostra quando um functor $F: C \rightarrow D$ define uma equivalência.

Definição 3.11. *Dizemos que F é plenamente fiel se para qualquer par V, W de objectos em C a aplicação*

$$F: Hom_C(V, W) \rightarrow Hom_D(F(V), F(W))$$

é bijectiva. O functor F chama-se essencialmente sobrejectivo se para qualquer objecto V' em D existe um objecto V em C tal que $F(V)$ seja isomorfo com V' .

É fácil então mostrar o seguinte lema [18,24].

Lema 3.12. *O functor $F: C \rightarrow D$ é uma equivalência de categorias se e só se F é plenamente fiel e essencialmente sobrejectivo.*



Em termos menos exactos este lema mostra que duas categorias são equivalentes precisamente se as suas classes de objectos isomorfos são as mesmas e os morfismos entre dois objectos também.

O seguinte teorema aparece em [18]. Esta maneira de exprimir a universalidade das tranças é provavelmente de Kassel. O autor deste trabalho não a encontrou noutros sítios e Kassel não dá referências, mas o ingrediente principal é o lema 3.3 que foi provado por Artin [2,3].

Teorema 3.13. *Para qualquer categoria monoidal C o functor $\Theta: Mon(\mathcal{T}, C) \rightarrow YB(C)$, acima definido, é uma equivalência de categorias.*

Dem. Mostramos primeiro que Θ é plenamente fiel, i.e. Θ induz uma bijecção nos morfismos. Para isso construímos uma aplicação inversa à aplicação $\eta \rightarrow \eta_1$ acima mencionada. Seja $f: (F(1), F(c_{1,1})) \rightarrow (G(1), G(c_{1,1}))$ um morfismo em $YB(C)$ com $F, G \in Mon(B, C)$. Então temos que construir uma transformação natural monoidal $\eta(f): F \rightarrow G$ tal que $\eta_1(f) = f$. Isto será uma construção indutiva. Para $n = 0, 1$ temos $\eta_0(f) = id_I$, em que $I = F(0) = G(0)$ é o objecto unidade em C , e $\eta_1(f) = f$. Para $n > 1$ definimos $\eta_n(f)$ por indução

$$\eta_n(f) = f \otimes \eta_{n-1}(f).$$

A prova que desta maneira η_f define uma transformação natural monoidal reduz-se à demonstração de que

$$G(g)\eta_n(f) = \eta_n(f)F(g)$$

para qualquer $n \geq 0$ e para qualquer elemento g do grupo de tranças em n letras B_n . A prova é por indução e segue da propriedade monoidal de $\eta(f)$ e da naturalidade de f em relação a X^+ e deixamos, como exercício, ao leitor. O facto de Θ ser plenamente fiel é então consequência de $\eta_f(1) = f$ e de $\eta(\eta_1) = \eta$. A primeira identidade é satisfeita por

definição e a segunda é consequência do facto de η e $\eta(\eta_1)$ serem transformações naturais monoidais:

$$\begin{aligned} (\eta(\eta_1))_n &= (\eta(\eta_1))_{(n-1)\otimes 1} = (\eta(\eta_1))_{(n-1)} \otimes (\eta(\eta_1))_1 \\ &= \eta_{n-1} \otimes \eta_1 = \eta_{(n-1)\otimes 1} = \eta_n, \end{aligned}$$

sendo óbvios os casos $n = 0, 1$. Falta provar que Θ é essencialmente sobrejectivo. Mas isto é consequência imediata da prova do lema 3.3 porque lá só usámos o facto de $c_{V,V}$ ser um operador de Yang-Baxter. \square

Este lema tem um corolário importante para nós (a ambiguidade da palavra “nós” aqui é deliberada).

Corolário 3.14. *Seja V um espaço vectorial sobre k de dimensão finita. Qualquer R -matriz definida em $V \otimes V$ induz duas categorias entrançadas.*

Dem. É claro que (V, PR) e (V, RP) definam objectos de $YB(\text{Vect}_{\mathbf{F}})$, portanto podemos aplicar o teorema 3.13. Temos então dois funtores monoidais F_{PR} e F_{RP} de \mathcal{T} para $\text{Vect}_{\mathbf{F}}$. Como \mathcal{T} é uma categoria entrançada as respectivas imagens de F_{PR} e F_{RP} , que são subcategorias monoidais de $\text{Vect}_{\mathbf{F}}$, também são categorias entrançadas. Explicitamente as tranças são dadas por

$$PR(v_i \otimes v_j) = R_{ij}^{nm}(v_m \otimes v_n)$$

e

$$RP(v_i \otimes v_j) = R_{ji}^{mn}(v_m \otimes v_n).$$

\square

4. Categorias com fitas

Depois de ter estudado a categoria das tranças \mathcal{T} queremos agora estudar a sua generalização, a categoria dos emaranhados \mathcal{E} . Para a definição de todos os aspectos algébricos desta categoria temos que introduzir mais estruturas nas nossas categorias entrançadas. Estas estruturas chamam-se *dualidade* (*duality*) e *volta* (*twist*).

Definição 4.1. Uma categoria monoidal C tem dualidade esquerda se qualquer objecto V de C tem um objecto dual V^* em C e dois morfismos $b_V: I \rightarrow V \otimes V^*$ e $d_V: V^* \otimes V \rightarrow I$ que satisfazem

$$(id_V \otimes d_V)(b_V \otimes id_V) = id_V \quad e \quad (d_V \otimes id_{V^*})(id_{V^*} \otimes b_V) = id_{V^*}.$$

Numa categoria monoidal com dualidade esquerda pode-se definir o *morfismo adjunto* $f^*: V^* \rightarrow U^*$ de um morfismo $f: U \rightarrow V$ por

$$f^* = (d_V \otimes id_{U^*})(id_{V^*} \otimes f \otimes id_{U^*})(id_{V^*} \otimes b_U).$$

Exemplo 4.2. Na categoria monoidal $\text{Vect}_{\mathbf{F}}$ o dual esquerdo de um objecto V é simplesmente $\text{Hom}(V, \mathbf{F})$, o dual do espaço vectorial V , e $b_V = \text{coev}_V$ e $d_V = \text{ev}_V$, a co-avaliação e a avaliação. Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de V e $\{v^1, \dots, v^n\}$ a base dual, então coev_V e ev_V são as aplicações lineares definidas por

$$\text{coev}_V(1) = \sum v_i \otimes v^i \quad e \quad \text{ev}_V(v^i \otimes v_j) = \delta_j^i.$$

O adjunto de um morfismo f em $\text{Vect}_{\mathbf{F}}$ é a transposta da aplicação linear f .

Exemplo 4.3. A categoria monoidal $\mathbf{F}[G]\text{-mod}$ tem dualidade esquerda definida por

$$\langle g \triangleright f, v \rangle = \langle f, g^{-1} \triangleright v \rangle$$

para $g \in G$, $f \in V^* = \text{Hom}(V, \mathbf{F})$ onde V é um $\mathbf{F}[G]$ -módulo e $v \in V$. Depois prolonga-se esta definição para toda a $\mathbf{F}[G]$ por k -linearidade. Note-se que é mesmo necessário tomar g^{-1} nesta definição para definir uma estrutura de $\mathbf{F}[G]$ -módulo em V . As aplicações b_V e d_V são a coavaliação e a avaliação do espaço vectorial V , respectivamente.

Notamos, no entanto, que a categoria $H\text{-mod}$, com H uma bi-álgebra, não tem dualidade esquerda sempre porque H , em geral, não é gerada por elementos invertíveis. Para determinar quais as bi-álgebras que permitem dualidade na sua categoria de representações introduzimos a noção de *álgebra de Hopf* (*Hopf algebra*).

Definição 4.4. Uma bi-álgebra chama-se uma *álgebra de Hopf* se tem um *antípoda* (*antipode*), que é um anti-homomorfismo de bi-álgebras $S: H \rightarrow H$, que é o inverso de id_H no produto convolutivo, i.e.

$$(S * id_H)(x) = \sum S(x_{(1)})x_{(2)} = \epsilon(x)$$

e

$$(id_H * S)(x) = \sum x_{(1)}S(x_{(2)}) = \epsilon(x).$$

A categoria de H -módulos com H uma álgebra de Hopf tem dualidade esquerda definida por

$$\langle x \triangleright f, v \rangle = \langle f, S(x) \triangleright v \rangle$$

para $x \in H$, $f \in V^* = \text{Hom}(V, \mathbf{F})$ onde V é um H -módulo e $v \in V$. As aplicações b_V e d_V são outra vez coev_V e ev_V respectivamente. A demonstração que estas duas aplicações são H -lineares é simples e não a damos aqui.

Note-se que isto funciona precisamente porque assumimos que S é um anti-homomorfismo e que $\mathbf{F}[G]$ é de facto uma álgebra de Hopf com $S(g) = g^{-1}$ prolongado \mathbf{F} -linearmente para toda a $\mathbf{F}[G]$. Outros exemplos de álgebras de Hopf são as bi-álgebras nos exemplos 2.16 e 2.17.

Exemplo 4.5. O dobro quântico $D(G)$ é uma álgebra de Hopf com antípoda $S(g \otimes \delta_h) = g^{-1} \otimes \delta_{g^{-1}h^{-1}g}$.

Exemplo 4.6. A bi-álgebra $U_h(\mathfrak{sl}(2))$ é uma álgebra de Hopf com

$$S(X_{\pm}) = -q^{\pm} X_{\pm}, \quad S(H) = -H.$$

De facto a dualidade esquerda numa categoria monoidal qualquer “porta-se” de uma maneira muito semelhante à dualidade em $\text{Vect}_{\mathbf{F}}$.

Lema 4.7. Seja C uma categoria monoidal com dualidade esquerda.

- a) Se $f: V \rightarrow W$ e $g: U \rightarrow V$ são morfismos em C , então $(fg)^* = g^* f^*$, e $(\text{id}_V)^* = \text{id}_V$ para qualquer objecto V em C .
- b) Para qualquer triplo U, V, W de objectos em C temos bijecções canónicas

$$\text{Hom}(U \otimes V, W) \cong \text{Hom}(U, W \otimes V^*)$$

e

$$\text{Hom}(U^* \otimes V, W) \cong \text{Hom}(V, U \otimes W).$$

- c) Para qualquer par de objectos V, W em C , $(V \otimes W)^* \cong W^* \otimes V^*$.

Para a demonstração deste lema referimos a [18].

Uma categoria monoidal com dualidade esquerda muito importante é a categoria dos emaranhados \mathcal{E} . No primeiro parágrafo explicámos graficamente os emaranhados e mostrámos que formam uma categoria. Aqui definimos a sua estrutura monoidal entrançada com dualidade esquerda.

Exemplo 4.8. Naturalmente esta categoria tem uma estrutura monoidal da mesma maneira que \mathcal{T} . Também tem trança dada pela figura 2.1 só que agora os fios podem estar orientados para cima e para baixo independentemente uns dos outros. O dual esquerdo de $\epsilon = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ é $\epsilon^* = \{-\epsilon_n, \dots, -\epsilon_1\}$ e d_{ϵ} e b_{ϵ} estão definidas na figura 4.1. O adjunto de um emaranhado L é o emaranhado obtido por rotação sobre um ângulo de 180 graus à volta de um eixo horizontal perpendicular ao papel no meio do L .

Pode se pôr a seguinte questão: Se existe dualidade esquerda, então não existe dualidade direita também? Em todos os exemplos acima mencionadas existe de facto. Damos a definição primeiro.

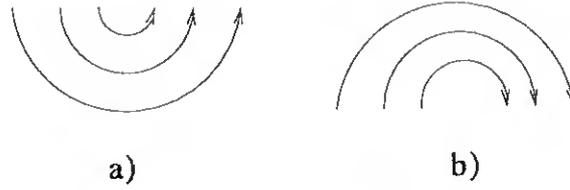


Figura 4.1. a) b_ϵ , b) d_ϵ

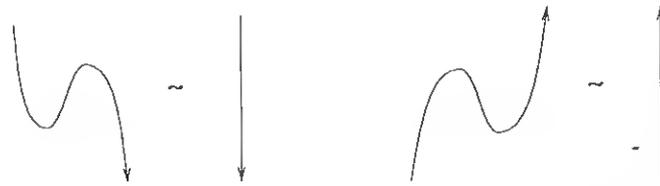


Figura 4.2. a) $(id_\epsilon \otimes d_\epsilon)(b_\epsilon \otimes id_\epsilon) = id_\epsilon$, b) $(d_\epsilon \otimes id_{\epsilon^*})(id_{\epsilon^*} \otimes b_\epsilon) = id_{\epsilon^*}$

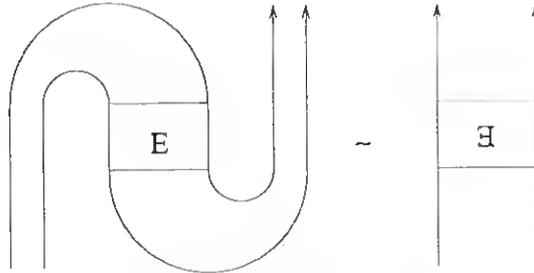


Figura 4.3. O adjunto

Definição 4.9. Diz-se que uma categoria monoidal C tem dualidade direita se cada objecto V em C tem um dual direito V^* e dois morfismos associados $b'_V: I \rightarrow V^* \otimes V$ e $d'_V: V \otimes V^* \rightarrow I$ que satisfazem

$$(d'_V \otimes id_V)(id_V \otimes b'_V) = id_V \quad e \quad (id_{V^*} \otimes d'_V)(b_V \otimes id_{V^*}) = id_{V^*}.$$

Neste caso cada morfismo $f: V \rightarrow W$ também tem um adjunto $f^*: W^* \rightarrow V^*$ definido por

$$f^* = (id_{V^*} \otimes d'_W)(id_{V^*} \otimes f \otimes id_{W^*})(b'_V \otimes id_{W^*}).$$

A dualidade direita tem propriedades semelhantes à dualidade esquerda.

Exemplo 4.10. A categoria $\text{Vect}_{\mathbb{F}}$ também tem dualidade direita. O dual direito do objecto V é outra vez o dual do espaço vectorial V e b'_V e d'_V são agora definidas por

$$b'_V(\mathbf{1}) = \sum v^i \otimes v_i \quad e \quad d'_V(v_i \otimes v^j) = \delta_i^j.$$

No entanto a dualidade esquerda e a dualidade direita não são iguais em geral.

Exemplo 4.11. Se H é uma álgebra de Hopf com antípoda invertível, então podemos definir $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{F})$ com

$$\langle x \triangleright f, v \rangle = \langle f, S^{-1}(x) \triangleright v \rangle .$$

As aplicações b'_V e d'_V são as mesmas do exemplo em cima. A razão de utilizarmos S^{-1} em vez de S para definir a dualidade direita é que só assim b'_V e d'_V são H -lineares.

Exemplo 4.12. Em \mathcal{E} também temos dualidade direita com ϵ^* igual e com b'_ϵ e d'_ϵ definidos como na figura 4.4.

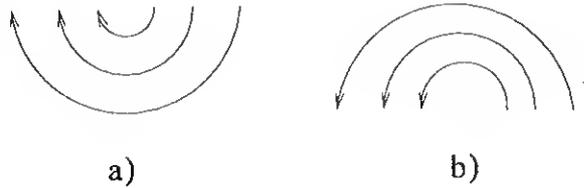


Figura 4.4. a) b'_ϵ , b) d'_ϵ

Neste últimos dois exemplos nota-se a diferença entre dualidade esquerda e direita. No entanto no último exemplo podemos relacioná-las como na figura 4.5. Como estamos interessados em “representações” de \mathcal{E} queremos definir exactamente o tipo de relação que as duas dualidades devem ter numa categoria entrançada com ambas. De facto veremos que basta ter uma delas e uma estrutura chamada *volta*.

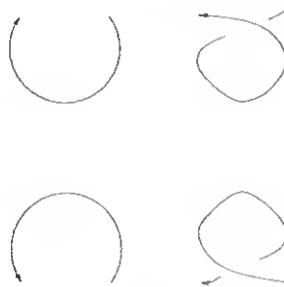


Figura 4.5

Seja C uma categoria entrançada com dualidade esquerda. Então podemos definir o isomorfismo natural $u \in \text{Nat}(\text{id}, *^2)$ por

$$u_V = (d_V \otimes \text{id}_{V^{**}})((c_{V, V^*} \otimes \text{id}_{V^{**}})(\text{id}_V \otimes b_{V^*}),$$

$$u_V^{-1} = (\text{id}_V \otimes d_{V^*})(c_{V^{**}, V} \otimes \text{id}_{V^*})(\text{id}_{V^{**}} \otimes b_V)$$

e o isomorfismo natural $v \in \text{Nat}(*^2, \text{id})$ por

$$\begin{aligned} v_V &= (d_{V^*} \otimes \text{id}_V)(\text{id}_{V^{**}} \otimes (c_{V, V^*})(\text{id}_{V^{**}} \otimes b_V)), \\ v_V^{-1} &= (d_V \otimes \text{id}_{V^{**}})(\text{id}_{V^*} \otimes c_{V^{**}, V})(b_{V^*} \otimes \text{id}_V). \end{aligned}$$

Lema 4.13. *Estes isomorfismos satisfazem*

$$\begin{aligned} u_{V \otimes W} &= c_{V, W}^{-1} c_{W, V}^{-1} (u_V \otimes u_W), \\ v_{V \otimes W} &= c_{V, W}^{-1} c_{W, V}^{-1} (v_V \otimes v_W), \\ f^{**} &= u_W f u_V^{-1} = v_W^{-1} f v_V, \end{aligned}$$

para todos os objectos V, W e todo o morfismo $f: V \rightarrow W$ em C .

Para a prova ver [25].

Definição 4.14. *Seja C uma categoria entrançada com dualidade esquerda. Uma volta é um isomorfismo natural θ em C tal que*

$$(\theta_V)^2 = v_V u_V, \theta_{V \otimes W} = (\theta_V \otimes \theta_W) c_{W, V} c_{V, W}, (\theta_V)^* = \theta_{V^*}$$

para todos os objectos V, W em C .

Uma categoria entrançada com dualidade esquerda chama-se *uma categoria com estrutura de fitas (ribbon category)* se tem volta. As duas referências para categorias com fitas são [17] e [30].

Seja H uma álgebra de Hopf entrançada com R-matriz universal $R = \sum s_i \otimes t_i \in H \otimes H$ e seja

$$u = \sum S(t_i) s_i.$$

É fácil provar que u é invertível, com inverso

$$u^{-1} = \sum t_i S^2(s_i).$$

Se pomos também

$$v = \sum s_i S(t_i),$$

então é fácil mostrar que v é invertível com

$$v^{-1} = \sum S^2(s_i) t_i$$

e $v = S(u)$. Também se vê facilmente, olhando simplesmente para as definições, que u_V e v_V em $H\text{-mod}$ são dadas pelas acções de u e v em V respectivamente. A volta em $H\text{-mod}$ vem de um elemento em H chamado a *fita (ribbon element)*.

Definição 4.15. Uma álgebra de fitas (ribbon algebra) H é uma álgebra de Hopf entrançada que tem um elemento central θ , a fita, que satisfaz

$$\theta^2 = vu, \Delta(\theta) = (R_{21}R)^{-1}(\theta \otimes \theta), \epsilon(\theta) = 1, S(\theta) = \theta.$$

Pelas observações acima é agora claro que temos o seguinte lema

Lema 4.16. Para qualquer álgebra de fitas H a sua categoria de representações de dimensão finita $H\text{-mod}$ é uma categoria de fitas. Reciprocamente se $H\text{-mod}$ é uma categoria de fitas com H uma álgebra entrançada de dimensão finita, então H é uma álgebra de fitas.

Dem. Se H é uma álgebra de fitas então é claro que a acção de θ define uma volta em $H\text{-mod}$. Reciprocamente, se H tem dimensão finita, então H é um objecto na categoria $H\text{-mod}$ pela acção natural, o produto em H . Podemos então definir $\theta = \theta_H(1)$. É fácil provar que desta maneira θ define uma fita em H . \square

Exemplo 4.17. O dobro quântico $D(G)$ é uma álgebra de fitas. Em $D(G)$ temos $u = v = \sum_{g \in G} g \otimes \delta_{g^{-1}}$. Portanto $\theta = u = v$ define uma fita em $D(G)$.

Exemplo 4.18. A álgebra de Hopf $U_h(sl(2))$ também é uma álgebra de fitas. É no entanto complicado calcular a fita θ explicitamente. É mais fácil calcular a acção de θ na representação de $U_h(sl(2))$ que demos a seguir ao exemplo 2.17. Nesta representação temos

$$u = \begin{pmatrix} q^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & q^{-\frac{5}{2}} \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} q^{-\frac{5}{2}} & 0 \\ 0 & q^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \theta = \begin{pmatrix} q^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & q^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}.$$

Damos a prova no lema a seguir. Este lema foi provado pelo autor em [23] e é uma versão "dual" do teorema 4.2.2 em [25].

Lema 4.19. Seja H uma álgebra de Hopf entrançada com R -matriz universal R . Seja M um H -módulo de dimensão finita e seja $\rho_{M \otimes M}(R) = R$ a representação de R em $M \otimes M$. Então R é bi-invertível (ver introdução) e pondo

$$\tilde{R} = ((R^{t_2})^{-1})^{t_2},$$

obtemos $U_j^i = \rho_M(u)_j^i = \tilde{R}_{j\alpha}^{\alpha i}$ e $V_j^i = \rho_M(v)_j^i = \tilde{R}_{\alpha j}^{i\alpha}$.

Dem. Primeiro provamos que R é bi-invertível mostrando que

$$\rho_{M \otimes M}((\text{id} \otimes S)R) = \tilde{R}.$$

Seja $R = \sum s_i \otimes t_i$. Temos então

$$\begin{aligned} 1 &= (\text{id} \otimes \epsilon)(R) = (\text{id} \otimes (S * \text{id}))(R) = (\text{id} \otimes \mu)(\text{id} \otimes S \otimes \text{id})(\text{id} \otimes \Delta)(R) \\ &= (\text{id} \otimes \mu)(\text{id} \otimes S \otimes \text{id})(R_{13}R_{12}) = \sum s_i s_j \otimes S(t_j) t_i. \end{aligned}$$

Portanto

$$\delta_c^a \delta_d^b = \rho_{M \otimes M}(\sum s_i s_j \otimes S(t_j) t_i)_{cd}^{ab}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum \rho_M(s_i)_\alpha^a \rho_M(s_j)_c^\alpha \rho_M(S(t_j))_\beta^b \rho_M(t_i)_d^\beta \\
 &= \rho_{M \otimes M}(\sum s_i \otimes t_i)_{\alpha d}^{a \beta} \rho_M(\sum s_j \otimes S(t_j))_{c \beta}^{\alpha b} = R_{\alpha d}^{a \beta} \tilde{R}_{c \beta}^{\alpha b}.
 \end{aligned}$$

A prova das outras afirmações no teorema é fácil agora.

$$U_j^i = \rho_M(\sum S(t_i) s_i)_j^i = \tilde{R}_{j \alpha}^{\alpha i},$$

$$V_j^i = \rho_M(\sum s_i S(t_i))_j^i = \tilde{R}_{\alpha j}^{i \alpha}.$$

□

Do lado topológico também temos uma estrutura de fitas como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 4.20. A estrutura de fitas em \mathcal{E} é dada na figura 4.6. A prova é gráfica e mostramos nas figuras 4.7.

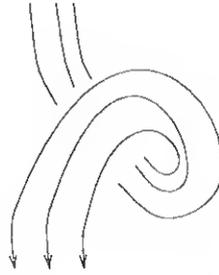


Figura 4.6. θ_ϵ

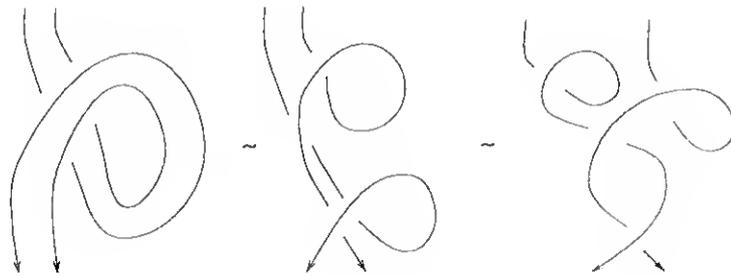


Figura 4.7. $\theta_{\epsilon \otimes \epsilon'} = \theta_\epsilon \otimes \theta_{\epsilon'} c_{\epsilon', \epsilon} c_{\epsilon, \epsilon'}$

5. A universalidade da categoria dos emaranhados

Queremos agora definir \mathcal{E} algébricamente tal e qual como fizemos no caso de \mathcal{T} . A diferença é que agora temos mais geradores e mais relações mas a ideia é a mesma. A categoria monoidal \mathcal{E} é gerada por seis morfismos como mostra o seguinte teorema de Turaev (ver também [12]).

Teorema 5.1. *A categoria monoidal \mathcal{E} é gerada pelos seis morfismos*

$$X^+, X^-, U^+, U^-, \cap^+, \cap^-,$$

módulo as relações

$$(\downarrow \cap^+)(U^+ \downarrow) = \downarrow = (\cap^- \downarrow)(\downarrow U^-), \quad (5.1)$$

$$(\uparrow \cap^-)(U^- \uparrow) = \uparrow = (\cap^+ \uparrow)(\uparrow U^+), \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} & (\cap^+ \uparrow\uparrow)(\uparrow \cap^+ \downarrow\uparrow\uparrow)(\uparrow\uparrow X^\pm \uparrow\uparrow)(\uparrow\uparrow\downarrow U^+ \uparrow)(\uparrow\uparrow U^+) \\ &= (\uparrow\uparrow \cap^-)(\uparrow\uparrow\downarrow \cap^- \uparrow)(\uparrow\uparrow X^\pm \uparrow\uparrow)(\uparrow U^- \downarrow\uparrow\uparrow)(U^- \uparrow\uparrow), \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$X^+ X^- = X^- X^+ = \downarrow\downarrow, \quad (5.4)$$

$$(X^+ \downarrow)(\downarrow X^+)(X^+ \downarrow) = (\downarrow X^+)(X^+ \downarrow)(\downarrow X^+), \quad (5.5)$$

$$(\downarrow \cap^-)(X^\pm \uparrow)(\downarrow U^+) = \downarrow, \quad (5.6)$$

$$(\cap^+ \downarrow\uparrow)(\uparrow X^\mp \uparrow)(\uparrow\downarrow U^+)(\uparrow\downarrow \cap^-)(\uparrow X^\pm \uparrow)(U^- \downarrow\uparrow) = \downarrow\uparrow, \quad (5.7)$$

$$(\uparrow\downarrow \cap^-)(\uparrow X^\pm \uparrow)(U^- \downarrow\uparrow)(\cap^+ \downarrow\uparrow)(\uparrow X^\mp \uparrow)(\uparrow\downarrow U^+) = \uparrow\downarrow. \quad (5.8)$$



Figura 5.1. Os geradores de \mathcal{T}

Para a demonstração, que é um bocado exaustiva, referimos a [18,33]. No entanto provamos aqui o seguinte lema que é um constituinte importante da demonstração do teorema 5.1.

Lema 5.2. *Temos as seguintes relações em \mathcal{E}*

$$Y^\pm = (\uparrow\downarrow \cap^-)(\uparrow X^\pm \uparrow)(U^- \downarrow\uparrow), \quad (5.9)$$

$$T^\pm = (\cap^+ \downarrow\uparrow)(\uparrow X^\pm \uparrow)(\uparrow\downarrow U^+), \quad (5.10)$$

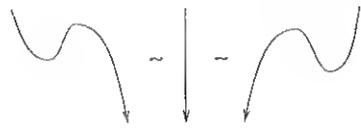
$$Z^\pm = (\cap^+ \uparrow\uparrow)(\uparrow \cap^+ \downarrow\uparrow\uparrow)(\uparrow\uparrow X^\pm \uparrow\uparrow)(\uparrow\uparrow\downarrow U^+ \uparrow)(\uparrow\uparrow U^+), \quad (5.11)$$

$$Z^\pm = (\uparrow\uparrow \cap^-)(\uparrow\uparrow\downarrow \cap^- \uparrow)(\uparrow\uparrow X^\pm \uparrow\uparrow)(\uparrow U^- \downarrow\uparrow\uparrow)(U^- \uparrow\uparrow). \quad (5.12)$$

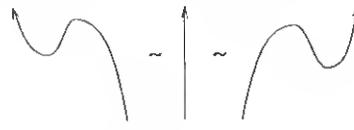
Dem.

□

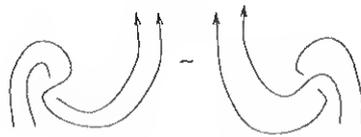
Podemos agora definir a universalidade de \mathcal{E} .



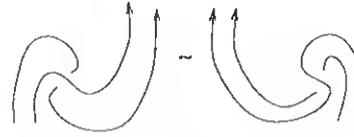
Rel. 5.1



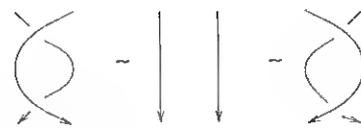
Rel. 5.2



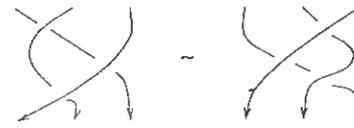
Rel. 5.3



Rel. 5.3



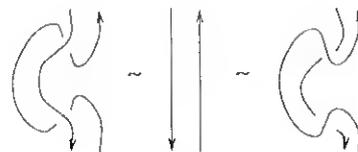
Rel. 5.4



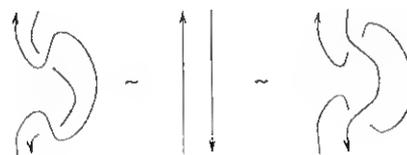
Rel. 5.5



Rel. 5.6

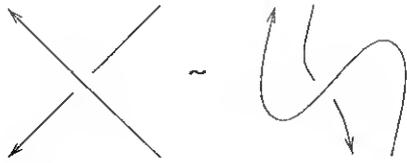


Rel. 5.7

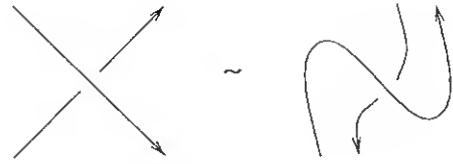


Rel. 5.8

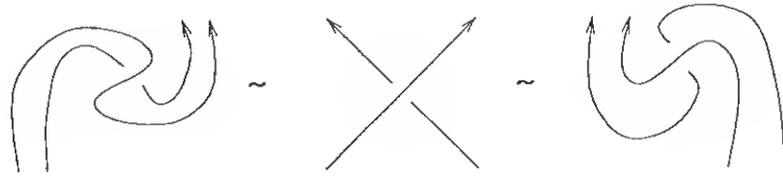
Figura 5.2. As relações que geram \mathcal{T}



Rel. 5.9



Rel. 5.10



Rel. 5.11 e Rel. 5.12

Teorema 5.3. *Dada uma categoria com fitas C e um objecto V em C tal que $\theta_V = id_V$ existe um único functor $F: \mathcal{E} \rightarrow C$ com $F(+1) = V$ que respeita as respectivas estruturas de fitas, i.e. F satisfaz $F(-1) = V^*$ e*

$$F(X^+) = c_{V,V}, \quad F(X^-) = c_{V,V}^{-1}, \quad F(U^+) = b_V,$$

$$F(\cap^+) = d_V, \quad F(U^-) = c_{V,V} \cdot b_V, \quad F(\cap^-) = c_{V,V} \cdot d_V.$$

A ideia da prova deste teorema consiste em verificar que F , unicamente determinada pelas suas imagens nos geradores de \mathcal{E} , respeita as relações em \mathcal{E} . Referimos a [18,30] para pormenores técnicos. Devemos mencionar o trabalho de Shum [31] também. Ele provou uma generalização do teorema, mostrando que a *categoria das fitas (category of ribbons)* é equivalente à categoria com fitas livremente gerada num objecto. Neste trabalho não damos a definição da categoria das fitas e portanto não podemos mostrar o resultado de Shum. Referimos o autor interessado aos trabalhos acima mencionados.

Embora este teorema descreva precisamente a estrutura necessária para que uma categoria induza uma representação de \mathcal{E} o nosso problema ainda não ficou resolvido. Relembramos o leitor que pretendíamos encontrar um critério que explicasse precisamente que tipo de operadores de Yang-Baxter numa categoria monoidal induz representações de \mathcal{E} .

Daqui por diante tomamos sempre $C = \text{Vect}_{\mathbb{F}}$. Embora seja possível generalizar todos os resultados para categorias monoidais arbitrárias, só nos interessa o caso em que os objectos são espaços vectoriais porque queremos estudar a relação entre R -matrizes e enlases. Neste caso as provas também são mais fáceis e transparentes. Em [33] Turaev resolve uma parte do problema.

Definição 5.4. *Seja V um espaço vectorial de dimensão n . Um operador de Yang-Baxter $\sigma \in \text{Aut}(V \otimes V)$ chama-se aumentável se existe um automorfismo $\mu \in \text{Aut}(V)$ tal que*

$$\sigma(\mu \otimes \mu) = (\mu \otimes \mu)\sigma,$$

$$\text{tr}_2(\sigma^{\pm 1}(\text{id}_V \otimes \mu) = \text{id}_V,$$

$$(\tau\sigma^{\pm 1})^{t_1}(\text{id}_{V^*} \otimes \mu)(\sigma^{\pm 1}\tau)^{t_1}(\text{id}_{V^*} \otimes \mu^{-1}) = \text{id}_{V^* \otimes V}.$$

Aqui tr_2 é o traço relativamente ao primeiro factor, t_1 é a transposta no primeiro factor e τ é a permutação dos dois factores em $V \otimes V$.

Teorema 5.5. Dado um operador de Yang-Baxter $\sigma \in \text{Aut}(V \otimes V)$ aumentável com $\mu \in \text{Aut}(V)$ existe um único functor monoidal $F_{(\sigma, \mu)}: \mathcal{E} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{F}}$ tal que $F_{(\sigma, \mu)}((+)) = V$, $F_{(\sigma, \mu)}((-)) = V^*$, e

$$F_{(\sigma, \mu)}(X^+) = \sigma, \quad F_{(\sigma, \mu)}(\cup^+) = \text{coev}_V, \quad F_{(\sigma, \mu)}(\cup^-) = (\text{id}_{V^*} \otimes \mu^{-1})\text{coev}_{V^*}.$$

Neste caso temos automaticamente

$$F_{(\sigma, \mu)}(X^-) = \sigma^{-1}, \quad F_{(\sigma, \mu)}(\cap^+) = \text{cv}_V, \quad F_{(\sigma, \mu)}(\cap^-) = \text{ev}_{V^*}(\mu \otimes \text{id}_{V^*}).$$

Reciprocamente, se $F: \mathcal{E} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{F}}$ é um functor monoidal com $F((+)) = V$, $F(X^+) = \sigma$ e $F(\cup^+) = \text{coev}_V$, então existe um único $\mu \in \text{Aut}(V)$ tal que (σ, μ) é um operador de Yang-Baxter aumentado e $F_{(\sigma, \mu)} = F$.

Dem. A demonstração da primeira parte deste teorema é uma verificação simples das relações em \mathcal{E} . Sem verificar estas relações aqui por extenso, podemos dizer a que relações é que correspondem as condições que fazem de (σ, μ) um operador aumentado. A primeira condição é simplesmente a naturalidade de μ em relação ao operador de Yang-Baxter σ , a segunda condição corresponde à relação 5.6 (Reidemeister I) e a última condição corresponde precisamente às relações 5.7 e 5.8 (Reidemeister II).

Por outro lado, se temos uma representação $F: \mathcal{E} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{F}}$, então é fácil ver que (σ, μ) é um operador de Yang-Baxter com $\sigma = F(X^+)$ e $\mu = (F(\cap^-) \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes b_{V^*})$. Aqui identificámos V com V^{**} . \square

Esta solução não é algorítmica no entanto. Em [23] o autor deste trabalho encontrou um critério para determinar se uma R -matriz é aumentável ou não. Esse critério é baseado na seguinte observação. Já explicámos que numa categoria com estrutura de fitas a dualidade esquerda e a dualidade direita são relacionadas pela fórmula

$$b'_V = c_{V, V^*} b_V \quad \text{e} \quad d'_V = d_V c_{V, V^*}.$$

O exemplo mais importante que demos foi o de \mathcal{E} (ver fig. 4.5). Seja (c_V, μ) um operador de Yang-Baxter aumentado. Então o lema 5.2 implica que o functor $F: \mathcal{E} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{F}}$, induzido por (V, c_V, μ) , satisfaz

$$\begin{aligned} F(Y^\pm) &= F(T^\mp)^{-1} = (F(\cap^+ \downarrow \uparrow) F(\uparrow X^\mp \uparrow) F(\uparrow \downarrow \cup^+))^{-1} \\ &= ((d_V \otimes \text{id}^{\otimes 2})(\text{id} \otimes X^\mp \otimes \text{id})(\text{id}^{\otimes 2} \otimes b_V))^{-1}. \end{aligned}$$

Estas considerações explicam a origem das seguintes definições e do teorema 5.14.

Definição 5.6. Sejam X, Y, V, W objectos em $\text{Vect}_{\mathbb{F}}$. Para um morfismo $f: X \otimes V \rightarrow W \otimes Y$ definimos o segundo adjunto $f^{\#}: W^* \otimes X \rightarrow Y \otimes V^*$ por

$$f^{\#} = (d_W \otimes \text{id}^{\otimes 2})(\text{id} \otimes f \otimes \text{id})(\text{id}^{\otimes 2} \otimes b_V).$$

Definição 5.7. Seja V um objecto em $\text{Vect}_{\mathbb{F}}$. Um operador de Yang-Baxter c_V em V chama-se bi-invertível se e só se c_V e $c_V^{\#}$ são invertíveis.

Dado um operador de Yang-Baxter bi-invertível, c_V , podemos definir dois morfismos importantes em C . O morfismo $u_V: V \rightarrow V$ definido por

$$u_V = (d_V \otimes \text{id}_V)((c_V^{\#})^{-1} \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes b_{V^*})$$

e o morfismo $v_V: V \rightarrow V$ definido por

$$v_V = (d_{V^*} \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes (c_V^{\#})^{-1})(\text{id}_V \otimes b_V).$$

Não é difícil provar que $(c_V^{-1})^{\#}$ é invertível se e só se $c_V^{\#}$ é invertível, utilizando as identidades

$$(\text{id}_{V^*} \otimes u_V^{-1})((c_V^{\#})^{-1})^*(u_V \otimes \text{id}_{V^*}) = (c_V^{-1})^{\#}$$

e

$$(\text{id}_{V^*} \otimes u_V^{-1})(c_V^{\#})^*(u_V \otimes \text{id}_{V^*}) = ((c_V^{-1})^{\#})^{-1}.$$

Aqui não precisamos deste resultado, no entanto, porque vai ser uma consequência do teorema 5.14. Não provamos as identidades em cima portanto. Uma consequência directa das considerações em cima e as construções no teorema 5.5 é que, sendo (c_V, μ) ainda o operador de Yang-Baxter aumentado, c_V é bi-invertível e o aumento μ é igual ao isomorfismo u_V acima definido. Note-se também que o movimento de Reidemeister I implica que v_V é o inverso de u_V .

Definição 5.8. Seja V um objecto em $\text{Vect}_{\mathbb{F}}$. Um operador de Yang-Baxter c_V chama-se extensível se e só se c_V é bi-invertível e $v_V u_V = \text{id}_V$ e $u_V v_V = \text{id}_V$.

Vamos tornar isto um pouco mais claro e definir tudo em termos de R -matrizes. Recordamos que PR e RP definem ambos operadores de Yang-Baxter, se R é uma R -matriz (ver cor. 3.14).

Definição 5.9. Uma R -matriz diz-se bi-invertível se R e R^{t_2} são invertíveis.

Note-se que $(R^{t_2})^* = R^{t_1}$, portanto R^{t_2} é invertível se e só se R^{t_1} é invertível. Nos lemas 5.10, 5.11, 5.13 e no teorema 5.14 trabalhamos sempre com a dualidade normal em $\text{Vect}_{\mathbb{F}}$.

Lema 5.10. A R -matriz R é bi-invertível se e só se os operadores de Yang-Baxter PR e RP são bi-invertíveis.

Como vamos ver PR é bi-invertível se e só se RP é bi-invertível, portanto a afirmação no lema não é ambígua.

Dem. Obviamente R é invertível se e só se PR é invertível e se e só se RP é invertível. Para provar o resto basta mostrar que $(PR)^\# = R^{t_2}P$ e $(RP)^\# = PR^{t_2}$. Utilizando as definições obtemos

$$(PR)^\#(f^a \otimes e_b) = R_{bd}^{ca}e_c \otimes f^d = R^{t_2}(e_b \otimes f^a) = R^{t_2}P(f^a \otimes e_b),$$

e

$$(RP)^\#(f^a \otimes e_b) = R_{db}^{ac}e_c \otimes f^d = P(R_{db}^{ac}f^d \otimes e_c) = PR^{t_2}(f^a \otimes e_b).$$

□

Se R é bi-invertível podemos definir

$$\tilde{R} = ((R^{t_2})^{-1})^{t_2},$$

e

$$U_j^i = \tilde{R}_{j\alpha}^{\alpha i} \quad \text{e} \quad V_j^i = \tilde{R}_{\alpha j}^{i\alpha}.$$

Aqui utilizámos novamente a convenção de adição de Einstein.

Lema 5.11. *Seja R uma R -matriz bi-invertível, então $u_V = V$ e $u_V = U$ para $c_V = PR$. Para $c_V = RP$ obtemos $u_V = V$ e $v_V = U$.*

Dem. Provamos só o caso $c_V = PR$. Utilizando as definições verifica-se

$$u_V(e_a) = \tilde{R}_{a\alpha}^{\alpha b}(e_b) = Ue_a$$

e

$$v_V(e_a) = \tilde{R}_{\alpha a}^{b\alpha}(e_b) = Ve_a.$$

□

Definição 5.12. *Dizemos que R é extensível se R é bi-invertível e $VU = I$.*

Uma consequência imediata é o seguinte lema.

Lema 5.13. *Seja R uma R -matriz. O operador de Yang-Baxter PR (resp. RP) é extensível se e só se R é extensível.*

É claro que é sempre possível determinar se uma R -matriz é extensível ou não. Portanto o seguinte lema dá-nos o algoritmo desejado.

Teorema 5.14. *Seja R uma R -matriz. R é extensível se e só se (RP, V) e (PR, U) são operadores de Yang-Baxter aumentados.*

Dem. Se (RP, V) (ou (PR, U)) é um operador de Yang-Baxter aumentado, então induz uma representação de \mathcal{E} (teom. 5.5). Pelas considerações acima é claro que nesse caso R é extensível.

Reciprocamente, se R é extensível podemos provar que (RP, V) satisfaz todas as condições na definição 5.4. Para a demonstração utilizamos as igualdades $V_1 = \tilde{R}V_1R$ e

$V_2 = RV_2\tilde{R}$, onde $V_1 = V \otimes I$ e $V_2 = I \otimes V$ (para estas igualdades ver no livro de Majid [25]). Em primeiro lugar provamos que $V \otimes V = V_1V_2 = V_2V_1$ comuta com R :

$$RPV_1V_2 = RV_2PV_2 = RV_2V_1P = V_2\tilde{R}^{-1}V_1P = V_2V_1RP.$$

A seguir provamos as condições nos traços parciais.

$$(\text{Tr}_2(RPV_2))_c^a = (RPV_2)_{cd}^{ad} = R_{ji}^{ad}(I \otimes V)_{cd}^{ij} = R_{ji}^{ad}\delta_c^i V_d^j = R_{jc}^{ad}\tilde{R}_{kd}^{jk} = \delta_k^a \delta_c^k = \delta_c^a,$$

$$\begin{aligned} (\text{Tr}_2((RP)^{-1}V_2))_c^a &= ((RP)^{-1}V_2)_{cd}^{ad} = (PR^{-1}V_2)_{cd}^{ad} = (PR^{-1}RV_2\tilde{R})_{cd}^{ad} \\ &= (PV_2\tilde{R})_{cd}^{ad} = (I \otimes V)_{ij}^{da}\tilde{R}_{cd}^{ij} = \delta_i^d V_j^a \tilde{R}_{cd}^{ij} = \tilde{R}_{kj}^{ak}\tilde{R}_{cd}^{dj} = V_j^a U_c^j = \delta_c^a. \end{aligned}$$

Não é difícil provar que a terceira condição na definição 5.4 é equivalente à seguinte condição:

$$(\text{id}_V \otimes (\mu^*)^{-1})(\sigma^\pm \tau)^{t_2} (\text{id}_V \otimes \mu^*)(\tau \sigma^\pm)^{t_2} = \text{id}_{\bar{V} \otimes V^*}$$

(ver [18,33] por exemplo). Provamos que (RP, V) satisfaz esta condição:

$$\begin{aligned} (V_2^{t_2})^{-1} R^{t_2} V_2^{t_2} (R^{-1})^{t_2} &= (V_2^{t_2})^{-1} R^{t_2} (R^{-1} V_2)^{t_2} \\ &= (V_2^{t_2})^{-1} R^{t_2} (V_2 \tilde{R})^{t_2} = (V_2^{t_2})^{-1} R^{t_2} (R^{t_2})^{-1} V_2^{t_2} = I. \end{aligned}$$

Para os sinais opostos obtemos

$$\begin{aligned} (PR^{-1}P)^{t_2} V_2^{t_2} &= (V_2 PR^{-1}P)^{t_2} = (PV_1 R^{-1}P)^{t_2} = (P\tilde{R}V_1P)^{t_2} \\ &= (P\tilde{R}PV_2)^{t_2} = V_2^{t_2} (P\tilde{R}P)^{t_2} = V_2^{t_2} ((PRP)^{t_2})^{-1}. \end{aligned}$$

A condição desejada segue desta igualdade.

Da mesma maneira se prova que (PR, U) é um operador de Yang-Baxter aumentado, utilizando as igualdades $U_1 = RU_1\tilde{R}$ e $U_2 = \tilde{R}U_2R$ (para estas igualdades ver [25]). \square

Em [21,22] Lyubashenko também define operadores de Yang-Baxter bi-invertíveis, que ele chama dualizáveis. Infelizmente o autor deste trabalho não teve acesso à tese de Lyubashenko e só conhece vagamente os resultados deste através duma citação em [26] (Prop. 5.5). No mesmo artigo [26] Majid e Markl utilizam um resultado que corresponde, embora seja formulado de uma maneira diferente, ao teorema 5.14. No entanto a prova deles é diferente. Majid e Markl usam os resultados de Lyubashenko para mostrar que um par (V, c_V) , onde V é um espaço vectorial de dimensão finita e c_V um operador de Yang-Baxter extensível, gera uma subcategoria entrançada com dualidade esquerda, $C(V)$. Depois aplicam um resultado que provam em [26] para mostrar que $C(V)$ tem uma estrutura de fitas. A universalidade de \mathcal{E} , como está definida no teorema 5.3, que foi provado por Reshetikhin e Turaev [30] e numa versão diferente por Shum [31], garante então a existência de um functor monoidal de \mathcal{E} para $C(V)$. Neste trabalho obtemos como corolário (ver cor. 5.19) dos teoremas 5.5 e 5.14 os resultados de Lyubashenko.

Podíamos ter provado todos os resultados para dualidades arbitrárias. Em nenhuma das demonstrações utilizámos de uma maneira essencial que $b_V = \text{coev}_V$ e $d_V = \text{ev}_V$. No entanto duais são únicos a menos de isomorfismo. Antes de provar isso queremos explicar um exemplo, encontrado em [20], em que se usa uma dualidade especial num espaço vectorial.

Exemplo 5.15. (Kauffman [20]) Se V é um espaço vectorial com base v_1, \dots, v_n e base dual v^1, \dots, v^n , podemos tomar

$$b_V(1) = \sum_{i=1}^n \lambda^{-\frac{i}{2}} v_i \otimes v^i, \quad d_V(v^i \otimes v_j) = \lambda^{\frac{i}{2}} \delta_j^i.$$

Kauffman fixa também a dualidade direita por

$$b'_V(1) = \sum_{i=1}^n \lambda^{\frac{i}{2}} v^i \otimes v_i, \quad d_V(v_i \otimes v^j) = \lambda^{-\frac{j}{2}} \delta_i^j.$$

Mostra depois que, para um operador de Yang-Baxter $S \in \text{End}(V \otimes V)$ definir uma representação de \mathcal{E} com estas dualidades, S tem que satisfazer

$$S_{cd}^{ab} = 0, \quad \text{a não ser que } a + b = c + d$$

e

$$\sum_{s,t} \lambda^{\frac{(s-b)}{2}} \lambda^{\frac{(t-c)}{2}} S_{as}^{bt} (S^{-1})_{dt}^{cs} = \delta_c^a \delta_d^b.$$

A segunda condição é o resultado do movimento de Reidemeister II com os fios orientados em direcções opostas. No teorema 5.14 esta última condição vem da identidade $c_V^\# (c_V^\#)^{-1} = \text{id}_V \otimes \text{id}_{V^*}$, ou seja é igual a dizer que $C^\#$ tem que ser invertível. Kauffman não toma em consideração o movimento de Reidemeister I, mas é fácil ver que esse é equivalente a

$$\sum_{b,d,g} \lambda^{(d-g)} (S^{-1})_{db}^{di} (S^{-1})_{jg}^{bg} = \delta_j^i,$$

o que obviamente corresponde a $VU = I$.

Em [20] Kauffman define primeiro o dual esquerdo e o dual direito de um espaço vectorial de dimensão finita V e depois deduz as condições que um operador de Yang-Baxter c_V deve satisfazer para que (V, c_V) dê um invariante de enlases. Deste ponto de vista vale a pena considerar dualidades não canónicas. Um outro exemplo importante de um invariante de enlases obtido desta maneira é o do *polinómio de parênteses* (bracket polinomial) que numa normalização especial é igual ao polinómio de Jones (ver [16,19]).

No entanto, do ponto de vista abstracto a escolha da dualidade esquerda é irrelevante. Explicamos porquê. Vamos mostrar agora que a escolha da dualidade esquerda é única a menos de um isomorfismo. Seja C uma categoria monoidal, V um objecto em C e V^* e $V^!$ duais de V com b_V , d_V e $b_V^!$, $d_V^!$ os respectivos morfismos de dualidade, então $\phi: V^! \rightarrow V^*$, definido por

$$\phi = (d_V^! \otimes \text{id}_{V^*})(\text{id}_{V^!} \otimes b_V),$$

é um isomorfismo entre os dois duais com inverso

$$\phi^{-1} = (d_V \otimes \text{id}_{V^!})(\text{id}_{V^*} \otimes b_V^!).$$

Neste caso temos

$$d_V^! = d_V(\phi \otimes \text{id}_V), \quad b_V^! = (\text{id}_V \otimes \phi^{-1})b_V.$$

Lema 5.16. *Seja V um objecto em $\text{Vect}_{\mathbb{F}}$. Sejam V^* e $V^!$ dois duais diferentes de V e $\phi: V^! \rightarrow V^*$ o isomorfismo acima definido. Supõe-se que existem funtores monoidais $F, F^!: \mathcal{E} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{F}}$, tais que $F(+)=F^!(+)=V$, $F(-)=V^*$, $F^!(-)=V^!$, $F(X^\pm)=F^!(X^\pm)=c_V^{\pm 1}$, $F(\cup^+)=b_V$, $F(\cap^+)=d_V$, $F(\cup^-)=b_V'$, $F(\cap^-)=d_V'$, $F^!(\cup^+)=b_V^!$, $F^!(\cap^+)=d_V^!$, $F(\cup^-)=(b_V^!)'$ e $F(\cap^-)=(d_V^!)'$. Nesse caso o par $\Phi=(\text{id}_V, \phi)$ define um isomorfismo natural entre $F^!$ e F .*

Dem. Só temos que provar a naturalidade de (id_V, ϕ) . As seguintes identidades seguem imediatamente da definição de Φ :

$$\begin{aligned} c_V^{\pm 1}(\text{id}_V \otimes \text{id}_V) &= (\text{id}_V \otimes \text{id}_V)c_V^{\pm 1}, \\ b_V &= (\text{id}_V \otimes \phi)b_V^!, \\ d_V^! &= d_V(\phi \otimes \text{id}_V), \\ b_V' &= (\phi \otimes \text{id}_V)(b_V^!)', \\ (d_V^!)' &= d_V'(\text{id}_V \otimes \phi). \end{aligned}$$

Como o teorema de Turaev (teor. 5.1) mostra que um functor monoidal \mathcal{E} para $\text{Vect}_{\mathbb{F}}$ é unicamente determinada pelas suas imagens de $X^\pm, \cup^\pm, \cap^\pm$, bastam estas identidades para provar este lema. \square

O resultado é que os invariantes de enlaces que as restrições de F e $F^!$ definem são iguais. Seja K um enlace qualquer e escrevemos $K = \bar{\sigma}$ como o fecho de uma trança σ com n fios (ver teor. 1.12 e 1.13).

Lema 5.17.

a) *A restrição de F ao espaço dos enlaces é igual a*

$$F(\bar{\sigma}) = d_{V^{\otimes n}}'(\rho_{c_V}(\sigma) \otimes \text{id}_{V^{\otimes n}})b_{V^{\otimes n}}.$$

Aqui d_V' é a imagem de \cap^- e ρ_{c_V} é a representação de \mathcal{T} em C definida por c_V . Por vezes chama-se a $F(\bar{\sigma})$ o traço quântico (quantum trace) de σ , $\text{tr}_{V^}(f)$, na categoria monoidal entrançada com dualidade esquerda gerada por (V, c_V) .*

b) *Temos*

$$F(\bar{\sigma}) = F^!(\bar{\sigma}).$$

Dem.

a) Isto segue imediatamente da definição do fecho de uma trança.

b) Vamos mostrar $\text{tr}_{V^*}(f) = \text{tr}_{V^!}(f)$ para qualquer $f \in \text{End}(V)$. A afirmação em b) segue depois directamente.

$$\begin{aligned} d_V'(f \otimes \text{id}_{V^*})b_V &= (d_V^!)'(\text{id}_V \otimes \phi^{-1})(f \otimes \text{id}_{V^*})b_V \\ &= (d_V^!)'(f \otimes \text{id}_{V^!})(\text{id}_V \otimes \phi^{-1})b_V = (d_V^!)'(f \otimes \text{id}_{V^!})b_V^!. \end{aligned}$$

□

Esta ideia está implícita em [33], por isso Turaev escolhe sempre a dualidade esquerda canónica em $\text{Vect}_{\mathbb{F}}$.

O teorema 5.14 foi provado pelo autor em [23], mas os argumentos utilizados em [23] são um pouco diferentes dos argumentos utilizados neste trabalho. Lá o autor utilizou o conceito de *algebra de Hopf co-entrançada* (*co-braided Hopf algebra*). No último capítulo explicamos a relação com este trabalho.

Para terminar este capítulo queremos explicar a relação entre os operadores de Yang-Baxter extensíveis e as estruturas de fitas. Seja $\text{Mon}(\mathcal{E}, \text{Vect}_{\mathbb{F}})$ a categoria dos funtores monoidais de \mathcal{E} para $\text{Vect}_{\mathbb{F}}$ (ver def. 3.9). Seja $\text{Fit}(\text{Vect}_{\mathbb{F}})$ a categoria em que os objectos são triplos (V, V^*, c_V) , onde V é um objecto em $\text{Vect}_{\mathbb{F}}$, V^* um dual de V com b_V e d_V as morfismos que definem a dualidade esquerda em V^* , e c_V um operador de Yang-Baxter em V , tal que (V, V^*, c_V) gere uma categoria com estrutura de fitas, $C(V)$. Note-se que $C(V)$ é uma subcategoria de $\text{Vect}_{\mathbb{F}}$, mas em geral a estrutura de fitas em $C(V)$ não coincide com a estrutura de fitas normal em $\text{Vect}_{\mathbb{F}}$. Um morfismo entre (V, V^*, c_V) e (W, W^*, c_W) em $\text{Fit}(\text{Vect}_{\mathbb{F}})$ é um funtor de $C(V)$ para $C(W)$ que respeita as respectivas estruturas de fitas. O teorema 5.3 mostra o seguinte:

Corolário 5.18. *Existe uma equivalência de categorias*

$$\text{Mon}(\mathcal{E}, \text{Vect}_{\mathbb{F}}) \simeq \text{Fit}(\text{Vect}_{\mathbb{F}}).$$

Para formular a relação entre os operadores de Yang-Baxter extensíveis e as estruturas de fitas temos primeiro que definir uma categoria nova, $YBE(\text{Vect}_{\mathbb{F}})$ (ver def. 3.8). Os objectos em $YBE(\text{Vect}_{\mathbb{F}})$ são triplos (V, V^*, c_V) , onde V é um objecto em $\text{Vect}_{\mathbb{F}}$, V^* um dual esquerdo com a dualidade definida por b_V e d_V , e c_V é um operador de Yang-Baxter extensível. Um morfismo entre (V, V^*, c_V) e (W, W^*, c_W) é um par (f, g) , onde $f: V \rightarrow W$ e $g: V^* \rightarrow W^*$ são aplicações lineares que satisfazem:

$$c_W^{\pm 1}(f \otimes f) = (f \otimes f)c_V^{\pm 1},$$

$$b_W = (f \otimes g)b_V,$$

$$d_V = d_W(g \otimes f),$$

$$b'_W = (g \otimes f)b'_V,$$

$$d'_V = d'_W(f \otimes g).$$

Aqui tomamos $b'_V = (c_V^{\#})^{-1}b_V$ e $d'_V = (c_V^{\#})^{-1}d_V$. Podemos agora mostrar o seguinte corolário.

Corolário 5.19. *Existe uma equivalência de categorias*

$$\text{Fit}(\text{Vect}_{\mathbb{F}}) \simeq YBE(\text{Vect}_{\mathbb{F}}).$$

Dem. O funtor que define a equivalência é a identidade. A prova que a imagem de um triplo $(V, V^*, c_V) \in \text{Fit}(\text{Vect}_{\mathbb{F}})$ pertence a $YBE(\text{Vect}_{\mathbb{F}})$ é simples: O teorema 5.3

implica que (V, V^*, c_V) induz um functor em $\text{Mon}(\mathcal{E}, \text{Vect}_{\mathbf{F}})$, o que por sua vez implica que $(F(+), F(-), F(X^+)) = (V, V^*, c_V)$ é um elemento de $YBE(\text{Vect}_{\mathbf{F}})$ (ver teor. 5.5 e 5.14). Lendo este argumento de trás para frente, e utilizando que o dual esquerdo V^* é necessariamente isomorfo com o dual normal de V em $\text{Vect}_{\mathbf{F}}$ e que esse isomorfismo define um isomorfismo em $YBE(\text{Vect}_{\mathbf{F}})$ (ver lem. 5.16), vemos que o functor identidade é essencialmente sobrejectivo. A demonstração do functor identidade ser plenamente fiel é análoga à demonstração do teorema 3.13 e evitamos aqui. \square

6. O polinómio de Jones e polinómio de HOMFLY

Seja V o $\mathbf{Z}[q, q^{-1}]$ -módulo livremente gerado pela base v_1, \dots, v_n . Seja E_{ij} a matriz do endomorfismo $V \rightarrow V$ definido por $E_{ij}(v_i) = v_j$ e $E_{ij}(v_k) = 0$, para todo o $k \neq i$. Escolhemos a base $v_1 \otimes v_1, v_1 \otimes v_2, \dots, v_n \otimes v_n$ em $V \otimes V$. O endomorfismo $E_{ik} \otimes E_{jl}$ actua nesta base transformando $v_i \otimes v_j$ em $v_k \otimes v_l$ e qualquer outro elemento da base em 0.

Já vimos o operador de Yang-Baxter que induz o polinómio de Jones. Na base escolhida acima fica:

$$\sigma = q(E_{11} \otimes E_{11} + E_{22} \otimes E_{22}) + (E_{12} \otimes E_{21} + E_{21} \otimes E_{12}) + (q - q^{-1})E_{11} \otimes E_{22}.$$

Matricialmente é representado por

$$\begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q - q^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}.$$

É fácil ver que σ é invertível, com inverso

$$\sigma^{-1} = q^{-1}(E_{11} \otimes E_{11} + E_{22} \otimes E_{22}) + (E_{12} \otimes E_{21} + E_{21} \otimes E_{12}) + (q^{-1} - q)E_{22} \otimes E_{11},$$

e que

$$\sigma - \sigma^{-1} = (q - q^{-1})I, \tag{6.1}$$

onde $I = E_{11} + E_{22}$ é a identidade em V . Também é fácil verificar que σ é bi-invertível e que

$$V = \begin{pmatrix} q^{-3} & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 \\ 0 & q^{-3} \end{pmatrix}.$$

Temos, portanto, $VU = q^{-4}I$, o que implica que temos que normalizar σ , multiplicando por q^{-2} , para obter um operador de Yang-Baxter extensível. Seja M o invariante definido por este operador normalizado. A identidade 6.1 implica que

$$q^2 M(K_+) - q^{-2} M(K_-) = (q - q^{-1})M(K_0).$$

(Para a definição do triplo (K_+, K_-, K_0) ver fig. 1.4). Isto é essencialmente o polinómio de Jones, mas $M(O) = q^2 \text{tr}(U) = q^2 \text{tr}(V) = q + q^{-1}$. Falta, portanto, multiplicar M por $\frac{1}{q+q^{-1}}$ para que o valor do nó trivial seja 1. O polinómio de Jones é

$$J = \frac{1}{q + q^{-1}} M.$$

A construção do polinómio de HOMFLY é mais complicada. Em vez de só utilizar a representação fundamental da R-matriz universal de $sl(2)$ temos que utilizar a representação fundamental da R-matriz universal de $sl(m)$ para todo o $m \in \mathbf{N}$. Os operadores de Yang-Baxter que obtemos são definidos por

$$\sigma_m = q \sum_i E_{ii} \otimes E_{ii} + \sum_{i \neq j} E_{ij} \otimes E_{ji} + (q - q^{-1}) \sum_{i < j} E_{ii} \otimes E_{jj},$$

com inversos

$$\sigma_m^{-1} = q^{-1} \sum_i E_{ii} \otimes E_{ii} + \sum_{i \neq j} E_{ij} \otimes E_{ji} + (q^{-1} - q) \sum_{i > j} E_{ii} \otimes E_{jj},$$

para $i, j = 1, \dots, m$. Para todo o $m \in \mathbf{N}$ temos

$$\sigma_m - \sigma_m^{-1} = (q - q^{-1})I.$$

O operador de Yang-Baxter σ_m é bi-invertível para todo o $m \in \mathbf{N}$ com

$$V_m = \text{diag}(q^{1-2m}, \dots, q^{-3}, q^{-1}), \quad U_m = \text{diag}(q^{-1}, q^{-3}, \dots, q^{1-2m}).$$

Portanto $V_m U_m = q^{-2m} I$ e temos que multiplicar σ_m por q^{-m} para obter um invariante de enlaced. Isto prova o seguinte lema:

Lema 6.1. *Para todo o $m \in \mathbf{N}$ o operador de Yang-Baxter $q^{-m} \sigma_m$ é extensível e induz o invariante de enlaced P_m que satisfaz*

$$q^m P_m(K_+) - q^{-m} P_m(K_-) = (q - q^{-1}) P_m(K_0)$$

e

$$P_m(O) = q^m \text{tr}(U) = \frac{(q^m - q^{-m})}{(q - q^{-1})}.$$

Para o resto da construção do polinómio de HOMFLY seguimos [32]. A ideia é que a sequência $\{P_m(K)\}_{m \in \mathbf{N}}$ é convergente para qualquer enlace K .

Lema 6.2. *Seja K um enlace com n componentes e u cruzamentos. Se $m \geq 4u + 2n + 1$ o polinómio de Laurent $(q - q^{-1})^{u+n} P_m(K)$ pode ser escrito de uma única maneira como o somatório*

$$\sum_{a,b \in \mathbf{Z}} r_{a,b} q^{a+mb}$$

com $r_{a,b} \in \mathbf{Z}$ e $r_{a,b} = 0$ se $|a| > 2u + n$. Os coeficientes $r_{a,b}$ não dependem da escolha de $m \geq 4u + 2n + 1$.

Dem. Provamos primeiro a unicidade. Supomos que existe uma outra decomposição de $(q - q^{-1})^{u+n} P_m(K)$, dada pelo somatório

$$\sum_{c,d} r_{c,d} q^{c+md}$$

com $r_{c,d} \in \mathbf{Z}$ e $r_{c,d} = 0$, se $|a| > 2u + n$. Obviamente $a + mb = c + md$ se e só se $a - c = m(b - d)$. Como presumimos $|a|, |c| \leq 2u + n < \frac{m}{2}$, obtemos $|a - c| \leq |a| + |c| < m$. Isto implica $a = c$ e $b = d$, o que prova a unicidade.

Agora vamos provar a existência. Substituindo sobre cruzamentos por subcruzamentos podemos tornar qualquer enlace num enlace trivial. Utilizando esta ideia e aplicando a primeira fórmula no lema 6.1 todas as vezes que substituimos um sobre cruzamento por um subcruzamento vemos que $P_m(K)$ é a soma de um número finito de polinómios do tipo

$$\pm q^{me}(q - q^{-1})^f P_m(G_d),$$

com $e, f \in \mathbf{Z}$, $0 \leq f \leq u$, G_d o enlace trivial com d componentes e $d \leq u + n$. Pela fórmula de $P_m(G_d)$ no lema anterior obtemos

$$(q - q^{-1})^{u+n} [q^{me}(q - q^{-1})^f P_m(G_d)] = q^{me}(q^m - q^{-m})^d (q - q^{-1})^{f+u+n-d}.$$

Note que $f + u + n - d \leq f + u + n \leq 2u + n$, o que prova a existência da decomposição. A última afirmação do lema é a consequência directa da construção da decomposição. \square

Teorema 6.3. *O polinómio de HOMFLY existe.*

Dem. Sejam K, n, u definidos como no lema anterior. Para $m \geq 4u + 2n + 1$ definimos

$$N(K) = (q - q^{-1})^{-u-n} \sum_{a,b \in \mathbf{Z}} r_{a,b} q^a t^b.$$

O lema 6.2 mostra que $N(K)$ é um polinómio de Laurent em q e t que não depende de m . Como P_m é um invariante de isotopia, $N(K)$ é invariante sob os movimentos de Reidemeister. Note-se que, se K' é um enlace obtido de K por um movimento de Reidemeister, obtemos $u' \leq u + 2$ e $n' = n$. Portanto, para escrever $N(K)$ e $N(K')$, temos que tomar $m = 4u + 2n + 9 \geq 4u' + 2n' + 1$. Em geral para dois enlaces K e L podemos tomar $m \geq \max(4u_K + 2n_K + 1, 4u_L + 2n_L + 1)$ para definir $N(K)$ e $N(L)$. Portanto $N(K)$ é um invariante de isotopia para K e segue do lema 6.1 que

$$tN(K_+) - t^{-1}N(K_-) = (q - q^{-1})N(K_0)$$

e

$$N(G_d) = \frac{(t - t^{-1})^d}{(q - q^{-1})^d}.$$

Substituindo $t = \sqrt{-1}x$ e $q - q^{-1} = \sqrt{-1}y$ e multiplicando o resultado por $\frac{(q - q^{-1})}{(t - t^{-1})} = \frac{y}{(x + x^{-1})}$ obtemos finalmente o polinómio de HOMFLY H \square

7. Álgebras de Hopf co-entrançadas

Por último ainda queremos mostrar directamente o que é que operadores de Yang-Baxter extensíveis têm a ver com álgebras de fitas. Através da chamada *construção FRT* (FRT-construction, segundo os nomes dos inventores Fadeev, Reshetikhin e Taktadjan) consegue-se construir uma bi-álgebra a partir de qualquer R-matriz.

Definição 7.2. *Seja $k_n[T]$ a álgebra não comutativa livremente gerada sobre k por t_j^i , $1 \leq i, j \leq n$ com unidade. Então $k_n[T]$ torna-se numa bi-álgebra se definirmos o co-produto $\Delta(t_j^i) = t_\alpha^i \otimes t_j^\alpha$ e co-unidade $\epsilon(t_j^i) = \delta_j^i$.*

Às vezes é conveniente considerar \mathcal{E} como a matriz com coeficientes t_j^i e escrever $\Delta(T) = T \otimes T$ e $\epsilon(T) = I$.

Ainda não explicámos o que é um bi-ideal.

Definição 7.3. *Seja \mathcal{T} uma bi-álgebra. Um bi-ideal I é um ideal da álgebra \mathcal{T} que satisfaz $\Delta(I) \subseteq I \otimes B + B \otimes I$ e $\epsilon(I) = 0$. Se I é um bi-ideal, então B/I é novamente uma bi-álgebra.*

Partindo de uma R-matriz R podemos definir um bi-ideal de $k_n[T]$ a seguinte maneira.

Lema 7.4. *Seja R uma R-matriz de dimensão n^2 com coeficientes em k . Seja I o ideal de $k_n[T]$ gerado pelos elementos*

$$RT_1T_2 - T_2T_1R.$$

Aqui considerámos esta expressão como uma matriz, com $T_1 = T \otimes I$ e $T_2 = I \otimes T$, e os elementos que geram I são os coeficientes desta matriz. O ideal I é de facto um bi-ideal e temos a bi-álgebra $A(R) = k_n[T]/I$.

Dem. Vemos que

$$\begin{aligned} \Delta(RT_1T_2 - T_2T_1R) &= (RT_1T_2 \otimes RT_1T_2) - (T_2T_1R \otimes T_2T_1R) \\ &= (RT_1T_2 - T_2T_1R) \otimes RT_1T_2 + T_2T_1R \otimes (RT_1T_2 - T_2T_1R) \end{aligned}$$

e

$$\epsilon(RT_1T_2 - T_2T_1R) = R\epsilon(T) \otimes \epsilon(T) - \epsilon(T) \otimes \epsilon(T)R = R - R = 0.$$

□

Nesta demonstração nota-se bem a vantagem da notação matricial. Antes de continuar vamos dar um exemplo que mostra a relação entre esta construção e as álgebras universais quânticas envolventes das álgebras de Lie semi-simples.

Exemplo 7.5. *Consideramos a R-matriz do exemplo 2.17*

$$R = q^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q - q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}.$$

Neste caso $A(R)$ é a álgebra (não comutativa) gerada por $t_1^1, t_2^1, t_1^2, t_2^2$ com as relações

$$\begin{aligned} t_2^1 t_1^1 &= q t_1^1 t_2^1, & t_2^2 t_2^1 &= q t_2^1 t_2^2, \\ t_1^2 t_1^1 &= q t_1^1 t_1^2, & t_2^2 t_1^2 &= q t_1^2 t_2^2, \\ t_2^1 t_1^2 &= t_1^2 t_2^1, & t_1^1 t_2^2 - t_2^2 t_1^1 &= (q^{-1} - q) t_2^1 t_1^2. \end{aligned}$$

Verificar isto é só uma questão de escrever a equação matricial

$$RT_1 T_2 = T_2 T_1 R$$

explicitamente com os coeficientes de R . O co-produto é definido por

$$\Delta(T) = T \otimes T,$$

e a co-unidade por

$$\epsilon(T) = I.$$

Se quisermos fazer de $A(R)$ uma álgebra de Hopf vimos que temos que “adicionar” formalmente os elementos da matriz T^{-1} . Pela regra de Cramer, na teoria de álgebra linear, sabemos que isto corresponde a “adicionar” formalmente o inverso do “determinante” de \mathcal{E} . Só que neste caso não é o determinante normal, mas sim o determinante quântico, que é dado por

$$\det_q = t_1^1 t_2^2 - q^{-1} t_2^1 t_1^2 = t_2^2 t_1^1 - q t_2^1 t_1^2.$$

Como se vê \det_q é um elemento tipo grupo (grouplike element), i.e. $\Delta(\det_q) = \det_q \otimes \det_q$, $\epsilon(\det_q) = 1$. Portanto o elemento $\det_q X - 1$ define um bi-ideal em $A(R)[X]$ e temos a bi-álgebra $GL_q(2) = A(R)[X]/(\det_q X - 1)$. Agora é fácil definir um antípoda em $GL_q(2)$

$$\begin{pmatrix} S(t_1^1) & S(t_2^1) \\ S(t_1^2) & S(t_2^2) \end{pmatrix} = \det_q^{-1} \begin{pmatrix} t_2^2 & -q t_2^1 \\ -q^{-1} t_1^2 & t_1^1 \end{pmatrix}.$$

Também se pode definir a álgebra de Hopf $SL_q(2) = A(R)/(\det_q - 1)$ com o mesmo antípoda. A relação com $U_q(sl(2))$ no exemplo 2.18 é a seguinte: Seja ρ a representação de $U_q(sl(2))$ que demos no exemplo 2.18. Temos então um emparelhamento (pairing) $U_q(sl(2)) \times A(R) \rightarrow \mathbf{C}$ definido por

$$(z, t_j^i) \mapsto \rho(z)_j^i$$

para qualquer $z \in U_q(sl(2))$ e quaisquer $i, j \in \{1, 2\}$. Este emparelhamento respeita as estruturas de bi-álgebra no sentido que

$$\begin{aligned} (z_1 z_2, t_j^i) &= (z_1 \otimes z_2, \Delta(t_j^i)) = (z_1, t_\alpha^i)(z_2, t_j^\alpha), \\ (z, t_j^i t_n^m) &= (\Delta(z), t_j^i \otimes t_n^m) = \sum (z_{(1)}, t_j^i)(z_{(2)}, t_n^m), \\ (z, 1) &= \epsilon(z), \end{aligned}$$

$$(1, t_j^i) = \epsilon(t_j^i) = \delta_j^i.$$

A aplicação linear $\phi: A(R) \rightarrow U_q(\mathfrak{sl}(2))^*$ definida por

$$\phi(t_j^i)(z) = \rho(z)_j^i$$

é, portanto, um homomorfismo de bi-álgebras. O núcleo de ϕ não é trivial. É, no entanto, possível mostrar (ver [18] por exemplo) que $N(\phi) = (\det_q - 1)$ e que a aplicação quociente $\phi: SL_q(2) \rightarrow U_q(\mathfrak{sl}(2))^*$ é um isomorfismo. Esta aplicação respeita os respectivos antípodas,

$$(S(z), t_j^i) = (z, S(t_j^i)),$$

logo $SL_q(2)$ e $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ são álgebras de Hopf duais.

Devemos dizer que este caso é bastante mais simples e bonito do que os casos das outras álgebras de Lie. Em primeiro lugar nem sempre é fácil definir um determinante quântico. Em [27] aparecem definições mais generalizadas de determinantes quânticos. Em segundo lugar não é tão fácil, em geral, interpretar $A(R)$. No caso em cima pode se mostrar que $SL_1(2) = \mathcal{F}(SL(2))$, a álgebra das funções regulares no grupo de Lie $SL(2)$. Portanto podemos considerar $SL_q(2)$ como uma quantização de $SL(2)$. Em geral o quociente de $A(R)$ não é uma quantização do grupo de lie $Exp(\mathcal{G})$. De facto há contra-exemplos, veja [7]. Por último devemos dizer que a estrutura de $A(R)$ pode ser bastante diferente de um grupo quântico, até para uma R-matriz simples. Se tomamos a R-matriz diagonal

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

então as relações $RT_1T_2 - T_2T_1R$ implicam que $(t_2^1)^2 = 0$. Isto não acontece nos grupos quânticos, i.e. nenhuma álgebra de Hopf $U_q(\mathcal{G})$ tem elementos nilpotentes. Em geral $A(R)$ também não tem uma base de Poincaré-Birkhoff-Witt como as $U_q(\mathcal{G})$ e as suas respectivas duais. A existência desta base no caso dos grupos quânticos é extremamente importante para o cálculo das R-matrizes universais. No caso de $SL_q(2)$ esta base é dada por $t_{j_1}^{i_1} \cdots t_{j_n}^{i_n}$ com $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n \leq 2$ e $1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_n \leq 2$. Para mais informações sobre isto tudo ver por exemplo [7,13,14,18].

No entanto, neste trabalho não estamos muito interessados na estrutura de $A(R)$ mas só nos invariantes de enlances que $A(R)$ define em certos casos. Para isso consideramos a categoria dos seus *co-módulos* de dimensão finita.

Definição 7.6. *Seja B uma bi-álgebra. Um co-módulo M de B é um espaço vectorial em conjunto com uma co-acção Δ_M que é uma aplicação linear $\Delta_M: M \rightarrow B \otimes M$ que satisfaz $(\Delta \otimes id_M)\Delta_M = (id_B \otimes \Delta_M)\Delta_M$ e $(\epsilon \otimes id_M)\Delta_M = id_M$.*

Note-se que uma bi-álgebra B é automaticamente um B -co-módulo com $\Delta_B = \Delta$. A categoria B -comod é uma categoria monoidal. Seja M e N B -co-módulos, com $\Delta_M(m) = \sum m_B \otimes m_M$ e $\Delta_N(n) = \sum n_B \otimes n_N$ as respectivas coacções, então $M \otimes N$ forma um co-módulo com $\Delta_{M \otimes N}(m \otimes n) = \sum m_B n_B \otimes (m_M \otimes n_N)$. Isto define uma co-acção precisamente porque Δ é um homomorfismo de álgebras. A próxima pergunta é quando é que B -comod forma uma categoria entrançada. Para responder a esta pergunta introduzimos a noção de uma bi-álgebra co-entrançada.

Definição 7.7. Uma bi-álgebra B diz-se co-entrançada se existe uma aplicação linear, invertível relativamente ao produto convolutivo, $R: B \otimes B \rightarrow k$ tal que

$$\begin{aligned} \sum b_{(1)}a_{(1)}R(a_{(2)} \otimes b_{(2)}) &= \sum R(a_{(1)} \otimes b_{(1)})a_{(2)}b_{(2)}, \\ R(ab \otimes c) &= \sum R(a \otimes c_{(1)})R(b \otimes c_{(2)}), \\ R(a \otimes bc) &= \sum R(a_{(1)} \otimes c)R(a_{(2)} \otimes b), \end{aligned}$$

para todos os $a, b, c \in B$.

É fácil verificar que $A(R)$ é de facto co-entrançada com

$$R(t_c^a \otimes t_d^b) = R_{cd}^{ab}.$$

Lema 7.8. Se B é uma bi-álgebra co-entrançada então B -comod é uma categoria entrançada. No sentido contrário, se B -comod é entrançada e B tem dimensão finita então B é co-entrançada.

Dem. Se B é co-entrançada com $R: B \otimes B \rightarrow k$ então podemos definir a trança em B -comod por

$$c_{M,N}(m \otimes n) = \sum R(m_B \otimes n_B)n_N \otimes n_M,$$

com $\Delta_M(m) = \sum m_B \otimes m_M$ e $\Delta_N(n) = \sum n_B \otimes n_N$ para quaisquer B -co-módulos M e N . É fácil verificar que isto define uma trança. Reciprocamente, se B -comod é entrançada e B tem dimensão finita então podemos definir

$$(\epsilon \otimes \epsilon)_{B,B}(1 \otimes 1).$$

Verificar que isto define uma estrutura co-entrançada em B é fácil. □

O problema agora surge quando queremos considerar dualidade em $A(R)$ -comod, porque $A(R)$ não é, em geral, uma álgebra de Hopf. A razão é que um antípoda não é uma involução em geral (ver ex. 2.17), ou seja, podemos definir $S(T) = T^{-1}$ mas não sabemos definir $S(T^{-1}) = S^2(T)$. Esta questão está directamente relacionada com a questão de prolongar o operador de Yang-Baxter PR ou RP a toda a categoria rígida gerada por R . De facto a questão é a mesma e a resposta também.

Teorema 7.9.

- a) Suponhamos que podemos adicionar relações a $A(R)$ de tal modo que a estrutura co-entrançada desça para o quociente e obtenhamos uma álgebra de Hopf co-entrançada. Então R é bi-invertível e

$$R(T \otimes S(T)) = \tilde{R}$$

com $\tilde{R} = ((R^{t_2})^{-1})^{t_2}$. Além disso verificam-se as igualdades

$$S^2(T) = V^{-1}TV = UTU^{-1}, \quad V_j^i = \tilde{R}_{\alpha_j}^{i\alpha}, \quad U_j^i = \tilde{R}_{\alpha_j}^{\alpha i}.$$

b) Se R é bi-invertível, então podemos definir a álgebra de Hopf $H(R)$ a partir de $A(R)$ adicionando formalmente os geradores $T^{-1} = ((t^{-1})_j^i)_{i,j=1}^n$, com co-produto e co-unidade

$$\Delta((t^{-1})_b^a) = (t^{-1})_b^\alpha \otimes (t^{-1})_\alpha^a, \quad \epsilon((t^{-1})_b^a) = \delta_b^a,$$

e adicionando as relações $TT^{-1} = T^{-1}T = I$. Podemos então definir o antípoda por

$$S(T) = T^{-1}, \quad S(T^{-1}) = S^2(T) = V^{-1}TV = UTU^{-1},$$

e a estrutura entrançada por

$$R(T \otimes T) = R(T^{-1} \otimes T^{-1}) = R, \quad R(T^{-1} \otimes T) = R^{-1}, \quad R(T \otimes T^{-1}) = \tilde{R}.$$

Dem. a) Mostramos primeiro que

$$R(T \otimes I) = \epsilon(T) = R(I \otimes T).$$

Isto é consequência de

$$\begin{aligned} R(T \otimes I) &= (R^{-1}(T \otimes I)R(T \otimes I))R(T \otimes I) \\ &= R^{-1}(T \otimes I)(R(T \otimes I)R(T \otimes I)) \\ &= R^{-1}(T \otimes I)R(T \otimes I) = \epsilon(T) = I. \end{aligned}$$

A primeira e a quarta identidade vêm da invertibilidade de R relativamente ao produto convolutivo, a terceira identidade vem da segunda condição na definição 7.7. A outra identidade $R(I \otimes T) = \epsilon(T)$ prova-se de mesma maneira. Utilizando este resultado vamos provar que a matriz $A = R(T \otimes S(T))$ satisfaz

$$A_{aj}^{ib} R_{ib}^{ak} = \delta_i^i \delta_j^k = R_{aj}^{ib} A_{ib}^{ak},$$

o que é provar que $A = \tilde{R}$ em termos dos coeficientes. Temos

$$R(t_b^\alpha \otimes t_\beta^c S(t_f^\beta)) = R(t_\alpha^a \otimes S(t_f^\beta))R(t_b^\alpha \otimes t_\beta^c) = A_{\alpha f}^{a\beta} R_{b\beta}^{\alpha c}.$$

Por outro lado temos

$$R(t_b^\alpha \otimes t_\beta^c S(t_f^\beta)) = R(t_b^\alpha \otimes \delta_f^c) = \delta_b^\alpha \delta_f^c,$$

o que prova a identidade. Note-se que do mesmo modo se conclui que $R(S(T) \otimes T) = R^{-1}$ e $R(S(T) \otimes S(T)) = R$.

Provamos agora $S^2(T) = UTU^{-1}$. Podemos definir uma aplicação linear $U: A(R) \rightarrow k$ por $U(t_j^i) = R(t_j^\beta \otimes S(t_\beta^i)) = U_j^i$. Temos então o seguinte

$$\begin{aligned} U(t_\alpha^i) t_j^\alpha &= R(t_\alpha^\beta \otimes S(t_\beta^i)) t_j^\alpha = R(t_\alpha^\beta \otimes S(t_\beta^\delta)) t_j^\alpha S(t_\delta^\gamma) S^2(t_\gamma^i) \\ &= S(t_\beta^\delta) t_\alpha^\beta S^2(t_\gamma^i) R(t_j^\alpha \otimes S(t_\delta^\gamma)) = S^2(t_\gamma^i) U(t_\gamma^\alpha). \end{aligned}$$

Na segunda identidade usámos $S(t_\beta^i) = S(t_\delta^\gamma)\epsilon(S(t_\gamma^i)) = S(t_\beta^\delta)S(t_\delta^\gamma)S^2(t_\gamma^i)$ onde aplicámos $\Delta S = (S \otimes S)\Delta^{\text{OP}}$ porque S é um antihomomorfismo. A identidade $S^2(T) = V^{-1}TV$ prova-se da mesma maneira.

b) A prova de b) é mais complicada. Temos que mostrar que as relações $RT_1T_2 = T_2T_1R$ e $TT^{-1} = T^{-1}T = I$ são suficientes para que S satisfaça o axioma de antípoda e para que o prolongamento de R para $H(R)$ defina realmente uma co-trança. Começamos pelo último.

As duas relações matriciais a) $RT_1T_2 = T_2T_1R$ e b) $TT^{-1} = T^{-1}T = I$ implicam mais três relações:

- c) $T_2R^{-1}T_1^{-1} = T_1^{-1}R^{-1}T_2$,
- d) $T_2^{-1}RT_1 = T_1RT_2^{-1}$,
- e) $T_1^{-1}T_2^{-1}R = RT_2^{-1}T_1^{-1}$.

São as relações a), c), d) e e) que mostram que R define realmente uma co-trança em $H(R)$. Para provar isso temos que mostrar que R satisfaz

$$R(a_{(1)} \otimes b_{(1)})a_{(2)}b_{(2)} = b_{(1)}a_{(1)}R(a_{(2)} \otimes b_{(2)})$$

para todas as escolhas de a e b . Distinguimos 4 casos.

No primeiro caso escolhemos $a = t_b^a$ e $b = t_d^c$. Então esta identidade é igual a

$$R(t_\alpha^a \otimes t_\gamma^c)t_b^\alpha t_d^\gamma = t_\gamma^c t_\alpha^a R(t_b^\alpha \otimes t_d^\gamma),$$

o que é precisamente igual à relação a) em termos de coeficientes.

No segundo caso escolhemos $a = (t^{-1})_b^a$ e $b = t_d^c$. Então a igualdade é igual a

$$R((t^{-1})_b^\alpha \otimes t_\beta^c)(t^{-1})_\alpha^a t_d^\beta = t_\beta^c (t^{-1})_b^\alpha R((t^{-1})_\alpha^a \otimes t_d^\beta).$$

Como $R(T^{-1} \otimes R) = R^{-1}$ vemos que a expressão em cima é igual a relação c).

No terceiro caso escolhemos $a = t_b^a$ e $b = (t^{-1})_d^c$. Então a identidade é igual a

$$R(t_\alpha^a \otimes (t^{-1})_d^\gamma)t_\alpha^c (t^{-1})_\gamma^c = (t^{-1})_d^\gamma t_\alpha^a R(t_b^\alpha \otimes (t^{-1})_\gamma^c).$$

Neste caso temos que rescrever a relação d) como

$$T_1(T_2^{-1})^{t_2} R^{t_2} = R^{t_2} (T_2^{-1})^{t_2} T_1.$$

O último caso corresponde à escolha $a = (t^{-1})_b^a$ e $b = (t^{-1})_d^c$. Da mesma maneira que mostrámos os outros casos pode se mostrar que neste caso a identidade desejada corresponde à relação e).

Para mostrar que S define um antípoda temos que provar que $S(T^{-1})T^{-1} = I$. Com a definição de S podemos escrever $S(T^{-1})T^{-1}$ como

$$U_\beta^\alpha t_\gamma^\beta (U^{-1})_b^\gamma (t^{-1})_\alpha^a. \quad (7.1)$$

Para mostrar que isto é igual a δ_b^a temos que utilizar d). Já tínhamos visto que podemos escrever d) como

$$(R^{t_2})^{-1} T_1 (T_2^{-1})^{t_2} = (T_2^{-1})^{t_2} T_1 (R^{t_2})^{-1}.$$

Em termos de coeficientes isto é igual a

$$\tilde{R}_{\alpha d}^{\alpha \gamma} t_b^\alpha (t^{-1})_\gamma^c = (t^{-1})_d^\gamma t_\alpha^a \tilde{R}_{b \gamma}^{\alpha c}. \quad (7.2)$$

Aplicando (7.2) em (7.1) obtemos

$$\begin{aligned} U_\beta^\alpha t_\gamma^\beta (U^{-1})_b^\gamma (t^{-1})_\alpha^a &= \tilde{R}_{\beta x}^{\alpha \beta} t_\gamma^\beta (U^{-1})_b^\gamma (t^{-1})_\alpha^a \\ &= (t^{-1})_x^\alpha t_\beta^x \tilde{R}_{\gamma \alpha}^{\beta a} (U^{-1})_b^\gamma = \delta_\beta^\alpha \tilde{R}_{\gamma \alpha}^{\beta a} (U^{-1})_b^\gamma \\ &= U_\gamma^a (U^{-1})_b^\gamma = \delta_b^a. \end{aligned}$$

□

Exemplo 7.10. Para a R-matriz no exemplo 2.17 temos $H(R) = GL_q(R)$. Para mostrar isso basta mostrar que o antípoda induz as mesmas relações em $H(R)$ e em $GL_q(R)$ entre T e T^{-1} . É óbvio que \det_q é invertível em $H(R)$, portanto falta mostrar as seguintes relações:

$$\det_q \begin{pmatrix} (t^{-1})_1^1 & (t^{-1})_2^1 \\ (t^{-1})_1^2 & (t^{-1})_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_2^2 & -qt_2^1 \\ -q^{-1}t_1^2 & t_1^1 \end{pmatrix}.$$

As demonstrações das quatro relações são semelhantes, portanto provamos só a primeira.

$$\begin{aligned} \det_q (t^{-1})_1^1 &= t_1^1 t_2^2 (t^{-1})_1^1 - q^{-1} t_2^1 t_1^2 (t^{-1})_1^1 = t_2^2 t_1^1 (t^{-1})_1^1 - qt_2^1 t_1^2 (t^{-1})_1^1 \\ &= t_2^2 t_1^1 (t^{-1})_1^1 + qt_2^1 t_2^2 (t^{-1})_1^2 = t_2^2 t_1^1 (t^{-1})_1^1 + t_2^2 t_2^1 (t^{-1})_1^2 \\ &= t_2^2 (t_1^1 (t^{-1})_1^1 + t_2^1 (t^{-1})_1^2) = t_2^2. \end{aligned}$$

A primeira identidade vem da sexta relação em $A(R)$ no exemplo 7.5, a segunda identidade segue de $TT^{-1} = I$, a terceira identidade vem da quarta relação em $A(R)$ e a última relação vem outra vez de $TT^{-1} = I$.

Em [27] Manin define determinantes quânticos para as R-matrizes associadas a $U_q(sl(n))$. Utilizando estes determinantes quânticos podemos definir $GL_q(R)$ para estas R-matrizes também. É muito provável que também nestes casos tenhamos $GL_q(R) = H(R)$, o que é, digamos, uma versão quântica da regra de Cramer, mas o autor deste trabalho nunca viu uma prova. Manin obtém $GL_q(R)$ localizando no determinante quântico e as suas observações mostram que $T \rightarrow T$ e $T^{-1} \rightarrow S(T)$ é uma aplicação sobrejectiva de $H(R)$ para $GL_q(R)$. Resta saber se esta aplicação é injectiva. Nos casos dos outros grupos quânticos o método de Manin traz maiores problemas técnicos. Para localizar no determinante quântico é preciso que R satisfaça a condição de Ore, que não queremos explicar aqui (ver [7]), porque o anel $A(R)$ é não comutativo. O autor deste trabalho não sabe se no caso dos outros grupos quânticos as R-matrizes satisfazem esta condição. O método do Majid funciona na mesma.

Podemos agora definir quando é que uma R-matriz “induz” uma categoria entrançada com dualidade esquerda.

Lema 7.11. Se H é uma álgebra de Hopf então a categoria monoidal H -comod tem dualidade esquerda definida por $M^* = \text{Lin}(M, k)$ e co-acção

$$\Delta_{M^*}(f) = (S \otimes f)\Delta_M,$$

onde identificámos $\text{Hom}(M, A) \cong A \otimes M^*$ como espaços vectoriais (aqui utilizámos mesmo o facto da dimensão de M ser finita). As aplicações b_M e d_M são simplesmente coev_{M^*} e ev_{M^*} .

Lema 7.12. Seja R uma R -matriz bi-invertível. Então $H(R)$ -comod é uma categoria entrançada com dualidade esquerda. Se V é o co-módulo fundamental com co-acção $e^j \mapsto t_a^j \otimes e^a$, então V^* tem co-acção $f_i \mapsto S(t_i^a) \otimes f_a$, em que e^1, \dots, e^n é uma base de V e f_1, \dots, f_n é a base dual. A trança em V e V^* é dada por

$$\begin{aligned} c_{V,V}(e^i \otimes e^j) &= R_{ab}^{ij} e^b \otimes e^a, \\ c_{V^*,V^*}(f_i \otimes f_j) &= R_{ij}^{ab} f_b \otimes f_a, \\ c_{V,V^*}(e^i \otimes f_j) &= \tilde{R}_{aj}^{ib} f_b \otimes e^a, \\ c_{V^*,V}(f_i \otimes e^j) &= (R^{-1})_{ib}^{aj} e^b \otimes f_a. \end{aligned}$$

Dem. O facto de $H(R)$ -comod ser uma categoria entrançada com dualidade esquerda é consequência directa do lema 7.7 e da definição 4.4. Para calcular explicitamente a co-acção em V^* precisamos explicitamente do isomorfismo $\text{Hom}(V, H(R)) \cong H(R) \otimes V^*$. Este é dado por $f \mapsto f(e^i) \otimes f_i \in H(R) \otimes V^*$ para qualquer $f \in \text{Hom}(V, H(R))$. Vê-se então que a co-acção em V^* é dada por $\Delta_{V^*}(f_i) = S(t_i^a) \otimes f_a$ se tomamos $f = \Delta_{V^*}$ e utilizamos $(S \otimes f_i)\Delta_V(e^a) = S(t_b^a) \otimes f_i(e^b) = S(t_i^a)$. Aplicando as fórmulas das co-acções em V e V^* podemos calcular a trança em V e V^* . A trança em V é obtida através do lema 7.7.

$$c_{V,V}(e^i \otimes e^j) = R(t_a^i \otimes t_b^j) e^b \otimes e^a.$$

As outras fórmulas para a trança são obtidas aplicando as fórmulas no teorema 7.9. Por exemplo

$$c_{V^*,V}(f_i \otimes e^j) = R(S(t_i^a) \otimes t_b^j) e^b \otimes f_a = (R^{-1})_{ib}^{aj} e^b \otimes f_a.$$

□

Falta só saber quando $H(R)$ -comod tem uma estrutura de fitas.

Definição 7.13. Seja R uma R -matriz bi-invertível. Dizemos que $H(R)$ é uma álgebra com co-fitas se VU é invertível e tem uma raiz quadrada central Θ , a que chamamos a co-fita de $H(R)$, tal que

$$\Delta(\Theta) = (R_{21} * R)^{-1} * (\Theta \otimes \Theta), \quad \epsilon(\Theta) = 1, \quad S(\Theta) = \Theta.$$

Aqui consideramos Θ como elemento de $\text{Lin}(H(R), k)$, pondo $\Theta(t_j^i) = \Theta_j^i$ e $\Theta((t^{-1})_j^i) = (\Theta^{-1})_j^i$. A operação $*$ na definição é o produto convolutivo em $\text{Lin}(H(R) \otimes H(R), k)$. Obviamente temos o seguinte lema.

Lema 7.14. *Seja R uma R -matriz bi-invertível. Se $H(R)$ é uma álgebra com co-fitas $H(R)$ -comod é uma categoria com fitas.*

Dem. A estrutura de fitas é dada por

$$(\Theta \otimes \text{id})\Delta_V$$

para qualquer $H(R)$ -co-módulo V . □

Antes de dar o equivalente ao corolário 5.19, agora em termos de $H(R)$, temos que mencionar que existe também a noção de co-módulo direito com uma co-acção direita que tem propriedades análogas às propriedades na definição 7.6. Todas as afirmações acima provadas para co-módulos (esquerdos) também são válidas “mutatis mutandis” para co-módulos direitos. Por exemplo comod- $H(R)$, a categoria dos $H(R)$ -co-módulos direitos de dimensão finita, é entrançada. Seja W o co-módulo direito fundamental com co-acção $e_j \mapsto e_a \otimes t_j^a$, então W^* tem co-acção dada por $f^j \mapsto f^a \otimes S(t_a^j)$. A trança é dada por

$$\begin{aligned} c_{W,W}(e_i \otimes e_j) &= e_b \otimes e_a R_{ij}^{ab}, \\ c_{W^*,W^*}(f^i \otimes f^j) &= f^b \otimes f^a R_{ab}^{ij}, \\ c_{W,W^*}(e_i \otimes f^j) &= f^b \otimes e_a \tilde{R}_{ib}^{aj}, \\ c_{W^*,W}(f^i \otimes e_j) &= e_a \otimes f^b (R^{-1})_{bj}^{ia}. \end{aligned}$$

Neste contexto o corolário 5.19 fica o seguinte.

Teorema 7.15. *Seja R uma R -matriz extensível. Então $\Theta = I$ define uma co-fita em $H(R)$ e RP induz uma representação $F_{RP}: T \rightarrow H(R)$ -comod com $F(+)=V$ e PR induz uma representação $F_{PR}: T \rightarrow \text{comod-}H(R)$ com $F(-)=W$. Ambas as representações são únicas na medida que preservam a trança, a dualidade e a volta.*

É claro que estes funtores F_{PR} e F_{RP} são iguais aos funtores implícitos nos corolários 5.18 e 5.19. Deste mesmo teorema conclui-se que, dadas estas representações (de facto uma não existe sem a outra), R é bi-invertível e $VU = I$, e portanto, neste caso, $H(R)$ é uma álgebra com co-fitas. Uma questão interessante é a seguinte. Definimos uma álgebra de Hopf $H(R)$ e reencontrámos a nossa categoria de fitas gerada por PR (resp. RP) em forma de $H(R)$ -comod (resp. comod- $H(R)$). Será que podemos recuperar $H(R)$ a partir da categoria de fitas gerada por PR (ou RP), sem usar a construção FRT? A resposta é sim e tem importância, além de satisfazer a nossa curiosidade académica. Para recuperar $H(R)$ temos que aplicar o chamado *teorema de reconstrução de Tannaka-Krein*. Infelizmente este teorema está fora do âmbito deste trabalho mas pode ser visto em [25].

Bibliografia

- [1] J. W. Alexander. A lemma on systems of knotted curves. *Proc. Nat. Acad. Sci., USA* **9** (1923), 93-95
- [2] E. Artin. Theorie der Zöpfe. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **4** (1925), 47-72.
- [3] E. Artin. Theory of braids. *Ann. of Math. (2)* **48** (1947), 101-126.
- [4] R. J. Baxter. *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*. Academic Press, London, 1982.
- [5] J. S. Birman. *Braids, links and mapping class groups*. Annals of Math. Study, no. 82. Princeton University Press, 1974.
- [6] G. Burde e H. Zieschang. *Knots*. W. de Gruyter, Berlin, 1985.
- [7] V. Chari, A. Pressley. *A Guide to Quantum Groups*. Cambridge University Press, 1994.
- [8] V. G. Drinfeld. Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **283:5** (1985), 1060-1064. Trad. Inglesa: *Soviet Math. Dokl.* **32** (1985), 254-258.
- [9] V. G. Drinfeld. Quantum groups. Em *Proc. Int. Cong. Math. (Berkeley, 1986)*, pag. 798-820. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
- [10] V. G. Drinfeld. On almost cocommutative Hopf algebras. *Algebra i Analiz* **1:2** (1989), 30-46. Trad. Inglesa: *Leningrad Math. J.* **1** (1990), 321-342.
- [11] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. C. Millett, A. Ocneanu. A new polynomial invariant of knots and links. *Bull. Amer. Math. Soc.* **12** (1985), 239-246.
- [12] P. J. Freyd, D. N. Yetter. Braided Compact Closed Categories with Applications to Low Dimensional Topology. *Advances in Mathematics*, vol. 77, No. 2 (1989), 156-182.
- [13] M. Hazewinkel. Multiparameter Quantum Groups and Multiparameter R-matrices. *Acta Applicandae Mathematicae* **4(1)** (1995) 57-98.
- [14] N. v.d. Hijligenberg. Special Solutions of the Quantum Yang-Baxter equation. Preprint CWI, 1996.
- [15] M. Jimbo. A q -difference analogue of $U(\mathcal{G})$ and the Yang-Baxter equation. *Lett. Math. Phys.* **10** (1985), 63-69.
- [16] V. F. R. Jones. A polynomial invariant for links via von Neumann algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.* **12** (1985), 103-111.
- [17] A. Joyal, R. Street. Tortile Yang-Baxter operators in tensor categories. *J. Pure Appl. Algebra* **71** (1991), 43-51.
- [18] C. Kassel. *Quantum Groups*, Springer-Verlag, 1995.
- [19] L. H. Kauffman. *Knots and Physics*. World Scientific, 1991.
- [20] L. H. Kauffman. Knot theory and statistical mechanics. *International Journal of Modern Physics B*, Vol. 11, Nos. 1 & 2 (1997) 39-49.
- [21] V. V. Lyubashenko. Hopf algebras and vector symmetries. *Russ. Math. Surveys* **41** (1986), 153-154.
- [22] V. V. Lyubashenko. *Superanalysis and solutions to the triangles equation*. Ph.D. thesis, Kiev, 1986.
- [23] M. A. Mackaay. Enhancing R-matrices. (*unpublished.*)
- [24] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, New York, 1971.

- [25] S. Majid. *Foundations of Quantum Group Theory*. Cambridge University Press, 1995.
- [26] S. Majid, M. Markl. Glueing operation for R-matrices, quantum groups and link-invariants of Hecke type. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **119** (1996), 139-166.
- [27] Yu. I. Manin. *Quantum Groups and Noncommutative Geometry*. Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, Montréal, 1988.
- [28] K. Reidemeister. *Knotentheorie*, vol. 1 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (Alte Folge)*. Julius Springer, Berlin, 1932. Trad. Inglesa: *Knot Theory*, BSC Associates, Moscow, Idaho, 1983.
- [29] N. Yu. Reshetikhin, L.A. Takhtadjan, L.D. Faddeev. Quantization of Lie groups and Lie algebras. *Algebra i Analiz* **1** (1989), 178-206. Trad. Inglesa: *Leningrad Math. J.* **1** (1990). 193-225.
- [30] N.Yu Reshetikhin, V.G. Turaev. Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups. *Comm. Math. Phys.* **127** (1990), 1-26.
- [31] M. C. Shum. *Tortile Tensor Categories*. Doctoral dissertation, Macquarie University, 1989.
- [32] V. G. Turaev. The Yang-Baxter equation and invariants of links. *Invent. Math* **92** (1988), 527-553.
- [33] V. G. Turaev. Operator invariants of tangles and R-matrices. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Math.* **53:5** (1989), 1073-1107. Trad. Inglesa: *Math. USSR-Izv.* **35** (1990), 411-444.
- [34] C. N. Yang. Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction. *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967), 1312-1315.
- [35] D. N. Yetter. Markov algebras. Em *Braids (Santa Cruz, 1986)*, vol. 78 de *Contemp. Math.*, pag. 705-730, Amer. Math. Soc., Providence, 1988.

