



UNIVERSIDADE DO ALGARVE
Faculdade de Ciências e Tecnologia

**HISTÓRIAS COM MATEMÁTICA:
TRABALHO DE PROJECTO NO 2º CICLO DO ENSINO BÁSICO**

Ana Paula Estrelo Mestre

Dissertação para obtenção do grau de Mestre em
Didáctica e Inovação no Ensino das Ciências
Área de Especialização de Matemática

Orientadora: Professora Doutora Susana Paula Graça Carreira

Junho de 2011

Dedico este trabalho aos meus filhos Tomás e Duarte, pelo tempo que não lhes disponibilizei em prol do meu desenvolvimento pessoal e profissional.

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, Professora Doutora Susana Carreira, pela amizade, disponibilidade e incentivo que sempre demonstrou e pela natureza e qualidade dos sempre oportunos comentários e sugestões.

À minha família em especial aos meus pais, por todo o apoio que sempre me deram, durante a realização deste trabalho.

Ao Doutor Manuel Nora, pela colaboração e apoio incondicional, incentivando-me com conversas animadoras e estimulantes.

À Professora Doutora Nélia Amado, pelo estímulo, incentivo e força.

Ao meu compadre Professor Doutor Jorge Semião pelo auxílio, interesse e preocupação com que partilhou os meus dilemas e pelo estímulo que sempre me proporcionou.

À Isa Correia e São Santos, pelo apoio e encorajamento prestado na continuidade deste trabalho e nos momentos de maior preocupação.

Aos meus alunos que participaram neste estudo, pelo empenho e disponibilidade que sempre revelaram.

Aos meus amigos, pelo interesse que manifestaram, pelo alento dado, pelo carinho e paciência demonstrados.

Ana Paula Mestre, Faro, 30 de Junho de 2011

RESUMO

O presente estudo tem dois objectivos principais: (i) conhecer as potencialidades do Trabalho de Projecto no processo de ensino-aprendizagem da Matemática; e (ii) compreender a influência do ambiente de aprendizagem sobre o desenvolvimento de competências matemáticas nos alunos. Envolveu os alunos de uma turma do 6.º ano do ensino básico da qual sou professora.

Para focar e contextualizar o problema, definiram-se as seguintes questões de investigação: (i) De que forma os alunos reagem a situações problemáticas da realidade no âmbito de um Trabalho de Projecto? (ii) Como é que a pedagogia do Trabalho de Projecto se reflecte nas aprendizagens dos alunos, em particular, no que respeita aos processos e artefactos (matemáticos e não matemáticos) envolvidos?

Do ponto de vista metodológico, o trabalho segue uma abordagem de investigação qualitativa, de natureza interpretativa e de carácter descritivo, mais especificamente, assumindo os contornos de uma “experiência de ensino” (design experiment) por implicar uma investigação na própria prática. Os dados recolhidos em contexto de sala de aula são de natureza diversificada. As principais fontes consideradas foram a observação directa das aulas que incluiu a gravação em vídeo, questionários, entrevistas, recolha dos relatórios elaborados pelos alunos e outros documentos produzidos, e a realização de um diário de bordo.

O quadro teórico apresenta conceitos e perspectivas que caracterizam o Trabalho de Projecto, a importância do ensino exploratório, as conexões matemáticas, os problemas reais e a modelação matemática no processo de ensino-aprendizagem. A pedagogia do trabalho de projecto envolveu a exploração de histórias com a matemática suportadas pela investigação de problemas reais e numa abordagem experimental.

As principais conclusões do estudo permitem afirmar que o Trabalho de Projecto se reflectiu nas aprendizagens dos alunos: desenvolveram o espírito crítico; tornaram-se mais autónomos; mobilizaram os conhecimentos e estabelecerem conexões matemáticas o que contribuiu para o desenvolvimento da competência matemática.

PALAVRAS-CHAVE: Trabalho de Projecto, Histórias com Matemática, Investigação de Problemas Reais, Conexões Matemáticas, Competência Matemática, Experiência de Ensino.

ABSTRACT

The present study has two main goals: (i) getting a deeper understanding of the potential of the “Project Work” in the Mathematics teaching-learning process; and (ii) understanding the learning environment's direct influence on the students' mathematical skills. In this study participate a 6th year class, from whom I am the teacher.

To focus and limit the scope of this work, two main “research” questions were defined: (i) In which way do the students behave to problematic situation in the scope of a Project Work? (ii) How does Project Work’s pedagogy reflect in students' learning, in particular, in the processes and artifacts (both mathematical and non-mathematical) that are involved?

From the methodological viewpoint, this study follows a qualitative research, interpretative nature and descriptive character approach. Being more specific, it can be classified as a design experiment, since it consists of research over practice. Data collected in classrooms are very diverse, in nature. The main data sources were direct observation (using video recording), forms, interviews, reports and other documents done by the students and logbooks.

The theoretical framework consists of several concepts and viewpoints that characterize the Project Work domain, like the importance of the exploitation in learning, mathematical connections, real problems and the mathematical modeling in the teaching-learning process. The Project Work pedagogy included the use of story telling with math background based on real problems' research, using an experimental approach.

The main conclusions of this study were that Project Work was helpful and have contributed to the students' learning. They have developed their critical mind and became more autonomous, they applied their knowledge in new situations and they create more mathematical connections. Overall, they enhance their mathematical skills.

KEYWORDS: Project Work, Mathematics Story Telling, Real Problems Research, Mathematical Connections, Mathematical Skills, Learning Experience.

ÍNDICE

PARTE I - O PERCURSO DE INVESTIGAÇÃO.....	1
1. Introdução.....	3
1.1 Motivações do estudo.....	3
1.2 Tendências passadas e actuais no ensino da Matemática.....	5
1.3 O desafio do estudo.....	9
1.4 Formulando o problema e as questões.....	12
1.5 A estrutura da dissertação.....	13
2. Leituras, Ideias e Alicerces.....	15
2.1 O currículo e a gestão curricular.....	15
2.2 O trabalho de projecto.....	20
2.2.1 Origem, fases e objectivos do trabalho de projecto.....	22
2.2.2 Características fundamentais do trabalho de projecto.....	24
2.2.3 A importância do trabalho de projecto na aprendizagem.....	26
2.2.4 Conexões matemáticas.....	29
2.2.5 Ensino-aprendizagem exploratório.....	31
2.3 Matemática e realidade: aplicação e modelação no contexto da educação matemática realística.....	32
2.3.1 Aplicações e modelação matemática.....	33
2.3.2 Ciclo de modelação matemática.....	36
2.4 Matemática realística.....	39
2.5 Conceito de competência matemática.....	41
PARTE II - MOMENTOS RELEVANTES DO ESTUDO.....	45
3. Metodologia.....	47
3.1 Opções metodológicas.....	47
3.2 Metodologia qualitativa.....	48

3.2.1	Abordagem qualitativa e interpretativa.....	48
3.2.2	Experiência de ensino / <i>Design experiment</i>	49
3.2.3	Descrição da experiência pedagógica	52
3.2.4	O papel da investigadora.....	53
3.3	Procedimentos.....	55
3.3.1	Instrumentos de recolha de dados	55
3.3.2	Observação participante das aulas	55
3.3.3	Questionários	57
3.3.4	Entrevistas.....	57
3.3.5	Análise documental.....	58
3.3.6	Gravações em vídeo	59
3.3.7	Notas de campo	60
3.3.8	Análise de dados	60
4.	Análise de Dados	65
4.1.	Histórias com a Matemática: Uma forma de trabalhar com situações da realidade ...	65
4.1.1	O contexto de uma experiência de trabalho de projecto	66
4.1.2	A história do Henrique.....	66
4.1.3	O seguimento da história.....	76
4.1.4	Os diferentes percursos da história: Relato de uma experiência.....	89
5.	Análise dos Inquéritos, Entrevistas e Relatórios.....	101
6.	Conclusões e Recomendações.....	109
6.1	(Re)Enquadrar o percurso e compreendê-lo	109
6.2	A matemática no (re)descobrir da realidade: o Trabalho de Projecto como alicerce na aprendizagem	112
6.2.1	Contextos de aprendizagem – um catalisador das capacidades transversais	115
6.2.2	O Trabalho de Projecto como potenciador da competência matemática	117
6.3	Recomendações.....	119
	Bibliografia	121
	Anexos	133
	Anexo 1 - Autorização dos Encarregados de Educação	135
	Anexo 2 - Autorização do Órgão de Gestão	139

Anexo 3 - Questionário Inicial	145
Anexo 4 - Questionário Final	151
Anexo 5 - Entrevista Natural	157
Anexo 6 - História do Henrique	161
Anexo 7 - Plano de Investigação	171
Anexo 8 - Actividade das Canas	175
Anexo 9 - Actividade das Latas.....	179

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: O currículo como processo (adaptado de Gimeno, 2000, p. 139).....	18
Figura 2: Ponto de convergência circular (esquema-síntese das características do Trabalho de Projecto).	25
Figura 3: Espiral de etapas do Trabalho de Projecto.....	27
Figura 4: Ciclo de modelação (adaptado de Borromeo Ferri, 2006).....	37
Figura 5: Produção do Grupo A.	68
Figura 6: Produção do Grupo B.	70
Figura 7: Produção do Grupo C.	70
Figura 8: Sequência de canas pintadas.	72
Figura 9: Uma representação das sequências de canas pintadas, utilizando o Excel.....	73
Figura 10: A organização dos dados em tabela por um dos alunos.....	73
Figura 11: Momentos relativos aos ensaios na tarefa as “Latas”.....	78
Figura 12: Produções realizadas pelo grupo A relativo à tarefa das “Latas”.....	79
Figura 13: Produções realizadas pelo grupo B relativo à tarefa das “Latas”.....	82
Figura 14: Produção do grupo de trabalho D.	85
Figura 15: Momentos relativos aos ensaios da tarefa das “Latas” com bases de condicionamentos diversificadas.....	88
Figura 16: Produções realizadas pelo grupo D.....	92
Figura 17: Organização dos dados em tabela pelo grupo C relativa à tarefa dos “Aerogeradores”.....	92
Figura 18: Produção do grupo B relativa à extensão do problema dos “Aerogeradores”.....	94
Figura 19: Produção do grupo D relativa à extensão do problema dos “Aerogeradores”.....	96

ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 1: Instrumentos de recolha de dados e sua descrição.	56
Quadro 2: Tipo de entrevista e respectiva observação.	58
Quadro 3: Instrumentos de recolha de dados e sua descrição.	60
Quadro 4: Propostas de trabalho.	63
Quadro 5: Recolha de dados relevantes relativa à exploração de tarefas.	64
Quadro 6: Reacções dos alunos quanto ao trabalho desenvolvido (Gosto/Interesse).	102
Quadro 7: Reacções dos alunos quanto ao trabalho desenvolvido (Dificuldades Sentidas). ...	102
Quadro 8: Reacções dos alunos quanto ao trabalho desenvolvido (Visão da Matemática).	103
Quadro 9: O conhecimento matemático e a importância do trabalho de projecto (Aprendizagens/Compreensão).	104
Quadro 10: Aprendizagem da metodologia do trabalho de projecto (Trabalho de grupo).	105
Quadro 11: Aprendizagem da metodologia do trabalho de projecto (Aprendizagens).	105
Quadro 12: Aprendizagem da metodologia do trabalho de projecto (Autonomia/Cooperação).	105
Quadro 13: Excertos dos relatórios no âmbito dos projectos desenvolvidos.	106

Parte I

O PERCURSO DE INVESTIGAÇÃO

1. INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÕES DO ESTUDO

O que leva um professor a investigar sobre um determinado assunto surge, não só pela sua curiosidade e necessidade em encontrar significados e respostas que apontem caminhos, mas também pelo interesse que a temática desperta na sua profissão. Uma investigação é um trabalho moroso que pressupõe a delineação de questões, muitas das quais reformuladas pelos obstáculos que se encontram, ou até pelo facto de o tema enveredar por outro tipo de discussões nem sequer pensadas. A ideia, ainda instalada, de que uma investigação surge pronta a permitir uma leitura simples e acessível aos demais leitores é um pensamento erróneo de quem desconhece os bastidores e a dimensão do trabalho desenvolvido.

A investigação assemelha-se ao percurso de um rio que segue os seus meandros mais ou menos acentuados, os quais dificultam ou impedem que o seu caudal prossiga com grande fluidez. A própria investigação, seja de natureza qualitativa ou quantitativa, não obedece a um percurso linear e o investigador que se encontra no terreno desenvolve uma perspectiva consideravelmente diferente de quem absorve a informação do produto finalizado.

Os avanços e os recuos foram factores determinantes na elaboração deste trabalho e, como investigadora, ao dar a perceber esses momentos decisivos vivenciados, considero que o leitor terá uma visão mais próxima da minha e entenderá de uma forma mais clara e objectiva o caminho almejado e o percorrido.

A busca incessante de novas estratégias de ensino, o investimento em formação contínua, a participação em palestras e seminários, a partilha e a troca de experiências com colegas, foram focos de desenvolvimento que assumiram um papel preponderante no meu percurso profissional, mas que não excluem outros aspectos de grande importância. O conhecimento partilhado com os meus alunos, os seus interesses diversificados, as capacidades de alguns para a aprendizagem da Matemática e a pouca apetência de outros para lidar com esta área disciplinar contribuíram para a motivação do meu estudo enquanto profissional.

Os motes da revisão curricular¹ recente, que há anos teimam em vingar, deveriam ocupar um papel mais preponderante nas mudanças das práticas educativas. As novas tendências no ensino da Matemática e as suas implicações curriculares apresentam actualmente diversos enfoques: a resolução de problemas, o trabalho por projectos, a utilização das novas tecnologias, a aprendizagem cooperativa, as conexões matemáticas, a ligação da Matemática à realidade, entre outras sugestões e propostas. Não obstante, a polémica, ampliada na opinião pública relativamente ao ensino da Matemática, continua a perpetuar a sensação do fracasso e o espectro do insucesso. Subjacentes a toda esta problemática encontram-se a apropriação e a gestão do currículo por parte do professor e a forma como este o desenvolve com os seus alunos, nem sempre de forma alinhada com as orientações desejadas.

São de realçar, no presente, as mudanças ocorridas na sociedade que contribuíram para uma crescente diversidade social e cultural dos alunos. Hoje em dia, estes são mais criativos e detêm múltiplos conhecimentos de natureza extraescolar que se encontram acessíveis no seu meio envolvente, em particular devido aos *media* e às tecnologias de comunicação e informação. Em todo o caso, as alterações que se têm vindo a sentir na escola e no ensino acontecem ao mesmo tempo que um *certo* insucesso permanece e deparamo-nos com alunos desmotivados que não vêem utilidade nos conhecimentos que a escola veicula.

Desde os anos 90, aquando da reforma educativa, que se conhecessem os pressupostos que tornam os nossos alunos matematicamente competentes e que lhes permita a mobilização de saberes na sua vida futura. Apesar desta intenção, não tem sido unânime o sentido que se deve atribuir à noção de matematicamente competente. Efectivamente, “ser matematicamente competente na sociedade actual é algo de caracterização complexa mas implica de certeza capacidades e modos de usar pontos de vista matemáticos sobre as situações que não é possível aprender *à priori*” (Matos, 2005, p. 78).

Consciente das condicionantes que interferem no processo de ensino e aprendizagem, e por me deparar com alunos que apresentam uma atitude de rejeição ou de indiferença quanto à aprendizagem da Matemática e uma fraca convicção acerca da importância desta nas suas vidas, sinto que há modificações a fazer para alterar essa forma de pensar.

¹ Refere-se à última revisão curricular datada de 2001

Todas estas inquietações suscitam dúvidas e cogitações, momentos em que me questiono: Qual o meu papel enquanto professora? Como motivar os meus alunos? O que é realmente necessário eles aprenderem? Como ensinar-lhes Matemática?

Os contornos que se foram desenhando em torno desta problemática conduziram-me à delimitação dos principais objectivos do meu estudo, à definição da sua estrutura e à procura da sua pertinência, aspectos que procurarei traçar neste capítulo, salientando o propósito geral que guia o estudo.

1.2 TENDÊNCIAS PASSADAS E ACTUAIS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Um olhar através dos tempos e do mundo ocidental mostra que o ensino mecanicista da Matemática acabou por dar lugar à “Matemática Moderna” em que se exigia uma preparação mais eficaz dos indivíduos nos domínios científicos e tecnológicos. Esta reforma sofreu posteriores oposições do movimento designado por *Back to Basics*², por se achar que a Matemática escolar se encontrava despida e afastada das técnicas básicas da aritmética e da álgebra, não as evidenciando. O enlace entre este último movimento e a corrente pedagógica apelidada de *pedagogia por objectivos*, centrada num ensino “dogmático e formalista de uma Matemática *muito bem definida e pré-estabelecida*, em nome do ‘rendimento escolar’, da ‘individualidade’ da aprendizagem e da ‘objectividade’ dos métodos de ensino e de avaliação” (APM, 1988, p. 6), ganhou consistência.

Em Portugal, caminhos paralelos foram sendo traçados, culminando com o nascimento de uma comunidade de professores e investigadores ligados à área da Educação Matemática, que vislumbram a importância de outros factores e percursos no ensino da Matemática, apontando-os como merecedores de particular atenção. Novas reformas então assomam e alteram os programas, “relegando para um plano secundário tópicos e métodos alegadamente *mais difíceis* ou tradicionalmente considerados *menos essenciais*” (APM, 1988, p. 6-7).

² Movimento de contestação à Matemática Moderna que surgiu nos Estados Unidos, no início dos anos setenta, cuja ênfase reclama o regresso das competências básicas.

O Seminário de Vila Nova de Milfontes dinamizado por estudiosos e investigadores da Associação de Professores de Matemática³, em 1988, onde se discutiram e debateram questões centrais ligadas ao sistema educativo no âmbito da disciplina de Matemática, conduziu a uma nova visão sobre o seu ensino.

Volvidos vinte e dois anos, parece ser um bom *exercício* analisar e explorar algumas das questões abordadas nesse Seminário, que continuam a ser muito actuais. Até que ponto os temas debatidos exerceram influências substanciais sobre as práticas? Que alterações se implementaram? O que mudou, desde então, no ensino da Matemática? Como vê o professor a disciplina de Matemática, hoje? Que expectativas apresentam os alunos sobre a disciplina de Matemática?

Apesar de todas estas incertezas, o ensino da Matemática foi-se alterando e o entendimento que se tem sobre a aprendizagem e a essência do currículo de Matemática evoluiu. Neste panorama, um outro contributo significativo surge com os trabalhos e estudos de um conjunto de professores e investigadores, com larga experiência no terreno da Matemática escolar.

Paulo Abrantes, Lurdes Serrazina e Isolina Oliveira (1999) trazem a lume uma nova perspectiva, para o ensino básico, sobre o que é ser matematicamente competente, na perspectiva da *Matemática para Todos*.

Desenvolvem e discutem o que significa “fazer e aprender Matemática”, apresentando uma visão contrária à disseminada nas escolas, nas quais se confunde o ser matematicamente competente com o desenvolvimento de competências elementares de cálculo e da aptidão para executar os algoritmos das operações aritméticas. Esta visão redutora, baseada apenas no seguimento submisso dos manuais escolares e numa certa concepção estreita de cumprimento do programa, é novamente contrariada pelo surgimento das *Normas para a Matemática Escolar* do NCTM (2000) e pela reorganização curricular implementada em 2001, no ensino básico, que introduzem um novo e amplo pensar sobre o que se pretende ao nível da formação Matemática dos jovens.

Os objectivos básicos de aprendizagem são mais dilatados e envolvem conhecimentos, capacidades, valores e atitudes. Importa reforçar que “o ser matematicamente competente na realização de uma determinada tarefa implica não só os conhecimentos necessários como a

³ Adiante designada por APM.

capacidade de os identificar e mobilizar na situação concreta e ainda a disposição para fazê-lo efectivamente”, (ME-DEB, 1999 p. 21-22), não se conseguindo dissociar o conhecimento da sua utilização e do seu significado no processo de aprendizagem da Matemática.

Outro conjunto de ideias, oriundas de propostas curriculares e de teorias sobre a aprendizagem da Matemática desenvolvidas pelo Instituto Freudenthal, na Holanda, tendo por base a chamada Matemática Realista, tiveram igualmente influência no pensamento de investigadores e educadores portugueses e continuam a ser alvo de atenção em muito do trabalho de investigação que se produz actualmente na Educação Matemática. Defende-se que a Matemática deve ser ligada à realidade, estar perto dos alunos e ser relevante na sociedade actual. Em vez de considerar a Matemática como uma matéria que tem que ser transmitida, Freudenthal (como primeiro impulsor deste pensamento) reforçou a ideia da Matemática como actividade humana. Para este investigador, a educação deve fornecer aos alunos a oportunidade “orientada” de *reinventar* a Matemática através da sua execução. Isto quer dizer que na educação Matemática, o foco não deve incidir na Matemática como sistema fechado, mas na actividade Matemática, ou seja, no processo de matematização (Freudenthal, 1968).

No movimento de reforma que se iniciou no final dos anos 80 e que hoje prossegue, propôs-se essencialmente uma mudança de perspectiva e as inúmeras publicações neste domínio, incluindo os contributos do NCTM (1991, 1994, 2000) bem como da APM (1988, 1998) e do Departamento da Educação Básica do Ministério da Educação (ME-DEB, 1999, 2001), parecem ir edificando as orientações sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática. De facto, “a realidade do quotidiano da aula de Matemática desde a Reorganização Curricular tem vindo a deixar a aridez e a esterilidade de um ensino e de um currículo de Matemática fundamentalmente focados nas competências de cálculo, na prática rotineira de exercícios, na mecanização, na formalização e na abstracção” (Carreira, 2005 p. 122).

Mas muitas preocupações antigas continuam a existir no presente, sendo claro que há práticas de ensino que se encontram muito enraizadas no nosso sistema educativo, acabando por interferir no sucesso da implementação de reajustes e reformulações dos programas. A apreensão sentida com os níveis de insucesso em Matemática é uma questão intensamente discutida e alvo de sucessivos estudos e debates. Alteram-se metodologias, implementam-se novas abordagens, testam-se novas tarefas de ensino, mas o reconhecimento das mudanças reais que se produzem no dia-a-dia da sala de aula continua mergulhado numa profunda crise. Realizam-se provas de aferição no 1º e 2º Ciclos, testes intermédios e exames nacionais no 3º Ciclo, na tentativa de aferir e controlar o nível de desempenho dos alunos através de provas

estandardizadas. A propósito do desempenho dos alunos na disciplina de Matemática, no último relatório do estudo do PISA⁴ 2009, em que a avaliação da literacia Matemática prende-se principalmente com a capacidade de reconhecer e de formular problemas matemáticos em várias situações (OCDE, 2010), reconhece-se uma ligeira evolução no que concerne à melhoria dos resultados. Contudo, o desempenho dos alunos portugueses quanto à resolução de problemas situa-se, no nível 1, a que corresponde o nível básico de resolução de problemas. Embora as mudanças se sintam, quer nas práticas pedagógicas de muitos professores quer ao nível do trabalho nas escolas, quando olhamos para estes resultados, as alterações parecem ténues e o insucesso na disciplina de Matemática tem vindo a apresentar uma melhoria inferior à esperada. Paralelamente a isto, a implementação do Plano da Matemática I e II⁵ pretendeu influenciar as práticas dos docentes na procura de uma maior qualidade de ensino. Dá-se primazia ao trabalho de grupo e a pares, às actividades de investigação, valorizando-se o acto de analisar, conjecturar, argumentar, discutir e reflectir sobre uma Matemática mais ligada à realidade. Pretende-se, assim, quebrar com um ensino mecanicista e com pouco significado para os alunos. Outro contributo importante veio a culminar no agora denominado de “Novo Programa de Matemática do Ensino Básico⁶”, homologado em 2007 e testado em turmas piloto, desde o 1º ciclo ao 3º ciclo, em 2008/2009, onde se introduz uma mudança na perspectiva do que é aprender Matemática. Este programa valoriza “as dimensões dessa aprendizagem relacionadas com a representação, comunicação e raciocínio em Matemática, a resolução de problemas, as conexões matemáticas e a compreensão e disposição para usar e apreciar a Matemática em contextos diversos” (ME-DGIDC, 2007, p. 4). Atribuindo um lugar preponderante à escolha das tarefas pelo professor, apela a que a aprendizagem da Matemática seja suportada por um envolvimento mais efectivo por parte do aluno. A este, deve ser dada a oportunidade de passar por diversos tipos de experiências de aprendizagem, “nomeadamente resolvendo problemas, realizando actividades de investigação, desenvolvendo projectos,

⁴ O estudo PISA, denominado por “Programme for International Student Assessment”, foi lançado pela OCDE em 1997. São estudos internacionais que visam monitorizar, de uma forma regular, os sistemas educativos em termos do desempenho dos alunos.

⁵ Salienta-se no âmbito deste projecto a aposta em tarefas mais apelativas e motivadoras que direccionem os alunos para um trabalho autónomo, numa perspectiva construtivista da aprendizagem.

⁶ Adiante designado por NPMEB.

participando em jogos e ainda resolvendo exercícios que proporcionem uma prática compreensiva de procedimentos” (ME-DGIDC, 2007, p. 8).

Melhorar o desempenho dos alunos, tornando-os actores activos e participativos, que confrontem ideias e testem conjecturas, discutam e argumentem acerca de estratégias e resultados, individualmente ou em grupo, são propostas claras para a aprendizagem da Matemática previstas no NPMEB.

As situações a propor aos alunos, tanto numa fase de exploração de um conceito como na fase de consolidação e aprofundamento, devem envolver contextos matemáticos e não matemáticos e incluir outras áreas do saber e situações do quotidiano dos alunos. É importante que essas situações sejam apresentadas de modo realista e sem artificialidade, permitindo capitalizar o conhecimento prévio dos alunos. (ME-DGIDC, 2007, p. 9)

A bagagem cultural e Matemática dos alunos é um aspecto importante a ter em conta no processo de ensino e aprendizagem, mas na maioria das vezes descurado. As suas vivências são ricas e diversificadas e delas temos de nos socorrer para que a Matemática venha ao de cima em contextos realistas. Integrar o conhecimento matemático num todo coerente, para que daí resulte um maior entendimento, implica trabalhar uma Matemática mais realista e interligada com diferentes áreas do mundo real.

Tendo como pano de fundo a visão e a análise que aqui apresentei, proponho-me com este estudo dar um contributo sobre aspectos essenciais da aprendizagem da Matemática, apostando em tirar partido das vivências dos meus alunos, dando-lhes expressão na construção de histórias com Matemática e adoptando a metodologia de Trabalho de Projecto como forma de potenciar o desenvolvimento das suas competências nesta disciplina.

1.3 O DESAFIO DO ESTUDO

Percorrer o programa e as orientações curriculares, consultar estudos e trabalhos de investigação, documentos de orientação curricular publicados, apoiar-me na minha experiência

profissional, procurar introduzir alguma criatividade e trabalhar numa lógica de desenvolvimento do currículo, constitui um misto de etapas que anualmente percorro.

Em muitos momentos, ao discutir com outros professores o percurso temático a seguir nas aulas, notei uma preocupação demasiado rígida e fechada em não nos desviarmos dos documentos emanados pelo Ministério: programas e orientações curriculares são para cumprir e o manual é um instrumento de apoio para seguir. Apesar desta disposição, frequente em várias conversas, este sempre foi um posicionamento com o qual não me identifiquei. Em meu entender, o currículo é um instrumento de trabalho do professor, o programa não é rígido, o manual é apenas uma base de trabalho e não a única, a forma de tratar os temas é de importância vital no processo de ensino e aprendizagem.

A importância das relações da Matemática com a realidade e a sua interligação com outras áreas disciplinares constitui um estímulo para muitos alunos; proporcionar-lhes tarefas motivadoras e ricas contribui para o desenvolvimento de atitudes positivas face à Matemática.

A escola pode e deve proporcionar aos alunos experiências diversas de utilização da Matemática em contextos reais. Se o não fizer, estará a esconder um dos aspectos importantes da própria Matemática e a limitar a formação dos alunos, quanto à compreensão do que é a Matemática e quanto à capacidade de usá-la com espírito crítico e auto-confiança (Abrantes, 1990, p. 332).

A abundante literatura, resultante de estudos e investigações levadas a cabo por teóricos e investigadores, nacionais e internacionais, abrange inúmeros domínios que assumem um papel preponderante no ensino da Matemática, nomeadamente: comunicação matemática, actividades de investigação, resolução de problemas, novas tecnologias, percursos e trajectórias de aprendizagem, entre outras. Advogar a implementação de estratégias como as referidas, no contexto da aula de Matemática, é ter a consciência da diversidade de experiências catalisadoras do desenvolvimento do pensamento matemático e da construção de significados em Matemática.

Proporcionar oportunidades aos alunos para resolverem, explorarem, investigarem e discutirem problemas, numa variedade de situações, é uma ideia-chave para que a aprendizagem da Matemática constitua uma experiência positiva e significativa. (Abrantes, 1988, p. 35)

A propósito da obra de Paulo Abrantes e reconhecendo o seu extraordinário legado, o trabalho de desenvolvimento curricular materializado no Projecto Mat₇₈₉⁷, inspirador da introdução das áreas curriculares não disciplinares, particularmente da área de projecto, continua a representar uma experiência muito actual. A implementação da área de projecto mereceu algum destaque nas escolas, pese embora apelar a uma metodologia de trabalho a que não tem sido atribuída a importância devida. Hoje em dia, o Trabalho de Projecto encontra-se muito à margem daquilo que era esperado e a função redutora para a qual foi remetida esta área curricular não disciplinar leva a que seja encarada por muitos professores como mais uma disciplina em que se trabalham pequenos projectos com pouco significado.

Os pensamentos e as palavras de Paulo Abrantes consubstanciam-se no meu entendimento sobre o que é a disciplina de Matemática, como a considero e a desejo abordar, como pretendo que o aluno possa analisar e questionar a Matemática e entender a sua importância no seu dia-a-dia. As interpretações de John Dewey, William Kilpatrick, João Pedro da Ponte, Paulo Abrantes e de outros teóricos igualmente importantes, sobre o Trabalho de Projecto e a pedagogia por projectos, foram dando mais significado ao meu pensamento e à minha visão de como leccionar a disciplina de Matemática.

É destas vozes que emerge a minha motivação para experimentar algo de diferente, tendo a preocupação de que os meus alunos desenvolvam a sua competência Matemática, numa perspectiva de questionamento da realidade e reflectindo sobre o que é aprender, usar e fazer Matemática. A essência deste trabalho reside na criação de histórias matemáticas, nas aulas, com a contribuição dos alunos e a partir das suas vivências, onde a exploração dos conteúdos matemáticos não segue um percurso rígido e alinhado por uma sequência prévia, mas surge ao longo do desenrolar da história, sendo as conexões matemáticas predominantes.

O Trabalho de Projecto, por vezes considerado pelos teóricos como uma “filosofia de trabalho”, deveria ter uma importância central na aprendizagem da Matemática, não só pelas características que lhe são inerentes mas, também, pela motivação, pelo interesse e empatia dos alunos, que desabrocham de uma forma exponencial. Ao adoptar esta pedagogia de trabalho na exploração de histórias matemáticas realistas, pretendo também que os alunos se deparem com uma Matemática diferente, bastante suportada por uma abordagem experimental. Assim,

⁷ Projecto de inovação curricular no 3º ciclo desenvolvido por uma equipa de professores e investigadores entre 1988 e 1992 cujo objectivo assentou na abordagem de projectos em que se interligava a Matemática e a realidade.

acentuo a ideia de aliar o Trabalho de Projecto à prática de sala de aula, trabalhando sobre problemas que emergem e são contextualizados em torno de um foco orientador.

O Trabalho de Projecto e a construção de histórias que envolveram a exploração de conteúdos matemáticos foram os motores para que o presente trabalho surgisse e se desenvolvesse. Foi a partir dessa experiência, desenvolvida com uma turma de alunos do 6.º ano do ensino básico, que realizei este estudo.

Ressalta, ainda, e em última nota, que as experiências proporcionadas e vividas geraram a sensação de que vale a pena insistir e persistir em métodos alternativos para a aprendizagem da Matemática.

1.4 FORMULANDO O PROBLEMA E AS QUESTÕES

A elaboração de projectos na escola deverá assumir um papel preponderante, tanto mais se esses tiverem como intenção promover competências matemáticas que envolvam um carácter mais prático e experimental e menos teórico e abstracto. Permitir que os alunos desenvolvam competências matemáticas, integrando atitudes, capacidades e conhecimentos, que se sintam capazes de mobilizar saberes, recorrendo a conexões entre diferentes tópicos, para a resolução de problemas do dia-a-dia é um objectivo a atingir. Deste modo, a perspectiva subjacente não é a de que a escola prepare os alunos para um futuro indefinido, mas sim, que estes se tornem capazes de mobilizar conhecimentos e capacidades em qualquer momento.

A ligação da Matemática ao real é algo que os nossos alunos não apreendem verdadeiramente; falta-lhes a percepção de que a base de muitos conceitos matemáticos se apoia em factos reais. Um olhar mais amplo sobre a realidade permitirá aos alunos uma maior identificação com a Matemática, introduzirá uma tónica mais apelativa no conhecimento e a estruturação do seu pensamento matemático tornar-se-á mais eficaz e consistente.

Esta investigação tem como objectivo estudar e conhecer as potencialidades do Trabalho de Projecto no processo de ensino-aprendizagem da Matemática e compreender a influência do ambiente de aprendizagem sobre o desenvolvimento de competências matemáticas nos alunos, no contexto de desenvolvimento de um projecto.

No âmbito do problema de investigação irei centrar-me nas seguintes questões:

1. *De que forma os alunos reagem a situações problemáticas da realidade no âmbito de um Trabalho de Projecto?*
2. *Como é que a pedagogia de Trabalho de Projecto se reflecte nas aprendizagens dos alunos, em particular, no que respeita aos processos e artefactos (matemáticos e não matemáticos) envolvidos?*

No intuito de conhecer *in loco* as condições, significados e processos que tiveram lugar no decurso da experiência realizada em sala de aula, foi utilizada uma metodologia de investigação de cariz qualitativo e de natureza interpretativa. Assumindo-a como uma investigação-acção, os dados que recolhi foram permitindo aprofundar e encontrar as linhas de orientação adequadas ao desenrolar da investigação, tanto do ponto de vista teórico como empírico.

Ao encetar este estudo, utilizei como principal fonte de dados as produções dos alunos e a aplicação de inquéritos, dando destaque a questões que se prendem com as representações que os alunos têm da disciplina de Matemática, incluindo os aspectos positivos e as dificuldades. A observação, o registo de notas, as gravações em vídeo das aulas, os trabalhos dos alunos e outros documentos, foram elementos que também fizeram parte da recolha de dados, ao longo de um ano lectivo.

1.5 A ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

No que respeita à estrutura do meu relatório de investigação, este organiza-se em duas partes e seis capítulos sequenciados. A primeira parte é destinada ao *Percurso de Investigação*; discute-se o desafio do estudo, identifica-se o objectivo da investigação e as questões que lhe estão subjacentes, propõe-se um enquadramento teórico e explicitam-se as opções metodológicas. A segunda parte, *Momentos Relevantes do Estudo*, pretende explorar e discutir uma experiência de ensino realizada no terreno, centrando-se na descrição e na análise dos resultados obtidos.

Na parte do *Percurso de Investigação*, o Capítulo I contextualiza as intenções que presidem à investigação e que conduzem às duas questões de investigação. No Capítulo II explicita-se o enquadramento teórico, discutindo-se aspectos chave que sustentam teoricamente o objecto de estudo e conferem justificação e relevância ao trabalho de investigação.

Enquadrado na parte *Momentos Relevantes do Estudo*, o Capítulo III inclui a justificação e desenvolvimento dos processos metodológicos utilizados durante o percurso investigativo. O Capítulo IV apresenta a descrição e a interpretação de toda a informação recolhida em sala de aula. Com base na análise dos questionários e entrevistas realizados, discutem-se outros dados relevantes que integram o Capítulo V. Por último, apresenta-se o Capítulo VI, relativo às conclusões e recomendações que emergiram desta investigação, apontando possíveis caminhos para futura investigação.

2. LEITURAS, IDEIAS E ALICERCES

2.1 O CURRÍCULO E A GESTÃO CURRICULAR

Ao encetar uma abordagem teórica das perspectivas e conceitos de currículo, ocorre-me um relato verídico apresentado nos “Fundamentos e Práticas” de Maria Céu Roldão (1999), o qual, de certa forma, relembra a minha ingressão no ensino como professora.

Quando comecei a ensinar, recebi do director da escola onde fui colocada um horário, a indicação do livro de ponto que deveria usar nas aulas, um mapa para marcação dos testes, a data das reuniões de notas (era assim que as designávamos), o nome das colegas do grupo e ainda algumas recomendações paternas atendendo à minha pouca idade e manifesta inexperiência no ofício. Estava entregue o currículo – e estava encomendada a professora... que ainda nem sabia que o era... (p. 11).

Serve esta narrativa para ilustrar o modo como os docentes iniciavam a sua carreira profissional e seguiam as orientações do Conselho Executivo, que se traduziam pelo cumprimento de um currículo assente em variáveis burocráticas, acrescido da leccionação de aulas e das reuniões, em que o trabalho desenvolvido pelos alunos se espelhava numa pauta através dos valores quantitativos.

Muito embora algumas destas orientações ainda sejam a norma hoje, a realidade nas escolas revela uma forma diferente de entender o currículo. Garante-se uma discussão sobre os objectivos e a natureza do currículo, existe um maior cuidado na sua implementação e não se pensa simplesmente em dar cumprimento às unidades temáticas.

Efectivamente, estamos perante uma nova realidade de ensino em que o que realmente “varia é a natureza da opção, os níveis de decisão e os papéis dos actores envolvidos” (Roldão 1999, p. 13). Decidir, organizar, actuar e intervir sobre um conjunto de aprendizagens inseridas num determinado contexto, voltadas para a formação do aluno, enquanto indivíduo, é uma

tarefa da responsabilidade da escola. Mas a própria escola delega no professor “gerir, isto é, decidir o que ensinar e porquê, como, quando, com que prioridades, com que meios, com que organização, com que resultados...” (Roldão 1999, p. 25).

Brocardo (2001), referindo Pacheco (1996), reforça esta ideia, apresentando como exemplo as seguintes premissas relacionadas com o significado de currículo:

... o que se deve ensinar e o que os alunos devem aprender; a necessidade de ensinar de forma que estes aprendam, ou realmente como se ensina e na prática se aprende; a forma como se ensina e aprende não descurando a utilização dos métodos e processos de ensino; entende-se como algo exacto, pronto e finalizado ou algo aberto que se precisa e delimita ao longo da sua implementação (p. 20).

Podemos enquadrar o conceito de currículo de duas formas diferentes. Numa primeira acepção, o plano de estudos ou o programa segue uma organização e estrutura bem planificados relativos à especificidade e natureza de cada área disciplinar, obedece a um conjunto de objectivos, conteúdos e actividades que se implementam de acordo com as intenções em vista. Outra perspectiva, e numa tónica que assume uma maior flexibilidade, refere-se à implementação do plano de estudo em que intervêm as vivências dos alunos aliadas ao contexto escolar. São de valorizar as experiências dos intervenientes em que se ligam saberes, atitudes e valores, ocorrendo uma adaptação do currículo ao contexto em que ele é praticado (Brocardo, 2001).

Estes significados são concordantes com as ideias de Pacheco (1996) quando identifica duas definições bastantes comuns de currículo: “uma formal, como plano previamente planificado a partir de fins e finalidades; outra informal, como processo decorrente da aplicação do referido plano” (Brocardo, 2001, p. 16).

Construindo um entendimento sobre a diversidade de opiniões e as múltiplas interpretações quanto à natureza do currículo, Brocardo (2001, p. 21), apresenta as seguintes perspectivas:

Um sentido estrito, em que o currículo é entendido como a sequência de disciplinas que integram um curso e, eventualmente, os conteúdos de cada uma dessas disciplinas;

Um sentido um pouco mais amplo, em que o currículo, para além do aspecto anterior inclui ainda a definição das metodologias a adoptar;

Um sentido mais amplo em que o currículo pode ser considerado como um conjunto das acções educativas planeadas pela escola;

Entendimento de currículo como tudo o que os alunos aprendem, formal ou informalmente.

Pacheco (1996) resume o conceito de currículo da seguinte forma:

O currículo, embora apesar das diferentes perspectivas e dos diversos dualismos, define-se como um projecto, cujo processo de construção e desenvolvimento é interactivo; que implica unidade, continuidade e interdependência entre o que se decide ao nível do plano normativo, ou oficial, e ao nível do plano real, ou processo de ensino-aprendizagem. Mais ainda, currículo é uma prática pedagógica que resulta da interacção e confluência de várias estruturas (políticas, administrativas, económicas, culturais, sociais, escolares...) na base das quais existem interesses concretos e responsabilidades compartilhadas (p. 20).

A diversidade de conceitos de currículo apresentada espelha a ambiguidade e a polissemia deste conceito. Obedecendo a uma natureza aberta e flexível, o currículo, enquanto projecto a ser construído de uma forma articulada e coerente, nos seus diferentes níveis de concretização, apela à tomada de decisões em que estão subjacentes as necessidades, características dos contextos e dos alunos.

No entender de Alonso (2000), as expressões planificação curricular e implementação curricular significam “que o papel do professor consiste em adaptar a sua prática a uma série de requisitos e planos curriculares externos” e quanto ao significado de desenvolvimento curricular “indica uma contínua reestruturação das formas de representação do saber nas aulas, em colaboração com os seus alunos quando reflectem sobre a sua prática” (p. 62).

Mas, ao nível do contexto educacional o currículo relaciona-se com a tomada de decisões, que se traduz no “como” desenvolver o processo de ensino-aprendizagem cujas finalidades e objectivos se encontram expressas nos documentos oficiais (Stein, Remillard & Smith, 2007).

Distinguindo as diferentes vertentes do currículo, Nunes & Ponte (2010), Gimeno, (1989), Ponte, (2005), Stein, Remillard & Smith, (2007) apresentam o currículo *prescrito* (ou formal) presente nos normativos legais, o currículo *mediado*, o qual é orientado pelos manuais escolares, o currículo *planificado* (ou moldado) pelo professor, o currículo *em acção*, que é aquele que o professor implementa na sala de aula, o currículo *aprendido* pelos alunos e o currículo *avaliado*, sendo este último o que se verifica através dos exames nacionais.

Atingir os objectivos e finalidades indicadas, quer nos documentos oficiais, quer os que se encontram nos capítulos dos manuais, leva a considerar um outro tipo de currículo, o currículo *instituído* (Stein, Remillard & Smith, 2007).

Para explicar a inter-relação entre os diversos rostos do currículo, Gimeno (2000) apresenta um modelo global e correspondente às diferentes fases do desenvolvimento curricular (Figura 1). Este autor considera diferentes currículos como resultado das diversas acções ocorridas. Assim, o currículo prescrito tem como função orientar o conteúdo do currículo, funcionando como padrão na elaboração de materiais curriculares. O currículo desenhado ou apresentado assume um papel centrado nos materiais curriculares colocados à disposição dos professores. Estes têm como tarefa fornecer uma interpretação no sentido de orientarem a sua prática lectiva. Quanto ao currículo organizado ou moldado resulta da interpretação que o professor realiza, individualmente ou em grupo e, como agente decisivo na implementação do currículo, toma a atitude que leva à concretização do currículo. O currículo em acção traduz-se na leccionação das aulas, ou seja, a instrução que o professor põe em pratica juntamente com os seus alunos. Por último, o currículo avaliado serve como elemento regulador das práticas dos professores e dos alunos os resultados espelham-se, em particular,

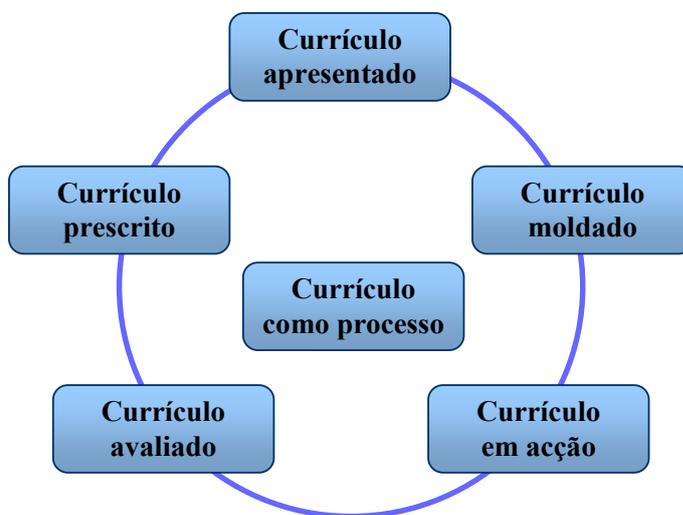


Figura 1: O currículo como processo (adaptado de Gimeno, 2000, p. 139).

nos exames externos.

Alonso (2000), na sua concepção sobre a influência do currículo, considera que “entre o currículo prescrito a nível nacional e a avaliação dos resultados de aprendizagens dos alunos existe toda uma espécie de caixa negra que é preciso desvendar e compreender para poder explicar o sentido das mudanças curriculares” (p. 61).

Ponte (2005), em referência a Alonso (2000), menciona que, tomando o currículo como uma base de elaboração, este sujeita-se a um processo que se transforma, se enriquece e se reconstrói, embora algumas vezes sofra alterações e se desvirtue, reflexo das inúmeras medições que vai sofrendo. Nos diferentes contextos de realização, o seu processo de desenvolvimento e de aproximação à prática educativa pode apresentar aspectos positivos ou negativos. Esta visão de currículo não deixa dúvidas de que o professor detém um papel preponderante no desenvolvimento curricular.

Ao apoiar-se em argumentos de Gimeno (1989), Ponte (2005) a propósito do papel que o professor detém no currículo, aponta três níveis distintos.

No primeiro, adoptando uma postura isenta de crítica, o professor limita-se a seguir as orientações curriculares e os manuais escolares, o que o situa no nível de imitação-manutenção. No segundo, o nível de mediação, o professor deverá conhecer bem a realidade (escola e alunos) onde actua. Estabelecendo um papel conciliador, este terá que adequar a prática em que opera aos recursos disponíveis, compreendendo, adequando, concertando e alterando. No terceiro, o professor adopta uma postura de responsabilidade total quanto à acção. Assumindo um trabalho de parceria com o seu grupo de trabalho, perante situações concretas, efectua um diagnóstico que detecte os problemas, desencadeando a formulação de hipóteses de trabalho exequíveis. Actua, testando, reformulando, adequando e avaliando numa perspectiva de trabalho contínuo, investiga e regula as suas práticas, o que se traduz num papel de criador-gerador.

Actualmente, o papel do professor no currículo envolve uma posição mais próxima da *mediação* e do *criador-gerador* do que o papel reservado à *imitação*. Este último, torna o entendimento que o professor detém sobre o currículo numa relação infecunda e desprovida de significado, sem questionar a melhor forma de o implementar e adequar à realidade da sua prática lectiva. Embora importante, este nível de relação entre professor e currículo – *imitação* – permite-lhe inteirar-se e orientar-se sobre as directrizes expressas nos documentos oficiais propostos. Mas, hoje em dia, o professor toma uma posição mais activa e questionante sobre a realidade do ensino e o meio em que actua, daí que seguir apenas o nível da *imitação* não é

suficiente. São as problemáticas relacionadas com o insucesso educativo e a sua tendência para actuar sobre a realidade com que se depara que o movem a procurar um desenvolvimento curricular adequado. É nesta situação que a interpretação e uso do currículo o remete para o papel de *mediador* ou *criador-gerador*.

No entanto, o papel o professor não deverá afastá-lo por completo da consulta dos documentos oficiais. Torna-se francamente indispensável estabelecer uma conexão entre os diferentes papéis, potenciando o de *criador-gerador*. O professor, como actor do desenvolvimento curricular, desempenha um papel fundamental na implementação do currículo. A procura de boas práticas passará por criar nos alunos um acréscimo de interesse e de motivação e um despertar para as aprendizagens. Entre muitas outras metodologias de ensino, o Trabalho de Projecto implica uma perspectiva de desenvolvimento curricular que visa inovar e modernizar.

2.2 O TRABALHO DE PROJECTO

O trabalho por projectos, termo em voga e comum nas nossas escolas, não atende, muitas vezes, à essência desta metodologia de trabalho, sendo por isso mais uma designação vulgarizada mas usada de forma pouco rigorosa. É usual, por exemplo, abordarem-se temas para o Trabalho de Projecto como o “São Martinho”, o “Natal” ou a “Páscoa”, entre outros. Serve, assim, esta alegada metodologia de trabalho para justificar um certo tipo de obrigações escolares que, no fundo, não são mais do que actividades pedagógicas soltas com objectivos relativamente pobres.

Aparentemente, o trabalhar por projectos é um tema central e de grande destaque, mas a pedagogia utilizada é completamente dispar. Não se respeitam as diferenças individuais de cada aluno, nem o seu desenvolvimento cognitivo. As histórias das suas vidas e os conhecimentos prévios trazidos dos seus contextos sociais são relegados para um plano inferior (Massa & Massa, 2007).

Na educação, em Portugal, o trabalhar por projectos assume uma expressividade bastante ténue, percebendo-se até que a sua ligação à área disciplinar de Matemática manifesta uma certa insipiência. Sendo uma estratégia adoptada noutros países, apresenta algum relevo em

Espanha e assume um considerável destaque nos países nórdicos, estando igualmente presente, nos últimos tempos, em países da Europa do Leste.

Por se considerar o Trabalho de Projecto de grande importância para a aprendizagem, a implementação da Reorganização Curricular em 2001, em Portugal, introduziu a área curricular não disciplinar de Área de Projecto, num apelo que visava o desenvolvimento desta metodologia de trabalho. No entanto, após dez anos da sua existência no currículo nacional, pretende-se agora subtrair a Área de Projecto ao currículo do Ensino Básico⁸, por se considerar desnecessária, anunciando-se a sua abolição no próximo ano lectivo de 2011/2012. Ao longo do tempo, esta área curricular não disciplinar foi seguindo caminhos desviantes dos objectivos pretendidos e a sua essência foi-se perdendo.

Com efeito, Massa & Massa (2007), numa definição abrangente, consideram que “a razão da importância de projectos na escola é justamente romper com posturas arbitrárias para assim construirmos a percepção do aluno sob um novo olhar, como sujeito holístico, com sonhos, potencialidades que devem ser respeitadas, e reconhecer que o importante na vida escolar, assim como na vida social, não são os resultados das provas mas sim todo o processo de construção do conhecimento no dia-a-dia” (p. 129).

O processo de ensinar e aprender envolve movimentos dinâmicos em que quem aprende também ensina a pensar e em que todos podem partilhar “um universo pessoal e social diferente do dos outros” (Massa & Massa, 2007, p. 129). O mesmo é dizer que a aprendizagem decorre de formas diferentes, pelo que o processo individual de cada aluno deverá ser respeitado.

Numa perspectiva de educação crítica, Jacobini (2004) afirma que trabalhar com projectos e inseri-los num determinado contexto rompe com a ideia exclusiva da obtenção de conhecimento, para além de “direccionar o olhar pedagógico para os fundamentos da educação crítica e para a realização de uma aprendizagem baseada na participação activa dos educandos a partir de situações problema de seu quotidiano” (p. 50).

Um primeiro ponto a realçar sobre o Trabalho de Projecto prende-se com o facto de não encontrarmos uma definição única para o descrever. Diversas formulações são propostas por investigadores e teóricos e, devido à sua complexidade, torna-se particularmente difícil

⁸ Confrontado com pesquisa do Ministério de Educação que "elimina a Área de Projecto e o Estudo Acompanhado do elenco das áreas curriculares não disciplinares, procedendo à segunda alteração ao Decreto-Lei n.º 6/2001, de 18 de Janeiro". Estas medidas entram em vigor no próximo ano.

enquadrar esta pedagogia de trabalho numa teoria ou num movimento específico. Importa, contudo, compreender a sua origem, fases e objectivos, bem como as suas características fundamentais e a sua importância no processo ensino e aprendizagem.

2.2.1 ORIGEM, FASES E OBJECTIVOS DO TRABALHO DE PROJECTO

Percorrendo as investigações levadas a cabo por pedagogos, investigadores e educadores, os embriões da pedagogia do projecto aparecem expressos pelo pensamento pragmático dos norte-americanos, nos anos 1915 a 1920 – Dewey (1916) e Kilpatrick (1918).

Boutinet (1990) menciona que estes pedagogos “procuraram opor à pedagogia tradicional, que se revelava demasiado dispendiosa em relação aos ganhos obtidos, uma pedagogia progressista, ainda denominada de pedagogia aberta, na qual o aluno se tornava actor da sua formação, por intermédio de aprendizagens concretas e significativas para si” (p. 193). Sob este desígnio, Dewey utilizava frequentemente a expressão *learning by doing*. No seu entender, “os métodos activos estimulam as disposições criadoras e construtivas das crianças, apoiando-se nos seus interesses” (Boutinet, 1990, p. 193).

Um pensamento como este é corroborado por defensores da nova educação; refira-se Freinet, Montessori, Decroly, Makarenko que “valorizavam a liberdade da criança, as suas necessidades de actividades, numa palavra, a escola ligada à vida: são experiências que o próprio aluno realiza num meio educativo apropriado que são factores de aprendizagem” (Boutinet, 1990, p. 193). Kilpatrick (1918, citado por Abrantes, 1994, p. 79) reforça esta ideia, afirmando que basear a educação em projectos “é exactamente identificar o processo da educação com a própria vida”.

Mas foram as investigações levadas a cabo por Kilpatrick que vieram a ter uma importância crucial na pedagogia do Trabalho de Projecto. Este autor procurou sistematizar vários aspectos importantes relativos ao processo de ensino-aprendizagem intrinsecamente ligados ao conceito de “projecto”. Identificou três elementos centrais: (i) uma acção, que é passível de se realizar com empenhamento pessoal, (ii) a intencionalidade dessa acção, que pressupõe um objectivo ou propósito, e por último, (iii) a inserção num contexto social.

Kilpatrick foi fortemente criticado por não referir explicitamente nos seus escritos a integração da resolução de problemas no Trabalho de Projecto, especialmente no contexto

educativo americano. Contudo, muitos defendem que a resolução de problemas estará sempre implícita no Trabalho de Projecto e é indissociável deste. Paulo Abrantes ilustra este pensamento na sua tese de doutoramento, advogando que:

O objectivo de um projecto pode ser considerado um problema no sentido em que se está perante uma situação para a qual se pretende encontrar uma resposta sendo necessário desenvolver a estratégia para o fazer. Mesmo quando não está à partida (ainda) formulado como problema, um projecto gera necessariamente problemas que correspondem a questões colocadas no início ou que surgem no desenvolvimento do trabalho (Abrantes, 1994, p. 79-80).

Cortesão (2002) reforça esta concepção, referindo que “um projecto é um estudo em profundidade, um plano de acção sobre uma situação, problema ou tema” (p. 24). Tem uma intencionalidade que o orienta e distingue-se de uma actividade tradicional pela organização que pressupõe, pelo tempo de realização que o acompanha e pelos efeitos que produz. O projecto envolve uma articulação entre intenções e acções, entre teoria e prática, num plano que estrutura essas acções. Segundo Roegiers (1997, referido por Cortesão, 2002), o projecto não se esgota apenas numa intenção nem num plano, nem apenas em acção e em produto. É o conjunto de todas estas dimensões que constituem o projecto. Assim, este autor fala de *Projecto Visado* para destacar o conjunto das intenções que orientam e justificam o trabalho, de *Projecto Plano* para enfatizar a concepção do plano de trabalho, de *Projecto Processo* que explicita a acção que irá permitir a sua concretização e de *Projecto Produto* para designar os efeitos que poderão posteriormente ser objecto de reformulações. Estas são as quatro dimensões daquilo a que denomina de *Projecto Agido* ou simplesmente de Projecto (Cortesão, 2002).

A complementar estas dimensões, importa fazer referência às fases do projecto que, no entender de Nunes e Ponte (2008), pode ser dividido em cinco fases. A primeira fase, denominada de concepção do projecto, engloba a formulação de um problema e a definição de objectivos a atingir. Uma segunda fase centra-se na planificação do trabalho, pressupõe uma definição, a distribuição e orientação de tarefas, culminando com a avaliação do trabalho realizado. Apresentam como terceira fase a intervenção ou desenvolvimento, aludindo a momentos de reflexão e discussão com vista à auto-regulação do projecto. O processo de análise deverá ser sistemático, construindo-se e adaptando-se novos materiais, reflectindo-se

sobre os obstáculos e sucessos criados. A quarta fase refere-se à finalização e avaliação dos produtos do projecto. Nesta fase propõe-se a elaboração de um relatório escrito final com a recolha e análise de dados e os resultados conseguidos. Este poderá, ainda, servir de momento de reflexão sobre a eficácia do projecto. Por fim, a quinta e última fase diz respeito à divulgação e disseminação de resultados. A divulgação do projecto à comunidade permite que as experiências sejam apropriadas e se tornem num factor de melhoria de acções futuras.

2.2.2 CARACTERÍSTICAS FUNDAMENTAIS DO TRABALHO DE PROJECTO

Para além das três principais dimensões que o caracterizam, anteriormente mencionadas, existem outros elementos, não menos importantes e basilares nesta pedagogia de trabalho.

Nas palavras de Paulo Abrantes (1994), destacam-se: “a actividade intencional; a responsabilidade e a autonomia dos alunos; a autenticidade do projecto; a complexidade e as actividades de resolução de problemas; o carácter faseado e prolongado do projecto”.

O Trabalho de Projecto pressupõe uma *actividade intencional*, que se encontra intimamente ligada ao interesse e empenho sobre o trabalho a realizar. Ao experimentarem, traçarem o seu plano de investigação, tomarem contacto com os problemas, questionando, criticando, argumentando e procurando soluções para o problema inicial, os alunos contribuem para dar significado ao objectivo do Trabalho de Projecto. Este conjunto de atitudes conduz a outras como a *autonomia e a responsabilidade*, elementos essenciais num projecto. A tomada de decisões, os caminhos e escolhas a seguir, a cooperação ocorrida no seio do grupo, são aspectos decisivos na eficácia do Trabalho de Projecto. Acima de tudo, a consecução do projecto, não sendo algo de imediato, apresenta um carácter *prolongado e faseado*.

A reavaliação do projecto obedece a uma análise sobre o inicialmente projectado, considerando-se todo o percurso, os seus efeitos e o produto final.

Referindo-se ao projecto pedagógico, Boutinet (1990) considera essencial a *negociação pedagógica*. “Se a negociação for curto-circuitada, não estamos mais em presença de um projecto pedagógico, mas somente de um projecto docente, ou de ensino” (p. 204).

A negociação cobre no mínimo, duas funções:

Permite efectuar um diagnóstico da situação pedagógica, especialmente levando em conta as aquisições dos alunos assim como as exigências dos programas; Proporciona a ocasião aos alunos, por intermédio de uma diligência activa e concreta, de se interrogarem sobre aquilo que querem: a negociação é, então, a dimensão essencial de uma pedagogia que se apresenta como aberta, estimulando a motivação e a imaginação de todos os interessados, ao permitir-lhes apropriar-se da situação na qual são actores (Boutinet, 1990, p. 204).

É, portanto, essencial a responsabilidade dos alunos e a eles cabe um papel importante na definição e na realização das tarefas. Desta forma, é de considerar a *negociação pedagógica*, como mais uma característica do Trabalho de Projecto e não menos importante do que as anteriores. É esta característica que impele o assumir, por parte de todos os intervenientes, o compromisso ou contrato pedagógico, responsabilizando-se pelas tarefas a realizar, tendo em vista o seu projecto de investigação.

Ao entender que as características do Trabalho de Projecto se conjugam num todo coerente, proponho o seguinte modelo, apelidando-o de “Ponto de Convergência Circular” (Figura 2). O modelo retrata as características da metodologia de projecto, sublinhando que todas elas convergem no fim último que se prende com a consecução de um Projecto. Dito de



Figura 2: Ponto de convergência circular (esquema-síntese das características do Trabalho de Projecto).

outra forma, se uma destas características for reduzida ou suprimida, isso inviabiliza, à partida, a filosofia de todo o Trabalho de Projecto.

Esta metodologia é considerada por muitos como uma proposta de intervenção pedagógica centrada na resolução de situações problemas que potencia a aprendizagem, dando-lhe um novo sentido. Todas as características que lhe possamos atribuir não devem ser entendidas como únicas e inabaláveis e, muito menos, garantias de resultados específicos. Este facto leva a que Paulo Abrantes defenda o Trabalho de Projecto “como uma *filosofia* ou uma *perspectiva pedagógica*, tanto mais que o seu valor educativo reside essencialmente no carácter aberto, flexível e contextualizado das situações de aprendizagem” (Abrantes, 1994, p. 85).

2.2.3 A IMPORTÂNCIA DO TRABALHO DE PROJECTO NA APRENDIZAGEM

Actualmente, deparamo-nos com alunos mais desmotivados e desinteressados, que não vêem qualquer ligação das suas aprendizagens ao mundo real e à sua vida futura. As dúvidas de um futuro que se percebe incerto no que toca à mobilização dos conhecimentos e saberes adquiridos leva-os, constantemente, a confrontarem-se com questões do tipo: para que nos serve isto que aprendemos; como usamos os conhecimentos adquiridos; que importância têm estas aprendizagens no futuro?

O trabalhar com projectos é uma metodologia possível para que aprender deixe de ser um simples acto de memorizar, e ensinar não corresponda ao repassar de conteúdos prontos, possibilitando uma nova visão do processo de ensino-aprendizagem com significado. A base da construção do conhecimento actua em estreita relação com o contexto a explorar, sendo impossível a sua separação, dado o envolvimento dos aspectos cognitivos, emocionais e sociais presente neste processo. A própria formação do indivíduo não deverá ser vista nem pensada como uma actividade intelectual, mas como um processo global e complexo onde não se dissociam o conhecer e o intervir (Giroto, 2003).

À luz das inúmeras opiniões de autores sobre a importância do Trabalho de Projecto na aprendizagem e tendo por base o enquadramento dado a esta metodologia de ensino, no que se refere à sua origem, fases e características pareceu-me adequado apresentar o modelo designado de “Espiral de Etapas do Trabalho de Projecto” (Figura 3). O processo de realização

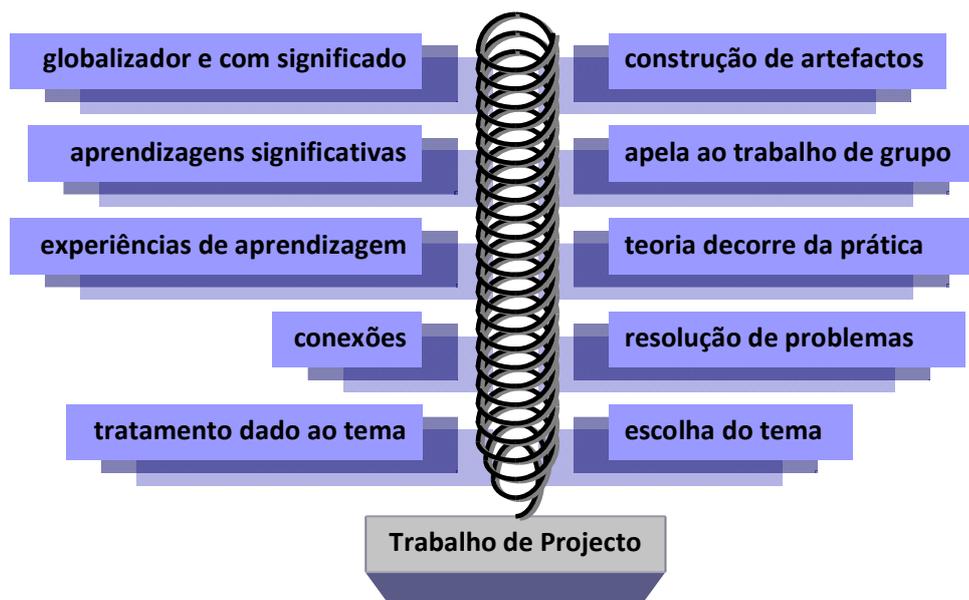


Figura 3: Espiral de etapas do Trabalho de Projecto.

desta metodologia de trabalho envolve a passagem por diversos patamares que contribuem para o desenvolvimento das aprendizagens dos alunos, como passo a explicar.

Sugerido pelo professor ou escolhido pelos alunos, o trabalhar por projectos não assume como ponto essencial a origem do tema, mas sim o *tratamento dado a esse tema*, estando em ligação estreita com uma intenção educativa. O Trabalho de Projecto é uma metodologia de trabalho centrada na *resolução de problemas* que quando aliada às vivências e histórias de vida dos alunos, potencia a aprendizagem, dando-lhe um novo sentido. Deste modo, apresenta-se como uma actividade antagónica às existentes no ensino tradicional, em que se resolvem problemas dissociados do quotidiano (Maltempo, 2004). Realce-se, a propósito, que a resolução de problemas do quotidiano constitui um eixo central do NPMEB. Considerada como uma capacidade matemática fundamental propõe que os alunos sejam capazes de lidar com problemas ligados a contextos do seu dia-a-dia e a outros domínios do saber (ME, 2007). Através da resolução de problemas o aluno investiga relações, estabelece *conexões* entre conceitos matemáticos e aprende a comunicar ideias. As relações matemáticas surgem e ganham significado, favorecendo um conhecimento mais profundo da disciplina.

A abordagem de determinado assunto, em que os alunos fazem a ligação entre as fontes e os procedimentos, possibilita a concretização da aprendizagem, uma vez que “estabelecem conexões a partir dos conhecimentos que já possuem” (Hernández & Ventura, 1998, p. 57). Daí

que as *conexões* sejam consideradas um dos objectivos da aprendizagem, visto permitirem a ligação entre conteúdos e áreas do conhecimento (Hernández & Ventura, 1998).

Numa dinâmica integradora, a metodologia de Trabalho de Projecto proporciona a *fusão entre a teoria e a prática* em que a separação entre o saber e o saber fazer é inexistente. A integração do conhecimento adquirido proporciona a aquisição de novo conhecimento e de novas experiência sobre os temas em estudo (Leite & Santos, 1990). A interligação destes saberes (saber/saber-fazer) é potenciado pela diversidade de *experiências de aprendizagem* que a própria metodologia do projecto proporciona, nomeadamente, as tarefas de modelação matemática, a utilização de tecnologias de informação e comunicação, os problemas de investigação, entre muitas outras.

Porém, o tipo de tarefas que o Trabalho de Projecto envolve, como seja, uma pesquisa no terreno, *apelam ao trabalho em grupo* num processo que permite o confronto de ideias, abre portas à discussão das opiniões e das experiências de cada indivíduo, que quando partilhadas tornam o trabalho mais proficuo. Contudo, é fundamental “garantir que esse problema passe a ser de todos, com um envolvimento efectivo na definição dos objectivos e das etapas, na definição da forma de alcançá-los, na participação nas actividades vivenciadas e no processo de avaliação” (Giroto, 2003, p. 95). Só assim, os alunos sentem os seus conhecimentos valorizados e lhes reconhecem significado, despertando-lhes a vontade da procura, da partilha, da investigação, da descoberta, da discussão dos resultados e respectiva apresentação (Malheiros, 2006).

É todo um processo que culmina com a *construção de artefactos ou objectos* que podem ser concretos ou abstractos (Maltempi, 2004). Os produtos elaborados pelos grupos de trabalho deverão ser valorizados pelo professor e o ambiente de aprendizagem proporcionado deverá motivar os alunos de forma a que sintam relevância e utilidade nos seus projectos e que os mesmos possam ser alvo de apreciação (Carreira, 2005).

Todavia, o trabalhar por projectos encontra-se vinculado à perspectiva de conhecimento globalizado, uma vez que não se centra na acumulação de conhecimento. Deste modo, a aprendizagem só adquire significado, para os alunos, quando estes sentem que o que estudam tem sentido (Hernández & Ventura, 1998). Isto leva a considerar o Trabalho de Projecto como uma metodologia *globalizadora e com significado*, dois aspectos que se conciliam.

Concluirei assim que este é um processo que se desenvolve em espiral. A passagem por todos estes níveis determina a concretização de um projecto com maior ou menor sucesso. O projecto não adquire significado se não se estruturar um plano que envolva o tema e o

respectivo tratamento. O trabalho em grupo envolve diversas formas de pensar, o que apela a uma cooperação mais efectiva na resolução de problemas reais e autênticos. Constroem-se artefactos e promovem-se experiências de aprendizagem com significado.

A metodologia de Trabalho de Projecto assume, ainda, uma importância considerável por desencadear um conjunto de aspectos importantes no processo de ensino e aprendizagem da Matemática: as conexões matemáticas, as tarefas exploratórias, a modelação e as aplicações e as situações realistas.

2.2.4 CONEXÕES MATEMÁTICAS

O conceito de conexões matemáticas remete-nos de imediato para relações e ligações entre tópicos matemáticos. Contudo, na relação da Matemática com a realidade, em particular, nas aplicações, estas encontram-se igualmente presentes. Não menos importantes são as conexões da Matemática com as diferentes áreas de saber e, ainda, as que são inerentes à pedagogia do Trabalho de Projecto, onde se relaciona a Matemática com situações do mundo real (Carreira, 2010).

Neste quadro, os diferentes tipos de conexões podem ser categorizadas, como sugere Ponte (2010, p. 4):

- (i) conexões entre diferentes conceitos e representações matemáticas de um mesmo tema (por exemplo as conexões de áreas e perímetros do tema “Geometria”);
- (ii) existência de diferentes representações para um mesmo conceito (representações decimal e fraccionária do tema “Números”);
- (iii) conceitos e representações de temas distintos (a Geometria e a Álgebra);
- (iv) conceitos e representações matemáticas e situações exteriores à Matemática ou da “realidade”(situações de modelação matemática).

A importância das conexões há muito que é valorizada, embora, com um destaque significativo nos documentos curriculares mais recentes. Digamos que a sua presença faz parte do bom ensino da disciplina de Matemática.

Como objectivo de aprendizagem, as conexões são mencionadas pelo NPMEB como orientação metodológica. Consideram que os alunos devem ser capazes de estabelecer

conexões entre diferentes conceitos e relações matemáticas e também entre estes e situações não matemáticas.

Isto é, devem ser capazes de (ME, 2007, p. 6):

- identificar e usar conexões entre ideias matemáticas;
- compreender como ideias matemáticas se inter-relacionam, constituindo um todo;
- reconhecer e aplicar ideias matemáticas em contextos não matemáticos, construindo modelos matemáticos simples.

Noutros documentos curriculares como NCTM (2000) o papel das conexões é reforçado, na medida em que quando os alunos expõem e interligam as ideias matemáticas a compreensão torna-se mais eficaz e duradoira.

Num artigo sobre as conexões matemáticas, Ponte (2010) apoiado nas ideias de Bishop & Goffree (1986) indica que o sentido dado a determinada ideia matemática só se justifica quando se estabelecem conexões entre essa ideia e outras ideias matemáticas que possuímos, isto é, a aquisição de um novo conceito ganha significado quando se estabelecem conexões com os conhecimentos adquiridos.

O conhecimento individual pode estar não só ligado aos tópicos matemáticos e conceitos matemáticos, mas também em estreita ligação com o conhecimento exterior à Matemática. A utilização das conexões matemáticas na resolução de problemas de diversos domínios assume importância vital no desenvolvimento das capacidades dos alunos. Efectivamente, quando se estabelecem conexões entre a Matemática e a realidade exterior possibilita-se o desenvolvimento de ideias e conceitos matemáticos.

Paralelamente, a compreensão dos conceitos, relações e suas representações só adquirem significado quando se utilizam as conexões internas à Matemática.

Em síntese, e segundo De Lange (1989), é de afirmar que os alunos só reconhecem significado na aprendizagem da Matemática quando esta envolve a resolução de problemas reais, o estudo e a procura de modelos matemáticos, desencadeando a conexão entre várias ferramentas e conteúdos matemáticos.

2.2.5 ENSINO-APRENDIZAGEM EXPLORATÓRIO

A herança cultural e as vivências dos alunos são essenciais no processo de aprendizagem. Porém, este espectro de saberes pouco parece valer para a escola e pouco se considera adequado à exigência das matérias leccionadas. Esquece-se, no entanto, que a promoção de um ensino exploratório, apelando à descoberta e centrando-se no aluno, é motor de motivação, interesse e aprendizagem.

Uma visão menos teórica e mais prática, baseada em projectos, despertaria nos alunos um outro pensar e entusiasmo, contrariando uma postura que se apresenta desligada de tudo o que os rodeia, por não conseguirem encontrarem ligações com a realidade no que aprendem na sala de aula e na escola.

A exploração da Matemática e da realidade é vista como um potenciador de inúmeras vantagens nas aulas de Matemática e apresenta-se como orientação curricular actual e presente nos currículos de inúmeros países.

Apoiando-se nas ideias de Canavarro (2005), Lança (2007) enumera três das principais vantagens:

- (a) proporcionar experiências de aprendizagem que envolvam problemas de contexto real torna-se uma vantagem para os alunos na medida em que a capacidade de utilizar a matemática contribui para interpretar, compreender e lidar da melhor maneira com o mundo que os rodeia;
- (b) existe uma maior ligação entre a escola e a realidade;
- (c) permite uma maior colaboração entre professores e fomenta o trabalho colaborativo.

No entanto, aliar situações da realidade à Matemática, envolve, na maioria das vezes, actividades exigentes e difíceis (Burkhardt, 1989), dada a natureza aberta dos problemas, requerendo maior autonomia do aluno e orientação por parte do professor (Niss, 1992). Contrariamente, as tarefas rotineiras de cálculo despertam uma atitude de maior segurança nos alunos em detrimento de questões imprevisíveis e mais exigentes como as que envolvem as actividades de aplicação. Porém, são as actividades em que se relaciona a Matemática com a realidade que permitem que os alunos aprendam Matemática com mais significado. São essas actividades geralmente prolongadas e o trabalho autónomo que se pede aos alunos que fazem parte integrante do Trabalho de Projecto (Abrantes, 1995).

De uma forma geral as orientações metodológicas do NPMEB (ME, 2007) colocam a ênfase na diversidade de tarefas, resolução de problemas, raciocínio matemático, comunicação

matemática, representações, conexões, diversidade de recursos, cálculo mental, lugar da História da Matemática, atenção ao papel da Matemática no mundo actual e, finalmente, nas diferentes formas de trabalho na sala de aula. São orientações gerais que, do ponto de vista pedagógico, se encontram ligadas ao Trabalho de Projecto.

O NPMEB (ME, 2007) constitui uma oportunidade de mudança curricular e atinge dois níveis fundamentais. A primeira refere-se às práticas de ensino-aprendizagem na sala de aula onde intervêm as tarefas propostas e a comunicação que destas advém, a segunda relaciona-se com as aprendizagens matemáticas dos alunos (Ponte & Sousa, 2010).

Tais mudanças, na opinião destes autores, operam-se pela substituição de um ensino directo pelo ensino de aprendizagem exploratória. O “ensino directo” envolvendo uma e uma só tarefa padrão, designada por exercício, tem como objectivo ilustrar um conceito ou procedimento e, normalmente, os problemas apresentam somente uma estratégia e apenas uma solução. Impera o professor e o manual e o aluno executa as tarefas que lhe são pedidas. Pelo contrário, o “ensino-aprendizagem exploratório” abrange um leque de tarefas diversificadas e os alunos podem trabalhar com explorações, investigações, problemas, exercícios e projectos. As situações envolvem dados e condições realísticas e, desse ponto de vista, para o aluno, apresentam uma ligação à realidade. O aluno torna-se uma autoridade na sala de aula, pois as tarefas exigem que ele descubra as estratégias de resolução, as apresente, discuta e justifique o seu raciocínio.

Face a este contexto é de considerar que a metodologia do Trabalho de Projecto também apela a um “ensino-aprendizagem exploratório” pelo tipo e diversidade de tarefas que proporciona e põe em prática. Por outro lado, a ligação das situações problemáticas reais ao Trabalho de Projecto possibilita um estabelecer de ligações entre o saber e o saber-fazer.

2.3 MATEMÁTICA E REALIDADE: APLICAÇÃO E MODELAÇÃO NO CONTEXTO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

Trazer assuntos que aliam a Matemática à realidade numa perspectiva de Trabalho de Projecto para o centro do ensino e da aprendizagem da Matemática tem sido e continua a ser uma preocupação presente no desenvolvimento e inovação curriculares.

Para a compreensão desta problemática, retomo o projecto Mat₇₈₉ que se propôs concretizar um currículo experimental, baseado num conjunto de ideias sobre o ensino da Matemática emergente nos anos 80. O projecto reúne como referências centrais temas do *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (NCTM, 1989), o trabalho desenvolvido na Holanda e as propostas contidas no Seminário de Milfontes da Associação de Professores de Matemática (APM, 1988).

As relações da Matemática com a realidade foram uma componente curricular fundamental nesta experiência que envolveu vários aspectos centrais, tais como: a natureza problemática das situações de aprendizagem, a importância atribuída às relações entre a Matemática e a realidade e à realização de projectos, a utilização dos computadores e das calculadoras, o trabalho de grupo, e a concepção e prática de um sistema de avaliação inovador. Desenvolveu-se um trabalho considerável com as aplicações, em que as situações problemáticas constituíram um ponto de partida das aprendizagens, numa perspectiva “integrada” (Blum e Niss, 1991). Aliás, um dos principais objectivos deste trabalho consistiu em “desenvolver projectos que implicassem utilizar a Matemática na abordagem de situações da vida real o que poderia não só dar mais sentido à Matemática aos olhos dos alunos como ajudá-los a serem mais capazes de enfrentar problemas autênticos, de uma forma tão autónoma e responsável quanto possível” (Abrantes et al., 1997, p. 67). O propósito não era proporcionar situações da realidade que motivassem os alunos, mas envolvê-los num conjunto de experiências concretas em que se utilizassem os métodos e modelos para a compreensão e intervenção em contextos reais (Lança 2007, p. 22).

Sobre a importância das aplicações e modelação na aprendizagem da Matemática, alguns autores, como Niss (1992), Abrantes (1993), Abrantes et al. (1997, 1999), destacam-nas como processos motivadores que apoiam a aquisição e compreensão de conceitos que envolvem métodos e resultados matemáticos.

2.3.1 APLICAÇÕES E MODELAÇÃO MATEMÁTICA

Os termos modelação e aplicação compreendem quaisquer relações entre a Matemática e o mundo real. Contudo, estes processam-se em dois sentidos distintos: o da realidade para a Matemática e o da Matemática para a realidade. A primeira, considerada como parte mais

importante do processo de relacionar a Matemática com o mundo real, actua no sentido da realidade para a Matemática, isto é, traduz-se no processo de conduzir uma situação problemática real para um modelo. Envolve todo um trabalho matemático em que se interpreta, que não deve ser descurado (Blum, 2002; Blum e Niss, 1991). A segunda desenvolve-se em sentido oposto, da Matemática para a realidade, e enfatiza os objectivos envolvidos e funciona como uma espécie de formatação, ou seja, apoiada nos modelos matemáticos, utiliza secções da realidade que são acessíveis ao tratamento matemático (Blum, 2002).

A forma de perceber e encarar a relação Matemática-Realidade apresenta diferentes visões de autor para autor. Esta diversidade de opiniões leva a que Carreira (1995) seleccione e apresente três modalidades distintas no que se refere à natureza das actividades de matematização e ao seu papel no ensino da Matemática, sendo elas:

- (i) a ênfase no aspecto projectivo dos modelos;
- (ii) a ênfase na utilização da Matemática como forma de intervenção social;
- (iii) a ênfase na pluralidade da relação Matemática-Realidade.

A primeira protagonizada por Ormell (1993) envolve um ensino que se centra em episódios designados por Grandes Problemas. A segunda delineada por Keitel (1993) defende a inclusão de aspectos na educação matemática que promovam a competência e vivência democrática. Por último, a terceira proposta, avançada por Julie (1993), atribui às aplicações a importância de sensibilizar os alunos para a divulgação da Matemática, dado o papel que esta pode representar para a sociedade, na compreensão de situações concretas. Por considerar a última proposta aquela que se aproxima mais deste projecto de investigação, emerge a necessidade de lhe dar uma atenção particular.

De acordo com Carreira (1995), apoiada na perspectiva de Julie (1993), as aplicações integradas no ensino posicionam-se de quatro formas distintas:

1. A Matemática no contexto de situações sociopolíticas

Os conteúdos matemáticos devem ser trabalhados primeiro e reinterpretados a partir de actividades que envolvam situações do quotidiano. Neste caso, os conceitos devem ser trabalhados primeiro, para, posteriormente, serem apresentados como problemas de aplicações. As explorações de problemas devem-se basear em situações com dados reais, levando a questionar, a discutir, a testar e avaliar a situação em si.

2. A matematização de situações concretas

As situações concretas, que se apresentam sob a forma de problemas reais, oferecem a oportunidade de os alunos se envolverem em actividades em que experimentam materiais disponíveis no seu próprio ambiente, recolhem e organizam os dados. O recurso a instrumentos computacionais pode ser um forte apoio para a descoberta de relações. Contudo, a preocupação de uma apresentação prévia do conhecimento matemático, não ocorre, visto as actividades delineadas permitirem a introdução dos conceitos ou tópicos matemáticos. Este tipo de actividades proporciona a aquisição de significados concretos que servem de ponte para as abstrações matemáticas.

3. As aplicações para a revelação da Matemática

As actividades de matematização que se incluem nesta categoria procuram através dos fenómenos culturais desvendar a Matemática existente. Perante tais situações pretende-se que os alunos se consciencializem da presença e influência da Matemática que advém do meio envolvente e, em particular, nas suas vivências. Como exemplo deste tipo de actividades matemáticas, apresenta-se o estudo de padrões geométricos, existentes numa construção arquitectónica de uma determinada região. Possibilita a investigação de questões relacionadas com as transformações geométricas e pavimentações e, paralelamente, a sua ligação à realidade potencia conceitos e ideias matemáticas.

4. As aplicações para a divulgação da Matemática

A produção de textos criativos é uma forma de aplicação da Matemática e ao mesmo tempo de contribuir para a sua divulgação. Neste tipo de actividades os alunos são estimulados a exprimirem as suas ideias matemáticas, revelando-se como bons exemplos destas situações, as crónicas sociais, as bandas desenhadas ou os anúncios publicitários, todos eles, num apelo às noções matemáticas. Os alunos utilizam os elementos matemáticos através de metáforas para comunicarem. Aumentam a sua confiança em relação à disciplina de Matemática e apercebem-se das inúmeras possibilidades de trabalhar com ela.

Proporcionar aos alunos tarefas matemáticas em contextos reais torna-se um estímulo para os alunos. A Matemática Realística coloca ênfase nos problemas de contexto, bem como no desenvolvimento de modelos, esquemas e situações. Na visão da Matemática Realística, as

situações da vida real são consideradas contextos de aprendizagem e não sugestões metodológicas, tal como anteriormente referi (Abrantes, 1995).

As Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar (NCTM, 1991) referem que uma “componente importante do pensamento matemático é o processo de modelação matemática” (p. 164). Abrantes (1993) e Swetz (1992) encaram a modelação como uma forma singular da resolução de problemas do mundo real que acolhe o problema como um todo em vez da procura de uma solução única, colocando em acção uma diversidade de capacidades matemáticas, sobretudo aquelas que não são geralmente desenvolvidas com problemas puramente matemáticos.

A pertinência das actividades de modelação implica um elevado grau de autenticidade nas situações propostas. A abordagem a estas situações permite contemplar três aspectos essenciais (Lança, 2007):

- (i) introdução de novos conceitos e ideias matemáticas – a situação que se apresenta é bem estruturada, promove a motivação e conduz ao desenvolvimento de conceitos e ideias.
- (ii) aplicação de conhecimentos e ideias matemáticas – a tarefa é bem estruturada e utilizam-se os conhecimentos adquiridos, promove a clarificação dos conceitos e desenvolve a sensibilidade nos alunos quanto à utilização de ferramentas matemáticas em inúmeras tarefas.
- (iii) o processo de modelação, considerado uma tarefa/projecto, envolve o estudo global de uma situação que deverá se realizar pelos menos uma vez no ano. Conduz a uma visão holística e integrada dos diversos domínios da Matemática, em que se reconhece o seu poder e seus limites.

A complementaridade entre estas três formas torna-as indissociáveis (Ponte, 1992).

2.3.2 CICLO DE MODELAÇÃO MATEMÁTICA

As actividades de modelação significam um conjunto de tarefas matemáticas que envolvem uma situação ou problema, sendo necessário a intervenção da Matemática para as resolver. Contudo, os problemas de modelação podem-se apresentar de formas bastante diversificadas, pelo que resolver tarefas de modelação não significa resolver os conhecidos problemas de Matemática. As tarefas de modelação matemática são mais exigentes e

envolvem, da parte dos alunos, o percorrer de todo um ciclo de modelação que se apresenta como critério principal e imprescindível, mas não exclusivo da modelação matemática (Ferri, 2010). Daí, que se considere o denominado “Ciclo de Modelação” (Figura 4) que traduz o processo de modelação.

A *situação real* é o ponto de partida deste ciclo de modelação. Inicia-se a partir de uma tarefa de modelação matemática que inclui uma situação da realidade, (texto escrito, problema do quotidiano, entre outros), com uma questão intrínseca, à qual se pretende dar resposta. A escolha desta situação real não é um pretexto para os alunos resolverem problemas, mas sim para estabelecerem conexões com a realidade. Ao conseguirem estabelecer conexões da tarefa com a realidade, os alunos conseguirão construir uma representação mental da situação, facto que os posiciona no segundo nível do ciclo de modelação. Reforce-se, no entanto, que nesta etapa do ciclo e dada a natureza da tarefa, os alunos, por vezes, sentem a necessidade de utilizar conhecimento extra-matemático. A necessidade de compreenderem a tarefa e perceberem o que devem fazer com esta, leva-os a criarem as suas próprias associações no que respeita aos elementos da realidade apresentados. A um nível muito inconsciente, optam por simplificar, estruturar a tarefa, e constroem o designado *modelo real*, isto é, atingem o terceiro nível do ciclo de modelação. A fase subsequente impele que se realizem determinadas acções em que se comparam e relacionam dados que são importantes na transição para a Matemática, o que conduz à construção do *modelo matemático* que se situa no quarto nível deste ciclo. Os alunos trabalham matematicamente e utilizam diferentes competências matemáticas, chegando

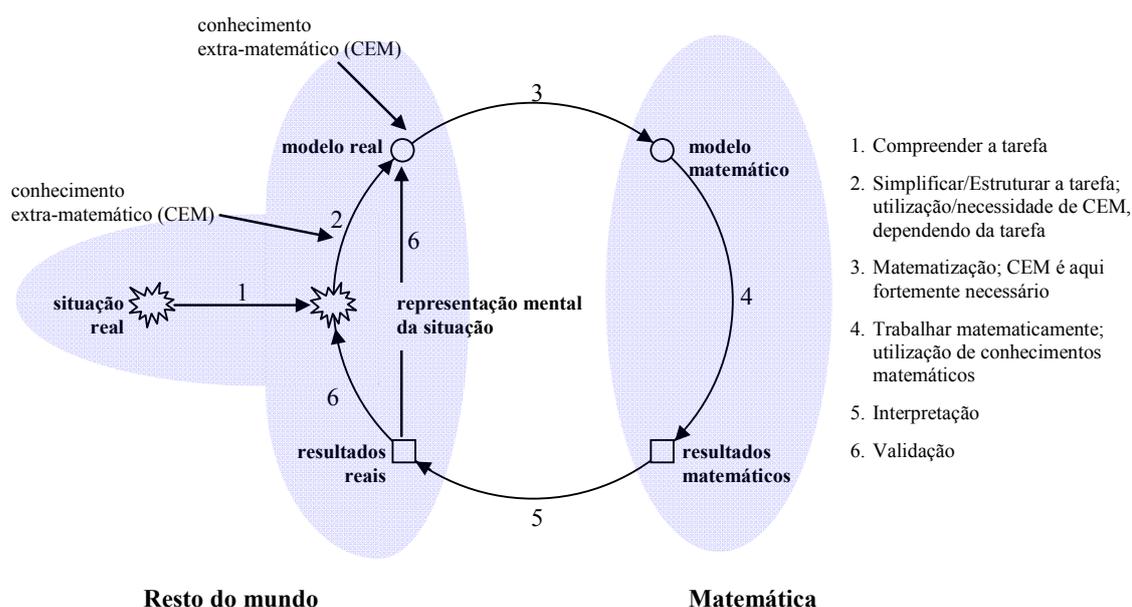


Figura 4: Ciclo de modelação (adaptado de Borromeo Ferri, 2006).

a *resultados matemáticos* que constituem o quinto nível do ciclo de modelação. Perante os resultados obtidos, advém a necessidade de uma interpretação para resultados reais. Contudo, a obtenção dos resultados reais não implica o término do ciclo de modelação, mas leva antes a uma validação. Faz-se a comparação entre a Matemática e a realidade, que é um passo importante e um aspecto central do ciclo da modelação. Oferecer esta possibilidade de confronto entre resultados matemáticos e reais é dar a oportunidade aos alunos de reflectirem e estabelecerem de forma explícita as conexões com o mundo real.

A união do “resto do Mundo” e da Matemática traduz-se assim na modelação matemática. A conjugação destes dois mundos apela a que se seleccionem boas tarefas de modelação onde a intervenção da Matemática possa dar resposta a um problema real. São as várias etapas que corporizam o ciclo de modelação que constituem um dos principais critérios das tarefas de modelação. Outros critérios são igualmente de destacar (Ferri, 2010):

(i) *Significado da tarefa de modelação*

Os alunos, ao lidarem com as tarefas, necessitam de encontrar sentido nas mesmas.

(ii) *Contexto realista adequado à idade*

A realidade e as experiências individuais variam de indivíduo para indivíduo, sendo necessário que a selecção das tarefas de modelação tenha em conta o nível etário dos alunos.

(iii) *Provocação de questões*

A escolha das tarefas deve possibilitar aos alunos a oportunidade de colocarem questões de natureza matemática tal como de natureza extra-matemática.

(iv) *Estimulação de formas holísticas de aprendizagem*

As tarefas de modelação oferecem aos alunos um “aprender com todos os sentidos”.

(v) *Nível de linguagem adequado*

Tendo em conta o nível de ensino, as tarefas de modelação devem ser formuladas de forma que os alunos compreendam a questão e as possam resolver. Para que possam construir representações mentais de determinado contexto, as frases necessitam de ser perceptíveis e claras.

Na verdade, os critérios apresentados por Ferri (2010) tornam-se fundamentais para a realização de tarefas que pressupõem percorrer e completar todo o ciclo de modelação. Carreira (1995), apoiada nas ideias de Mason e Davis (1991), acrescenta que “as oportunidades de

modelação estão à nossa volta, por todo o lado. A questão principal está em reconhecer essas oportunidades e em ajudar os alunos a reconhecê-las por si próprios” (p. 58).

Como intermediário pedagógico, cabe ao professor facultar aos alunos a abertura de caminhos para percorrerem o trajecto Realidade-Matemática-Realidade que os leve à construção de aprendizagens significativas.

2.4 MATEMÁTICA REALÍSTICA

A perspectiva contemporânea da Educação Matemática Realística, designada por *Realistic Mathematics Education*⁹, nasceu na Holanda e é a base e o resultado da pesquisa e desenvolvimento que emergiu em resposta à necessidade de incrementar um novo tipo de educação matemática ancorada nas ideias de Freudenthal (Gravemeijer, 1998). É um processo de longa duração, no qual o desenvolvimento da teoria e a construção de actividades educacionais estão unidos. O aparecimento da *RME* surge como reacção aos movimentos da Educação Matemática Mecanicista e da Matemática Moderna, constituindo o ponto de partida para um processo de inovação do currículo que incorporou o desenvolvimento de novos manuais, repensou a formação de professores e a profissionalização, naquele país. Pretendia-se o afastamento de um ensino centrado na “explicação” e a sua substituição por “construção dos alunos” ou “invenção” (Gravemeijer, 1998). O crescimento do conhecimento dos alunos e o entendimento que estes detêm sobre a Matemática era a principal preocupação da *RME*.

O termo realística, de acordo com Lança (2007), deriva da conexão com o mundo real e, em particular, do papel que esta teoria atribui às situações problemáticas, nomeadamente na forma como os alunos as imaginam e as consideram reais em suas mentes. A relevância dada ao contexto dos problemas apresentados aos alunos torna-se um aspecto significativo, podendo mesmo variar do mundo-real à fantasia ou até mesmo ao mundo formal, desde que nas suas mentes se apresentem como reais.

Segundo Kooij (1992), os objectivos da “Educação da Matemática Realística para a maioria dos alunos são: tornar-se um cidadão esclarecido-alfabetizado em Matemática;

⁹ Adiante designada por RME, referindo-se à Educação Matemática Realística.

preparar-se para o mundo do trabalho e para os estudos posteriores; e compreender a Matemática enquanto ciência” (p. 39).

Os princípios que regem esta abordagem foram fortemente influenciados pelas ideias de Hans Freudenthal que propunha o desenvolvimento da compreensão Matemática gradual a partir da exploração de problemas práticos que envolviam os aspectos do quotidiano. Considerava aquele autor que esta prática de ensino conduziria os alunos a adquirirem a abstracção, numa etapa adequada ao seu desenvolvimento cognitivo, social e cultural, se para tal estes atingissem níveis complexos de pensamento matemático. A Matemática é aqui entendida como uma actividade humana, em que a aprendizagem se faz por (re)invenção se conduzirmos os alunos numa viagem pelo mundo da Matemática, a partir das suas próprias descobertas. A Matemática como uma actividade e não um sistema fechado/acabado constitui um dos aspectos fulcrais desta teoria (Gravemeijer, 1998).

Na opinião de Lança (2007), Doorman (2005), Heuvel-Panhuizen (2000) e Heuvel-Panhuizen e Wijers (2005), a matematização é o foco da actividade Matemática. A utilização de problemas de contexto, de modelos, de produções e construções dos alunos e a ligação às diferentes áreas são as principais características que definem a *RME* (Heuvel-Panhuizen e Wijers, 2005).

Lança (2007), tomando a perspectiva de Nelissen (1999), considera que a apresentação de problemas de contexto, envolvendo situações fictícias ou reais, atrai os alunos e leva-os a utilizarem o seu próprio conhecimento, adquirido com a experiência diária, o que torna a aprendizagem numa actividade significativa aos seus olhos, resultante da utilização dos seus métodos informais. Assim, as componentes essenciais desta teoria são as oportunidades dadas aos alunos que, na diversidade das actividades (problemas e situações reais ou de modelação), (re)inventam ou (re)constróem conceitos matemáticos.

Nesta linha de pensamento, os alunos têm a oportunidade de utilizarem as suas próprias estratégias de resolução e estabelecerem o confronto com resoluções utilizadas pelos colegas da turma perante o mesmo problema estudado (Kooij, 1992). Este processo é, no entender de Freudenthal, uma oportunidade para responsabilizar os alunos pelos conhecimentos adquiridos como sendo seus. Considerada como uma estratégia didáctica, para Doorman (2005) a (re)invenção orientada propõe actividades com contextos do quotidiano, em que os alunos não têm conhecimentos padronizados, motivando-os a construírem os seus próprios processos de resolução. Sob a orientação do professor, esses processos são comparados e discutidos, incitando os alunos à reflexão e a contribuírem com argumentos adequados. Numa trajectória

hipotética, as actividades e a discussão são delineadas antecipadamente, pretendendo-se levar a um processo de aprendizagem pela reinvenção orientada.

Embora as finalidades dos programas e do currículo em Portugal se apresentem em conformidade com o anteriormente exposto, não encaram os problemas reais como contextos de aprendizagem, mas sim como sugestões metodológicas. Contudo, esta visão é contrária às ideias da *RME* visto considerarem as situações problemáticas reais como contextos de aprendizagem (Gravemeijer e Doorman, 1999), em que a matematização assume um papel central, proporcionando experiências reais, reflexão e discussão.

Este processo inclui duas fases distintas designadas por *matematização horizontal* e *matematização vertical*. A primeira cinge-se ao processo de transição do mundo real para o mundo matemático e relaciona-se com a forma como cada aluno usa o seu poder de organização para a descoberta de regularidades, relações e estruturas. Envolve actividades tais como: formular e visualizar o problema; esquematizar; descobrir relações e regularidades (De Lange, 1999; Heuvel-Panhuizen, 2000; Heuvel-Panhuizen e Wijers, 2005). Quanto à matematização vertical, trabalha o problema dentro do mundo matemático, ou seja, movimenta os símbolos matemáticos. A necessidade de resolver o problema leva os alunos a desenvolverem ferramentas matemáticas. Dentro do próprio sistema matemático, reorganizam-se de forma a encontrarem atalhos, descobrirem conexões e estratégias de resolução, o que envolve: provar regularidades; representar uma fórmula; aperfeiçoar e ajustar modelos; combinar e integrar modelos; generalizar.

A escolha de um bom contexto é a base para abstracções subsequentes e para a formalização e generalização, dando a possibilidade de induzir um processo de pensamento activo nos alunos (Kooij, 1992; Nelissen, 1999).

Torna-se claro, que este processo de abstracção, formalização e generalização é acessível a todos os alunos embora não ocorra em todos ao mesmo tempo (Kooij, 1992, p. 39).

2.5 CONCEITO DE COMPETÊNCIA MATEMÁTICA

As linhas estruturantes em que o sistema educativo, em Portugal, foi construído apelavam a uma visão elitista com a preparação de alunos que seguiam o grau de ensino de uma forma sequenciada por acumulação de conhecimentos descontextualizados da vida real.

Privilegiados, seriam aqueles, que numa tentativa de os aprofundar, contextualizar e dar-lhes significado na tomada de decisões e resolução de problemas enveredavam por um percurso académico ou profissional. Uma necessidade que hoje em dia se apresenta mais exigente e que apela ao desenvolvimento das competências dos alunos, enquanto cidadãos preparados para enfrentar um futuro com autonomia, responsabilidade, confiança e visão crítica.

No decorrer dos anos 90, a importância atribuída à ideia de competência, conduziu a alterações de fundo na organização dos currículos em diversos países, inclusive em Portugal.

A Reorganização Curricular do Ensino Básico introduz um conceito renovado de currículo, no ano 2001, traduzido pela publicação do Currículo Nacional do Ensino Básico, como referência nacional para o desenvolvimento do currículo. Neste estão definidos os princípios orientadores do currículo, as competências gerais, específicas e transversais a desenvolver durante o percurso do ensino básico. Não menos importante, surge como proposta um conjunto diversificado de experiências de aprendizagem a proporcionar aos alunos. Para além disto, é dado destaque aos Projectos Curriculares de Escola e de Turma e a introdução das áreas curriculares não disciplinares de Área de Projecto, Estudo Acompanhado e Formação Cívica, as quais assumem um relevo particular.

De acordo com a perspectiva de Perrenoud (1999) competência conduz à aptidão que cada indivíduo necessita para actuar sobre determinada situação em que se socorre dos seus conhecimentos, embora não se limitando ao uso exclusivo destes.

A distinção entre conhecimentos e competências leva a considerar os primeiros como um conjunto de interpretações da realidade que se constroem e armazenam de acordo com as experiências vivenciadas. Os segundos são vistos como o processo em que se utilizam, integram ou mobilizam tais conhecimentos. O desígnio atribuído às competências reside na forma como os saberes são utilizados ou mobilizados, em situações complexas, problemas ou projecto.

A aquisição de competências exige um treino específico e, como tal, não se ensinam, constroem-se. Assim, as competências exigem uma acção desencadeada pela ligação, treino e mobilização dos saberes adequados às situações complexas com que os alunos se deparam.

No entender de Boterf (1994), o termo competência assemelha-se a um “saber-mobilizar”, visto que todo o conhecimento ou capacidade que o indivíduo possui não se reduz a um saber, nem a um saber-fazer. É sua opinião que quando o indivíduo utiliza o conhecimento num contexto particular, a competência se concretiza na acção.

Perrenoud (2001) considera que as situações complexas que envolvem o pensar, analisar, interpretar, antecipar, decidir, regular e negociar exigem a ligação aos saberes, sendo necessário agir. Qualquer situação que se apresente ao indivíduo requer que o mesmo utilize as suas aptidões para se organizar, adequar os seus saberes, predisposições e capacidades que dispõe para a situação específica. Adianta que a competência é um saber “em acção” ou em “uso” que se contrapõe ao “saber inerte” (Perrenoud, 2003).

Tornava-se por isso, urgente, que a escola tivesse presente que a aquisição de conhecimentos adquiriria relevância quando integrados num conjunto de competências que o indivíduo desenvolve ao longo da sua vida e que mobilizados na resolução de situações problemáticas diversas viabilizam a sua operacionalização.

De certa forma os fundamentos declarados no Currículo Nacional do Ensino Básico embebem as ideias de Perrenoud (2003):

Adopta-se aqui uma noção ampla de competência, que integra conhecimentos, capacidades e atitudes e que pode ser entendida, como um saber em acção ou em uso(...) não se trata de adicionar a um conjunto de conhecimentos, um certo número de capacidades e atitudes, mas sim promover o desenvolvimento integrado de capacidades e atitudes que viabilizam a utilização dos conhecimentos em situações diversas(...) (ME-DEB, 2001, p. 9).

Na área específica da Matemática, o conceito de “matematicamente competente” pode-se definir de duas formas diferentes, embora ambas representem ideias concordantes. Por um lado, o “matematicamente competente” envolve o conceito de competência tal como está expresso no Currículo Nacional do Ensino Básico, por outro, remete para a ideia de alguém “matematicamente informado” (Serrazina & Oliveira, 2005).

Considerar somente o conhecimento matemático revela uma concepção empobrecedora deste conceito. O Currículo Nacional do Ensino Básico (ME-DEB, 2001) ao adoptar a noção de competência matemática relaciona as atitudes, as capacidades e os conhecimentos que envolvem a área da Matemática. No entanto, os alunos deverão ser capazes de, num processo integrado, desenvolver e usar os conhecimentos, o que de certa forma, se identifica com a noção de literacia matemática.

Numa perspectiva mais ampla, valorizam-se as experiências de aprendizagem e o empenhamento dos alunos, tendo por base as actividades de investigação, a resolução de problemas, realização de projectos, a utilização das novas tecnologias e o reconhecimento da

história da Matemática. Outros aspectos que se encontram intimamente ligados à aprendizagem desta disciplina são a comunicação matemática, a prática compreensiva de procedimentos e a exploração de conexões, todos eles enquadrados numa vertente transversal (Serrazina & Oliveira, 2005). O ser “matematicamente competente” apela não só ao conhecimento e à compreensão matemática, mas também a mobilização de outros saberes e experiências aplicáveis a inúmeras situações.

A formulação adoptada pela OCDE, em 1999, no *International Programme for Student Assessment* (PISA), define literacia matemática como “a capacidade de identificar, de compreender e se envolver em Matemática e de realizar julgamentos bem fundamentados acerca do papel que a Matemática desempenha na vida privada de cada indivíduo, na sua vida ocupacional e social, com colegas e familiares e na sua vida como cidadão construtivo, preocupado e reflexivo” (GAVE, 2004, p. 7). Outras opiniões podem ser adicionadas, nomeadamente a de Serrazina & Oliveira (2005) para quem a literacia matemática inclui, não só conhecimento matemático, mas também o uso das suas capacidades e respectiva aplicação.

Actualmente a Matemática apela a uma conjugação e inter-relação de inúmeros factores e envolve “um certo número de conhecimentos e a apropriação de um conjunto de processos fundamentais, mas não se identifica com o conhecimento memorizado de termos, factos e procedimentos básicos desprovidos de elementos de compreensão, interpretação e resolução de problemas” (ME-DEB, 2001, p. 9).

A importância da Matemática, na visão de Keitel (2004), encontra-se associada ao carácter utilitário, face às exigências de uma sociedade em expansão, numa era de desenvolvimento das novas tecnologias de informação e comunicação. Isto reflecte-se no mercado de trabalho que requer um novo tipo de competências a desenvolver pela escola e uma redefinição do conhecimento matemático a valorizar (Oliveira, 1998). Aliás, a Matemática escolar deve colocar a ênfase na “educação matemática” dos alunos e não no “ensino da matemática” (Matos, 2003).

Sobre este pano de fundo, entende-se que a metodologia do Trabalho de Projecto, cujos contextos envolvam tarefas de modelação, desperta nos alunos uma maior sensibilidade para problemas abertos e para as conexões da matemática com a realidade e desenvolve e melhora a sua competência matemática. Permitir esta simbiose é um caminho que se abre aos alunos para explorarem e experimentarem, interpretarem e actuarem sobre o mundo que os rodeia. Não basta aos indivíduos serem detentores de conhecimentos se não conseguirem utilizá-los e aplicá-los de forma a explicar e entender os fenómenos reais.

Parte II

MOMENTOS RELEVANTES DO ESTUDO

3. METODOLOGIA

3.1 OPÇÕES METODOLÓGICAS

Neste capítulo, descrevo e justifico a metodologia adoptada, as técnicas utilizadas para a recolha de dados e o processo inerente à sua análise.

Considerando que a escolha da abordagem metodológica depende do tipo dos objectivos de estudo e das questões que se pretendem responder, que actuam em estreita relação, a principal finalidade desta investigação prende-se com a análise da influência e das potencialidades da metodologia de trabalho de projecto, no que concerne: (i) ao interesse e motivação para a aprendizagem da Matemática; (ii) aos processos utilizados pelos alunos em problemas realistas; (iii) ao desenvolvimento das aprendizagens; (iv) a uma nova abordagem ao currículo escolar.

Mediante tais princípios, e atendendo à complexidade da realidade educativa no que toca às variáveis que interferem na vida escolar dos alunos, nomeadamente, a forma como efectuam e mobilizam as aprendizagens, pareceu-me oportuna uma opção metodológica de natureza qualitativa e enquadrada no género a que se poderá dar o nome de “experiência de ensino” (*design experiment*).

Segundo Merriam (1988), uma investigação de natureza qualitativa, atribui um papel considerável aos processos, por comparação com os produtos ou resultados, o que torna peremptório a colocação de questões: “Como é que determinados factos acontecem? Qual é a história ‘natural’ da actividade ou do fenómeno que está a ser estudado? O que acontece à medida que o tempo passa?” (p. 19).

Explorando este conjunto de interrogativas, procurei garantir a captação integral das discussões, das reacções dos alunos e do seu processo de aprendizagem, ao longo das sessões de trabalho, com a recolha de um conjunto de dados suficientes que sustentassem as questões em estudo e as esclarecessem.

3.2 METODOLOGIA QUALITATIVA

3.2.1 ABORDAGEM QUALITATIVA E INTERPRETATIVA

Compreender o processo que envolve o acto de ensinar e os fenómenos que o sustentam, leva a que os investigadores, utilizando um procedimento indutivo de estudo, analisem conjuntos de relações e factos, possíveis de gerar informação, com vista a desenvolver teorias e a gerar conhecimento relevante para a prática educativa. A escolha de múltiplas fontes de informação e o estabelecimento de um contacto profundo com os sujeitos, em contexto natural, direcciona-os para uma perspectiva interpretativa dos acontecimentos.

Os estudiosos da educação estão cientes de que a compreensão das acções implicam uma observação profunda no “ambiente natural de ocorrência”, embora na opinião de Bodgan & Biklen (1994) o investigador não possa descurar do seu papel enquanto professor; há que ter em conta qualquer acto, palavra, gesto num determinado contexto de modo a facilitar um entendimento do que se investiga.

O contributo da investigação-acção leva a que um dos objectivos dos investigadores que intervêm neste campo (muitas vezes enquanto professores) seja a adopção de medidas que permitam a alteração das suas práticas (Elliot, 2001), o que requer um melhor entendimento do contexto de sala de aula e um aprimorar da qualidade de ensino (Hopkins, 1993).

A pesquisa de investigação-acção pode servir de ponte para aprofundar e analisar as mudanças existentes na prática educativa, de tal modo “que caminham juntas a prática investigativa, a prática reflexiva e a prática educativa” (Borba, 2004, p. 69)

Apesar das divergências entre os vários investigadores qualitativos, há uma clara intersecção acerca das características deste tipo de investigação. São prova disso as contribuições de Bodgan & Biklen (1994) e Lessard-Hébert, Goyette & Boutin (1990), que as enquadram em cinco fundamentais:

- Na investigação qualitativa a fonte de dados é o ambiente natural, sendo o investigador o instrumento principal.
- A investigação é descritiva.

- Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos.
- Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva.
- O significado é de importância vital na abordagem qualitativa.

Na opinião de Bodgan e Biklen (1994), os investigadores da área da educação utilizam diversos tipos de recolha de informação, num leque diversificado, que abrangem desde anotações em blocos de notas, equipamento de vídeo na sala de aula ou a elaboração de esquemas e diagramas sobre comunicação verbal entre professores e alunos. Todos têm algo em comum: “o seu trabalho corresponde à nossa definição de investigação qualitativa e incide sobre diversos aspectos da vida educativa” (p. 47).

Seguindo esta orientação, procurei recolher o maior número possível de dados, obtendo informação diversa, proveniente da observação e do contacto directo com os sujeitos da investigação. A recolha dos elementos envolvidos nesta pesquisa privilegiou uma visão global e exhaustiva que se tornou um elemento chave para a construção da dissertação.

3.2.2 EXPERIÊNCIA DE ENSINO / *DESIGN EXPERIMENT*

O professor de Matemática enfrenta uma realidade actual de resultados pouco satisfatórios demonstrados pelos alunos, razão pela qual urge experimentar novas formas de trabalho que mobilizem nos seus alunos a vontade em aprender.

Na verdade, a vontade de colmatar as falhas é uma das condições que impelem o professor a investigar a sua própria prática lectiva.

Num processo de análise e reflexão constantes, a investigação centrada na prática pedagógica direcciona o investigador para uma maior compreensão dos processos de pensamento e dificuldades dos alunos, não esquecendo, como já referi anteriormente, a importância do seu papel no desenvolvimento curricular.

Ponte (2002) apoiado nas ideias de Isabel Alarcão (2001) salienta que todo o bom professor tem de ser também investigador, desenvolvendo uma investigação em íntima relação com a sua função de professor. Justifica esta ideia nos seguintes termos:

Realmente não posso conceber um professor que não se questione sobre as razões subjacentes às suas decisões educativas, que não se questione perante o insucesso de alguns alunos, que não faça dos seus planos de aula meras hipóteses de trabalho a confirmar ou infirmar no laboratório que é a sua sala de aula, que não leia criticamente os manuais ou as propostas didáticas que lhe são feitas, que não se questione sobre as funções da escola e sobre se elas estão a ser realizadas (p. 5).

O mesmo autor esclarece que a “ investigação sobre a prática visa resolver problemas profissionais e aumentar o conhecimento relativo a estes problemas (p. 12) e “pode contribuir fortemente para o desenvolvimento profissional dos professores implicados e o desenvolvimento organizacional das respectivas instituições bem como gerar importante conhecimento sobre os processos educativos, útil para os professores, para os educadores académicos e para a comunidade em geral” (p. 13).

Não sendo um conceito novo, a investigação da própria prática remonta ao ano de 1975, com o contributo do educador Lawrence Stenhouse. Hoje em dia, é um modelo de investigação seguido por alguns estudiosos, embora outros haja que o contestem, quanto aos resultados, métodos, conhecimentos e fins.

A investigação designada por *Designed-Based Research* (DBR) teve a sua origem nos trabalhos desenvolvidos por Ann Brown (1992) e Alan Collins (1992), que utilizaram o termo “*design experiment*”. Para Oliveira et al (2009), esta opção metodológica decorre de se “enfatizar a necessidade de ligar os problemas que os professores enfrentam na prática quando implementam estratégias inovadoras com resultados da investigação educacional de modo a diminuir o hiato entre a teoria e prática” (p. 30).

A expressão *Designed-Based Research* (DBR), por não ter uma tradução específica, conduz a diferentes termos, sendo mais frequentes os de “investigação baseada no planeamento”, (DBR Collective, 2003) “métodos de pesquisa baseados em modelos” (Brown 1992; Collins, 1992) ou “modelo para estudar aprendizagem em contexto”, em que todos eles assumem um design de investigação numa mistura de pesquisa educacional empírica com o modelo guiado pela teoria de ambientes de aprendizagem.

É uma metodologia importante para compreender como, quando e porquê as inovações educacionais funcionam na prática. As inovações dos pesquisadores que seguem este exemplo

ajudam-nos a compreender as relações entre teoria educacional, artefactos desenhados e a prática.

A pesquisa em educação afasta-se muitas vezes dos problemas e da prática do quotidiano, o que obriga à necessidade de novas perspectivas de pesquisa que tratem directamente as questões práticas (National Research Council [NRC] 2002). A pesquisa baseada em modelos (Brown, 1992; Collins, 1992) é um paradigma emergente do estudo da aprendizagem, em contexto, que requer estratégias e ferramentas educativas. Acreditam que este tipo de pesquisa pode ajudar a criar e a entender o conhecimento, representar e sustentar ambientes inovadores na aprendizagem.

Os métodos de pesquisa baseados em modelos põem enfoque na actividade de projectar e explorar uma ampla variedade de inovações: artefactos, instituições, planeamento e currículos. A pesquisa vai para além de projectar e testar intervenções simplesmente particulares. Incorporam pretensões teóricas sobre ensino e aprendizagem e reflectem um compromisso de compreensão de relações entre a teoria, artefactos e prática (Sandoval e Bell, 2007).

Nesta investigação considero que o tipo de metodologia abordada assentou em muitos dos pressupostos aqui evidenciados, já que se estabeleceu um compromisso entre os vários intervenientes, houve uma interacção entre a teoria e a prática e ainda, todo o trabalho foi desenvolvido partir do interesse dos alunos. Por outro lado, este tipo de estudo pode-se considerar uma investigação baseada num modelo, uma vez que pressupõe uma inovação das práticas e ambientes de aprendizagem com carácter dinâmico, exploratório e investigativo.

Nesta linha, pretendo dar um contributo para o refinamento da teoria existente relativa ao processo de ensino-aprendizagem, quer no que diz respeito ao envolvimento dos alunos quer à própria prática do professor, no respeitante ao planeamento e ao desenrolar das actividades, ainda que os alunos, de certa forma, ditem o fio condutor.

A pesquisa baseada em modelos baseia-se em técnicas também usadas noutros paradigmas de pesquisa, tais como as grandes bases descritivas de dados, a análise sistemática da informação, com medidas cuidadosamente definidas e consensuais no campo da interpretação da informação. Triangula tipicamente múltiplas fontes e tipos de informação para ligar os resultados esperados, ou não, aos processos de representação.

A finalizar, posso acrescentar que o presente estudo segue uma abordagem qualitativa inserida num modelo de ensino – *design experiment*, com vista a um reforço sobre a teoria e a prática do processo de ensino-aprendizagem.

Desta forma, não pretendo desvendar uma nova teoria, mas contribuir para uma compreensão mais aprofundada acerca deste tipo de trabalho, possibilitando práticas futuras com carácter inovador.

3.2.3 DESCRIÇÃO DA EXPERIÊNCIA PEDAGÓGICA

Esta investigação decorreu numa turma do 6.º ano de escolaridade, de uma escola básica de 2.º e 3.º ciclos do Algarve, inserida no meio rural, cuja população escolar se complementa com a proveniência de alunos das zonas urbanizadas de um nível socioeconómico elevado.

Como prática instituída na escola, a continuidade pedagógica constitui um critério na constituição das turmas o que, de certa forma, permitiu um conhecimento mais profundo das dificuldades destes alunos e dos seus ritmos de aprendizagem. Esta é, na globalidade, uma turma equilibrada em termos de aproveitamento, embora existam dificuldades gerais e pontuais de alguns alunos.

Diga-se, contudo, que a escolha desta turma se relaciona com facto de estar a leccionar apenas uma turma do 6.º ano, em que tinha a cargo a área curricular de Matemática e as áreas curriculares não disciplinares de Área de Projecto e Estudo Acompanhado. Optar por realizar esta experiência pedagógica em Área de Projecto e não na disciplina de Matemática, teve como razão a ligação estreita da experiência com o Trabalho de Projecto.

Embora o carácter da disciplina de Matemática esteja rodeado por muitas condicionantes em que intervêm tempo, matérias, avaliações internas e externas, isso não invalida que este tipo de projectos sejam implementados nesta área curricular, podendo ser até uma ponte para o sucesso do processo de ensino-aprendizagem. A estruturação do desenho curricular de Área de Projecto apela à parceria e, ao longo do ano, beneficiei da colaboração de uma colega, em par pedagógico.

A turma era composta por 23 alunos (10 rapazes e 13 raparigas) com idades que variavam entre os 11 e os 12. O seu nível socioeconómico era heterogéneo, dado o leque diversificado de profissões dos seus Encarregados de Educação. Apenas dois alunos eram de nacionalidade inglesa e os restantes elementos da turma eram de nacionalidade portuguesa. A turma era boa ao nível de comportamento, à excepção de dois alunos que, dado o seu carácter temperamental, facilmente entravam em conflito com os restantes colegas. Na globalidade,

eram empenhados, interessados e bastante participativos na realização das tarefas. Notava-se em dois alunos uma certa apatia na realização das tarefas embora esta postura também se manifestasse em todas as disciplinas.

Ao longo do ano lectivo, em que decorreu esta investigação, os alunos realizaram 4 tarefas enquadradas nos tópicos matemáticos de “Geometria” e “Números e Cálculos”, de acordo com a calendarização expressa na Quadro 4.

Garantir uma boa selecção de tarefas e motivar os alunos para um maior envolvimento na sua realização, era uma questão fulcral. A selecção das tarefas envolveu uma escolha pormenorizada, onde se aliaram os conteúdos aos interesses e vivências dos alunos. A pesquisa de livros e sites na Internet permitiu reunir as tarefas iniciais, dando posteriormente a liberdade necessária para que estes seleccionassem e desenvolvessem as suas próprias tarefas e respectivos projectos. Eram tarefas de investigação, ligadas ao quotidiano e de natureza experimental, que envolviam ensaios com materiais manipuláveis. A fase subsequente aos ensaios dava lugar a uma extensão da tarefa em que intervinham dados reais e cálculos matemáticos.

Constituíram-se 4 grupos heterogéneos de 5 a 6 elementos, verificando-se alterações, em alguns destes, por dificuldades de integração de alguns dos membros. No final das tarefas, solicitava-se aos grupos a apresentação dos trabalhos e das descobertas à turma, passando a uma discussão alargada ao grupo-turma. As tarefas iniciais davam lugar à implementação de um conjunto de novas tarefas em que o trabalho de grupo era a norma.

A elaboração de diversos projectos incluiu quatro fases de execução: (a) introdução da tarefa, (b) ensaio/experimentação/exploração, (c) apresentação/discussão e (d) conclusões do grupo de trabalho.

3.2.4 O PAPEL DA INVESTIGADORA

Desenvolver investigação-acção, assumindo o duplo papel de professor-investigador, implica que o investigador tenha uma atitude reflexiva e questionadora, quer sobre a sua prática profissional, quer na procura de caminhos que promovam as aprendizagens dos seus alunos.

Tendo em conta orientações sublinhadas por Ponte (2002) em que a “investigação sobre a prática deve emergir como um processo genuíno dos actores envolvidos, em busca do desenvolvimento do seu conhecimento, procurando solução para os problemas com que se defrontam e afirmando assim a sua identidade profissional” (p.14), também procurei seguir um processo claro de acordo com os objectivos previamente estabelecidos num questionar de forma crítica e sistemática, tentando, igualmente o desenvolvimento da minha prática educativa.

Por conhecer a turma, e dado que a relação com os sujeitos em estudo apresentava indícios de alguma proximidade, procurei que tal sentimento não compromettesse a clareza e o rigor metodológico desta investigação. Assim, parti dos problemas relacionados com as suas aprendizagens e do currículo, na tentativa de melhorar a minha prática e proporcionar aos meus alunos uma melhor qualidade de ensino.

Inúmeras críticas surgem quando uma investigação-acção recai sobre a própria prática, sendo por vezes conotada com um processo pouco fiável.

Ponte (2002), numa das suas análises sobre “críticas à investigação sobre a prática”, salienta que “a crítica relativa aos métodos questiona, para além da falta de clareza e rigor metodológico de muita investigação sobre a prática, a proximidade entre o investigador e o objecto da investigação, perguntando como pode ser minimamente fiável e isenta de preconceitos uma investigação produzida por aqueles por que estão directamente implicados em conhecimentos” (p.14).

Clarifique-se, no entanto, que a interacção estabelecida com os intervenientes no meu estudo decorreu com duplo papel, não só como professora daqueles alunos, com o apoio e a orientação nos momentos necessários e, ao mesmo tempo, no papel de investigadora, possibilitando uma análise racional dos dados recolhidos. No papel de professora-investigadora, tentei promover um ambiente aberto, propício à discussão e ao debate de ideias. Como orientadora e moderadora, encorajei os alunos ao diálogo e deixei fluir as suas opiniões, fomentado a formulação de questões e conjecturas, a tomada de decisões e a justificação dos seus raciocínios.

Respeitando princípios éticos, bem como o consentimento dos intervenientes neste estudo, formalizei o pedido, por escrito, aos Encarregados de Educação e ao Órgão de Gestão e efectuei, verbalmente, um compromisso com os alunos. Através de documentos específicos (Anexos 1 e 2) informei sobre o propósito e os procedimentos do presente estudo, solicitando,

posteriormente, a autorização para a sua implementação. De igual modo, garanti o anonimato dos alunos intervenientes neste estudo.

3.3 PROCEDIMENTOS

3.3.1 INSTRUMENTOS DE RECOLHA DE DADOS

O método de investigação elegido, de natureza qualitativa, induz a uma recolha de dados exaustiva. Tendo por base a sua essência interpretativa, pretendia compreender, interpretar e estabelecer relações, resultantes da implementação de uma experiência curricular inovadora.

O presente estudo envolveu diferentes métodos de recolhas de dados, sendo possível agrupá-los em cinco categorias diferentes: questionários, observações, entrevistas espontâneas, gravações em vídeo das tarefas realizadas na sala de aula e, ainda, análise de documentos, todos descritos de uma forma sucinta no Quadro 1.

Pretendi que os diferentes instrumentos utilizados na recolha de dados permitissem a sua integração. Por serem elementos que sustentam a análise e interpretação das questões em estudo e atingem para o investigador uma dimensão relevante, desempenham um papel preponderante na investigação qualitativa. Esta recolha, pauta-se por um conjunto consistente de provas que visa a realização do trabalho efectuado e possibilita a abertura de caminhos a posteriores investigações.

3.3.2 OBSERVAÇÃO PARTICIPANTE DAS AULAS

Para quem pretende interpretar a realidade que se propõe investigar, a observação participante é uma das técnicas da investigação qualitativa (Bogdan e Biklen, 1994). Esta técnica permite compreender os fenómenos e a realidade em que os sujeitos actuam, mediante a recolha directa de um conjunto de dados sobre o ambiente e os sujeitos. É uma técnica essencial na compreensão e justificação da realidade observada.

Instrumentos de Recolha de Dados	Descrição
Observação Participante	* Notas de campo sobre a observação das aulas no que concerne aos desempenhos e apresentações de trabalhos.
Questionários	* Individuais e aplicados a todos os alunos que compõem a turma sobre a sua visão da Matemática: dificuldades e aprendizagem; * Análise de aspectos relevantes e registados num quadro.
Entrevistas	* Espontâneas: - durante a realização dos trabalhos; - a cada grupo de trabalho; - registadas em vídeo; - transcritas integralmente;
Gravações em vídeo (uma câmara de vídeo)	* Aulas de apresentação dos trabalhos. * Momentos de introdução, discussão das tarefas e desempenhos dos grupos de trabalho e do grupo turma.
Análise Documental	* Documentos produzidos pelos alunos: relatórios, portefólios, comentários de avaliação das aulas de Área de Projecto; * Documentos escritos por pessoas exteriores;

Quadro 1: Instrumentos de recolha de dados e sua descrição.

Foram criadas condições para que o acompanhamento e observação continuados dos grupos de trabalho permitissem uma descrição pormenorizada dos seus desempenhos e das aprendizagens desenvolvidas. Como participante activa, observei aulas, quer de apresentações dos trabalhos, quer da realização das tarefas propostas e fiz registos num diário de bordo. Estabeleceram-se permanentemente momentos de interacção entre a investigadora e os alunos intervenientes, através do questionamento e do apelo à justificação e explicitação das suas ideias e actuações.

Os diálogos estabelecidos durante o desenvolvimento das actividades, as conversas informais e o questionamento acerca das situações tratadas pretenderam dar aos alunos autonomia para desenvolverem os seus projectos. Embora, por vezes, tenham necessitado de alguma orientação, procurei nunca exercer influência nas suas ideias ou discussões.

Por assumir uma observação participante, num contacto directo com os alunos e em ambiente real de sala de aula, esta investigação permitiu uma recolha bastante pormenorizada dos factos ocorridos.

Os momentos de observação decorreram ao longo do ano lectivo, de Setembro de 2009 até Junho 2010. As observações efectuaram-se nas aulas de Área de Projecto, uma vez por semana e normalmente à sexta-feira. Como complemento às observações, utilizou-se a gravação em vídeo.

3.3.3 QUESTIONÁRIOS

No intuito de auscultar as opiniões dos alunos sobre as dificuldades de aprendizagem na disciplina de Matemática e a forma como percebem esta área do saber, aplicaram-se questionários (Anexos 3 e 4).

Em regime de anonimato e envolvendo questões de natureza aberta, foi aplicado este instrumento a todos os elementos da turma.

3.3.4 ENTREVISTAS

A entrevista, segundo Merriam (1988), permite captar a perspectiva do entrevistado sobre um assunto pertinente em que, por vezes, ocorre a impossibilidade de obter informações através de uma simples observação directa. Como referem Bodgan e Biklen (1994), as entrevistas apresentam graus de estruturação diferenciados, classificando-se em: entrevistas estruturadas, semi-estruturadas ou completamente abertas.

Nas entrevistas estruturadas ou semi-estruturadas existe a presença de um guião ou um conjunto de questões gerais que orientam o investigador na condução da entrevista. Quanto à entrevista aberta, o entrevistado discursa livremente sobre um determinado assunto e, de acordo com o discurso do entrevistado, esta é conduzida pelo investigador, tendo em vista a pertinência do assunto abordado. Esta situação de entrevista conduz a que De Ketele e Roegiers (1999) a denominem de “entrevista natural” por se desenrolar num “contexto que liberta a palavra, isto é, num contexto em que aquilo que é dito reflecte o que é pensado e

vivido” (p.175). Albarello et al (1997) apelidam este tipo de entrevista de não directiva, em virtude do grau de liberdade revelado quer pelo entrevistado quer pelo entrevistador no que toca à exploração de um determinado assunto que se pretende que o entrevistado especule.

Foi neste contexto, que se realizaram entrevistas espontâneas de natureza aberta, aos diferentes grupos de trabalho, propondo-lhes a divulgação dos seus projectos e contributos destes para as suas aprendizagens (Anexo 5). Com este suporte de recolha de dados, foi possível retirar excertos exemplificativos que evidenciam e clarificam as ideias expressas por cada grupo de trabalho.

O período de aplicação das entrevistas situou-se numa fase intermédia da investigação, mais precisamente, no decorrer do 2.º período. A intencionalidade desta recolha, durante a fase intermédia da investigação, está relacionada com a análise do desempenho dos alunos e suas implicações na aprendizagem, bem como com a sua capacidade de trabalhar em projectos.

Estas entrevistas foram gravadas em vídeo e integralmente transcritas. O Quadro 2 que se segue apresenta o tipo de entrevista e respectivo resumo.

Entrevista - Data	Tipo de entrevista	Observações
23 Abril 2010	Entrevista natural	Durante a execução dos projectos todos os grupos de trabalho foram entrevistados. Não foi seguido um guião estruturado; os entrevistados falam sobre os temas em desenvolvimento, as dificuldades sentidas, a comparação deste tipo de projectos com as matérias abordadas nas aulas de Matemática e a forma como pretendem apresentar o projecto.

Quadro 2: Tipo de entrevista e respectiva observação.

3.3.5 ANÁLISE DOCUMENTAL

A importância de uma diversidade de fontes de evidência torna-se fundamental para um estudo interpretativo.

Valorizando a pesquisa documental, Gil (1996) considera que “os documentos constituem uma fonte rica e estável dos dados” (p. 52).

Paralelamente, Yin (1989) enfatiza a importância do uso deste recurso, visto permitir e comprovar evidências apontadas por outro tipo de fontes de dados.

A pluralidade do uso de diversos documentos traduz-se por um conjunto de informações que permite a intersecção com outros dados, revelando-se informes indispensáveis que ajudam a compreender algumas questões do estudo.

Nesta investigação consultaram-se vários documentos: os projectos realizados pelos alunos, os portefólios, os registos individuais da turma, pautas com avaliações internas, grelha de caracterização da turma, o diário de bordo, reflexões escritas após a conclusão dos projectos, grelhas de avaliação dos trabalhos desenvolvidos, documentos escritos por pessoas exteriores.

3.3.6 GRAVAÇÕES EM VÍDEO

O método de recolha de dados que se prende com as gravações em vídeo cria no entrevistado uma presença intimidante, pelo que à partida estava ciente do seu carácter obstrutivo. É uma situação que, na maioria das vezes, inviabiliza a fluidez do diálogo, o que não ocorre em outros momentos de conversas descontraídas e informais.

Merriam (1988), a este propósito, menciona que o carácter inibidor da entrevista leva a que o seu uso seja de evitar. Inverter tal conjuntura, conduz a que se desenvolva uma relação de mútua confiança e aceitação entre entrevistado/entrevistador. Com o decorrer da investigação e o uso habitual das filmagens, os alunos passaram a ignorar este utensílio e adoptaram uma postura natural, ao realizarem os seus trabalhos e discutindo-os em grupo, ou até mesmo na discussão alargada ao grupo-turma.

Privilegiou-se a recolha das situações que envolveram a introdução, apresentação e discussão dos trabalhos, bem como a fase de realização dos mesmos. Os vídeos foram todos visionados, optando-se por transcrever três deles, facto que se prende, com o pormenor e detalhe da informação pretendida. Os vídeos escolhidos para análise envolveram três fases: uma fase inicial, intermédia e final, com o intuito de verificar o progresso no desempenho dos alunos neste tipo de actividade matemática.

Os relatórios das observações das aulas gravadas eram feitos a posteriori após o visionamento dos vídeos e complementados com algumas das notas retiradas no decurso das aulas, dada a impossibilidade de o fazer no decorrer das próprias aulas, já que tinha de acompanhar todo o trabalho dos alunos e limitação do tempo. Em seguida, apresenta-se o Quadro 3 que se refere aos instrumentos de recolha de dados e sua descrição.

Gravações em Vídeo	Características	Datas
1 ^a	Introdução e discussão das actividades	Setembro de 2009
2 ^a	Tarefas desenvolvidas na sala de aula	Março de 2010
3 ^a	Apresentação e discussão dos Projectos dos alunos	Junho de 2010

Quadro 3: Instrumentos de recolha de dados e sua descrição.

3.3.7 NOTAS DE CAMPO

A consciência de que um dos aspectos significativos e importantes, do ponto de vista desta investigação, seria a possibilidade de um maior número de registos dos momentos de desempenho, interacção e confronto de ideias dos alunos, conduziu a esta opção de recolha de dados.

3.3.8 ANÁLISE DE DADOS

A recolha e a análise não deverão actuar em fases distintas, mas sim, ocorrerem como processos paralelos de modo a permitirem a reformulação necessária em todos os aspectos, quer os pedagógicos, quer os da própria investigação, suscitando, assim, uma investigação activa, na medida em que esta possa estar sujeita a algumas “nuances”, tendo em conta as informações obtidas no decorrer da mesma.

O referencial teórico desempenhou um papel fundamental na análise e recolha de dados, uma vez que me proporcionou hipóteses de trabalho iniciais, mesmo sabendo que ocorreria a possibilidade de estas serem alvo de possíveis reformulações a posteriori.

Os questionários, a observação de aulas, as transcrições das entrevistas registadas em vídeo, o visionamento dos vídeos das aulas, os materiais produzidos pelos alunos, nomeadamente, os trabalhos de grupo, os portefólios, os relatórios, os momentos de avaliação das actividades fizeram parte do leque desta recolha de informação.

Outra fonte de dados não menos importante relaciona-se com documentos redigidos por pessoas exteriores à investigação e serviram para a tomada de decisões no desenrolar deste projecto.

Numa primeira etapa, aplicaram-se os questionários e procedeu-se à categorização das respostas, ajudando a estruturar um conjunto de questões que serviram de eixo norteador para a fase subsequente.

A selecção e introdução das tarefas iniciais pretendia avaliar a forma como os alunos reagem perante situações problemáticas da vida quotidiana e como se servem das suas vivências e dos conceitos matemáticos para os resolver.

A gravação em vídeo e respectiva transcrição possibilitou uma substancial fonte de dados disponíveis, consubstanciados no relatório da observação dessas tarefas.

As actividades seguintes realizadas pelos alunos, ao longo das aulas, também foram gravadas, visionadas e transcritas, seleccionando-se as que suscitavam maior relevância em termos de dados.

Integraram-se nesta recolha, os relatórios da observação de aulas que eram elaborados no fim de cada aula, servindo-me da memória e complementando com notas pontuais retiradas no momento.

Outro nível de análise de dados prende-se com os relatórios elaborados pelos alunos sobre a realização das experiências e envolvimento neste projecto, o que permitiu analisar um conjunto de factores que orientavam caminhos e propostas de trabalho a seguir.

Para além disto, outros documentos por eles produzidos (portefólios, os projectos de trabalho, os registos da avaliação das tarefas) constituíram, ainda, uma fonte considerável de dados.

Compreender o processo como os alunos utilizam os conhecimentos matemáticos em situações do quotidiano em que o currículo permite conexões e uma abordagem em espiral, foi o contexto das questões de investigação.

Tendo por base a recolha pormenorizada de evidências, pretendia-se encetar uma discussão assente nas dificuldades, potencialidades e recomendações que advêm desta experiência pedagógica.

A visão da Matemática e a importância que esta tinha para os alunos na aprendizagem levou a que a primeira análise de dados incidisse nas referências expressas nos questionários. As respostas aos questionários foram analisadas, questão a questão, seleccionadas as preferências e resumidas numa tabela.

Posteriormente, procedeu-se à análise das aulas gravadas em vídeo relativas ao desenrolar das tarefas. Do visionamento e relato destes momentos surgiu o relatório que teve como objectivo contar a história da sessão visionada, destacando-se aspectos pertinentes e de maior detalhe que foram alvo de posterior análise.

As aulas e as apresentações orais das tarefas, a exploração das actividades de investigação, o ensaio e a experimentação, a apresentação dos trabalhos, os relatórios realizados pelos diversos grupos, constituíram todos os objectos de análise das aulas, em que o desempenho dos alunos assume toda a centralidade.

Pretendeu-se compreender a envolvimento dos alunos nas tarefas propostas, a aptidão para resolverem problemas do quotidiano, recorrendo às suas aprendizagens e conhecimentos matemáticos, como analisam, traçam e discutem os caminhos a seguir, no seio do grupo, e apresentam as suas conclusões finais ao grupo-turma.

Esta primeira revisão evidenciou a necessidade de agrupar as tarefas numa sequência cronológica, por duas razões. Os temas abordados inicialmente eram iguais para todos os grupos (nas 1ª e 2ª tarefas) envolvendo apresentações similares. A terceira tarefa, embora com tema igual, suscitou estratégias de resolução diferentes. A quarta e última tarefa envolveu um tema à escolha dos próprios alunos, com diversas resoluções e projectos.

Como meio facilitador da descrição de dados, decidiu-se categorizar as tarefas nos tópicos matemáticos tratados, destacando-se a “Geometria” e os “Números e Cálculos”. O Quadro 4 apresenta de uma forma sequencial as diferentes propostas de trabalho abordadas e os aspectos relevantes tidos em conta.

A exploração das tarefas envolveu quatro fases distintas: (a) introdução da tarefa, (b) ensaio/experimentação/exploração, (c) apresentação/discussão e (d) conclusões do grupo de trabalho.

Para melhor entender e recolher dados relevantes da exploração das tarefas elaborou-se o Quadro 5, a qual apresenta um resumo das fases/análise/procedimentos.

Grupos	Tarefas	Tópicos Matemáticos	Aspectos Relevantes
Todos os grupos	Tarefa 1 As canas	Geometria + Regularidades + Números e Cálculo	Actividade inicial e elaborada por todos os grupos de trabalho
Todos os grupos	Tarefa 2 As Latas	Geometria + Números e Cálculos	Actividade elaborada por todos os grupos de trabalho
Todos os grupos (com percursos diferentes da história de grupo para grupo)	Tarefa 3 Os rolos de papel higiénico	Geometria + Números e Cálculos	Actividade elaborada por todos os grupos de trabalho, embora com rumos de histórias diferentes, obedecia à variável “Os rolos de papel higiénico”
Todos os grupos (com percursos diferentes da história, de grupo para grupo)	Tarefa 4 Descarga de água do autoclismo Energia eólica Espargos Combustível do carro	Geometria + Regularidades + Números e Cálculo	A história tomava rumos diferentes de grupo para grupo. Nesta situação eram livre de elaborar a sua história. Os projectos deram origem aos expressos na coluna relativa à tarefa 4.

Quadro 4: Propostas de trabalho.

Fases do Projecto	Análise	Procedimentos
Introdução	Leitura e análise da tarefa. Explicação do Plano de Investigação a seguir.	Com a tarefa (1 e 2) procurou-se analisar as reacções dos alunos face aos dados e a forma como estes os utilizavam na resolução das tarefas. Comparou-se a evolução dos alunos na realização das tarefas posteriores (2 e 3).
Exploração	Actividade experimental: exploração da tarefa com base em material didáctico através de ensaio/experimentação.	Com a tarefa (1 e 2) analisou-se as suas capacidades de raciocínio, dificuldades e autonomia na realização das tarefas. Comparou-se a evolução dos alunos na realização das tarefas posteriores (2 e 3).
Apresentação/Discussão	1) Apresentação dos resultados obtidos à turma. (relativo às tarefas iniciais a 1 e 2) 2) Apresentação dos projectos à turma e respectivos resultados obtidos. (relativo às tarefas 3 e 4)	Analisou-se os tipos de resolução dos alunos nas tarefas (1 e 2). Comparou-se a evolução dos alunos nas tarefas subsequentes (3 e 4) quanto à capacidade de resolverem os problemas e ao tipo de estratégias utilizadas.
Conclusões	Discussão alargada ao grupo-turma. Conclusões gerais	Com a tarefa (1 e 2) procurou-se analisar o poder de argumentação, conjecturação e discussão dos dados obtidos na realização das tarefas. Comparou-se a evolução dos alunos na realização das tarefas posteriores (2 e 3), quanto ao seu poder de argumentar, conjecturar e discutir os resultados.

Quadro 5: Recolha de dados relevantes relativa à exploração de tarefas.

4. ANÁLISE DE DADOS

4.1. HISTÓRIAS COM A MATEMÁTICA: UMA FORMA DE TRABALHAR COM SITUAÇÕES DA REALIDADE

Desde há muito que se reconhece a importância de práticas de ensino que tornem os nossos alunos matematicamente competentes e que lhes permitam a mobilização de saberes na sua vida futura. Apesar desta intenção, não tem sido unânime o sentido que se deve atribuir à noção de matematicamente competente. “Ser matematicamente competente na sociedade actual é algo de caracterização complexa mas implica de certeza capacidades e modos de usar pontos de vista matemáticos sobre as situações que não é possível aprender à priori” (Matos, 2005, p. 78).

Aliar o trabalho de projecto a uma prática de sala de aula, em que os problemas emergem e são contextualizados, é uma forma de proporcionar aos alunos uma matemática mais realista e experimental. Permitir que os alunos desenvolvam competências matemáticas, integrando atitudes, capacidades e conhecimentos, que se sintam capazes de mobilizar saberes matemáticos, recorrendo a conexões entre diferentes tópicos na resolução de problemas do dia-a-dia são objectivos desejáveis. Deste modo, a perspectiva subjacente não é a de que a escola prepare os alunos para um futuro indefinido, mas sim, que estes se tornem capazes de activar conhecimentos e capacidades em qualquer momento.

A ligação da matemática ao real apresenta-se, aos nossos alunos, como algo de pouco palpável. Um olhar mais amplo sobre a realidade, contemplando a inclusão de problemas e “histórias” concretas como base para a aprendizagem da matemática permite uma maior identificação dos jovens com a matemática, coloca uma tónica mais apelativa sobre o saber matemático e ajuda à estruturação daquilo a que chamamos de pensamento matemático.

Tendo por base aspectos das vivências dos alunos e apostando na metodologia de trabalho de projecto, desenvolveu-se no 6.º ano do ensino básico uma experiência de desenvolvimento curricular denominada “Histórias com a Matemática”. O propósito deste

trabalho consistiu na concepção de histórias com ideias matemáticas, a partir da contribuição dos alunos e com base nas suas experiências, descobertas, conhecimentos e imaginação. Estas histórias foram sustentando e originando a exploração dos conteúdos matemáticos, de uma forma bastante flexível e inter-relacionada, uma vez que os conceitos e métodos surgiram ao longo do desenrolar da história, numa perspectiva em que as conexões matemáticas predominaram.

4.1.1 O CONTEXTO DE UMA EXPERIÊNCIA DE TRABALHO DE PROJECTO

Proporcionar experiências de aprendizagem ricas e diversificadas, dotadas de cariz prático e centradas em contextos reais, permite levar os alunos ao encontro de uma visão mais ampla da matemática. Quando esta matemática aparece associada a histórias, a bandas desenhadas, ou a outro tipo de suportes didácticos, o interesse dos alunos aumenta vivamente.

A construção de histórias nas aulas teve como propósito levar os alunos a trabalharem e explorarem um texto longo que assume o formato de uma narração. A partir de “pontos de entrada” para vários episódios (Anexo 6), os alunos tiveram de interpretar, seleccionar a informação mais relevante, traçar um plano de investigação (ver anexo 7), explorar e apresentar resultados do seu trabalho sobre diversas situações problemáticas realistas.

Tendo por base as vivências dos alunos e as suas contribuições autênticas, pretendeu-se conceber uma história que permitia a exploração de conteúdos e conexões matemáticas, envolvendo tarefas experimentais e seguindo uma metodologia de trabalho de projecto.

Centrando o primeiro capítulo da história no tema matemático de “Geometria”, exploraram-se áreas, perímetros e sequências e estabeleceram-se diversas conexões matemáticas. Apresentam-se de seguida algumas das tarefas desenvolvidas na sala de aula, ilustrando-se o trabalho realizado por alguns alunos de uma turma, em particular.

4.1.2 A HISTÓRIA DO HENRIQUE

O protagonista do primeiro episódio é um adolescente chamado Henrique que, durante os fins-de-semana, conjuntamente com a sua família, ocupa algum tempo de lazer no *shopping*

que existe não muito longe da sua casa (Anexo 8). Ao efectuar o percurso de carro até ao centro comercial, Henrique encontra relações entre a Matemática e o meio circundante. Através da janela do carro, observa algo que lhe desperta a atenção, um caniçal.

No 6.º ano e nas aulas de Matemática andava a estudar as formas cilíndricas. E gostava de brincar com canas. E sabia que eram cilindros, também ali, no mundo real. Chegado ao *shopping*, reconhece o tecto revestido com canas, isolamento habitualmente utilizado nos tectos das antigas casas algarvias. Achou que seria interessante cobrir o tecto do seu sótão daquela forma...

PRIMEIRO EPISÓDIO: O PROBLEMA DAS “CANAS”

Como forma de introduzir a situação na sala de aula utilizou-se um PowerPoint com algumas imagens sugestivas de canas, bambus e cilindros presentes no quotidiano de todos nós. A seguir, foi apresentada a história do Henrique e da sua ida ao *shopping*.

Os alunos levaram canas para a aula e o tecto do sótão começou por ser o tampo de uma mesa da sala de aula, de forma rectangular. Numa primeira fase, os alunos simularam o preenchimento dessa superfície. Esta experiência suscitou uma reacção geral de discussão na turma. Os alunos realizaram vários ensaios, dispondo as canas na vertical, na horizontal, na diagonal, e, até mesmo, de outras formas. A dada altura, a questão evoluiu para preencher a superfície, desperdiçando o mínimo de canas possível. Procedendo a ensaios e ouvindo as sugestões dos restantes colegas da turma, começaram a registar-se no quadro as diversas possibilidades de preenchimento. Ao fim de alguma discussão animada e de várias tentativas, os alunos concluíram que a melhor opção passaria por dispor as canas numa determinada direcção e que os excessos de algumas das canas cobririam a parte que restava.

Em seguida, a turma foi dividida em grupos de trabalho, de quatro a cinco elementos, e colocaram-se duas situações problemáticas: a primeira, também de carácter experimental, sugeria que, com o auxílio de materiais manipulativos, se efectuassem diversos ensaios de forma a otimizar o preenchimento de uma superfície: receberam duas placas de *musgami*, uma rectangular e outra quadrada e um conjunto de 20 palhinhas. As placas simulavam a superfície do tecto e as palhinhas representavam as canas. Embora esta situação fosse semelhante à anterior dava-se, agora, a possibilidade de todos alunos efectuarem ensaios com os materiais disponíveis e, em pequenos grupos, reflectirem e discutirem sobre as diferentes estratégias para resolver o problema.

DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO

Muito prontamente, começaram os ensaios de preenchimento. Foi com grande entusiasmo que os alunos delinearum um plano de investigação, no qual colocaram os dados, as questões a investigar e o registo das diferentes estratégias efectuadas.

A figura seguinte (Figura 5) ilustra uma das produções realizadas por um dos grupos de trabalho.

Depois de algum trabalho de experimentação, um dos alunos apresentou uma proposta que foi partilhada com a turma: “Professora, a superfície quadrangular é fácil de preencher pois as palhinhas têm 20cm de comprimento e a placa é de 20cm x 20cm.”

Insistindo, o mesmo aluno acrescentou: “O mais complicado será agora preencher a outra

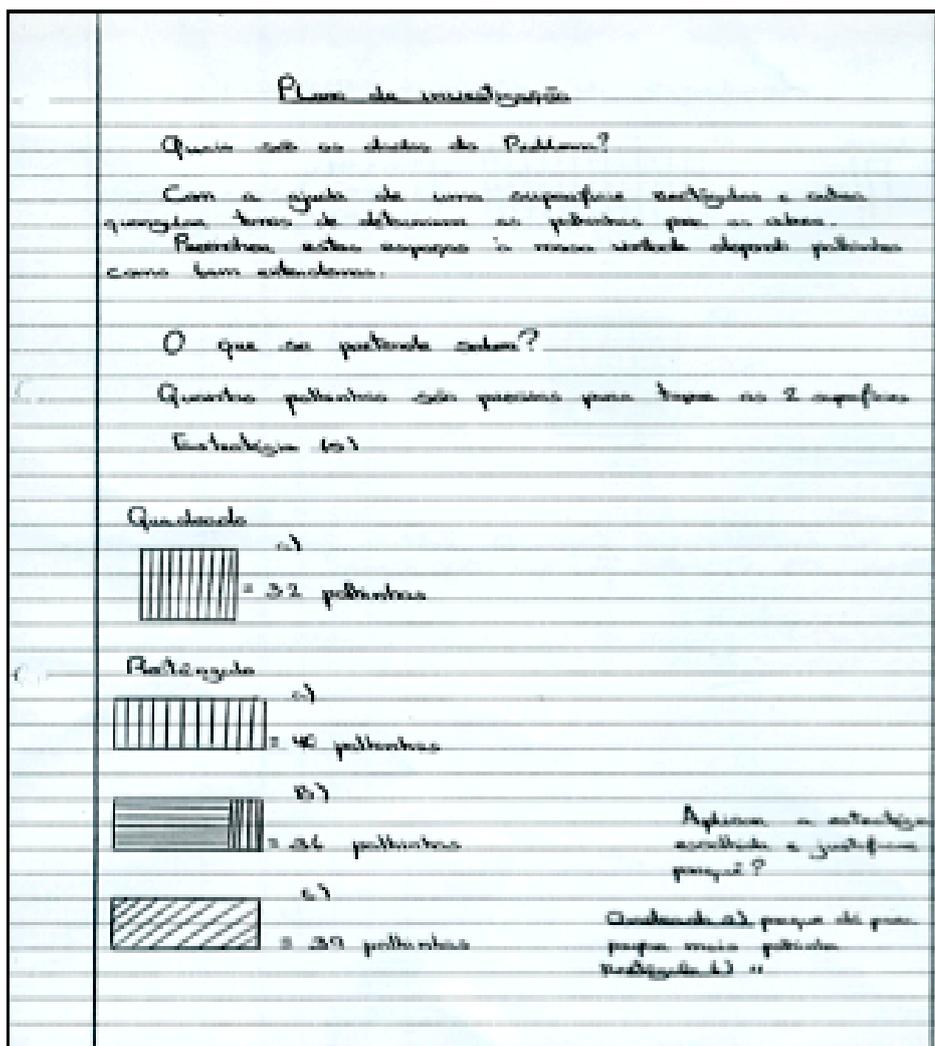


Figura 5: Produção do Grupo A.

superfície, gastando o mínimo de palhinhas possível.”

A actividade decorreu com a apresentação das diferentes estratégias, o que contribuiu para discutir as possibilidades de resolução. Ao fim de algum tempo, um grupo de trabalho (grupo A) apresentou a sua proposta que consistia na melhor forma de optimização.

A1: *Começámos por preencher a superfície quadrangular e verificámos que dispendo as palhinhas na vertical ou na horizontal, o número de palhinhas gasto era o mesmo. Pois esta superfície apresentava um comprimento e uma largura, idêntico ao comprimento das palhinhas.*

A2: *Bem, depois disso... Havia que preencher a superfície rectangular, gastando o mínimo possível de palhinhas E, aí, é que foi mais complicado...*

A3: *Foi mais complicado, mas depois de algumas tentativas compreendemos... Compreendemos que os bocadinhos das palhinhas....*

A4: *Bocadinhos, como assim?*

A3: *Sim, os bocadinhos... (Pega numa palhinha e na superfície e exemplifica). Ao colocarmos a palhinha em cima da placa, esta tem a mesma medida da placa.*

Professora: *A mesma medida, como? Explica lá isso bem.*

A3: *Sim, professora, o comprimento da palhinha é maior do que o comprimento da placa. O comprimento da placa é inferior ao da palhinha. Assim, se cortarmos este bocadinho é possível preencher os restantes espaços com os excessos das palhinhas.*

A turma concordou com a exposição deste grupo constatando que aquela era a maneira mais económica de usar as palhinhas.

Esta situação daria depois lugar a uma segunda situação em que se concretiza a actividade com o recurso a procedimentos matemáticos.

Com a apresentação de dados concretos, pressuponha-se que os alunos interpretassem o problema, seleccionassem os dados, delineassem um plano de resolução e validassem as suas respostas. Pretendia-se ainda que os alunos confrontassem resultados, e explicitassem e a comunicarem, claramente, os raciocínios produzidos. Alguns grupos optaram por seguir um plano de investigação mais minucioso. Mediram uma cana e anotaram as suas medidas. Com os dados, realizaram esquemas e cálculos ou cálculos complementados com explicações.

A Figura 6 e a Figura 7 mostram dois desses planos de investigação.

Foi pedido a cada grupo de trabalho que apresentasse o seu plano de investigação.

O grupo C tentou apresentar o seu plano, exemplificando todos os cálculos efectuados, tal como se pode ver na Figura 7:

C1: Bem, professora.... Nós começámos por desenhar uma cana. (Pega no giz e desenha no quadro uma cana). Depois colocámos as medidas. Tinha de altura 1m e de largura 1,5cm... estão a perceber?

Turma: Sim.

C1: Ah, falta uma coisa.... já me esquecia... A cana tem 1,5cm de largura e a altura 1m, certo? Então tivemos que passar a largura para as mesmas medidas da altura. E fizemos assim: regista no quadro $1,5\text{cm}=0,15\text{m}$. Depois... ai como é que fizemos? (Consulta em

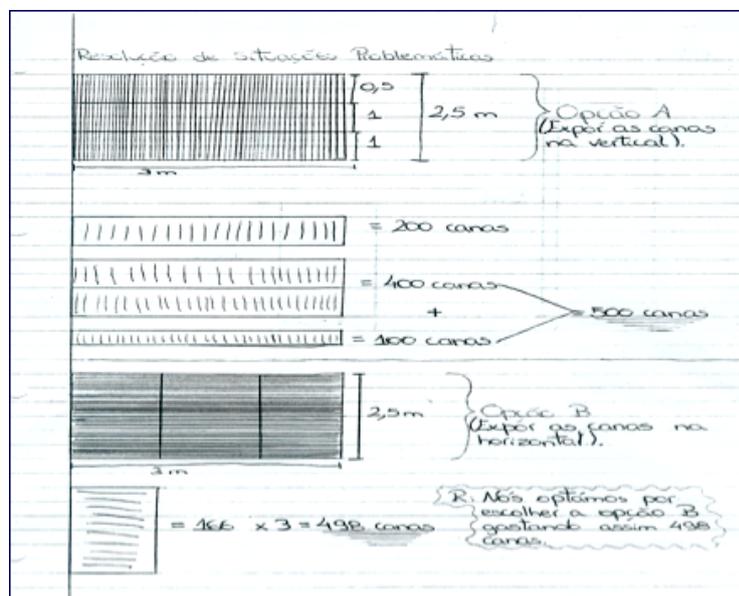


Figura 6: Produção do Grupo B.

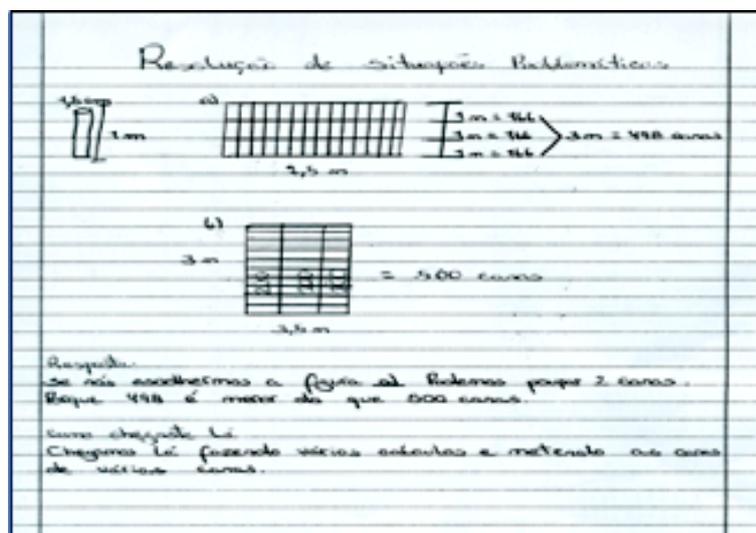


Figura 7: Produção do Grupo C.

seguida o seu plano de investigação e continua). Ah! Já me lembro. Fizemos dois esquemas, um com as canas na vertical e outro com as canas na horizontal.

Desenhou no quadro as canas na vertical. Em seguida, um colega do grupo dispôs-se a ajudar.

C2: *Olhe professora, achámos que com as canas na vertical conseguiríamos colocar duas barras de canas, cada uma contendo 200 canas, e na outra seriam possíveis colocar apenas 100 canas. O que, somando tudo, daria um total de 500 canas. Mas, depois, achámos que seria fácil de mais para ficar por aí. Foi então que o aluno B1 nos deu uma ideia. Então, achámos que, colocando as canas na horizontal, poderíamos dispor 3 filas de canas completas sem ter que cortá-las ao meio. E, aí... conseguimos fazer filas horizontais de 166, portanto conseguimos fazer três filas com 166 canas cada uma. O que nos deu um total de 498 canas. Comparando a estratégia A com a estratégia B, conseguimos poupar cerca de 2 canas. Não é muito, mas pelos menos são menos do que na situação anterior.*

Percebe-se pela exposição dos alunos que estes conseguiram compreender o problema mas foi também notório que a situação exploratória das palhinhas possibilitou um melhor entendimento da tarefa.

São actualmente muito veementes as referências à importância das conexões no desenvolvimento de capacidades e competências na aprendizagem da Matemática.

Segundo o NCTM (2000), “pensar matematicamente envolve a procura de conexões, e o seu estabelecimento cimeta a compreensão e os conhecimentos matemáticos. Se não se estabelecerem conexões, os alunos têm de aprender e memorizar demasiados conceitos e desenvolver capacidades de forma isolada. Através das conexões, poderão alargar a sua compreensão, baseando-se em conhecimentos prévios” (p. 324).

O problema das canas foi motivo para diversas extensões, criando oportunidades de ligar conhecimentos geométricos e numéricos, mediante a exploração de regularidades e sequências.

UMA EXTENSÃO PARA AS “CANAS”: O TECTO DO HENRIQUE

Henrique decidiu pintar o tecto do seu sótão, tal como se pode ver pela Figura 8. Dando-lhe um colorido agradável, pintou as canas com 3 tipos de cores diferentes. A sequência de

cores obedece à seguinte disposição: 1 de cor azul, 2 de cor vermelha e 3 de verde. Quando termina o preenchimento de uma fila de canas, a próxima dá continuidade à sequência, até ao preenchimento de todo o espaço livre. Observa a imagem (Figura 8) das sequências de cores utilizadas e responde:

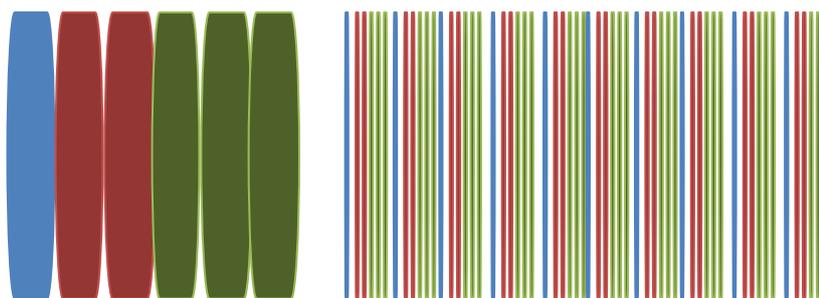


Figura 8: Sequência de canas pintadas.

- 1.1. Seguindo a sequência apresentada, ao fim de quantas canas se repetirá a cor verde, a cor vermelha e a cor azul?
- 1.2. Imagina que o Henrique utilizou 50 canas para preencher o sótão. Qual será a cor da cana número 50, mantendo a sequência escolhida: 1 azul, 2 vermelhas e 3 verdes?
- 1.3. Utilizando as 50 canas e mantendo a mesma sequência de cores, que regularidades podes encontrar? Investiga.

A visualização da imagem permitiu que os alunos, de uma forma simples, descobrissem de quantas em quantas canas era necessário repetir as cores verde, vermelha e azul. Facilmente constataram que as cores se repetiam da seguinte forma:

- azul – 1, 7, 13, 19, 21, ...
- vermelha – 2, 3, 8, 9, 14, 15, 20, 21, ...
- verde – 4, 5, 6, 10, 11, 12, 16, 17, 18, ...

As três sequências eram suficientemente diferentes para permitirem muitas questões. A situação revelou alguma complexidade quando se tentou descobrir a cor da quinquagésima cana. Observaram-se algumas propriedades interessantes: a sequência verde é formada por grupos de três números consecutivos, começando no 4 e obtendo-se o grupo seguinte pela adição de 6 unidades ao grupo anterior; a sequência vermelha é formada por grupos de dois números consecutivos, começando no 2 e obtendo-se o grupo seguinte pela adição de 6

unidades ao grupo anterior; a sequência azul começa em 1 e cada um dos seguintes é o resultado de adicionar 6 ao anterior. Portanto, os números, isoladamente ou em “grupos”, dão saltos de 6 em 6. Por isso, faz sentido dividir o 50 por 6, isto é, notar que $50 = 6 \times 8 + 2$. Ora isto significa que a 50ª cana vai estar na sequência vermelha, que começa no 2. Se, por exemplo, pensássemos na 100ª cana, a sua cor obter-se-ia, dividindo 100 por 6 e olhando para o resto: $100 = 6 \times 16 + 4$. A cana número 100 será de cor verde. E assim por diante. A representação que se segue (Figura 9) corresponde à sequência das canas pintadas, utilizando o Excel.

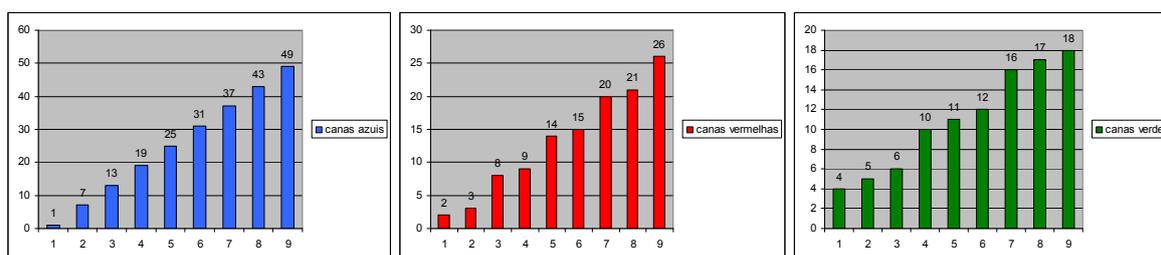


Figura 9: Uma representação das sequências de canas pintadas, utilizando o Excel

Aproveitando a tarefa da sequência de cores, foi possível a exploração de mais regularidades. Eis um dos exemplos apresentados por um aluno (Figura 10).

	1ª Coluna	2ª Coluna	3ª Coluna	4ª Coluna	5ª Coluna	6ª Coluna	7ª Coluna	8ª Coluna	9ª Coluna	10ª Coluna
1ª Linha	Az	Vm	Vm	Vd	Vd	Vd	Az	Vm	Vm	Vd
2ª Linha	Vd	Vd	Az	Vm	Vm	Vd	Vd	Vd	Az	Vm
3ª Linha	Vm	Vd	Vd	Vd	Az	Vm	Vm	Vd	Vd	Vd
4ª linha	Az	Vm	Vm	Vd	Vd	Vd	Az	Vm	Vm	Vd
5ª linha	Vd	Vd	Az	Vm	Vm	Vd	Vd	Vd	Az	Vm

Figura 10: A organização dos dados em tabela por um dos alunos.

Por ter pensado em várias filas de 10 canas, pelo modo de organização dos dados e pelas descobertas feitas por este aluno, justificou-se plenamente a sua apresentação à turma. Ao explicar o seu processo, deu a conhecer as seguintes regularidades: por coluna constatou que a 1ª se repete na 7ª coluna, assim como a 2ª na 8ª coluna, a 3ª na 9ª, a 4ª na 10ª, ou seja, de seis em seis colunas ocorre uma repetição das cores. Deste modo, se quisermos saber em que coluna se repetem as cores da 5ª coluna é só adicionar 6 colunas e portanto as mesmas cores aparecerão na 11ª coluna.

Por linhas, também foi possível encontrar uma regularidade, uma vez que a 1ª linha repete a sequência de cores da 4ª, a 2ª linha repete-se na 5ª, etc. De igual forma, verificou-se que a sequência de linha para linha se repete de três em três linhas.

Este tipo de tarefas, por não serem fechadas e completamente definidas, e por apelarem à experimentação e descoberta, permite dar aos alunos uma liberdade maior, contribuindo para que desenvolvam o seu pensamento matemático. Progressivamente, aprendem, por exemplo, a organizar os dados, a estabelecer relações e a encontrar resultados portadores de coerência e relevância matemática.

Segundo os pressupostos em que Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) apoiam a sua perspectiva acerca da Matemática na Educação Básica, “o reconhecimento de regularidades em matemática, a investigação de padrões em sequências numéricas e a generalização através de regras que os próprios alunos podem formular permitem que a aprendizagem da álgebra se processe de um modo gradual e ajudam a desenvolver a capacidade de abstracção. Esta capacidade é essencial no desenvolvimento da competência matemática” (p. 49).

Carreira (2005) referindo-se ao legado de Paulo Abrantes menciona que “o ambiente de aprendizagem pode ser francamente motivador se os alunos encontrarem utilidade e relevância nos projectos e se tiverem presente uma audiência a quem dirigir os seus produtos. Trata-se da criação de um clima ou de uma cultura de sala de aula que se aproxime do modo de usar a matemática na vida real (...)” (p. 129).

REFLEXÕES FINAIS

As potencialidades educativas desta experiência remetem-nos para uma primeira ideia a considerar – a percepção que os alunos têm da Matemática. A visão tendencialmente negativa manifestada por muitos alunos no ensino básico é fruto da deficiente compreensão dos conceitos matemáticos e da sua utilidade em experiências futuras, constituindo, não raramente, um bloqueio à aprendizagem. Transpor este bloqueio passará por considerar o ambiente e as experiências de aprendizagem no trabalho em sala de aula e na sua eventual extensão para além da aula de Matemática. O tipo de experiências matemáticas que constituíram o cerne da metodologia de trabalho de projecto possibilitou um envolvimento significativo dos alunos. Esta envolvimento traduziu-se por um aumento da autonomia dos alunos, já que a matemática não se apresentou de forma espartilhada e alinhada com os conteúdos, mas decorreu da

necessidade de mobilizar aprendizagens novas ou anteriores e foi tratada no sentido de promover um espírito crítico e investigativo. O ambiente de aprendizagem produziu reflexos significativos na percepção dos alunos relativamente à Matemática. As atitudes gerais de confiança e as expectativas criadas na realização das tarefas evoluíram de forma gradual e evidente.

Considerando o enfoque deste estudo no trabalho de projecto e dadas as características que o distinguem, emergiram outros aspectos relevantes que merecem atenção. A implementação desta pedagogia de trabalho levou a que os alunos assumissem, com grande responsabilidade, as tarefas propostas e favoreceu o seu crescimento em termos de desenvolvimento de competências matemáticas.

Em particular, foi notória a sua evolução em termos da capacidade de produzir pensamento matemático, a sua capacidade de analisar o mundo real e de interligá-lo com a Matemática; a consciência de existir uma componente experimental e realista na actividade matemática, dotada de significado, e o aumento gradual da capacidade de resolver problemas foram factores que contribuíram para o seu “*empowerment*”: um aumento da auto-confiança, um maior à vontade em enfrentar situações novas, uma consciência de que são capazes de criar mecanismos e formas para resolver questões e situações problemáticas.

A abordagem de conteúdos matemáticos em ligação com situações do quotidiano gerou um maior interesse pela Matemática, desenvolvendo nos alunos o espírito investigativo, o poder de argumentação e a predisposição para a aprendizagem. Esta forma de trabalhar, centrada numa abordagem experimental e realista permite que as conexões matemáticas surjam de uma forma natural e não forçada. A primazia dada à interligação dos conteúdos possibilitou que estes ganhassem um maior significado e abrangência.

Numa mesma tarefa existe a possibilidade de se explorarem múltiplos conteúdos matemáticos, que podem passar por áreas, perímetros, sequências, relações multiplicativas, proporcionalidade directa, entre outros, muitas vezes emergindo de questões aparentemente localizadas na Geometria. A possibilidade dada aos alunos de poderem encontrar e aprofundar conexões matemáticas, integrando-as com situações e ideias presentes no quotidiano, permitiu-lhes perceber o seu significado mais amplo e compreender que na realidade muito se justifica e descreve por relações e conceitos matemáticos. Entenderam que existe a possibilidade de se explorarem diversos conteúdos e tópicos a partir de uma dada situação e que a sua abordagem não tem de ser feita isoladamente e de forma compartimentada.

4.1.3 O SEGUIMENTO DA HISTÓRIA

O segundo episódio leva-nos a acompanhar o Henrique até ao hipermercado. Na companhia de sua mãe percorre os corredores do hipermercado e debita da lista de compras, os produtos adquiridos à medida que os encontra. Dirige-se à secção dos refrigerantes, com o objectivo de trazer uma bebida que sacie a sua sede. Foca a sua atenção nos tipos de empacotamentos de latas existentes, constatando que estes apresentam somente duas formas, base quadrangular ou rectangular. Tentou retirar uma lata da embalagem, embora com alguma dificuldade, tendo mesmo que rasgar parte do invólucro para conseguir o desejado.

Interrogou-se acerca da razão do empacotamento ser na forma cúbica ou paralelepipedica, considerando, ainda, se outro tipo de acondicionamento permitiria a retirada do produto com mais facilidade (Anexo 9).

Tentou descobrir porquê!

SEGUNDO EPISÓDIO: O PROBLEMA DAS “LATAS”

Serviu o excerto anterior como ponto de partida para a tarefa denominada “As Latas”.

Integrada no domínio temático, “Geometria”, esta tarefa envolveu tópicos matemáticos das unidades de áreas e volumes e, ainda, permitiu a familiarização com alguns conceitos inerentes às actividades de investigação. As tarefas introdutórias baseadas em situações do quotidiano revestiram-se de vários propósitos: motivar os alunos para a aprendizagem, encontrar relações da matemática na realidade e estimular o seu raciocínio e pensamento matemático, descobrir significados nos conhecimentos aprendidos e no processo como os mobilizam.

O relato da história despertava momentos de grande efusão na turma, por um lado, por quererem conhecer o percurso do Henrique, por outro, por se envolverem na descoberta que a actividade de investigação matemática incitava.

Criaram-se rotinas no sentido de: lermos em grande grupo os capítulos da história; incitar à investigação; delinear um plano de investigação; explorar a situação com aplicação das

estratégias de resolução, discutir em pequeno grupo os resultados conseguidos e, posteriormente, apresentar as descobertas à turma.

A preocupação para seguirem a execução do plano de investigação (Anexo 7) era uma prioridade, até porque seria uma forma de organizarem e estruturarem o pensamento.

Esclarecidas as principais orientações para a execução da tarefa distribuíram-se, nos diferentes grupos de trabalho, folhas de papel A3, material de desenho e latas num número de 16. De forma a não dispersar os resultados obtidos, houve a preocupação de as latas apresentarem as mesmas variáveis no que toca a marca e dimensão.

De acordo com as indicações expressas na proposta de trabalho, pretendia-se que os alunos (Anexo 9) procedessem, numa primeira fase, a ensaios e experimentação, representando na folha de papel as bases correspondentes aos empacotamentos (quadrangular e rectangular). Posteriormente, os espaços das áreas seriam preenchidos com a representação das bases das latas. A comparação destes dois tipos de empacotamento remetia para a discussão dos dados obtidos e a apresentação das suas descobertas, levando-os a optar pelo tipo de acondicionamento mais económico.

A exposição dos trabalhos envolvia uma discussão alargada à turma, com o propósito de dar resposta ao solicitado.

DESENVOLVIMENTO DA TAREFA DE MODELAÇÃO MATEMÁTICA

A tarefa começou com os ensaios de preenchimento. As representações das áreas dos empacotamentos deram lugar ao traçado de rectas paralelas e perpendiculares que serviram de suporte à reprodução das bases das latas. A Figura 11 ilustra imagens do trabalho realizado nos grupos.

Tratando-se de uma tarefa de investigação, os dados apresentados não eram concretos, o que dificultava a resolução de uma forma imediata, exigindo o desenvolvimento do raciocínio e a descoberta de estratégias que os conduzisse aos resultados pretendidos. O hábito de traçarem o plano de investigação consistiu num processo orientador em que precisavam de recolher e organizar a informação, definir uma estratégia de resolução e, seguidamente, avaliar e explicar os resultados. Contudo, a inexistência dos dados suscitou dúvidas em alguns dos grupos, conduzindo-os a questões como as que se relatam:

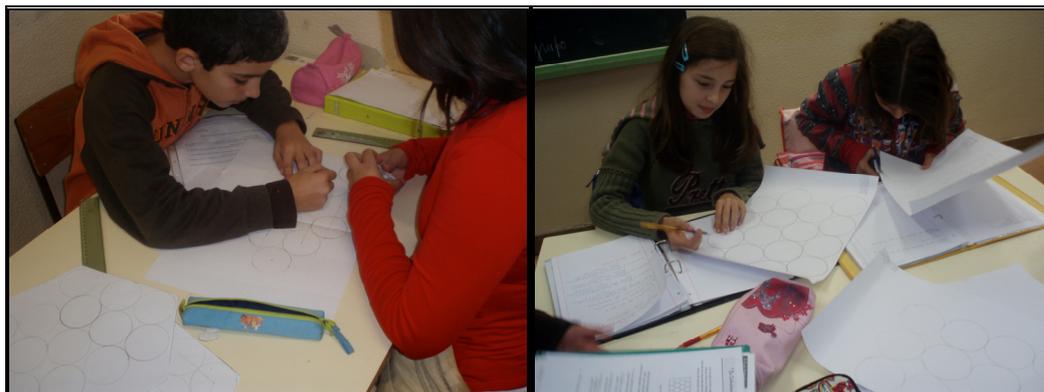


Figura 11: Momentos relativos aos ensaios na tarefa as “Latas”.

A1: *Professora como vamos determinar o tipo de empacotamento mais económico se os dados da tarefa não apresentam as dimensões das caixas?*

D4: *Não percebemos professora... Como é que vamos determinar as medidas das caixas para descobrirmos, qual o empacotamento mais económico?*

Professora: *Leiam a tarefa, seleccionem e anotem os dados que existem. Observem com muita atenção e pensem: que dados temos? O que quero descobrir? Como vamos trabalhar os dados, apenas com aquilo que nos foi dado? Enfim.... Pensem, investiguem, procurem um caminho!*

Tornou-se evidente, que a insistência dos alunos tinha como propósito não só esclarecer suas dúvidas, mas, principalmente, ficarem a saber informações precisas para dar início às suas investigações. Contudo, tentei manter uma postura neutra no sentido de não influenciar nem as suas descobertas nem os seus raciocínios, mas incitá-los à exploração da tarefa.

C3: *Oh, professora... apenas temos folhas de papel A3 e latas de refrigerantes. E as latas... estas, nós não sabemos as medidas.*

A4: *Espera... as medidas nós conseguimos ficar a saber! Basta medir com uma régua...*

D5: *Ah! Parece que já estamos a entender.... As latas medem-se e a partir daí, conseguimos... Pronto, já percebemos!*

Professora: *Bem, se estão a encontrar um caminho... Então têm que segui-lo e procurar testá-lo.*

A turma: *Ok, professora... vamos a isso.*

Ultrapassada a barreira inicial, entenderam o que se esperava e os ensaios decorreram sem problemas, facto este que pôde ser constatado pelas poucas solicitações dos grupos de

trabalho para o esclarecimento de dúvidas no decorrer da actividade. Estes momentos revelavam evidências de alguma evolução na realização da tarefa e davam indícios de uma autonomia mais presente. O término dos ensaios despertou uma vontade evidente de apresentação dos trabalhos, na totalidade dos grupos.

Antecipando a apresentação dos resultados, o Grupo A interveio, exibindo a sua descoberta, que se pode ver na Figura 12:

A1: Bem... depois de termos discutidos os dados do problema percebemos que para conseguirmos os dados que precisávamos tínhamos que medir o diâmetro da lata. Após a medição ficámos a saber que este tinha 5cm e com essas medidas tudo foi mais fácil. Traçamos paralelas deixando a distância de 5cm entre ela para depois conseguirmos desenhar as bases das latas e chegarmos às dimensões da base quadrangular e rectangular.

Professora: Muito bem, continuem...

A1: As dimensões da base quadrangular eram de 20cm por 20cm, porque a disposição das latas que preenchiam esta medida, eram 4, o seu comprimento é de $4 \times 5 = 20$ cm. O mesmo acontece com a largura. No caso da base rectangular a disposição das latas apresentavam um espaçamento diferente e as medidas são ligeiramente diferentes. O comprimento é de 21,8cm e a largura de 18,4cm. A seguir... calculámos a área da base de cada uma.

Professora: Sim... Vocês estão a acompanhar o raciocínio do grupo A?

A turma: Sim, professora...

Professora: Continua!

Plano de Investigação

1.º Leitura do Problema
Temos 16 latas e queremos de 16 latas em superfícies quadrangulares e rectangulares

2.º Que vamos investigar
Qual o tipo de empacotamento mais económico para as embalagens?

3.º Escolher uma estratégia

Vamos calcular o diâmetro da lata medindo com uma régua

Diâmetro $d = 5 \text{ cm}$

11 cm altura da lata

Depois de descobirmos o diâmetro vamos calcular a área da base quadrangular. Como este diâmetro mede 5cm a base da base quadrangular mede 20cm

$A_{\text{base}} = L \times L = 20 \times 20 = 400 \text{ cm}^2$

Como a lata tem de altura 11cm a caixa vai ter de altura 11cm

Área total da superfície

$$A = 20,4 \times 2 + 239,8 \times 4 + 400,12 \times 2$$

$$= 409,8 + 959,2 + 800,24$$

$$= 1686,64 \text{ cm}^2$$

Ao compararmos os dois tipos de empacotamento o quadrangular tem de área de superfície total 1680 cm² e a área da superfície total do empacotamento com base rectangular é de 1686,64 cm²

Assim é que é mais económica para a empresa é a que leva menos quantidade de plástico para embalar e que corresponde ao empacotamento de base quadrangular.

Cálculo da área lateral

Para empacotar 16 latas com base quadrangular são necessários 1680 cm² de plástico

Vamos calcular a área da base rectangular

$A_{\text{base}} = C \times l = 21,8 \times 18,4 = 401,12 \text{ cm}^2$

Cálculo da área lateral

$$A = C \times h = 21,8 \times 11 = 239,8 \text{ cm}^2$$

$$A = C \times l = 18,4 \times 11 = 202,4 \text{ cm}^2$$

Figura 12: Produções realizadas pelo grupo A relativo à tarefa das “Latas”.

A1: *Calculámos a área da base quadrangular $A = 20 \times 20 = 400\text{cm}^2$ e da base rectangular $A = 21,8 \times 18,4 = 401,12 \text{ cm}^2$ sabendo as bases agora teríamos que calcular as áreas laterais.*

Professora: *E porque é que precisam de determinar as áreas laterais?*

A1: *Ora professora... porque só assim, depois de sabermos a áreas laterais do empacotamento é que possível determinar a área total da superfície e comparar os dois tipos de empacotamento.*

Professora: *Muito bem... podes continuar.*

A1: *A lata tem de altura 11cm e essa medida mantêm-se nos dois tipos de empacotamento.*

Assim no empacotamento de base quadrangular vamos ter 2 faces de 20 cm por 20 cm em que a área de uma face é de $A = 20 \times 20 = 400 \text{ cm}^2$ e 4 faces com 20 cm por 11cm tendo cada uma a área $A = 20 \times 11 = 220 \text{ cm}^2$. A área total da superfície é $A = 2 \times 400 + 4 \times 220 = 1680 \text{ cm}^2$. Para calcularmos a área da base rectangular e a área superfície total fizemos do mesmo modo, embora com outras medidas.

Tornou-se evidente que tinham entendido a situação proposta e dando continuidade à apresentação da estratégia escolhida, chegaram às dimensões da base rectangular, determinaram a sua área e respectivas áreas laterais e salientaram que as dimensões da lata se mantinham. Determinaram a área da superfície rectangular e concluíram:

A1: *Depois de sabermos a área total da superfície $A = 202,4 \times 2 + 239,8 \times 2 + 401,12 \times 2 = 1686,64\text{cm}^2$ do empacotamento de base rectangular, comparámos com a área total da superfície do empacotamento de base quadrangular e concluímos que a que ocupa mais volume é a de base rectangular, pois apresenta um valor de $6,64 \text{ cm}^2$ de área superior.*

Professora: *Mas qual é o empacotamento que se torna mais vantajoso para as empresas?*

A1: *Ah... o que é mais económico para as empresas é o que leva menos quantidade de plástico para empacotar e que corresponde ao empacotamento quadrangular.*

Na sequência desta apresentação, um dos grupos de trabalho referiu que as conclusões a que tinham chegado tinham sido similares, embora a sua estratégia os tivesse levado para outros caminhos. Posto isto, resolveram mostrar à turma a sua resolução.

B1: *Professora, inicialmente, andámos às voltas para resolver o problema, pois este não tinha medidas e isso deixou-nos sem saber como o resolver. Depois dos ensaios com as latas fez-se luz e entendemos como lá chegar. A partir daí achámos fácil resolvê-lo.*

Continuando, acrescentou:

B1: *A primeira coisa que fizemos foi estudar a forma como iríamos dispor as latas na folha A3. Dispusemos as latas, quatro na horizontal e 4 na vertical, preenchendo o espaço restante com as que sobravam. A seguir, pensámos na melhor estratégia para desenharmos as latas e que ficasse tal e qual o nosso ensaio. Até que nos ocorreu uma ideia!*

Professora: *E qual foi?*

B2: *Começámos por tentar descobrir o diâmetro de uma lata. Descobrimos o diâmetro através da medição do perímetro que depois o dividimos por pi. Pegámos na folha A3, traçámos rectas paralelas e perpendiculares, deixando a distância entre elas com comprimento igual ao comprimento do diâmetro.*

Professora: *Mas, por que motivo deixaram essa distância?*

B2: *Oh, professora essa distância serviu para depois com a ajuda do compasso, traçarmos as bases das latas, desenhando círculos, sobre as rectas perpendiculares e paralelas.*

Professora: *Muito bem, continuem.*

B1: *Depois de a folha estar totalmente preenchida com círculos, passámos a calcular a área da base ocupada pelo empacotamento.*

Professora: *E como fizeram? Mas não seria bom apresentarem à turma o vosso Plano de Investigação?*

O aluno B3 registou no quadro a produção do seu grupo, seguindo o plano de investigação, tal como se apresenta na Figura 13.

Desenham no quadro a base de uma lata e as medidas do seu diâmetro.

B3: *Uma lata tinha de diâmetro 5,25cm. Calculámos o raio da base da lata e deu 2,62cm. Depois traçámos paralelas deixando a distância de 2,62cm, entre elas. A partir daqui começámos a desenhar círculos que representavam as bases das latas. Quando a base do empacotamento estava toda preenchida foi determinado o seu comprimento e a altura. A seguir calculamos a área do empacotamento quadrado.*

Professora: *Mas como determinaram o comprimento e a altura? Não percebi. Expliquem-nos.*

B3: *É fácil professora...*

Plano de Investigação

1. Problema
Qual dos empacotamentos é o mais económico?

2. Dados do problema
Com 16 latas de refrigerante dispor sobre superfícies quadrangulares e retangulares.

3. O que se pretende saber
Qual dos empacotamentos é o mais económico?

Estágios

1. Cálculo da Área Quadrangular

Dimensão de uma lata
 $P = \text{Perímetro} = 16,5 \text{ cm}$
 $D = P \cdot \pi$
 $D = 16,5 \cdot 3,14$
 $D = 5,25$

Área da base lata
 $A_1 = 16 \times 16 = 256 \text{ cm}^2$
 $A_2 = 16 \times 21 = 336 \text{ cm}^2$
 $A_3 = 3,14 \times (5,25)^2 = 88,2 \text{ cm}^2$
 $A_4 = 21 \times 5,25 = 110,25 \text{ cm}^2$
 $A_{\text{total}} = 16 \times 21,5 = 344 \text{ cm}^2$

Área de despendício da base quadrangular

Área do retângulo
 $A = c \times l$
 $= 23 \times 20$
 $= 460 \text{ cm}^2$

Área de despendício
 $A_{\text{emp}} = A_{\square} - \text{16 latas ocupadas pelas latas}$
 $A_{\text{emp}} = 460 - 344$
 $= 116 \text{ cm}^2$

A área de despendício é menor no empacotamento quadrangular do que no retangular.

A mesma estratégia permite-nos dizer que o mais económico para a empresa é o empacotamento quadrangular.

Área da superfície total da base quadrangular

Área da face = $21 \times 11 = 231 \text{ cm}^2$
 Área da base = $21 \times 21 = 441 \text{ cm}^2$

Área superfície total = $2 \times 231 + 441 = 882 + 441 = 1323 \text{ cm}^2$

Área da superfície total da base rectangular

Área da face = $20 \times 11 = 220 \text{ cm}^2$
 Área da base = $20 \times 23 = 460 \text{ cm}^2$

Área superfície total = $2 \times 220 + 460 + 506 = 920 + 460 + 506 = 1886 \text{ cm}^2$

Comparando os dois áreas compreendemos que o quadrangular é mais económico para a empresa.

Figura 13: Produções realizadas pelo grupo B relativo à tarefa das “Latas”.

Continuando a explicação, representam no quadro 4 círculos na vertical e na horizontal e exemplificando, o aluno acrescenta:

B3: É só pegar no comprimento do diâmetro da base de uma lata e multiplicar por 4 ($5,25 \times 4 = 21 \text{ cm}$), pois este número corresponde ao número de latas que preenchem o comprimento da base quadrangular. Para a altura, como é uma figura quadrangular, tem o mesmo comprimento.

Sabendo as dimensões foi só calcular a área e obtivemos um valor de $A = 21 \times 21 = 441 \text{ cm}^2$. Depois calculámos a área da base da lata que nos deu $A = 21,5 \text{ cm}^2$. A seguir, a partir da área da base de uma lata multiplicámos por 16 latas, porque era o número de latas que ocupava a base, e ficámos a saber a área total ocupada pelas latas que era de 344 cm^2 . Depois foi só calcular a diferença entre estas duas áreas $A = 441 - 344 = 97 \text{ cm}^2$.

Professora: E, por que motivo calcularam a diferença entre a área da base do empacotamento e a área total ocupada pelas bases das latas? Expliquem isso melhor.

B3: Ora professora, porque só assim é que conseguíamos comparar a área ocupada pela base quadrangular e a base rectangular, e sabermos qual era a mais económica para as empresas quanto ao tipo de empacotamento.

Professora: E a que conclusão é que chegaram?

B3: Seguindo o mesmo processo para a base rectangular e dispendo as latas, tal como se vê na figura, obtivemos uma diferença $A = 460 - 344 = 116 \text{ cm}^2$.

Achávamos que a opção mais económica para as empresas seria de formato quadrangular. Mas, esta era a nossa hipótese, e para comprovarmos teríamos que calcular a área total da superfície.

Professora: *Ok! E então a que conclusões chegaram?*

Seguem uma estratégia idêntica à do grupo A, para calcular a área total da superfície quadrangular e rectangular, embora com valores ligeiramente diferentes, porque o cálculo do diâmetro da lata advém da medição do perímetro com base num valor aproximado. No entanto, também eles aceitáveis. Continuam a sua apresentação seguindo os cálculos, tal como se observam na produção da Figura 12.

B3: *As conclusões a que chegámos foi de que a superfície total quadrangular ocupa 1806 cm^2 e a rectangular 1866 cm^2 . Ao compararmos as duas áreas comprovámos que a quadrangular era a mais económica para a empresa.*

MODELAÇÃO MATEMÁTICA

Do exposto, constata-se que as dificuldades iniciais se relacionaram com a ausência de dados concretos na actividade de investigação, o que aparentemente se revelou um verdadeiro problema para estes alunos. De facto, as actividades de investigação por não se apresentarem como problemas de resolução imediata ou um mero exercício rotineiro suscitam-lhes algumas hesitações, deixando-os, por vezes, confusos. Saliente-se, porém, que estes alunos já apresentavam alguma prática, neste tipo de tarefas. No entanto, a insistência e a prática é todo um processo que leva algum tempo, mas ajuda-os a encarar as actividades de investigação como tarefas em que não devem desistir e onde a procura de caminhos ou estratégias que os permitam investigar e descobrir o que desconheciam se torna fundamental.

Aliás, na óptica de Ponte (2003), “*investigar não significa necessariamente lidar com problemas na fronteira do conhecimento nem com problemas de grande dificuldade. Significa, apenas, trabalhar a partir de questões que nos interessam e que se apresentam inicialmente confusas, mas que conseguimos clarificar e estudar de modo organizado*” (p. 2).

A abordagem da tarefa “As Latas” enquadra-se num tipo de problema de investigação aberto em que a actividade de modelação matemática ocorre. O desenvolvimento desta

situação permitiu o percorrer das etapas do “Ciclo de Modelação Matemática” de Ferri (2010), anteriormente descrito, no capítulo II.

A “situação real” expressa sob a forma de um problema do quotidiano faz parte da primeira etapa do “Ciclo de Modelação” e foi assumida pelos alunos como algo que necessitavam de investigar. Embora a dificuldade inicial se fizesse sentir, pela ausência dos dados do problema, o que impediu o delinear de estratégias imediatas, foi certo que os obstáculos aparentes facilmente foram ultrapassados a partir das interações entre alunos e entre a professora e os alunos. A este propósito, Santos, Brocardo, Pires e Rosendo (2002) referem que os alunos tendem a trabalhar individualmente, embora seja importante que durante o trabalho investigativo se partilhe e discuta ideias. Para além disso, existe uma tendência para estes solicitarem o professor na procura e obtenção de respostas que ultrapassem as suas dificuldades. É pois, pela realização continuada de tarefas de investigação que os alunos criam hábitos e vencem barreiras, ao colocarem no seio do grupo as suas dúvidas e ideias, bem como recolhendo sugestões e opiniões para progredirem no seu trabalho.

A clarificação das ideias levou-os a estabelecerem conexões entre o conhecimento matemático e extra-matemático, e, ao entenderem o problema, criaram uma “representação mental da situação”. Tendo em conta os elementos necessários para a resolução da tarefa, simplificaram-na e estruturaram-na, ou seja, desencadearam um conjunto de acções em que experimentaram, dispondo as latas de acordo com as reproduções sugeridas, através de ensaios que se aproximaram das representações reais, ao mesmo tempo que construíram o seu “modelo real”. Tais ensaios permitiram-lhes, a transição para a Matemática através do cálculo das áreas e da comparação das respectivas representações, o que os levou à criação do “modelo matemático”. Note-se, no entanto, que durante este processo os alunos ao trabalharem matematicamente, utilizaram competências matemáticas diversificadas, tais como: estimar, medir, calcular, discutir, argumentar e comparar. Os resultados obtidos permitiram, aos diferentes grupos de trabalho, analisar a sua razoabilidade, discutindo-os e transferindo-os para resultados reais. Contudo, foi a comparação entre os resultados matemáticos e a realidade, no que se refere às opções tomadas pelas empresas quanto às questões económicas, que permitiu a validação dos resultados obtidos. A apresentação das diferentes estratégias ao grupo turma permitiu, não só um reforçar dos conhecimentos matemáticos, como ainda lhes permitiu estabelecer a conexão com o mundo real de uma forma bastante clara e explícita.

DIVERSIDADE DE ESTRATÉGIAS

Em seguida, ao convidá-los a apresentar outras estratégias de resolução, o grupo D interveio, referindo:

D1: *O nosso grupo de trabalho utilizou uma estratégia mais fácil professora, apesar de chegarmos à mesma conclusão.*

A Figura 14 representa o plano de investigação relativo à produção deste grupo.

Professora: *Então, como fizeram?*

Dirigindo-se ao quadro exibe a sua proposta de resolução e comenta:

D1: *Primeiro desenhámos a base de uma lata e a seguir medimos o perímetro e dividimos por pi para determinámos diâmetro.*

Desenha no quadro um círculo representa a base da lata e anota o diâmetro de 5,2cm.

Plano de Investigação

1. Dados do problema

16 folhas e folhas de papel A3. Queremos investigar 2 tipos de empacotamento com base rectangular e outra de base quadrangular.

2. O que se pretende saber

Qual é a opção mais económica para as empresas, empacotamento rectangular ou quadrangular.

3. Estratégias

Cálculo das dimensões da base quadrangular

Dimensão da base de uma lata

$P = 16,5 \text{ cm}$
 $D = 16,5 : 3,14$
 $D = 5,2 \text{ cm}$

Volume da base quadrangular

$V = a \times b \times c$
 $V = 20,8 \times 20,8 \times 11$
 $V = 4759 \text{ cm}^3$

Volume da base rectangular

$A_{\text{base}} = c \times al =$
 $A_{\text{base}} = 451,4 \text{ cm}$

Volume = $A_{\text{base}} \times al$
 $= 451,4 \times 11$
 $= 4965,8 \text{ cm}^3$

Figura 14: Produção do grupo de trabalho D.

D1: *Depois adicionámos 4 vezes o valor deste diâmetro para nos dar o comprimento da base quadrangular. O valor que chegámos foi de 20,8cm. Como a base era quadrangular a largura também tinha a mesma medida, pois o tipo de empacotamento tinha a forma de um prisma quadrangular. Quanto, à altura, essa era a mesma que a altura da lata e media 11cm.*

Professora: *E esse valor da altura foi determinado para quê?*

D1: *Então, professora.... Esse valor era necessário para determinarmos o volume. Nós não seguimos a mesma estratégia que o grupo C. Nós, antes de calcularmos a área total da superfície, optámos por calcular o volume.*

Professora: *Ok, continua.*

D1: *A seguir determinámos o volume fazendo $V = Ab \times h$; $V = 20,8 \times 20,8 \times 11$;
 $V = 4759 \text{ cm}^3$.*

Professora: *E a turma, está a acompanhar o raciocínio do grupo D?*

Turma: *Sim professora, estamos!*

D1: *Para determinarmos o volume do empacotamento de base rectangular, utilizámos um processo diferente uma vez que a disposição das latas se encontrava na diagonal. Medimos com a régua o comprimento e a largura da base rectangular, quanto à altura essa media o mesmo que a altura anterior. Assim....tínhamos o comprimento com a medida de 22,8cm, a largura de 19,8cm e a altura 11cm. Multiplicando tudo, deu-nos $V = Ab \times h$; $V = 22,8 \times 19,8 \times 11 = 4965,8 \text{ cm}^3$.*

Professora: *Os vossos resultados são de facto diferentes dos do grupo C. Comparando estes dois tipos de estratégias, o que é que a turma acha? Será uma estratégia também ela correcta?*

Turma: *Claro que sim, professora.*

Professora: *Mas, o pedido era saber qual a mais económica e pela apresentação dos outros grupos estes utilizaram estratégias diferentes e depois foram comprová-las, através do cálculo e comparação da área da superfície total.*

D1: *Mas... nós também calculámos a área da superfície total, queríamos apresentar um outro percurso. Começámos pelo volume e depois fomos ver se estávamos certos. Como a quantidade de latas era a mesma e as dimensões também, a única coisa que variava era a forma de acondicionamento. E quando calculámos a área total da superfície verificámos que a quadrangular era a mais económica.*

Professora: *Vocês perceberam meninos... que era necessário determinarem a área da superfície quadrangular e compará-la com a rectangular para podermos decidir qual a mais económica para as empresas?*

Turma: *Sim... entendemos!*

A diversidade de estratégias foi um aspecto a considerar nesta apresentação porque as comparações efectuadas entre os grupos A, B e D deram aos alunos a perspectiva de que um problema de resposta aberta não apresenta uma única solução; outras existem, embora tendo por base diferentes percursos para chegar ao caminho pretendido. A forma como os alunos percebem as actividades de investigação também influencia a sua aprendizagem e encontra-se intimamente ligada à visão que detêm da Matemática. As interacções entre os alunos da turma assumem um papel basilar no clarificar de, ao mesmo tempo que ajudam a estabelecer relações entre os conceitos e a fazer associações de ideias, o que, por sua vez, se reflecte na compreensão do conhecimento matemático. Por outro lado, a consolidação dos conhecimentos ocorre quando, numa discussão mais alargada sobre as investigações em curso, se permite o limar de assuntos, eventualmente ainda pouco consolidados. É esta discussão de ideias e dúvidas, quer entre os membros dos grupos de trabalho quer no grupo turma, que se revela determinante para a aprendizagem dos alunos. Estes sentem-se mais motivados a utilizarem processos matemáticos e mais confiantes nas suas exposições, recolhendo ainda a informação transmitida pelos diversos elementos do grupo e da turma e aceitando as intervenções da turma quanto aos seus trabalhos, desenvolvendo, cada vez mais, uma maior autonomia para prosseguirem com o trabalho investigativo.

EXTENSÕES DO PROBLEMA DAS “LATAS”

A segunda fase apelava a um processo menos condicionado, embora mantendo a mesma variável (latas), permitindo aos alunos serem livres na escolha do acondicionamento.

O ensaio e a criatividade no tipo de acondicionamento escolhido eram esperados nesta tarefa, envolvendo-os num trabalho de medição e cálculo matemático, de acordo com os respectivos valores reais. Esta hipótese de trabalho culminaria com a apresentação dos trabalhos em formatos de PowerPoint ou de outro tipo sugerido.

A tarefa não levantou grandes dificuldades, uma vez que sugeria que os alunos experimentassem outros tipos de acondicionamento. Depois de preenchidos, e para determinação das respectivas áreas, recorreram à decomposição de áreas, o que facilitou os cálculos, visto os empacotamentos apresentarem outras formas diferentes das apresentadas na

tarefa anterior e que variaram desde formas hexagonais, a triangulares ou outras diferentes. A conclusão das tarefas deu lugar à discussão na turma, em que cada um apresentou o tipo de empacotamento escolhido. Compararam a área escolhida com a inicialmente seleccionada, isto é, a quadrangular, tendo chegado a conclusões idênticas em todos os grupos de trabalho. Relembre-se que o acondicionamento mais económico para as empresas era o quadrangular, em termos de espaço ocupado e material utilizado no empacotamento. A Figura 15 mostra alguns exemplos dos acondicionamentos conseguidos.

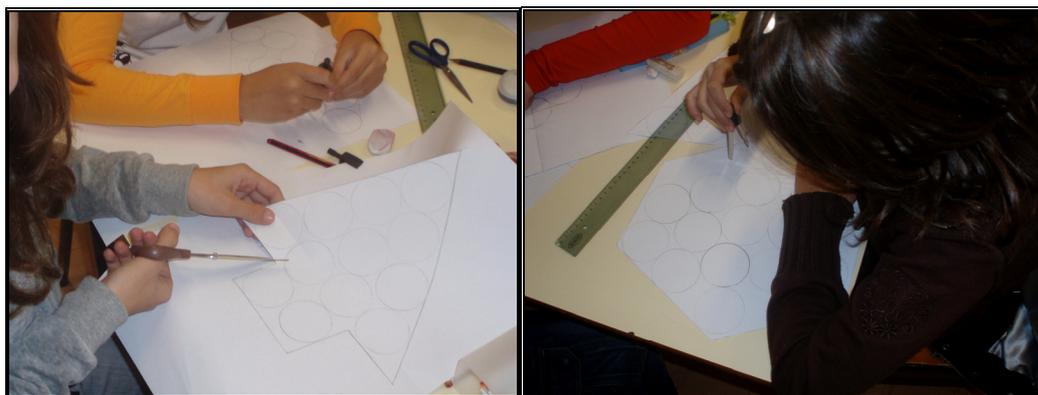


Figura 15: Momentos relativos aos ensaios da tarefa das “Latas” com bases de acondicionamentos diversificadas.

REFLEXÕES FINAIS

Aliar as actividades de investigação matemática a assuntos que envolvam problemas do quotidiano desencadeia uma atitude e uma postura mais autónoma, mais crítica perante a resolução de problemas, dando-lhes segurança na aplicação de conhecimentos matemáticos que entendem com outra importância.

Apesar de os alunos estarem familiarizados com as actividades de investigação, tendo muito presente as noções de investigar, conjecturar, descobrir regularidades, testar, validar e argumentar, estas circunstâncias contribuem para as reforçar ou esclarecer alguns conceitos essenciais.

Na perspectiva de Cunha (1998) a exploração dos problemas abertos, para além de motivar os alunos, desenvolve capacidades, em particular, o raciocinar e o comunicar, facto que contribui para que estes percepcionem a matemática como uma ciência em construção, não esquecendo que o trabalho investigativo desenvolve uma maior autonomia. Reconhecem o

valor do trabalho de grupo e a importância das interações entre pares, o que de certa forma, aproxima os elementos do grupo e eleva a auto-estima dos alunos, ao adquirirem maior confiança sobre o trabalho em curso. Os alunos desenvolvem um conjunto de competências que potenciam o desenvolvimento da sua capacidade de reflexão, permitindo, assim, a construção do conhecimento matemático (Segurado, 1997).

As tarefas propostas permitiram a exploração de diversos conteúdos, como áreas, volumes, relações multiplicativas, em que se aliaram os temas matemáticos “Geometria” e “Números e Cálculos”. Envolveram, ainda, a conexão entre o conhecimento matemático e o extra-matemático. Como tarefas de modelação, permitiram dar significado à aplicação dos conhecimentos matemáticos e ao mesmo tempo possibilitaram um entendimento quanto à importância da matemática na justificação de questões da realidade.

4.1.4 OS DIFERENTES PERCURSOS DA HISTÓRIA: RELATO DE UMA EXPERIÊNCIA

A conclusão da tarefa “As latas” encerrava a possibilidade dos alunos conceberem a história em conjunto (grupo-turma), com base na realização de tarefas matemáticas iguais para todos os grupos.

Sugeriu-se, nos diferentes grupos de trabalho, a continuidade da história escrevendo, cada qual, o seu percurso subsequente. Deveriam conceber um projecto que incluiria o percurso da história, uma proposta de trabalho com as actividades a investigar, as estratégias escolhidas, a discussão dos resultados e a apresentação do trabalho à turma. O delinear de um plano de investigação, a execução das fases do projecto e de todas as tarefas que lhe são inerentes eram procedimentos que já dominavam razoavelmente.

Os episódios poderiam assumir inúmeros desfechos, variando desde a invenção de problemas à construção de maquetes; desde a apresentação em powerpoint à elaboração de vídeos, entre outros. A proposta despoletou um grande entusiasmo nos alunos face ao trabalho mais autónomo e criativo que a mesma sugeria.

O EPISÓDIO DOS “AEROGERADORES EÓLICOS”

O grupo A optou por um projecto relacionado com o tema da energia eólica e denominado de “Aerogeradores Eólicos”. Este visou sensibilizar e informar a turma sobre um tipo de energia alternativa e produzida a partir do vento.

O seu projecto englobou a elaboração de *flyers* com informações sobre a energia eólica, que foram sendo distribuídos pelos diferentes grupos de trabalho, a apresentação do seu projecto em powerpoint, que envolveu a continuação da história do Henrique e a concepção de 4 situações problemáticas para os grupos resolverem. Como produto final, e que complementava a informação dos *flyers*, conceberam uma maquete simulando os aerogeradores.

Deram início à actividade distribuindo *flyers* cujo teor dava informações precisas sobre a energia eólica e uma apresentação em powerpoint, no intuito da turma se inteirar sobre este assunto. De seguida, deram a conhecer o percurso da sua história que nos levou a um passeio por parques de energia eólica que relataram da seguinte forma:

Era fim-de-semana e Henrique e seus pais decidiram aproveitá-lo com uma visita a um parque de “Aerogeradores Eólicos”. Durante o passeio observou e fotografou alguns aerogeradores embora a sua atenção estivesse mais centrada nas ventoinhas dos aerogeradores. Decidiu cronometrar o tempo que uma ventoinha demorava a dar uma volta completa e concluiu que 5 segundos é o tempo correspondente a uma volta completa. A sua curiosidade despertava-se a cada momento que observava os aerogeradores. Resolveu ir à cabine de coordenação para falar com o segurança.

Travou conhecimento com este e colocou-lhe questões que esclarecessem as suas dúvidas. Este diálogo permitiu-lhe o esclarecimento das suas dúvidas e, ao mesmo tempo, a recolha de informações sobre os “Aerogeradores Eólicos”. Das informações mais relevantes, ficou-lhe na memória que num ano os aerogeradores são lavados todos os meses gastando 100 litros de água num mês e 50 litros de água no outro e assim sucessivamente. No ano seguinte são lavados, mês sim, mês não, sendo necessário a utilização de 200 litros. Estas lavagens efectuem-se de uma forma alternada de ano para ano.

Terminada a apresentação da história, foi proposta à turma, como tarefa de trabalho, a resolução de situações problemáticas.

A primeira situação consistia no seguinte:

1. *Se em 5 segundos a ventoinha dá 1 volta completa, quantas voltas dá a ventoinha em 1 hora e meia? Justifica a tua resposta. Podes fazê-lo utilizando desenhos, esquemas ou cálculos.*
2. *Descobre e investiga possíveis relações que se encontrem nesta situação problemática.*

Os temas matemáticos abordados relacionaram-se com “Números e Cálculos” e os tópicos envolveram regularidades e relações multiplicativas. Das situações propostas seleccionou-se uma delas pelos raciocínios apresentados. O relato dessa situação é feito no ponto seguinte.

DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO

Os diferentes grupos de trabalho deram início à tarefa com uma leitura atenta da proposta e discussão da mesma. O empenho e a autonomia na realização da actividade evidenciavam-se pela desenvoltura do trabalho, no dividir das tarefas e no delinear do plano de investigação. A tarefa não apelava a ensaios e experimentação com material manipulativo, tal como tinha sucedido nas tarefas das “Canas” e das “Latas”, mas envolvia a resolução de situações problemáticas, em que o conjecturar, argumentar, testar, validar e comunicar os resultados conduzia a uma actividade matemática rica.

A produção que se segue representa a estratégia de resolução do grupo D (Figura 16).

Este grupo de trabalho seleccionou a informação e organizou os dados numa tabela de forma a facilitar a sua estratégia de resolução. Inicialmente, calcularam o número de voltas equivalente a 1 minuto e, posteriormente, utilizando o raciocínio proporcional determinaram o número de voltas correspondente a 1 hora e meia. Para o efeito, converteram 1 hora e meia em minutos, o que lhes permitiu simplificar os cálculos para o total de voltas correspondentes.

Passada a fase da execução da tarefa, os grupos apresentaram as suas estratégias de resolução ao grupo turma.

O grupo C lançou-se na apresentação das suas estratégias:

C1: *Bem nós iniciámos o problema fazendo uma tabela.*

Desenham a tabela no quadro, tal como apresenta a Figura 17.

Plano de investigação

(A) Compreender o problema
 Quais são os dados do problema? O que se pretende saber?
 Sabendo que durante 5s a ventoinha dá 1 volta completa, quantas voltas dá a ventoinha em 1 hora e meia?

(B) Escolha de uma estratégia
 Vamos organizar os dados numa tabela.

Segundos	Voltas
5	1
10	2
15	3
20	4
25	5
30	6
35	7
40	8
45	9
50	10
55	11
60	12

(C) Aplicar uma estratégia
 Primeiro é necessário calcular quantas voltas a ventoinha dá ao fim de 1 minuto. Como um minuto corresponde a 60 segundos ficamos a saber que a ventoinha dá 12 voltas.
 Depois como queremos saber quantas voltas dá numa hora e meia temos que fazer uma proporção.

$$1 \text{ min} = 60 \text{ s} \rightarrow 12 \text{ voltas}$$

$$1 \text{ hora} = 60 \text{ min}$$

$$1 \text{ h e } 30 \text{ min} = 60 + 30 = 90 \text{ minutos}$$

$$1 \text{ min} - 12 \text{ voltas}$$

$$90 \text{ min} - x$$

$$x = 12 \times 90$$

$$x = 1080 \text{ voltas}$$

(D) Verificar a solução e dar a resposta
 Ao fim de 1 hora e meia a ventoinha dá 1080 voltas

Figura 16: Produções realizadas pelo grupo D.

Nº de Voltas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Segundos	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60

Figura 17: Organização dos dados em tabela pelo grupo C relativa à tarefa dos “Aerogeradores”.

C1: De um lado colocámos os segundos e do outro o número de voltas. Esta tabela foi preenchida de 5 segundos em 5 segundos até chegarmos aos 60 segundos, enquanto que o número de voltas ia de 1 volta até 12 voltas.

Professora: E por que motivo é que preencheram a tabela até aos 60 segundos e não até aos 72 segundos, por exemplo?

C1: Porque nós precisávamos de saber qual era o total de voltas! 1 minuto equivale a 60 segundos, por isso, para calcular esse valor tivemos que ir até aos 60 segundos. Iniciámos a partir dos 5 segundos, uma vez que o problema dizia que para dar uma volta completa demorava 5 segundos.

Professora: Ok, continua.

C1: Depois de sabermos o número de voltas dadas ao fim de um 1 minuto, fizemos $12 \times 60 = 720$ voltas e obtivemos o valor numa hora. Bem a seguir... ah, como o problema pedia 1 hora e meia tivemos que fazer a operação $720:2 = 360$ voltas e, por último... para saber o total de voltas em 1 hora e meia, $720 + 360 = 1080$ voltas.

Professora: *Mas, expliquem, porque calcularam o quociente entre 720 e 2?*

C1: *Fizemos $720:2 = 360$ para saber o número de voltas dadas em meia hora. Mas também podíamos ter feito de outra maneira.*

Professora: *Como? Esclareçam melhor o vosso raciocínio.*

C1: *Então... metade de uma 1 hora são 30 minutos, bastava multiplicar $12 \times 30 = 360$ voltas.*

Professora: *Estão esclarecidos, meninos?*

A turma: *Sim, professora!*

Aparentemente, a situação problemática enunciada não dava evidências de grande complexidade. O desembaraço na execução da tarefa pelos grupos de trabalho demonstrou compreensão do problema como também facilidade na sua execução. A primeira questão do problema envolvia conceitos numéricos e apelava ao raciocínio proporcional. Contudo, o que torna esta situação num problema aberto prende-se com a extensão que foi introduzida, resultando num processo investigativo. Acresce salientar que a invenção de problemas exige da parte dos alunos alguma capacidade de raciocínio, comunicação, a própria resolução de problemas e o conhecimento matemático, pois inventar situações problemáticas, por si só, não é suficiente. Exige um processo prévio de resolução, de delineamento de estratégias de resolução, de confronto de opiniões e validação de resultados, muito antes de serem implementados, condições que revelam por parte de quem os concebeu alguma autonomia e competência para o fazer. Os grupos de trabalho davam indícios de abertura na discussão e apresentação das ideias, autonomia, raciocínio e pensamento matemático na resolução destas tarefas, não havendo a preocupação da ausência de dados que dificultasse as suas investigações. Sabiam exactamente como utilizar o seu conhecimento matemático e que caminhos deveriam percorrer para chegarem às suas descoberta.

O diálogo prosseguiu:

Professora: *E... os outros grupos de trabalho fizeram de outra forma? Têm uma estratégia para apresentar diferente?*

D1: *Nós não fizemos tabela, utilizámos o desenho, mas... os cálculos foram dar o mesmo.*

A1: *Nós utilizámos tabela, professora, e deu-nos o mesmo.*

B1: *Bem, nós utilizámos tabela e esquema e o resultado deu o mesmo. Agora quanto à investigação descobrimos algumas relações através dos dados da tabela.*

Professora: *Querem então apresentar?*

B2: *Sim... podemos?*

Professora: *Claro que sim.*

UMA EXTENSÃO PARA OS “AEROGERADORES EÓLICOS”

O aluno do grupo B dirige-se ao quadro e apresenta a proposta do seu grupo. Elaboraram um esquema onde se distinguem os segundos e o número de voltas. A partir deste, pintaram os segundos pares e ímpares de cores diferentes e, de igual modo, sinalizaram o número de voltas pares para diferenciar do número de voltas ímpares, tal como se pode ver na Figura 17. Assinalaram os segundos ímpares como múltiplos de 5 e os pares como múltiplos de 2. Após esta explicação, o aluno B2 acrescentou:

B2: *Observámos a tabela e encontramos algumas relações. Depois, fizemos uma representação em desenho das relações que encontramos.*

O aluno desenha no quadro uma representação que correspondia à relação encontrada entre os segundos e o número de voltas e explica, tal como se vê na Figura 18:

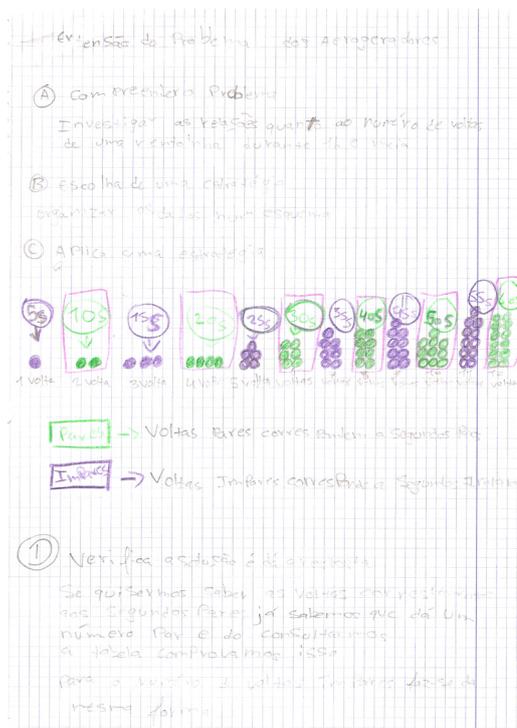


Figura 18: Produção do grupo B relativa à extensão do problema dos “Aerogeradores”.

B2: *Quando observámos a tabela verificámos que os segundos pares 10s, 20s, 30s, 40s, 50s e 60s eram múltiplos de 10 e o número de voltas que correspondia a estes segundos, também eram pares 2,4,6,8,10 e 12 que faziam parte dos múltiplos de 2. Outra relação que encontrámos foi a dos segundos ímpares. Os segundos, ímpares, que eram 5s,15s, 25s, 35s, 45s e 55s, e múltiplos de 5, também correspondiam a voltas ímpares 1,3,5,7,9 e 11.*

Posto isto, e após a discussão das descobertas conseguidas, procurava estimular o diálogo no sentido de os levar mais além, embora sem sucesso. De facto, as relações encontradas por este grupo B, não lhes permitiram chegar ao processo de generalização.

Procurei estimular os restantes grupos a apresentarem as suas descobertas, com o intuito de saber se estes tinham ficado somente no tipo de relações apresentadas pelo grupo B ou se teriam chegado ao processo de generalização. Durante este questionar fui interrompida pelo aluno D3 que muito prontamente se dirigiu ao quadro na expectativa de apresentar a descoberta do seu grupo.

D3: *Professora... nós conseguimos descobrir esses valores que a professora está a perguntar. A nossa investigação não ficou só pelos valores da tabela, conseguimos chegar mais longe.*

Professor: *E como fazem para determinar esses valores?*

Começa por desenhar um esquema no quadro, como se pode ver na Figura 19. Explica que inicialmente começaram por desenhar bolas que representavam o número de voltas e junto a estas escreveram os segundos correspondentes. Optaram por fazer dois esquemas, um para os números pares e outro para os números ímpares. Aperceberam-se que os segundos pares correspondiam a voltas pares e o mesmo acontecia para os ímpares, conclusões também obtidas pelo grupo anterior.

Encontram uma relação entre as voltas pares, referindo que estas seguem uma sequência que se pode traduzir pela expressão $2n$, o que lhes permite calcular as voltas pares. No caso das voltas ímpares é dada pela expressão $2n-1$.

Posto isto, dão continuidade à resolução da tarefa com a apresentação de uma expressão geral que lhes permitira a determinação de qualquer segundo ou volta, salientando:

D3: *Através da expressão $5n$.*

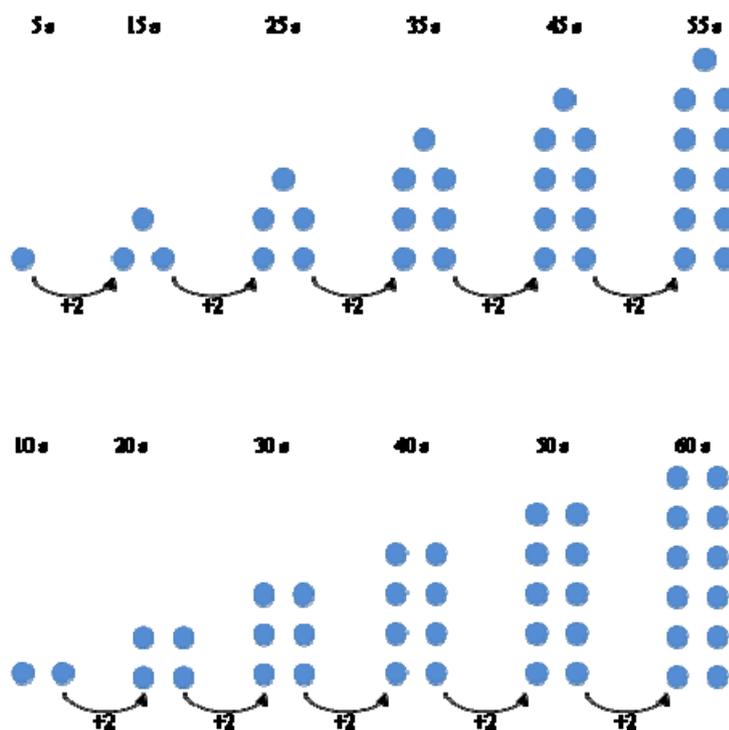


Figura 19: Produção do grupo D relativa à extensão do problema dos “Aerogeneradores”.

Professor: *E que expressão é essa?*

D3: *A expressão $5n$ corresponde: o número 5, o tempo que descreve numa volta e n representa o número voltas). Com esta expressão é possível determinar, ora os segundos, ora as voltas, depende do que queremos saber. Diga um valor e o que quer saber que nós calculamos.*

Professor: *Quero saber quantas voltas dá um aerogerador ao fim de 145 segundos.*

D3: *Ora no fim de 145 segundo dá $5n = 145$; $n = 145 : 5 = 29$ voltas.*

Professor: *E agora... quero que me digam. Se um aerogerador der 342 voltas, quantos segundos demora a dar essas voltas completas?*

D3: *Utilizando a expressão $5n$ o aerogerador demora $5n = 5 \times 342 = 1710$ segundos.*

Professora: *Ora muito bem, sim senhor. E vocês meninos entenderam o que o colega explicou? Têm dúvidas?*

A turma: *Sim entendemos... Não temos dúvidas, professora!*

C4: *Entendemos, professora, ah... é que nós estamos habituados a trabalhar com as expressões de sequências e já sabemos isso bem. Como se calcula e se faz.*

A apresentação e discussão dos resultados permitiu não só a partilha e a clarificação de ideias como ainda contribuiu para melhorar, adequar, refinar e desenvolver a compreensão.

Como aspecto relevante nesta análise, a formulação de conjecturas, as explicações e justificações tornaram a estratégia do grupo D bastante completa. Destaque-se que este grupo expôs o raciocínio, encontrando o esquema como forma de organizar a informação e conseguir analisá-la. Através das suas palavras conseguiram explicar à turma que as relações encontradas se poderiam traduzir numa expressão simples permitindo o cálculo de qualquer número de voltas ou segundos. Para tal, e ao tentar convencer os elementos da turma, utilizaram argumentos em que as suas ideias se interligavam de uma forma coerente.

ACTIVIDADE INVESTIGATIVA E EXPLORATÓRIA

É necessário dar a oportunidade aos alunos de *fazer* matemática com características idênticas à dos matemáticos, proporcionando-lhes trabalho com tarefas de natureza investigativa e exploratória, enquadradas num nível de maturidade adequado (Santos, Brocardo, Pires e Rosendo, 2002). O bom entendimento da Matemática não passa por uma visão do conhecimento matemático como um conjunto de factos e procedimentos, em que se trabalham formas, medidas e respectivas relações entre elas, mas aprende-se através da construção de sucessivas tentativas, baseadas na observação e na experimentação (Shoenfeld, 1992).

A experiência matemática que advém do trabalho investigativo proporciona um conjunto de processos com potencialidades significativas na aprendizagem da matemática, tais como: formular questões, conjecturas, testar, argumentar e validar.

A organização dos dados através de uma tabela denotou uma atitude de estruturação da tarefa, em que os alunos revelaram o objectivo claro da compreensão do problema e exactamente o que necessitavam de investigar.

Observar os dados, atentamente, foi um passo importante que aliado à capacidade de raciocínio, os levou a investigações, relações e descobertas. As actividades de investigação são importantes porque estimulam os alunos a tornarem-se mais activos, autónomos, persistentes e participativos, favorecendo aprendizagens significativas, permitindo o desenvolvimento de diferentes níveis de competências, para além de reconhecerem e estabelecerem conexões e regularidades ou padrões.

CONEXÕES MATEMÁTICAS

Amorim e Matos (1990), referidos por Jesus (2004), “atestam que as investigações matemáticas a realizar pelos alunos devem partir, inicialmente, de propostas abertas com linhas orientadoras e exploratórias mantendo, contudo, uma margem de liberdade que possibilite aos alunos a experiência da descoberta e da realização do conhecimento matemático, o qual é depois comunicado e discutido pela turma” (p. 18).

A extensão do problema dos “Aerogeradores Eólicos”, por se apresentar como um problema aberto, criou uma oportunidade de os alunos ligarem os seus conhecimentos numéricos à exploração de regularidades. Foi através da comparação dos segundos e número de voltas que conseguiram estabelecer conexões entre números pares e ímpares de segundos e respectivo número de voltas. Para além disto, as descobertas que levaram ao processo de generalização foram decisivas para o entendimento do problema. Mais uma vez, conseguiram estabelecer a ligação do seu conhecimento matemático à situação real, em que através das conexões matemáticas os levou à descoberta da expressão geradora. Particularizaram a situação concreta e justificaram a relação entre os segundos que demora a descrever essas voltas.

REFLEXÕES FINAIS

Proporcionar ambientes de aprendizagem ricos, dando a possibilidade de os alunos resolverem tarefas desafiadoras que apelem à reflexão e ao questionamento de situações do quotidiano, em que a formulação/apreciação de conjecturas e a discussão de resultados estejam presentes, contribui para o desenvolvimento do pensamento matemático e da capacidade de comunicar e argumentar matematicamente. A ênfase colocada nas capacidades transversais, nomeadamente, a resolução de problemas, a comunicação e o raciocínio matemático, são aspectos fortes do NPMEB.

É de referir, que estas três capacidades ligadas à aprendizagem matemática se encontram, ainda, intimamente associadas à promoção da compreensão em matemática.

Apesar da especificidade atribuída a cada uma, estas articulam-se e conjugam-se, de modo que a actuação de uma delas estimula o desenvolvimento das restantes e potencia a competência matemática.

Quanto à tarefa anteriormente descrita não restam dúvidas que une a resolução de problemas ao raciocínio matemático e que a comunicação matemática se evidenciou na apresentação e explicação dos resultados.

Na opinião de Francisco & Maher (2005), em estudos realizados sobre como promover o raciocínio matemático na resolução de problemas, a matemática é compreendida como um sistema de relações complexas e associada a um conjunto de conceitos matemáticos. Por sua vez, o raciocínio matemático é o resultado da capacidade de discernir e articular essas relações.

Existem muitos conceitos básicos que podem estar presentes em complexas formas de raciocínio. Seja qual o nível de conhecimentos em que os alunos se encontram, o que importa é o facto de estes serem capazes de se desembaraçar com estratégias criativas e interessantes e formas de pensar sobre os problemas.

Independentemente do grau de dificuldade da tarefa, o que está em causa é reconhecer o poder dos alunos na construção do seu próprio conhecimento, possibilitando-lhes condições em que ocorra uma verdadeira actividade matemática. A valorização das suas ideias matemáticas, das representações, das justificações e decisões são partes integrantes da aprendizagem e do raciocínio matemático no processo da resolução de problemas.

Os mesmos autores, anteriormente referenciados destacam que a importância dada às explicações dos alunos e aos seus próprios raciocínios, permite-lhes desenvolver um conhecimento pessoal, desencadeando um aumento na confiança e empenho. Por outro lado, ao sentirem um domínio da actividade matemática adquirem formas duradouras de entendimento matemático. Atribuem relevância à complexidade das tarefas como um aspecto que sobressai na actividade matemática, em detrimento de tarefas rotineiras e consideram estas últimas inibidoras do raciocínio matemático e da construção de conhecimento durável.

A capacidade de generalização foi um outro aspecto evidenciado, uma vez que os alunos, ao procurarem justificar as suas conclusões através de exemplos particulares, evoluíram para uma justificação mais abrangente, generalizando.

O trabalho de projecto emerge, assim, como uma metodologia fundamental para o desenvolvimento destas tarefas, pois o seu carácter prolongado e faseado, a intencionalidade e autenticidade, entre outras características, estimulam os alunos na concepção de projectos, para além de sentirem significado nas suas aprendizagens, entenderem melhor a Matemática e

encontrarem ligações desta com a realidade. São aprendizagens que fazem parte de experiências por eles vividas. O trabalhar por projectos permite o desenvolvimento de competências que surgem e se adquirem sem quaisquer entraves.

5. ANÁLISE DOS INQUÉRITOS, ENTREVISTAS E RELATÓRIOS

O propósito do presente capítulo consiste em identificar os aspectos importantes relacionados com as opiniões dos alunos, que surgiram no decorrer desta investigação. Como elementos de recolha são de realçar: os questionários aplicados, um na fase inicial e outro na fase final, embora este último destinado a um conjunto de alunos seleccionados de forma aleatória; as entrevistas, enquadradas num tipo de “entrevista informal”, realizadas nos diferentes grupos de trabalho durante o desenvolvimento dos projectos; os relatórios, que expressavam a opinião consensual de cada grupo, relativamente aos objectivos, aos procedimentos e à importância da experimentação nas actividades de investigação, e que envolveram a execução dos projectos

A selecção dos dados e respectiva análise possibilitou a categorização por temas, onde se destacam opiniões individuais dos alunos ou do respectivo grupo de trabalho.

Os quadros-resumos que se seguem apontam excertos dos relatórios, dos questionários e das entrevistas, dando uma visão do impacto e importância deste projecto nas suas aprendizagens, do ponto de vista dos participantes. Assim são de destacar os quadros resumos relativos à *Reacção dos alunos quanto ao trabalho desenvolvido* (Quadro 6, Quadro 7 e Quadro 8) categorizando as suas opiniões quanto ao gosto/interesse, dificuldades sentidas e visão da Matemática. Relativamente ao quadro resumo *Conhecimento Matemático e a importância do Trabalho de Projecto* (Quadro 9) pretendeu-se recolher as opiniões dos alunos quanto à importância que o Trabalho de Projecto exerceu nas suas aprendizagens e compreensão da Matemática. O tipo de tarefas implementadas foi apontado pelos alunos como importantes no que concerne ao trabalho de grupo, aprendizagens e autonomia e cooperação, o que permitiu a categorização destes três parâmetros e enquadrados na *Aprendizagem da Metodologia do Trabalho de Projecto* referenciado nos Quadro 10, Quadro 11 e Quadro 12). A recolha das opiniões dos grupos de trabalho quanto à execução dos projectos no âmbito dos objectivos, procedimentos e importância da experimentação permitiu a organização das respostas segundo esta ordem, tal como se encontra no Quadro 13.

Com base nos quadros seguintes (Quadro 6, Quadro 7 e Quadro 8), pode-se concluir que os alunos consideraram o trabalho desenvolvido como algo interessante e aliciante e atribuem às actividades de investigação a importância de lhes desenvolver capacidades para a aplicação da Matemática em diversas situações reais. Contudo, apontam algumas dificuldades quanto à resolução de problemas do quotidiano e ao tipo de tarefas implementadas, mas a contínua aposta na sua realização permitiu ultrapassar algumas das barreiras inicialmente sentidas.

Alteraram a visão que tinham sobre a matemática e entenderam-na como uma disciplina em que necessitam de articular os conhecimentos que possuem, ligando-os a novas situações a que têm de dar resposta. Descobrem a conexão entre a matemática e a realidade e passam a procurar nas diversas tarefas desenvolvidas essa relação, desenvolvendo a persistência e o

Reacção dos alunos quanto ao trabalho desenvolvido
Gosto/Interesse
<ul style="list-style-type: none"> ◆ Aluno A4: <i>Gostei de tudo ...</i> ◆ Aluno B5: <i>(...) a professora propõe muitas actividades magníficas sejam elas quais forem.</i> ◆ Aluno C2: <i>Interessei-me mais sobre a disciplina... aprendi a gostar da matemática graças às actividades que a professora propôs.</i> ◆ Aluno D1: <i>Não gostei dos grupos de trabalho.</i> ◆ Aluno B3: <i>As propostas de trabalho foram incentivadoras... e a apresentação dos projectos foram sempre diferentes e de forma aliciante e permitiu-nos elaborar projectos e sermos nós a mostrar o nosso trabalho.</i>

Quadro 6: Reacções dos alunos quanto ao trabalho desenvolvido (Gosto/Interesse).

Reacções dos alunos quanto ao trabalho desenvolvido
Dificuldades Sentidas
<ul style="list-style-type: none"> ◆ Aluno A4: <i>Senti de início algumas dificuldades porque não estava habituado a fazer este tipo de trabalho com tarefas tão longas.</i> ◆ Aluno B5: <i>(...) senti algumas dificuldades na resolução de problemas, mas agora tenho menos do que tinha antes.</i> ◆ Aluno C2: <i>Apesar de ter dificuldades na matemática ... sinto que percebo melhor as tarefas de investigação.</i> ◆ Aluno D1: <i>Continuo a ter dificuldades na resolução de problemas.</i> ◆ Aluno B3: <i>Senti algumas dificuldades a trabalhar com o Excel ...</i>

Quadro 7: Reacções dos alunos quanto ao trabalho desenvolvido (Dificuldades Sentidas).

Reacções dos alunos quanto ao trabalho desenvolvido	
Visão da Matemática	
◆	Aluno A4: (...) <i>permitiu-me ver que esta está presente em toda a parte inclusive nas coisas mais simples do dia a dia.</i>
◆	Aluno B5: (...) <i>passsei a ver a matemática com outros olhos: necessária e presente em todo o lado.</i>
◆	Aluno C2: <i>Aqui não se dá só matéria, relaciona-se a matemática com o quotidiano.</i>
◆	Aluno D1: <i>As tarefas são interessantes e aprende-se matemática de uma forma diferente, temos que obrigar o nosso cérebro a pensar.</i>
◆	Aluno B3: (...) <i>mas passsei a ver a presença da matemática na realidade e a sua importância no quotidiano.</i>

Quadro 8: Reacções dos alunos quanto ao trabalho desenvolvido (Visão da Matemática).

espírito investigativo. Pelos seus depoimentos, depreende-se que a determinação dos alunos os ajudou a vencer algumas das dificuldades manifestadas. Compreendem que a matemática se encontra sempre presente na realidade e que esta ligação lhes permite um melhor entendimento da própria matemática. Consideram que as tarefas de investigação proporcionadas são de alguma exigência dado a sua natureza, no entanto, vêem-nas como um recurso para o desenvolvimento das suas capacidades.

A partir da leitura dos quadros que se seguem (Quadro 9, Quadro 10, Quadro 11 e Quadro 12), pode-se concluir que o facto deste tipo de metodologia apelar ao trabalho de grupo deu a oportunidade aos alunos de se sentirem capazes de manifestarem as suas dificuldades e de apresentar as suas estratégias no seio do grupo.

Colaborando entre si, apreendem e consolidam conhecimentos e reconhecem a importância que esta partilha tem no seu processo de aprendizagem. O trabalhar em grupo possibilita aspectos bastante positivos, seja na clarificação ou na consolidação de conceitos, motiva os alunos e torna-os mais comunicativos e participativos. Sentem-se confiantes e vêem nos seus colegas alguém que se encontra disponível para responder quando sentem dificuldades. A interacção estabelecida permite-lhes aceitar a posição de cada elemento do grupo e integrar nas suas conjecturas os processos de pensar de cada um. Na discussão entre os elementos do grupo, a aceitação das várias opiniões e ideias elevam a auto-estima, e pela diversidade dos conhecimentos de cada elemento do grupo também se constrói o conhecimento matemático individual. Do ponto de vista das aprendizagens, reconhecem o Trabalho de

O conhecimento matemático e a importância do Trabalho de Projecto
Aprendizagens/Compreensão
<ul style="list-style-type: none"> ◆ Aluno A4: <i>Com o incentivo da professora e esforço da minha parte consegui entender melhor a matemática;</i> ◆ Aluno B5: <i>As actividades proporcionadas permitiram-me entender a matemática de outra forma e começar a pensar o que nelas se encontra escondido, que não seja apenas resolver contas de somar ou de subtrair.</i> ◆ Aluno C2: <i>Aprender matemática de uma outra maneira diferente... Com actividades de investigação através da elaboração de projectos.</i> ◆ Aluno D1: <i>Entendi que a matemática está escondida em qualquer situação e que as actividades de investigação ajudam a perceber melhor a matemática apesar de eu levar muito tempo para descobrir. Agora, percebo que tenho que estar mais atento para encontrar a matemática nas coisas da realidade.</i> ◆ Aluno B3: <i>Entendo melhor a matemática agora, estas tarefas de investigação ajudaram-me a desenvolver o meu raciocínio e agora não desisto logo à primeira.</i>

Quadro 9: O conhecimento matemático e a importância do trabalho de projecto (Aprendizagens/Compreensão).

Projecto como fundamental para um melhor entendimento da Matemática, manifestando um sentimento de confiança na resolução de situações problemáticas. Apontam os benefícios desta metodologia de trabalho quanto ao facto de lhes ter ensinado a elaborar um projecto e a seguir as fases e orientações para a sua concretização. Apesar deste trabalho apelar a um processo longo e faseado, consideram ser capazes de dar início a projectos desta envergadura. No entanto, estão cientes de que a ajuda dos colegas é indispensável quer na colaboração quer na execução. A criatividade é mencionada como um aspecto positivo para a elaboração destes projectos, valorizando as apresentações diversificadas como produto final.

Pela análise dos excertos dos relatórios (Quadro 13), constata-se que, de uma maneira geral, os alunos vêem vantagens em trabalhar por projectos. Reconhecem o facto deste tipo de actividades apelar à experimentação com materiais o que permite um maior entendimento daquilo que investigam.

Ao opinarem sobre as actividades de investigação, identificam-nas como tarefas que não exigem a execução de cálculos matemáticos directos mas que os impelem à investigação e a enveredar por caminhos inesperados. Têm a percepção de que ligar a Matemática à realidade lhes desperta maior curiosidade e desenvolvem o seu gosto pela aprendizagem.

Aprendizagem da metodologia do Trabalho de Projecto
Trabalho de grupo
<ul style="list-style-type: none"> ◆ Aluno A4: (...) <i>Gostei de comparar as coisas com os meus colegas e discutirmos as nossas estratégias.</i> ◆ Aluno B5: (...) <i>Aprendo mais a trabalhar em grupo pois o que não entendemos, os nossos colegas explicam-nos e nós acabamos por perceber. Ajudamo-nos uns aos outros.</i> ◆ Aluno C2: <i>Quando tenho dúvidas aprendo com os meus colegas de grupo. Ao trabalharmos em grupo podemos discutir as nossas opiniões e isso esclarece as nossas dúvidas.</i> ◆ Aluno D1: <i>Gosto mais de trabalhar a pares... quando trabalhamos em grupo somos muitos e, por vezes, nem todos têm a mesma opinião.</i> ◆ Aluno B3: (...) <i>Aprendemos todos e todos se ajudam. Partilhamos opiniões e temos ideias interessantes que depois de discutidas chegamos a um consenso. É bom trabalhar em conjunto, pois também convivemos uns com os outros e aprendemos a respeitar as opiniões de cada um.</i>

Quadro 10: Aprendizagem da metodologia do trabalho de projecto (Trabalho de grupo).

Aprendizagem da metodologia do Trabalho de Projecto
Aprendizagens
<ul style="list-style-type: none"> ◆ Aluno A4: (...) <i>mas sei todos os passos que teria que seguir e esforçaria bastante: elaborava o meu plano de investigação com todas as orientações que a professora nos ensinou e depois apresentaria.</i> ◆ Aluno B5: <i>Sim. Começaria por elaborar um plano de investigação do projecto depois faria as pesquisas necessárias e trataria de apresentá-lo com algo criativo.</i> ◆ Aluno C2: <i>Aprendemos a elaborar um projecto e a entender melhor a matemática e a descobrir como resolver situações do quotidiano.</i> ◆ Aluno D1: (...) <i>fizemos projectos com apresentações diversificadas e utilizámos diferentes materiais.</i> ◆ Aluno B3: <i>O trabalho de projecto permitiu-nos aprendizagens diferentes, como termos mais confiança em nós e entendermos melhor a matemática.</i>

Quadro 11: Aprendizagem da metodologia do trabalho de projecto (Aprendizagens).

Aprendizagem da metodologia do Trabalho de Projecto
Autonomia/Cooperação
<ul style="list-style-type: none"> ◆ Aluno A4: <i>Acho que totalmente sozinha, não, precisaria da ajuda de mais alguém...</i> ◆ Aluno B5: <i>Não acho que seja difícil fazer sozinha, talvez com ajuda executaria mais rapidamente. Dependeria do tipo de projecto, se fosse um projecto grande sim, mas se fosse um pequeno conseguiria fazê-lo sem problemas.</i> ◆ Aluno C2: <i>As tarefas são grandes... levam tempo a fazer, e, além disso, precisamos da ajuda dos colegas. A trabalhar em grupo é mais fácil do que fazer sozinho, mas acho que conseguiria desenvolver um projecto. Levaria era mais tempo.</i> ◆ Aluno D1: <i>Não era capaz, precisava de ajuda.</i> ◆ Aluno B3: <i>Penso que conseguiria desenvolver um projecto seguindo todas as fases que aprendemos. Mas acho que seria mais fácil se tivéssemos ajuda.</i>

Quadro 12: Aprendizagem da metodologia do trabalho de projecto (Autonomia/Cooperação).

Pela descoberta e pondo em acção o espírito investigativo, descobrem uma Matemática diferente que os obriga a pensar, a investigar, a discutir e a argumentar as escolhas traçadas e vêm significado na Matemática quando os conhecimentos que possuem se mostram importantes e aplicáveis a determinadas situações. Desenvolvem a confiança e são persistentes

Excertos dos relatórios no âmbito dos projectos desenvolvidos			
	Objectivos	Procedimentos	A importância da experimentação nas tarefas de investigação
Grupo A	<ul style="list-style-type: none"> ◆ <i>Aprendemos a trabalhar com projectos.</i> ◆ <i>Passámos a distribuir tarefas e a trabalhar em grupo.</i> ◆ <i>Ajudou-nos a trabalhar com a matemática de uma forma diferente.</i> ◆ <i>Ajudou-nos a sermos desenrascados quando nos deparávamos com algo que tínhamos que investigar.</i> 	<ul style="list-style-type: none"> ◆ <i>Sabíamos o que era trabalhar com actividades de investigação, mas trabalhar com projectos foi uma descoberta.</i> ◆ <i>Tínhamos que pensar muito sobre as actividades propostas e relacionar a matemática com o quotidiano.</i> ◆ <i>O plano de investigação ajudava-nos a orientar-nos na nossa forma de pensar.</i> 	<ul style="list-style-type: none"> ◆ <i>Usámos materiais muito diferentes desde: canas, a latas de refrigerantes, programas de excel, powerpoint.</i> ◆ <i>O experimentarmos com coisas reais ajudou-nos a entender melhor a matemática.</i>
Grupo B	<ul style="list-style-type: none"> ◆ <i>Entender que as actividades de investigação nos levam a caminhos nunca antes pensados.</i> ◆ <i>Usámos a matemática de uma forma diferente, pela descoberta.</i> ◆ <i>Aprendemos a saber fazer um projecto.</i> ◆ <i>Saber investigar.</i> ◆ <i>Dedicar-nos ao que estamos a fazer e não fazer só por fazer. Ter vontade em aprender e descobrir.</i> 	<ul style="list-style-type: none"> ◆ <i>As actividades eram muito aliciantes e por querermos descobrir o que nelas se encontrava escondido, obrigava-nos a não desistir e a insistir.</i> ◆ <i>Quando as actividades permitiam investigar procurávamos seguir pistas como: será que existem regularidades, sequências, temos que escrever uma expressão geradora, teremos que aplicar a matéria que já conhecemos. Era pensando desta forma que nos guiava sempre a algum caminho e era o da descoberta.</i> 	<ul style="list-style-type: none"> ◆ <i>Para resolvermos as actividades passávamos sempre por uma experimentação, ou seja, nestes trabalhos ensaiávamos com materiais e objectos que representassem o que na realidade se passava. A experimentação de materiais foi muito rica. Usámos latas, palhinhas, canas, computadores.</i>
Grupo C	<ul style="list-style-type: none"> ◆ <i>Precisamos ter um bom raciocínio, mas acima de tudo espírito de investigador. O igual a um detective que investiga, e, por vezes, não chega a pista nenhuma, mas continua a insistir até descobrir.</i> ◆ <i>Saber lidar com a matemática e aplicá-la em situações diferentes.</i> 	<ul style="list-style-type: none"> ◆ <i>Tínhamos tarefas definidas. As actividades de investigação permitiam-nos ir por um caminho de descoberta. Então, no nosso grupo haviam colegas que mais facilmente chegavam aos cálculos, às regularidades, às sequências e outros que conseguiam relacionar a matemática com o quotidiano. E foi giro, porque uns ensinavam aos outros quais os processos que utilizavam para as descobertas e aprendemos a ter mais atenção em certos pormenores. Por fim, já fazíamos apostas de quem conseguia chegar mais depressa às descobertas.</i> 	<ul style="list-style-type: none"> ◆ <i>Foi importante trabalharmos com materiais e experimentarmos, ensaiarmos. Ao mexermos neste materiais e ensaiarmos as situações da realidade pudemos entender melhor o que era pedido nas tarefas de investigação e compreendê-las.</i>
Grupo D	<ul style="list-style-type: none"> ◆ <i>Saber usar os conhecimentos que temos e aplicá-los a novas situações.</i> ◆ <i>Entender que na matemática não se resolvem só contas, fazem-se projectos em que esta é precisa e se utiliza, mesmo que não seja evidente aos nossos olhos, mas ela está lá.</i> ◆ <i>Saber questionar a realidade e descobrir que nesta a matemática existe sempre.</i> 	<ul style="list-style-type: none"> ◆ <i>Aprendemos a trabalhar com actividades maiores que levavam algum tempo a investigar. Por vezes, começávamos logo com uma investigação e experimentávamos várias hipóteses até chegarmos a um resultado, outras vezes, com problemas do quotidiano que também nos levavam à investigação e à descoberta.</i> ◆ <i>Quando começávamos a investigar descobríamos que naqueles problemas a matemática estava sempre presente mas escondida. Isso levava-nos a pensar, discutir, investigar até descobrirmos o que pretendíamos. E também a provar que aquilo que descobríamos estava certo ou errado.</i> 	<ul style="list-style-type: none"> ◆ <i>Os ensaios e a experimentação foram importantes para percebermos a realidade pois eles ajudaram-nos a compreender o que se pretendia. E por tentativas e ensaios lá conseguimos descobrir.</i>

Quadro 13: Excertos dos relatórios no âmbito dos projectos desenvolvidos.

nas investigações que realizam, executam-nas com sentido de responsabilidade e aprendem a utilizar o que sabem em contextos diversificados, relacionando a Matemática com o quotidiano.

Durante a execução das actividades os alunos foram entrevistados, seguindo um tipo de “entrevista natural” sem que existisse uma pré-estruturação de questões a aplicar aos entrevistados. Sendo interrogados quanto ao tipo de actividades desenvolvidas, o que mais gostaram e o que aprenderam, alguns alunos responderam:

- ◆ *Gostámos muita da actividade das “Latas” pois era um actividade que não tinha dados alguns, e, isso, obrigou-nos pensar, a arranjar um processo de lá chegarmos que nos levou a investigar e a descobrir o que precisávamos. A partir daí, sempre que tínhamos uma nova actividade já pensávamos de outra forma, tudo era mais fácil (Aluno A2).*
- ◆ *Percebemos que a matemática está tão presente nas diversas tarefas, descobrimos relações, pensámos e trabalhamos muito para descobrir muitas coisas a seu respeito. As tarefas das “Canas” e das “Latas” foram importantes para vermos isso mesmo e gostei muito dessas duas. É uma forma diferente de trabalhar a matemática, mas não estamos a brincar, porque ela obriga-nos a raciocinar e muito. E não devemos desistir porque existe sempre um caminho que nos leva à descoberta de qualquer coisa (Aluno C4).*
- ◆ *A actividade que mais gostámos foi a das “Latas” e dos “Moinhos”, a primeira porque foi uma actividade que não tinha dados e tivemos que descobrir um caminho para resolver a tarefa de investigação e que nos obrigou a pensar muito. A gente ao fazer as actividades vamos aprendendo e por isso quando a professora nos pediu para fazermos um projecto já se tornou mais fácil. Como tínhamos compreendido o que era trabalhar com projectos e actividades de investigação com a tarefa dos “Moinhos” foi fácil realizá-la porque a nossa mente estava mais atenta a este tipo de actividades. As outras tarefas deram-nos confiança para trabalhar em outras que a professora nos propusesse (Aluno D3).*
- ◆ *Gostei de todas, aprendi muita coisa que não sabia, como olhar as tarefas e raciocinar sobre o que elas nos querem dizer e aquilo que podemos descobrir. Agora quando*

temos uma tarefa de investigação pensamos.... Temos que definir um percurso de investigação, testá-lo e comprová-lo. Não estamos preocupados em fazer logo contas... mas queremos descobrir o que está ali escondido... Estas tarefas são mais longas e exigem de nós uma forma de pensar diferente do que resolver exercícios e isso não têm tanto interesse como estas tarefas. Gostei de fazer um projecto, de pesquisar, investigar e apresentar à turma as nossas descobertas (Aluno B5).

- ◆ *Gostei da tarefa da “Energia Eólica” porque consegui descobrir as regularidades e é uma das coisas que já consigo ver como mais facilidade e como lá chegar. Agora quando tenho uma actividade de investigação preocupo-me em compreender o que ela quer transmitir, o que existe lá e qual o percurso que tenho que seguir. Depois é testá-lo para ver o que vai dar. É uma forma diferente de aprender porque nós assim também estamos a aprender matemática, estamos a raciocinar e a usar os conhecimentos que possuímos (Aluno C2).*

As tarefas mais apelativas para os alunos foram as “Canas” e as “Latas”, embora a segunda seja descrita como uma proposta de trabalho pouco dirigida e de dados insuficientes para uma resolução imediata.

Assim, sobressaem as dificuldades iniciais como um aspecto positivo que os conduziu a compreensão do que é resolver situações problemáticas do quotidiano, em que a exigência de pensar e de raciocinar por um processo diferente se faz sentir, e o questionamento sobre a Matemática e a ligação desta à realidade, emerge.

Há um reconhecimento de que estas actividades foram decisivas para o ganhar confiança na resolução das tarefas seguintes, na medida em que os alunos começaram a ter mais presentes noções como: delinear um plano de investigação, investigar, escolher uma estratégia, que depois procuram testar, comprovar, discutir e argumentar.

Parecem estar cientes de que houve uma evolução gradual ao longo da execução das tarefas e, pelas justificações apresentadas, constata-se que existe uma preocupação nítida em compreender o que determinada tarefa quer transmitir quando tentam encontrar o caminho a seguir. Vêm nestas tarefas uma forma diferente de *aprender* Matemática e sentem que os conhecimentos que possuem são úteis e necessários para as suas investigações. Ganham confiança e revelam-se seguros para darem continuidade a este tipo de trabalho.

6. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Definiram-se caminhos, percorreram-se trilhos, analisaram-se situações e no fim desta estrada de investigação é chegado o momento em que se torna possível apresentar as conclusões. Para as questões de investigação emergem respostas fundamentadas, identificam-se as implicações e surgem recomendações para eventuais investigações futuras.

Recordarei o propósito deste estudo e os procedimentos adoptados de modo a clarificar as conclusões que pretendo evidenciar, fazendo uma breve síntese e descrição do mesmo.

6.1 (RE)ENQUADRAR O PERCURSO E COMPREENDÊ-LO

Ao apoiar-me na minha experiência pedagógica, parti da convicção de que o trabalhar por projectos relacionados com o quotidiano assentaria em diversas tarefas matemáticas e permitiria o desenvolvimento da competência matemática. Quis entender como esta metodologia de trabalho pode desempenhar um papel importante nas aprendizagens dos alunos, na relação com os outros e como pode alterar a visão que detêm sobre a Matemática.

Este propósito deu lugar à formulação das seguintes questões que contextualizam e operacionalizam este estudo:

1. *De que forma os alunos reagem a situações problemáticas da realidade no âmbito de um trabalho de projecto?*
2. *Como é que a pedagogia de trabalho de projecto se reflecte nas aprendizagens dos alunos, em particular, no que respeita aos processos e artefactos (matemáticos e não matemáticos) envolvidos?*

Os objectivos enunciados que serviram de base a este estudo levaram-me a optar por uma metodologia qualitativa de carácter interpretativo, mais especificamente através de uma “experiência de ensino” (*design experiment*), que implica uma investigação na própria prática.

A investigação na própria prática assentou em duas situações concretas: a primeira situação relacionou-se com o facto de ser professora de uma única turma em que leccionava a área curricular não disciplinar de Área de Projecto, daí que a escolha recaísse sobre estes participantes. Quanto à segunda, justificou-se pela prática frequente de metodologias activas de trabalho, nomeadamente um ensino exploratório na aula de Matemática, com o qual os intervenientes já se encontravam familiarizados. Perspectivando-se as intenções deste estudo, procedeu-se à recolha de dados que assentou na observação directa e participante, com questionários e entrevistas. As aulas foram filmadas e visionadas dando lugar à respectiva transcrição, incluindo-se também os relatórios escritos pelos grupos sobre o desenvolvimento das actividades e o diário de bordo.

Em especial, focou-se a atenção na metodologia do Trabalho de Projecto e na forma como os alunos exploravam tarefas de investigação, a partir de situações do seu quotidiano, como trabalhavam a Matemática através do desenvolvimento de projectos e que influências isso tinha nas suas aprendizagens.

O quadro teórico assentou em dois pilares fundamentais: o currículo e a metodologia do Trabalho de Projecto.

No que diz respeito ao currículo, e segundo alguns autores, é sabido que este implica uma forma de desenvolver o processo de ensino-aprendizagem, tendo em conta pressupostos e finalidades que são evidenciados em determinados documentos oficiais e não apenas o cumprimento de um programa ou muito menos o seguimento de um manual escolar. Assim, deve-se seguir um *currículo prescrito*, ditado pelo sistema, e não um *currículo apresentado* como resultado das orientações de um determinado manual escolar. Por sua vez, o *currículo prescrito* envolve várias acções, nomeadamente a interpretação que o professor faz (*currículo moldado*), a forma como o lecciona (*currículo em acção*) e como o avalia (*currículo avaliado*); de notar que esta avaliação deve ser reguladora das práticas e não penalizadora.

Por outro lado, convém salientar que o currículo também se pode transformar e enriquecer, ou até mesmo desvirtuar-se, podendo assim sofrer várias alterações, tendo em conta os diferentes contextos onde é desenvolvido face às práticas pedagógicas que são implementadas.

Neste sentido, o papel do professor torna-se fundamental na gestão que faz do currículo. Se por um lado, pode limitar-se a seguir orientações curriculares e os manuais escolares (*imitação-manutenção*), por outro, também poderá ter em conta um conhecimento da realidade envolvente, estabelecendo um papel conciliador (*nível de mediação*). No entanto, este papel

pode ser mais eficaz se o professor também adoptar uma postura de responsabilidade, em que não só se limita a detectar os problemas como também actua através da formulação de hipóteses de trabalho, teste reformulação e regulação das suas práticas (*criador-gerador*). Hoje em dia, verifica-se que o papel do professor acaba por envolver uma posição mais próxima da *mediação* e do *criador-gerador* em detrimento do papel de *imitação*, eventualmente também como fruto de um questionamento à problemática do insucesso educativo. Deste modo, o professor tem que desempenhar um papel fundamental na implementação do currículo, optando por boas práticas de inovação curricular, mais apelativas e que despertem motivação e interesse por parte dos alunos, conduzindo, assim, a aprendizagens mais consistentes.

O trabalho de projecto, como ponto de referência central deste estudo, dado o tipo de ensino exploratório que promove, pode representar uma dinâmica de inovação e modernização de todo o currículo, em oposição ao ensino tradicional. Além disso, apresenta outras características fundamentais, das quais se destacam o facto de ser uma *actividade intencional* que implica alguma *responsabilidade e autonomia* por parte dos alunos, *a autenticidade, a complexidade* e as actividades de *resolução de problemas*, além de assumir um *carácter faseado e prolongado*. Todo este conjunto de características implica uma tomada de decisões e escolhas a seguir que têm de obedecer a uma determinada *negociação pedagógica*. Esta metodologia de trabalho contraria o facto de que aprender seja apenas um acto de memorizar e de que ensinar consista unicamente no repassar de conteúdos prontos, possibilitando uma visão do processo de ensino aprendizagem com significado. A partir da escolha de um tema ligado à realidade, e trabalhando em grupo, os alunos passam por diferentes experiências de aprendizagem, de maneira a que a teoria possa decorrer da prática com o estabelecimento de inúmeras conexões, possibilitando a construção de artefactos e contribuindo para o desenvolvimento de aprendizagens consideráveis. Mais ainda, pelo facto de poder desencadear a realização de actividades de investigação, pode ser primordial no desenvolvimento do pensamento ou raciocínio matemático, visto os alunos poderem “trabalhar a matemática”, explorando situações abertas em que se interligam capacidades transversais, se procuram regularidades e padrões, se formulam e testam conjecturas, se argumenta e comunica.

É de notar que aqui as situações da vida real são consideradas contextos de aprendizagem e não sugestões de aprendizagem.

Esta pedagogia de ensino, em que sobressaem determinadas características – sendo de destacar o desenvolvimento dos projectos e o trabalho em grupo – para além de se focar em aspectos da realidade e envolver inúmeras capacidades matemáticas, desperta o interesse dos

alunos, permitindo-lhes uma maior desenvoltura, entusiasmo e empenho, conducentes a aprendizagens mais genuínas e eficazes.

As conclusões que aqui apresento, como resultado da análise dos dados recolhidos, procuram ir ao encontro dos objectivos centrais desta investigação, e, paralelamente, dar resposta às questões que nortearam o estudo.

As conclusões estão organizadas em três temas:

- (i) *A Matemática no re(descobrir) da realidade: o Trabalho de Projecto como alicerce na aprendizagem;*
- (ii) *Contextos de aprendizagem – um catalisador das capacidades transversais;*
- (iii) *O Trabalho de Projecto como potenciador da competência matemática.*

6.2 A MATEMÁTICA NO (RE)DESCOBRIR DA REALIDADE: O TRABALHO DE PROJECTO COMO ALICERCE NA APRENDIZAGEM

A presença da Matemática na realidade é para os nossos alunos algo inexistente; compreenderem que os factos reais se justificam através de muitos conceitos matemáticos, permite-lhes ter uma visão mais adequada da Matemática. Desde o início que o objectivo prioritário neste estudo pretendeu ligar a Matemática à realidade, dada a visão dos alunos que se apresenta insípida, um pouco turva e confusa. Residia nas propostas de trabalho um re(descobrir) da Matemática e um proporcionar de uma aprendizagem significativa, através da valorização dos projectos. As primeiras actividades foram decisivas para que, de uma forma gradual, fossem identificando contextos em que a Matemática é utilizada. Inicialmente, os alunos denotavam alguma facilidade neste tipo de trabalho dada a experiência do ano anterior, embora não com a dimensão que aqui atingiu. A sequência de integração deste tipo de actividades ajudou a compreender a utilidade e significado da Matemática, e, progressivamente, contribuiu para a aplicação dos conhecimentos a outras situações e a novos contextos. Perante os resultados deste estudo e pela análise dos quadros apresentados no capítulo V, destacam-se aspectos relevantes quanto ao facto deste tipo tarefas permitirem um re(descobrir) da Matemática implícita em situações do quotidiano.

Havia uma preocupação nítida em saber como iriam resolver os problemas abertos, uma vez que se apresentava a possibilidade de não terem um rumo definido à partida. As tarefas

iniciais foram decisivas neste processo, pois as concepções que alguns ainda detinham sobre a Matemática, mais precisamente a ideia de que resolver problemas era utilizar cálculos matemáticos básicos, foram alteradas.

“Não estamos preocupados em fazer logo contas... mas queremos descobrir o que está ali escondido” (Aluno B5).

“Entender que na matemática não se resolvem só contas, fazem-se projectos em que esta é precisa e se utiliza, mesmo que não seja evidente aos nossos olhos, mas ela está lá” (Grupo D).

Por não se apresentarem propostas de trabalho muito dirigidas, por vezes sem a indicação de dados concretos, os alunos sentiram a necessidade de pensar, investigar e actuar sem a preocupação de seguir determinados procedimentos matemáticos específicos, o que permitiu o afastamento das suas crenças iniciais.

O clima de motivação criado pelas actividades de modelação despertou-lhes um sentimento de desafio, impelindo-os na descoberta e no ultrapassar de quaisquer barreiras encontradas, como é evidenciado nas suas apreciações:

“Precisamos ter um bom raciocínio, mas acima de tudo espírito de investigador. O igual a um detective que investiga, e, por vezes, não chega a pista nenhuma, mas continua a insistir até descobrir” (Grupo C).

“Usámos a matemática de uma forma diferente, pela descoberta” (Grupo B).

Tornaram-se agentes da sua aprendizagem, começando a estabelecer relações entre a Matemática e a realidade, identificando conexões, investigando, comunicando, argumentando, procurando regularidades e incrementando um processo dinâmico no trabalho e na procura do ir mais além nas suas próprias descobertas, como eles próprios indicam:

“Quando as actividades permitiam investigar, procurávamos seguir pistas como: será que existem regularidades, sequências...” (Grupo B).

A maioria dos alunos tende a reconhecer que estas actividades matemáticas de cariz investigativo lhes incutem um papel activo na sua aprendizagem e que usam as suas capacidades na procura e na descoberta de factos. A presença da Matemática ganha uma nova evidência e vão-se desvanecendo as dificuldades que tinham inicialmente em vislumbrá-la, neste tipo de problemas, pois, aos poucos, mobilizam diversos saberes. A relação que criam com os assuntos da realidade confere-lhes um maior entendimento sobre a Matemática, porque compreendem, discutem e descobrem conhecimentos que aparentemente lhes passavam despercebidos. Tornou-se evidente que a estrutura das tarefas propostas, ao seguirem uma determinada sequência, e tendo como base de apoio um plano de investigação, acabou por criar nos alunos um sentimento de segurança. Percebem a importância das tarefas de modelação no que concerne à forma como relacionam os conhecimentos e como estas foram importantes para o desenvolvimento do seu pensamento matemático, tal como expresso num relatório sobre as actividades desenvolvidas:

“Tínhamos que pensar muito sobre as actividades propostas e relacionar a matemática com o quotidiano. O plano de investigação ajudava-nos a orientar-nos e a estruturar a nossa forma de pensar e isso exercitava-nos a mente” (Grupo A).

Através das actividades de modelação identificam e sentem a sua aprendizagem da Matemática com utilidade, entendem-na, percebem para que serve e passam a compreendê-la na relação com os fenómenos reais que os rodeiam. Reconhecem, também, que no desenvolvimento da actividade de modelação se consolidam e interiorizam conceitos pelo facto de sentirem que as suas aprendizagens não são forçadas e fluem durante o percurso de investigação; aprendem a fazer Matemática, investigando. Tornou-se evidente neste estudo que a interacção Matemática-Realidade-Matemática, presente nos projectos de investigação realizados pelos alunos, influenciou as suas aprendizagens e a sua visão sobre esta área do saber, o que se justifica pelas situações autênticas que permitiram aos alunos envolverem-se nas actividades com afinco, como menciona um dos grupos de trabalho:

“Saber questionar a realidade e descobrir que nesta a matemática existe sempre” (Grupo D).

6.2.1 CONTEXTOS DE APRENDIZAGEM – UM CATALISADOR DAS CAPACIDADES TRANSVERSAIS

No trabalho de projecto conforme Leite (2002) defende, a aprendizagem é “alimentada por pensamentos e atitudes criativas geradoras de ideias originais e pertinentes relativas aos processos e produção” (p. 4).

Neste caso, a liberdade e a espontaneidade dos alunos, aliadas à sua imaginação e criatividade, no confronto de opiniões e na argumentação, permitiram o enriquecimento do seu sentido crítico. Isto significa que os alunos puderam evoluir, tendo melhorado na compreensão, na capacidade de fazerem opções e tomadas de decisão. Creio, pela observação das aulas de projecto, que os alunos se tornaram mais capazes, com mais apetência e mais resolutos a aplicar os conhecimentos adquiridos, quando confrontados com situações semelhantes.

A realização do trabalho em pequenos grupos facilita a aprendizagem, ao permitir que os alunos vivam as descobertas que vão fazendo e, quando motivados, sejam capazes de resolver de forma mais eficaz os problemas, tal como afirmam:

“Aprendemos todos e todos se ajudam. Partilhamos opiniões e temos ideias interessantes que depois de discutidas chegamos a um consenso. É bom trabalhar em conjunto, pois também convivemos uns com os outros e aprendemos a respeitar as opiniões de cada um” (Aluno B3).

“Aprendo mais a trabalhar em grupo pois o que não entendemos, os nossos colegas explicam-nos e nós acabamos por perceber. Ajudamo-nos uns aos outros” (Aluno B5).

Outra vantagem do trabalho de grupo prende-se com o facto de os alunos compreenderem como os colegas aprendem, podendo acabar por conseguir fazê-lo por eles mesmos mas também com a ajuda que dão uns aos outros. Para Webb (1991) “o grau de elaboração da ajuda poderá determinar até que ponto ela estará associada a novas aprendizagens do aluno que procura ensinar qualquer coisa a outros” (p. 145).

O contexto de trabalho em grupo foi, seguramente, propiciador de um nivelamento na comunicação, o que permitiu aos alunos aprenderem a ouvir-se uns aos outros, discutir, criticar, fazer escolhas e mesmo atingir consensos. No entanto, para que o trabalho de grupo

funcione bem e seja profícuo é necessário um ambiente em que os alunos se sintam à vontade para livremente trocarem ideias, dúvidas e esclarecimentos, interagindo de forma produtiva.

Notou-se que estes procuraram, na entreajuda, ultrapassar certas dificuldades com que se vinham deparando e que se sentiram responsáveis pelos resultados a que chegaram.

Tal como cita Abrantes (1994), Davidson (1990) refere que a aprendizagem cooperativa “faz uso de características básicas da natureza humana” (p. 57). Os papéis que os alunos assumem cooperativamente dependem do conhecimento que têm uns dos outros, das experiências de vida em comum, entre outros. Torna-se claro que a aprendizagem não constitui uma soma de aprendizagens isoladas, antes se assume como um processo de carácter colectivo organizado. Através da cooperação dos alunos, do empenho e do trabalho em conjunto, aparecerá um produto ou artefacto que contribuirá para esse processo colectivo de aprendizagem. Todos têm oportunidade de contribuir e assumir a sua responsabilidade no desenrolar do trabalho e no produto final. Da observação das aulas, retiro a ideia de que a interacção beneficia todos, o que também foi sentido pelos alunos visto ter sempre valorizado nas suas intervenções. No desenvolvimento do trabalho de projecto, a interacção professor/aluno foi essencial na orientação das tarefas, havendo o cuidado de não intervir nos processos escolhidos pelos alunos.

As relações aluno/aluno e aluno/professor evoluíram. Nas primeiras, pela troca de ideias, e nas segundas por terem achado importante a minha ajuda, uma intervenção voltada sobretudo para o incentivo ao prosseguimento do trabalho. Fonseca (2000) refere que no desenvolvimento de uma investigação o papel do professor tem uma influência notória nos processos matemáticos usados pelos alunos, mas não deve interferir de modo a influenciar a atitude e liberdade dos mesmos.

A autonomia na aprendizagem significa que a aprendizagem dos alunos não se impõe de fora mas parte da iniciativa dos próprios alunos. Constitui, assim, uma forma de auto-regulação dos grupos sem interferência de uma entidade alheia, sem a necessidade do poder e dominação do professor.

Aliás, Sousa (2003), referindo-se a Abrantes (1994), evidencia que “a ideia não é que os alunos disponham de estratégias de aprendizagem autónomas, não importando o que fazem ou como fazem, mas sim que se envolvam na aprendizagem de maneiras significativas” (p. 76).

Pelo observado nas aulas de Trabalho de Projecto, compartilho a ideia de que a autonomia dos alunos se constrói pouco a pouco, sobretudo à medida que o trabalho vai

decorrendo e os alunos se vão envolvendo; é pois evidente que estes, ao colaborarem em grupo para um objectivo comum, assumem a responsabilidade de chegarem a um produto final.

De qualquer modo, a predisposição dos alunos para assumirem responsabilidades pela aprendizagem foi mais notória em alguns alunos em particular, de acordo com as suas capacidades e aptidões individuais.

Sousa (2003) apoiando-se nas considerações de Erna Yackel et Paul Cobb (1996), a propósito de autonomia, refere que “o trabalho de projecto é uma estratégia a privilegiar numa perspectiva pedagógica em que o desenvolvimento da autonomia dos alunos é uma meta educativa a atingir, ...” (p. 79).

6.2.2 O TRABALHO DE PROJECTO COMO POTENCIADOR DA COMPETÊNCIA MATEMÁTICA

Tendo em conta as conclusões apresentadas, e dando resposta às questões de investigação, passo a apresentar um conjunto de pontos centrais. Começarei pela primeira questão: *de que forma os alunos reagem a situações problemáticas da realidade no âmbito de um trabalho de projecto?*

- (i) Compreendem a utilidade e significado da Matemática, relacionando os conhecimentos matemáticos com os contextos reais. Surge assim a Matemática aliada à realidade;
- (ii) Descobrem que a Matemática pressupõe muito mais do que simples técnicas rotineiras de resolução de exercícios ou o recurso a determinados algoritmos básicos; Envolve sim, um desenvolvimento do espírito investigativo. Nesta linha, os alunos puderam formular, testar e validar conjecturas, procurar regularidades e padrões, generalizar, particularizar através de exemplos concretos, argumentar e comunicar, além de outros processos matemáticos.
- (iii) Tornam-se agentes activos da sua própria aprendizagem, estabelecendo conexões entre os diversos conhecimentos e entre a Matemática e a realidade.
- (iv) Sentem-se seguros, persistentes e empenhados, o que lhes permite chegar à descoberta de novos conhecimentos. Reconhecem que as suas aprendizagens não são forçadas e acabam por aprender a *fazer* Matemática.

Retomo agora a segunda questão: *como é que a pedagogia do trabalho de projecto se reflecte nas aprendizagens dos alunos, em particular, no que respeita aos processos e artefactos (matemáticos e não matemáticos) envolvidos?*

- (i) Reforça a criatividade, já que pressupõe que os alunos adoptem diversas estratégias ou caminhos e ao mesmo tempo os confrontem com os dos seus colegas;
- (ii) Enriquece o espírito crítico, dado que permite o confronto de opiniões e a argumentação;
- (iii) Aumenta a apetência para aplicar conhecimentos em diversos contextos, dada a aproximação com a realidade como anteriormente referido;
- (iv) Favorece o trabalho em grupo. O próprio trabalho em grupo, ao mesmo tempo que facilita as aprendizagens também traz uma melhoria do relacionamento interpessoal e do espírito de entre-ajuda, numa perspectiva de aprendizagem cooperativa;
- (v) Desenvolve as capacidades transversais (comunicação, raciocínio e resolução de problemas). No que diz respeito à comunicação, justifica-se pela interação que os alunos estabelecem ao comunicarem as suas descobertas e ao explicarem os seus processos de raciocínio, quer em pequeno grupo quer no grupo-turma. Relativamente ao raciocínio, prende-se com todos os processos matemáticos envolvidos na actividade investigativa que foram mencionados anteriormente. Na resolução de problemas, verifica-se o desenvolvimento da aptidão dos alunos, visto que todas as resoluções são apresentadas e discutidas. Além disso, a própria diversificação de actividades propostas também permitiu o desenvolvimento de actuações distintas referentes a esta capacidade;
- (vi) Desenvolve a autonomia e a predisposição para o trabalho, resultantes de uma maior motivação dos alunos;
- (vii) Conduz ao entendimento de que a aprendizagem constitui um processo colectivo e organizado em detrimento de determinadas aprendizagens isoladas;
- (viii) Desenvolve a responsabilidade, no assumir da negociação pedagógica, tendo como produto final os artefactos criados pelos alunos, quer sejam eles matemáticos ou não.

Pelo exposto pode-se afirmar que o trabalho de projecto permite o desenvolvimento de uma variedade de capacidades matemáticas e não matemáticas. Face aos projectos desenvolvidos, pode-se afirmar que os alunos souberam mobilizar os seus conhecimentos e

utilizar as suas capacidades no desenvolvimento dos seus projectos, o que se tornou visível através do delineamento e concretização dos seus planos de trabalho.

Na verdade, há que compreender as necessidades de cada aluno e respeitar os seus ritmos de aprendizagem; no entanto, torna-se importante estimulá-los de forma a promover as suas capacidades individuais. A metodologia de Trabalho de Projecto torna-se um óptimo recurso para as potenciar.

6.3 RECOMENDAÇÕES

Dada a natureza da metodologia de Trabalho de Projecto e a complexidade de que se reveste, nomeadamente os objectivos e as características que lhes são inerentes, é essencial que tenhamos professores preparados e com experiência neste tipo de metodologia. Como metodologia potenciadora do desenvolvimento da competência matemática, requer do professor alguém que saiba seleccionar e implementar tarefas que maximizem o potencial de aprendizagem dos alunos (Arcavi, 2006).

Torna-se premente a mudança das práticas de ensino, pondo de lado a aprendizagem “isolada” de conteúdos e apostando em desenvolver aprendizagens significativas nos alunos.

O desenvolvimento deste estudo pretendeu compreender de que forma o trabalho de projecto, num contexto de tarefas de investigação aliadas à realidade, contribuiu para o desenvolvimento da competência matemática dos alunos.

O estudo evidencia que os contextos de aprendizagem próprios do Trabalho de Projecto levam os alunos a interagir com os outros, a raciocinar perante situações propostas, a tornarem-se mais autónomos, interventivos, confiantes e a desenvolverem o gosto pela aprendizagem da Matemática, porque compreendem melhor a relação entre a Matemática e os fenómenos reais.

Ao considerar este tipo de experiências de aprendizagem bastante significativas para os alunos, considero que a inclusão de uma área destinada à Matemática para o desenvolvimento de projectos em estreita relação com a realidade seria uma forma de combater o insucesso e de estimular o interesse dos alunos pela disciplina. Acresce referir que esta proposta deveria ser alargada ao 1.º ciclo para que o trabalhar com projectos se desenrolasse num processo gradual.

Neste sentido, a formação contínua deverá investir na formação de professores para o Trabalho de Projecto, encarando-o como uma mais-valia para combater o insucesso em matemática.

Consignada nos termos do Decreto-Lei 6/2001, no âmbito da reorganização curricular, a Área de Projecto é considerada como promotora da criação de um espaço educativo onde os alunos possam assumir um papel mais activo em torno de temas de pesquisa e de problemas. Porém, está condenada a desaparecer do plano de estudos do ensino básico.

Cabe aos responsáveis repensar na importância desta metodologia de trabalho, em especial no valor que representa o trabalhar por projectos no âmbito da ligação entre a Matemática e a Realidade.

BIBLIOGRAFIA

- Abrantes, P. (1990). *Matemática e realidade nas aulas do 7º ano num ambiente de renovação curricular*. In H. M. Guimarães, & E. Veloso (Eds), Profmat 89 – Actas. (p.331-342). Lisboa Associação de Professores de Matemática.
- Abrantes, P. (1993). *Actividades de aprendizagem que envolvem a Matemática em situações da vida real*. In T. Breiteig, I. Huntley & G. Kaiser-Messmer (Eds.), *Teaching and learning mathematics in context* (pp. 103-114). Chichester: Ellis Horwood.
- Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática – A experiência do Projecto Mat 789*. (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Abrantes, P. (1995). *Matemática, Realidade e Trabalho de Projecto num Ambiente de Inovação Curricular*. In J. Matos, I. Amorim, S. Carreira, G. Mota, M. Santos, (Orgs.), *Matemática e Realidade: Que Papel na Educação e no Currículo?*, (pp. 77-135). Secção de Educação Matemática, Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.
- Abrantes, P. (1998). Reflexões sobre o ensino da Matemática. *Noesis*, 44, 73-75
- Abrantes, P. et al (1998). *Matemática 2001: diagnóstico e recomendações para o Ensino e Aprendizagem da Matemática*. Lisboa: APM.
- Abrantes, P., Leal, L., Teixeira, P., & Veloso, E. (1997). *MAT 789: Inovação Curricular em Matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian
- Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

- Alarcão, I. (2001). *Professor-investigador: Que sentido? Que formação?* In B. P. Campos (Orgs.), *Formação profissional de professores no ensino superior* (Vol. 1, pp. 21-31). Porto: Porto Editora (disponível no site: <http://www.inafop.pt/revista>)
- Albareello, L et al (1997). *Práticas e Métodos de Investigação em Ciências Sociais*. Lisboa: Gradiva
- Alonso, L. (2000). *A construção social do currículo: Uma abordagem ecológica praxica*. Revista da Educação, 27(1).
- Amorim, I. & Matos, J. F. (1990). *Actividades Investigativas em Matemática: Porquê, Para quê, Como?* Actas do Encontro PROFMAT 90, vol. I, (p. 155-172). Lisboa: APM.
- APM (1988). *Renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM.
- APM (1998). *Matemática 2001: diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. Lisboa: APM.
- Arcavi, A. (2006). *El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos*. In, I. Vale, T. Pimental, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Org), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 29-48). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.
- Bishop, A., & Gofree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.
- Blum, W. & Niss, M. (1991). Mathematical Problem Solving, Modelling, *Applications and Links to Other Subjects – State, trends and issues in mathematics instruction*. In Educational Studies in Mathematics, vol. 22, Nº 1, p. 37-68
- Blum, W. (2002). ICMI study 14: *Applications and modelling in mathematics education – Discussion document*. Educational Studies in Mathematics, 51(1-2), 149-171.

- Bodgdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação. Uma Introdução à Teoria e aos Métodos*. Porto: Porto Editora.
- Borba, Marcelo C.; Araújo, Jussara L. (2004). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. In D. Fiorentini, A. V. M. Garnica & M. A. V. Bicudo (Orgs.), Belo Horizonte: Autêntica Editora.
- Boutinet, J-P. (1990). *Antropologia do projecto*. Lisboa: Instituto Piaget.
- Brocardo, J. (2001) *As investigações na aula de matemática: um projecto curricular no 8ºano*. (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Brown, A. L. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *Journal of the Learning Sciences*, 2, p. 141-178.
- Burkhardt, Hugh (1989). *Mathematical modelling in the curriculum*. In W. Blum et al. (eds.), *Applications and modelling in learning and teaching mathematics*. Chichester: Ellis Horwood.
- Canavarro, A. P. (2005). *Matemática na Escola: Muro ou ponte?*. Em Actas do V CIBEM 2005 (pp. 1-25). Porto: APM.
- Carreira, S. (1995). *A matematização na natureza e na sociedade: uma forma de encarar a relação Matemática-Realidade*. In J. Matos, I. Amorim, S. Carreira, G. Mota & M. Santos (Orgs.), *Matemática e Realidade: Que papel na Educação e no Currículo?*(pp. 25- 70). Lisboa: Secção de Educação Matemática, SPCE.
- Carreira, S. (2005). *Ecos de Amesterdão: O ambiente de aprendizagem e o potencial da relação entre a Matemática e as situações do mundo real*. In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Orgs.), *Educação Matemática: caminhos e encruzilhadas – Encontro Internacional em Homenagem a Paulo Abrantes* (p. 121-138). Lisboa: APM.

- Carreira, S. (2010). Conexões no Programa de Matemática do Ensino Básico. *Educação Matemática*, n.º110, pp.3-6.
- Collins, A.(1992). *Towards a design science education*. In: Scanlon, E.; O'shea, T. (Eds.). *New Directions in educational technology*. (p. 15-22) Berlin: Springe.
- Cortesão, L., Leite C., & Pacheco, J. (2002). *Trabalhar por projectos em educação: uma inovação interessante?* Porto: Porto Editora
- Cunha, M. H. (1998). *Saberes profissionais de professores de matemática: Dilemas e dificuldades na realização de tarefas de investigação* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Davidson, N. (1990). *Small-Group Cooperative Learning in Mathematics*. In T. Conney & C. Hirsch (Eds): *Teaching and Learning Mathematics in the 1990*. NCTM: U.S.A.
- De Ketele, J. M. & Rogier (1999). *Metodologia da Recolha de dados. Fundamentos dos métodos de observações, de questionários, de entrevistas e de estudo de documentos*. Lisboa: Instituto.
- De Lange, J. (1989). *The teaching, learning and testing of mathematics for the life and social sciences*. In W. Blum, R. Berry, I. Biehler, D. Huntley, G. Kaiser-Messmer, L. Profke (Eds.), *Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics* (vol. 1). Chichester: Ellis Horwood Limited.
- Decreto-Lei n.º 6/2001, 18 de Janeiro (Reorganização Curricular do Ensino Básico).
- Design-Basead Research Collective. (2003). *Design-basead Research: An emerging paradigm for educational inquiry*. Educational Researcher; Vol. 32, N. 1, p. 5-8.
- Dewey, J. (1916/1966). *Democracy and education*. New York: Macmillan Publishing Company.

- Doorman, L. M. (2005). *Modelling motion: from trace graphs to instantaneous change*. Dissertation, Utrecht University, the Netherlands.
- Elliott, J. (2001). *Action research for educational change*. Philadelphia. University press.
- Ferri, B. (2010). Estabelecendo conexões com a vida real na prática da aula de Matemática. *Educação Matemática* n.º110, p. 19-25.
- Fonseca, H. (2000). *Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Francisco, J. M. e Maher, C. A. (2005). Conditions for promoting reasoning in problem solving: Insights from a longitudinal study. *Journal of Mathematical Behavior*, Vol. 24, pp. 361-372.
- Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, 1, p. 3-8.
- GAVE (2004). *Resultados do estudo internacional Pisa 2003*. Lisboa: Ministério da Educação
- Gil, A. (1996). *Como elaborar Projetos de Pesquisa*. S. Paulo: Atlas.
- Gimeno, J. (1989). *El curriculum: Una reflexión sobre la práctica*. Madrid: Morata
- Gimeno-Sacristán, J. (2000). *O currículo: Os conteúdos de ensino ou uma análise da prática?* In J. G. Sacristán & A. I. P. Gómez (Eds), *Compreender e transformar o ensino* (4ªed.) (pp. 119-196). Porto Alegre: Artes Médicas.
- Giroto, C. G. S. (2003). *A (re)significação do ensinar-e-aprender: a pedagogia de projectos em contexto*. <http://www.unesp.br/prograd/PDFNE2003/A%20resignificacao%20do%20ensinar.pdf>

- Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999). *Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example*. Educational Studies in Mathematics, 39 (1-3), 111-129.
- Gravemeijer, K. (1998). Developmental research: research for the sake of educational change. *Conferências Plenárias 1998*, (pp. 41-66). Portalegre: SEM- SPCE
- Hernández, F. & Ventura, M. (1998). *A organização do currículo por projetos de trabalho: o conhecimento é um caleidoscópio*. Porto Alegre: Artes Médicas.
- Heuvel-Panhuizen, M. Van den (2000). *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour*. Freudenthal Institute CD-rom for ICME9. Utrecht: Utrecht University.
- Heuvel-Panhuizen, M. van den e Wijers, M. M. (2005). *Mathematics standards and curricula in the Netherlands*. *Zentralblatt f \tilde{A} ^{1/4r} Didaktik der Mathematik*, 37(4), 287-307.
- Hopkins, D. (1985). *A teacher's guide to classroom research*. Philadelphia: Open University Press.
- Jacobini, O. R. (2006). *A Modelagem Matemática como Instrumento de Ação Política na Sala de Aula*. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – Instituto de Geociências e Ciências Exactas (IGCE), Unesp – Rio Claro.
- Jesus, A. M. (2004). *As actividades matemáticas de natureza investigativa nos primeiros anos de escolaridade. Perspectivas e envolvimento dos alunos*. (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Julie, C. (1993). *People's Mathematics and the Applications of Mathematics*. In J. de Lange, C. Keitel, I. Huntley & M. Niss (Eds.), *Innovation in Maths Education by Modelling and Applications*. Chichester: Ellis Horwood.
- Keitel, C. (1993). *Implicit Mathematical Models and Explicit Mathematics Teaching by Applications*. In J. de Lange, C. Keitel, I. Huntley & M. Niss (Eds.), *Innovation in Maths Education by Modelling and Applications*. Chichester: Ellis Horwood.

- Keitel, C. (2004) “*Para qué necesitan nuestros estudiantes las matemáticas?*” In: J. Giménez, L. Santo & J. P. Ponte (Coords.) *La actividad matemática en la aula – Homenaje a Paulo Abrantes* (pp. 11-23). Barcelona: Editorial CRÁO.
- Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 11 - 47). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Kilpatrick, W. H. (1918). *The project method. Teachers College Record*, Vol. XIX, N.º 4, p. 319-335.
- Kooij, H. (1992). *Matemática realista na Holanda*. *Educação e Matemática*, (23), 38-44.
- Lança, C. G. (2007). *Potencialidades das tarefas de modelação matemática com recurso a calculadoras gráficas e sensores na aprendizagem matemática dos alunos* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Le Boterf, G. (1994). *De la Compétence. Essai sur un attracteur étrange*. Paris: Les Éditions d’Organization.
- Leite, E. & Santos, M. (1990). *Nos Trilhos da Área de Projecto*. Consultado em 2010. <http://www.iie.min-edu.pt>
- Lessard-Hébert, M., Goyette, G. & Boutin, G. (1990). *Investigação Qualitativa: Fundamentos e Práticas*. *Epistemologia e Sociedade*. Lisboa: Instituto Piaget.
- Malheiros, A. P. S. (2007). *Modelagem Matemática e Pedagogia de Projetos: possíveis interseções*. Encontro Nacional de Educação Matemática, 9, Anais. Belo Horizonte: Centro Universitário de Belo Horizonte, p.1 – 15.
- Maltempi, M. V. (2004). *Construcionismo: pano de fundo para pesquisas em informática aplicada à Educação Matemática*. In Bicudo, M. A. V. & Borba, M. C. (Orgs.), *Educação Matemática: pesquisa em movimento*. São Paulo: Cortez.

- Mason, J. & Davis, J. (1991). *Modelling with Mathematics in Primary and Secondary Schools*. Victoria: Deakin University Press.
- Massa, C. & Massa, A. (2007). A banalização do termo “projeto” no cotidiano escolar. *Revista Factus*, São Paulo, v. 11, p. 123-140, 17 abril 2007. Disponível em: http://vicenteoficina.blogspot.com/2007_12_04_archive.html. Acesso em: 5/05/2009.
- Matos, J. F. & Carreira, S. P. (1994). Estudos de caso em Educação Matemática – Problemas actuais. *Quadrante*, 3, (1), 19-53.
- Matos, J. F. (2003). “Aprender matemática hoje: educação matemática como fenómeno emergente”. *Actas do ProfMat 2003*. Santarém: APM.
- Matos, J. F. (2005). *Matemática, educação e desenvolvimento social – questionando mitos que sustentam opções actuais em desenvolvimento curricular em matemática*. In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Orgs.), 2005. *Educação Matemática: caminhos e encruzilhadas – Encontro Internacional em Homenagem a Paulo Abrantes* (p. 69-81). Lisboa: APM.
- ME - DEB (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.
- ME - DEB (2001). *Currículo Nacional do ensino básico: competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica
- Merriam, S. B. (1988). *Case Study Research in Education: A Qualitative Approach*. Jossey-Bass: San Francisco.
- Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME/DGIDC.
- NCTM (1989). *Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: APM e IIE. (Trabalho original em Inglês, publicado em 1989).

- NCTM (1991). *Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: APM e IIE. (Trabalho original em Inglês, publicado em 1991).
- NCTM (1994). *Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: APM e IIE. (Trabalho original em Inglês, publicado em 1994).
- NCTM (2000). *Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: APM e IIE. (Trabalho original em Inglês, publicado em 2000).
- Nelissen, J. M. C. (1999). *Thinking Skills in Realistic Mathematics*. In J. H. M. Hamers, J. E. H. van Luit & B. Csap³ (Eds.), *Teaching and Learning Thinking Skills* (pp. 189-214). Lisse: Swets and Zeitlinger.
- Niss, M. (1992). O papel das aplicações e da modelação na Matemática escolar. *Educação e Matemática*, nº 23, pp.1-2.
- Niss, M. (1996). *Goals of mathematics teaching*. In A bishop, K. Clements, C.
- Nunes, C., Pedro P. (2008). *Os projectos de escola e a sua liderança*. In Grupo de Trabalho de Investigação (Orgs.), *professor de matemática e os projectos na escola*. (pp. 11-37). Lisboa: APM.
- OCDE (1999) PISA – Programme for International student Assessment
- OCDE (2009/2010) PISA – Programme for International student Assessment
- Oliveira, H. (1998). *Actividades de Investigação na aula de matemática – aspectos da prática do professor* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Oliveira, P. R. (2004). *Currículos de Matemática: do programa ao projecto*. (Tese de Doutoramento em Educação Matemática). Faculdade de Educação, USP, São Paulo.
- Oliveira, T.; Freire, A.; Carvalho, C.; Azevedo, M.; Freire, S. & Baptista, M. (2009), *Compreendendo a aprendizagem da linguagem científica na formação de professores*

de ciências. *Educar em revista*, nº 34, (pp. 19-33), Sociedade Brasileira de Zootecnia, Brasil.

Ormell, C. P. (1993). *A Pedagogy Based on Projective Modelling*. In J. de Lange, C. Keitel, I. Huntley & M. Niss (Eds.), *Innovation in Maths Education by Modelling and Applications*. Chichester: Ellis Horwood.

Pacheco, J. (1996). *Currículo: teoria e práxis*. Porto: Porto Editora

Perrenoud, P. (1999). “Construir competências é virar as costas aos saberes?”. In: Pátio. *Revista Pedagógica* nº11 (pp. 15-19). Porto Alegre, Brasil.

Perrenoud, P. (2001). *Porquê construir competências a partir da escola?* Porto: edições ASA, Criap.

Perrenoud, P. (2003). *Porquê construir competências a partir da escola? – Desenvolvimento da autonomia e luta contra as desigualdades* (2ªed.). Coleção CRIAP. Porto: Edições ASA.

Ponte, J. P. & Sousa, H. (2010). *O professor e o desenvolvimento curricular: Que desafios? Que Mudanças?* In GTI (Ed.), *O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico*, (pp. 62-88). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. & Sousa, H. (2010). *Uma oportunidade de mudança na Matemática do Ensino Básico*. In GTI (Ed.), *O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico*, (pp. 11-41). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (1992). A modelação no processo de aprendizagem. *Educação e Matemática*, nº23, 15-19.

Ponte, J. P. (2002). *Reflectir e investigar sobre a prática profissional*. In GTI (orgs.), *Investigar a nossa própria prática*, (pp. 5-28). Lisboa: APM.

- Ponte, J. P. (2003). Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em Educação*, nº2, (pp. 93-169).
- Ponte, J. P. (2005). *Gestão curricular em Matemática*. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular*, (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P. (2010). Conexões no Programa de Matemática do ensino Básico. *Educação Matemática*, nº110, (pp. 3-6).
- Roegiers, X. (1997). *Analyser une action d'éducation ou de formation*. Bruxelles: De Boeck Université.
- Roldão, M. C. (1999). *Gestão curricular: Fundamentos e práticas*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Básico.
- Sacristán, Gimeno & Gómez, Pérez (1989). *La enseñanza: su teoría y su práctica*. Madrid: Akal.
- Sandoval, W. A. & Bell, P. (2007). Design-Based Research Methods for Studying Learning in Context: Introduction', *Education Psychologist*, 30: 4, (pp. 199-201).
- Santos, L., Brocardo, J., Pires, M., & Rosendo, A. I. (2002). *Actividades de Investigação*. In GTI (orgs.), *Investigações matemáticas na aprendizagem do 2º ciclo do ensino básico ao ensino superior*, (pp. 83-106). Lisboa: APM.
- Schoenfeld, A. (1992). *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics*. In D. A. Grouws (Org.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-3709). New York, NY: Macmillan.
- Segurado, M. I. (1997). *A investigação como parte da experiência matemática dos alunos do 2º ciclo* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

- Serrazina, L. & Oliveira, I. (2005). *O currículo de Matemática do ensino básico sob o olhar da competência matemática*. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular*, (pp. 35-62). Lisboa: APM.
- Skovsmove, O. (2002). Trabalho de projecto em matemática. *Actas do Profmat 2002*. Lisboa: APM In PROFMAT, 7., 2002, Lisboa.
- Sousa, M. A. (2003). *A aprendizagem da Matemática e o trabalho de projecto numa perspectiva de matemática para todos* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Stein, M., Remillard, J., & Smith, M. (2007). *How curriculum influences student learning*. In F. K. Lester (Ed.) *Second handbook of reserach on mathematics teaching and learning* (vol. I, pp. 319-369). Charlotte, NC: Information Age.
- Stenhouse, L. A. (1975). *An introduction to curriculum research and development*. London: Heineman Educational.
- Swetz, F. (1992). Quando e como podemos usar a modelação? *Educação Matemática*, 23, (pp. 45-48).
- Webb. Noreen (1991). Task-related verbal interaction and mathematics learning in small groups. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 5, (pp. 366-389).
- Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, argumentation, and Autonomy in Mathematics. Em *Journal for research in Mathematics Education*. Vol. 27, n.º 4, (pp. 458-457).
- Yin, R. (2010). *Estudo de Caso. Planejamento e Métodos* (4ª ed). Porto Alegre: Bookman.

ANEXOS

Anexo 1 - Autorização dos Encarregados de Educação

Anexo 2 - Autorização do Órgão de Gestão

Anexo 3 - Questionário Inicial

Anexo 4 - Questionário Final

Anexo 5 - Entrevista Natural

Anexo 6 - História do Henrique

Anexo 7 - Plano de Investigação

Anexo 8 - Actividade das Canas

Anexo 9 - Actividade das Latas

ANEXO 1 - AUTORIZAÇÃO DOS ENCARREGADOS DE EDUCAÇÃO



Agrupamento
de Escolas
de Boliqueime

Exmo. (a) Senhor (a) Encarregada de Educação:

No âmbito do Mestrado em **Didáctica e Inovação no Ensino das Ciências, Ramo de Matemática, da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve**, estou a desenvolver um estudo sobre “**Os Ambientes de Aprendizagens em Contexto de Trabalho de Projecto**” dirigido aos alunos do 6º ano de escolaridade, da turma A.

A pertinência deste estudo reside no facto de a matemática ser considerada uma disciplina cuja abordagem desmotiva os alunos, levando-os a considerá-la como algo complicado e difícil. Ao tentar compreender e desmistificar tais pensamentos, pretendo encetar este estudo numa perspectiva de desenvolvimento curricular, proporcionando aos alunos uma diversidade de experiências de aprendizagem, em ambiente de sala de aula.

Para este efeito, preciso de observar e recolher dados sobre os trabalhos dos alunos, nas aulas de Matemática, situação que me conduzirá a fotocopiar as suas produções, para objecto de análise posterior.

A recolha de dados consiste, também, na aplicação de entrevistas, registos de observação directa, registo de fotografia e gravação em vídeo e áudio sobre as actividades desenvolvidas pelos alunos em sala de aula, em trabalho de grupo e a pares.

As entrevistas aos alunos decorrerão em horário extracurricular e servirão para clarificar aspectos que sejam relevantes exclusivamente para os propósitos da investigação.

Como tal, solicito a sua autorização para proceder à recolha de dados atrás descrita, comprometendo-me desde já garantir o anonimato dos alunos e a confidencialidade dos dados obtidos, que apenas serão usados no âmbito de investigação.

Comprometo-me, ainda, a não prejudicar os alunos na sua educação matemática.

Agradecendo a colaboração de V. Ex.^a, solicito que assine a declaração seguinte, devendo depois destacá-la e devolvê-la.

Com os melhores cumprimentos,

Ana Paula Mestre

Boliqueime, 15 de Setembro de 2009

Declaro que autorizo o(a) meu(inha) educando(a) nº ___ da turma A do 6ºano, a participar na recolha de dados conduzidos pela Dr^a Ana Paula Mestre, no âmbito da sua Dissertação de Mestrado.

Data ___/___/___ Assinatura: _____

Declaro que não autorizo o(a) meu(inha) educando(a) nº ___ da turma A do 6ºano, a participar na recolha de dados conduzidos pela Dr^a Ana Paula Mestre, no âmbito da sua Dissertação de Mestrado.

Data ___/___/___ Assinatura: _____

ANEXO 2 - AUTORIZAÇÃO DO ÓRGÃO DE GESTÃO

Exmo. Sr. Presidente da Comissão Provisória
do Agrupamento de Escolas de Boliquiteime

Assunto: Pedido de autorização para o desenvolvimento de um trabalho de investigação

Subordinado ao tema *“A influência do ambiente de aprendizagem num contexto de trabalho de projecto em Matemática – Inovação Curricular no 2ºCiclo”*, trabalho destinado a uma turma de alunos do 6º ano de escolaridade, o estudo que me encontro a desenvolver, assenta numa perspectiva de desenvolvimento curricular, cuja intenção passa por *investigar o papel das experiências de aprendizagem, quando estas valorizam as conexões matemáticas num contexto de trabalho de projecto e num ambiente que envolva os alunos na construção das suas próprias aprendizagens.*

Insere-se no âmbito da **Dissertação de Mestrado em Didáctica e Inovação no Ensino das Ciências** – Ramo de Matemática, sob orientação da **Professora Doutora Susana Carreira**, do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve, a qual se pretende desenvolver durante o primeiro período do ano lectivo 2009/2010.

Como investigação-acção e associada à prática educativa, terá como propósito compreender algumas questões críticas relativas ao processo ensino-aprendizagem e contribuir para a melhoria das práticas educativas na aula de Matemática.

Estimulando uma participação mais activa neste processo, o trabalho de projecto dará sequência à planificação de um conjunto de actividades que passará pela construção de posters, elaboração de artigos para o jornal escolar ou para a Revista

de Educação Matemática, actividades de cunho exploratório e investigativo, várias tarefas de investigação envolvendo problemas do quotidiano, modelação matemática, utilização das TIC, entre outros.

Ao anuir os pressupostos emanados pelo Ministério da Educação e que se prendem com o cumprimento dos programas, os conteúdos programáticos serão abordados com recurso às conexões através do encadeamento de matérias, em detrimento de uma aprendizagem de conteúdos estanques e desligados do real.

As orientações metodológicas inerentes ao desenvolvimento das tarefas estão em conformidade com as do currículo do ensino básico homologado em 2007 e anteriores.

Pretende-se implementar este desenho de investigação na turma A do 6º ano, na Área Curricular Não Disciplinar de Área de Projecto, situação que não comprometerá o normal desenvolvimento das actividades da escola. Como professora titular da turma A do 6º ano, as aulas serão leccionadas por mim e decorrerão no seu horário normal.

O objectivo deste estudo visa uma descrição detalhada de um processo evolutivo inserido num determinado contexto educativo, assim, será imprescindível uma análise aprofundada que só será conseguida se os dados recolhidos forem em número suficiente. Desta forma, torna imprescindível para a consecução deste trabalho de investigação que se:

- efectue o registo da observação de aulas em vídeo gravação das actividades realizadas pelos alunos da turma;
- realize entrevistas aos alunos;
- recolha informação documental ao nível dos processos individuais dos alunos sobre aprendizagens anteriores, no âmbito da disciplina de matemática;
- promovam discussões em grupo de forma a que os alunos expressem as suas dúvidas e opiniões;
- elaborem relatórios escritos das actividades propostas.

Prevê-se apresentar um pedido formal aos Encarregados de Educação para a implementação das entrevistas aos seus educandos possibilitando a sua gravação e posterior transcrição para análise.

Como docente do quadro de nomeação definitiva, do grupo 230 desta escola, solicito a V. Exa. a autorização para o desenvolvimento deste trabalho no Agrupamento de Escola de Boliqueime, na turma supracitada.

Comprometo-me a tomar as medidas necessárias, sempre que haja alguma interferência na rotina usual dos participantes, tais como: pedir autorização aos Encarregados de Educação dos alunos da turma envolvida em relação à videogravação durante a observação das aulas, em relação às entrevistas que serão dadas pelos alunos e em manter o anonimato dos intervenientes sempre que esse interesse seja manifestado.

Caso seja deferida a solicitação, deixo, desde já, a proposta de esta investigação incorporar o Plano Anual de Actividades da escola.

Sem outro assunto de momento, subscrevo-me com os melhores cumprimentos.

Boliqueime, 1 de Setembro de 2009

Ana Paula Estrelo Mestre

ANEXO 3 - QUESTIONÁRIO INICIAL

Questionário



Agrupamento
de Escolas
de Boliqueime

O preenchimento deste questionário pretende saber o que pensas acerca da disciplina de **Matemática** é anónimo e confidencial.

Lê, atentamente, o texto. Responde de uma forma clara e coerente.

Não te esqueças de nada. Tudo é importante

A Disciplina de Matemática

Tinha começado um novo ano lectivo e uma semana com aulas já passara.

Era véspera de fim-de-semana e o Henrique estava ansioso para terminar a última aula do dia. Apenas uns segundos e estava livre.

Livre, para ir ao encontro da avó, pois teria que aguardar que os seus pais o fossem buscar quando saíssem do emprego.

Saíra da escola e dirigira-se a correr ao encontro da avó. Por hábito, em sua casa, lanchava e fazia os TPC, rotina que se repetia, ao longo do ano.

Durante a elaboração de um trabalho de casa, a avó reparara no seu livro de Matemática e recordara o tempo em que também era estudante e aluna de Matemática.

Pedira-lhe para explicar como era ser aluno na disciplina de Matemática. Os tempos do neto já eram outros e ela provinha de uma escola tradicionalista, ouvia o professor e tinha que resolver o que ele pedia.

Por isso, foi colocando algumas questões ao neto para tentar compreender o que acontece agora nas aulas de Matemática.

Imagina que é a tua avó a colocar-te estas questões, o que dirias?

1. O que gostas mais de fazer quando estás nas aulas de matemática?
(Justifica bem a questão, dando exemplos.)

**2. Achas que é possível aprender matemática a partir de uma história?
Porquê?**

**3. Para ti, quais são os temas matemáticos preferidos nesta disciplina?
E porquê?**

**4. O que achas que a tua professora de matemática vai propor ou fazer
este ano nesta disciplina?**

**5. Na tua opinião como achas que deveriam ser as aulas de Matemática?
Apresenta sugestões.**

6. O que é que tu achas que a tua avó pensa acerca das tuas aulas de matemática?

Obrigada pela tua colaboração

ANEXO 4 - QUESTIONÁRIO FINAL

Agrupamento de Escolas de Boliqueime

1.2.4. Se nas aulas de matemática a abordagem dos conteúdos matemáticos seguissem uma metodologia do trabalho igual à seguida em área de projecto os alunos apresentariam um desempenho mais ou menos positivo? Porquê? Justifica a tua resposta.

1.2.5. Como gostarias que fossem as tuas aulas de matemática? Apresenta sugestões.

1.2.6. Como avaliarias o trabalho desenvolvido ao longo do ano lectivo. Justifica a tua resposta.

1.2.7. Gostaste de realizar esta experiência? Porquê?

Obrigada pela tua colaboração

ANEXO 5 - ENTREVISTA NATURAL

Entrevista Natural

1. Qual a actividade que mais gostaste? E porquê?
2. Achas que a matemática está presente em todas as tarefas que realizaram?
3. Gostaste das tarefas de investigação? O que aprendeste?
4. Fala-me das tarefas de investigação?
5. Achas que aprendeste matemática com este tipo de actividades?
6. Gostaste de realizar os projectos?
7. Achas que os projectos foram fáceis ou difíceis de realizar?

ANEXO 6 - HISTÓRIA DO HENRIQUE

"A matemática e o Quotidiano"

Do caleidoscópio ao óculo matemático

Capítulo I

A Viagem

Iniciara a ida ao Shopping com os meus pais.

Por hábito, aproveitávamos o sábado para fazermos compras e distrairmo-nos um pouco. A viagem não era longa demora cerca de 20 minutos, tempo necessário para me deliciar com a paisagem que observo através da janela do carro durante o percurso que separa a minha casa do Shopping.

Pegara no caleidoscópio do meu irmão mais novo e divertia-me a olhar para as imagens magníficas que este rodopiava.

Por instantes, abstraíra-me e retirara o meu olhar do caleidoscópio fixando a paisagem lá fora. Pensara como seria interessante poder observar através de um óculo, a vista que se descortinava da janela do carro. Ver aqueles campos verdejantes, aqueles pássaros..., tudo muito mais perto.

De repente, lembrara-me que a avó me tinha dado um óculo e este se encontrava no saco de brinquedos do meu irmão.

Procurei-o e, com satisfação e encontrara-o.

Foi então que, naquele momento, tudo se transformou.... Passei a ver um Mundo diferente do habitual, algo que nunca tinha descoberto antes.

Pegara no meu óculo e fixara, ao longe, aquela imensidão de verde...Era extraordinário.

Aquela paisagem assemelhava-se a um mar sereno e ondulante que se deslocava ao sabor do vento. Era lindo observar aquele viçoso concentrado que representava um magnífico caniçal e brotava da terra mãe, vigorante e repleto de vida.

Pensara o quanto este era importante para a natureza e não só.

Na quinta da avó Joana parte deste caniçal estava presente nos tectos da sua casa.

Por momentos, reflectira na forma engraçada que as canas tinham, eram cilíndricas.

Que giro! Nunca antes tinha pensado nisto.

A Matemática presente na Natureza!

Resolvi então fazer a seguinte questão ao meu pai:

- Já pensaste que as canas... sim, as canas, aquelas que cobrem os tectos da avó Joana têm forma cilíndrica? Ao qual o meu pai me respondera.

- Já, filho, mas se tomares atenção observas que essa forma origina outras duas, sabes quais?

- Ora pensa lá bem!

- Não estou a ver.....

- Então, imagina que fazes um corte longitudinal na cana e a abres pelo corte, o que origina?

- Ah! Já sei, origina um rectângulo.

- Muito bem!

- Agora concentra o teu pensamento na base da cana e imagina que com um lápis circundavas a cana. Que figura obtinhas?

- Obtinha um círculo.

- Correcto.

- Então podemos dizer que a cana representa um cilindro e a sua planificação origina dois círculos e um rectângulo.

- É isso mesmo.

Capítulo II

O Shopping

Chegámos ao Shopping. Este, de dimensões consideráveis, tinha de tudo um pouco.

A estrutura arquitectónica representava a tradicional casa Algarvia. Os tectos, eram de telha algarvia revestidos de cana. Sim, canas... aquelas mesmo que anteriormente tinha observado estavam, também aqui, presentes e preenchiam os espaços deixados pelas telhas.

Actividade 1

As Canas

Capítulo III

As compras no Continente

O dia estava quente e depois da viagem apetecia-me algo refrescante. Como a minha mãe tinha que ir ao supermercado e não podíamos perder muito tempo uma vez que faltava pouco para as 12 horas e a zona da restauração ficava congestionada, havia que otimizar o tempo.

Na lista das compras havia que comprar rolos de papel higiénico, latas de salsichas, espargos, velas, para além de outras coisas mais.

Esquecera-me de algo para beber.

Antes da mãe chegar à caixa para efectuar o pagamento, fui buscar uma lata de Coca-Cola. Afinal, essa fora uma das razões que me levava a acompanhá-la até ao supermercado!

As latas estavam acondicionadas numa embalagem quadrangular e fora difícil retirá-la. Reparara que a sua forma era também cilíndrica. Tanto tempo para retirar uma, não seria mais fácil acondicioná-las de outra maneira? Que tal tentares ajudar o Pedro a resolver este enigma.

Actividade 2

As latas

Lembrei-me que o professor Tomás, do ano passado, na aula de matemática tinha apresentado um problema semelhante a esta situação.

No momento, não havia prestado muita atenção, mas agora entendo o porquê das latas se encontrarem assim.

Capítulo IV

Uma pausa para o almoço

Na Restauração havia poucas mesas livres para almoçarmos. Tínhamos demorado mais do que estava previsto e, para além disso, era fim-de-semana, facto que justificava o número de pessoas que lá se encontravam.

Antes de iniciarmos o almoço a minha mãe pedira-me para lavar as mãos ao meu irmão e aproveitar, também, para lavar as minhas.

Martim era um menino travesso e muito mexido. Desatara a correr pelos corredores e escondera-se na casa de banho. Mas, foi fácil encontrá-lo.

Lavei-lhe as mãos e aproveitei para lavar as minhas, tal como a minha mãe me pedira. Quanto vou para as secar verifiquei que não havia papel e o secador de mãos estava avariado. Por sorte, encontrava-se um pacote de rolos de papel de mãos, ainda por abrir. Apressado, Martim pegara no pacote retirou um e divertindo-se, começou a desenrolado. Bem, já havia papel por toda a parte. O que era cilindro e volumoso parecia que quase não existia. Cilindro!! É verdade, cilindro.

Esta forma insiste em estar presente em quase todos os objectos. Até no papel higiénico? Este parece que nunca mais acaba, é tão comprido.

Intrigara-me o facto daquele rolo ser tão comprido e nunca mais terminar, parecia infinito e dei comigo a pensar.

Qual será o comprimento de papel existente num rolo com estas dimensões? Vou perguntar ao meu pai.

Conseguirás determinar o perímetro antes do pai do Pedro?

Actividade 3

Rolos de papel

De novo na Restauração fui ao encontro dos meus pais. Depois de muito procurar finalmente, conseguimos encontrar uma mesa livre.

Havia, agora, que decidir o que queríamos almoçar.

Eu claro, decidi-me pela pizza!

Então pedi uma pizza média para mim e outra para o Martim, de tamanho pequeno. Os meus pais pediram uma grande para os dois.

Não sei se fizemos asneira! Talvez duas pizzas grandes tivesse sido a melhor opção.

Concordas com esta observação?

Actividade 4

As pizzas

Reparei que a forma das pizzas era circular. Desta vez, não eram os cilindros que observava, mas sim, os círculos. O ano anterior, estudara o círculo e a circunferência, mas estas matérias estavam pouco presentes, pois a matemática não era uma disciplina que eu gostasse, para além de a achar muito difícil. Razão pela qual, não transitara para o sétimo ano, uma vez que, tinha tido negativa a Língua Portuguesa e a Matemática.

Bem estava na hora de pagar. O meu pai pagara a despesa e o empregado devolvera-lhe o troco. Como sobrara moedas meu pai entendera distribuí-las por mim e pelo meu irmão. Eu ficara com uma moeda de 1€, uma de 0,50€ e outra de 0,10€. O meu irmão ficou com oito moedas de 0,20€. O troco estava bem repartido, pois apesar de as moedas terem diferentes valores, ficámos ambos, com iguais quantias.

Fixara o meu olhar nas moedas, que por coincidência, tinham faces de forma circular e nos diferentes tamanhos que estas representavam.

Questionava-me se estes tamanhos tinham alguma relação aparente?

O que pensas acerca desta questão? Concordas com a afirmação do Pedro?

Actividade 5

As moedas

Capítulo V

Arrumar as compras

Estava na hora de regressar a casa. Metemo-nos no carro e seguimos caminho. Terminada a viagem, e como era habitual ajudava a minha mãe a carregar as compras. Desfizemos os sacos das compras colocando-os nos respectivos lugares.

Como rapaz pouco dado à lida da casa, e por vezes atrapalhado, deixei cair os molhos de espargos quando pretendia guardá-los no frigorífico. O cordel de um dos molhos desatara-se espalhando o conteúdo pelo chão. Apanhei o cordel recolhi os espargos e observei que os dois molhos eram diferentes. Um apresentava-se mais gordo que o outro. Qual não foi a admiração quando ao tentar ajeitar o cordel do outro molho, que também se encontrava a desfazer, verifiquei que o cordel era mais curto que o outro, cujos espargos deixara cair no chão.

Coisas estranhas que me acontecem hoje. Constantemente, dou com a minha mente a pensar e a relacionar matematicamente os objectos. Pareço aquele professor..... do filme “Mentes Brilhantes” que decifrava códigos e em tudo via a matemática. Mas, será que foi propositado o facto de colocarem diferentes tamanhos de cordel em função do volume de espargos?

Actividade 6

Os espargos

Capítulo VI

A hora do lanche

Já eram 17 horas e apetecia-me algo doce. Então pedira à minha mãe para fazer aquele bolo de Chocolate que a Bibi me dera a receita.

Bibi era a minha colega de escola por quem eu sentia alguma admiração e costumava frequentar a sua casa.

Peguei no pacote de açúcar e no é que estava lá escrito “açúcar de cana produção biológica”, outra vez as canas! Para além das canas comuns estas eram outro tipo e muito importantes forneciam o açúcar.

A minha mãe decidiu aceitar o meu pedido e resolveu fazer dois bolos. Iríamos ter visitas e assim ficava um para o lanche e outro para as visitas. Depois de fazer a massa distribuiu-a pelas formas que eram de tamanhos diferentes. Ao reparar nas formas disse à minha mãe que os bolos iriam ficar com tamanhos diferentes e o das visitas teria mais quantidade. A minha mãe respondeu se teria certeza do que estava a dizer. Deixou-me intrigado!

Actividade 6

As formas dos bolos

Do quotidiano para a matemática

O dia fora longo mas muito interessante do “*calidoscópico para o século*” foi possível ter uma visão diferente da Matemática.

Apercebi-me que a Matemática está presente em todo o lado e no nosso quotidiano. Tudo se justifica matematicamente.

Penso que, a partir deste dia, serei um aluno diferente na disciplina de matemática. Contarei a minha história ao meu actual professor e colegas mostrando-lhes, o quanto é possível aprender matemática desde a natureza ao quotidiano.

ANEXO 7 - PLANO DE INVESTIGAÇÃO



Actividades de Investigação Matemática

Ao longo deste período, propomos-te que desenvolves actividades relacionadas com a Investigação Matemática.

Uma Investigação Matemática é sempre uma viagem ao desconhecido, embora ela já possa ter sido feita por outros, dá-te a oportunidade de fazeres matemática do mesmo modo que os matemáticos a fazem.

Começas com uma pista ou com uma ideia e depois depende de ti, o trabalho semelhante ao de um detective.

Poderás estranhar o tipo de problemas apresentados uma vez que, são diferentes daqueles que habitualmente resolves.

Por não terem uma resposta imediata de resolução tornam-se, ainda, mais interessantes, pois estes conduzem-te a um levantamento de questões, que irás testar, conjecturar e comprovar permitindo-te obteres conclusões.

Para uma investigação ser eficaz, os dados e os resultados que fores obtendo devem ser organizados de forma clara e registadas de imediato as ideias surgidas, mesmo que não as sigas.

Uma investigação exercita a tua imaginação e mostra como a matemática pode ser uma viagem de descoberta, efectuada segundo a tua vontade.

Assim, para cumprires os aspectos acima referidos, deverás:

- **Ler o problema muito atentamente.**
- **Discuti-lo, formular e registar questões para a sua resolução.**
- **Testar as questões formuladas.**
- **Tirar conclusões.**

Caso não consigas chegar a uma conclusão, então, deverás proceder à reformulação de novas questões e repetir todo o processo de novo.

Por fim, entras na fase de apresentação, discussão e sistematização da(s) descoberta(s), visando a consolidação de conhecimentos.

[Na página seguinte encontras um quadro que orientará o teu trabalho de investigação](#)

De forma a iniciares o teu trabalho de investigação é necessário que defines um plano de trabalho, o qual te permitirá orientar-te durante a resolução da actividade de investigação.

Se criares o hábito de obedeceres a estes passos, quando resolveres qualquer actividade de investigação, tornar-se-á mais fácil a sua execução, uma vez que vais adquirindo pratica na organização dos dados, na testagem, na discussão e argumentação dos resultados.

Segue então, o Plano de Investigação:

<p>A Compreende o problema</p> <p>Quais são os dados do problema?</p> <p>O que se pretende saber?</p>
<p>B Escolhe uma estratégia.</p> <p>COMO COMPARAR OS DADOS PARA RESPONDER A CADA PERGUNTA?</p> <p>FAÇO UM ESQUEMA, UM QUADRO, UM DESENHO...</p>
<p>C Aplica uma estratégia.</p> <p>DESENHO UM ESBOÇO EM PAPEL...</p>
<p>D Verifica a solução e dá uma resposta.</p>

ANEXO 8 - ACTIVIDADE DAS CANAS



E.B.I. Prof. Dr. Aníbal Cavaco Silva

As Canas

Henrique observara o tecto e fascinara-lhe o facto de as canas revestirem aquela superfície. Lembrara-se que seria interessante revestir o tecto do sótão da sua casa também daquela forma. O seu pai estava a preparar aquele espaço que serviria para Henrique passar uns momentos de descontração.

Pensara, em como fazer para preencher o tecto do seu sótão e quantas canas seriam precisas para o revestir.

... Vamos ajudar o Henrique, concordas?

Para isso é necessário fazer dois ensaios os quais funcionarão como modelo.

Actividade 1

Procedimentos:

Com a ajuda de uma superfície rectangular e outra quadrangular vamos determinar quantas palhinhas de refresco serão suficientes para as cobrir. Preenche este espaço à tua vontade dispondo as palhinhas como bem entenderes.

Para poderes iniciar a actividade necessitas de material como o que se encontra abaixo descrito.

Materiais:

Dispões de duas superfícies que simularão dois tectos de dimensões diferentes e, ainda, de palhinhas de refresco que representam as canas. Para que as palhinhas fiquem fixas é preciso um tubo de cola



Superfície 1



Superfície 2



Palhinhas de refresco

Então, mãos à obra ...



Depois de traçares o teu plano de investigação, regista agora as tuas conclusões.

Continuação da Actividade

Em grupo tenta agora dar resposta as questões que se seguem:

1. Supõe que o Henrique já sabe as dimensões do tecto do seu sótão que são de 2,5m X 3m. Tem várias canas para cobrir a superfície e esta apresentam o mesmo comprimento e a mesma grossura. Cada cana tem de comprimento 1m e de diâmetro 1,5cm.
De quantas canas necessita o Henrique para pavimentar o sótão de forma que opte pela solução mais económica, isto é, que economize o máximo de canas.
2. Pega numa cana e descobre em que sítio deverás efectuar um corte para que obtenhas um rectângulo com o máximo de área.
3. Imagina que querias preencher agora a mesma superfície do tecto do sótão do Henrique, mas agora de outra forma. Pretendias preencher essa superfície com os rectângulos que obtiveras ao cortares as canas. De quantos rectângulos necessitavas para cobrir a superfície, utilizam o mínimo possível?
4. O pai do Henrique apresentara-lhe uma proposta. Gostaria que ele determina-se a quantidade de canas que era necessário utilizar para uma superfície diferente daquela que utilizara.
Esta superfície tinha de área 8m^2 , qual seria a quantidade ideal de canas para a revestir?

ANEXO 9 - ACTIVIDADE DAS LATAS



As compras no Continente

O dia estava quente e depois da viagem apetecia-me algo refrescante. Como a minha mãe tinha que ir ao supermercado e não podíamos perder muito tempo uma vez que faltava pouco para as 12 horas e a zona da restauração ficava congestionada, havia que otimizar o tempo.

Na lista das compras havia que comprar rolos de papel higiénico, latas de salsichas, espargos, velas, para além de outras coisas mais.

Esquecera-me de algo para beber.

Antes da mãe chegar à caixa para efectuar o pagamento, fui buscar uma lata de Coca-Cola. Afinal, essa fora uma das razões que me levava a acompanhá-la até ao supermercado!

As latas estavam acondicionadas numa embalagem rectangular e fora difícil retirá-la. Reparara que a sua forma era também cilíndrica. Tanto tempo para retirar uma, não seria mais fácil acondicioná-las de outra maneira?

Que tal tentares ajudar o Henrique a resolver este enigma?

Actividade 2

As latas

Henrique observava as latas acondicionadas na embalagem e com alguma dificuldade tentou retirar uma das latas. Verificou que a forma de acondicionamento das latas impedia que estas fossem retiradas com facilidade. Teve mesmo que rasgar parte da embalagem para conseguir o desejado. Reflectiu sobre o formato das embalagens e chegou à conclusão que todas elas apresentam formas quadrangulares ou rectangulares, tal como se pode ver pela figura 1.

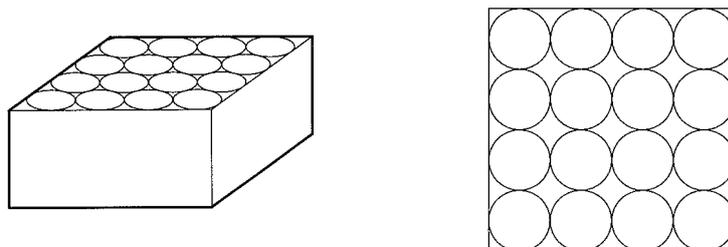


Figura 1

"Do Caleidoscópio para o Óculo Matemático"



Esta situação levantara algumas interrogações no Henrique.

Porque motivo as embalagens não apresentam um formato diferente ou o acondicionamento das latas não tem disposições diferentes?

Porque não aparecem outras disposições, como por exemplo:

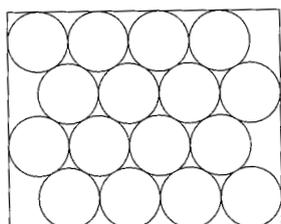


Figura A

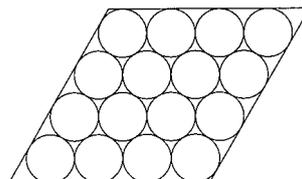


Figura B

Será que esta situação não te passou já pela cabeça?

Então, vamos descobrir o porquê dos acondicionamentos de latas ou de outro produto semelhante ser feito em embalagens quadrangulares ou rectangulares

1. Com a ajuda de latas e folhas de papel de desenho vamos tentar descobrir o porquê de se utilizar sempre a mesma disposição e o mesmo acondicionamento.
 - 1.1. Desenha as latas na folha de papel, experimentando as figuras acima apresentadas (Figura 1, Figura A e Figura B).
 - 1.2. Experimenta acondicionar a mesma quantidade de latas, mas agora com outras disposições ou com outras formas de acondicionamento.
 - 1.3. Compara as formas e as disposições das latas desenhadas em 1.1. e 1.2 e utilizando um procedimento matemático, verifica qual a melhor opção e a mais económica e justifica a tua opção de escolha.
2. Não te esqueças de elaborar o Plano de Investigação, tal como te foi ensinado.

Bom Trabalho!