FACULDADE DE ECONOMIA

Universidade do Algarve

ESTUDOS III

FINANÇAS E CONTABILIDADE

2007

Um modelo de solução fechada para avaliação de hipotecas comerciais

Cristina Pereira Viegas

Faculdade de Economia da Universidade do Algarve

José Azevedo Pereira

Instituto Superior de Economia e Gestão, Universidade Técnica de Lisboa

---

Resumo

O objectivo deste estudo é o desenvolvimento de uma solução analítica que permita avaliar hipotecas comerciais. Para tal, considera-se a existência de uma única fonte de risco - risco de incumprimento - e por conseguinte a existência de uma única variável de estado - o valor da propriedade hipotecada. O valor da hipoteca corresponde ao valor actual das prestações futuras do empréstimo deduzido do valor da opção de incumprimento. A maior dificuldade na resolução do modelo reside no cálculo do valor desta opção e, por sua vez, no cálculo do valor crítico da propriedade, isto é, do preço fronteira abaixo do qual a opção deve ser exercida imediatamente.

Este trabalho constitui uma primeira abordagem ao desenvolvimento de soluções analíticas para a avaliação de hipotecas, recorrendo à análise de fluxos contingentes.

Palavras-chave: avaliação de hipotecas, avaliação de opções, incumprimento, solução fechada

Title: Commercial mortgage valuation: a closed form solution

Abstract

The main objective of this study is to develop a closed form solution for the valuation of commercial mortgages. We consider only one source of risk - the risk of defaulting on a mortgage - and therefore, the existence of only one state variable - the value of the mortgaged property. The value of the mortgage corresponds to the present value of the future payments on the loan, less the value of the default option. The major difficulty in designing this model lies in calculating the value of this option, since for that purpose it is necessary to determine the critical value of the property, i.e. the lowest price below which the option must be immediately exercised.

This work represents one a first attempts to address the development of analytical solutions to mortgage valuation, using contingent claims analysis.

Key words: Mortgage valuation; option valuation; default; analytical solution

1. Introdução

Os modelos de valorização de hipotecas que recorrem aos princípios subjacentes à avaliação de opções de tipo Americano consideram que o valor destes activos financeiros é determinado por uma ou pelas duas fontes de risco: risco de pré pagamento e risco de incumprimento. Por sua vez, estas fontes de risco são normalmente representadas por duas variáveis estocásticas: a taxa de juro e o valor da propriedade hipotecada.

A literatura da especialidade tem, na esmagadora maioria dos casos, apresentado apenas soluções numéricas, para este tipo de enquadramento de avaliação. Em ordem a obter estas mesmas soluções numéricas, é necessário recorrer a complexas técnicas de computação, facto que torna o processo demasiado moroso e dispendioso.

Um domínio ainda pouco explorado nesta área de investigação, respeita ao desenvolvimento de soluções fechadas[1]. Contudo a complexidade do tratamento matemático que é induzida pela existência simultânea de duas opções Americanas, tem até aqui impedido o desenvolvimento de modelos eficazes de avaliação.

No intuito de dar uma pequena contribuição no sentido de ultrapassar estas dificuldades, o objectivo central deste estudo é o desenvolvimento de uma solução fechada que permita avaliar hipotecas comerciais. Para tal considera-se que a valorização deste tipo de activos, para além de incluir uma componente relativa à determinação do valor actual dos pagamentos futuros de capital e juros, inerentes ao empréstimo hipotecário, considera uma outra parcela, referente à possibilidade de incumprimento do contrato, por parte do devedor. Esta parcela é dada algebricamente por uma expressão que representa o valor de uma opção de venda de tipo Americano, cujo activo subjacente corresponde ao valor da propriedade hipotecada[2].

Uma parte significativa da literatura da área considera que, para além da opção de incumprimento, este tipo de contratos têm embutida uma opção de pré-pagamento. De facto, este tipo de enquadramento conceptual é mais próximo da realidade do que aquele que é proposto neste trabalho. No entanto, também se constata que o desenvolvimento de soluções fechadas, considerando em simultâneo as duas opções em causa, constitui um problema que, até ao presente, se tem revelado de impossível resolução, devido à sua extrema complexidade matemática. Daí que o modelo aqui proposto limite a sua análise à opção de incumprimento, o que permite reduzir alguma da complexidade inerente e, ao mesmo tempo, contribuir para o avanço numa área de investigação pouco explorada.

Com base nestes pressupostos, o valor da hipoteca corresponde ao valor actual das prestações futuras do empréstimo deduzido do valor da opção de incumprimento. O valor

[1] Collin-Dufresne e Harding (1999) deduzem uma solução fechada para os activos hipotecários residenciais de taxa fixa, utilizando uma única variável de estado, a taxa de juro de curto prazo.

[2] Pode também ser modelada, provavelmente de forma ainda mais adequada, como uma European compound option. Ou seja, como uma sequência de opções de venda Europeias, com vencimentos em cada uma das datas de pagamento inerentes ao empréstimo (vejam-se, por exemplo, Kau, Keenan, Muller e Epperson, 1995 e Azevedo-Pereira, Newton e Paxson, 2002, 2003).

actual das prestações futuras é obtido aplicando o conceito de valor actual de uma renda, uma vez que a taxa de juro não é tratada como uma variável estocástica. O valor da opção de incumprimento é determinado recorrendo aos princípios formulados para a avaliação de uma opção de venda Americana.

Este trabalho descreve, numa primeira parte, as principais características inerentes ao modelo a desenvolver, tais como a variável estocástica a considerar e o processo estocástico a seguir pela mesma. Na parte seguinte é desenvolvido o modelo de valorização de uma hipoteca, aplicando o "método das linhas", tal como foi utilizado, na avaliação de opções Americanas, por Carr e Faguet (1996). Posteriormente é verificada a validade da formulação deduzida no trabalho, através da análise gráfica e numérica dos resultados obtidos com o modelo. Por fim é apresentada a conclusão do trabalho, incidindo nas sugestões para desenvolvimentos futuros.

2. Caracterização do modelo de avaliação de hipotecas comerciais

2.1 Características gerais do modelo

O modelo geral de avaliação de activos hipotecários, a desenvolver ao longo deste trabalho, recorre à análise de fluxos contingentes, sendo o estudo limitado à opção de incumprimento. No seguimento deste pressuposto, o modelo considera a existência de uma única variável de estado, o valor da construção hipotecada (B).

De acordo com estes pressupostos, o valor da hipoteca, $V(t,B)$, corresponde à diferença entre $A(t)$, o valor actual das prestações de capital e juros relativas ao pagamento do empréstimo e $P(t,B)$, o valor da opção de incumprimento. Algebricamente, vem:

$$V(t,B) = A(t) - P(t,B) \tag{1}$$

Os pagamentos futuros não dependem de nenhuma variável estocástica[3], pelo que o seu valor actualizado é dado por:

$$A(t) = C\left[\frac{1-e^{-rt}}{r}\right] \tag{2}$$

Onde, C, representa o valor anual da prestação constante, r, a taxa de juro e t, o número de anos para o término do empréstimo hipotecário.

[3] Note-se que ao considerar a inexistência da opção de pré pagamento, também se considera que o comportamento da evolução da taxa de juro não é estocástica.

Por sua vez, o valor da opção de incumprimento depende do comportamento da variável estocástica, valor da propriedade hipotecada. O processo estocástico seguido por esta variável é idêntico ao processo utilizado por Black e Scholes (1973) e Merton (1973) para modelar o preço de uma opção de compra de tipo Europeu, sobre acções:

$$dB = (a - b)Bdt + s_B B dz_B \tag{3}$$

Onde:

$a \equiv$ Rendimento instantâneo esperado na propriedade

$b \equiv$ Taxa de rendimento continua da propriedade (proporcional ao respectivo valor)

$s_B \equiv$ Desvio padrão instantâneo

$z_B \equiv$ Processo de Wiener padrão

Trabalhos como Downing, Stanton e Wallace (2003), Azevedo-Pereira et al. (2000, 2002, 2003), Ciochetti e Vandell (1999), Hilliard, Kau e Slawson (1998), Yang, Buist e Megbolugbe (1998), Deng (1997), Schwartz e Torous (1992), Titman e Torous (1989), Kau, Keenan, Muller e Epperson(1987, 1990, 1992, 1993a, 1993b, 1995), Epperson, Kau, Keenan e Muller (1985), Cunningham e Hendershott (1984) constituem exemplos de aplicação de (3) para caracterizar o valor da casa ou da propriedade.

Neste trabalho, é pressuposto que o rendimento obtido com a propriedade hipotecada, f, é constante durante o período de vida do respectivo contrato e corresponde ao valor anual definido em termos de unidades monetárias. Deste modo, b, a taxa de rendimento contínua da propriedade (proporcional ao respectivo valor) é nula. Para fazer face a esta situação é necessário definir uma nova variável, B^*, a qual corresponde ao valor da propriedade hipotecada deduzido do valor actualizado do rendimento fixo, f, obtido com a mesma:

$$B^* = B - \frac{f}{r}\left(1 - e^{-rt}\right) \tag{4}$$

2.2 A opção de incumprimento

No seguimento destes pressupostos a equação diferencial geral[4] que permite avaliar a opção de incumprimento, $P(t, B^*)$[5], embutida num empréstimo hipotecário, válida para $B^* \geq \underline{B_t}^*$, corresponde a:

[4] Neste trabalho, toda a formulação utilizada seguidamente, pressupõe o valor da propriedade deduzido do valor actualizado do rendimento fixo, ou seja, B^*.

$$-\frac{\partial P(t,B^*)}{\partial t}+\frac{\partial P(t,B^*)}{\partial B^*}rB^*+\frac{1}{2}s_B{}^2B^{*2}\,\frac{\partial^2 P(t,B^*)}{\partial B^{*2}}-rP(t,B^*)=0 \qquad (5)$$

Onde $\underline{B_t^*}$ corresponde ao valor crítico da propriedade hipotecada[6] deduzido do valor actualizado do rendimento fixo, f.

A obtenção de uma solução fechada para o valor da opção de incumprimento e consequentemente para o valor de uma hipoteca, a partir da resolução da equação diferencial (5) é um processo complexo. De modo a ser possível a sua resolução é aplicado o "método das linhas".

A aplicação deste método resume-se à substituição da derivada da função preço da opção de incumprimento em ordem ao tempo, na equação diferencial dada em (5), por uma diferença finita. Quanto menor for o intervalo de tempo considerado na diferença finita maior validade têm os resultados alcançados com esta alteração. No entanto, um elevado número de intervalos de tempo implica a necessidade de considerar expressões matemáticas de complexidade progressivamente crescente. Daí que se discretize o tempo num número relativamente pequeno de intervalos - quatro[7] -e, posteriormente, seja aplicada a extrapolação de *Richardson*[8] para acelerar a convergência dos resultados obtidos para valores próximos da realidade.

2.3 Modelo de avaliação de hipotecas comerciais: solução fechada

O "método das linhas" tem implicações na configuração das expressões dadas em (2), (4) e (5). Deste modo, no que concerne ao valor actualizado da dívida por pagar, é aplicada a fórmula de actualização considerando o tempo discreto, contrariamente ao que foi definido anteriormente, em (2), onde o valor actualizado foi calculado em tempo contínuo. Tendo por base esta alteração, (2) passa a ter a seguinte configuração:

$$A=\frac{C}{r}\left[1-\frac{1}{\left(1+r\frac{t}{n}\right)^n}\right] \qquad (6)$$

---

[5] O método utilizado na valorização da opção de incumprimento é semelhante ao empregue na determinação do valor de uma opção de venda de tipo Americano.

[6] Trata-se do preço fronteira abaixo do qual a opção deve ser exercida imediatamente.

[7] Na valorização de uma *put* Americana, ao considerar o tempo total de posse da opção dividido em quatro intervalos de tempo é obtida uma estimativa muito aceitável para o valor deste tipo de opções. Na valorização de hipotecas é aplicado o mesmo raciocínio, uma vez que se trata de avaliar uma opção de incumprimento cujo tratamento é semelhante ao de uma opção de venda de tipo Americano.

[8] A extrapolação de *Richardson* tem sido aplicada na valorização de opções de tipo Americano com sucesso. O conceito e a aplicabilidade da mesma serão objecto de análise detalhada mais à frente.

Nesta equação, C, o valor anual da prestação contínua, é substituído por n prestações constantes discretas e iguais a $C\frac{t}{n}$. O número de prestações constantes deve coincidir com o número de intervalos em que o tempo total de posse do activo hipotecário é dividido, aquando da aplicação do "método das linhas" ao cálculo da opção de incumprimento.

Também, no que concerne a (4), é necessário efectuar um ajustamento. Assim, considerando que o valor contínuo do rendimento fixo foi substituído por n valores discretos iguais a $f\frac{t}{n}$ cada, com período de tempo entre dois termos consecutivos igual a $\frac{t}{n}$, o valor da propriedade deduzido do valor actualizado do rendimento fixo corresponde a:

$$B^* = B - \frac{f}{r}\left(1 - \frac{1}{\left(1 + r\frac{t}{n}\right)^n}\right) \tag{7}$$

Note-se que, tal como no valor da propriedade, também no preço crítico se verifica a seguinte relação:

$$\underline{B_K} = \underline{B_K}^* + \frac{f}{r}\left(1 - \frac{1}{\left(1 + r\frac{t}{n}\right)^n}\right) \tag{8}$$

Por sua vez, a equação diferencial, dada em (5), passa a ter a seguinte configuração, para $B^* \geq \underline{B_k}^*$[9]:

$$\frac{dP^{(k)}\left(B^*\right)}{dB^*}rB^* + \frac{1}{2}s_B^{\,2}B^{*2}\frac{d^2P^{(k)}\left(B^*\right)}{dB^{*2}} - rP^{(k)}\left(B^*\right) = \frac{P^{(k)}\left(B^*\right) - P^{(k-1)}\left(B^*\right)}{t/n} \tag{9}$$

Para a determinação de $P^{(k)}\left(B^*\right)$ é necessário conhecer a expressão de $P^{(k-1)}\left(B^*\right)$, pelo que esta equação deve ser resolvida para $k = 1,2,3,4$[10]. Como se pode constatar a configuração desta equação apresenta alguma simplificação em relação à equação definida

[9] $\underline{B_k}^*$ corresponde ao valor crítico da propriedade hipotecada, deduzido do valor actualizado do rendimento fixo

[10] k corresponde ao número de sub períodos em relação ao número total de intervalos de tempo, $n = 4$, considerados no modelo. Assim, é determinada a expressão do valor da hipoteca relativa a $\frac{kt}{n}$ períodos de tempo, com $k = 1,2,3,4$.

em (5), uma vez que a função preço da opção passa a ser função de uma única variável, o valor da propriedade hipotecada.

Neste âmbito, o problema a resolver, válido para $B^* \geq \underline{B_k}^*$, corresponde a:

$$V^{(k)}\left(B^*\right) = \frac{C}{r}\left(1 - \frac{1}{\left(1 + r\frac{t}{n}\right)^n}\right) - P^{(k)}\left(B^*\right) \text{ com } n = 1,2,3,4 \text{ , } K = 1,2,3,4 \text{ e } K \leq n \tag{10}$$

Onde $P^{(k)}\left(B^*\right)$ corresponde ao valor da opção que verifica a equação dada em (9) e $V^{(k)}\left(B^*\right)$ diz respeito ao valor da hipoteca.

Por sua vez, a equação (10) é válida para valores que verifiquem as seguintes restrições:

$$\lim_{B^* \to \infty} V^{(k)}\left(B^*\right) = \frac{C}{r}\left(1 - \frac{1}{\left(1 + r\frac{t}{n}\right)^n}\right) \tag{11}$$

$$\lim_{B^* \to \underline{B_k}^*} V^{(k)}\left(B^*\right) = \underline{B_k} \tag{12}$$

$$\lim_{B^* \to \underline{B_k}^*} \frac{dV^{(k)}\left(B^*\right)}{dB^*} = 1 \tag{13}$$

A condição (11) estipula que o valor da hipoteca coincide com o valor actual dos pagamentos futuros do empréstimo quando o preço da propriedade tende para infinito. Nesta situação, o valor da opção de incumprimento é zero. As restrições (12) e (13) impõem a condição de que, quando o valor da construção tende para o seu valor crítico deduzido do valor actualizado do rendimento fixo, $\underline{B_k}^*$, o valor do contrato hipotecário, $V^{(k)}\left(B^*\right)$, é igual ao preço da propriedade e tem declive unitário. O valor crítico da propriedade corresponde, assim, ao limite superior do intervalo de variação de B, onde o valor da hipoteca é igual ao valor da propriedade hipotecada. Para $B^* \leq \underline{B_k}^*$, o devedor do empréstimo não cumpre com as suas obrigações financeiras e perde a propriedade pelo que o valor da hipoteca é igual ao valor da propriedade. De acordo com estas condições o valor do activo hipotecário, antes do término do contrato, deve verificar a seguinte relação: $V^{(k)}\left(B^*\right) \leq B^*$.

A resolução de (10), sujeita às restrições (11), (12) e (13) permite determinar uma solução geral para o valor da hipoteca, a qual vem dada por diferentes expressões de acordo com o intervalo de variação do preço da propriedade. Considera-se que o tempo total de posse do contrato está dividido em n intervalos, $n = 1,2,3,4$, e que as fórmulas apresentadas correspondem ao valor da hipoteca cujo período de tempo até à maturidade corresponde a $\frac{kt}{n}$ com $k = 1,2,3,4$ e $k \leq n$.

A condição (11) estipula que o valor da hipoteca coincide com o valor actual dos pagamentos futuros do empréstimo quando o preço da propriedade tende para infinito. Nesta situação, o valor da opção de incumprimento é zero. As restrições (12) e (13) impõem a condição de que, quando o valor da construção tende para o seu valor crítico deduzido do valor actualizado do rendimento fixo, $\underline{B_k}^*$, o valor do contrato hipotecário, $V^{(k)}\left(B^*\right)$, é igual ao preço da propriedade e tem declive unitário. O valor crítico da propriedade corresponde, assim, ao limite superior do intervalo de variação de B, onde o valor da hipoteca é igual ao valor da propriedade hipotecada. Para $B^* \leq \underline{B_k}^*$, o devedor do empréstimo não cumpre com as suas obrigações financeiras e perde a propriedade pelo que o valor da hipoteca é igual ao valor da propriedade. De acordo com estas condições o valor do activo hipotecário, antes do término do contrato, deve verificar a seguinte relação: $V^{(k)}\left(B^*\right) \leq B^*$.

A resolução de (10), sujeita às restrições (11), (12) e (13) permite determinar uma solução geral para o valor da hipoteca, a qual vem dada por diferentes expressões de acordo com o intervalo de variação do preço da propriedade. Considera-se que o tempo total de posse do contrato está dividido em n intervalos, $n = 1,2,3,4$, e que as fórmulas apresentadas correspondem ao valor da hipoteca cujo período de tempo até à maturidade corresponde a $\frac{kt}{n}$ com $k = 1,2,3,4$ e $k \leq n$.

Assim para $B^* \geq \underline{B_1^*}$ [11], $k = 1,2,3,4$, $n = 1,2,3,4$ e $k \leq n$ o valor da hipoteca vem:

$$
\begin{aligned}
V_{\left[B^* \geq \underline{B_1^*}\right]}^{(k)}\left(B^*\right) = {} & \frac{C\left(1-\dfrac{1}{\left(1+r\dfrac{t}{n}\right)^n}\right)}{r} - B^{*\frac{b-\sqrt{a_n}}{2ts^2}} \\
& \left[\left(a_k + 2na_{k-1}\left(\frac{ts^2}{a_n} + \frac{\ln\left(B^*\right)}{\sqrt{a_n}}\right)\right)\right. \qquad \text{se } B^* \geq \underline{B_1^*} \qquad (14) \\
& + 2n^2 a_{k-2}\left(\frac{\ln\left(B^*\right)}{\sqrt{a_n}} + \frac{2ts^2}{a_n}\right)^2 + \frac{n^4 a_{k-3}}{3}\left(\frac{30t^3 s^6}{a_n^3}\right. \\
& \left.\left. + \frac{30t^2 s^4 \ln\left(B^*\right)}{a_n^{5/2}} + \frac{9s^2 t \ln\left(B^*\right)^2}{a_n^2} + \frac{\ln\left(B^*\right)^3}{a_n^{3/2}}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Onde:

$a_{k-i} = 0$ para $k - i \leq 0$ e $i = 1,2,3$.

Para $B^* \leq \underline{B_k^*}$ [12] e $k = 1,2,3,4$, o valor da hipoteca vem:

$$
V_{\left[B^* \leq \underline{B_k^*}\right]}^{(k)}\left(B^*\right) = B \qquad \text{se } B^* \leq \underline{B_k^*} \qquad (15)
$$

[11] $\underline{B_1^*}$ corresponde ao preço crítico da propriedade relativo a um período de tempo de posse do contrato igual a $\dfrac{t}{n}$.

[12] Corresponde à zona de incumprimento do contrato.

Relativamente à zona $\underline{B_2}^* \le B^* \le \underline{B_1}^*$, para $k = 2,3,4$, $n = 2,3,4$ e $k \le n$ tem-se:

$$V_{\left[\underline{B_2}^* \le B^* \le \underline{B_1}^*\right]}^{(k)}\left(B^*\right) = \frac{C\left(1 - \frac{1}{\left(1+r\frac{t}{n}\right)^n}\right)\left[\left(1+r\frac{t}{n}\right)^{k-1} - 1\right]}{r\left(1+r\frac{t}{n}\right)^{k-1}} - B^{*\left(\frac{b-\sqrt{a_n}}{2ts^2}\right)}$$

$$\left[y_{k-1} + 2ny_{k-2}\left(\frac{ts^2}{a_n} + \frac{\ln\left(B^*\right)}{\sqrt{a_n}}\right) + 2n^2 y_{k-3}\left(\frac{\ln\left(B^*\right)}{\sqrt{a_n}} + \frac{2ts^2}{a_n}\right)^2\right]$$

$$+ B^* + \frac{f\left(1 - \frac{1}{\left(1+r\frac{t}{n}\right)^n}\right)}{r\left(1+r\frac{t}{n}\right)^{k-1}} - B^{*\left(\frac{b+\sqrt{a_n}}{2ts^2}\right)}\left[z_{k-1} + 2nz_{k-2}\right.$$

$$\left.\left(\frac{ts^2}{a_n} - \frac{\ln\left(B^*\right)}{\sqrt{a_n}}\right) + 2n^2 z_{k-3}\left(\frac{\ln\left(B^*\right)}{\sqrt{a_n}} - \frac{2ts^2}{a_n}\right)^2\right] \quad \text{se } \underline{B_2}^* \le B^* \le \underline{B_1}^* \qquad (16)$$

Onde:

$y_{k-i} = 0$ e $z_{k-i} = 0$ para $k - i \le 0$ e $i = 2,3$

Por sua vez, para $\underline{B_3}^* \le B^* \le \underline{B_2}^*$, $k=3,4$, $n=3,4$ e $k \le n$, o valor da hipoteca vem dado por:

$$V_{\left[\underline{B_3}^* \le B^* \le \underline{B_2}^*\right]}^{(k)}\left(B^*\right)=\frac{C\left(1-\frac{1}{\left(1+r\frac{t}{n}\right)^n}\right)\left[\left(1+r\frac{t}{n}\right)^{k-2}-1\right]}{r\left(1+r\frac{t}{n}\right)^{k-2}}-\left(B^*\right)^{\frac{b+\sqrt{a_n}}{2ts^2}}\left(w_{k-2}+2nw_{k-3}\left(\frac{ts^2}{a_n}-\frac{\ln\left(B^*\right)}{\sqrt{a_n}}\right)\right)+\frac{f\left(1-\frac{1}{\left(1+r\frac{t}{n}\right)^n}\right)}{r\left(1+r\frac{t}{n}\right)^{k-2}}$$

$$+B^*-B^{*\frac{b-\sqrt{a_n}}{2ts^2}}\left(x_{k-2}+2nx_{k-3}\left(\frac{ts^2}{a_n}+\frac{\ln\left(B^*\right)}{\sqrt{a_n}}\right)\right) \qquad \text{se } \underline{B_3}^* \le B^* \le \underline{B_2}^* \tag{17}$$

Onde:

$w_{k-i}=0$ e $x_{k-i}=0$ para $k-i \le 0$ e $i=3$

Para $\underline{B_4}^* \le B^* \le \underline{B_3}^*$, $k=4$ e $n=4$, o valor da hipoteca vem:

$$V_{\left[\underline{B_4}^* \le B^* \le \underline{B_3}^*\right]}^{(k)}\left(B^*\right)=\frac{C\left(1-\frac{1}{\left(1+r\frac{t}{n}\right)^n}\right)\left[\left(1+r\frac{t}{n}\right)-1\right]}{r\left(1+r\frac{t}{n}\right)}+B^*+\frac{f\left(1-\frac{1}{\left(1+r\frac{t}{n}\right)^n}\right)}{r\left(1+r\frac{t}{n}\right)}-u_1B^{*\frac{b+\sqrt{a_n}}{2ts^2}}-v_1B^{*\frac{b-\sqrt{a_n}}{2ts^2}} \qquad \text{se } \underline{B_4}^* \le B^* \le \underline{B_3}^* \tag{18}$$

Relativamente às equações (14), (15), (16), (17) e (18), vem:

$$a_n = \left(2rt + ts^2\right)^2 + 8ns^2$$

$$b = ts^2 - 2rt$$

Estas diferentes expressões para o valor da hipoteca contêm um conjunto de parâmetros cujo valor é determinado através da resolução de um sistema de equações. Assim, vem:

Para $k = 1$, $n = 1,2,3,4$ e $B^* = \underline{B_1}^*$, vem:

$$V_{\left[B^* \geq \underline{B_1}^*\right]}^{(k)}\left(B^*\right) = V_{\left[B^* \leq \underline{B_1}^*\right]}^{(k)}\left(B^*\right) \tag{19}$$

$$\frac{dV_{\left[B^* \geq \underline{B_1}^*\right]}^{(k)}\left(B^*\right)}{dB^*} = 1$$

Para $k = 2,3,4$, $n = 2,3,4$, $k \leq n$ e $B^* = \underline{B_k}^*$, vem:

$$V_{\left[B^* \leq \underline{B_k}^*\right]}^{(k)}\left(B^*\right) = V_{\left[\underline{B_k}^* \leq B \leq \underline{B_{k-1}}^*\right]}^{(k)}\left(B^*\right) \tag{20}$$

$$\frac{dV_{\left[\underline{B_k}^* \leq B \leq \underline{B_{k-1}}^*\right]}^{(k)}\left(B^*\right)}{dB^*} = 1$$

Para $k = 2,3,4$, $n = 2,3,4$, $k \leq n$ e $B^* = \underline{B_1}^*$, vem:

$$V_{\left[B^* \geq \underline{B_1}^*\right]}^{(k)}\left(B^*\right) = V_{\left[\underline{B_2}^* \leq B^* \leq \underline{B_1}^*\right]}^{(k)}\left(B^*\right) \tag{21}$$

$$\frac{dV_{\left[B^* \geq \underline{B_1}^*\right]}^{(k)}\left(B^*\right)}{dB^*} = \frac{dV_{\left[\underline{B_2}^* \leq B^* \leq \underline{B_1}^*\right]}^{(k)}\left(B^*\right)}{dB^*}$$

Para $k=3{,}4$, $n=3{,}4$, $k \le n$ e $B^{*}=\underline{B_2}^{*}$, vem:

$$V_{\left[\underline{B_3}^{*}\le B^{*}\le \underline{B_2}^{*}\right]}^{(k)}\left(B^{*}\right)=V_{\left[\underline{B_2}^{*}\le B^{*}\le \underline{B_1}^{*}\right]}^{(k)}\left(B^{*}\right) \tag{22}$$

$$\frac{dV_{\left[\underline{B_3}^{*}\le B^{*}\le \underline{B_2}^{*}\right]}^{(k)}\left(B^{*}\right)}{dB^{*}}=\frac{dV_{\left[\underline{B_2}^{*}\le B^{*}\le \underline{B_1}^{*}\right]}^{(k)}\left(B^{*}\right)}{dB^{*}}$$

Para $k=4$ e $B^{*}=\underline{B_3}^{*}$, vem:

$$V_{\left[\underline{B_4}^{*}\le B^{*}\le \underline{B_3}^{*}\right]}^{(k)}\left(B^{*}\right)=V_{\left[\underline{B_3}^{*}\le B^{*}\le \underline{B_2}^{*}\right]}^{(k)}\left(B^{*}\right) \tag{23}$$

$$\frac{dV_{\left[\underline{B_4}^{*}\le B^{*}\le \underline{B_3}^{*}\right]}^{(k)}\left(B\right)}{dB^{*}}=\frac{dV_{\left[\underline{B_3}^{*}\le B^{*}\le \underline{B_2}^{*}\right]}^{(k)}\left(B\right)}{dB^{*}}$$

Da resolução de (19) para $n=1$ e de (20) para $n=2{,}3{,}4$ obtém-se o valor crítico, deduzido do valor actualizado do rendimento fixo, válido para $C \ne f$:

$$\underline{B_1}^{*}=\frac{\left(\left(\frac{n+rt}{n}\right)^{n}-1\right)\left(C-f\right)\left(-b+\sqrt{a_n}\right)}{r\left(\frac{n+rt}{n}\right)^{n}\left(2rt+ts^{2}+\sqrt{a_n}\right)} \tag{24}$$

$$\underline{B_K}^{*}=e^{\left(\frac{ts^{2}\left(\ln\left(\frac{4c^{2}(n+rt)^{2}a_n}{t^{2}\left(\left(\frac{n+rt}{n}\right)^{n}-1\right)^{2}(C-f)^{2}\left(-b+\sqrt{a_n}\right)^{2}}\right)+2n\ln\left(\frac{n+rt}{n}\right)\right)}{-b-\sqrt{a_n}}\right)} \tag{25}$$

Onde: para $K=2$ vem $c=z_1$, para $K=3$ vem $c=w_1$, para $K=4$ vem $c=u_1$.

2.4 A aplicação da extrapolação de *Richardson* no modelo de valorização de uma hipoteca comercial

A aplicação da extrapolação de *Richardson* permite a obtenção de uma boa estimativa para o valor de uma função quando o tempo contínuo é substituído por tempo discreto. Embora na dedução das fórmulas se considere o tempo discreto dividido num número de intervalos relativamente reduzido - neste caso, quatro períodos de tempo, como anteriormente se mencionou - os resultados alcançados com a aplicação da extrapolação de *Richardson*, estão muito próximos daqueles que se obteriam caso se considerasse o tempo contínuo[13]. Daí que este método seja o mais aconselhado a utilizar, no modelo aqui proposto.

Neste âmbito, considere-se que os valores relativos à hipoteca obtidos a partir das equações determinadas anteriormente, para $K = 1,2,3,4$, são funções dos respectivos sub-períodos de tempo aplicados para cada caso, isto é, de $t, \frac{t}{2}, \frac{t}{3}, \frac{t}{4}$, respectivamente. Designem-se essas funções por $\hat{V}\left(\frac{t}{n}\right)$, com $n = 1,2,3,4$.

De acordo com Carr (1998), a utilização da extrapolação de *Richardson* é adequada uma vez que a função $\hat{V}\left(\frac{t}{n}\right)$ pode ser representada através da série de *Mac-Laurin*:

$$\hat{V}\left(\tfrac{t}{n}\right) = \hat{V}(0) + \tfrac{t}{n}\hat{V}'(0) + \frac{\left(\frac{t}{n}\right)^2}{2!}\hat{V}''(0) + \ldots + \frac{\left(\frac{t}{n}\right)^n}{n!}\hat{V}^{(n)}(0) + O\left(\left(\tfrac{t}{n}\right)^n\right) \tag{26}$$

onde $O\left(\left(\frac{t}{n}\right)^n\right)$ representa o erro da aproximação, o qual tende para zero quando o n tende para infinito. O valor extrapolado da hipoteca corresponde à solução de $\hat{V}(0)$. Para que tal resultado seja possível de alcançar considere-se:

$$\hat{V}\left(\tfrac{t}{n}\right) \approx \hat{V}(0) + \tfrac{t}{n}\hat{V}'(0) + \frac{\left(\frac{t}{n}\right)^2}{2!}\hat{V}''(0) + \frac{\left(\frac{t}{n}\right)^3}{3!}\hat{V}'''(0) \tag{27}$$

Considerando $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$, (27) é transformada num sistema de quatro equações, com quatro variáveis, $\hat{V}(0)$, $\hat{V}'(0)$, $\hat{V}''(0)$ e $\hat{V}'''(0)$. A resolução deste sistema permite encontrar o valor extrapolado da hipoteca:

$$\hat{V}(0) = \frac{32}{3}\hat{V}\left(\tfrac{t}{4}\right) - \frac{27}{2}\hat{V}\left(\tfrac{t}{3}\right) + 4\hat{V}\left(\tfrac{t}{2}\right) - \frac{1}{6}\hat{V}(t) \tag{28}$$

[13] Para compreender como é aplicada a extrapolação à avaliação de opções, veja-se Carr (1998)

O mesmo tipo de raciocínio deve ser aplicado para a determinação do valor crítico extrapolado do activo subjacente:

$$\underline{\hat{B}_4}(0)=\frac{32}{3}\underline{\hat{B}_4}\left(\tfrac{t}{4}\right)-\frac{27}{2}\underline{\hat{B}_3}\left(\tfrac{t}{3}\right)+4\underline{\hat{B}_2}\left(\tfrac{t}{2}\right)-\frac{1}{6}\underline{\hat{B}_1}(t) \tag{29}$$

Com a aplicação da extrapolação de *Richardson*, são determinados os valores extrapolados do preço crítico, $\underline{\hat{B}_4}(0)$ e da hipoteca, $\hat{V}(0)$, o que permite obter uma aproximação muito satisfatória para o valor destas funções.

3. Análise de resultados do modelo de avaliação de hipotecas comerciais

Esta secção apresenta e discute, gráfica e numericamente, os resultados proporcionados pelo modelo geral de valorização de hipotecas comerciais anteriormente desenvolvido, através da consideração de um conjunto básico de parâmetros económicos, utilizando para tal os pressupostos padrão na literatura[14]. Esta análise é efectuada através da apresentação de gráficos, representativos da evolução do valor do activo hipotecário, assim como de uma tabela onde são apresentados valores numéricos para o preço crítico e para o valor da hipoteca.

3.1 Análise gráfica do valor da hipoteca

A representação gráfica do valor da hipoteca permite, desde já, avançar com uma conclusão que é geral a toda a análise desta secção. Verifica-se que variações positivas no preço da propriedade implicam também um acréscimo no valor da hipoteca, sendo este valor inferior ao preço da propriedade quando este preço é superior ao preço crítico, enquanto que para valores inferiores ao preço crítico, o valor da hipoteca coincide com o valor da propriedade.

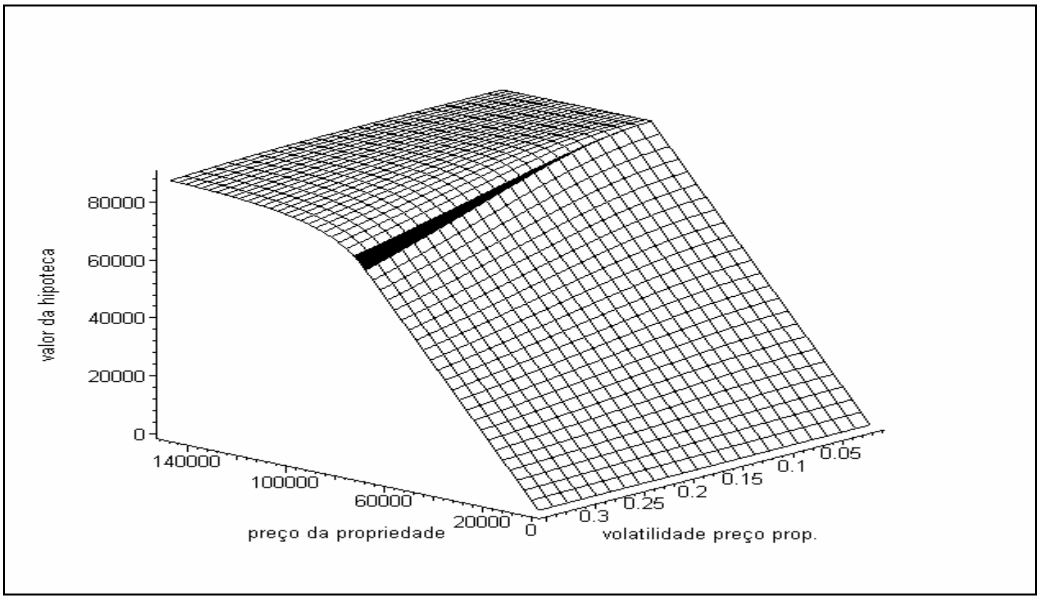
Esta parte do trabalho inicia-se com a apresentação de um conjunto de gráficos em três dimensões. A representação destes gráficos considera o tempo dividido em dois intervalos[15], isto é, $n=2$, o que resulta na consideração de três funções distintas nas figuras apresentadas seguidamente.

---

[14] Veja-se, por exemplo, os trabalhos de Titman e Torous (1989) e de Riddiough e Thompson (1993).

[15] Considera-se $n=2$ em vez de $n=4$, porque ao considerar o tempo dividido em quatro intervalos, a representação gráfica da opção é dada por 5 funções distintas, sendo as mesmas muito extensas o que, para além de consumir muito tempo, necessita de um computador com grande capacidade. Deste modo, optou-se por considerar o tempo dividido em dois intervalos, o que permite obter o mesmo tipo de conclusões acerca da relação que se estabelece entre o valor da opção, por um lado, e o preço da propriedade e dos outros parâmetros do modelo, por outro.

Figura 1 Valor da Hipoteca como função de B e s

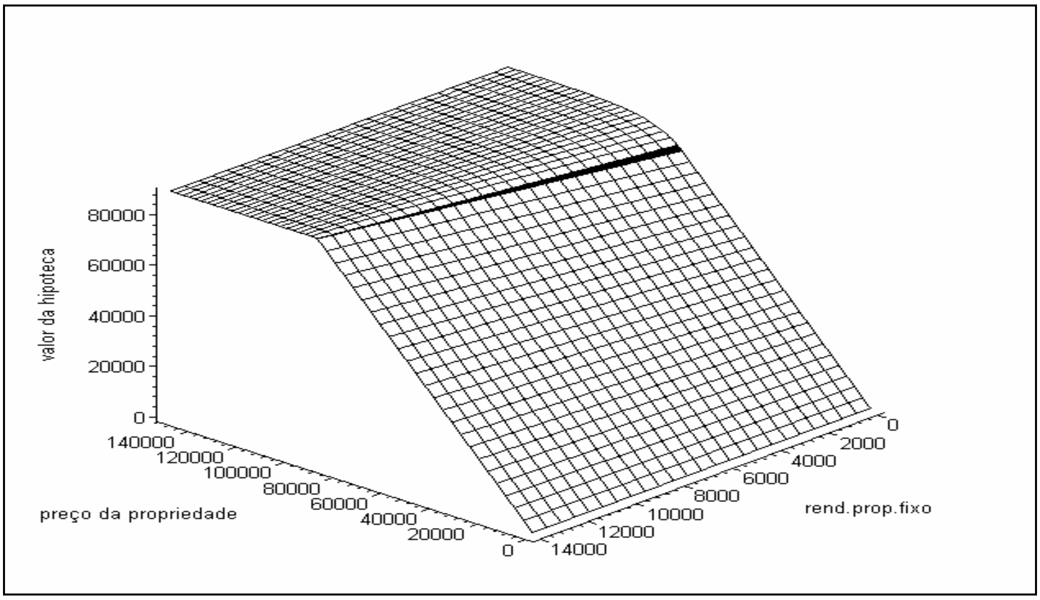


Subjacente à construção desta figura os valores dos parâmetros são os seguintes: n, o número de intervalos de tempo é 2; t, o tempo para a maturidade é 10 anos; r, a taxa de juro é 0,075; C, o valor da prestação anual constante é 14 215; e, f, o valor do rendimento constante anual é 7000.

A Figura 1 apresenta o valor da hipoteca como função do preço e da volatilidade da propriedade. A superfície com inclinação unitária e positiva[16] corresponde à zona de incumprimento do contrato, enquanto que a restante parte da figura, relativa à superfície com menor declive e com alguma curvatura, representa a zona onde o pagamento das prestações do empréstimo hipotecário, por parte do devedor do mesmo, deve continuar normalmente. No que se refere ao efeito da volatilidade do preço da propriedade, verifica-se que à medida que a volatilidade aumenta, o preço crítico diminui, reduzindo a zona de incumprimento do contrato. Por sua vez, na zona de cumprimento do contrato, uma variação positiva na volatilidade, torna o valor da hipoteca mais sensível a variações no preço da propriedade, sobretudo para os valores do preço da propriedade que estão mais próximos do valor crítico.

[16] Note-se que o eixo relativo ao preço da propriedade está invertido, decrescendo a partir da origem.

Figura 2 Valor da Hipoteca como função de B e f



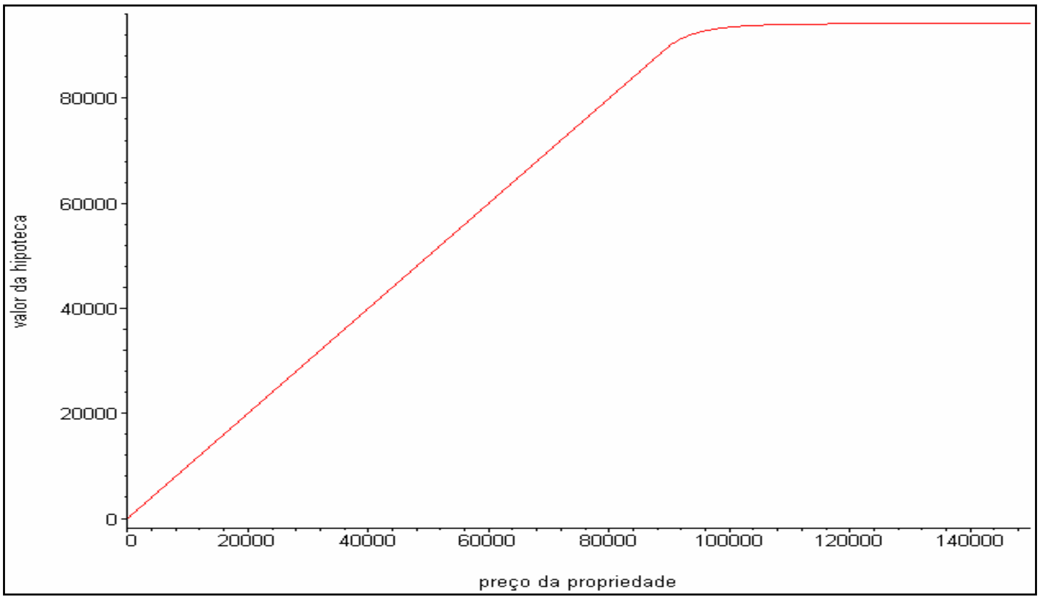
Subjacente à construção desta figura os valores dos parâmetros são os seguintes: n, o número de intervalos de tempo é 2; t, o tempo para a maturidade é 10 anos; r, a taxa de juro é 0,075; s, a volatilidade do preço da propriedade é 0,15; e, C, o valor da prestação anual constante é 14 215.

A Figura 2, apresenta o valor da hipoteca como função do preço da propriedade e do rendimento anual constante. Da análise da figura, verifica-se que para valores da propriedade superiores ao preço crítico, à medida que o rendimento aumenta, o valor da hipoteca se revela menos sensível a variações no preço da propriedade.

A Figura 3 representa o valor da hipoteca como função do preço da propriedade. Neste caso já foi possível considerar o tempo dividido em 4 intervalos temporais o que implica a consideração de cinco funções distintas, de acordo com os correspondentes intervalos de variação do preço da propriedade, conforme foi demonstrado anteriormente.

Verifica-se assim que, tal como foi afirmado no início desta secção do trabalho, a linha representativa do valor da hipoteca como função do preço da propriedade tem inclinação positiva, estando dividida em duas zonas distintas: uma zona de incumprimento, para valores da propriedade inferiores ao preço crítico, onde o valor da hipoteca coincide com o valor da propriedade, que é representada graficamente por uma recta com inclinação positiva; uma zona de cumprimento do contrato, para valores da propriedade superiores ao preço crítico, cuja representação gráfica representa uma função crescente com taxa de crescimento decrescente.

Figura 3 Valor da Hipoteca como função de B, para $f \neq 0$



Subjacente à construção desta figura os valores dos parâmetros são os seguintes: n, o número de intervalos de tempo é 4; t, o tempo para a maturidade é 10 anos; r, a taxa de juro é 0,075; s, a volatilidade do preço da propriedade é 0,15; C, o valor da prestação anual constante é 14 215; $\underline{B_4}$, o preço da propriedade crítico é 89.365; e, f, o valor do rendimento constante anual é 8500.

3.2 Resultados numéricos do preço da propriedade crítico e do valor da hipoteca

Para terminar é apresentada a Tabela 1 onde figuram os resultados numéricos obtidos a partir da aplicação do modelo desenvolvido ao longo deste trabalho, para $n = 4$, relativos ao preço crítico da propriedade e ao valor da hipoteca comercial. As colunas (1), (2), (3) e (4) apresentam diferentes valores para os parâmetros do modelo, enquanto que as colunas (5) e (6) dizem respeito aos valores extrapolados do preço crítico, $\underline{\hat{B}_4}(0)$, e do valor da hipoteca, $\hat{V}(0)$. Aos valores obtidos foi, posteriormente aplicada a extrapolação de *Richardson*, de acordo com a fórmula apresentada anteriormente. A apresentação destas tabelas permite confirmar, numericamente, algumas das conclusões retiradas aquando da análise gráfica anteriormente efectuada. Assim, verifica-se que, quando o preço crítico é superior ao valor da propriedade hipotecada, o valor da hipoteca coincide com o valor da propriedade, enquanto que para valores da propriedade superiores ao preço crítico, o valor da hipoteca é sempre inferior ao valor da propriedade.

Tabela 1 Valores Relativos ao Preço Crítico e ao Valor de uma Hipoteca cujo Rendimento Obtido com a Propriedade é Fixo

(1) t	(2) s_B	(3) f	(4) B	(5) $\underline{\hat{B}_4}(0)$	(6) $\hat{V}(0)$
3	0,150	7000	50 000	89 555	50 000
			100 000	89 555	96 270
			150 000	89 555	99 970
		8500	50 000	89 953	50 000
			100 000	89 953	96 454
			150 000	89 953	99 978
		10000	50 000	90 351	50 000
			100 000	90 351	96 636
			150 000	90 351	99 984
	0,175	7000	50 000	86 806	50 000
			100 000	86 806	95 232
			150 000	86 806	99 889
		8500	50 000	87 341	50 000
			100 000	87 341	95 469
			150 000	87 341	99 913
		10000	50 000	87 875	50 000
			100 000	87 875	95 702
			150 000	87 875	99 933
	0,200	7000	50 000	83 986	50 000
			100 000	83 986	94 154
			150 000	83 986	99 717
		8500	50 000	84 661	50 000
			100 000	84 661	94 442
			150 000	84 661	99 769
		10000	50 000	85 335	50 000
			100 000	85 335	94 730
			150 000	85 335	99 815

Os valores dos restantes parâmetros desta tabela são os seguintes: n, o número de intervalos de tempo é 4; C, a prestação anual constante é 37 224; e, r, a taxa de juro é 0.075.

O objectivo desta secção foi atestar a viabilidade do modelo proposto neste trabalho. Através da análise gráfica e numérica mostrou-se que os resultados alcançados são coerentes com a realidade financeira. No entanto, os mesmos carecem de análises comparativas com outros trabalhos da área, devido ao modelo aqui proposto ter uma abordagem diferente dos restantes estudos sobre esta matéria, nomeadamente no desenvolvimento de uma solução fechada e da não consideração da taxa de juro como variável estocástica.

4. Conclusão

Neste trabalho é desenvolvido um modelo de avaliação de activos hipotecários comerciais, baseado na técnica de análise de fluxos contingentes, capaz de melhorar o actual estado da arte, através da obtenção de uma solução fechada. O método utilizado recorre aos princípios formulados na avaliação de opções e aplica-os na determinação do valor de um empréstimo hipotecário. Os resultados obtidos são compatíveis com a intuição económica subjacente à natureza do contrato.

Este artigo pretende dar um pequeno contributo numa área de investigação financeira pouco explorada até ao presente: o desenvolvimento de soluções fechadas para a avaliação de activos hipotecários. O modelo aqui desenvolvido constitui uma primeira abordagem a um tema onde o número de estudos publicados é quase inexistente. No seguimento deste trabalho, é possível apontar algumas sugestões para desenvolvimentos futuros. Nomeadamente, será desejável o desenvolvimento de uma fórmula geral que possa ser aplicada a qualquer número de intervalos de tempo e também o desenvolvimento de um modelo cujo valor da hipoteca seja dado por uma solução analítica na qual o tempo seja considerado contínuo.

Espera-se que este trabalho tenha contribuído, de alguma forma, para a produção de avanços num domínio financeiro pouco investigado até ao presente.

Bibliografia

Azevedo-Pereira, J. A., D.P. Newton e D.A. Paxson (2000) Numerical Solution of a Two State Variable Contingent Claims Mortgage Valuation Model, *Portuguese Review of Financial Markets*, 3, 1, 35-65.

Azevedo-Pereira, J. A., D.P. Newton e D.A. Paxson (2002) UK Fixed Rate Repayment Mortgage and Mortgage Indemnity Valuation, *Real Estate Economics*, 30, 2, 185-211.

Azevedo-Pereira, J. A., D.P. Newton e D.A. Paxson (2003) Fixed Rate Endowment Mortgage and Mortgage Indemnity Valuation, *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 26, 2-3, 197-221.

Black, F. e M. Scholes (1973) The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 81, 3, 637-659.

Carr, P. (1998) Randomization and the American Put, The Review of Financial Studies, 11, 3, 597-626.

Carr, P. e D. Faguet (1996) *Valuing finite-lived options as perpetual*, Morgan Stanley, Working Paper.

Ciochetti, B.A. e K.D. Vandell (1999) The Performance of Commercial Mortgages, *Real Estate Economics*, 27, 1, 27-61.

Collin-Dufresne, P. e J.P. Harding (1999) A Closed Form Formula for Valuing Mortgages, *The Journal of Real Estate Finance and Economics*, 19, 2, 133-146.

Cunningham, D. e P.H. Hendershott (1984) Pricing FHA Mortgage Default Insurance, *Housing Finance Review*, 3, 4, 383-392.

Deng, Y. (1997) Mortgage Termination: An Empirical Hazard Model with a Stochastic Term Structure, *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 14, 3, 309-331.

Downing, C., R. Stanton e N.E. Wallace (2003) *An Empirical Test of a Two-Factor Mortgage Valuation Model: How Much Do House Prices Matter?*, Paper RPF-296, Research Program in Finance Working Papers.

Epperson, J.F., J.B. Kau, D.C. Keenan e W.J. Muller III (1985) Pricing Default Risk in Mortgages, *Journal of AREUEA*, 13, 3, 261-272.

Hilliard, J.E., J.B. Kau e V.C: Slawson (1998) Valuing Prepayment and Default in a Fixed-Rate Mortgage: A Bivariate Binomial Options Pricing Technique, 26, 3, 431-468.

Kau, J.B., D.C. Keenan, W.J. Muller e J.F. Epperson (1987) The Valuation and Securitization of Commercial and Multifamily Mortgages, *Journal of Banking and Finance*, 11, 525-546.

Kau, J.B., D.C. Keenan, W.J. Muller e J.F. Epperson (1990) Pricing Commercial Mortgages and Their Mortgage-Backed Securities, *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 3, 4, 333-356.

Kau, J.B., D.C. Keenan, W.J. Muller III e J.F. Epperson (1992) A Generalized Valuation Model for Fixed-Rate Residencial Mortgages, *Journal of Money, Credit and Banking*, 24, 3, 279-299.

Kau, J.B., D.C. Keenan, W.J. Muller III e J.F. Epperson (1993a) Option Theory and Floating-Rate Securities with a Comparison of Adjustable and Fixed-Rate Securities, *Journal of Business*, 66, 4, 595-618.

Kau, J.B., D.C. Keenan, W.J. Muller e J.F. Epperson (1993b) An Option Based Pricing Model of Private Mortgage Insurance, *Journal of Risk and Insurance*, 60, 2, 288-299.

Kau, J.B., D.C. Keenan, W.J. Muller III e J.F. Epperson (1995) The Valuation at Origination of Fixed Rate Mortgages with Default and Prepayment, *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 11, 1, 5-39.

Merton, R.C. (1973) The Theory of Rational Option Pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 1, 141-183.

Riddiough, T. J. e H.E. Thompson (1993) Commercial Mortgage Pricing with Unobservable Borrower Default Costs, *Journal of the American Real Estate and Urban Economics Association*, 21, 3, 265-291.

Schwartz, E.S. e W.N.Torous (1992) Prepayment, Default, and the Valuation of Mortgage Pass-Through Securities, *Journal of Business*, 65, 2, 221-239.

Titman, S. e W. Torous (1989) Valuing Commercial Mortgages: An Empirical Investigation of the Contingent-Claims Approach to Pricing Risky Debt, The *Journal of Finance*, 44, 2, 345-373.

Yang, T.T., H. Buist e I.F. Megbolugbe (1998) An Analysis of the Ex Ante Probabilities of Mortgage Prepayment and Default, *Real Estate Economics*, 26, 4, 651-676.