# REVISITAR OS ESTUDOS CURRICULARES

onde estamos e para onde vamos?

XIX COLÓQUIO

AFIRSE
AIPELF
Section Portugaise

ISBN: 978-989-8272-14-0

atas

ATAS DO XIX COLÓQUIO DA SECÇÃO PORTUGUESA DA AFIRSE 2012

# *Revisitar os estudos curriculares: Onde estamos e para onde vamos?*

*Revisiter les Etudes Curriculaires:où en sommes-nous et où allons-nous?*

**2, 3 e 4 de Fevereiro de 2012**

**Lisboa, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa**

**Comissão Organizadora ♦**
**Comité d'Organisation**

Albano Estrela

Louis Marmoz

Maria Teresa Estrela

Manuela Esteves

Maria João Mogarro

Luís Tinoca

Fernanda Veiga Gomes

Júlia Ferreira

Maria Gabriela Santos

Patrícia Figueiredo

Joana Marques

**Comissão Científica ♦**
**Comité Scientifique**

Maria Teresa Estrela (IE-UL)

Maria João Mogarro (IE-UL)

José Carlos Morgado (IE-UM)

José Brites Ferreira (ESEL-IPL)

Manuela Esteves (IE-UL)

Jesus Maria Sousa (DCE-UM)

Maria Assunção Flores (IE-UL)

Fernanda Veiga Gomes (IE-UL)

Cecília Galvão (IE-UL)

Luísa Alonso (IE-UL)

Maria Céu Roldão (UCP)

Helena Peralta (IE-UL)

Luís Tinoca (IE-UL)

Maria João Cardona (ESE-IPS)

Teresa Vasconcelos (ESE-IPL)

Ivone Gaspar (UA)

Carlinda Leite (FPCE-UP)

Preciosa Fernandes (FPCE-UP)

**Ficha Técnica ♦ Fiche technique**

*Concepção, composição e grafismo*

Mónica Raleiras

Patrícia Figueiredo

**ISBN:**

978-989-8272-14-0

AFIRSE AIPELF Section Portugaise

# Uma experiência de ensino com alunos do 9.º ano para promover o desenvolvimento do pensamento algébrico

SANDRA NOBRE

Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Escola Básica 2, 3 Professor Paula Nogueira, e Bolseira da Fundação para a Ciência e Tecnologia

NÉLIA AMADO

FCT da Universidade do Algarve e Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

JOÃO PEDRO DA PONTE

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

## Introdução

As orientações curriculares atuais enfatizam que o ensino da Matemática deve decorrer de forma coerente, incidir numa Matemática relevante e ser bem articulado nos diferentes anos de escolaridade. Para a Álgebra, um tema matemático onde a maioria dos alunos demonstra bastantes dificuldades de aprendizagem, o actual programa propõe um alargamento do seu estudo aos três ciclos de ensino, de forma articulada. É logo a partir dos primeiros anos que deve ser feito um trabalho de suporte para os ciclos seguintes.

O 9.º ano de escolaridade antecede a transição do ensino básico para o secundário. Os alunos que pretendem prosseguir estudos necessitam de um conhecimento mais profundo de Álgebra, mas a compreensão de conceitos algébricos que requer maior abstracção torna-se difícil para a maioria. Muitos alunos não desenvolvem uma compreensão adequada do simbolismo algébrico e revelam dificuldade no recurso a este tipo de representação em diversos contextos. Frequentemente, os alunos ao usarem métodos formais algébricos, na resolução de equações, operarem com os símbolos de uma forma mecânica, sem compreenderem o significado das operações que realizam. Estas e outras dificuldades na aprendizagem da Álgebra contribuem para aumentar o desinteresse pela disciplina e diminuir a taxa de sucesso escolar.

O desenvolvimento do pensamento algébrico é uma das grandes finalidades no ensino da Matemática (Ponte et al., 2007). O Programa de Matemática do Ensino Básico apresenta como propósito principal do ensino da Álgebra:

> Desenvolver nos alunos a linguagem e o pensamento algébricos, bem como a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na

> exploração e modelação de situações em contextos diversos. (Ponte et al., 2007, p. 55)

A resolução de problemas, recomendada neste programa, é uma actividade que favorece a realização de experiências informais pelos alunos antes da manipulação algébrica formal. A folha de cálculo é vista como um excelente meio para estabelecer relações entre a linguagem algébrica e os métodos gráficos na realização de tarefas e na resolução de problemas.

Neste artigo, descrevemos parte de uma experiência de ensino realizada em tópicos de Álgebra, numa turma do 9.º ano, onde é abordado o estudo dos sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas. Pretendemos analisar de que modo esta experiência promoveu o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos neste tópico, em particular, na aprendizagem do método de substituição da resolução de sistemas.

## PENSAMENTO ALGÉBRICO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

O quadro conceptual do estudo tem como aspeto central o pensamento algébrico, sendo também sustentado por teoria desenvolvida ao nível das representações matemáticas, da resolução de problemas e da folha de cálculo como recurso pedagógico (figura 1).


Figura 1: Esquema do quadro conceptual

O desenvolvimento do pensamento algébrico está estreitamente relacionado com a experiência matemática dos alunos. Kieran (2007) refere que, num nível mais avançado, este pensamento manifesta-se no uso de expressões simbólicas e de equações em vez de números e operações. No entanto, para os alunos que ainda não aprenderam as notações algébricas, as formas de pensamento mais gerais sobre números, operações e notações, como o sinal de igual, podem efectivamente ser consideradas algébricas.

Pensar algebricamente abrange conhecer várias formas de representação, nomeadamente as simbólicas. Implica flexibilidade na mudança entre modos de representação, bem como capacidade de operar com símbolos, em contexto e quando adequado (Schoenfeld, 2008). Este modo de pensamento contempla também o trabalho com estruturas matemáticas e o uso de símbolos na resolução de problemas, incluindo o sentido do símbolo, entendido como a capacidade de interpretar e usar de forma criativa os símbolos matemáticos (Arcavi, 2006).

Zazkis e Liljedahl (2002) afirmam que o termo Álgebra engloba dois aspectos distintos: pensamento algébrico e simbolismo. Estes autores afirmam que actualmente há uma tendência para separar estes aspetos, por duas razões: (i) reconhecimento da possibilidade de manipulação simbólica sem sentido e (ii) um maior foco na estrutura do que nos cálculos, nos primeiros anos. Nesta perspectiva, o uso de simbolismo algébrico deve ser tido como um indicador de pensamento algébrico mas o facto de não se usar notação algébrica não deve ser julgado como uma incapacidade de pensar algebricamente.

Reconhecemos que a utilização do simbolismo algébrico é uma das grandes potencialidades da Álgebra pois constitui uma ferramenta poderosa para a resolução de problemas, permitindo expressar ideias matemáticas de forma rigorosa e condensada. No entanto, neste estudo, assumimos esta perspectiva mais abrangente de pensamento algébrico, considerando que este se manifesta não só pelo uso do simbolismo algébrico, mas também através de outras representações que envolvem palavras e relações gerais entre números.

A resolução de problemas é uma actividade destacada na literatura como sendo benéfica no estudo da Álgebra. Windsor (2010) destaca que esta atividade constitui uma oportunidade para enriquecer e transformar o pensamento dos alunos, sublinhando que o professor pode incentivá-los a pensar algebricamente ao invés de os influenciar simplesmente a recorrer a uma determinada estratégia ou procedimento. Salienta ainda que é através da discussão durante o processo de resolução que pode ser desenvolvida uma perspectiva algébrica da Matemática, acrescentando que é fundamental que os alunos reflictam acerca das suas estratégias e partilhem as suas experiências de modo a desenvolverem diferentes formas de entender e abordar os problemas.

Kieran (2006) afirma que, embora à primeira vista, o pensamento aritmético possa parecer um obstáculo para o desenvolvimento do pensamento algébrico, a verdade é que ele também pode ser visto como uma via para esse desenvolvimento. Entre os processos aritméticos mais utilizados neste tipo de problemas, destacam-se as estratégias de tentativa e erro e de *unwind* (desfazer).

A resolução de problemas pode ser um bom veículo para estimular o uso de uma grande diversidade de representações e, além disso, possibilita o estabelecimento de conexões entre diferentes tipos de representação e a passagem de umas para outras (Dufour-Janvier, Bednarz & Bélanger, 1987).

As representações constituem veículos para a compreensão e interpretação de ideias matemáticas e, simultaneamente, são ferramentas para o desenvolvimento de estratégias na resolução de problemas, proporcionando múltiplas concretizações de um conceito ou estrutura matemática. A apropriação de propriedades comuns às diversas representações contribui para a caracterização do referido conceito ou estrutura. Podemos distinguir duas categorias de representações: "internas" e "externas". Nas primeiras, encontram-se as imagens mentais que correspondem às formulações internas construídas pelo indivíduo sobre uma dada realidade. As segundas são organizações simbólicas externas (símbolos, figuras, diagramas, gráficos, etc.) cujo objectivo é representar ou codificar uma determinada "realidade matemática" (Dufour-Janvier et al., 1987).

A folha de cálculo apesar de não ter sido concebida como uma ferramenta educacional, tem-se revelado um poderoso recurso pedagógico para a construção de conceitos algébricos, nomeadamente para o estabelecimento de relações funcionais. É uma ferramenta potente na resolução de problemas e, em particular, no desenvolvimento do pensamento algébrico (Ainley et al., 2004). A sua utilização na resolução de problemas acentua a necessidade de identificar todas as variáveis relevantes e estimula a procura de relações de dependência entre as variáveis. A definição de relações intermédias entre as diversas variáveis, isto é, a decomposição de uma relação de dependência em sucessivas relações mais simples é um dos aspectos a salientar nesta ferramenta, com consequências decisivas no processo de resolução de problemas (Carreira, 1992; Haspekian, 2005). A folha de cálculo permite ainda dar uma organização algébrica a uma resolução aparentemente aritmética coabitando num mundo de alternância/transição entre a Aritmética e a Álgebra (Haspehkian, 2005), é uma boa uma opção didáctica para ajudar os alunos na transição da Aritmética para a Álgebra (Kieran, 1996).

## A aprendizagem dos sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas

As orientações curriculares para o ensino deste tópico alertam para o facto de os alunos poderem ser facilmente levados à mecanização de procedimentos sem conhecimento do significado daquilo que estão a fazer. Na tentativa de evitar esta aprendizagem sem sentido, procurou-se proporcionar aos alunos experiências informais, simples, antes das resoluções formais algébricas, mais complexas.

Apesar de grande parte da simbologia utilizada na Álgebra ser do conhecimento dos alunos, do estudo da Aritmética, tal não significa que a entendam num novo contexto. Vários estudos mostram que os alunos têm dificuldades na compreensão e utilização de letras (McGregor & Stacey, 1997) e, por vezes, nem tentam compreender o seu significado, preferindo lembrar simplesmente os procedimentos. Algumas investigações acerca da forma como os alunos abordam a resolução de problemas que envolvem duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, revelam outros aspectos acerca da concepção do sinal de igual que pode causar dificuldades (Filloy, Rojano & Solares, 2004). Estes autores mostram que certos alunos resolvem equações com uma incógnita, mas não resolvem problemas com duas incógnitas, manifestando dificuldades na aplicação da "transitividade do sinal de igual", quando se depararam com duas equações como $"4x - 3 = y"$ e $6x + 7 = y$.

Não conseguem reconhecer a transitividade para concluir que $"4x - 3 = y" = 6x + 7 = y$. Uma possível interpretação alternativa tem a ver com a incapacidade dos alunos para substituir o $y$ na primeira equação pela expressão igual da segunda equação. Isto pode ser interpretado como os alunos considerarem os $y$'s como sendo diferentes.

# A EXPERIÊNCIA DE ENSINO

Na intervenção pedagógica a resolução de problemas assumiu o papel principal, sendo, no entanto, ainda propostas outro tipo de tarefas. Nalgumas situações foi sugerida a resolução de tarefas na folha de cálculo. No início do estudo deste tópico foi realizada uma ficha de diagnóstico aos alunos com o principal objectivo de obter elementos acerca dos seus conhecimentos.

Em sala de aula, para a sua resolução de alguns problemas, os alunos dispunham de computadores e foi privilegiado o trabalho em pares. Pretendíamos, nesta fase, que a folha de cálculo servisse de ponto de partida para a aprendizagem formal da Álgebra. Algumas das tarefas iniciais foram problemas susceptíveis de resoluções formais do ponto de vista algébrico. No entanto, numa primeira fase, foi proposta a exploração desses problemas com recurso à folha de cálculo. Para cada uma destas tarefas foram promovidos momentos de discussão e de síntese, procurando promover a construção de uma ponte entre o trabalho realizado na folha de cálculo e o trabalho com lápis e papel, recorrendo ao simbolismo algébrico, se possível a partir dos próprios alunos.

Numa fase inicial os alunos resolveram os problemas e as restantes tarefas utilizando os seus próprios métodos que, normalmente, incluíam representações no sistema simbólico numérico (operações aritméticas elementares, *unwind*), pictóricas e outras. Posteriormente, pretendíamos que recorressem a representações no sistema simbólico algébrico e a gráficos.

Para que os alunos tivessem uma intervenção activa na construção do conhecimento as aulas foram organizadas, sempre que possível, em quatro momentos distintos. Inicialmente as tarefas eram apresentadas à turma, seguindo-se alguns esclarecimentos. O momento seguinte era dedicado ao trabalho dos alunos – na maior parte das vezes, em pares ou em pequenos grupos. Dependendo da situação podiam existir momentos de discussão intercalados com o trabalho dos alunos. Durante o período de discussão os alunos partilhavam com os colegas o trabalho desenvolvido. Concluída a discussão seguia-se a síntese das ideias e/ou conceitos tratados. Nesta última fase os alunos eram também convidados a participar.

# METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

*Abordagem e design*. No presente estudo pretendemos compreender o contributo da realização de uma experiência de ensino no desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 9.º ano no estudo do método de substituição da resolução de sistemas de equações do 1.º grau a duas incógnitas. Para tal é indispensável auferir uma visão holística dos fenómenos em estudo, razão pelo qual optámos por uma metodologia qualitativa. Dada a natureza do trabalho, a metodologia segue o paradigma interpretativo uma vez que pretendemos estudar o fenómeno em toda a sua complexidade e no seu contexto natural (Bogdan & Biklen, 1994).

Esta investigação segue um *design* de experiência de ensino, onde a primeira autora, assume o duplo papel de professora da turma e investigadora. Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer e Schauble (2003) salientam a importância e destacam cinco características deste tipo de *design*: (i) o objectivo é desenvolver teorias sobre a aprendizagem; (ii) envolve uma intervenção, ou a introdução de uma nova técnica de ensino; (iii) procura-se desenvolver novas perspectivas teóricas, mas também testar e refinar teorias ao longo de todo o processo de investigação; (iv) o processo é iterativo, devendo a concepção do estudo deve ser revista e alterada em conformidade; e (v) as teorias que são desenvolvidas devem afectar o ensino no futuro.

*Recolha de dados*. A recolha documental ocupa um lugar de grande relevo, pois constituiu uma fonte privilegiada para a obtenção de informação. Em sala de aula, procedeu-se à recolha das produções dos alunos, à captura dos ecrãs dos computadores, à gravação áudio dos diálogos e à observação participante traduzida em notas de campo. No final do estudo de cada um dos tópicos que integram a experiência de ensino foram igualmente realizadas entrevistas clínicas, semi-estruturadas a quatro alunos participantes.

*Análise de dados*. Envolveu essencialmente análise de conteúdo (Bardin, 1977). Depois de transcritas as gravações áudio, os registos da sequência de "frames" no Excel e as entrevistas, procedemos à sua análise. Durante o processo de análise de dados foi fundamental ter em atenção a diversidade de dados, pois constituem indicadores úteis para o estudo da variabilidade do fenómeno em estudo (Fernandes & Maia, 2001).

# RESULTADOS

Apresentam-se, em seguida, alguns exemplos ilustrativos de produções dos alunos antes, durante e após a realização da experiência de ensino. Estas resoluções são ilustrativas e reportam a evolução do pensamento algébrico dos alunos, através de um percurso que se iniciou em experiências informais e que evoluiu progressivamente para a aprendizagem de métodos algébricos formais.

*Resolução usando uma representação aritmética.* Na ficha de diagnóstico a maioria dos alunos recorreu a representações no sistema simbólico numérico apoiando-se, muitas vezes, na linguagem natural para apresentar as suas explicações. A figura 2 apresenta um exemplo das representações utilizadas na resolução de uma questão.

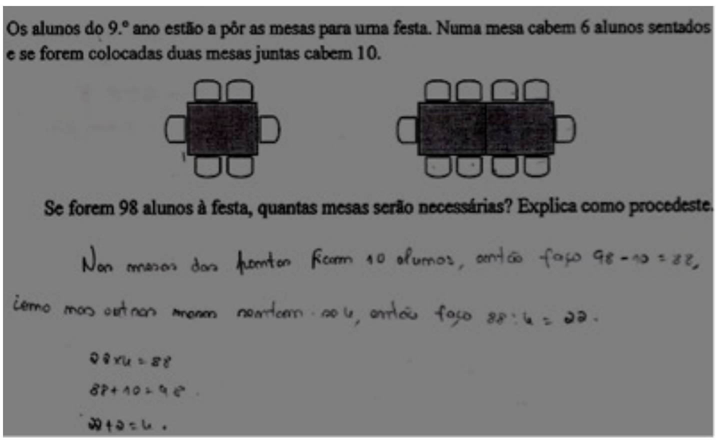


Figura 2: Representação de Ana na ficha de diagnóstico (Tarefa A)

A aluna poderia ter recorrido à escrita de uma equação, no entanto, optou por não o fazer. Preferiu, em alternativa, utilizar uma estratégia de *unwind* (desfazer) apoiada em operações aritméticas elementares. À semelhança de Ana, muitos alunos recorreram a representações no sistema simbólico numérico para responder a esta questão, assim como à maioria das outras propostas na ficha que não exigiam o recurso a representações no sistema simbólico algébrico.

Tal como estava inicialmente previsto e tendo em conta o trabalho desenvolvido pelos alunos na ficha de diagnóstico, considerou-se pertinente fazer propostas que envolvessem a resolução de problemas e que, de forma subtil, suscitassem uma perspectiva algébrica das suas resoluções.

*Resolução usando relações entre variáveis sem e com escrita algébrica.* O problema apresentado na figura 3 apela à escrita de relações entre as variáveis para a obtenção da solução. Essas relações podem ser escritas, ou tidas em conta, sem recurso à linguagem algébrica. Na figura 4 apresenta-se um excerto da resolução de Ana na folha de cálculo.

Problema: O peso das 3 irmãs[1]

O Sr. José tem três filhas muito gulosas: a Alice, a Beta e a Célia. Com a chegada do verão, elas ficaram muito preocupadas com a sua elegância, por causa da praia. Decidiram as três fazer uma dieta e pesar-se regularmente numa balança que o pai tinha no armazém. Quando começaram a dieta, as irmãs pesaram-se, duas a duas, na balança.

A Alice e a Beta pesavam juntas 132 Kg.

A Beta e a Célia pesavam juntas 151 Kg.

A Célia e a Alice pesavam juntas 137 kg.

Qual é o peso de cada uma das filhas do Sr. José?

Figura 3: Problema proposto para resolver na folha de cálculo (Tarefa C)[1]

Ana começou por deduzir qual das irmãs era a mais leve e qual a mais pesada, recorrendo à linguagem natural para apresentar a sua explicação. Através da nomeação de colunas procedeu à identificação das variáveis e estabeleceu relações recorrendo a fórmulas na linguagem própria da folha de cálculo. A coluna relativa a "Célia e Alice" serviu de controlo para a obtenção da solução. Por fim, a aluna respondeu ao problema explicando os procedimentos que efetuou na folha de cálculo. Verificamos que, no processo de nomeação das colunas, a aluna seleciona o peso da Alice como variável independente e recorre a fórmulas para escrever as relações entre os pesos das irmãs. Utiliza o peso conjunto das irmãs Célia e Alice como dispositivo de regulação para encontrar a solução.

Elas pesaram-se duas a duas, então eu consigo tirar algumas conclusões
A Alice é a mais levezinha, pois quando ela se pesa com a Célia e com a Beta, ela fica sempre por volta dos 130 e picos kg.
A Célia é a mais pesada, pois, quando se pesa com a Beta o valor aumenta bastante. Com isto podemos concluir que a Beta está entra ambas.

| Alice | Beta | Célia | Célia e Alice |
|---|---|---|---|
| 1 | 131 | 20 | 21 |
| 2 | 130 | 21 | 23 |
| 3 | 129 | 22 | 25 |
| 4 | 128 | 23 | 27 |
| 5 | 127 | 24 | 29 |

| Alice | Beta | Célia | Célia e Alice |
|---|---|---|---|
| 1 | =132-D2 | =151-E2 | =F2+D2 |
| 2 | =132-D3 | =151-E3 | =F3+D3 |
| 3 | =132-D4 | =151-E4 | =F4+D4 |
| 4 | =132-D5 | =151-E5 | =F5+D5 |
| 5 | =132-D6 | =151-E6 | =F6+D6 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 54 | 78 | 73 | 127 |
| 55 | 77 | 74 | 129 |
| 56 | 76 | 75 | 131 |
| 57 | 75 | 76 | 133 |
| 58 | 74 | 77 | 135 |
| 59 | 73 | 78 | 137 |
| 60 | 72 | 79 | 139 |
| 61 | 71 | 80 | 141 |

O peso da Alice é 59 kg, o da Beta 73 kg e o da célia 78 kg.
Para resolver este problema, eu fui fazer uma coluna para a Alice, com valores até132 pois era o peso dela em conjunto com a Beta, depois, fiz uma coluna com a Beta e subtrai os valores da coluna 1 a 132, depois fiz uma coluna com a Célia e fiz 151 que é o peso da beta e da célia em conjunto e subtrai pelos valores da coluna da Beta, depois, por ultimo, fui somar os valores da coluna da Alice com os da Coluna da Célia, até obter 137 e depois, consegui obter os pesos das irmãs.

Figura 4: Excerto da resolução de Ana (Tarefa C)

Na discussão, em sala de aula, a professora apelou à escrita das relações presentes no sistema simbólico algébrico, registando no quadro as ideias que os alunos iam apresentando (figura 5). Esta discussão, suportada pelo questionamento constante da professora, desencadeou a escrita de três equações, em linguagem algébrica, pelos alunos.

[1] Problema lançado numa final do campeonato de Matemática Sub 14.

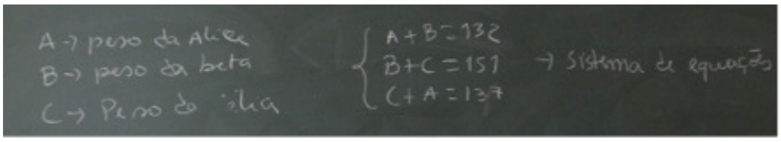


Figura 5: Escrita das relações no quadro (Tarefa C)

Desta forma surgiu a formalização do que se entende por um sistema de equações, como referiu a professora:

> O que está escrito no quadro são três condições que têm de ser cumpridas neste problema… E têm de ser cumpridas em simultâneo. A este conjunto de equações nós chamamos um sistema de equações. Neste caso temos um sistema de 3 equações com três incógnitas.

*Resolução usando a ideia de substituição.* Mais tarde foi proposta a tarefa D em que o objectivo era a resolução de problemas que envolviam o estabelecimento de relações entre quantidades e a ideia de substituição (aspectos essenciais para a aprendizagem no tópico em estudo).


Figura 6: Problema 1 (Tarefa D)

António (figura 7) começa por dividir o valor 27 por 3, obtendo o valor de cada rato. De seguida, obtém o valor de dois ratos e calcula a diferença entre 34 e o valor obtido. Divide depois o resultado por 2, obtendo o valor de cada coelho.

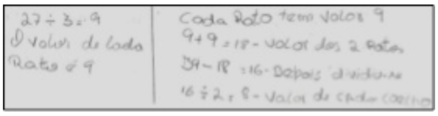


Figura 7: Resolução de António

Ana, na sua resolução (figura 8), começa por escrever equações relativas à tradução das relações em cada uma das imagens. Apesar de ter escrito as equações, Ana não as utiliza explicitamente na resolução do problema. Para obter a solução procede de uma forma análoga à de António, ou seja, recorre a representações no sistema simbólico numérico e à linguagem natural para a explicação. Neste tipo de resolução, as representações dos alunos assentam em estratégias de desfazer, o que equivale aos sucessivos passos da resolução das respectivas equações.

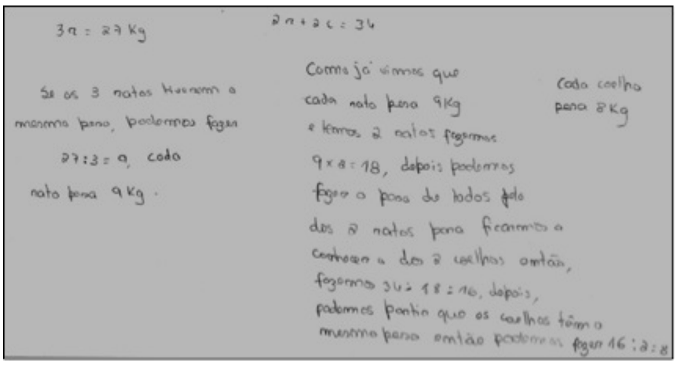

Figura 8: Resolução de Ana

A resolução apresentada na figura 9 mostra que Carolina escreveu uma equação para cada caso. Resolveu a primeira com as regras usuais e substituiu a solução obtida na segunda equação que resolveu igualmente através de procedimentos formais. Esta resolução revela com bastante clareza, o método formal de resolução de um sistema de equações pelo método de substituição. Na discussão da tarefa, Carolina referindo-se ao valor do cão, explicou como procedeu:

> Carolina: Depois substituí-o aqui no 2*c* que é duas vezes os cães, temos que pôr um 9 que é o que deu anteriormente, depois resolvemos a equação e descobrimos o valor pedido.
>
> […]
>
> Professora: a resolução da Carolina, coincide com a resolução de um sistema de equações pelo método de substituição, chama-se método de substituição […] é o que vocês já tinham feito mas muitos de outra maneira […] é um sistema de equações porque as duas condições têm que ser cumpridas simultaneamente. Nesta situação que é das mais simples, o valor obtido da primeira equação vamos substituí-lo imediatamente na segunda.

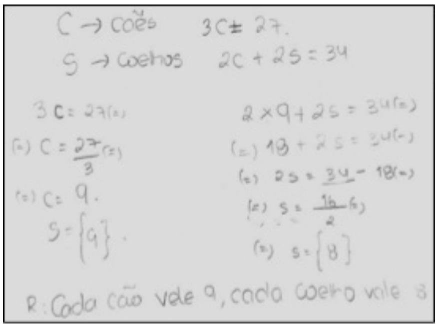


Figura 9: Resolução de Carolina

A professora, tendo como suporte as resoluções apresentadas pelos alunos, informa-os de que aquele processo de resolução se denomina por método de substituição e reforça o que os alunos já apresentaram. Esta tarefa continha outras propostas de complexidade crescente que permitiram reforçar as ideias trabalhadas na situação aqui relatada. Para além destas tarefas, foram ainda propostas outras que envolveram a consolidação do método de substituição.

Ao longo da experiência de ensino, o processo de formalização foi gradual de modo a que os alunos adquirissem a compreensão dos procedimentos e os identificassem com processos, por vezes, já conhecidos, embora com recurso a outras representações.

*Resolução após a experiência de ensino.* Após a realização da experiência de ensino alguns dos alunos foram entrevistados. Na figura 10 apresentamos a resolução de um problema realizado por Ana na entrevista realizada depois do estudo deste tópico.

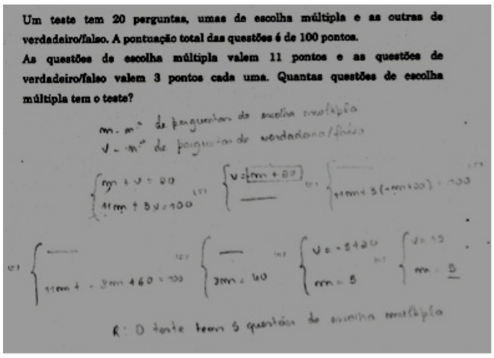


Figura 10: Resolução de Ana (Entrevista)

Ana começou por designar as incógnitas e, em seguida, escreveu o sistema de equações que resolveu através do método de substituição. Recorreu a representações no sistema simbólico algébrico e apenas utilizou a linguagem natural para a designação das incógnitas e para responder ao problema.

Na entrevista, foi ainda proposto outro problema à aluna, assim como outro tipo de tarefas. Ana recorreu sempre aos métodos formais algébricos estudados nas aulas.

## REFLEXÕES FINAIS

As tarefas propostas, construídas propositadamente para que os alunos fizessem uma transição progressiva para a aprendizagem de métodos formais a partir de experiências informais, permitiram uma grande variedade de abordagens tendo sido sempre dada a oportunidade aos alunos de partilharem as suas abordagens e de explicitarem o seu raciocínio.

Ao longo do trabalho durante o estudo do tópico foi possível verificar que os alunos, de um modo geral, fizeram um movimento gradual no que respeita à aprendizagem dos métodos formais algébricos. Para o método de substituição, aqui retratado, é possível verificar que os alunos começaram por desenvolver a compreensão da escrita de relações primeiramente recorrendo a uma linguagem essencialmente aritmética, depois num ambiente híbrido na folha de cálculo e, por fim, na linguagem algébrica o que os levou, com a intervenção da professora, à noção de sistema de equações. Posteriormente, noutra tarefa que envolveu, para além do estabelecimento de relações, a ideia de substituição o método de substituição surgiu naturalmente no momento de discussão em sala de aula.

De um modo geral podemos afirmar que, tal como está descrito na literatura, foi possível verificar que alunos apesar de, por vezes, não utilizarem a linguagem algébrica formal não ficam inibidos de desenvolver o seu pensamento algébrico (Kieran, 1996, 2007; Zazkis & Liljedahl, 2002). Outro aspecto que se revelou importante foi folha de cálculo que sustentou a passagem da aritmética para a álgebra (Haspekian, 2005). Para além de se revelar uma ferramenta muito útil na resolução de problemas, proporcionou um ambiente em que os alunos não tiveram o constrangimento da utilização do simbolismo algébrico, mas um ambiente que incentivou a escrita de relações com a linguagem própria da folha de cálculo.

Revelaram-se ainda cruciais os momentos de discussão em sala de aula, pois serviram de suporte para que uma perspectiva algébrica acerca de métodos de resolução fosse desenvolvida. Esta discussão permitiu ainda aos alunos refletir sobre as suas estratégias e desenvolver diferentes formas de entender e abordar os problemas propostos (Windsor, 2010).

Em particular, a aluna entrevistada evidenciou ter aprendido o método de substituição de resolução de sistemas de equações compreendendo o significado de cada um dos passos envolvidos no processo de resolução. Este aspeto é fundamental, podemos afirmar que existem evidências de que a aluna desenvolveu o sentido do método e, como tal, o seu pensamento algébrico ao longo da experiência de ensino.

## REFERÊNCIAS

Ainley, J., Bills, L., & Wilson, K. (2004). Construting meanings and utilities within algebraic tasks. In M.J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds), *Proceedings of the 28th conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 2, pp. 1-8). Bergen, Norway: PME.

Arcavi, A. (2006) El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In I. Vale et. al. (Orgs.). *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. (pp.29-48). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Secção de Educação Matemática.

Bardin, L. (1977). *Análise de Conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). Investigação qualitativa em educação – uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora.

Carreira, S. (1992). A aprendizagem da Trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo (Tese de Mestrado). Lisboa: APM.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, *32*, 9–13.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 109-122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Fernandes, E., & Maia, A. (2001). Grounded Theory. In E. Fernandes e L. Almeida: *Métodos e técnicas de avaliação: contributos para a prática e investigação psico-lógica*. (pp. 49-76). Braga: Universidade do Minho.

Filloy, E., Rojano, T. & Solares, A. (2004). Arithmetic/algebraic problem solving and the representation of two unknown quantities. In M. Johnsen Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 391–398). Bergen University College.

Haspekian, M. (2005). An 'instrumental approach' to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: The case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *10*(2), 109-141.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. M. Alvares, B. Hodgson, C. Laborde & A. Pérez (Eds.), *International Congress on Mathematical Education 8: Selected lectures* (pp. 271-290). Seville: SAEM Thales.

Kieran, C. (2006) Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 11-50). Roterdham: Sense.

Kieran, C. (2007). Developing Algebraic reasoning: the role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante*, vol 16, N. º 1, pp. 5-26.

MacGregor, M. & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11–15. *Educational Studies in Mathematics*, 33 (1), 1-19.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. G., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. (disponível em http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/ Documents/ProgramaMatematica.pdf)

Schoenfeld, A. (2008). Early algebra as mathematical sense making. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 479 – 510). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Zazkis, R., & Liljedhal, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 379-402.

Windsor, W. (2010). Algebraic Thinking: A Problem Solving Approach. In Sparrow, L., Kissane, B., & Hurst, C., (Eds.). Shaping the future of mathematics education Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, (pp.665-672). Fremantle, WA: MERGA.