

MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM ENGENHARIA
Lisboa, 31 de Maio – 2 de Junho, 2004
© APMTAC, Portugal 2004

O REFORÇO DE VIGAS DE BETÃO ARMADO COM CHAPAS METÁLICAS COLADAS COM RESINA

J. Alfaiate * e R. Costa **

* ICIST e Dep. Eng. Civil, Instituto Superior Técnico,
Av. Rovisco Pais, 1049-011 Lisboa
e-mail: alfaiate@civil.ist.utl.pt

** ADEC, Escola Superior de Tecnologia da Universidade do Algarve
Campus da Penha, 8000-117 Faro
e-mail: rcosta@ualg.pt

Palavras-chave: Reforço com chapas metálicas, Energia de Fractura, Fendas embebidas.

Resumo. Neste trabalho efectua-se a simulação do reforço com chapas metálicas coladas com resinas epoxy, em vigas de betão armado. Cada viga é inicialmente carregada à flexão e submetida a um elevado nível de dano. Posteriormente, sob carga constante, as fendas são reparadas com resina epoxy e aplica-se o reforço, colando a chapa metálica na face traccionada da viga. Conclui-se o teste aumentando a carga até se obter a rotura da viga reforçada. O nível de dano pré-reforço é modelado recorrendo a uma abordagem discreta com fendas embebidas [1] e a ligação betão-resina-chapa é modelada em modo II de fractura através de elementos de interface com espessura inicial nula [2]. Os resultados numéricos são comparados com os resultados obtidos em vigas ensaiadas experimentalmente de acordo com os procedimentos referidos, publicados em [3].

1. INTRODUÇÃO

A técnica de reforço e reparação de estruturas recorrendo a chapas de aço coladas com resina epoxy tem sido utilizada frequentemente no reforço de vigas submetidas à flexão e à torção, em lajes e em pilares. Esta técnica surgiu na década de 60 com L’Hermite e Bresson (ver [4]) e tem tido grande aplicação e desenvolvimento, paralelamente com outras técnicas de reforço recorrendo a armaduras não metálicas, designadamente os plásticos reforçados com fibras de carbono (CFRP).

A modelação do reforço de estruturas de betão armado com chapas metálicas envolve a caracterização do comportamento de diferentes materiais e diferentes tipos de ligação entre eles. Na descrição do comportamento do betão modelam-se dois fenómenos fisicamente não lineares: i) a fissuração e ii) o esmagamento à compressão. A modelação da fractura é efectuada recorrendo a uma formulação com fendas embebidas nos elementos finitos, no âmbito de uma abordagem de fenda discreta; a modelação do esmagamento, ainda não considerada neste trabalho, será efectuada recorrendo à teoria da plasticidade, adoptando um modelo elasto-plástico à compressão. A ligação armadura interior-betão é modelada com elementos de interface, introduzindo as relações de aderência propostas pelo CEB [5]; a ligação betão-resina e epoxy-chapa de aço é modelada também recorrendo a elementos de interface, com base no modo II de fractura, utilizando as relações constitutivas desenvolvidas em [2]. Dada a complexidade dos fenómenos estudados, pretende-se no presente trabalho com base na simulação numérica destes fenómenos, contribuir para a obtenção de modelos fiáveis que traduzam correctamente o comportamento mecânico deste tipo de estruturas. Para este efeito, os resultados numéricos são comparados com os resultados experimentais obtidos em [3]. A descrição destes ensaios é efectuada na secção 2., na secção 3. descrevem-se os modelos mecânicos adoptados para o comportamento da estrutura, bem como alguns aspectos relativos à implementação numérica desse modelos num programa de elementos finitos, na secção 4. apresentam-se os resultados numéricos que se comparam com os resultados experimentais e na secção 5. extraem-se algumas conclusões.

2. DESCRIÇÃO DOS ENSAIOS REALIZADOS EM [3]

A campanha de ensaios realizada em [3], tinha por objectivo caracterizar o comportamento de vigas danificadas, posteriormente reparadas com injeção de resinas epóxicas e reforçadas com adição de chapas metálicas, simplesmente coladas ou recorrendo também à fixação nas extremidades efectuada por meio de buchas metálicas.

As vigas ensaiadas tinham todas a mesma geometria, a qual se representa na figura 1, sendo simplesmente apoiadas, com um vão livre de 1800mm, e uma secção transversal de 80 x 200mm.

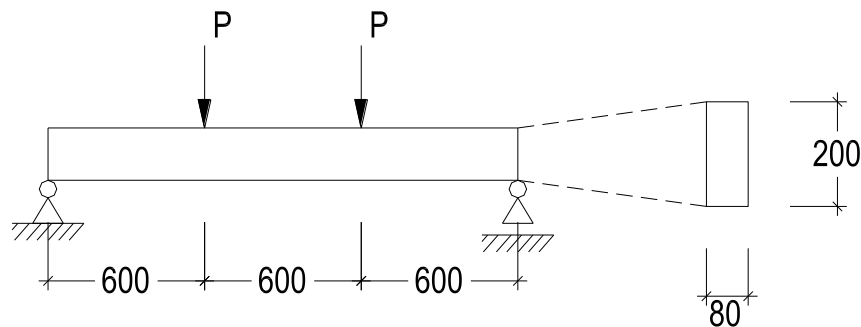


Figura 1. Geometria e carregamento das vigas ensaiadas

As vigas continham as seguintes armaduras interiores:

A_{s1} (armadura traccionada) – 2 \varnothing 10; 2 \varnothing 8 e 3 \varnothing 6

A_{s2} (armadura comprimida) – 2 \varnothing 6

A_{sw} (armadura transversal) – \varnothing 6 // 0.08m (estribos de 2 ramos)

A_{sR} (armadura de reforço) – 68mm² e 86.4mm² (chapas com 2mm de espessura)

Foram introduzidas duas relações armadura de reforço / armadura ordinária, nomeadamente: $A_{sR} / A_{s1} = 0$; $A_{sR} / A_{s1} = 0.68$ e $A_{sR} / A_{s1} = 1$.

A identificação das vigas de ensaio foi organizada segundo o seguinte genérico:

T-N SÉRIE-S

T – Tipo: existem três tipos caracterizados pelas armaduras longitudinais de tracção A_{s1} :

Tipo A - $A_{s1} = 2 \varnothing 10$ – vigas de referência, não são objecto deste estudo.

Tipo B - $A_{s1} = 2 \varnothing 8$

Tipo C - $A_{s1} = 3 \varnothing 6$

N – Numero: Numero de ensaio correspondente ao tipo e série.

SÉRIE-S – Séries: As séries são caracterizadas pelo tipo de ligação/reparação efectuada:

Série-0 – Sem reforço nem reparação vigas de referência.

Série-1 – Vigas reforçadas sendo a ligação reforço/betão constituída por resina epoxy.

Série-2 – Vigas reforçadas sendo a ligação reforço/betão constituída por resina epoxy e buchas metálicas.

Série-3 – Vigas reparadas mas não reforçadas.

No estudo agora apresentado, apenas se analisaram as vigas dos tipos B e C e da série 1, ou seja, o reforço com adição de chapas coladas sem recurso a ancoragem com buchas, situação

essa que será objecto de estudo posterior.

O carregamento adoptado está indicado na figura 1, com aplicação das cargas a um terço e dois terços do vão, permitindo a obtenção de duas zonas com flexão e esforço transversal e uma zona central, com flexão circular.

O betão empregue nos ensaios laboratoriais foi o C20/25, com granulometria adequada à escala dos modelos de ensaio, nomeadamente com britas que não ultrapassaram significativamente a dimensão máxima de 1cm, visto que, os recobrimentos considerados foram de 1cm a 1.5cm. Os resultados obtidos de ensaios realizados em 5 provetes cúbicos permitiram quantificar as seguintes propriedades: módulo de elasticidade, $E_c = 40 / 1.25 = 32$ GPa (factor 1.25 para carregamentos não instantâneos [6]); resistência à compressão, $f_{cm} = 35$ MPa em provetes cúbicos, o que, corresponde a $f_{ck}=27$ MPa, sendo possível obter equivalência para provetes cilíndricos: $f_{ck}=21.67$ MPa e $f_{cm} = 29.67$ MPa.

Um parâmetro de grande importância neste tipo de estudo é o valor da energia de fractura G_F , definido como a energia necessária para a formação de uma fenda de área unitária.

Uma estimativa de G_F para o modo I de fractura, pode ser feita em função do valor da tensão de rotura média da betão à compressão (f_{cm}) e da máxima dimensão dos agregados do betão (d_{max}), [5]:

$$G_F = G_{F0} (f_{cm}/f_{cm0})^{0.7} \quad (1)$$

em que $f_{cm} = 29.67$ MPa, $f_{cm0} = 10.00$ MPa e G_{F0} é o valor base da energia de fractura, que depende da máxima dimensão do agregado. O valor obtido foi de 0.056 N.mm/mm² e situa-se no intervalo esperado, com base na literatura existente sobre a matéria [7].

As armaduras ordinárias foram caracterizadas pelo módulo de elasticidade $E_s = 205$ GPa e tensão de cedência $f_{sy} = 410$ MPa. Nas armaduras de reforço utilizou-se um aço com módulo de elasticidade $E_{sR} = 200$ GPa e tensão de cedência $f_{syr} = 250$ MPa.

As resinas utilizadas nas vigas de ensaio foram do tipo “Concresive 1380” (ESBD – European Structural Bonding Division Holand) com tensão de rotura prescrita de 62.4 MPa à tracção e 83.4 MPa à flexão.

3. COMPORTAMENTO MECÂNICO E IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Neste trabalho, adopta-se uma relação tensão-salto de deslocamentos nas fendas embebidas, $\mathbf{t-w}$, baseada na teoria do dano localizado, descrita por ([8]):

$$\mathbf{t} = (1-d) \mathbf{T}_{el} \mathbf{w}, \quad (3)$$

em que $0 \leq d \leq 1$ é uma variável de dano escalar e \mathbf{T}_{el} é o tensor constitutivo *elástico* em que todas as componentes de índices desiguais são nulas e as componentes de índices iguais são funções de penalização utilizadas para impedir a interpenetração das faces das fendas que estão fechadas. A lei de evolução do dano é dada por:

$$d = d(\kappa) = 1 - \exp\left(-\frac{f_{t0}}{G_F} \kappa\right), \quad (4)$$

em que κ é uma variável escalar que se adopta igual à máxima componente normal positiva do salto de deslocamentos:

$$\kappa = \max \langle w_n \rangle^+, \quad \kappa \geq 0, \quad (5)$$

f_{i0} é a resistência inicial à tracção neste caso f_{ctm} e G_F é a energia de fractura. Define-se também uma função de carga dada por:

$$f = w_n - \kappa. \quad (6)$$

A fractura no betão é modelada em modo I, introduzindo-se superfícies de descontinuidade perpendicularmente à direcção principal de tensão máxima, sempre que se atinge a tensão de resistência à tracção f_{i0} . Estas superfícies de descontinuidade, também designadas fendas fictícias [9], dado que ainda permitem a transmissão de tensões entre faces, são embebidas no seio dos elementos finitos de acordo com uma formulação inicialmente desenvolvida por Oliver ([1]) e posteriormente modificada, conforme se apresenta em [10]. Nesta formulação, os saltos dos deslocamentos ao longo da superfície de descontinuidade são obtidos em graus de liberdade adicionais, localizados na própria fenda embebida, que são considerados globais. Em consequência, os saltos dos deslocamentos resultam contínuos através das fronteiras entre elementos e o caminho de fissuração também é contínuo.

A modelação das armaduras, ordinárias e de reforço, foi feita com recurso a elementos lineares de dois nós, adoptando uma relação constitutiva elastoplástica.

A aderência armaduras ordinárias-betão, foi modelada com recurso a elementos de junta, em ambas as faces superior e inferior da armadura, recorrendo à relação constitutiva proposta pelo CEB-FIP [5], a qual se representa na fig. 2. Atendendo ao posicionamento dos varões e recobrimentos adoptados, adoptou-se a relação constitutiva descrita em [5] que se aplica em “outras condições de aderência” e numa situação “não confinada”.

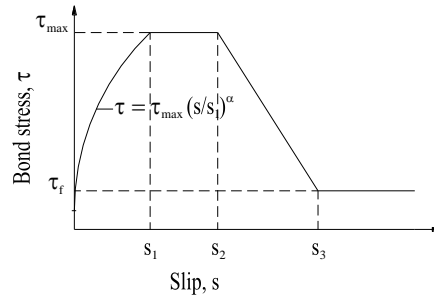


Figura 2. Relação tensão-aderência das armaduras ordinárias

Foram efectuados testes numéricos, com vista à calibração deste modelo, designadamente no que respeita aos valores relativos à rigidez inicial do elemento de interface, k_{int} , tendo-se adoptado para esse valor:

$$k_{int} = \frac{\tau(0.1s_1)}{0.1s_1}, \quad (7)$$

em que τ é a tensão na interface e s_I o deslocamento relativo correspondente ao fim da fase em as que nervuras da armadura penetram no betão, provocando esmagamentos locais com micro-fendilhação e passagem a uma fase com cedência na ligação.

A adesão entre armaduras de reforço e o betão foi modelada por elementos de interface de espessura inicial nula, introduzindo uma relação constitutiva relativa ao modo II de fractura. Os parâmetros materiais adoptados que caracterizam esta ligação são: i) a coesão (c), ii) a rigidez de corte (K_s) e a energia de fractura em modo II, G_F^{II} . Os valores adoptados, foram retirados de um estudo paramétrico apresentado em [2], tendo-se verificado que a ligação betão-resina-armadura de reforço exterior rompe normalmente pelo betão, destacando-se uma película ou lâmina de betão adjacente à ligação. Por este motivo, a interface modelada é uma interface betão-betão e os parâmetros materiais que descrevem essa ligação não dependem da epoxy ou da armadura exterior se estes materiais não condicionarem a rotura da ligação. Os valores adoptados são: coesão, $c = 5.00 \text{ MPa}$, rigidez de corte da interface, $K_s = 10^3 \text{ MPa/mm}$ e a energia de fractura em modo II, $G_F^{II} = 1.50 \text{ N.mm/mm}^2$.

O uso de relações constitutivas não lineares requer, em geral, a utilização de um procedimento iterativo. O método do comprimento de arco tem sido utilizado em problemas em que a fractura é preponderante; no entanto, a convergência numérica dos resultados torna-se particularmente difícil de obter, no caso em que se forma um grande número de fendas. Este é o caso habitual das alvenarias, sobretudo se submetidas a carregamentos não proporcionais em que a evolução da abertura das fendas não é monótona. No caso estudado neste trabalho, forma-se inicialmente um grande número de fendas no troço central da viga, em que o momento flector é constante. A formação de uma nova fenda dá origem a uma diminuição das tensões de tracção no material, que descarrega na vizinhança da fenda. Quando uma fenda se forma imediatamente ao lado de uma outra, a primeira fenda pode igualmente tender a fechar, o que, dado o elevado número de fendas que se podem formar num passo de carga, pode conduzir à não convergência dos resultados numéricos. Neste trabalho, introduziu-se um procedimento diferente, baseado numa formulação introduzida em [11,12], denominada de *lattice model*: neste modelo, sempre que se atinge a resistência num elemento da *rede* (*lattice*), este elemento é removido dando a origem a uma estrutura mais flexível; posteriormente, o material é novamente carregado elasticamente e atinge-se a resistência de um novo elemento. Em [13], aplicou-se um modelo semelhante a um meio contínuo: a rigidez global da estrutura é reduzida sempre que se atinge, num dado ponto do contínuo, uma dada superfície limite. No presente trabalho, utiliza-se um modelo *sequencialmente linear* para descrever o comportamento localizado das fendas fictícias, semelhante ao utilizado em alvenarias com elementos de interface [14]. Neste modelo, a evolução da resposta da estrutura não se obtém incrementalmente; utiliza-se uma formulação total, em que a rigidez da estrutura é reduzida de acordo com um modelo material, obtendo-se sucessivos estados de equilíbrio através de sucessivas análises lineares. Em cada passo de carga, utiliza-se o seguinte algoritmo:

- i) incrementa-se o parâmetro de carga λ ;
- ii) resolve-se o sistema de equações $\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}_{\text{ext}}$, em que \mathbf{a} são os deslocamentos nodais, \mathbf{K} é a

- matriz de rigidez secante e \mathbf{f}_{ext} são as forças nodais;
- iii) em cada ponto de integração verifica-se a condição de cedência:
- se $f < 0$, determina-se λ tal que $f = 0$;
 - se $f > 0$:
 - determina-se λ tal que $f = 0$;
 - actualizam-se as variáveis internas;
- iv) obtêm-se as tensões nas descontinuidades, no meio contínuo e as forças interiores;
- v) para cada fenda embebida confirma-se se, para o parâmetro de carga λ determinado, se obtém $f = 0$; neste caso, adoptam-se as variáveis internas actualizadas e correspondente relação constitutiva; caso contrário, adopta-se a relação constitutiva anterior;
- vi) finalmente, registam-se somente os resultados que verificam, em todos os pontos de integração, a condição de consistência:

$$\dot{d} f = 0, \quad (8)$$

isto é, o aumento do dano ($\dot{d} > 0$) implica que o estado de tensão deve permanecer *sobre* a superfície limite.

A malha de elementos finitos adoptada para a fase pré-reforço está representada na fig. 3, tendo os elementos 25mm de lado e uma altura que varia entre 15mm e 22.5mm. Para redução de tempo cálculo, modelou-se apenas meia viga, recorrendo-se a simplificações de simetria.

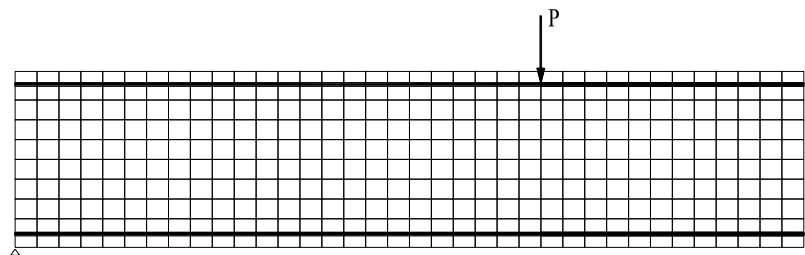


Figura 3. Malha de elementos finitos na fase sem reforço

Posteriormente é introduzida uma malha adicional (fig. 4), constituída por elementos lineares representando a armadura de reforço e interfaces que modelam a ligação à viga..

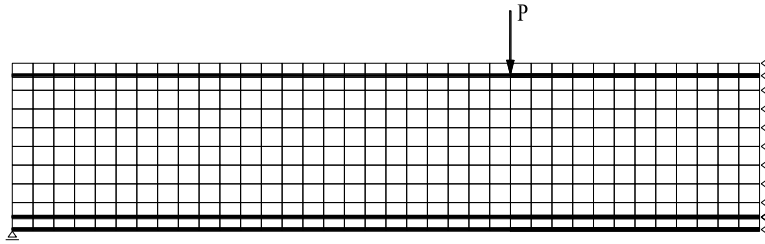


Figura 4. Malha de elementos finitos na fase com reforço

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

4.1 Vigas tipo B

As vigas tipo B, têm uma relação $A_{sR} / A_{s1} = 0.68$, que corresponde ao menor nível de reforço introduzido nos ensaios. Neste caso $A_{s1} = 101\text{mm}^2$ e $A_{sR} = 68\text{mm}^2$. Para melhor aferição de resultados, determinou-se analiticamente o valor da carga correspondente ao fim do *estado I* da secção de betão (início da fendilhação), $P_{cr}=2044\text{N}$ e a carga de rotura $P_{ult}=11983\text{N}$. O valor da resistência à tracção do betão, obtida no respectivo ensaio, foi $f_{ct}=2.30\text{ MPa}$. O reforço neste caso foi introduzido para uma carga $P_{ref}=9800\text{N}$. Na figura 5. representa-se a comparação entre as curvas carga-deslocamento obtidas no ponto de aplicação da carga, numerica e experimentalmente. Durante o ensaio registou-se um intervalo de tempo antes da aplicação do reforço, que se traduziu numa deformação adicional devido à fluência, em virtude de o nível de dano introduzido da viga ser já elevado. Os deslocamentos adicionais correspondentes foram adicionados no gráfico carga deslocamento obtido numericamente para permitir a comparação directa com os resultados experimentais.

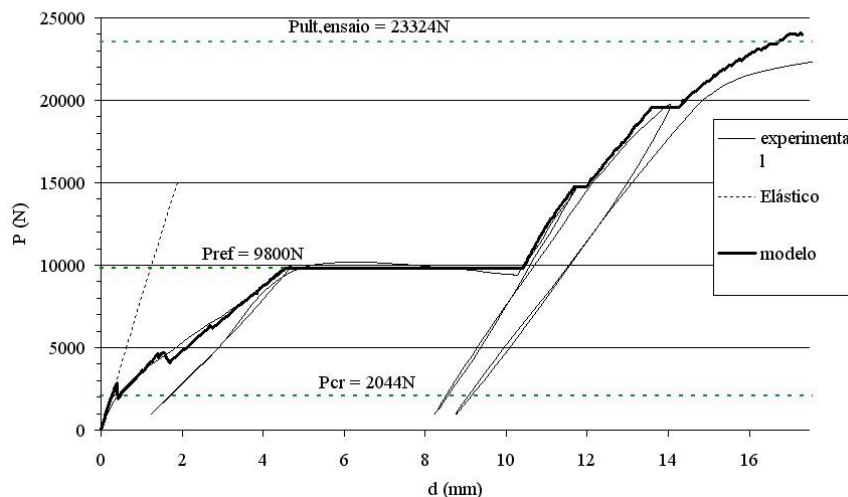


Figura 5. Curva carga-deslocamento para a viga tipo B

Analisando o gráfico da figura 5., pode-se constatar, que existe uma boa aproximação entre o resultado numérico e o resultado experimental, sendo de destacar um ligeiro desvio no valor da carga correspondente à abertura da primeira fenda e a existência de oscilações na curva na fase pré-reforço, principalmente na fase inicial do carregamento. Das diversas análises prévias à obtenção deste gráfico, foi possível constatar que na fase inicial existem oscilações devidas à mobilização dos elementos de junta que simulam a aderência armaduras-betão.

Na fase pós reforço, a curva apresenta uma rigidez ligeiramente menor do que a verificada experimentalmente, a qual é fruto de no modelo não se ter simulado a reparação de fendas com resinas, que foi realizada em laboratório. Atendendo a que, a resistência à tracção da resina é da ordem dos 62.40MPa, ou seja, cerca de 27 vezes superior à do betão, isso significa que as fendas existentes antes da reparação não continuaram a abrir; a importância da reparação será analisada em futuras análises.

Verifica-se também, que na fase de rotura, o modelo não simula a acentuada perda de rigidez verificada em laboratório, o que se deve ao facto de não se ter ainda introduzido o modelo elasto-plástico à compressão no betão, tendo-se obtido numericamente tensões de compressão superiores a f_{cm} .

Apresenta-se nas figuras 6 e 7, a fissuração obtida no modelo para a carga de rotura e a correspondente deformada, respectivamente. O padrão da fissuração é, em geral, semelhante ao obtido experimentalmente, não estando no entanto assinalados graficamente os valores das aberturas de fendas, pelo que algumas das fendas desenhadas correspondem a microfissuras, com uma abertura muito reduzida. Note-se que a descontinuidade do caminho de algumas fendas decorre do facto de cada elemento apenas poder apresentar uma única fenda.

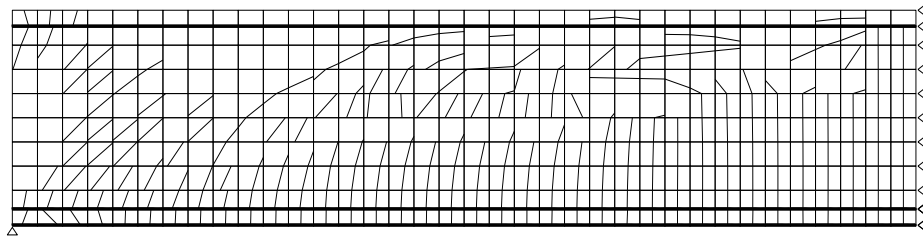


Figura 6. Fendilhação para a viga tipo B submetida à carga de rotura

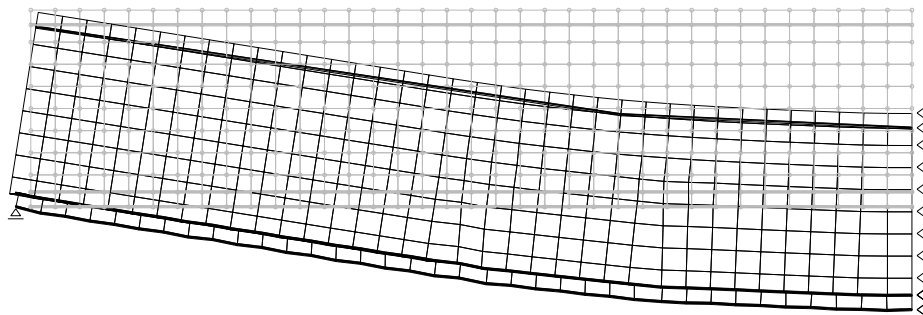


Figura 7. Deformada para a viga tipo B submetida à carga de rotura (amplif. 10x)

Na deformada, é perfeitamente visível que, a fenda principal se situa na zona sob a aplicação da carga, na face inferior da viga, atendendo à deformação dos elementos na zona inferior.

5.2 Vigas tipo C

As vigas tipo C a relação $A_{sR} / A_{sI} \approx 1.00$ corresponde ao menor nível de reforço introduzido nos ensaios. Neste caso $A_{sI} = 84.82\text{mm}^2$ e $A_{sR} = 86.40\text{mm}^2$. O valor da carga correspondente ao fim do *estado I* não fissurado na secção de betão é o mesmo que o valor adoptado para as vigas B ($P_{cr}=2044$ N) e a carga de rotura $P_{ult}=10120$ N. O reforço foi introduzido para uma carga $P_{ref}=7840$ N e o valor da resistência à tracção do betão medido experimentalmente foi $f_{ctm}=2.11$ MPa. Neste ensaio, não existiram pausas no carregamento nem deslocamentos adicionais provocados pelos ciclos carga-descarga.

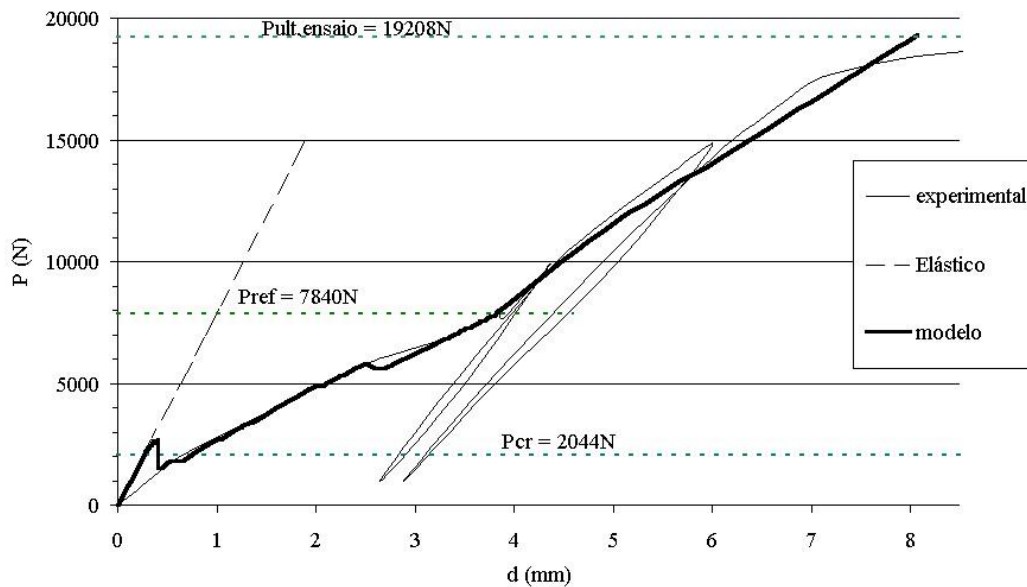
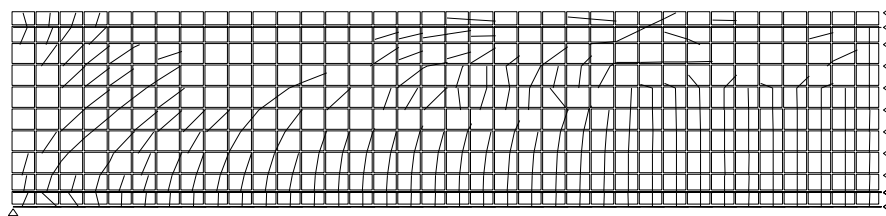


Figura 8. Curva carga-deslocamento para a viga tipo C

Na figura 8. representam-se as curvas carga-deslocamento obtidas numericamente e experimentalmente. Da análise da figura 8, pode-se concluir que se verifica ainda uma melhor aproximação da curva obtida experimentalmente na fase pré-reforço, obtendo-se, na fase posterior, a uma resposta menos rígida que a experimental, novamente por não se ter simulado a reparação das fendas.

Para esta situação, obtiveram-se as configurações da fendilhação e a deformada, indicadas respectivamente nas figuras 9 e 10, as quais apresentam características similares às obtidas



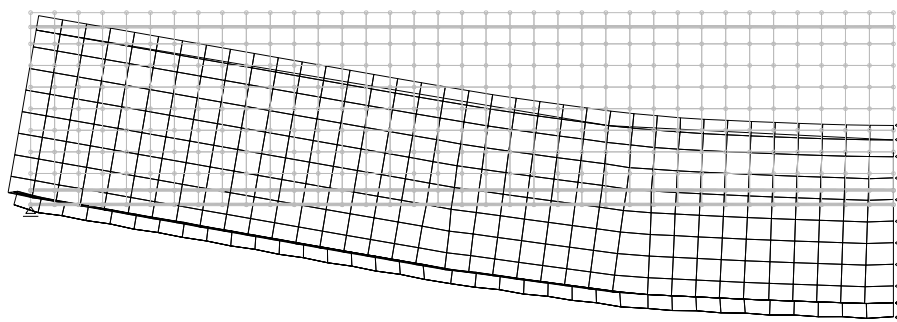
para as vigas tipo B.

Figura 10. Fendilhação para a viga tipo B submetida à carga de rotura

Figura 11. Deformada para a viga tipo C submetida à carga de rotura (amplif. 10x)

CONCLUSÕES

Neste artigo, utiliza-se o método dos elementos finitos para modelar vigas de betão



armado, reforçadas exteriormente com chapas coladas com resinas epóxicas. A descrição da fractura no betão é efectuada recorrendo a uma técnica de fendas embebidas, no âmbito de uma abordagem de fenda discreta. O comportamento da ligação entre as armaduras interiores e o betão é modelado recorrendo a elementos de interface com espessura inicial nula, em que se impõe a relação constitutiva proposta pelo CEB para a aderência aço-betão. A ligação betão-resina-chapa metálica é descrita recorrendo igualmente a elementos de interface; nesta ligação verifica-se que a rotura se dá pelo betão, o que permite caracterizar o comportamento da ligação em modo II de fractura, recorrendo a um modelo previamente introduzido e testado noutro trabalho [10].

Concluiu-se que a modelação permite obter a resposta do *espécimen* sem ser necessária a modelação de uma fenda discreta, em localização pré-definida. Quer as deformadas, quer os padrões de fendilhação, apresentam configurações muito próximas das esperadas, não existindo comparação com resultados laboratoriais, pois não tendo sido este o objectivo desse trabalho, não foram então, registados dados relativos a estes aspectos.

Finalmente, as curvas carga-deslocamento obtidas com este modelo aproximam-se bastante das curvas obtidas experimentalmente, o que permite concluir que o modelo proposto é adequado para descrever o comportamento de estruturas de betão interior e exteriormente reforçadas.

REFERÊNCIAS

- [1] J. Oliver, *Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 2: Numerical simulation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 39(21), 3601-3623 (1996).
- [2] P. Neto, J. Alfaiate, E. B. Pires e J. R. Almeida, *A influência do modo II de fractura no reforço do betão com FRP*, ed. J. I. Barbosa, Évora, 57-64 (2003).
- [3] J. Alfaiate, *O reforço por adição de elementos metálicos em vigas de betão armado submetidas à flexão simples*, Dissertação de Mestrado, IST, Lisboa (1986).
- [4] P. Costeira da Silva, L. F. P. Juvandes e J. A. Figueiras, *Análise do efeito de extremidade numa ligação colada tipo betão-aço ou betão-FRP*, REPAR200 Encontro Nacional sobre Conservação e Reabilitação de Estruturas, LNEC, Lisboa, 579-587 (2000).
- [5] CEB – Comité Euro-International du Béton, *CEB-FIP Model Code 1990*, Thomas Telford, June (1991).
- [6] R.E.B.A.P., *Regulamento das estruturas de betão armado e pré-esforçado*, Decreto - Lei n.º 349 – c/83 de 30 de Julho (1983).
- [7] B. Täljsten, *Plate Bonding – strengthening of existing concrete structures with epoxy bonded plates of steel or fibre reinforced plastics*, Luleå University, Sweden, (1994).
- [8] J. Alfaiate, G. N. Wells e L. J. Sluys, *On the use of embedded discontinuity elements with crack path continuity for mode I and mixed mode fracture*, Engineering Fracture Mechanics, 69 (6), 661-686, (2000).
- [9] A. Hillerborg, M. Modeer e P. E. Petersson, *Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements*, Cement and Concrete Research, vol. 6, pp. 773-782, (1976).
- [10] J. Alfaiate, A. Simone e L.J. Sluys, *Non-homogeneous displacement jumps in strong embedded discontinuities*, International Journal of Solids and Structures 40 (2003)
- [11] J. G. M. van Mier, *Fracture Processes of Concrete*, CRC Press, Inc., ISBN 0-8493-9123-7(1997).
- [12] G. Lilliu e J. G. M. van Mier, *Simulation of 3D crack propagation with the lattice*

- model*, in MaterialsWeek 2000, <http://www.materialsweek.org/proceedings>, ed.,(2000).
- [13] J. G. Rots, *Sequentially linear continuum model for concrete fracture*, in Fracture Mechanics of Concrete Structures - FRAMCOS4, 831-840, R. de Borst and J. Mazars and G. Pijaudier-Cabot and J. G. M. van Mier eds., France (2001).
- [14] J. Alfaiate, J. R. de Almeida e A. Gago, *On the numerical analysis of localized damage in masonry structures*, in Second International Conference on Structural Engineering and Construction, ISEC-02, Roma, (2003).