Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería 2005
Granada, 4 a 7 de Julio, 2005

CONTROLO ACTIVO DE RESSONANCIA EM ESTRUTURAS PIEZOLAMINADAS

José M. Simões Moita[1*], Cristóvão M. Mota Soares[2], Carlos A. Mota Soares[2]

1: Departamento de Engenharia Mecânica
Escola Superior de Tecnologia
Universidade do Algarve
Campus da Penha, 8005-139 Faro, Portugal
e-mail: jmoita@ualg.pt

2: IDMEC/IST–Departamento de Engenharia Mecânica
Instituto Superior Técnico
Universidade Técnica de Lisboa
Av. Rovisco Pais, 1096 Lisboa Codex, Portugal.
e-mail: cmmsoares@alfa.ist.utl.pt

Palavras-chave: Actuadores, Sensores, Compósitos Laminados, Elementos Finitos.

Resumo. *Neste trabalho apresenta-se um modelo de elementos finitos baseado na teoria de deformação de corte de 3ª ordem, o qual é aplicado ao controlo activo de vibrações, incluindo o fenómeno de ressonância, em estruturas laminadas. Sensores e actuadores piezoeléctricos na forma de lâminas estão colados nas superfícies superior e inferior do laminado, permitindo assim um sistema de controlo, ligando os efeitos piezoeléctricos directo e converso, através dum algoritmo baseado na realimentação com velocidade negativa. As estruturas são forçadas a vibrar num determinado modo, e a sua amplitude no tempo é calculada usando o método de Newmark. Apresenta-se uma aplicação ilustrativa.*

1. INTRODUÇÃO

Estruturas compósitas incorporando sensores e actuadores piezoeléctricos tornaram-se muito importantes devido ao desenvolvimento das estruturas ‘inteligentes’. Estas estruturas oferecem potenciais benefícios numa larga gama de aplicações em engenharia, tais como atenuação de vibrações e ruído, controlo de forma e detecção de dano. Investigação pioneira no domínio das estruturas inteligentes é devida a Allik e Hughes [1] que analisaram a interacção entre electricidade e elasticidade. Referem-se ainda os trabalhos de Crawley e de Luis [2], que estudaram o controlo de vibrações de vigas laminadas com material piezoeléctrico embebido ou colado à superfície da viga, e de Tzou e Tseng [3], que apresentaram uma formulação por elementos finitos em placa e cascas contendo actuadores e sensores piezoeléctricos. Referem-se ainda revisões bibliográficas acerca da modelação de estruturas adaptativas por elementos finitos publicada por Senthil et al. [4], Benjeddou [5] e Franco Correia et al. [6]. Vários investigadores formularam modelações por elementos finitos de estruturas compósitas integrando sensores e actuadores piezoeléctricos. Para o controlo activo de vibrações de placas

laminadas com sensores e actuadores distribuídos, Samanta et al [7], desenvolveu um elemento finito isoparamétrico de oito nós, e Lam et al. [8] desenvolveu um modelo de elementos finitos baseado na teoria clássica de placas laminadas. Neste trabalho, é apresentado um modelo de elementos finitos, baseado na teoria de deformação de corte de 3ª ordem de Reddy [9], desenvolvido para a análise do controlo activo em dinâmica linear de placas integrando sensores e actuadores piezoeléctrico na forma de lâminas coladas na superfície das estruturas. Este modelo permite tomar em consideração os efeitos das deformações de corte sem requerer o uso de factores de correcção de corte, e é aplicável na análise de estruturas com elevada anisotropia, finas e semi-espessas.
É usado um elemento placa/casca triangular plano de 3 nós, com 24 graus de liberdade referentes ao vector de deslocamentos generalizados, e em cuja formulação se introduz 1 grau de liberdade referente ao potencial eléctrico, por cada camada piezoeléctrica do elemento. É utilizado método de Newmark, Bathe [10], para a solução iterativa das equações de equilíbrio.

2. CAMPO DOS DESLOCAMENTOS E DEFORMAÇÕES

No modelo de elementos finitos desenvolvido, os deslocamentos u,v no plano (x,y) são funções cúbicas da coordenada segundo a espessura, e o deslocamento transverso w constante segundo a mesma coordenada, satisfazendo a condição de se ter tensões de corte transversais nulas nas superfícies superior e inferior, o que é equivalente a requerer-se que as correspondentes deformações se anulem naquelas superfícies[9].

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) - z\,\theta_y(x,y) + z^3\,\frac{4}{3h^2}\left[\theta_y(x,y) - \frac{\partial w_0}{\partial x}\right] \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) + z\,\theta_x(x,y) + z^3\,\frac{4}{3h^2}\left[-\theta_x(x,y) - \frac{\partial w_0}{\partial y}\right] \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned} \tag{1}$$

onde u_0, v_0, w_0 são os deslocamentos dum ponto genérico da superfície média do laminado nas direcções dos eixos x, y, z , θ_x e θ_y são as rotações da normal à superfície média, em torno dos eixos x e y, respectivamente, e $\partial w/\partial x$ e $\partial w/\partial y$ são as inclinações da tangente à superfície média deformada com os eixos x e y respectivamente.
As componentes das deformações associadas com os deslocamentos da equação (1) são:

$$\begin{Bmatrix} \bar{e}_m + z\,\bar{e}_b + z^3\,\bar{e}_b^* \\ \bar{e}_s + z^2\,\bar{e}_s^* \end{Bmatrix} = Z\,\bar{e} \tag{2}$$

onde Z é uma matriz apropriada contendo potências de z (z^n com n=0,…,3).

As componentes do vector $\bar{e}$ são dadas por

$$\bar{e}_m = \left\{ \varepsilon_x \quad \varepsilon_x \quad \varepsilon_{xy} \right\}^T = \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial v_0}{\partial y}, \frac{dv_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \right\}^T$$

$$\bar{e}_b = \left\{ k_x, k_y, k_{xy} \right\}^T = \left\{ -\frac{\partial \theta_y}{\partial x}, \frac{\partial \theta_x}{\partial y}, \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right\}^T$$

$$\bar{e}_b^* = \left\{ k_x^*, k_y^*, k_{xy}^* \right\}^T = c_1 \left\{ \frac{\partial \theta_y}{\partial x} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - 2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right\}^T \quad (3)$$

$$\bar{e}_s = \left\{ \phi_x, \phi_y \right\}^T = \left\{ -\theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial x}, \theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right\}^T$$

$$\bar{e}_s^* = \left\{ \psi_x, \psi_y \right\}^T = \left\{ c_2 \left(\theta_y - \frac{\partial w_0}{\partial x} \right), c_2 \left(-\theta_x - \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right\}^T$$

onde $c_2 = 4/h^2$

3. LAMINADOS PIEZOELÉCTRICOS. RELAÇÕES CONSTITUTIVAS.

Assumindo que uma placa compósita é constituída por várias lâminas, incluindo as lâminas piezoeléctricas, a equação constitutiva duma lâmina ortotrópica do substrato é

$$\bar{s} = \overline{\mathbf{Q}}\, \bar{e} \quad (4)$$

e as equações constitutivas dum meio piezoeléctrico deformável, ligando os campos elástico e eléctrico são, Tiersten [11]:

$$\bar{s} = \overline{\mathbf{Q}}\, \bar{e} - \bar{\mathbf{e}}\, \overline{\mathbf{E}} \quad (5)$$

$$\overline{\mathbf{D}} = \bar{\mathbf{e}}^T\, \bar{e} + \bar{\mathbf{p}}\, \overline{\mathbf{E}} \quad (6)$$

onde $\bar{s} = \left\{ \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \right\}^T$ e $\bar{e} = \left\{ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \right\}^T$ são os vectores das tensões e das deformações elásticas, respectivamente, $\overline{\mathbf{Q}}$ é a matriz constitutiva, $\bar{\mathbf{e}}$ é a matriz dos coeficientes piezoeléctricos, $\overline{\mathbf{E}}$ o vector do campo eléctrico, $\overline{\mathbf{D}}$ o vector do deslocamento eléctrico e $\bar{\mathbf{p}}$ a matriz dos coeficientes dieléctricos, no sistema de eixos local (x,y,z) do elemento laminado, e dados em Reddy [9].

O vector do campo eléctrico $\overline{\mathbf{E}}$**,** é o gradiente negativo do potencial eléctrico ϕ na lâmina k

$$\overline{\mathbf{E}} = -\nabla \phi \quad (7)$$

$$\overline{\mathbf{E}} = \left\{ 0 \quad 0 \quad E_z \right\}^T \quad (8)$$

$$E_z = -\phi / t_k \tag{9}$$

O vector das deformações em electro-elasticidade pode ser escrito na forma seguinte

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon} \\ -\bar{E} \end{Bmatrix} \tag{10}$$

As equações constitutivas (5) e (6) podem então ser escritas na forma:

$$\hat{s} = \begin{Bmatrix} \bar{\sigma} \\ \bar{D} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q} & \bar{e} \\ \bar{e}^T & -\bar{p} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{e}^L \\ -\bar{E} \end{Bmatrix} = \hat{\mathbf{C}}\,\hat{e} \tag{11}$$

4. FORMULAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS.

Neste trabalho usa-se um elemento finito não conforme de alta ordem com três nós e oito graus de liberdade por nó. Os deslocamentos e rotações são expressos em termos das variáveis nodais através de funções de forma $\mathbf{N}_i$, dadas em termos das coordenadas de área L_i [12]:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Z}\,(\sum_{i=1}^{3} \mathbf{N}_i\, \mathbf{d}_i) = \mathbf{Z}\,\mathbf{N}\,\mathbf{a} \tag{12}$$

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{N}_i\, \mathbf{d}_i = \mathbf{N}\,\mathbf{a} \tag{13}$$

com

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -z^3 c_1 & 0 & -z + z^3 c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -z^3 c_1 & 0 & +z - z^3 c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\mathbf{d}_i = \begin{Bmatrix} u_0 & v_0 & w_0 & -\dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial x} & \theta_x & \theta_y & \theta_z \end{Bmatrix}_i \tag{15}$$

As deformações definidas pelas expressões (3) podem então ser escritas na forma:

$$\begin{aligned} \bar{e}_m &= \mathbf{B}^m\, \mathbf{a} \\ \bar{e}_b &= \mathbf{B}^b\, \mathbf{a} \\ \bar{e}_b^* &= \mathbf{B}^{*b}\, \mathbf{a} \\ \bar{e}_s &= \mathbf{B}^s\, \mathbf{a} \\ \bar{e}_s^* &= \mathbf{B}^{*s}\, \mathbf{a} \end{aligned} \tag{16}$$

onde as sub-matrizes das relações deformações-deslocamentos, $\mathbf{B}^m$, $\mathbf{B}^b$, $\mathbf{B}^{*b}$, $\mathbf{B}^s$ e $\mathbf{B}^{*s}$ são dadas em [13].
O campo eléctrico é dado por:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{B}^{\phi}\,\phi \tag{17}$$

onde $\mathbf{B}^{\phi}$ é a matriz campo eléctrico – potencial, dada por

$$\mathbf{B}^{\phi} = \begin{bmatrix} 1/t_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1/t_{NPL} \end{bmatrix} \tag{18}$$

As equações da dinâmica são derivadas do princípio de Hamilton. Para laminados é dado por:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{K=1}^{N} \left(\int_{A^e} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \delta\hat{e}^T\ \hat{C}_k\ \hat{e}\,dz\ dA^e - \int_{A^e} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \delta\dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{T}}\ {}^{t}\rho_k\ \dot{\mathbf{u}}\,dz\ dA^e \right) - \left(\int_V \mathbf{f}\ \delta\mathbf{u}\,dV + \int_S \mathbf{T}\,\delta\mathbf{u}\,dS + \sum_i \mathbf{F}_i\ \delta\mathbf{u}_i + \int_S \mathbf{Q}\ \ \delta\phi\ dS \right) \right\} dt = 0 \tag{19}$$

Entrando com as equações (11) a (18) na equação (19), tem-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{K=1}^{N} \left(\int_A \int_{h_{k-1}}^{h_k} \delta \begin{Bmatrix} a \\ \phi \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{mec} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^{\phi} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{Q}} & \bar{\mathbf{e}} \\ \bar{\mathbf{e}}^T & -\bar{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{mec} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^{\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ \phi \end{Bmatrix} dz\,dA - \int_A \mathbf{N}^T \ \Big(\sum_{k=1}^{n} \rho_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} \mathbf{Z}^T\ dz\,)\,\mathbf{N}\ \ dA \right) + \int_V \delta\{a\}^T\ \mathbf{N}^T\ \mathbf{f}\ \ dA + \int_S \delta\{a\}^T\ \mathbf{N}^T\ \mathbf{t}\ \ dS + \delta\{a\}^T\ \mathbf{F}_c\ + \int_S \mathbf{Q}\ \ \delta\phi\ dS \right] dt = 0 \tag{20}$$

Ao primeiro e segundo termos do primeiro membro da equação (20), correspondem as matrizes de rigidez e de massa do elemento, respectivamente dadas por

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} =$$

$$\int_A \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{m\,T} & \mathbf{B}^{b\,T} & \mathbf{B}^{*b\,T} & \mathbf{B}^{s\,T} & \mathbf{B}^{*s\,T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}^{\phi\,T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}' \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}' \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} & \mathbf{G} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}' \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A_s} & \mathbf{C_s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C_s} & \mathbf{E_s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}' & \mathbf{B}' & \mathbf{D}' & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^m & 0 \\ \mathbf{B}^b & 0 \\ \mathbf{B}^{*b} & 0 \\ \mathbf{B}^s & 0 \\ \mathbf{B}^{*s} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^{\phi} \end{bmatrix} dA \tag{21}$$

$$\mathbf{M} = \int_A \mathbf{N}^T \left(\sum_{k=1}^{n} \rho_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \, dz \right) \mathbf{N} \, dA \tag{22}$$

sendo os elementos da rigidez mecânica, piezoeléctrica e dieléctrica dados por:

$$\mathbf{A} = \sum_{K=1}^{N} \left[\overline{Q}_{ij} H_1 \right]$$

$$\left[\mathbf{B} \quad \mathbf{D} \right] = \sum_{K=1}^{N} \left[\overline{Q}_{ij} H_2 \quad \overline{Q}_{ij} H_4 \right]$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \mathbf{G} \end{bmatrix} = \sum_{K=1}^{N} \begin{bmatrix} \overline{Q}_{ij} H_3 & \overline{Q}_{ij} H_5 \\ \overline{Q}_{ij} H_5 & \overline{Q}_{ij} H_7 \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A_s} & \mathbf{C_s} \\ \mathbf{C_s} & \mathbf{E_s} \end{bmatrix} = \sum_{K=1}^{N} \begin{bmatrix} \overline{Q}_{lm} H_1 & \overline{Q}_{lm} H_3 \\ \overline{Q}_{lm} H_3 & \overline{Q}_{lm} H_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{'} = \sum_{k=1}^{N^P} \overline{e}_{3j} \; H_1$$

$$\mathbf{B}^{'} = \sum_{k=1}^{N^P} \overline{e}_{3j} \; H_2 \tag{24}$$

$$\mathbf{D}^{'} = \sum_{k=1}^{N^P} \overline{e}_{3j} \; H_4$$

$$\mathbf{A}^{''} = \sum_{k=1}^{N^P} \overline{p}_{33} \, H_1 \tag{25}$$

$$H_n = \left(z_k^n - z_{k-1}^n \right) / n \tag{26}$$

onde i, j = 1, 2, 6 and l, m = 4,5 ; n =1, 2, 3, 4, 5, 7 , N é o número de laminas e N^p é o número de lâminas de material piezoeléctrico.

Ao terceiro termo da equação (20), corresponde o vector de carga eléctrica aplicada $F^{(A)}$, e o vector de forças mecânicas exteriores aplicadas, o qual é definido por:

$$\mathbf{F}_{ext}^{mec} = \int_V \mathbf{N}^{\mathbf{T}} \, \mathbf{f} \, dA + \int_S \mathbf{N}^{\mathbf{T}} \mathbf{t} \; dS + \mathbf{F}_c \tag{27}$$

onde **f** são forças de volume, **t** forças de superfície, e $\mathbf{F}_c$ forças concentradas.

As matrizes de rigidez e de massas, assim como o vector das forças exteriores são inicialmente obtidas no sistema de coordenadas locais. Para obter a solução de estruturas genéricas, são feitas as transformações de coordenadas locais para globais, Zienckiewicz [12]. Depois destas transformações, o sistema de equações no referencial global é:

$$\begin{bmatrix} M_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ext}^{mec}(t) \\ F^{(A)}(t) \end{Bmatrix} \tag{28}$$

Assumindo que tanto os sensores como os actuadores piezoeléctricos estão colados nas superfícies da estrutura, o vector dos potenciais eléctricos é subdividido em dois componentes, a dos sensores $\phi^{(S)}$ e a dos actuadores $\phi^{(A)}$. A carga eléctrica exteriormente aplicada nos sensores é zero. Separando as componentes dos actuadores e dos sensores, o sistema de equações (28) toma a forma seguinte:

$$[M_{uu}]\{\ddot{q}\} + [K_{uu}]\{q\} + \left[K_{u\phi}^{(S)}\right]\left\{\phi^{(S)}\right\} = \left\{F_{ext}^{mec}(t) - K_{u\phi}^{(A)}\,\phi^{(A)}\right\} \tag{29}$$

$$\left[K_{\phi u}^{(A)}\right]\{q\} + \left[K_{\phi\phi}^{(A)}\right]\left\{\phi^{(A)}\right\} = \left\{F^{(A)}(t)\right\} \tag{30}$$

$$\left[K_{\phi u}^{(S)}\right]\{q\} + \left[K_{\phi\phi}^{(S)}\right]\left\{\phi^{(S)}\right\} = \{0\} \tag{31}$$

Da última destas equações, os potenciais eléctricos $\left\{\phi^{(S)}\right\}$ induzidos nos sensores são obtidos do seguinte modo:

$$\left\{\phi^{(S)}\right\} = -\left[K_{\phi\phi}^{(S)}\right]^{-1}\left[K_{\phi u}^{(S)}\right]\{q\} \tag{32}$$

5. DINÂMICA LINEAR

A carga em cada sensor, com polarização na direcção da espessura, pode ser expressa em termos de integração espacial do deslocamento eléctrico sobre a sua superfície, tendo em consideração que o efeito piezoeléctrico reverso é desprezável, Samanta et al. [7]. Tem-se então

$$Q^{(S)}(t) = \int_A D_z(t)\,dA = \frac{1}{2}\left[\int_{A(z=z_k)} D_z(t)\,dA + \int_{A(z=z_{k+1})} D_z(t)\,dA\right] \tag{33}$$

Da equação (6), a última equação pode ser escrita como segue

$$Q^{(S)}(t) = \int_A \bar{\mathbf{e}}^T\,\bar{e}\;dA \tag{34}$$

ou na forma discretizada

$$Q^{(S)}(t) = \left(\int_A \bar{\mathbf{e}}^T\,\mathbf{B}^{mb}\,dA\right)\{q\} = \left[K_{\phi u}^{(S)}\right]\{q\} \tag{35}$$

A corrente na superfície do sensor é dada por

$$I(t) = \frac{dQ^{(S)}}{dt} \tag{36}$$

a qual pode ser convertida em diferença de potencial do sensor $\phi^{(S)}$ em circuito aberto

$$\phi^{(S)} = G_c \frac{dQ^{(S)}}{dt} \tag{37}$$

onde G_c (= R_a, resistencia do amplificador) é o ganho constante do amplificador, o qual transforma a corrente do sensor em diferença de potencial.
A diferença de potencial dos sensores pode alimentar os actuados através dum amplificador e com uma mudança de polaridade. Tem-se então para a diferença de potencial dos actuados:

$$\phi^{(A)} = -G_i G_c \frac{dQ^{(S)}}{dt} \tag{38}$$

onde G_i é o ganho do amplificador para realizar o controlo.
A diferença de potencial dos actuados, escrita na forma discretizada, é então dada por

$$\phi^{(A)} = -G_i G_c \left[K_{\phi u}^{(S)}\right] \{\dot{q}\} \tag{39}$$

Substituindo a equação (39) na equação (29), obtém-se a equação do movimento:

$$[M_{uu}]\{\ddot{q}\} - G_i G_c \left[K_{u\phi}^{(A)}\right]\left[K_{\phi u}^{(S)}\right]\{\dot{q}\} + \left(\left[K_{uu}\right] - \left[K_{u\phi}^{(S)}\right]\left[K_{\phi\phi}^{(S)}\right]^{-1}\left[K_{\phi u}^{(S)}\right]\right)\{q\} = \left\{F_{ext}^{mec}(t)\right\} \tag{40}$$

Para amortecimento do tipo Rayleigh , esta equação toma a forma:

$$[M_{uu}]\{\ddot{q}\} + (C_R + C_A)\{\dot{q}\} + \left(\left[K_{uu}\right] - \left[K_{u\phi}^{(S)}\right]\left[K_{\phi\phi}^{(S)}\right]^{-1}\left[K_{\phi u}^{(S)}\right]\right)\{q\} = \left\{F_{ext}^{mec}(t)\right\} \tag{41}$$

sendo

$$C_R = \alpha M_{uu} + \beta K_{uu} \tag{42}$$

onde α e β são os coeficientes de Rayleigh, e o efeito de amortecimento devido ao controlo activo é dado por:

$$C_A = -G_i G_c \left[K_{u\phi}^{(A)}\right]\left[K_{\phi u}^{(S)}\right] \tag{43}$$

A solução da equação (41) é obtida usando o método directo de Newmark, Bathe [10].

6. APLICAÇÕES

6.1. Viga compósita adaptativa com controlo activo.

Uma viga encastrada-livre (Figura 1) feita de graphite-epoxy, com sequência de laminação $[\mathbf{a} / 0^\circ / 90^\circ / 90^\circ / 0^\circ / \mathbf{s}]$, onde **a** e **s** representam as laminas actuadora e sensora feitas de PVDF coladas nas superfícies superior e inferior da estrutura principal, foi modelada por uma malha (5x1) de elementos finitos (10 elementos triangulares). As propriedades mecânicas e piezoeléctricas do PVDF são $E_1 = E_2 = 2$ GPa, $G_{12} = 0.775$ GPa, $G_{13} = G_{23} = 0.775$ GPa, $\nu_{12} = 0.29$, ρ=1800kg/m^3, t=0.1x10^{-3} m, $p_{33} = 1.062 \times 10^{-10}$ F/m, $e_{31} = e_{32} = 0.046$ C/m^2, e as propriedades mecânicas da graphite-epoxy são $E_1 = 98$ GPa, $E_2 = 7.9$ GPa, $G_{12} = 5.6$ GPA, $\nu_{12} = 0.28, \rho$=1520 kg/m^3, e têm espessura 0.125x10^{-3} m. As dimensões da viga são: comprimento L=0.1 m e largura b=0.005 m. Os coeficientes de amortecimento de Rayleigh são $\alpha = 1.0 \times 10^{-4}$ e $\beta = 9.6 \times 10^{-6}$. A viga é sujeita a uma carga transversa harmonicamente variável $q(t) = q \sin 2\pi f\, t$, onde q = 7.5 N/m^2 é uma pressão uniformemente distribuída. Para uma carga sinusoidal com frequência f=10 Hz, a Figura 2 mostra a resposta **w** da ponta da viga no primeiro modo de vibração, respectivamente para os casos de não controlo e controlo activo. Observa-se claramente o efeito obtido com o controlo $G_i G_c = 1.0 \times 10^{12}$.

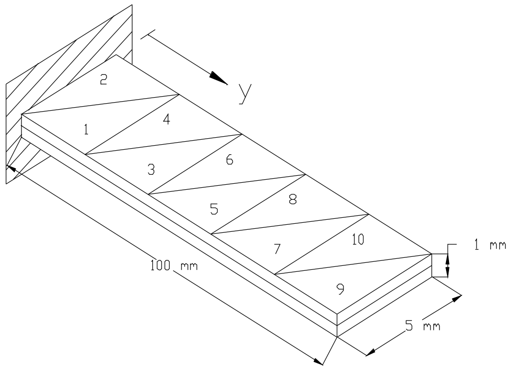

Figure 1. Viga encastrada-livre com actuadores e sensores colados nas superficies superior e inferior.

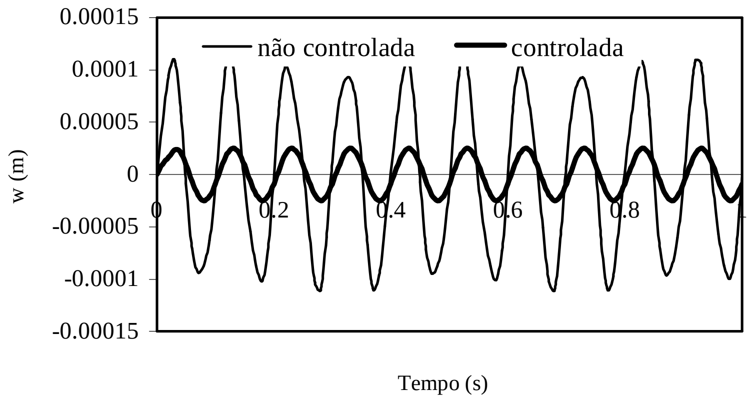

Figure 2. Efeito do controlo activo na resposta **w**, f=10 Hz

As Figura 3 e 4 mostram a diferença de potencial induzida no sensor e e aplicada no actuador, colocados no elemento 1, onde se observa que estas variam com a vibração da viga, e que o seu período de variação é o mesmo do período de vibração da estrutura.

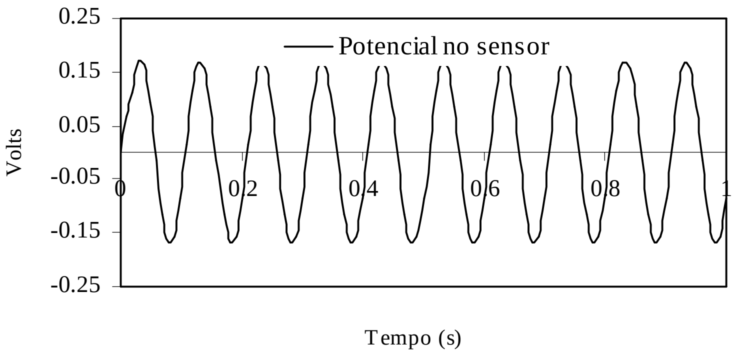

Figure 3. Diferença de potencial no sensor, f=10 Hz

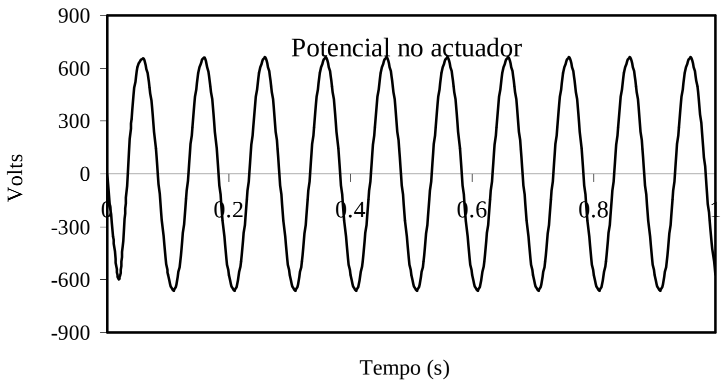

Figure 4. Diferença de potencial no actuador, f=10 Hz

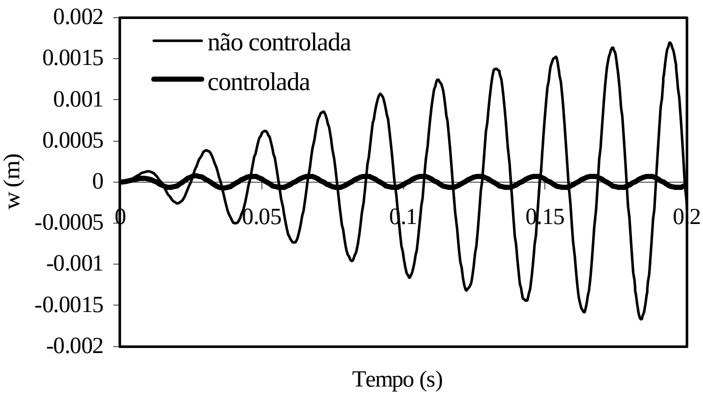

Figure 5. Efeito do controlo activo na resposta **w**, f=50 Hz

Para uma carga sinusoidal com frequência f=50 Hz, a qual é muito próxima da 1ª frequência natural da viga, a Figura 5 mostra as respostas **w** não controlada e controlada, onde o efeito do controlo activo $G_i G_c = 1.0 \times 10^{11}$ é agora muito mais evidente.

12. CONCLUSÕES

- O modelo de elementos finitos baseado na teoria de deformação de corte de 3ª ordem, foi desenvolvido para ser aplicado em estruturas laminadas, integrando sensores e actuadores piezoeléctricos na forma de lâminas ou patches.
- O modelo desenvolvido foi aplicado no amortecimento activo de estruturas simples a vibrarem sob a acção de forças superficiais harmonicamente variáveis.
- Os resultados obtidos mostram que o modelo desenvolvido permite analisar o controlo activo de vibrações forçadas de estruturas do tipo placa.

AGRADECIMENTOS: Os autores agradecem o apoio financeiro recebido através do programa FCT/POCTI/FEDER, e Projecto POCTI/FEDER/ EME/37559/2001.

REFERÊNCIAS

[1] H.Allik, e T.Hughes, “Finite element method for piezoelectric vibration”, *Int. J. Num. Meth. Engng.* **2**, pp. 151-157, (1970).

[2] E.F. Crawley e J. de Luis, “Use of piezoelectric actuactors as elements of intelligent strctures”, *AAIA Journal* **25**, 10, pp. 1373-1385, (1987).

[3] H.S. Tzou e C.I. Tseng, “Distributed piezoelectric sensor/actuator design for dynamic mesuarement/control of distributed parametric systems: A piezoelectric finite element approach”, *J. Sound Vibration* **138**, pp. 17-34, (1990).

[4] V.G. Senthil, V.V. Varadan e V.K. Varadan, “A review and critique of theories for piezoelectric laminates”, *Smart Material Structures* **9**, pp. 24-28, (1999).

[5] A. Benjeddou, “Advances in piezoelectric finite element modelling of adaptive structural elements: A survey”, *Computer and Structures* **76**, pp. 347-363, (2000).

[6] V.M. Franco, M.A. Gomes, A. Suleman, C.M. Mota Soares e C.A. Mota Soares, “Modelling and design of adaptive composite structures”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engineering* **185**, pp. 325-346, (2000).

[7] B. Samanta, M.C. Ray, e R. Bhattacharyya, “Finite element model for active control of intelligent structures”, *AIAA Journal* vol. **34**, n. 9, pp. 1885-1893, (1996).

[8] K.Y. Lam, X.Q. Peng, G.R. Liu e J.N. Reddy, “A finite element model for piezoelectric composite laminates”, *Smart Material Structures* **6**, pp. 583-591, (1997).

[9] J.N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates*, CRC Press, Boca Raton, New York (1997).

[10] K.J. Bathe, *Finite element procedures in engineering analysis,* Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, USA (1982).

[11] H.F. Tiersten, *Linear Piezoelectric Plate Vibrations*, New York: Plenum Press (1969).

[12] O.C. Zienkiewicz e R.L. Taylor, *The finite element method*, McGraw Hill, Vol. I., 1989, Vol. II, (1991).

[13] J.S. Moita, J.I. Barbosa, C.M. Mota Soares, C.A. Mota Soares, *Design sensitivity analysis and optimal design of geometric non-linear laminated plate and shell structures.* Carlos A. Mota Soares, Cristóvão M. Mota Soares, Manuel J.M. Freitas, eds. *Proceedings of NATO Advanced Study Institute, Mechanics of Composite Materials and Structures, 1998,* pp. 265-308.