

Métodos dos Momentos

Prof. Drº António Casimiro
FCT / Ualg
Engº Vitor Lopes
Área Dep. Eng. Electrotécnica
EST / Ualg
Engº Fernando Emídio
Área Dep. Eng. Electrotécnica
EST / Ualg

1. Introdução

Os métodos utilizados na resolução de problemas, nos vários ramos da Engenharia ou ciências aplicadas, baseiam-se, actualmente, em uma de duas categorias: métodos analíticos e métodos numéricos.

É preferível a utilização dos métodos analíticos, na resolução de equações ou outros modelos matemáticos, sempre que possível, uma vez que formamões gerais em vez de particularizadas, para além de uma maior informação quanto à natureza e dependência dessas funções.

No entanto, a resolução de problemas, nestes ramos, é muitas vezes complexa, envolvendo fenómenos não-lineares, pelo que é comum encontrarmo-nos numa situação em que se torna difícil, senão impossível a descoberta duma solução analítica para um problema real.

Por exemplo, na resolução de equações diferenciais, é raro encontrar-se um problema que possa ser resolvido analiticamente, a menos que se imponham condições de simplificação nos modelos respectivos.

Com o desenvolvimento de rápidos e eficientes computadores digitais, o papel dos métodos numéricos tem vindo a aumentar significativamente na resolução de problemas.

2. Método dos Momentos, MM

O Método dos Momentos é uma técnica de resolução de equações integrais complexas por redução destas a um sistema de equações lineares simples. Este método utiliza uma técnica conhecida por método dos resíduos ponderados. Na realidade os termos método dos resíduos ponderados e método dos momentos são sinónimos.

Todas as técnicas de resíduos ponderados começam por estabelecer um conjunto de funções de base com um ou mais parâmetros variáveis. Os resíduos são uma medida da diferença entre a solução de base e a solução real. Os parâmetros variáveis são determinados de forma a garantir uma melhor aproximação das funções de base, com vista a minimizar os resíduos. A situação ideal seria a determinação de uma função de base para a qual o resíduo se tornaria nulo, o que na prática nem sempre é possível.

3. Formulação matemática do Método dos Momentos

Considere-se a equação não homogénea,

$$L(f)=g$$

onde L é um operador linear, g é uma função conhecida e f é a função a encontrar.

Expandindo f numa série de funções f_1, f_2, \dots, f_n conhecidas, no domínio de L

$$f = \sum_n \alpha_n f_n$$

sendo α_n constantes e as funções f_n denominadas por funções de base ou funções de expansão. Para soluções exactas o segundo termo da equação é um somatório infinito e os f_n formam um conjunto completo de soluções de base. Caso seja uma solução aproximada, f é dado por um somatório finito.

Utilizando a linearidade de L , obtemos:

$$L(f) = L\left(\sum_n \alpha_n f_n\right) = \sum_n \alpha_n L(f_n) = g$$

Observando a equação, podemos concluir que as incógnitas são agora os escalares α_n . Se por hipótese, considerarmos a solução aproximada, isto é, com N funções de base, a resolução da equação

não é possível, visto possuir maior número de incógnitas (N) do que equações (1).

De forma a determinar as grandezas escalares α_n , efectua-se o produto escalar com um conjunto de funções conhecidas w_m denominadas por funções de teste ou peso. O produto escalar $\langle f, g \rangle$ é uma operação escalar que satisfaz as leis:

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \langle g, f \rangle \\ \langle \alpha f + \beta g, h \rangle &= \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle \\ \langle f^*, f \rangle &> 0 \quad \text{se} \quad f \neq 0 \\ \langle f^*, f \rangle &= 0 \quad \text{se} \quad f = 0 \end{aligned}$$

em que α e β são grandezas escalares e o $*$ indica o complexo conjugado.

Assim, para cada função de teste w_m vamos ter:

$$\begin{aligned} \langle g, w_m \rangle &= \langle \sum_n \alpha_n L(f_n), w_m \rangle = \\ &= \sum_n \alpha_n \langle L(f_n), w_m \rangle \\ \Leftrightarrow \sum_n \alpha_n \langle w_m, L(f_n) \rangle &= \langle w_m, g \rangle \\ m &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Desenvolvendo o somatório, por tantas quantas funções de teste possuímos, podemos escrever as equações num sistema de equações do tipo

$$m = 1 \begin{cases} \alpha_1 \langle w_1, L(f_1) \rangle + \dots = \langle w_1, g \rangle \\ \alpha_1 \langle w_2, L(f_1) \rangle + \dots = \langle w_2, g \rangle \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{cases}$$

Este conjunto de equações pode ser escrito na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \langle w_1, Lf_1 \rangle & \langle w_1, Lf_2 \rangle & \dots \\ \langle w_2, Lf_1 \rangle & \langle w_2, Lf_2 \rangle & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle w_1, g \rangle \\ \langle w_2, g \rangle \\ \dots \end{bmatrix}$$

ou seja

$$[l_{mn}][\alpha_n] = [g_m]$$

sendo

$$l_{mn} = \langle w_m, Lf_n \rangle$$

$$g_m = \langle w_m, g \rangle$$

Se a matriz $[l]$ for não singular, a sua inversa $[l]^{-1}$ existe e os escalares α_n são dados por

$$[\alpha_n] = [l_{mn}^{-1}][g_m]$$

e a solução de f por

$$f = \sum_n \alpha_n f_n$$

Definindo a matriz de funções

$$\begin{bmatrix} \tilde{f}_n \end{bmatrix} = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad \dots]$$

vem

$$f = \begin{bmatrix} \tilde{f}_n \end{bmatrix} \cdot [\alpha_n] = \begin{bmatrix} \tilde{f}_n \end{bmatrix} \cdot [l_{mn}^{-1}][g_m]$$

Esta solução pode ser aproximada ou exacta, dependendo da escolha dos f_n e w_m .

3.1. Funções de base

Um passo muito importante na aplicação deste método numérico é a escolha das funções de base. Teoricamente existe uma infinidade de funções que poderíamos escolher, no entanto, na prática só utilizamos um número limitado de funções [3].

De uma maneira geral, escolhem-se funções do género da função desconhecida, pois de acordo com o problema, sabemos o tipo de função que vamos encontrar.

Em [3] são apresentadas algumas regras a seguir na escolha das funções de base. No entanto f_n devem ser linearmente independentes.

Estes conjuntos de funções podem ser divididos em duas classes. Sendo a primeira denominada classe das funções de subdomínio, cujas funções são diferentes de zero, apenas em subdomínios de f , e a segunda denominada funções de todo-o-domínio, onde são constituídas por funções diferentes de zero em todo o domínio de f .

3.1.1. Funções de subdomínio

Das duas classes de funções apresentadas para constituírem as funções de base, as funções de subdomínio são as mais utilizadas, pois ao contrário das funções de todo-o-domínio, estas não implicam o conhecimento antecipado da natureza da função a determinar.

3.1.2. Funções de todo-o-domínio

Funções de todo-o-domínio, como o próprio nome indica, são funções definidas e diferentes de zero em todo o domínio da função f .

Estas funções são pouco utilizadas, pois ao contrário das funções de subdomínio, implicam o conhecimento antecipado da natureza da função a determinar.

3.2. Funções de teste

A atribuição das funções de teste é de grande importância, sendo que os elementos w_m devem ser linearmente independentes, de forma que as N equações também o sejam. Na generalidade, escolhem-se as funções de teste de forma a simplificar o programa computacional, tendo sempre em conta a independência linear.

Por esta razão, a escolha de funções de teste semelhantes às funções de base é, em regra, adoptada.

No caso particular, em que as funções de teste são iguais às funções de base $w_m = f_m$ designa-se por *Método de Galerkin*.

4. Conclusões

Como podemos verificar, este método numérico é de extrema utilidade, pois transforma uma equação integro-diferencial num sistema de equações lineares.

Para tal é necessário encontrar as funções de base e de teste mais adequadas para cada tipo de problema.

Este método foi utilizado no cálculo da distribuição de corrente num agrupamento de antenas, em que se relacionam as alimentações com a corrente, numa forma matricial, obtendo-se um modelo do tipo da análise matricial de circuitos com possibilidade de aplicação à análise e síntese de Diagramas de Radiação de estruturas radiantes (estudo a apresentar em próxima edição).

5. Referências

[1] J. R. Rice, *Numerical Methods: Software and Analysis*, McGraw-Hill International Editions, 1983.

[2] Randy Bancroft, *Understanding Electromagnetic Scattering Using the Moment Method: a practical approach*, London: Artech House, 1996.

[3] Roger F. Harrington, *Field Computation by Moment Method*, New York: Macmillan, 1968.

[4] Fernando B. Emídio, "Modelos de Relação Entre Estruturas Radiantes Unidimensionais e Diagramas de Radiação", Dissertação, UA, Fevereiro de 1998.

[5] L.L. Tsai, C. E. Smith, "Method of Moments in Electromagnetics for Undergraduates", *IEEE*

Transactions on Antennas and Propagation, Vol. E-21, No. 1, Fevereiro 1978.

[6] A. F. Peterson, D. R. Wilton, R. E. Jorgenson, "Variational Nature of Galerkin and Non-Galerkin Moment Method Solutions" *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 44, No. 4, Abril 1996.

[7] Steven Chapra, Raymond Canale, *Numerical Methods for Engineers*, McGraw-Hill International Editions, 1990.