



## VII Congresso de Mecânica Aplicada e Computacional

Universidade de Évora  
14 a 16 de Abril de 2003

### OPTIMIZAÇÃO DE PAINÉIS LAMINADOS COM FUROS

José Simões Moita<sup>1</sup>, Cristóvão Mota Soares<sup>2</sup> e Carlos Mota Soares<sup>3</sup>

#### RESUMO

Neste trabalho é feita a optimização de estruturas laminadas do tipo placa-casca, construídas por materiais compósitos, fazendo-se uso dum modelo discreto baseado na Teoria de Kirchhoff em conjugação com a Teoria da Camada Única Equivalente. As análises estrutural e de sensibilidades de estruturas em regime estático com comportamento geometricamente não linear, em vibrações livres, e em estabilidade linear, são desenvolvidas para um elemento finito triangular plano de 3 nós, com 18 graus de liberdade.

A optimização é feita considerando diferentes funções objectivo, tais como a minimização da energia elástica de deformação, a maximização da frequência fundamental e a maximização da carga crítica, e é baseada no método das sensibilidades. As sensibilidades destas funções objectivo em ordem às variáveis de projecto são calculadas analiticamente, sendo a orientação das fibras as variáveis de projecto consideradas.

#### 1. INTRODUÇÃO

As propriedades mecânicas dum laminado são fortemente dependentes da orientação das fibras, e por esta razão o laminado deve ser projectado de modo a obter as máximas vantagens na sua aplicação. A análise de sensibilidades é muito importante pois permite saber os efeitos da variação das variáveis de projecto no desempenho da estrutura. O cálculo correcto e eficiente das sensibilidades, associado a modelos estruturais adequados e eficientes em termos de tempo computacional, (especialmente quando a análise não linear está envolvida), é muito importante.

Neste trabalho a análise geometricamente não linear é realizada com base na formulação Lagrangeana actualizada, Bathe e Ho (1981), Bathe (1982), em associação com o método incremental-iterativo de Newton-Raphson.

---

<sup>1</sup> Professor Coordenador, Escola Superior de Tecnologia, Universidade do Algarve, Faro.

<sup>2</sup> Professor Associado, Departamento Engenharia Mecânica, Instituto Superior Técnico, Lisboa

<sup>3</sup> Professor Catedrático, Departamento Engenharia Mecânica, Instituto Superior Técnico, Lisboa

O modelo discreto, que foi desenvolvido e implementado, é baseado num elemento finito triangular plano de 3 nós, com 18 graus de liberdade, Moita (1999), em conjugação com a Teoria Clássica de Placas de Kirchhoff.

Consideráveis trabalhos de investigação foram efectuados durante as últimas duas décadas no campo da análise de sensibilidades de estruturas com resposta não linear, principalmente em estruturas isotrópicas. Entre outros citam-se aqui os trabalhos de Ryu *et al* (1985), Wu e Arora (1987), Santos e Choi (1988), Park e Choi (1990), Haftka (1993), Mroz e Haftka (1995), e Kleiber (1997), que apresentaram diferentes métodos para o cálculo de sensibilidades da carga crítica, deslocamentos e tensões. A optimização de estruturas não lineares usando diferentes metodologias, pode ser encontrada em trabalhos de Haririan *et al* (1987), Ringertz (1992), Oblak *et al* (1993), Polynkin *et al* (1995), Reitinger e Ramm (1995), entre outros.

O objectivo deste trabalho é apresentar o desenvolvimento e mostrar aplicações ilustrativas dum modelo discreto de elementos finitos para cálculo de sensibilidades da resposta de estruturas do tipo placa-casca, incluindo a resposta não linear. Estas sensibilidades são calculadas analiticamente em ordem à orientação das fibras, e o subsquente problema de optimização é resolvido por técnicas de programação não linear, descritas em Vanderplaats (1984), usando o programa de optimização ADS, Vanderplaats (1984).

## 2. CAMPO DE DESLOCAMENTOS E DEFORMAÇÕES

As componentes do deslocamento num ponto genérico do laminado (Figura 1), considerando a teoria clássica de placas são definidas na forma:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \theta_y(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z \theta_x(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  são os deslocamentos dum ponto genérico da superfície média do laminado nas direcções dos eixos  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $\theta_x = -\partial w / \partial y$  e  $\theta_y = \partial w / \partial x$  são as rotações da normal à superfície média, em torno do eixo  $x$ , e do eixo  $y$ , respectivamente.

As deformações não lineares associadas com o campo de deslocamentos representado pelas equações (1), são dadas por:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \gamma_{xy} &= \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - z \left( 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

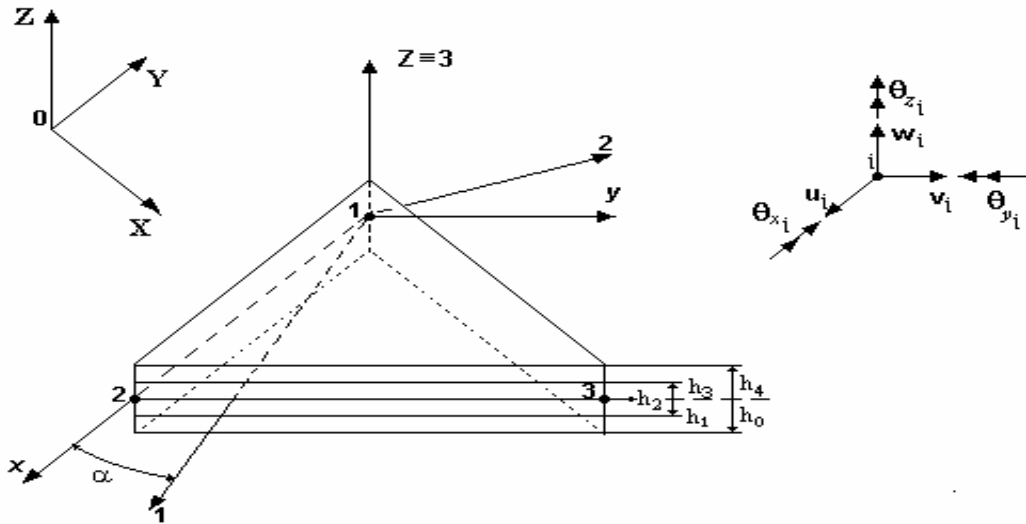


Figura 1. Elemento triangular plano com os sistemas de coordenadas local e material

As componentes do vector das deformações num ponto qualquer, podem ser representadas pela soma das respectivas parte linear e não linear:

$$\bar{\mathbf{e}}_K = \bar{\mathbf{e}}_K^L + \bar{\mathbf{e}}_K^{NL} \quad (3)$$

A parte linear pode ser escrita sinteticamente na forma seguinte

$$\bar{\mathbf{e}}^L = \bar{\mathbf{e}}_m^L + z \bar{\mathbf{e}}_b^L \quad (4)$$

com as deformações na superfície média e as curvaturas definidas pelos vectores:

$$\bar{\mathbf{e}}_m^L = \left\{ \varepsilon_{0_{xx}}^L \quad \varepsilon_{0_{yy}}^L \quad \gamma_{0_{xy}}^L \right\}^T \quad ; \quad \bar{\mathbf{e}}_b^L = \left\{ \kappa_{xx} \quad \kappa_{yy} \quad \kappa_{xy} \right\}^T \quad (5)$$

e o vector das deformações não lineares definido por

$$\bar{\mathbf{e}}^{NL} = \left\{ \varepsilon_{xx}^{NL} \quad \varepsilon_{yy}^{NL} \quad \gamma_{xy}^{NL} \right\}^T \quad (6)$$

### 3. RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DUM LAMINADO

Para o caso dum laminado de N lâminas, estabelece-se neste um sistema ortogonal de referência (x,y,z). As relações tensões-deformações do laminado são então obtidas com base nas relações tensões-deformações de cada lâmina, onde é definido um sistema ortogonal de eixos materiais (1,2,3).

As relações tensões-deformações na lâmina k são definidas em relação aos eixos do laminado pela equação:

$$\bar{\mathbf{S}}_k = \bar{\mathbf{Q}}_k \bar{\mathbf{e}}_k \quad (7)$$

onde os elementos  $\bar{Q}_{ij}$  para a lâmina k são dados em Reddy (1997):

As relações constitutivas do laminado, que relacionam as forças e momentos resultantes com as deformações, são então obtidas integrando as tensões ao longo da espessura do laminado.

$$\{\mathbf{N}\} = \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{K=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \quad (8)$$

$$\{\mathbf{M}\} = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{K=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k z dz \quad (9)$$

onde  $h$  é a espessura total do laminado e  $h_k$  e  $h_{k-1}$  são as distâncias da superfície de referência do laminado à superfície superior e inferior da lamina  $k$ , respectivamente.

Substituindo o vector  $\bar{\mathbf{s}}_k$  nestas equações, com as tensões a serem obtidas como na análise linear, Bathe e Ho (1981), vem

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_m^L \\ \bar{\mathbf{e}}_b^L \end{Bmatrix} \quad ; \quad \hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{e}} \quad (10)$$

com

$$A_{ij} = \sum_{K=1}^N \bar{Q}_{ij} (h_k - h_{k-1}) \quad ; \quad B_{ij} = \sum_{K=1}^N \bar{Q}_{ij} (h_k^2 - h_{k-1}^2) / 2 \quad ; \quad D_{ij} = \sum_{K=1}^N \bar{Q}_{ij} (h_k^3 - h_{k-1}^3) / 3 \quad (11)$$

#### 4. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O elemento finito não-conforme triangular plano de 3 nós com 18 graus de liberdade foi desenvolvido por Bazeley *et al* (1966) para placas isotrópicas e aplicado à análise geometricamente não linear por Bathe e Ho (1981). No presente trabalho este elemento é aplicado à análise de estruturas compósitas laminadas finas do tipo placa-casca, usando a Teoria Clássica de Placas (CPT). Está representado na Figura 1, onde  $\alpha$  representa o ângulo de orientação das fibras, e  $h_i$  representam as distâncias vectoriais, distâncias segundo  $z$ , da superfície média às superfícies superior e inferior de cada lâmina. A formulação do elemento é obtida por sobreposição de um elemento de tensão plana de placa com um elemento de flexão de placa mais uma rotação no plano  $\theta_z$ . Os deslocamentos  $(u_0, v_0, w_0, \theta_x, \theta_y)$  num ponto genérico do elemento são obtidos em termos dos respectivos deslocamentos nos nós, através das funções interpoladoras, as quais são definidas em termos de coordenadas de área:

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{N}_i \mathbf{d}_i = \mathbf{N} \mathbf{a}^e \quad (12)$$

Pode ainda escrever-se para as componentes do deslocamento num ponto genérico do laminado:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Z} \mathbf{N} \mathbf{a}^e \quad (13)$$

sendo:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

O vector das deformações no plano da superfície media (ou de membrana), e o vector das curvaturas  $\bar{\mathbf{e}}_b$ , são dados por:

$$\bar{\mathbf{e}}_m = \sum_{i=1}^3 \mathbf{B}_i^m \mathbf{d}_i = \mathbf{B}^m \mathbf{a}_m^e \quad ; \quad \bar{\mathbf{e}}_b = \sum \mathbf{B}_i^b \mathbf{d}_i = \mathbf{B}^b \mathbf{a}_b^e \quad (15)$$

onde  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{B}^m$ ,  $\mathbf{B}^b$  são as matrizes de deformação linear-deslocamento de membrana e de flexão respectivamente, as quais são dadas em Moita (1999) e Moita *et al* (2002).

## 5. PRINCIPIO DO TRABALHO VIRTUAL NO ELEMENTO LAMINADO.

A equação do Princípio do Trabalho Virtual em conjugação a formulação Lagrangiana atualizada, aplicada a um elemento laminado com N lâminas, toma a forma:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{K=1}^N \left[ \int_{t_A^e}^{h_k} \delta(\bar{\mathbf{e}}^L)^T \bar{\mathbf{Q}}_K \bar{\mathbf{e}}^L dz {}^t dA^e + \int_{t_A^e}^{h_k} \delta({}_t \bar{\mathbf{e}}^{NL})^T {}_t \bar{\mathbf{S}}_K dz {}^t dA^e - \int_{t_A^e}^{h_k} \delta \mathbf{u}^T \rho_k \mathbf{u} dz {}^t dA^e \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ {}^{t+\Delta t} \mathcal{R}^e - \sum_{K=1}^N \int_{t_A^e}^{h_k} \delta({}_t \bar{\mathbf{e}}^L)^T {}_t \bar{\mathbf{S}}_K dz {}^t dA^e \right] dt \quad (16)$$

Integrando esta equação ao longo da espessura obtém-se, Moita *et al* (2002):

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{t_A^e} \delta \mathbf{a}^T \left( \mathbf{B}^{mT} \mathbf{A} \mathbf{B}^m + \mathbf{B}^{mT} \mathbf{B} \mathbf{B}^b + \mathbf{B}^{bT} \mathbf{B} \mathbf{B}^m + \mathbf{B}^{bT} \mathbf{C} \mathbf{B}^b \right) \mathbf{a}^e {}^t dA + \int_{t_A^e} \delta \mathbf{a}^T (\mathbf{G}^T \mathbf{t} \mathbf{G}) \mathbf{a}^e {}^t dA + \int_{t_A^e} \delta \mathbf{a}^T \mathbf{N}^T \left( \sum_{k=1}^n \rho_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} dz \right) \mathbf{N} \mathbf{a}^e dA \right\} = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{t_A^e} \delta \mathbf{a}^T \mathbf{N}^T \mathbf{p}^e {}^0 dA^e + \int_{0_S} \delta \mathbf{a}^T \mathbf{N}^T \mathbf{t}^e {}^0 dS + \delta \mathbf{a}^T \mathbf{F}_c^e \right. \quad (17)$$

$$\left. - \int_{t_A^e} \delta \mathbf{a}^T \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{s}} {}^t dA^e \right\}$$

sendo a matriz de rigidez linear, a matriz de rigidez geométrica, a matriz de massa, o vector de forças exteriores aplicadas, e o vector de forças internas, do elemento, definidos por:

$$\mathbf{K}_L^e = \int_{t_A^e} \left( \mathbf{B}^{mT} \mathbf{A} \mathbf{B}^m + \mathbf{B}^{mT} \mathbf{B} \mathbf{B}^b + \mathbf{B}^{bT} \mathbf{B} \mathbf{B}^m + \mathbf{B}^{bT} \mathbf{C} \mathbf{B}^b \right) {}^t dA^e \quad (18)$$

$$\mathbf{K}_\sigma^e = \int_{t_A^e} (\mathbf{G}^T \mathbf{t} \mathbf{G}) {}^t dA^e \quad (19)$$

$$\mathbf{M}^e = \int_{t_A^e} \mathbf{N}^T \left( \sum_{k=1}^n \rho_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} dz \right) \mathbf{N} dA \quad (20)$$

$$\mathbf{F}_{\text{ext}}^e = \int_{\text{A}^e} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{p}^e \, dA^e + \int_{\text{S}} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{t}^e \, dS^e + \mathbf{F}_c^e \quad (21)$$

$$\mathbf{F}_{\text{int}}^e = \int_{\text{A}^e} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{S}}^t \, dA^e \quad (22)$$

onde as matrizes  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{t}$  são dadas em Moita *et al* (2002).

Considerando que a equação (17) é válida para qualquer campo de deslocamentos virtuais,  $\delta \mathbf{a}^e$ , e considerando separadamente os diferentes tipos de análise, obtém-se após a transformação de coordenadas, as seguintes equações no sistema de coordenadas globais:

análise geometricamente não-linear

$${}_{t+\Delta t}(\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma)^{(k-1)} (\Delta \mathbf{q})^{(k)} = {}_{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{ext}} - {}_{t+\Delta t}(\mathbf{F}_{\text{int}})^{(k-1)} \quad (23)$$

análise de estabilidade linear

$$(\mathbf{K}_L + \lambda_{\text{cr}} \mathbf{K}_\sigma) \mathbf{q} = 0 \quad (24)$$

vibrações livres e harmónicas

$$(\mathbf{K}_L - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{q} = 0 \quad (25)$$

onde  $\mathbf{K}_L$ ,  $\mathbf{K}_\sigma$ ,  $\mathbf{M}$ , são respectivamente a matriz de rigidez linear, a matriz de rigidez geométrica, a matriz de massas da estrutura,  $\mathbf{F}_{\text{ext}}^0$  é o vector das forças externas aplicadas da estrutura,  $\Delta \mathbf{q}$  e  $\mathbf{q}$  são respectivamente o vector dos deslocamentos iterativos nodais, e o vector modal.

Uma vez introduzidas as condições de fronteira resolve-se o sistema de equações não lineares (23), ou o problema de valores e vectores próprios (24 ou 25).

## 6. ANÁLISE DE SENSIBILIDADES

Na análise geometricamente não-linear, no final de cada incremento, isto é, após obtida a convergência, a equação de equilíbrio pode ser escrita na forma, Haftka (1993)

$$\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{q}, \mathbf{b}) = \mu \mathbf{F}_{\text{ext}}^0 \quad (26)$$

onde  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  é o vector das forças internas que é função do vector dos deslocamentos totais  $\mathbf{q}$  e do vector das variáveis de projecto  $\mathbf{b}$ ,  $\mu$  é o factor de carga do incremento e  $\mathbf{F}_{\text{ext}}^0$  é o vector das forças externas aplicadas, sendo todas estas grandezas medidas no final do incremento.

Diferenciando a equação (26) em ordem à variável de projecto  $b_i$ , para um nível de carga fixo, obtém-se:

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{db_i} + \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial b_i} = \mu \frac{d\mathbf{F}_{\text{ext}}^0}{db_i} \quad (27)$$

$$\mathbf{K}_T \frac{d\mathbf{q}}{db_i} = \mu \frac{d\mathbf{F}_{\text{ext}}^0}{db_i} - \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial b_i} \quad (28)$$

onde  $\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{q}}$  é a matriz de rigidez tangencial.

A sensibilidade do vector dos deslocamentos, em qualquer nível de carga é então dado por:

$$\frac{d\mathbf{q}}{db_i} = -\mathbf{K}_T^{-1} \left( \mu \frac{d\mathbf{F}_{\text{ext}}^0}{db_i} - \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial b_i} \right) \quad (29)$$

onde a derivada da força interna é calculada analiticamente, ao nível do elemento

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}^e}{\partial \alpha_i} = \int_A \mathbf{B}^T \frac{\partial \hat{\mathbf{D}}}{\partial \alpha_i} \bar{\mathbf{e}}_0^L dA \quad (30)$$

### 6.1. Sensibilidades da energia elástica de deformação

A energia elástica de deformação é dada pela expressão:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_T \mathbf{q} \quad (31)$$

A sua derivada é então

$$\frac{dU}{db_i} = \frac{\partial U}{\partial b_i} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{db_i} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial b_i} \mathbf{q} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{db_i} \quad (32)$$

Atendendo à simetria de  $\mathbf{K}_T$ , tem-se:

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{q}^T \mathbf{K}_T \quad (33)$$

Tendo em conta a equação (29), vem ainda:

$$\frac{dU}{db_i} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial b_i} \mathbf{q} + \mathbf{q}^T \mathbf{K}_T \mathbf{K}_T^{-1} \left( \mu \frac{d\mathbf{F}_{\text{ext}}^0}{db_i} - \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial b_i} \right) \quad (34)$$

$$\frac{dU}{db_i} = \mathbf{q}^T \left( \mu \frac{d\mathbf{F}_{\text{ext}}^0}{db_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial b_i} \mathbf{q} - \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial b_i} \right) \quad (35)$$

### 6.2 Sensibilidades da frequência fundamental.

Neste trabalho o cálculo de sensibilidades da frequência fundamental é efectuado

considerando que ela é única; contudo é possível a ocorrência de frequências repetidas a que correspondem múltiplos modos de vibração, sendo necessário o cálculo das derivadas direccionais para obter as sensibilidades – Rodrigues *et al* (1995), Mateus *et al.* (1997), e Mota Soares *et al.* (1997). A utilização do “Subspace Iteration Method” possibilita contudo calcular diversas frequências naturais e respectivos modos de vibração, o que permite observar, em cada análise do processo de optimização, se a frequência fundamental obtida é repetida.

Diferenciando a equação  $(\mathbf{K}_L - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{q} = 0$  em ordem a  $b_i$ , tem-se

$$\frac{\partial \mathbf{K}_L}{\partial b_i} \mathbf{q} + \mathbf{K}_L \frac{d\mathbf{q}}{db_i} - 2\omega \frac{d\omega}{db_i} \mathbf{M} \mathbf{q} - \omega^2 \left( \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b_i} \mathbf{q} + \mathbf{M} \frac{d\mathbf{q}}{db_i} \right) = 0 \quad (36)$$

e agrupando termos, vem

$$\left( \frac{\partial \mathbf{K}_L}{\partial b_i} - \omega^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b_i} \right) \mathbf{q} - 2\omega \frac{d\omega}{db_i} \mathbf{M} \mathbf{q} + (\mathbf{K}_L - \omega^2 \mathbf{M}) \frac{d\mathbf{q}}{db_i} = 0 \quad (37)$$

Pre-multiplicando esta equação por  $\mathbf{q}^T$ , sendo  $\mathbf{q}^T (\mathbf{K}_L - \omega^2 \mathbf{M}) \frac{d\mathbf{q}}{db_i}$ , e o modo de vibração  $\mathbf{q}$  normalizado pela relação  $\mathbf{q}^T \mathbf{M} \mathbf{q} = 1$ , vem ainda

$$\frac{d\omega}{db_i} = \frac{1}{2\omega} \mathbf{q}^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}_L}{\partial b_i} - \omega^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b_i} \right) \mathbf{q} \quad (38)$$

Nesta expressão tem-se, ao nível do elemento:

$$\frac{\partial \mathbf{K}_L^e}{\partial b_i} = \int_A \mathbf{B}^T \frac{\partial \hat{\mathbf{D}}}{\partial b_i} \mathbf{B} dA \quad (39)$$

### 6.3. Sensibilidades da Primeira Carga Crítica.

Diferenciando a equação  $(\mathbf{K}_L + \lambda_{cr} \mathbf{K}_\sigma) \mathbf{q} = 0$  em ordem às variáveis de projecto  $b_i$ , seguindo o desenvolvimento que se fez para o caso da frequência fundamental, e tendo em consideração o que se disse sobre valores próprios repetidos, obtém-se:

$$\frac{d\lambda_{cr}}{db_i} = \mathbf{q}^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}_L}{\partial b_i} + \lambda_{cr} \frac{\partial \mathbf{K}_\sigma}{\partial b_i} \right) \mathbf{q} \quad (40)$$

onde se tem, ao nível do elemento:

$$\frac{\partial \mathbf{K}_\sigma^e}{\partial b_i} = \int_{A^e} \left( \mathbf{G}^T \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial b_i} \mathbf{G} \right)^t dA^e \quad (41)$$



## 7. OPTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS

No presente trabalho o objectivo fundamental é determinar a resposta não linear de estruturas tipo placa-casca sujeitas a carregamentos exteriores, analisar as sensibilidades destas respostas a pequenas alterações introduzidas em parâmetros estruturais definidos previamente, designados por variáveis de projecto, e por fim otimizar as estruturas no que respeita a funções de desempenho preestabelecidas, designadas por funções objectivo. Os objectivos da optimização podem ser vários, como por exemplo a minimização da energia elástica de deformação (com constrangimentos de tensão efectiva  $-\psi_j(\mathbf{q}, \mathbf{b}) \leq 0$ ), maximização da frequência fundamental ou da primeira carga crítica, e as variáveis de projecto consideradas são a orientação das fibras das lâminas, com estas variáveis de projecto a poderem variar entre um limite máximo e um limite mínimo:

$$\max \phi(\mathbf{q}, \mathbf{b}) \quad \text{sujeito a} \quad \psi_j(\mathbf{q}, \mathbf{b}) \leq 0 \quad \text{e} \quad b_i^l \leq b_i \leq b_i^u \quad (42)$$

Na solução do problema de optimização foi utilizado um programa de programação matemática não linear, ADS, Vanderplaats (1984), onde estão incorporados diferentes algoritmos, tendo sido usado o método da métrica variável de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno para o problema sem constrangimentos e o método das direcções viáveis modificado para o problema com constrangimentos.

## 8. APLICAÇÕES

### 8.1 Painel Cilíndrico Laminado Encastrado com Furo Quadrado Central

Um painel cilíndrico com sequência de laminação  $[\alpha_1^\circ/\alpha_2^\circ]_s$ , e com comportamento de deformação geometricamente não linear, foi discretizado por uma malha de (12x12) elementos. O painel tem todos os seus bordos encastrados e está sujeito a uma pressão transversal uniforme. As suas características geométricas são:  $R = 2540$  mm (raio de curvatura),  $L=508$  mm (comprimento do lado recto),  $h=6.35$  mm (espessura),  $b=L/3$ , (comprimento do lado recto do furo),  $\theta=0.1$ rad (semi-ângulo de abertura). As suas características materiais são:  $E_1 = 3.3$  GPa,  $E_2 = 1.1$  GPa,  $G_{12} = 0.66$  GPa,  $\nu_{12} = 0.25$ .

A optimização dos ângulos das fibras  $\alpha_1^\circ$  e  $\alpha_2^\circ$  foi efectuada minimizando a energia elástica de deformação. As sequências de laminação obtidas para os painéis sem furo e com furo quadrado central, Figura 2, foram respectivamente:  $[1.7^\circ/1.6^\circ]_s$  e  $[0^\circ/0^\circ]_s$ .

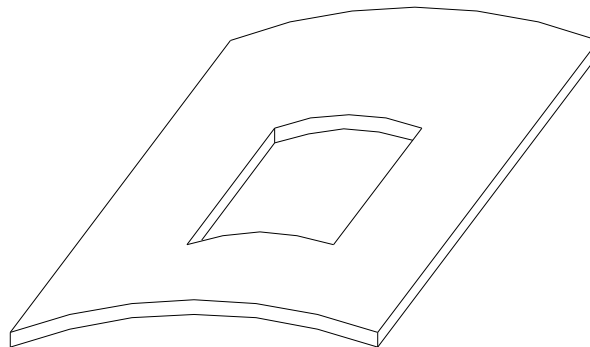


Figura 2. Painel cilíndrico com furo quadrado central.

## 8.2 Painel cilíndrico encastrado com compressão uniaxial

Foi analisada a instabilidade do painel cilíndrico do problema anterior quando sujeito a compressão uniaxial  $p_y^0 = 1 \text{ MPa}$ . Os bordos rectos do painel são articulados e os bordos curvos são encastrados, mas permitem o deslocamento na direcção da carga aplicada, isto é:

no bordo curvo sobre o qual é aplicada a carga:  $u_0 = 0, w_0 = 0, \theta_x = 0, \theta_y = 0$

no bordo curvo oposto:  $u_0 = 0, v_0 = 0, w_0 = 0, \theta_x = 0, \theta_y = 0$

A discretização foi feita por uma malha (12x12) elementos. A laminação óptima que maximiza a carga crítica  $N_{cr} = \lambda_{cr} p_y^0 b h$ , foi obtida partindo do projecto inicial com  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0^\circ$ .

Para o painel sem furo, a carga crítica do projecto inicial é  $N_{cr} = 10846.75 \text{ N}$ , obtendo-se  $N_{cr} = 14687.39 \text{ N}$ , como valor máximo desta carga, para a sequência de laminação  $[89^\circ/1^\circ]_s$ , tendo-se um ganho de 35.41 %. Para o painel com furo quadrado central, Figura 2, a carga crítica do projecto inicial é  $N_{cr} = 6688.05 \text{ N}$ , obtendo-se  $N_{cr} = 9319.01 \text{ N}$ , como valor máximo desta carga, para a sequência de laminação  $[90.0^\circ/23.1^\circ]_s$ , tendo-se um ganho de 39.34 %.

## 8.3 Placa laminada simplesmente apoiada

Uma placa quadrada simplesmente apoiada com furo circular central, Figura 3, com sequência de laminação  $[\alpha_1^\circ/\alpha_2^\circ/\alpha_3^\circ]_s$ , tem as seguintes características geométricas e materiais:  $a = 2 \text{ m}$ ,  $h = 0.06 \text{ m}$ ,  $\phi = a/3$ ,  $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ ,  $E_1 = 138 \text{ GPa}$ ,  $E_2 = 8.96 \text{ GPa}$ ,  $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 7.1 \text{ GPa}$ ,  $\nu_{12} = 0.30$ . A placa foi discretizada por uma malha de (12x12) elementos.

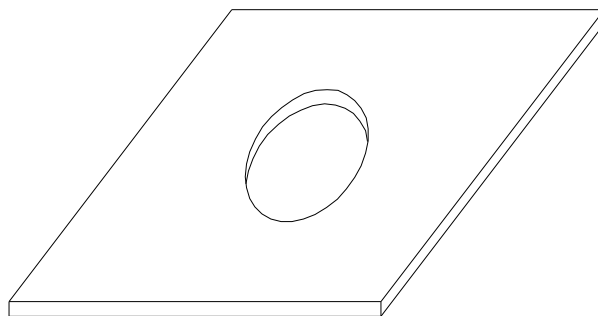


Figura 3. Placa quadrada com furo circular central.

Pretende-se obter a laminação óptima de modo a maximizar a frequência fundamental para os casos de placa sem furo e com furo, Figura 3. Em ambos os casos partiu-se dum projecto inicial com laminação  $[0^\circ/0^\circ/0^\circ]_s$ , a que correspondem frequências fundamentais

$\omega = 404.99$  rad/s e  $\omega = 370.24$  rad/s para a placa sem furo e com furo, respectivamente. As laminações óptimas obtidas para a placa sem furo e com furo foram ambas  $[45.0^\circ/-45.0^\circ/-45.0^\circ]_s$ , a que correspondem frequências fundamentais  $\omega = 504.54$  rad/s e  $\omega = 519.89$  rad/s, respectivamente. Os ganhos na frequência fundamental foram de 24.6 % para a placa sem furo e de 40.4 % para a placa com furo.

## **9. CONCLUSÕES**

O modelo de elementos finitos usado, conjugação do elemento triangular plano de 3 nós com a teoria clássica de placas (C.P.T.) revelou-se adequado e muito eficiente quando aplicado a placas e cascas finas, Moita (1999). Neste trabalho faz-se a sua extensão a placas e cascas finas com furos.

Os resultados obtidos na optimização de placas e cascas, com ou sem furos, aqui apresentadas, mostram bons ganhos entre o projecto final e inicial, os quais são função das orientações das fibras do laminado, permitindo concluir da grande relevância destas orientações no projecto de estruturas laminadas.

## **10. REFERÊNCIAS**

Bathe, K.J., "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1982.

Bathe, K.J. e Ho, L.W., "A Simple and Efficient Element for Analysis of General Shell Structures", Computers and Structures, Vol. 13, pp. 673-681, 1981.

Bazeley, G. P., Cheung, Y. K., Irons, B. M. e Zienkiewicz, O. C., (1966), "Triangular Elements in Bending -- Conforming and Non-conforming Solutions", Proc.Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Ed. J. R. Przemieniecki, et al., Air Force Inst. of Tech., Wright Patterson A.F. Base, Ohio, Vol. AFFDL-TR-66-80, pp. 547-576.

Haftka, R.T., "Semi-Analytical Static Nonlinear Structural Sensitivity Analysis", AIAA Journal, Vol. 31 (7), pp. 1307-1312, 1993.

Haririan, M., Cardoso, J.B., e Arora, J.S., "Use of ADINA for Design Optimization of Nonlinear Structures", Computers and Structures, Vol.26, (1/2), pp. 123-133, 1987.

Kleiber, M., "Parameter Sensitivity in Nonlinear Mechanics", John Wiley & Sons, Chichester, 1997.

Mateus, H.C., Rodrigues, H.C., Mota Soares, C.M. e Mota Soares, C.A., "Sensitivity Analysis and Optimization of Thin Laminated Structures with a Nonsmooth Eigenvalue Based Criterion", Structural Optimization, 14, pp. 219-224, 1997.

Moita, J.S., "Projecto Optimo de Estruturas Laminadas com Comportamento Geometricamente Não Linear", Tese de Doutoramento, U.T.L. – I.S.T., 1999.

Moita, J.S., Mota Soares, C.M. e Mota Soares, C.A., "Geometrically Non-Linear Analysis of Composite Structures with Integrated Piezoelectric Sensors and Actuators", Composite Structures, 57, 1-4, pp. 253-261, 2002.

*VII Congresso de Mecânica Aplicada e Computacional*

Mota Soares, C.M., Mota Soares, C.A. e Franco Correia, V.M., "Multiple Eigenvalue Optimization of Composite Structures Using Discrete Third Order Displacement Models", *Composite Structures*, 38, No. 1-4, pp. 99-110, 1997.

Mróz, Z., e Haftka, R.T., "Design Sensitivity Analysis of Non-Linear Structures in Regular and Critical States", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 31, (15), pp. 2071-2098, 1994.

Oblak, M. M., Kegl, M., e Butinar, B. J., "An Approach to Optimal Design of Structures with Non-Linear Response", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 36, pp. 511-521, 1993.

Park, J. S., e Choi, K. K., "Design Sensitivity Analysis of Critical Load Factor for Nonlinear Structural Systems", *Computers and Structures*, Vol. 36, (5), pp. 823-838, 1990.

Polynkin, A.A., van Keulen, F., e Toropov, V.V., "Optimization of Geometrically Nonlinear Thin-Walled Structures using Multipoint Approximation Method", *Structural Optimization*, pp. 105-116, 1995.

Reddy, J.N., "Mechanics of Laminated Composite Plates", CRC Press, Boca Raton, New York, 1997.

Reitinger, R., e Ramm, E., "Optimization of Geometrically Nonlinear Structures by Accurately Locating Singular Points", In N. Olhoff and G. Rozvany, editors, *WCSMO-1 Proceedings of the First World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Pergamon Press, pp. 471-476, 1995.

Ringertz, U.T., "Numerical Methods for Optimization of Nonlinear Shell Structures", *Structural Optimization*, 4, pp. 93-198, 1992

Rodrigues, H.C., Guedes, J.M., e Bendsoe, M.P., "Necessary Conditions for Optimal Design of Structures with a Non-Smooth Eigenvalue based Criterion", *Structural Optimization*, 9, pp. 52-56, 1995.

Ryu, Y. S., Haririan, M., Wu, C. C., e Arora, J. S., "Structural Design Sensitivity Analysis of Nonlinear Response", *Computers and Structures*, Vol. 21 (1/2), pp. 245-255, 1985.

Santos, L. S., e Choi, K. K., "Sizing Design Sensitivity Analysis of Non-linear Structural Systems. Part II: Numerical Method", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 26, pp. 2097-2114, 1988.

Wu, C.C., e Arora, J.S. "Design Sensitivity Analysis and Optimizarion of Nonlinear Strucrural Response Using Incremental Procedure", *AIAA Journal*, Vol. 25 (8), pp. 1118-1125, 1987.

Vanderplaats, G.N., "Numerical Optimization Techniques for Engineering Design". McGraw Hill, New York, 1984.

Zienkiewicz, O.C., "The Finite Element Method in Engineering Sciences", McGraw-Hill, 3rd edn, London, 1977.