

MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM ENGENHARIA
Lisboa, 31 de Maio – 2 de Junho, 2004
© APMTAC, Portugal 2004

OPTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS LAMINADAS ADAPTATIVAS COM CONTROLO ACTIVO

José Simões Moita^{*}, Cristóvão Mota Soares^{} e Carlos Mota Soares^{**}**

**Professor Coordenador, Escola Superior de Tecnologia, Universidade do Algarve, Faro.
e-mail: jmoita@ualg.pt*

***Professor Associado, Departamento Engenharia Mecânica, Instituto Superior Técnico, Lisboa.
e-mail: cmmsoares@alfa.ist.utl.pt*

***Professor Catedrático, Departamento Engenharia Mecânica, Instituto Superior Técnico, Lisboa.*

Palavras-chave: Optimização, Estruturas Piezolaminadas, Vibrações, Controlo Activo

Resumo. Neste trabalho apresenta-se um modelo de elementos finitos, baseado na teoria clássica de placas, desenvolvido para a análise do controlo activo em dinâmica de estruturas do tipo placa/casca integrando sensores e actuadores piezoeléctricos. O controlo é inicializado através duma optimização prévia do núcleo laminado de modo a diminuir a amplitude da vibração. É usado um algoritmo de controlo baseado na ligação entre as lâminas piezoeléctricas sensoras e actuadoras para obter um mecanismo de controlo da resposta dinâmica da estrutura. A resolução por elementos finitos usa um elemento placa/casca triangular plano de 3 nós, e em cuja formulação se introduz um grau de liberdade referente ao potencial eléctrico, por cada camada piezoeléctrica do elemento finito. Apresentam-se os resultados obtidos em dois exemplos ilustrativos.

1. INTRODUÇÃO

Nos últimos anos o estudo de estruturas inteligentes tem atraído um número significativo de investigadores devido às suas potenciais vantagens numa larga gama de aplicações, tais como controlo de forma, supressão de vibrações, atenuação de ruído e detecção de dano. O uso de materiais “inteligentes” tal como os materiais piezoelétricos na forma de lâminas coladas na superfície de estruturas construídas de materiais compósitos, permite assim obter estruturas que por um lado são adaptativas e por outro revelam excelentes propriedades mecânicas, aumentando assim bastante o desempenho e a fiabilidade de sistemas estruturais. Investigação pioneira no domínio das estruturas inteligentes é devida a Allik e Hughes [1] que analisaram a interacção entre electricidade e elasticidade. Referem-se ainda os trabalhos de Crawley e de Luis [2], que estudaram o controlo de vibrações de vigas laminadas com material piezoelétrico embebido ou colado à superfície da viga, e de Tzou e Tseng [3], que apresentaram uma formulação por elementos finitos em placa e cascas contendo actuadores e sensores piezoelétricos. Referem-se ainda revisões bibliográficas acerca da modelação de estruturas adaptativas por elementos finitos publicada por Senthil et al. [4], Benjeddou [5] e Franco Correia et al. [6]. Vários investigadores formularam modelações por elementos finitos de estruturas compósitas integrando sensores e actuadores piezoelétricos. Para o controlo activo de vibrações de placas laminadas com sensores e actuadores distribuídos, Samanta et al [7], desenvolveu um elemento finito isoparamétrico de oito nós, e Lam et al. [8] desenvolveu um modelo de elementos finitos baseado na teoria clássica de placas laminadas. Neste trabalho, é apresentado um modelo de elementos finitos, baseado na teoria clássica de placas, desenvolvido para a análise do controlo activo em dinâmica linear de estruturas do tipo placa/casca integrando sensores e actuadores piezoelétrico na forma de lâminas coladas na superfície das estruturas. Este controlo é inicializado através da optimização ao ângulo das fibras do núcleo laminado, obtendo-se deste modo uma diminuição da amplitude e um aumento da frequência da vibração.

É usado um elemento placa/casca triangular plano de 3 nós, com 18 graus de liberdade referentes ao vector de deslocamentos generalizados, e em cuja formulação se introduz um grau de liberdade referente ao potencial eléctrico, por cada camada piezoelétrica do elemento finito. É utilizado método de Newmark [9], Bathe [10], para a solução iterativa das equações de equilíbrio. Apresentam-se os resultados obtidos em dois exemplos ilustrativos.

2. CAMPO DOS DESLOCAMENTOS E DEFORMAÇÕES

É usada a Teoria Clássica de Kirchhoff. Assume-se que as componentes do deslocamento dum ponto genérico, referenciadas ao sistema de eixos locais (x,y,z) , têm a forma:

$$\begin{aligned}u(x,y,z) &= u_0(x,y) - z \theta_y \\v(x,y,z) &= v_0(x,y) + z \theta_x \\w(x,y,z) &= w_0(x,y)\end{aligned}\tag{1}$$

onde (u_0, v_0, w_0) são os deslocamentos dum ponto no plano de referencia do laminado, e $\theta_x = -\partial w / \partial y$ e $\theta_y = \partial w / \partial x$ são as rotações em torno dos eixos x e y , respectivamente.

As componentes das deformações associadas com os deslocamentos da equação (1) são dadas por:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(-\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)\end{aligned}\tag{2}$$

3. LAMINADOS PIEZOELÉCTRICOS. RELAÇÕES CONSTITUTIVAS.

Assumindo que uma placa compósita é constituída por várias lâminas, incluindo as lâminas piezoeléctricas, a equação constitutiva duma lâmina ortotrópica do substrato é

$$\bar{\sigma} = \bar{Q} \bar{\varepsilon}\tag{3}$$

e as equações constitutivas dum meio piezoeléctrico deformável, ligando os campos elástico e eléctrico são, Tiersten [11]:

$$\bar{\sigma} = \bar{Q} \bar{\varepsilon} - \bar{e} \bar{E}\tag{4}$$

$$\bar{D} = \bar{e}^T \bar{\varepsilon} + \bar{p} \bar{E}\tag{5}$$

onde $\bar{\sigma} = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{xy}]^T$ é o vector das tensões elásticas e $\bar{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \gamma_{xy}]^T$ é o vector das deformações elásticas, \bar{Q} é a matriz constitutiva, \bar{e} é a matriz dos coeficientes piezoeléctricos, \bar{E} o vector do campo eléctrico, \bar{D} o vector do deslocamento eléctrico e \bar{p} a matriz dos coeficientes dieléctricos, no sistema de eixos local (x,y,z) do elemento laminado, e dados em Reddy [12], e Moita et al. [13].

O vector do campo eléctrico \bar{E} , é o gradiente negativo do potencial eléctrico ϕ na lâmina k :

$$\bar{E} = -\nabla \phi\tag{6}$$

$$\bar{E} = \{0 \ 0 \ E_z\}^T\tag{7}$$

onde

$$E_z = -\phi / t_k\tag{8}$$

Sendo ainda:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{d}} \quad (9)$$

onde $\bar{\mathbf{d}}$ é a matriz dos coeficientes de deformação piezoelétricos no sistema de eixos local (x,y,z) do laminado, as equações (5) podem também ser escritas em função desta matriz:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\mathbf{Q}} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \bar{\mathbf{d}} \bar{\mathbf{E}}) \quad (10)$$

$$\bar{\mathbf{D}} = (\bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{d}})^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \bar{\mathbf{p}} \bar{\mathbf{E}}$$

O vector das deformações em electroelasticidade pode ser escrito na forma seguinte

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ -\bar{\mathbf{E}} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

onde o vector das deformações lineares é representado por:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_m + z \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_b \quad (12)$$

As equações constitutivas (5) podem então ser escritas na forma:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \\ \bar{\mathbf{D}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}} & \bar{\mathbf{e}} \\ \bar{\mathbf{e}}^T & -\bar{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^L \\ -\bar{\mathbf{E}} \end{Bmatrix} = \hat{\mathbf{C}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (13)$$

4. FORMULAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS.

O Princípio do Trabalho Virtual em dinâmica contempla além da energia elástica de deformação e do trabalho das forças exteriores aplicadas, a energia cinética do corpo.

Assim, e considerando o corpo apenas em deformação linear elástica, o Princípio do Trabalho Virtual em dinâmica, ou Princípio de Hamilton, aplicado a um elemento laminado, é definido por:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{K=1}^N \left(\int_{A^e} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \hat{\mathbf{C}}_k \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^L dz dA^e - \int_{A^e} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \delta \dot{\mathbf{u}}^T \rho_k \dot{\mathbf{u}} dz dA^e \right) - \mathfrak{R} \right\} dt = 0 \quad (14)$$

onde o primeiro termo é δU , energia elástica de deformação virtual, o segundo termo da equação é δT , energia cinética virtual do corpo, no qual ρ é a massa específica do material constituinte do corpo, $\dot{\mathbf{u}}$ é o vector velocidade, e, t_1 e t_2 são os limites do tempo onde $\delta \mathbf{u} = 0$.

Assumindo-se ainda que o carregamento é independente do estado de deformação do corpo, o termo correspondente ao trabalho virtual externo vem então dado por:

$$\mathfrak{R} = \int_V \mathbf{f} \delta \mathbf{u} dV + \int_S \delta \mathbf{u} dS + \sum_i \mathbf{F}_i \delta \mathbf{u}_i + \int_V q \delta \phi dV + \int_S Q \delta \phi dS + \sum_i \mathbf{P}_i \delta \phi_i \quad (15)$$

onde \mathbf{f} são forças de volume, \mathbf{T} forças de superfície, \mathbf{F}_i são forças concentradas, q cargas eléctricas de volume, Q cargas eléctricas de superfície, e \mathbf{P}_i cargas eléctricas pontuais.

No presente trabalho um elemento finito triangular plano de três nós é usado para obter a resposta linear de estruturas multilaminadas finas do tipo placa-casca. Como se mostra na Figura 1, o elemento tem três nós com seis graus de liberdade por nó, os deslocamentos u_i , v_i , w_i e as rotações θ_{xi} , θ_{yi} , θ_{zi} . Os deslocamentos locais u , v , w , são expressos em termos das variáveis nodais através das funções de forma dadas em termos de coordenadas de área L_i , Zienkiewicz [14]:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Z} \left(\sum_{i=1}^3 \mathbf{N}_i \mathbf{d}_i \right) = \mathbf{Z} \mathbf{N} \mathbf{a} \quad (16)$$

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{N}_i \mathbf{d}_i = \mathbf{N} \mathbf{a} \quad (17)$$

onde

$$\mathbf{d}_i = \{u_{0i}, v_{0i}, w_{0i}, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}\}^T \quad (18)$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

O vector das deformações no plano da superfície media (ou de membrana) $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_m$, e o vector das curvaturas $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_b$, são dados por:

$$\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = \{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_m + z \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_b\} = \left\{ \sum_{i=1}^3 \left(\mathbf{B}_i^m + z \mathbf{B}_i^b \right) \mathbf{d}_i \right\} = \mathbf{B}^{mb} \mathbf{a} \quad (20)$$

onde \mathbf{N} e \mathbf{B}^{mb} são as matrizes de das funções de forma e de deformação-deslocamento respectivamente, as quais são dadas em Moita et al. [13].

O vector do campo eléctrico é dado por:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{B}^\phi \phi \quad (21)$$

onde \mathbf{B}^ϕ é a matriz campo eléctrico – potencial, dada por

$$\mathbf{B}^\phi = \begin{bmatrix} 1/t_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1/t_{NPL} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Introduzindo as equações anteriores na equação (14) vem:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{K=1}^N \left(\int_A \int_{h_{k-1}}^{h_k} \delta \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \phi \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{mb} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^\phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}} & \bar{\mathbf{e}} \\ \bar{\mathbf{e}}^T & -\bar{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{mb} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \phi \end{Bmatrix} dz dA - \right. \\ \left. \int_A \int_{h_{k-1}}^{h_k} \delta \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{a}} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix}^T \mathbf{N}^T \mathbf{m} \mathbf{N} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{a}} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} dz dA \right) + \int_V \delta \{\mathbf{a}\}^T \mathbf{N}^T \mathbf{f} dV + \int_S \delta \{\mathbf{a}\}^T \mathbf{N}^T \mathbf{T} dS + \delta \{\mathbf{a}\}^T \mathbf{F}_c + \int_S \mathbf{Q} \delta \{\phi\} dS \right] dt = 0 \quad (23)$$

onde \mathbf{m} é a matriz de inércia.

Ao primeiro e segundo termos do primeiro membro da equação (23), correspondem as matrizes de rigidez e de massa do elemento, respectivamente dadas por

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} = \sum_{K=1}^N \int_A \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{mb} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^\phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}} & \bar{\mathbf{e}} \\ \bar{\mathbf{e}}^T & -\bar{\mathbf{p}} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{mb} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^\phi \end{bmatrix} dz dA \quad (24)$$

$$\mathbf{M} = \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{m} \mathbf{N} dA = \int_A \mathbf{N}^T \left(\sum_{k=1}^n \rho_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} dz \right) \mathbf{N} dA \quad (25)$$

onde \mathbf{K}_{uu} , $\mathbf{K}_{u\phi}$, $\mathbf{K}_{\phi u}$, $\mathbf{K}_{\phi\phi}$, são dados em Moita et al. [13].

Ao terceiro termo da equação (23), corresponde o vector de carga eléctrica aplicada $\mathbf{F}^{(A)}$, e o vector de forças mecânicas exteriores aplicadas, o qual é definido por:

$$\mathbf{F}_{ext}^{mec} = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{f} dV + \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{T} dS + \mathbf{F}_c \quad (26)$$

As matrizes de rigidez e de massa assim como o vector das forças exteriores são inicialmente obtidas no sistema de coordenadas locais fixado no elemento. Para obter a solução de estruturas genéricas, transformações de coordenadas locais para globais são realizadas, Zienkiewicz [14]. Depois destas transformações, o sistema de equações no referencial X,Y,Z é:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{ext}^{mec}(t) \\ \mathbf{F}^{(A)}(t) \end{Bmatrix} \quad (27)$$

Assumindo que tanto os sensores como os actuadores piezoeléctricos estão colados nas superfícies da estrutura, o vector dos potenciais eléctricos é subdividido em dois componentes, a dos sensores $\phi^{(s)}$ e a dos actuadores $\phi^{(A)}$. A carga eléctrica exteriormente aplicada nos sensores é zero. Separando as componentes dos actuadores e dos sensores, o

sistema de equações (27) toma a forma seguinte:

$$[M_{uu}] \{\ddot{q}\} + [K_{uu}] \{q\} + [K_{u\phi}^{(S)}] \{\phi^{(S)}\} = \{F_{ext}^{mec}(t) - K_{u\phi}^{(A)} \phi^{(A)}\} \quad (28)$$

$$[K_{\phi u}^{(A)}] \{q\} + [K_{\phi\phi}^{(A)}] \{\phi^{(A)}\} = \{F^{(A)}(t)\} \quad (29)$$

$$[K_{\phi u}^{(S)}] \{q\} + [K_{\phi\phi}^{(S)}] \{\phi^{(S)}\} = \{0\} \quad (30)$$

Da última destas equações, os potenciais eléctricos $\{\phi^{(S)}\}$ induzidos nos sensores são obtidos do seguinte modo:

$$\{\phi^{(S)}\} = -[K_{\phi\phi}^{(S)}]^{-1} [K_{\phi u}^{(S)}] \{q\} \quad (31)$$

6. DINÂMICA LINEAR

A carga em cada sensor, com polarização na direcção da espessura, pode ser expressa em termos de integração espacial do deslocamento eléctrico sobre a sua superfície, tendo em consideração que o efeito piezoeléctrico reverso é desprezável, Samanta et al. [7]. Tem-se então

$$Q^{(S)}(t) = \int_A D_z(t) dA = \frac{1}{2} \left[\int_{A(z=z_k)} D_z(t) dA + \int_{A(z=z_{k+1})} D_z(t) dA \right] \quad (32)$$

Da equação (5), a última equação pode ser escrita com segue

$$Q^{(S)}(t) = \int_A \bar{\mathbf{e}}^T \bar{\boldsymbol{\epsilon}} dA \quad (33)$$

ou na forma discretizada

$$Q^{(S)}(t) = \left(\int_A \bar{\mathbf{e}}^T \mathbf{B}^{mb} dA \right) \{q\} = [K_{\phi u}^{(S)}] \{q\} \quad (34)$$

A corrente na superfície do sensor é dada por

$$I(t) = \frac{dQ^{(S)}}{dt} \quad (35)$$

a qual pode ser convertida em diferença de potencial do sensor $\phi^{(S)}$ em circuito aberto

$$\phi^{(S)} = G_c \frac{dQ^{(S)}}{dt} \quad (36)$$

onde $G_c (= R_a, \text{resistencia do amplificador})$ é o ganho constante do amplificador, o qual transforma a corrente do sensor em diferença de potencial.

A diferença de potencial dos sensores pode alimentar os actuados através dum amplificador e com uma mudança de polaridade. Tem-se então para a diferença de potencial dos actuados:

$$\phi^{(A)} = -G_i G_c \frac{dQ^{(S)}}{dt} \quad (37)$$

onde G_i é o ganho do amplificador para realizar o controlo

A diferença de potencial dos actuados, escrita na forma discreteada, é então dada por

$$\phi^{(A)} = -G_i G_c \left[K_{\phi u}^{(S)} \right] \{ \dot{q} \} \quad (38)$$

Substituindo a equação (38) na equação (28), obtém-se a equação do movimento:

$$[M_{uu}] \{ \ddot{q} \} - G_i G_c \left[K_{u\phi}^{(A)} \right] \left[K_{\phi u}^{(S)} \right] \{ \dot{q} \} + \left(\left[K_{uu} \right] - \left[K_{u\phi}^{(S)} \right] \left[K_{\phi\phi}^{(S)} \right]^{-1} \left[K_{\phi u}^{(S)} \right] \right) \{ q \} = \{ F_{ext}^{mec}(t) \} \quad (39)$$

Para amortecimento do tipo Rayleigh, esta equação toma a forma:

$$[M_{uu}] \{ \ddot{q} \} + (C_R + C_A) \{ \dot{q} \} + \left(\left[K_{uu} \right] - \left[K_{u\phi}^{(S)} \right] \left[K_{\phi\phi}^{(S)} \right]^{-1} \left[K_{\phi u}^{(S)} \right] \right) \{ q \} = \{ F_{ext}^{mec}(t) \} \quad (40)$$

sendo

$$C_R = \alpha M_{uu} + \beta K_{uu} \quad (41)$$

onde α e β são os coeficientes de Rayleigh, e o efeito de amortecimento devido ao controlo activo é dado por:

$$C_A = -G_i G_c \left[K_{u\phi}^{(A)} \right] \left[K_{\phi u}^{(S)} \right] \quad (42)$$

A solução da equação (40) é obtida usando o método directo de Newmark [9], Bathe [10].

7. OPTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS

No presente trabalho o objectivo da optimização é a minimização da energia elástica de deformação, considerando como variáveis de projecto a orientação das fibras das lâminas:

$$\min U(\mathbf{q}, \mathbf{b}) \quad \text{sujeito a} \quad b_i^l \leq b_i \leq b_i^u$$

para o que se calculam as sensibilidades da resposta linear estática àquelas variáveis de projecto.

7.1. Sensibilidades da energia elástica de deformação

Na análise estática linear, a equação de equilíbrio é dada por

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{F}_{\text{ext}}^{\text{mec}} \quad (43)$$

e a energia elástica de deformação é dada pela expressão:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (44)$$

A sua derivada é então

$$\frac{dU}{db_i} = \frac{\partial U}{\partial b_i} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{db_i} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b_i} \mathbf{q} + \mathbf{q}^T \mathbf{K} \frac{d\mathbf{q}}{db_i} \quad (45)$$

Tendo em conta a equação (43), vem ainda:

$$\frac{dU}{db_i} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b_i} \mathbf{q} + \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{d\mathbf{F}_{\text{ext}}^{\text{mec}}}{db_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b_i} \mathbf{q} \right) \quad (46)$$

$$\frac{dU}{db_i} = \mathbf{q}^T \left(\frac{d\mathbf{F}_{\text{ext}}^{\text{mec}}}{db_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b_i} \mathbf{q} \right) \quad (47)$$

8. APLICAÇÕES.

8. 1. Placa compósita adaptativa com controlo activo.

Uma placa laminada quadrada (axa) simplesmente apoiada, com laminação inicial $[\mathbf{a}/0^\circ/90^\circ/0^\circ/\mathbf{s}]$, onde \mathbf{a} e \mathbf{s} representam as lâminas actuadora e sensora feitas de PVDF, coladas na superfície superior e inferior do substrato, foi modelada por uma malha (4x4), com 32 elementos triangulares, como mostra a Fig.1. As propriedades das lâminas do substrato são: $E_1 = 172.5 \text{ GPa}$, $E_2 = 6.9 \text{ GPa}$, $G_{12} = 3.45 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0.25$, $\rho = 1600 \text{ kg/m}^3$. As propriedades mecânicas e piezoelétricas do PVDF são $E_1 = E_2 = 2 \text{ GPa}$, $G_{12} = 0.775 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0.29$, $e_{31} = e_{32} = 0.046 \text{ C/m}^2$, $p_{33} = 1.062 \times 10^{-10} \text{ F/m}$, $\rho = 1800 \text{ kg/m}^3$. O comprimento do lado da placa é $a = 0.18 \text{ m}$ e as espessuras das laminas do substrato e das lâminas piezoelétricas são 0.002 m e 0.0001 m , respectivamente. Um intervalo de tempo $\Delta t = 0.00015 \text{ s}$ foi usado no método de Newmark, e amortecimento de Rayleigh foi considerado, com coeficientes $\alpha = 1 \times 10^{-6}$ e $\beta = 0.965 \times 10^{-5}$. Foi ainda tomado o valor de $G_c = 1.6 \times 10^7 \text{ } \Omega$ para o ganho do amplificador de carga. A placa é inicialmente sujeita a uma carga uniformemente distribuída $q = 1000 \text{ N/m}^2$, a qual ao ser removida deixa a placa a vibrar.

Da optimização ao ângulo das fibras através da minimização da energia elástica de

deformação, resultou a placa de laminação otimizada $[a / 45^\circ / -45^\circ / 45^\circ / s]$. A Fig. 2 ilustra a resposta $w = 100 \times (E_2 H^3 / a^4 q_0) w$ (E_2 das laminas do substrato), do centro da placa de espessura total H , para a placa inicial e otimizada. A resposta obtida para o controlo definido por $G_i = 10$, demonstra claramente a acção dos actuadores piezoeléctricos, a qual aumenta o amortecimento global da estrutura. Observa-se também a diminuição da amplitude e aumento da frequência de vibração da placa otimizada.

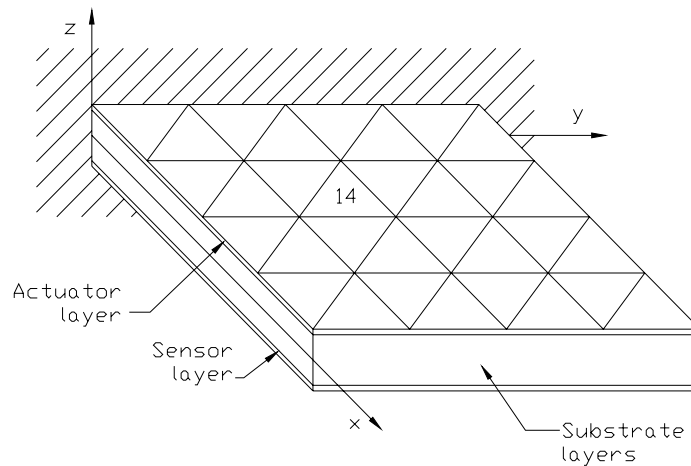


Figure 1. Placa laminada com sensores e actuadores colados nas superfícies superior e inferior

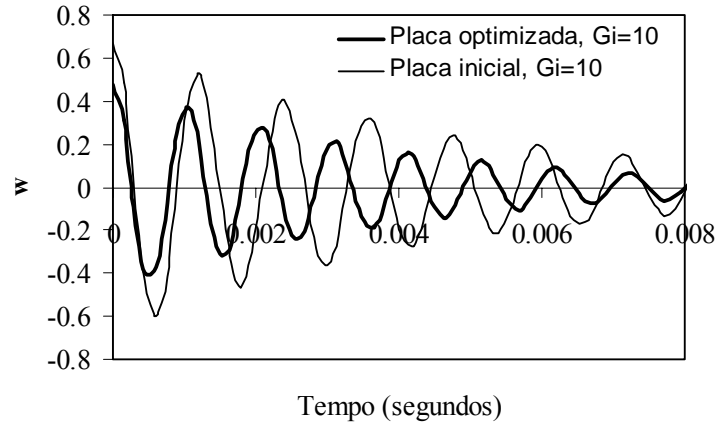


Figura 2. Deslocamento no ponto central da placa.

A Fig. 3 mostra a diferença de potencial induzida no sensor colocado no elemento 14, onde se observa que esta varia com a vibração da placa, e que o seu período de variação é o mesmo do período de vibração da estrutura.

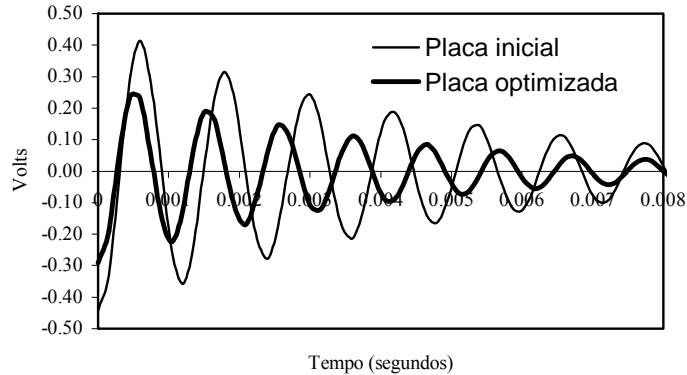


Figura 3. Diferença de potencial no sensor.

8.2. Viga compósita adaptativa com controlo activo

Uma viga simplesmente apoiada de graphite-epoxy, com sequência de laminação $[a/0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ/s]$, com as lâminas feitas de PVDF coladas nas superfícies superior e inferior da estrutura principal, foi modelada por uma malha (6x1) de elementos finitos (12 elementos triangulares). As propriedades mecânicas e piezoeléctricas do PVDF são as mesmas da aplicação anterior, e as propriedades mecânicas da graphite-epoxy são $E_1 = 98 \text{ GPa}$, $E_2 = 7.9 \text{ GPa}$, $G_{12} = 5.6 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0.28$, $\rho = 1520 \text{ kg/m}^3$, e têm espessura $0.125 \times 10^{-3} \text{ m}$. As dimensões da viga são: comprimento $L = 0.1 \text{ m}$ e largura $b = 0.005 \text{ m}$.

Um intervalo de tempo $\Delta t = 0.00125 \text{ s}$ foi usado no método de Newmark, e amortecimento de Rayleigh não foi considerado. O valor de $G_c = 1.8 \times 10^7 \Omega$ foi ainda tomado para o ganho do amplificador de carga

Da optimização ao ângulo das fibras através da minimização da energia elástica de deformação, resultou a viga de laminação optimizada $[a/-51^\circ/51^\circ/51^\circ/-51^\circ/s]$.

A viga é inicialmente sujeita a uma carga uniformemente distribuída $q = 100 \text{ N/m}^2$, a qual ao ser removida deixa a viga em vibração. A Fig. 4 ilustra a resposta do centro da viga inicial e optimizada ao ângulo das fibras, através da minimização da energia elástica de deformação. A resposta obtida para o controlo definido por $G_1 = 250$, demonstra claramente a acção dos actuadores piezoeléctricos, a qual aumenta o amortecimento global da estrutura. Tal como no caso anterior observa-se também a diminuição da amplitude e aumento da frequência de vibração da placa optimizada.

A Fig.5 mostra a variação da tensão no centro da lâmina exterior do substrato com o tempo, e onde se observa que esta varia com a vibração da placa, e que o seu período de variação é o mesmo do período de vibração da estrutura.

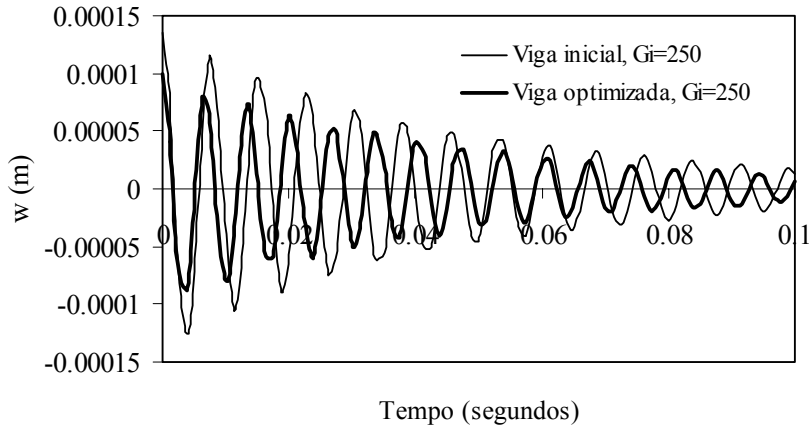


Figura 4. Deslocamento no ponto central da viga.

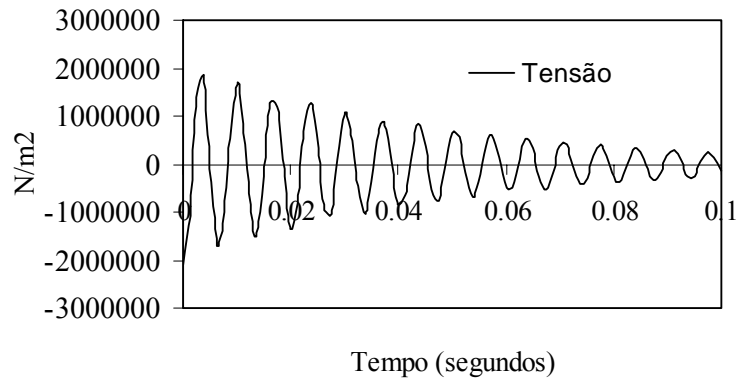


Figura 5 .Tensão no ponto central da viga.

8. CONCLUSÕES

Um elemento finito baseado na teoria clássica de Kirchhoff foi desenvolvido para o controlo activo em vibrações livres de placas compósitas laminadas, usando lâminas piezoeléctricas funcionando como sensores e actuadores. Para vibrações livres usou-se o algoritmo de controlo baseado na realimentação através de velocidade negativa em ciclo fechado, de modo a ligar os efeitos piezoeléctricos directo (sensor) e converso (actuador). Este controlo é inicializado através da optimização ao ângulo das fibras do núcleo laminado, obtendo-se deste modo um estrutura optimizada que proporciona desde logo uma diminuição da amplitude e um aumento da frequência da vibração, que são o objectivo do controlo.

AGRADECIMENTOS. Os autores agradecem o apoio financeiro concedido por: POCTI/FEDER, no âmbito dos projectos POCTI/EME/12028/98/2001 e POCTI/FEDER/EME/37559/2001.

REFERÊNCIAS

- [1] H.Allik, e T.Hughes, Finite Element Method for Piezoelectric Vibration, Int. J. Num. Meth. Engng., 2, 151-157 (1970).
- [2] E.F. Crawley e J. de Luis, Use of Piezoelectric Actuators as Elements of Intelligent Structures, AIAA Journal, 25, 10, 1373-1385 (1987).
- [3] H.S. Tzou e C.I. Tseng, Distributed Piezoelectric Sensor/Actuator Design for Dynamic Measurement/Control of Distributed Parametric Systems: A Piezoelectric Finite Element Approach, J. Sound Vibration, 138, 17-34 (1990).
- [4] V.G. Senthil, V.V. Varadan e V.K. Varadan, A Review and Critique of Theories for Piezoelectric Laminates, Smart Material Structures, 9, 24-28 (1999).
- [5] A. Benjeddou, Advances in Piezoelectric Finite Element Modelling of Adaptive Structural Elements: A survey, Computer and Structures, 76, 347-363 (2000).
- [6] V.M. Franco, M.A. Gomes, A. Suleman, C.M. Mota Soares e C.A. Mota Soares, Modelling and design of adaptive composite structures, Comp. Meth. Appl. Mech. Engineering, 185, 325-346 (2000)
- [7] B. Samanta, M.C. Ray, e R. Bhattacharyya, Finite element model for active control of intelligent structures, AIAA Journal, vol. 34, n. 9, 1885-1893 (1996).
- [8] K.Y. Lam, X.Q. Peng, G.R. Liu e J.N. Reddy, A Finite Element Model for Piezoelectric Composite Laminates, Smart Material Structures, 6, 583-591 (1997).
- [9] N.M. Newmark, A Method of Computation for Structural Dynamics", Journal of Engineering Mechanics Division 3, 67-94 (1959).
- [10] K.J. Bathe, *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, USA (1982).
- [11] H.F. Tiersten, *Linear Piezoelectric Plate Vibrations*, New York: Plenum Press (1969).
- [12] J.N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates*, CRC Press, Boca Raton, New York (1997).
- [13] J.S. Moita, C.M. Mota Soares, e C.A. Mota Soares, Geometrically Non-Linear Analysis of Composite Structures with Integrated Piezoelectric Sensors and Actuators, Composite Structures, 57, 1-4, 253-261 (2002).
- [14] O.C. Zienkiewicz, *The finite element method in engineering Sciences*, McGraw-Hill, 3 rd edition, London (1977).