

# Verificação Probabilística da Segurança das Estruturas

Roberto Laranja<sup>1</sup>, Jorge de Brito<sup>2,\*</sup>

*Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa  
Av. Rovisco Pais, 1049-001 Lisboa, Portugal*

## RESUMO

Neste artigo, abordam-se as técnicas probabilísticas desenvolvidas para a análise da segurança de estruturas: as metodologias baseadas nas técnicas clássicas de fiabilidade, nomeadamente os métodos do segundo momento, de primeira (*FORM*) e de segunda ordem (*SORM*), e as baseadas nas técnicas de simulação numérica. Destas últimas, que são as de uso mais divulgado, destaca-se o chamado método de Monte Carlo, em relação ao qual se apresentam ainda alguns métodos para redução da variância.

## 1. INTRODUÇÃO

Em geral, não é possível reduzir o problema da fiabilidade estrutural às formulações simplificadas (1) a (3), que relacionam a probabilidade de rotura,  $p_f$ , apenas com a resistência,  $R$ , e a solicitação,  $S$ , considerando-as variáveis aleatórias independentes. Com efeito,  $R$  é normalmente função das propriedades dos materiais estruturais e das dimensões dos elementos estruturais, ou da própria estrutura, enquanto  $S$  é função das acções, das densidades dos materiais e, eventualmente, das dimensões da estrutura, sendo todas elas, em geral, variáveis aleatórias. Há, também, situações em que não é possível considerar  $R$  e  $S$  independentes, quando o efeito de determinada acção é favorável (opõe-se aos efeitos que conduzem à rotura), por exemplo, ou quando as dimensões da estrutura ou dos elementos estruturais condicionam, simultaneamente, o valor das acções e da resistência.

$$p_f = P(R \leq S) \quad (1)$$

$$p_f = P(R - S \leq 0) \quad (2)$$

$$p_f = P\left(\frac{R}{S} \leq 1\right) \quad (3)$$

## 2. GENERALIZAÇÃO DO PROBLEMA DA FIABILIDADE

Seja  $X$  o vector aleatório composto pelas variáveis básicas, ou seja, as variáveis fundamentais que definem e caracterizam o comportamento e a segurança da estrutura. Se

---

<sup>1</sup> Equiparado a Professor Adjunto da Área Departamental de Engenharia Civil da Escola Superior de Tecnologia da Universidade do Algarve (rlaranja@ualg.pt)

<sup>2</sup> Professor Associado do Departamento de Engenharia Civil e Arquitectura do Instituto Superior Técnico

\* Autor para quem a correspondência deverá ser enviada (jb@civil.ist.utl.pt)

$g(X)$  for a função que define o estado limite (ou superfície limite), a relação:

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0 \quad (4)$$

estabelece a fronteira que divide o domínio numa *região de segurança* ( $g(X) > 0$ ) e numa *região de rotura* ( $g(X) < 0$ ) (Figura 1).

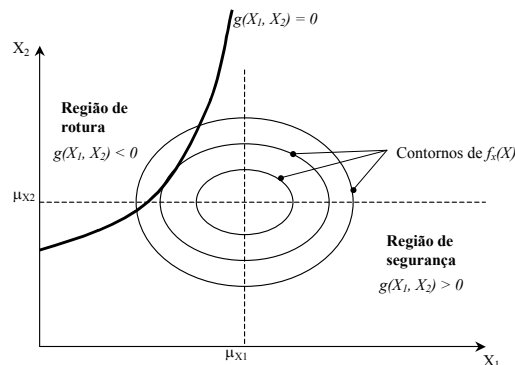


Figura 1 (adaptada de Melchers, 1999) - Representação de  $g(X)$  e da fronteira entre a região de segurança e a região de rotura

Admitindo que as variáveis aleatórias  $X_i$  são independentes e normalmente distribuídas, e que a função  $g(X)$  é linear, a determinação de  $\mu_Z$  e  $\sigma_Z$  pode ser feita através de (5) e (6):

$$\mu_Z = \mu_R - \mu_S \quad (5)$$

$$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (6)$$

São frequentes, no entanto, as situações em que  $g(X)$  é não linear. Nestes casos, não são válidas as propriedades aditivas da lei normal e, portanto, a média e a variância de  $g(X)$  não se podem obter através das expressões (5) e (6), e a resposta  $Z$ , resultante da aplicação da função não linear às variáveis  $X_i$ , pode ser não normal.

A probabilidade de rotura será, assim, obtida pela generalização de (7), através da integração múltipla sobre todas as variáveis básicas (8):

$$p_f = P[G(R, S) \leq 0] \quad (7)$$

$$p_f = P[g(X) \leq 0] = \int \dots \int_{g(X) \leq 0} f_x(x) dx \quad (8)$$

em que  $f_x(x)$  é a função densidade de probabilidade conjunta para o vector  $X$ , de dimensão  $n$ , das variáveis básicas. Nesta formulação, não estão envolvidas as variáveis  $R$  e  $S$  e podem, inclusivamente, não aparecer de forma explícita (geralmente estão implícitas em  $X$ ).

Se as variáveis básicas forem independentes, (8) pode ser simplificada, dado que:

$$f_x(x) = \prod_{i=1}^n f_{x_i}(x_i) = f_{x_1}(x_1) \cdot f_{x_2}(x_2) \cdot f_{x_3}(x_3) \dots \quad (9)$$

em que  $f_{x_i}(x_i)$  é a função densidade probabilidade marginal para a variável básica  $X_i$ .

A integração analítica de (8) só é possível para casos muito raros. Geralmente, recorre-se a simplificações, a métodos numéricos ou, ainda, a ambos em simultâneo, podendo estes incidir sobre:

- o processo de integração;
- a função a integrar,  $f_x(x)$ ;
- a definição do domínio de rotura.

Estes métodos podem-se enquadrar em dois tipos de abordagens:

- a transformação de  $f_x(x)$  em (8) numa função densidade de probabilidade multinormal, e a utilização de processos de integração passo a passo para a obtenção de soluções aproximadas; estes métodos inserem-se nos chamados *Métodos do Segundo Momento*, uma

vez que as funções normais e multi-normais das variáveis básicas podem ser representadas apenas pelos seus dois primeiros momentos, isto é, a média e o desvio padrão;

- o recurso a aproximações numéricas, por meio de simulações que permitam obter a integração multi-dimensional definida em (8); este tipo de abordagem é geralmente designado por *Métodos de Monte Carlo*.

Procede-se de seguida a uma descrição sumária destes dois tipos de métodos.

### 3. MÉTODOS DE FIABILIDADE DO SEGUNDO MOMENTO

#### 3.1 Conceitos básicos

Quando a resistência,  $R$ , e as acções, ou os seus efeitos,  $S$ , têm distribuições normais, a equação do estado limite define a margem de segurança  $Z = R - S$  e a probabilidade de rotura  $p_f$  pode ser expressa por:

$$p_f = \Phi(-\beta) \quad (10)$$

em que  $\beta$  é o *índice de fiabilidade*:

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} \quad (11)$$

e  $\Phi$  é a função distribuição da lei normal reduzida.

Como exemplo, considere-se o pórtico plano apresentado na Figura 2, onde se representa também um dos possíveis modos de colapso, admitindo comportamento rígido-plástico (adaptado de Melchers, 1999).

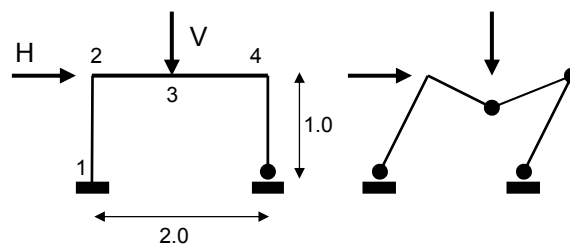


Figura 2 (adaptada de Melchers, 1999) - Pórtico plano e modo de colapso

Admita-se que cada variável básica  $X_i = (M_1, M_2, M_3, M_4, H, V)$  é normalmente distribuída, com  $\mu_{X_i} = (1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0)$  e  $\sigma_{X_i} = (0.15, 0.15, 0.15, 0.15, 0.17, 0.50)$ . A função do estado limite para o modo de colapso representado virá:

$$Z = g(X) = M_1 + 2M_3 + 2M_4 - H - V \quad (12)$$

e, portanto:

$$\mu_Z = 1 + 2 + 2 - 1 - 1 = 3 \quad (13)$$

e

$$\sigma_Z^2 = (0.15)^2 + 2(2^2(0.15)^2) + (0.17)^2 + (0.50)^2 = 0.4814 \quad (14)$$

O índice de fiabilidade pode ser, então, obtido por:

$$\beta_Z = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{3}{\sqrt{0.4814}} = 4.32 \quad (15)$$

(10) e (11) fornecem os valores exactos da probabilidade de rotura quando  $R$  e  $S$  são independentes e normalmente distribuídas. Quando tal não acontece, o valor de  $p_f$  obtido em (10) apenas pode ser considerado como a *probabilidade nominal de rotura*  $p_{fN}$ , sendo, nestes casos, conceptualmente preferível utilizar o índice de fiabilidade  $\beta$  como indicador da segurança.

As ideias descritas acima são ainda válidas para os casos em que o estado limite é definido por uma função aleatória linear, envolvendo mais do que duas variáveis básicas aleatórias:

$$g(X) = Z(X) = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i \quad (16)$$

Neste caso,  $g(X) = Z(X)$  é ainda uma função normalmente distribuída e os dois primeiros momentos,  $\mu_Z$  e  $\sigma_Z$ , podem ser obtidos e, logo, pode-se calcular  $p_{fN}$  e  $\beta$  por (10) e (11).

No entanto, e em geral, as funções do estado limite não são lineares, pelo que não é possível a determinação imediata dos dois primeiros momentos. Nestas situações, é comum proceder-se à linearização de  $g(X)$ , obtendo-se uma função linear  $g_L(X)$ . Este procedimento é definido como um *método de fiabilidade do segundo momento de primeira ordem (First Order Second Moment Reliability Method - FOSM)*. Os métodos deste tipo (Figura 3, em que as variáveis básicas envolvidas não são normalmente distribuídas ou são dependentes) designam-se por *métodos de fiabilidade de primeira ordem (First Order Reliability Method - FORM)*.

É ainda possível recorrer a aproximações não lineares para  $g(X)$ , Figura 3, sendo as aproximações mais comuns as que conduzem a funções parabólicas, quadráticas ou de ordem superior. Estes casos inserem-se nos *métodos de fiabilidade de segunda ordem (Second Order Reliability Method - SORM)*.

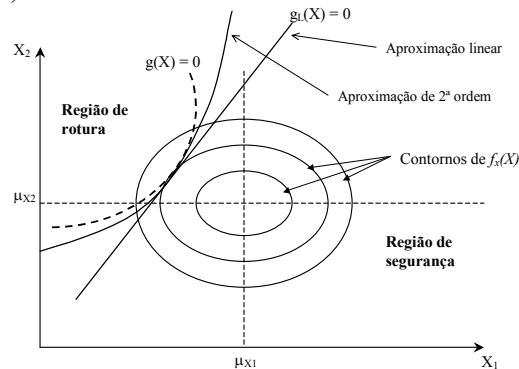


Figura 3 (adaptada de Henriques, 1998) - Aproximações linear e de 2ª ordem a  $g(X)$

### 3.2. Métodos de fiabilidade do segundo momento de primeira ordem (*First Order Second Moment Reliability Method - FOSM*)

Considere-se a função que define o estado limite em (4), e admita-se que relaciona de forma não linear as variáveis básicas aleatórias  $X_i$ . Nestas condições, a resposta  $Z$ , resultante da aplicação da função não linear às variáveis  $X_i$ , pode ser não normal. Nestes casos, a forma mais usual de obter os dois primeiros momentos (média e variância) de  $g(X)$  consiste em ajustar uma função aproximada no ponto mais representativo do problema em análise. Essa aproximação pode ser efectuada considerando os termos de primeira ordem do desenvolvimento de  $g(X)$  em série de Taylor, no ponto mais representativo do problema em análise,  $X^*$ :

$$Z \cong g(X^*) + \left. \frac{\partial g}{\partial X} \right|_{X^*} (X - X^*) \quad (17)$$

É comum usar como ponto representativo,  $X^*$ , o ponto definido pelos valores médios de  $X_i$ . Esta aproximação consiste na substituição da superfície limite real por um hiperplano tangente no ponto representativo  $X^*$ , e na estimativa da probabilidade nominal de rotura ou do índice de fiabilidade por (10) ou (11), respectivamente.

Duma forma geral, se a aproximação à superfície limite for linear:

$$g_L(X) = Z \cong a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i \quad (18)$$

recorrendo às propriedades aditivas da lei normal, calcula-se aproximadamente a média por:

$$\bar{Z} \cong a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \bar{X}_i \quad (19)$$

e a variância por:

$$\sigma_Z^2 \cong \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_{X_i}^2 \quad (20)$$

Desta forma, é possível calcular o índice de fiabilidade recorrendo a (11):

$$\beta = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \bar{X}_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_{X_i}^2}} \quad (21)$$

Este método apresenta o inconveniente de o valor de  $\beta$  depender do ponto representativo,  $X^*$ , no qual a aproximação linear é tangente à superfície limite não linear. Se o referido ponto não for o definido pelos valores médios das variáveis  $X_i$ , o hiperplano tangente à superfície limite será diferente e, por isso, o valor de  $\beta$  será outro.

Para contornar o problema da falta de invariância de  $\beta$ , é usual recorrer à *Transformação Hasofer-Lind*, que apresenta uma nova formulação do índice de fiabilidade, baseada na seguinte metodologia [Henriques, 1998]:

- transformação de todas as variáveis básicas aleatórias,  $X_i$ , em variáveis normais reduzidas,  $Y_i$  (distribuições com média nula e variância unitária,  $N(0, 1)$ );
  - definição da superfície limite,  $g(X)$ , no espaço das variáveis normais reduzidas,  $g(Y)$ ;
  - determinação do *ponto de dimensionamento*,  $Y^*$ , da superfície limite,  $g(Y)$ , que se encontra mais próximo da origem, ou seja, dos valores médios;
- e, finalmente, o cálculo do índice de fiabilidade,  $\beta$ , definido como a distância de  $Y^*$  à origem do espaço das normais reduzidas.

A transformação de todas as variáveis básicas aleatórias, normais e independentes, em variáveis normais reduzidas e independentes i.e. de forma a que  $\mu_{y_i} = 0$  e  $\sigma_{y_i} = 1$ , obtém-se por:

$$Y_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \quad (22)$$

Esta transformação consiste na translação dos valores médios de  $X_i$  para a origem e na utilização dos desvios padrão das variáveis como unidades dos eixos respectivos. A representação gráfica desta transformação num espaço bidimensional é feita na Figura 4.

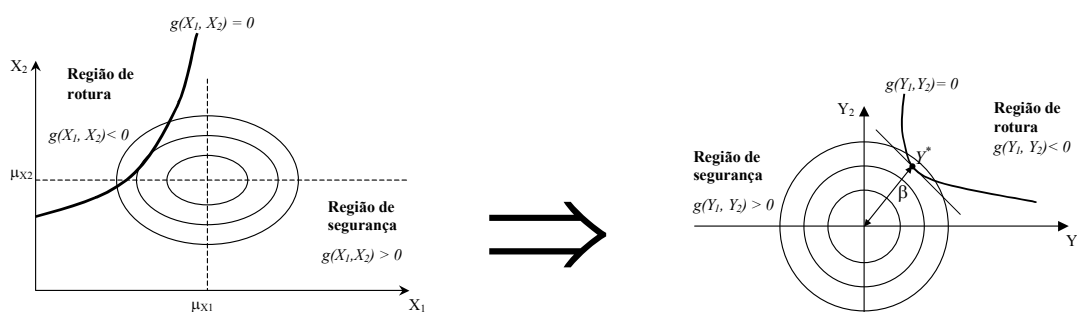


Figura 4 (adaptada de Mahadevan, 1997) - Transformação da função de estado limite no espaço das variáveis normais reduzidas

Considerando os termos de primeira ordem do desenvolvimento em série de Taylor da função,  $g(Y)$ , no ponto de dimensionamento,  $Y^*$ , vem:

$$g_L(Y) \cong g(Y^*) + \sum_{i=1}^n (Y_i - Y_i^*) \frac{\partial g}{\partial Y_i} = 0 \quad (23)$$

Atendendo a que o ponto  $Y^*$  se encontra sobre a superfície limite e, portanto,  $g(Y^*) = 0$ , a expressão anterior pode simplificar-se para:

$$g_L(Y) \cong \sum_{i=1}^n (Y_i - Y_i^*) \frac{\partial g}{\partial Y_i} = 0 \quad (24)$$

Já que  $\mu_{Y_i} = 0$  e  $\sigma_{Y_i} = 1$ , e considerando as propriedades aditivas da lei normal, então:

$$\mu_{g_L}(Y) = - \sum_{i=1}^n Y_i^* \frac{\partial g}{\partial Y_i} \quad (25)$$

e, ainda:

$$\sigma_{g_L}^2(Y) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial Y_i} \right)^2 \quad (26)$$

Pode-se, agora, calcular o índice de fiabilidade de acordo com (11):

$$\beta = \frac{\mu_{g_L}}{\sigma_{g_L}} = - \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^* \cdot \frac{\partial g}{\partial Y_i}}{\left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial Y_i} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (27)$$

É possível, ainda, recorrendo à interpretação geométrica do conceito de fiabilidade, proceder a uma análise da sensibilidade da função limite,  $g(Y)$ , no ponto de dimensionamento,  $Y^*$ , relativamente a cada uma das variáveis aleatórias,  $Y_i$  (caso bidimensional na Figura 5).

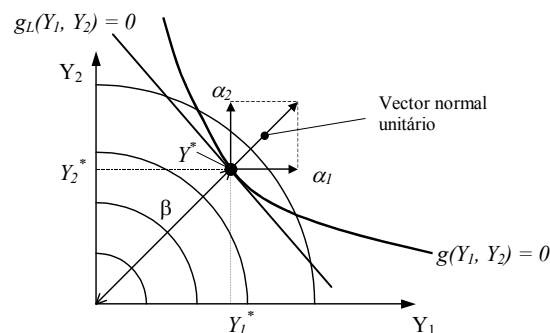


Figura 5 [Laranja, 2002] - Interpretação geométrica da sensibilidade de  $g(Y)$  relativamente às variáveis  $Y_i$

As componentes,  $c_i$ , de um vector normal a um hiperplano definido por  $g(Y) = 0$  são:

$$c_i = \frac{\partial g}{\partial Y_i} \quad (28)$$

e o seu comprimento total,  $l$ :

$$l = \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial Y_i} \right)^2} \quad (29)$$

Os cosenos directores,  $\alpha_i$ , do vector normal unitário são, então:

$$\alpha_i = \frac{c_i}{l} = \frac{\frac{\partial g}{\partial Y_i}}{\left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial Y_i} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (30)$$

Desta forma, é possível relacionar o índice de fiabilidade,  $\beta$ , com as coordenadas do ponto de dimensionamento,  $Y_i^*$ :

$$Y_i^* = -\alpha_i \beta \quad (31)$$

Verifica-se assim que, se  $\alpha_i \approx 0$ , a função limite quase não é influenciada pela variável  $Y_i$ . Se, ao contrário,  $\alpha_i$  se aproximar de 1 ou -1, a variável  $Y_i$  tem uma influência muito grande sobre o estado limite considerado. A expressão (31) conduz, ainda, a:

$$\beta = -Y^{*T} \alpha \quad (32)$$

o que demonstra de forma evidente que  $\beta$  corresponde à mínima distância da origem (do espaço das variáveis normais reduzidas,  $Y$ ) à superfície limite, concretamente, ao ponto  $Y^*$  [Ditlevsen e Madsen, 1996].

### 3.3. Métodos de fiabilidade de primeira ordem (*First Order Reliability Methods - FORM*)

Quando as variáveis envolvidas no problema de fiabilidade não são normalmente distribuídas e, por isso, não são suficientes os dois primeiros momentos (média e variância) para a sua caracterização, ou se não for admissível considerar a independência entre as variáveis básicas, a metodologia descrita anteriormente torna-se inadequada.

A necessidade de considerar a informação relativa às distribuições não normais e/ou à dependência entre as variáveis conduziu ao desenvolvimento das formulações *FORM*.

Nas situações em que as variáveis envolvidas não são normalmente distribuídas, o procedimento habitual consiste em transformar cada uma das variáveis aleatórias não normais em variáveis aleatórias normais reduzidas. Uma forma possível para esta transformação é:

$$\Phi(y_i) = F_{X_i}(x_i) \quad (33)$$

ou seja:

$$y_i = \Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i)] \quad (30)$$

em que  $F_{X_i}$  é a função distribuição da variável  $X_i$  e  $\Phi$  a função distribuição da lei normal reduzida. A aproximação é feita num ponto escolhido,  $x_0$ , como se representa na Figura 6.

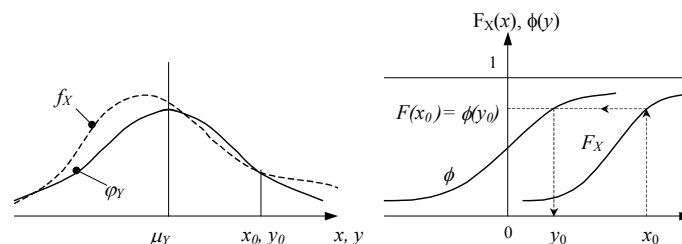


Figura 6 (adaptada de Henriques, 1998; Dai e Wang, 1992) - Transformação de uma variável não normal,  $X$ , numa variável normal reduzida  $Y$ : à esquerda, funções densidade de probabilidade e, à direita, funções distribuição de probabilidade

Um dos métodos possíveis para fazer a aproximação é impor que a distribuição não normal e a distribuição normal a aproximar tenham a mesma média,  $\mu$ , e que conduzam à mesma probabilidade de rotura. Se  $X$  for a variável aleatória não normal e  $Z$  a variável

aleatória normal, virá que:

$$\mu_Z = \mu_X = \mu \quad (35)$$

$$\sigma_Z = \sigma_X \cdot \frac{\Phi^{-1}(p_f) - \mu}{F^{-1}(p_f) - \mu} \quad (36)$$

sendo a variável normal reduzida,  $Y$ , obtida pela transformação:

$$Y = \frac{Z - \mu_Z}{\sigma_Z} \quad (37)$$

Outro método consiste em, além das imposições referidas no método anterior, fazer a aproximação na vizinhança do ponto de dimensionamento,  $X^*$ . Neste caso,  $p_f$  é definida por:

$$p_f = \Phi\left(\frac{X^* - \mu_X}{\sigma_X}\right) \quad (38)$$

A determinação de  $X^*$  é iterativa, pelo que o valor de  $p_f$  é actualizado em cada iteração.

Nas situações em que haja dependência entre as variáveis básicas, é necessário proceder a uma transformação, de forma a obter um conjunto de variáveis independentes, sobre as quais se poderão, depois, aplicar as técnicas descritas anteriormente. Descreve-se, de seguida, uma forma possível de efectuar a referida transformação.

Admita-se um conjunto de variáveis aleatórias correlacionadas,  $X$ , caracterizado pela matriz de covariância,  $C_X$ :

$$C_X = \begin{bmatrix} V_{X_1} & \text{cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{cov}(X_1, X_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{cov}(X_n, X_1) & \text{cov}(X_n, X_2) & \cdots & V_{X_n} \end{bmatrix} \quad (39)$$

em que  $V_{X_i}$  é a variância da variável  $X_i$  e  $\text{cov}(X_i, X_j)$  é a covariância entre as variáveis  $X_i$  e  $X_j$ . Note-se que, se as variáveis  $X_i$  e  $X_j$  forem independentes, então  $\text{cov}(X_i, X_j) = 0$ .

É possível efectuar uma diagonalização da matriz  $C_X$  através da seguinte transformação:

$$Y = A^T X \quad (40)$$

sendo  $A$  uma matriz ortogonal com vectores coluna iguais aos vectores próprios da matriz de covariância,  $C_X$ . Obtém-se assim a matriz diagonal de covariância,  $C_Y$ , do conjunto de variáveis não correlacionadas (independentes),  $Y$ :

$$C_Y = A^T C_X A = \begin{bmatrix} V_{Y_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & V_{Y_n} \end{bmatrix} \quad (41)$$

Os elementos da diagonal da matriz,  $C_Y$ , são iguais aos valores próprios da matriz de covariância das variáveis  $X$ ,  $C_X$ .

Pode-se, assim, obter os valores médios das variáveis independentes  $Y_i$  através de (39):

$$\begin{Bmatrix} E(Y_1) \\ \vdots \\ E(Y_n) \end{Bmatrix} = A^T \begin{Bmatrix} E(X_1) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{Bmatrix} \quad (42)$$

### 3.4. Métodos de fiabilidade de segunda ordem (*Second Order Reliability Methods - SORM*)

A aproximação duma superfície de estado limite com curvatura significativa a uma superfície plana pode conduzir a resultados insatisfatórios. Pode ainda acontecer que uma superfície de estado limite plana no espaço original, envolvendo variáveis aleatórias sem



distribuição gausseana, seja aproximada a uma superfície não linear quando é transformada para um espaço normal reduzido. Nestas situações, é mais adequado recorrer-se a aproximações não lineares, que permitem, em geral, diminuir os erros obtidos com aproximações de 1ª ordem.

Nas aproximações de 2ª ordem às superfícies de estado limite,  $g(X)$ , são normalmente utilizados parabolóides ou superfícies esféricas, no ponto de dimensionamento,  $X^*$  (Figura 7).

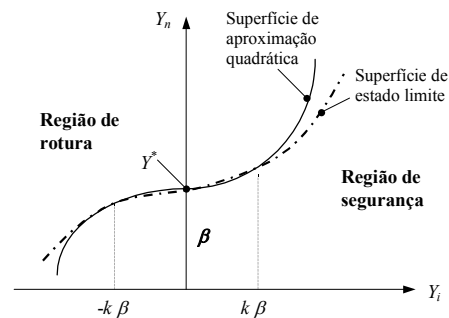


Figura 7 (adaptada de Mahadevan, 1997) - Aproximação de segunda ordem no ponto,  $Y^*$ , no espaço das variáveis normais reduzidas,  $Y$

Uma das propostas mais simples para a superfície de aproximação de segunda ordem é a sugerida por Breitung em 1984 [Hong, 1999], baseada no ajuste a um parabolóide:

$$p_f \cong \phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(1 + \beta k_i)^{1/2}} \quad (43)$$

em que:

$$k_i = - \left[ \frac{\partial^2 X_n}{\partial X_i^2} \right] \quad (44)$$

corresponde à  $i$ -ésima curvatura principal da superfície limite  $g(X) = 0$  no ponto de dimensionamento,  $X^*$ . Esta abordagem só é possível se a função de estado limite for contínua e duas vezes diferenciável na vizinhança de  $X^*$ .

## 4. SIMULAÇÃO NUMÉRICA - MÉTODO DE MONTE CARLO

### 4.1. Princípios gerais

O método de Monte Carlo é uma poderosa ferramenta matemática para a determinação da probabilidade aproximada dum evento específico, resultante duma série de processos estocásticos [Dai e Wang, 1992].

É uma técnica de simulação numérica, que tem por objectivo a obtenção dos parâmetros estatísticos das variáveis de saída, resultantes do modelo computacional de um sistema, sendo dados os parâmetros estatísticos das variáveis básicas de entrada do modelo. Em cada ciclo de simulação, são gerados valores para as variáveis básicas de entrada, obedecendo às respectivas distribuições, e são calculados os valores das variáveis de saída pelo modelo computacional. É realizado um determinado número de ciclos, sendo o conjunto dos resultados obtidos utilizado para determinar os parâmetros estatísticos das variáveis de saída.

No domínio da fiabilidade estrutural, esta técnica tem sido utilizada, sobretudo, com dois objectivos [Mahadevan, 1997]:

- como forma de validação dos métodos analíticos descritos anteriormente (métodos *FORM / SORM*);

- como solução aproximada de sistemas de grande dimensão e complexidade, para os quais as aproximações analíticas não são de fácil obtenção.

Para obter a estimativa da probabilidade de rotura associada a um estado limite definido por uma função,  $g(X)$ , a simulação pelo método de Monte Carlo consiste na aplicação da seguinte metodologia:

- geração de valores para as variáveis básicas de entrada de acordo com as respectivas funções de distribuição;
- realização da análise determinística do modelo do sistema e verificação da eventual ocorrência ou violação do estado limite ( $g(X) \leq 0$ ); repetição de i) e ii)  $N$  vezes e contagem do número de experiências em que é atingido ou ultrapassado o estado limite,  $N[g(X) \leq 0]$ ;
- estimativa da probabilidade de rotura média,  $\bar{p}_f$ :

$$\bar{p}_f = \frac{N[g(x) \leq 0]}{N} \quad (45)$$

Para a geração dos valores das variáveis básicas, recorre-se normalmente a um algoritmo computacional de geração de sequências de números pseudo-aleatórios com distribuição uniforme no intervalo  $]0,1[$ , que são depois adaptados às respectivas distribuições através de conversões adequadas. O número de simulações,  $N$ , a realizar depende, sobretudo, da ordem de grandeza da probabilidade de rotura,  $p_f$ , e da função que descreve o estado limite,  $g(X)$ . Valores muito pequenos de  $p_f$  conduzem a valores elevados de  $N$ , sendo este o principal inconveniente apontado ao Método de Monte Carlo. Também a irregularidade de  $g(X)$  provoca um aumento do número de simulações necessário.

Admitindo que o gerador de números pseudo-aleatórios utilizado garante as propriedades de independência e de uniformidade, este método fornece resultados exactos quando o número de simulações tende para infinito:

$$p_f = P[g(x) \leq 0] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N[g(x) \leq 0]}{N} \quad (46)$$

É possível, também, determinar os momentos estatísticos do conjunto dos resultados das  $N$  simulações, e ajustar uma função de probabilidade teórica, a partir da qual se pode determinar o valor de  $p_f$ .

A aplicação directa da metodologia descrita e a obtenção de  $p_f$  a partir de (46) constituem as denominadas *Técnicas de simulação pura* ('crude' Monte Carlo). A utilização conjunta com outros tipos de métodos de fiabilidade (métodos semi-analíticos) é feita com o objectivo de reduzir o número de simulações,  $N$ , e designa-se por *Técnicas de redução da variância*.

#### 4.2. Técnicas de simulação pura

Definindo, por conveniência, a probabilidade de rotura em função da ocorrência ou violação do estado limite ( $g(X) \leq 0$ ), a expressão (7) pode ser escrita na forma:

$$p_f = \int_{g(X) \leq 0} I[g(X) \leq 0] f_X(X) dX \quad (47)$$

em que  $I[g(X) \leq 0]$  é uma função definida por:

$$I = \begin{cases} 1 & \text{se } g(X) \leq 0 \quad (\text{região de rotura}) \\ 0 & \text{se } g(X) > 0 \quad (\text{região de segurança}) \end{cases} \quad (48)$$

Dado que o método de Monte Carlo utiliza técnicas discretas de simulação, o integral da equação (47) pode ser aproximado pelo somatório [Melchers, 1999]:

$$p_f \cong \tilde{p}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[g(\hat{X}^{(i)}) \leq 0] \quad (49)$$

sendo  $N$  o número de simulações e  $\hat{X}^{(i)}$  o vector das variáveis básicas para a simulação  $i$ .

Os resultados podem ser expressos por curvas de frequências acumuladas,  $F_g$  (Figura 8).

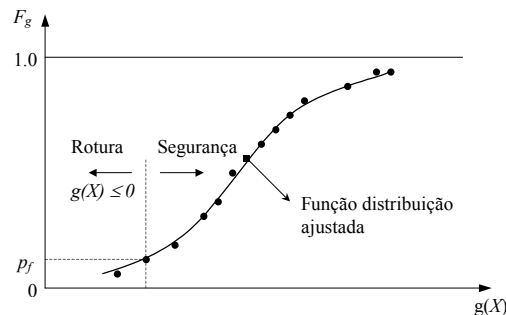


Figura 8 (adaptada de Melchers, 1999) - Função distribuição teórica ajustada às frequências acumuladas dos valores resultantes das simulações

Analisando a Figura 8, verifica-se que, quanto menor for a probabilidade de rotura, menor é o número de observações prováveis na região de interesse ( $g(X) \leq 0$ ), ou seja, a grande maioria das simulações localiza-se na região de segurança e, por isso, sem interesse prático. A única forma de aumentar o número de localizações prováveis na zona de rotura é incrementar o número total de simulações,  $N$ , facto que conduz, como já se referiu, à necessidade de se considerar um elevado número de simulações quando as probabilidades de rotura envolvidas são muito pequenas.

Um aspecto fundamental no método de Monte Carlo é a avaliação do grau de confiança da estimativa da probabilidade de rotura, em função do número de simulações,  $N$ . A estimativa da variância de  $\bar{p}_f$  é normalmente o indicador utilizado para esta avaliação. Assumindo que cada simulação constitui uma prova de Bernoulli, o número de vezes que o estado limite é atingido ou ultrapassado obedece a uma distribuição binomial; logo, a variância de  $\bar{p}_f$  pode ser calculada aproximadamente por [Ayyub e Mccuen, 1995]:

$$\sigma_{\bar{p}_f}^2 \cong \frac{(1 - \bar{p}_f)\bar{p}_f}{N} \quad (50)$$

É recomendável exprimir a precisão estatística da estimativa da probabilidade de rotura através do coeficiente de variação:

$$C_{\bar{p}_f} \cong \frac{\sqrt{(1 - \bar{p}_f)\bar{p}_f}}{\bar{p}_f} \quad (51)$$

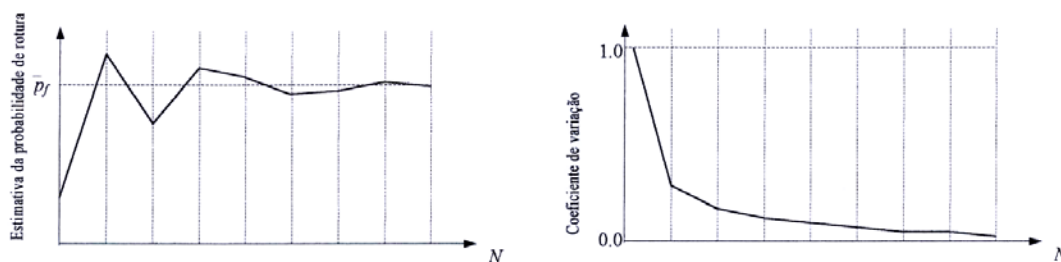


Figura 9 [Laranja, 2002] - Exemplo da variação da estimativa da probabilidade de rotura,  $\bar{p}_f$ , e do respectivo coeficiente de variação,  $C_{\bar{p}_f}$ , com o número de simulações,  $N$

Quanto menor for o coeficiente de variação, maior é a precisão estatística de  $\bar{p}_f$ . Pelas expressões anteriores, é possível verificar que, quando  $N$  tende para infinito, a variância e, conseqüentemente, o coeficiente de variação tendem para zero (Figura 9).

Na bibliografia encontram-se sugestões para valores de  $N$  entre  $1/p_f$  a  $10/p_f$ . Um dos métodos mais frequentes para estimar o valor inicial de  $N$  é o sugerido por Broding em 1964 [referido em Laranja, 2002]:

$$N > \frac{-\ln(1-c)}{p_f} \quad (52)$$

em que  $c$  é o nível de confiança da estimativa de  $p_f$ . Por exemplo, para valores de probabilidade de rotura na ordem de  $p_f = 10^{-4}$  e  $p_f = 10^{-5}$ , e admitindo um nível de confiança  $c = 95\%$ , o número de simulações será, de acordo com (52),  $N > 30\ 000$  e  $N > 299\ 600$ , respectivamente.

Outra expressão conhecida foi sugerida por Shooman em 1968 [referido em Laranja, 2002], e indica o erro da estimativa de  $p_f$  para o número de simulações utilizado,  $N$ , com um nível de confiança de 95%:

$$erro(\%) = 200 \sqrt{\frac{1-p_f}{N p_f}} \quad (53)$$

#### 4.3. Técnicas de redução da variância

Quando se aplicam as técnicas de simulação pura a problemas de fiabilidade que envolvem probabilidades de rotura muito pequenas, é necessário recorrer a um número de simulações muito grande para obter estimativas com valores de variância satisfatórios, facto que conduz a um elevado esforço de computação. Existem, no entanto, algumas técnicas que possibilitam reduzir significativamente o número de simulações para um determinado valor da variância, ou, doutra forma, reduzir os valores da variância para um determinado número de simulações. O aumento da eficiência obtém-se considerando informações sobre o problema em análise, na aplicação do método de Monte Carlo.

Algumas destas técnicas, cuja aplicação só é possível quando existe, à partida, alguma informação sobre o problema, são descritas, sumariamente, a seguir.

##### 4.3.1. Amostragem por importância

É possível reescrever o integral múltiplo da expressão (47) na seguinte forma:

$$p_f = \int_{g(X) \leq 0} I[g(X) \leq 0] \frac{f_X(X)}{h(X)} h(X) dx \quad (54)$$

em que  $h(X)$  representa a função densidade de probabilidade da sub-região do espaço amostral onde se aplicam as técnicas de simulação. Expressando  $p_f$  como um valor esperado, virá:

$$p_f = E \left\{ I[g(X) \leq 0] \frac{f_X(X)}{h(X)} \right\} = E \left[ I \frac{f}{h} \right] \quad (55)$$

e, por aplicação de (49), vem:

$$\tilde{p}_f = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{i=1}^N I[g(\hat{X}^{(i)}) \leq 0] \frac{f_X(\hat{X}^{(i)})}{h(\hat{X}^{(i)})} \right\} \quad (56)$$

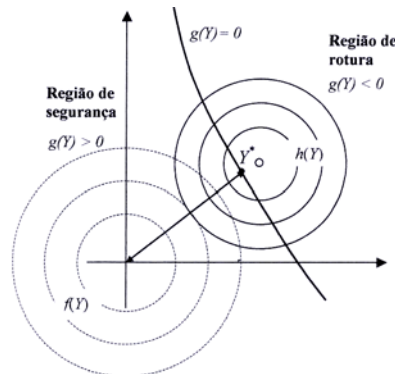


Figura 10 [Laranja, 2002] - Amostragem por importância em torno do ponto provável de dimensionamento,  $Y^*$ , no espaço das variáveis normais reduzidas

É possível, agora, obter a variância associada a  $\tilde{p}_f$ :

$$\sigma_{\tilde{p}_f}^2 = \frac{\sigma_{I_{f/h}}^2}{N} \quad (57)$$

em que:

$$\sigma_{I_{f/h}}^2 = \int_{g(X) \leq 0} \frac{f_X^2(X)}{h(X)} dX - \tilde{p}_f \quad (58)$$

Na Figura 10, faz-se a representação gráfica desta técnica. Uma escolha adequada da função  $h(X)$  conduz a valores reduzidos da variância de  $p_f$ , mesmo para valores pequenos de  $N$ .

#### 4.3.2. Amostragem estratificada

O método de amostragem estratificada é baseado no teorema da probabilidade total. O domínio de integração do integral de (7) é dividido num número  $k$  de regiões disjuntas ( $R_1, R_2, \dots, R_k$ ). A probabilidade de rotura associada a cada região é:

$$p_{f_{R_i}} = \int_{R_i} f_X(X) h(X) dX \quad (59)$$

e a probabilidade de ocorrer cada região:

$$P_i = \int_{R_i} h(X) dx \quad (60)$$

sendo que:

$$\sum_{i=1}^k P_i = 1 \quad (61)$$

A probabilidade de rotura será, então:

$$p_f = \int f_X(X) h(X) dX = \sum_{i=1}^k \int_{R_i} f_X(X) h(X) dX = \sum_{i=1}^k p_{f_{R_i}} \quad (62)$$

Admitindo que:

$$f_X^{(i)}(X) = \begin{cases} f_X(X) & \text{se } X \in R_i \\ 0 & \text{se } X \notin R_i \end{cases} \quad (63)$$

o integral de (60) pode ser expresso como:

$$p_{f_{R_i}} = \int_{R_i} P_i f_X(X) \frac{h(X)}{P_i} dX = P_i \int f_X^{(i)}(X) \frac{h(X)}{P_i} dX = P_i E[f_X^{(i)}(X)] \quad (64)$$

em que:

$$\int_{R_i} \frac{h(X)}{P_i} dX = 1 \quad (65)$$

Recorrendo às técnicas discretas de Monte Carlo, vem, finalmente, que:

$$\tilde{p}_f = \sum_{i=1}^k \frac{P_i}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} f_X^{(i)}(\hat{X}_i^{(j)}) \quad (66)$$

com uma variância associada de:

$$\sigma_{\tilde{p}_f}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{P_i^2}{N_i} \sigma^2[f_X^{(i)}(x)] = \sum_{i=1}^k \frac{P_i^2 \sigma^2}{N_i} \quad (67)$$

em que:

$$\sigma_i^2 = \sigma^2[f_X^{(i)}(X)] = \frac{1}{P_i} \int_{R_i} f_X^2(X) h(X) dX - \frac{P_i^2}{P_i^2} \quad (68)$$

e  $N_i$  representa o número de simulações a efectuar na região  $R_i$ .

Inserido neste tipo de técnicas encontra-se um dos métodos mais utilizados, conhecido como *Método do hipercubo latino*, cuja aplicação a problemas de fiabilidade estrutural é frequente. Este método baseia-se na divisão do domínio de cada variável aleatória em  $k$  intervalos disjuntos, com igual probabilidade de ocorrência. Cada intervalo é representado por uma amostra cujo parâmetro é representado pelo valor correspondente ao seu centro de gravidade, definido de acordo com a função densidade de probabilidade. Cada intervalo é considerado apenas uma única vez, sendo, por isso, o número de simulações igual ao número de intervalos considerado ( $N = k$ ). A escolha do intervalo interveniente em cada simulação é feita aleatoriamente (Figura 11).

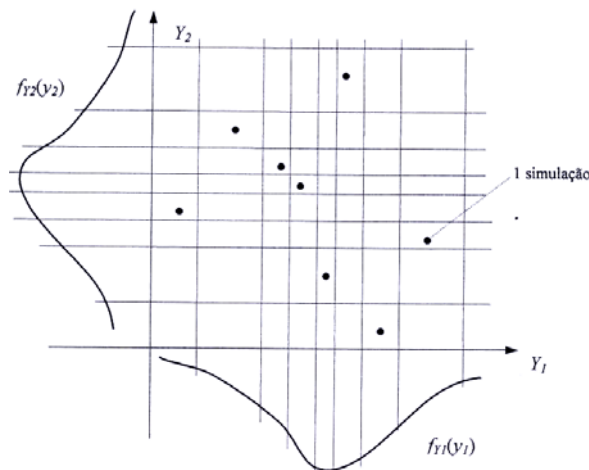


Figura 11 [Laranja, 2002] - Amostragem estratificada. Método do hipercubo latino

A aplicação deste método pode ser resumida nos seguintes passos [Mahadevan, 1997]:

- i) divisão do domínio de cada variável básica,  $Y_i$ , em  $k$  regiões (intervalos), com igual probabilidade de ocorrência;
- ii) geração de  $k$  amostras de cada variável aleatória, uma amostra em cada região;
- iii) geração de  $k$  combinações aleatórias dos valores das diferentes variáveis; cada valor é utilizado apenas uma vez e todas as amostras são utilizadas;

- iv) avaliação da função de estado limite,  $g(Y)$ , para cada combinação, e registo do número de vezes que o estado limite é atingido ou ultrapassado,  $N[g(Y) \leq 0]$ ;
- v) estimativa da probabilidade de rotura pela expressão (45).

Saliente-se, no entanto, que os resultados deste método apenas são adequados quando as variáveis básicas envolvidas na definição da função de estado limite têm uma distribuição aproximadamente normal.

Alguns autores têm apresentado alguns refinamentos a este método, com o intuito de melhorarem a sua eficiência. O tratamento estatístico dos valores gerados, por exemplo, pode conduzir a melhores resultados destas técnicas [Florian, 1991].

#### 4.4. Exemplo de aplicação

A metodologia apresentada é aplicada a um exemplo [Laranja e Estevão, 2000], em que se procede à verificação da segurança de uma laje de betão armado (C20/25 e A400), em consola, com 15 cm de espessura e 2 m de comprimento, dimensionada de acordo com a actual regulamentação Portuguesa, RSA e REBAP. Assumiu-se, por simplicidade, que as acções permanentes se resumiam ao peso próprio da estrutura,  $g = 3.75 \text{ kN/m}^2$ , e as acções variáveis a uma carga  $q = 2.0 \text{ kN/m}^2$  ( $\gamma_g = \gamma_q = 1.5$ ). O momento de cálculo é  $M_{sd} = 17.25 \text{ kNm/m}$ , pelo que a armadura necessária será igual a  $4.22 \text{ cm}^2/\text{m}$ , com uma altura útil de 12.5 cm.

Na determinação da fiabilidade estrutural recorreu-se a uma simulação numérica pelo método de Monte Carlo, usando a técnica de redução de variância do hipercubo latino. Foram consideradas oito variáveis aleatórias, apresentadas na Tabela 1. Assumiu-se o valor da área de armadura como sendo determinístico e igual a  $4.22 \text{ cm}^2/\text{m}$ .

Admitiu-se que a segurança em relação ao estado limite último era verificada quando  $M_S \leq M_R$ , sendo:

$$M_S = 0.5 \cdot (\gamma_c \cdot h + q) \cdot L^2 \quad (69)$$

$$M_R = \int_{y_1}^{y_2} y \cdot \sigma_{c(y)} dy + y_s \cdot \sigma_s \cdot A_s \quad (70)$$

Tabela 1 - Caracterização das variáveis aleatórias usadas na simulação

Variável aleatória	Descrição	Valor médio	Desvio padrão	Tipo de distribuição
$a$	Distância ao centro de gravidade das armaduras	2.5 cm	0.980 cm	lognormal
$h$	Espessura da laje	15.0 cm	0.872 cm	normal
$L$	Comprimento da consola	2.0 m	0.0172 m	normal
$f_c$	Tensão de rotura do betão	28 MPa	4.857 MPa	normal
$f_s$	Tensão de cedência das armaduras	436 MPa	21.86 MPa	normal
$E_s$	Módulo de elasticidade do aço	200 GPa	4.8 GPa	normal
$q$	Acções variáveis	0.4 kN/m <sup>2</sup>	0.4 kN/m <sup>2</sup>	lognormal
$\gamma_c$	Peso específico do betão	25.0 kN/m <sup>3</sup>	2.0 kN/m <sup>3</sup>	normal

Na simulação realizada, as distribuições de densidade de probabilidade foram divididas em 20000 conjuntos de igual probabilidade, tendo sido geradas  $10 \times 20000 = 200000$  amostras. Os resultados obtidos apresentam-se na Figura 12.

A probabilidade de excedência do estado limite último, resultante da simulação numérica, foi  $p_f = 0.12\%$ .

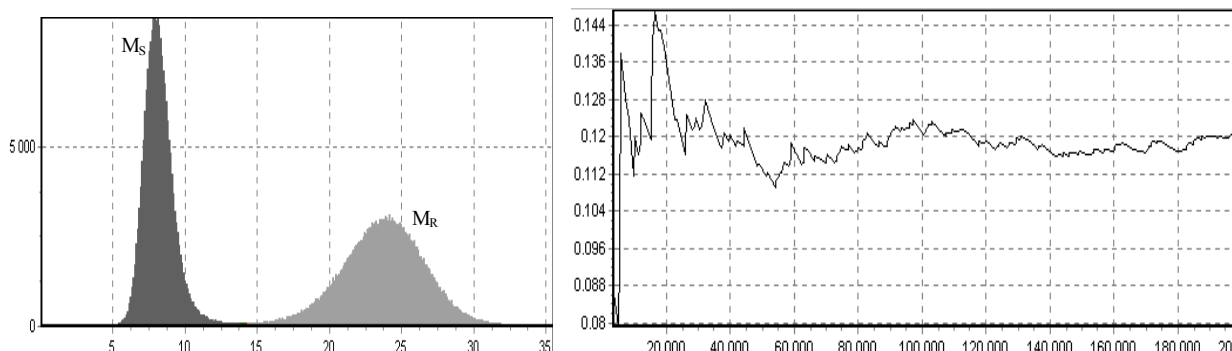


Figura 12 - Resultados da simulação

Realizou-se uma análise à sensibilidade dos resultados, admitindo que não existiam incertezas para o valor de uma das variáveis, considerando o seu valor médio na análise. Os resultados dessa análise encontram-se discriminados na Tabela 2.

Tabela 2: Resultados das análises de sensibilidade

Variável determinística	n.º de amostras	$p_f$ (%)
$a$	$100 \times 20000$	0.0035
$h$	$10 \times 20000$	0.10
$L, f_c, f_s, E_s, \gamma_c$	$10 \times 20000$	$\approx 0.12$
$q$	$10 \times 20000$	0.11

O valor obtido para a probabilidade de rotura é elevado, atendendo ao estado limite em causa. Pela análise de sensibilidade efectuada, é possível constatar que a variável  $a$  -distância ao centro de gravidade das armaduras - é a que condiciona, em grande medida, a fiabilidade estrutural. Estes factos poderão traduzir uma escolha inadequada do tipo de distribuição desta variável e/ou dos parâmetros que a caracterizam. Por outro lado, o desvio padrão considerado, e atendendo à realidade portuguesa no que respeita ao controlo de qualidade em obra, nomeadamente em relação à colocação e montagem de armaduras, sobretudo as superiores, e às operações de betonagem, mostra-se bastante realista. Este aspecto merece alguma preocupação e deve ser objecto de particular atenção dos responsáveis pela execução das obras.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como se salienta na introdução, o problema da fiabilidade estrutural não pode ser reduzido a formulações simplificadas que relacionem apenas a resistência,  $R$ , e o efeito das acções,  $S$ , considerando-as variáveis aleatórias independentes. Cada uma daquelas variáveis é, por sua vez, função de outras variáveis aleatórias, com diferentes graus de dependência entre si, que podem ainda conduzir à situação de não se poder considerar a independência entre  $R$  e  $S$ .

Todos estes aspectos tornam a resolução analítica dos problemas de fiabilidade estrutural, que constitui a abordagem clássica neste domínio, muito complexa e morosa, e em muitos casos impossível.

Os métodos de simulação numérica, por seu turno, apresentam uma grande



versatilidade na resolução deste tipo de problemas, permitindo ultrapassar grande parte das limitações das técnicas clássicas. Contudo, a sua aplicação a problemas correntes de engenharia estrutural ainda se reveste de algumas dificuldades, apenas sendo viável em estruturas simples.

A aplicação mais corrente das análises de nível superior é ainda a obtenção ou calibração de parâmetros a utilizar em formatos de nível 1, nomeadamente valores característicos das variáveis básicas, e respectivos coeficientes parciais de segurança, associados a um determinado nível de risco. Este tipo de análises requer a definição de tipologias estruturais representativas da realidade em estudo, assim como a necessidade de considerar um elevado número de situações que permitam reproduzir as diferentes combinações das variáveis básicas que efectivamente podem ocorrer. O resultado de todo este processo é uma grande complexidade e volume de cálculos que só se justifica, em geral, na elaboração de normas regulamentares ou na sua validação.

Na definição de procedimentos para aplicação prática deste tipo de metodologias, o procedimento habitual a nível das normas mais recentes tem sido limitar o tipo de análises ao nível 1. No entanto, recorre-se aos métodos probabilísticos para efectuar o ajustamento dos parâmetros que caracterizam as análises a este nível, nomeadamente os valores característicos ou nominais das resistências e das acções e os respectivos coeficientes parciais de segurança.

## 6. REFERÊNCIAS

Ayyub, B.; Mccuen, R. - "Simulation-based Reliability Methods", *Probabilistic Structural Mechanics Handbook. Theory and Industrial Applications*, Ed. C. Sundararajan, Chapman & Hall, pp. 53-69, 1995.

Dai, Shu-Ho; Wang, Ming-O - *Reliability Analysis in Engineering Applications*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1992.

Ditlevsen, O.; Madsen, H. O. - *Structural Reliability Methods*, John Wiley & Sons, West Sussex, England, 1996.

Florian, A. - "An Efficient Sampling Scheme: Updated Latin Hypercube Sampling", *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 7, pp. 123-130, 1992.

Henriques, A.R. - *Aplicação de Novos Conceitos de Segurança no Dimensionamento do Betão Estrutural*, Dissertação para Doutoramento em Engenharia Civil, FEUP, Porto, 1998.

Hong, H. - "Simple Approximations for Improving Second-order Reliability Estimates", *Journal of Engineering Mechanics*, pp. 592-595, May 1999.

Laranja, R. - *Avaliação da Segurança em Estruturas Existentes de Betão Armado*. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, IST, Lisboa, 2002.

Mahadevan, S. - "Monte Carlo Simulation", *Reliability-based Mechanical Design*, Ed. Thomas A. Cruse, Vanderbilt University, pp. 130-146, 1997.

Melchers, R. E. - *Structural Reliability. Analysis and Predictions*, John Wiley & Sons, West Sussex, England, 1999.

Laranja, R.; Estevão, J. - "Simulação Numérica na Avaliação da Fiabilidade de Estruturas de Betão Armado" - *BE2000 Encontro Nacional Betão Estrutural*, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2000.