www.sapientia.uji.es | 109

UNIVERSITAT JAUME•I

La geometría y la estadística en el aula de primaria

Gil Lorenzo Valentín
Manuel Alcalde Esteban
Inmaculada Pérez Serrano

La geometría y la estadística en el aula de primaria

Gil Lorenzo Valentín
Manuel Alcalde Esteban
Inmaculada Pérez Serrano

Universitat Jaume I

Departament d'Educació

■ Codi d'assignatura: MP1025

Edita: Publicacions de la Universitat Jaume I. Servei de Comunicació i Publicacions
Campus del Riu Sec. Edifici Rectorat i Serveis Centrals. 12071 Castelló de la Plana
http://www.tenda.uji.es e-mail: publicacions@uji.es

Col·lecció Sapientia 109 [link de repositori]
Col·lecció Sapientia 110 [link de respositori]
www.sapientia.uji.es
Primera edició, 2015

ISBN: 978-84-16356-31-7

Publicacions de la Universitat Jaume I és una editorial membre de l'UNE, cosa que en garanteix la difusió de les obres en els àmbits nacional i internacional. www.une.es

Aquest llibre, de contingut científic, ha estat avaluat per persones expertes externes a la Universitat Jaume I, mitjançant el mètode denominat revisió per iguals, doble cec.

ÍNDICE

Introducción

Presentamos en este documento un material para la formación inicial y permanente del profesorado de educación primaria, en el que se muestran propuestas didácticas para trabajar los contenidos referentes a geometría y estadística y probabilidad en esta etapa educativa, como continuación de las publicaciones referidas a números naturales (colección Sapientia, números 89 y 90, en valenciano y castellano, respectivamente) y a *Los números enteros y racionales, magnitudes y medida* (colección Sapientia, números 96 y 97, también en valenciano y castellano, respectivamente), las cuales es conveniente conocer para una mejor comprensión de los contenidos que se desarrollan en el presente texto.

Aunque dichos contenidos están trabajados en publicaciones de otros autores, pretendemos ofrecerlos en esta de manera unificada a nuestros lectores en un texto estructurado en torno a las capacidades matemáticas que se deben trabajar con el alumnado de educación primaria, para completar así todos los bloques de contenidos que se desarrollan en dicha etapa.

Cada uno de los temas cuenta con una introducción que nos permite reflexionar respecto de dos cuestiones que consideramos importantes. Una es la evolución histórica de los contenidos que estudiamos: respecto de la geometría, su nacimiento como respuesta a necesidades derivadas de situaciones reales y su desarrollo a lo largo de los años hasta llegar a la materia abstracta que es en la actualidad; y en cuanto a la estadística y la probabilidad, sus orígenes a partir de la necesidad de trabajar con muchos datos o cuantificar la incertidumbre, hasta convertirse en una gran rama de las matemáticas de hoy en día. La otra es el aspecto teórico de estos conceptos, que se expone para recordarlos y acercarlos al lector.

A continuación, como parte más importante del texto y como núcleo que justifica esta publicación, se incluye en cada tema un extenso apartado referente al tratamiento didáctico de los diferentes contenidos para trabajarlos en el aula de primaria y conseguir, de esta manera, el desarrollo de la competencia matemática de los niños y las niñas.

En dicho apartado didáctico se presentan los contenidos matemáticos a partir de la realidad y para ser aplicados en ella. Como consecuencia y otorgándole la máxima importancia a esta cuestión, todas las situaciones que se enuncian acompañando el contenido didáctico del texto forman parte de otras situaciones más complejas que se trabajan en el aula, en las que los conceptos matemáticos son esenciales para su interpretación y resolución. A veces las actividades matemáticas surgirán del desarrollo de algunos proyectos de trabajo globalizados, en otras ocasiones se plantearán a partir de las necesidades que generan las otras materias del currículo. Solo cuando se detecten algunos contenidos que no hayan aparecido en ninguna actividad como las mencionadas antes, el docente favorecerá de manera intencionada la aparición de situaciones que provoquen las incógnitas que les llevarán a su descubrimiento.

En todos los casos, partiremos de las ideas previas del alumnado sobre cada uno de los conceptos por trabajar y, en particular, de sus propuestas personales y emergentes de resolución de las diferentes situaciones que se planteen. Continuaremos con la búsqueda de los procedimientos generales de conceptualización geométrica, de tratamiento de datos y de modelización del azar, como forma de ofrecerles las herramientas matemáticas que socialmente se utilizan para resolver las situaciones en las que intervienen.

Atendiendo a las recomendaciones del Parlamento Europeo y del Consejo de Europa sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente, entendemos que la competencia matemática solo se concreta y cobra sentido en la medida en que los elementos y razonamientos matemáticos que se estudian son utilizados para enfrentarse a aquellas situaciones cotidianas que los necesitan. Por ello, su desarrollo en la escuela se conseguirá partiendo de una amplia variedad de actividades reales, derivadas de otros campos del conocimiento, de las situaciones habituales que se dan en el aula y de las propias experiencias y vivencias del alumnado. Se trata, en definitiva, de conseguir que los niños y las niñas sepan aplicar las destrezas y actitudes que les permitan razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático para dar una mejor respuesta a las situaciones de la vida de distinto nivel de complejidad.

El objetivo del material es proporcionar una herramienta para los profesionales de la docencia y para los estudiantes del Grado en Maestro, que les ayude a reflexionar sobre los fenómenos educativos que ocurren en el aula escolar y les permita enfrentarse a ellos desde un planteamiento que considera la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas como una tarea interdisciplinaria y globalizadora, que parte de una concepción sociocultural de la educación en general y de la educación matemática en particular.

Respecto a los estudiantes del Grado en Maestro de Educación Primaria de la Universitat Jaume I, este documento representa un material complementario para las clases presenciales, en las que se profundiza en el texto relacionando la fundamentación matemática de los conceptos y su didáctica, mediante la realización de diferentes actividades que se desarrollan a lo largo del curso académico.

Presuponemos que, en las aulas de primaria donde se trabajan los contenidos de este documento, se encuentran los materiales didácticos estructurados que describiremos más adelante u otros similares ideados y fabricados por los docentes y/o el alumnado, que deberán compartir en su esencia lo que es fundamental para la construcción de los contenidos matemáticos que se desarrollan en esta publicación. Los mencionados materiales constituyen un apoyo imprescindible para el trabajo en el aula referente a los conceptos estudiados.

El presente documento no agota las actividades que los maestros y las maestras deben realizar en las aulas. La gran variedad de posibles dispositivos didácticos que pueden ofrecer a los niños y las niñas es imposible de reflejar en cualquier publicación. Nuestro interés es poner la atención en lo que han de trabajar para fundamentar matemáticamente los procedimientos empleados por el alumnado y dar indicaciones de cómo deben hacerlo. Nunca agotaremos la creatividad didáctica que un docente debe tener en su tarea diaria.

TEMA 1

Geometría

En este tema se trabaja la relación que el alumnado establece con el espacio y el conocimiento y caracterización de todos los objetos que en él encontramos. Comienza el tema con una referencia histórica sobre la geometría, seguida de una recopilación teórica sobre los conceptos correspondientes que necesitará el docente de primaria. Finaliza con un extenso tratamiento didáctico de los contenidos geométricos para su desarrollo en esta etapa educativa.

1. Introducción

1.1. Histórica

Del griego *gea*, tierra, y *metron*, medida, la geometría, desde sus orígenes, ha sido la encargada de resolver problemas de la realidad. Un tipo de problemas se centraba en la medida y reconstrucción de terrenos y campos de cultivo. Otro se refería a la necesidad de hacer construcciones arquitectónicamente estables, lo que se podía conseguir dotándolos de una cierta estructura geométrica. La búsqueda de solución a estos problemas proporcionaba a la humanidad herramientas matemáticas para controlar el entorno y servirse de este. Los griegos combinaron esta utilidad de la geometría puramente práctica, con otros aspectos de carácter teórico (Argüelles, 1989) y artístico (frisos, mosaicos, cenefas, etc.).

Aunque filósofos como Aristóteles (siglo IV a. C.) sostienen que la geometría nació en Egipto, gráficos y dibujos del Neolítico ya muestran interés por las distribuciones espaciales. Concretamente en este país encontramos el *Papiro Rhind*, que se publicó en 1700 a. C. Contiene una colección de 84 problemas de carácter aplicado, como cálculo de áreas de tierra, capacidad de almacenes, etc. En el problema 50 se indica cómo calcular el área de un círculo con una aproximación muy precisa de π; en el 51, el área de un triángulo y, en el 52, el área de un trapecio isósceles. En el problema 56 se pide calcular el volumen de una pirámide regular de base cuadrangular, conocidos el lado de la base y la altura. En estos y otros hallazgos egipcios se observan patrones comunes para resolver algunos tipos de problemas, aunque no hay evidencia de ningún documento que sistematice y justifique los procesos utilizados.

La civilización mesopotámica y en concreto los babilonios (muy avanzados en matemáticas), disponían de muchos conocimientos geométricos que les permitían resolver problemas prácticos, como por ejemplo cálculos de áreas de diferentes superficies. Del mismo modo que en el caso de los egipcios, tampoco se conoce ningún escrito que generalice los diferentes procedimientos de resolución de estos problemas.

Los matemáticos griegos recogieron el legado de los egipcios y los mesopotámicos y progresaron hasta elaborar un cuerpo de conocimientos que sistematiza los anteriores, justificando y demostrando los diferentes procesos y generalizando los conceptos geométricos necesarios para desarrollarlos. Fueron sus máximos exponentes Tales de Mileto (siglo VI a. C.) y Pitágoras (siglos VI-V a. C.), con sus conocidos resultados en cuanto al estudio de los triángulos.

Platón (siglo IV a. C.), discípulo de Sócrates y maestro de Aristóteles, optó por la utilización de la matemática pura en la Geometría. Fue el fundador de lo que se conoce como Escuela Platónica, y a ella le debemos:

- La clasificación de los poliedros regulares (poliedros convexos determinados por polígonos regulares iguales, en cuyos vértices se une la misma cantidad de caras, es decir, los vértices son uniformes). La palabra poliedro proviene del griego *polýhedros*; de *polýs*, mucho, y *hédra,* cara. Dada la importancia que la Escuela Platónica les dio, hoy en día se conocen como sólidos platónicos. Estos son el tetraedro, el cubo o hexaedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro, todos ellos regulares. Platón asocia a estos sólidos los elementos fuego, tierra, aire, el material con el que se formaron las constelaciones y el cielo (Universo), y el agua, respectivamente.
- La determinación de sucesivas aproximaciones al área del círculo mediante el método exhaustivo o por agotamiento que, posteriormente, consolidará Arquímedes.

Euclides recopiló la matemática que se conocía hasta ese momento en los trece libros que componen *Los elementos*, alrededor del año 300 a. C. Es, posiblemente, la obra matemática más leída (por ser la más editada) a lo largo de la historia. En los volúmenes dedicados a la geometría describió, entre otros contenidos, cómo construir figuras con regla y compás, y enunció que solo hay cinco poliedros regulares.

A finales del siglo XVI, Kepler imaginó una relación entre los cinco poliedros regulares y las órbitas de los planetas del sistema solar entonces conocidos (Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno). Según él, cada planeta se movía en una esfera, separada de la contigua por un sólido platónico.

Por otro lado, los sólidos arquimedianos, también conocidos como semirregulares (poliedros convexos formados por polígonos regulares de dos o más tipos con vértices uniformes) deben el nombre a Arquímedes que los descubrió y estudió en el siglo III a. C. Aunque su trabajo se perdió, tenemos constancia de él por otro de Pappus de Alejandría. Será Kepler en los siglos XVI y XVII quien demuestre que solo puede haber trece poliedros con estas características (Dorce, 2013).

La geometría expuesta es solo una parte de la geometría denominada descriptiva y que se ha desarrollado a lo largo de las centurias mencionadas. A partir del siglo XVI empieza a introducirse la situación de las figuras en el plano y el espacio mediante coordenadas. Este hecho es muy importante, porque origina una geometría más analítica y empieza a abandonarse la representación gráfica como único apoyo de los cálculos. Todo este conocimiento de la matemática más geométrica se articula a partir de cinco axiomas, expuestos por Euclides, considerándolos verdades absolutas. Nunca se habían cuestionado, pero tampoco demostrado. Uno en concreto, el quinto o axioma del paralelismo, dice que «por un punto exterior a una recta, se puede trazar solo una paralela a ella». Hasta el siglo XIX, no se pone en duda este postulado, y serán Gauss (1777-1855), Bolyai (1775-1856) y Lobachewski (1792-1856), quienes, de manera separada, no solo no lo aseveran, sino que encaminan sus estudios suponiendo su falsedad, creando así la geometría hiperbólica.

Con los trabajos de Riemann (1826-1866) sobre la geometría esférica y la teoría de la relatividad de Einstein (1879-1955), incluyendo el tiempo en la concepción geométrica del universo, se produce la explosión de las geometrías no euclidianas. La existencia de estas geometrías no euclidianas provocó el interrogante sobre qué es la geometría. En 1872, el matemático alemán Felix Klein (1849-1925) respondió a este interrogante con la publicación de su *Programa de Erlangen,* donde clasifica las diferentes geometrías a partir de grupos de transformaciones geométricas (Stewart, 2008; Dorce, 2014).

Actualmente, esta parte de la matemática investiga nuevos conocimientos en los campos de la topología y la geometría algebraica.

1.2. Al tema

El objetivo del tema es, por un lado, dar a conocer todos los conceptos, elementos notables, propiedades y características de las figuras geométricas correspondientes a educación primaria y, por otro, cómo debe hacerse la transposición didáctica de esta parte de la geometría en el aula escolar.

2. Los primeros pasos por la geometría

2.1. Preliminares

La evolución de los primeros conceptos geométricos, basada en el proceso de abstracción que la Humanidad hace de las formas del entorno y de su idealización, ha producido la inmensidad de ramificaciones geométricas que existen en la actualidad. Son muchas las personas que han investigado e investigan en la rama de las matemáticas dedicada a la geometría, y que invierten gran cantidad de horas en líneas de investigación de tal potencial de abstracción, que ni tan siquiera podríamos imaginar.

Pero la esencia más primitiva, intuitiva o descriptiva de esta primera geometría, la que se encarga del conocimiento del espacio (considerado como el conjunto de todos los puntos existentes) y de las figuras geométricas, es la que nos interesa para el aula de primaria. Y la razón es muy sencilla, hay que dotar al alumnado de herramientas para que se sepa orientar a su alrededor (que además está en continua transformación), y para que sea capaz de describir y clasificar lo que le rodea.

Si se asume, como punto de partida, la definición de figura geométrica, como *cualquier conjunto de puntos en el espacio*, parece lógico pensar que la evolución natural de los conceptos matemáticos debería ser estudiar los puntos, después las rectas, más tarde las superficies y, por último, los cuerpos geométricos.

Esta concepción se enfrenta con la percepción que tienen los niños y las niñas de educación infantil y primaria de su realidad y la aproximación que pueden hacer a ella. Atendiendo a cuestiones de psicomotricidad, de desarrollo cognitivo y de conocimiento general del medio donde viven, la aproximación didáctica debería dirigirse primero a los cuerpos geométricos (pueden cogerlos, manipularlos...), después a las figuras geométricas planas que los limitan, como fronteras de estas figuras y cuerpos, más adelante a las líneas (lados o aristas) y, por último, como intersección de estas líneas, a los puntos. En el ámbito de la matemática formal, hay que hacer el recorrido contrario para poder definir un objeto geométrico de más envergadura a partir del anterior.

Pero el estudio en espiral de la geometría en infantil y primaria (al igual que ocurre en otros bloques de contenidos de matemáticas), implica tener que hacer aproximaciones a diferentes tipos de conceptos geométricos en cualquier momento evolutivo del alumnado. Y así, se podrá hablar de cuadriláteros, por ejemplo, en diferentes cursos y con diferentes intensidades de dificultad, permitiendo la integración de estas figuras mucho más progresiva que no el estudio exhaustivo y absoluto del concepto en un solo momento determinado.

En todo el trabajo que se desarrolle en el aula, deberemos tener en cuenta la imposibilidad de materializar las figuras geométricas de menos de tres dimensiones. Las rectas o triángulos, que se pueden dibujar u observar en un objeto, solo son representaciones perceptibles de los conceptos matemáticos abstractos. Porque una recta, como concepto, es un ente infinito e ilimitado que no tiene grosor y, por tanto, no se puede construir físicamente. Por la segunda razón (la inexistencia de grosor) se llega también a la imposibilidad de poder construir materialmente un triángulo, un círculo y, en general, cualquier figura plana.

2.2. Geometrías

Los cambios que afectan al entorno de los niños vienen dados por las modificaciones de las figuras geométricas que se encuentran en él. Lo que hace que unas figuras geométricas se transformen en otras son las *transformaciones geométricas*. En la realidad, una transformación es una deformación, una proyección, un desplazamiento, etc. Matemáticamente, estas transformaciones las podemos abstraer en aplicaciones biyectivas del espacio en sí mismo que toman una figura geométrica y la transforman en otra. Sin embargo, ¿qué propiedades de la figura original se conservan en la figura transformada u homóloga? Dicho de otra manera, ¿cuáles serán las características invariables de la figura geométrica original, por estas transformaciones?

De acuerdo con el *Programa de Erlangen,* publicado por Felix Klein en 1872, el estudio de estas propiedades invariables lo hace la geometría y, como hay distintos tipos de transformaciones, podemos hablar de diferentes geometrías.

Al estudiar más detenidamente las transformaciones que pueden aparecer, tenemos:

1. *Transformaciones topológicas*. Si se puede hablar de una escala de intensidad en las transformaciones a las que pueden estar sometidas las figuras geométricas, las que ocupan unos de los lugares más altos en esa escala serían las transformaciones topológicas, que deforman, estiran o contraen, provocando grandes cambios en la figura original, pero sin producir roturas, por lo que se denominan también bicontinuas. Ejemplos de estas transformaciones serían los que se pueden apreciar en la figura 1:

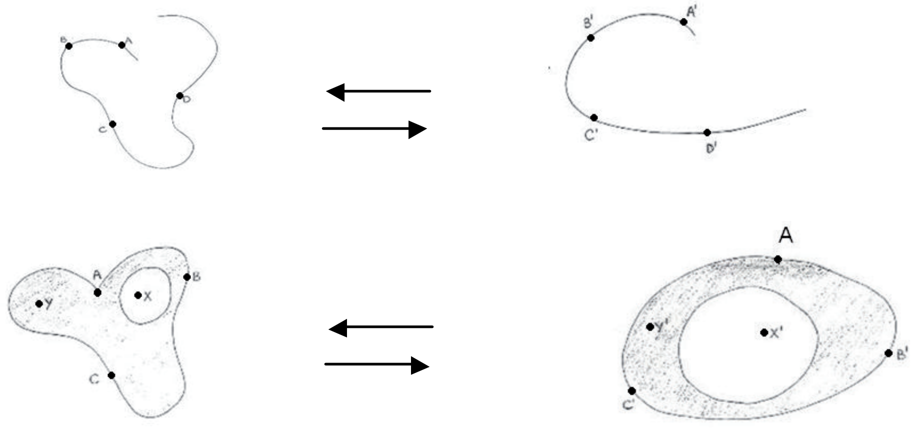


Figura 1. Ejemplos de transformaciones topológicas

   Como se puede observar, estas transformaciones no conservan longitudes, ni ángulos, ni medidas de ningún tipo, pero sí que hay otras propiedades que se conservan. Por ejemplo, el carácter de abierto o cerrado de una figura, su interior y su exterior, el orden de sus puntos.

2. *Proyecciones*. Si ahora se compara una figura plana con la sombra que la misma produce sobre un plano (para obtener solo una aproximación intuitiva a estas transformaciones), observaremos que, según donde esté el foco de luz (cerca o en el infinito) y como esté el plano (paralelo o no al que ocupa la figura) en el que se proyecta esta sombra, encontraremos diferentes tipos de transformaciones, llamadas *proyecciones o transformaciones proyectivas*.

Todas ellas conservan las líneas rectas y curvas y también la convexidad, como se puede ver en la figura 2.

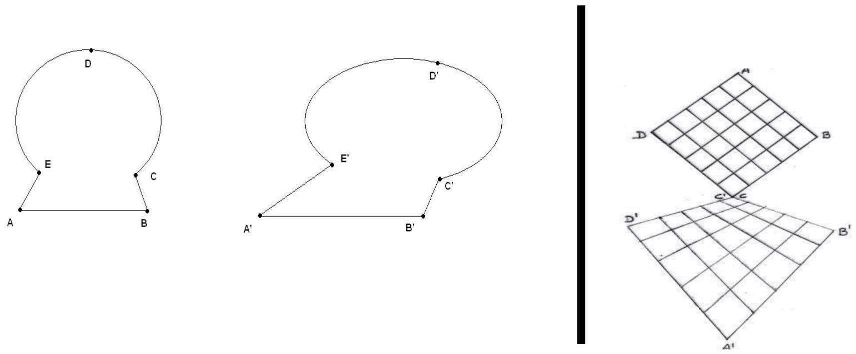


Figura 2. Ejemplos de proyecciones

Algunas proyecciones conservan además el paralelismo y la proporcionalidad y se denominan *transformaciones afines o afinidades* (figura 3).

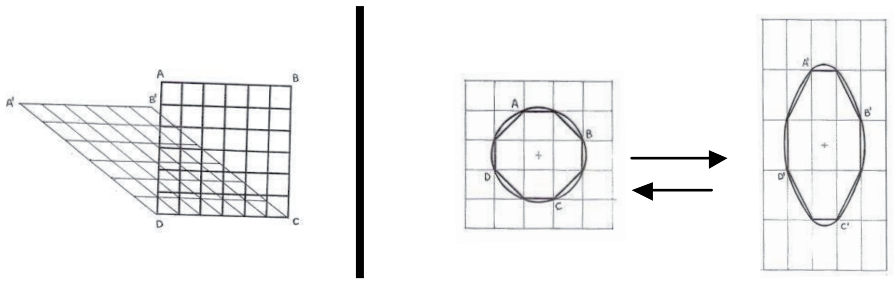


Figura 3. Ejemplos de transformaciones afines

Dentro de las afinidades existen proyecciones que aumentan o disminuyen el tamaño, pero no cambian la forma. Son las llamadas *semejanzas* y tenemos un ejemplo en el gráfico de la figura 4.

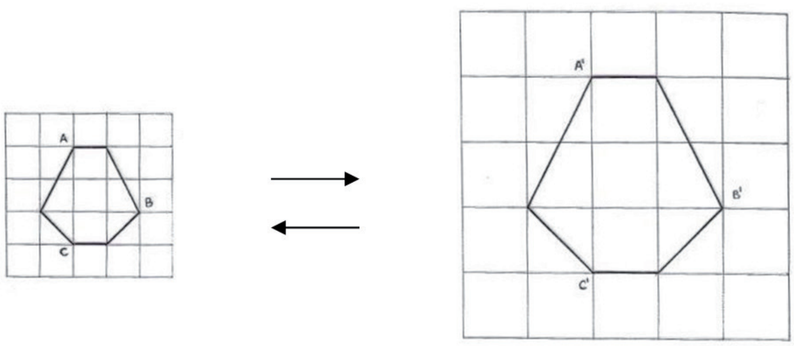


Figura 4. Ejemplos de semejanzas

3. *Movimientos rígidos*. Si comparamos dos figuras geométricas iguales, una al lado de la otra, podemos considerar que se ha producido un desplazamiento. Tenemos dos ejemplos en los gráficos de la figura 5:

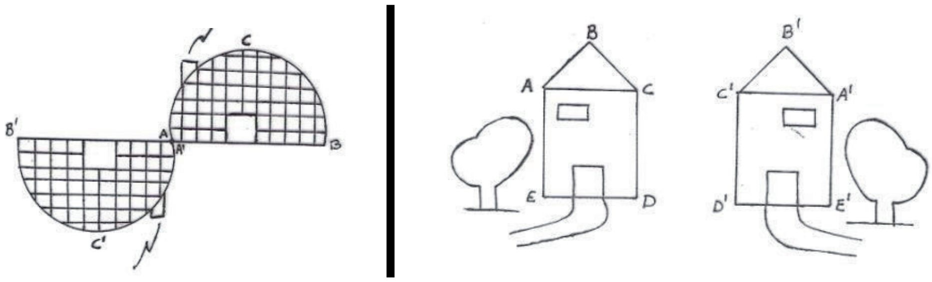


Figura 5. Ejemplos de un giro y una simetría axial en figuras planas

Observamos que todas las dimensiones de una figura y de su transformada son iguales. En cada caso podemos dar una explicación a la obtención de la segunda figura, como el resultado de transformar la primera por un movimiento rígido en el espacio, consecuencia del cual hay un desplazamiento, pero no un cambio de dimensiones, por eso estas transformaciones se llaman también *isometrías*. Dentro de los movimientos rígidos podemos encontrar tres tipos de transformaciones diferentes, traslaciones, giros y simetrías axiales (los gráficos anteriores corresponden a los dos últimos).

Si agrupamos las diferentes propiedades de las figuras que se conservan al aplicarles las transformaciones, se generan los siguientes campos de estudio en la geometría:

Topología

Es la parte de la geometría que estudia las propiedades de las figuras que se conservan cuando se les aplica una transformación topológica, es decir, el orden de los puntos, el interior y el exterior de las figuras, si son cerradas o abiertas, la frontera y la intersección.

Entonces, desde el punto de vista topológico, un círculo es equivalente u homólogo a un cuadrado, un triángulo o un pentágono..., por ejemplo. En tres dimensiones, una esfera sería topológicamente homóloga a un tetraedro o a un cubo.

Geometría de las proyecciones

Se puede definir como la geometría que se encarga de estudiar las propiedades de las figuras geométricas que se mantienen invariables cuando se les aplica una proyección, es decir, una transformación proyectiva, una transformación afín o una semejanza:

- Cuando se aplica una transformación proyectiva a una figura geométrica, las propiedades específicas que se mantienen invariables son el carácter de línea recta o curva y la convexidad de las figuras.

- Cuando se aplica una transformación afín a una figura geométrica, las propiedades específicas que se mantienen invariables son el paralelismo, el punto medio y la proporcionalidad entre los segmentos de una misma recta.
- Cuando la transformación que se aplica a una figura geométrica es una semejanza, las propiedades específicas que se conservan son los ángulos y la proporcionalidad y, por tanto, su forma.

El trabajo del estudio de las propiedades invariantes antes mencionadas se puede considerar, de manera global, dentro de la denominada geometría de las proyecciones o, de manera individual, dando origen a tres campos geométricos llamados geometría proyectiva, geometría afín y geometría de la semejanza, respectivamente.

Geometría euclídea

Esta rama de la geometría, también denominada métrica, se encarga de estudiar las propiedades de las figuras geométricas que se mantienen invariables cuando se les aplica un movimiento rígido (giro, traslación o simetría axial). Las figuras homólogas mantienen invariables sus propiedades de medida de longitudes, y como consecuencia de superficies y volúmenes.

2.3. Referentes psicoevolutivos

Una vez se ha presentado, a grandes rasgos, cuáles son las matizaciones de las diferentes geometrías, habrá que recurrir a ellas cada vez que se presente una conexión con el trabajo que se hará en las aulas escolares y que en el caso de educación primaria se desarrolla en el punto 4 de este tema.

Tampoco podemos olvidar el momento evolutivo del alumnado que tendremos delante, y como este afecta a la adquisición de los conceptos geométricos. Jean Piaget (1896-1980), con sus cuatro estadios del desarrollo cognitivo de los niños y niñas de cero a quince años, establece una conexión de la geometría con la concepción espacial del alumnado.

En la escuela empezaremos estudiando los conceptos de la topología para construir el espacio topológico, pasando después a los de las geometrías proyectiva y métrica con el fin de construir los espacios proyectivo y euclidiano, respectivamente.

Antes de desarrollar los contenidos y las capacidades geométricas en el aula de primaria, se hace necesario fundamentar matemáticamente los conceptos correspondientes. Para dar respuesta a esta necesidad se presenta a continuación una introducción teórica de todo lo que el docente de primaria puede requerir para llevar a cabo su tarea.

3. Fundamentación teórica

3.1. Líneas en el plano

Cualquier línea abierta que pueda trazarse sobre una superficie es la representación de una transformada de una recta o de alguno de sus segmentos. De la misma forma, cualquier línea cerrada será una representación de una transformada de una circunferencia.

La expresión analítica de una recta o una circunferencia (con coordenadas, dentro de un sistema de referencia), surge de la necesidad de controlar matemáticamente estas manifestaciones de la realidad en las que, de manera natural, aparecen.

Será, pues, útil conocer mínimamente estas consideraciones de carácter más formal, para después conectarlas con lo que se explicará en el aula de primaria.

3.1.1. Antecedentes: plano, puntos y vectores

Se considera el plano como la porción del espacio determinada por dos rectas diferentes, paralelas o secantes, donde situaremos dos ejes de coordenadas perpendiculares (eje X y eje Y, o de abscisas y de ordenadas, respectivamente), y en el que podemos representar todas las figuras geométricas planas, entre otras: punto, vector, recta, circunferencia, etc., que son las que estudiaremos. Se considera de dimensión dos, precisamente por ser dos los ejes necesarios para determinarlo, y se denominan habitualmente con letras griegas (π, α, β...). En el plano encontramos un punto importante en el que se cortan los dos ejes, que se denomina origen de coordenadas y que se hace corresponder con la posición del 0 en ellos. A partir de este punto y a intervalos de igual longitud, se sitúan hacia la derecha y hacia arriba los números enteros positivos y en los otros sentidos, los negativos.

Cualquier punto que se quiera situar en el plano, debe contener información ordenada respecto de estos dos ejes, primero del eje X, después del eje Y (figura 6).

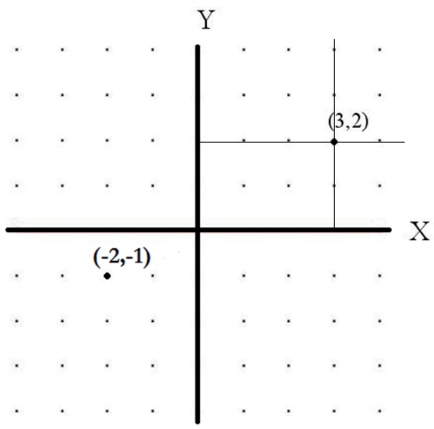


Figura 6. Representación de los ejes de coordenadas con la situación de dos puntos

El punto es la mínima figura geométrica. Analíticamente se representa por un par de números separados por una coma y dentro de un paréntesis, llamado coordenadas del punto. Por ejemplo, el origen de coordenadas se representaría por (0,0). El primer número indica el valor correspondiente al eje X, y el segundo, al eje Y. La representación gráfica de este par de números es una marca pequeña que se situará en la intersección de dos rectas imaginarias perpendiculares entre sí, y paralelas cada una de ellas a uno de los ejes, que cortarán al otro por los valores que aparecen en el par de coordenadas (por ejemplo, el (3,2)). El punto no tiene tamaño, ni forma y, por lo tanto, no se puede deformar por ninguna transformación geométrica, sí que se puede trasladar, pero solo eso. Usualmente se le denomina con una letra mayúscula (***A***, ***B***, ***C***...).

Un vector fijo en el plano, $\overrightarrow{AB}$, es un segmento orientado que tiene el origen en el punto ***A*** y el extremo en el punto ***B***. Si ponemos coordenadas a los puntos, $A=(a,a')\ i\ B=(b,b')$, las del vector serán $\overrightarrow{AB}=(b-a,b'-a')$.

- ***Elementos de un vector***:
  - *Dirección:* Se define como la recta sobre la que se encuentra el vector. Todas las rectas paralelas a ella tienen la misma dirección.
  - *Sentido:* Es el del recorrido de la recta cuando nos trasladamos de ***A*** a ***B***. Es evidente que cada dirección admite dos sentidos, el de ***A*** a ***B*** y el de ***B*** a ***A***. Por tanto, la manera de determinarlos será diferente, así $\overrightarrow{AB}=(b-a,b'-a')$, y análogamente $\overrightarrow{BA}=(a-b,a'-b')$.
  - *Módulo*: Es la distancia entre ***A*** y ***B***, es decir, la longitud del segmento $\overline{AB}$. Se representa por $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ y se calcula a partir del teorema de Pitágoras según: $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(b-a)^2+(b'-a')^2}$. Diremos que un vector es unitario si su módulo es **1**.

- ***Equipolencia de vectores***: Dos vectores fijos, no nulos, son *equipolentes* si tienen los mismos módulo, dirección y sentido. Gráficamente, dos vectores son equipolentes si cuando unimos sus orígenes y extremos se obtiene un paralelogramo (figura 7).

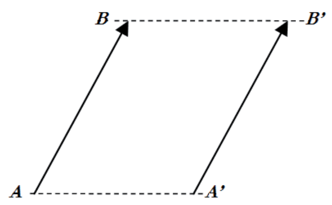


Figura 7. Representación de dos vectores equipolentes

Esta relación entre vectores es una relación binaria de equivalencia (véase anexo). Cada una de las clases de equivalencia determinadas por ella recibe el nombre de vector libre (figura 8).

Cuando queremos hacer uso de un vector podemos escoger, en su lugar, cualquiera de los que son equipolentes a él. Esta es la idea intuitiva del concepto de vector libre.

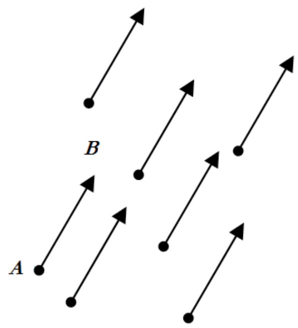


Figura 8. Representación de algunos elementos de la clase de equivalencia de un vector libre

Representaremos los vectores libres por medio de uno de los elementos de su clase, que denotaremos por letras minúsculas con una flecha horizontal encima, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \ldots$ o bien mediante el origen y el extremo del vector elegido, $\overrightarrow{AB}$. En cualquiera de los casos, se puede acompañar esta representación con las coordenadas del vector, que son las del vector equipolente que tiene su origen en el punto (0,0).

3.1.2. La recta

Una recta en el plano queda determinada vectorialmente por un punto **(a,b)** y un vector **(v,w)** que marcará la dirección de la recta y que se denomina vector director. Usualmente las rectas se designan con una letra minúscula (r, s, t...), como se observa en la figura 9. La misma recta también quedará determinada si tomamos como vector director el del sentido contrario al inicial, **(-v,-w)**. De esta forma se observa que en la dirección que determina una recta encontramos también dos sentidos opuestos.

Cualquier punto de la recta **(x,y)** se obtendrá trasladando (véase 3.4.1.1) el punto fijo **(a,b)**, según un vector múltiplo de **(v,w)**.

Así:

$$\mathbf{(x,y) = (a,b) + k \cdot (v,w)},\ k \in R$$

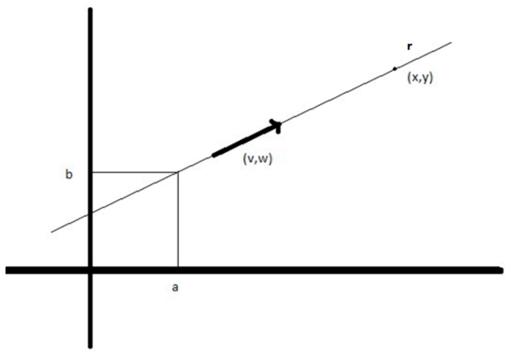


Figura 9. Representación de la determinación vectorial de una recta

Nota: La expresión anterior se llama ecuación vectorial de la recta, y forma parte de la lista que se denomina «ecuaciones de la recta». En particular, el nombre de esta expresión viene dado por el marcado carácter vectorial (de par de valores, básicamente) que tiene la propia configuración de la expresión.

Las variaciones puramente analíticas que se hacen de esta expresión reciben nombres diferentes que, de alguna manera, recogen la característica principal por la que tradicionalmente se ha usado o se identifica esta expresión en concreto.

Así, si a partir de la expresión anterior se separan las coordenadas, aparecen dos ecuaciones, llamadas ecuaciones paramétricas de la recta:

$$\begin{cases} x = a + k \cdot v \\ y = b + k \cdot w, \quad k \in R \end{cases}$$

El paso siguiente es intentar eliminar el parámetro, por lo que se despejará de las dos expresiones y se igualarán los resultados, obteniendo la ecuación continua de la recta:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-a}{v} = k \\ \frac{y-b}{w} = k \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{x-a}{v} = \frac{y-b}{w}$$

Por su uso extendido, hay una expresión que se obtiene manipulando mínimamente la expresión anterior, y que se denomina ecuación punto pendiente de la recta:

$$y - b = \frac{w}{v} \cdot (x - a)$$

También existe una expresión muy utilizada que se obtiene bien de esta, bien de la ecuación continua, y que se llama ecuación explícita de la recta. Hay que destacar que hasta esta última, siempre están muy localizados los valores de las coordenadas de los puntos o los vectores. Solo conociendo cómo es la expresión teórica, se identifican. Una vez se ha superado la última ecuación y se llega a la explícita, esta intuición se pierde y hay que hacer algunos cálculos para reconstruir los valores del vector o del punto. Así, la expresión que se obtiene es de la forma $y = m \cdot x + n$, pero realmente, lo que se ha calculado es:

$y = \frac{w}{v} \cdot x - \frac{w}{v} \cdot a + b$, donde $m = \frac{w}{v}$ recibe el nombre de pendiente de la recta y

$n = -\frac{w}{v} \cdot a + b$, es el valor de la ordenada en el origen.

Únicamente nos queda la ecuación general o implícita de la recta, que solo es una reordenación de la anterior. Usualmente se escribe como $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$, pero realmente la expresión es: $\frac{w}{v} \cdot x - y - \frac{w}{v} \cdot a + b = 0$.

Cualquier punto de una recta la divide en dos semirrectas que tienen a este punto como origen, y que se llaman opuestas.

Todas las semirrectas que tienen origen en un punto dado de un plano (haz de semirrectas) lo recubren y permiten orientarlo en dos sentidos diferentes. Si a partir de una semirrecta concreta recorremos el haz siguiendo el sentido de las agujas del reloj, se habrá orientado el plano en un sentido llamado negativo. En caso contrario, el sentido será positivo.

Cualquier par de puntos de una recta, $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, determina un segmento $\overrightarrow{AB}$ formado por todos los puntos de la recta que se encuentren situados entre $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, y por estos dos puntos (extremos del segmento) si es cerrado. Si el segmento no incluye ninguno de los extremos es abierto y si no incluye uno de ellos es semiabierto. En general, cuando se hable de segmentos nos referiremos a segmentos cerrados.

La longitud de un segmento $\overrightarrow{AB}$ se calcula midiendo la distancia entre sus extremos y se representa por $\left|\overline{AB}\right| = \mathrm{d}\left(A,B\right)$, tal como se ha especificado en el caso de los vectores en el punto 3.1.1.

La recta perpendicular a un segmento por su punto medio se denomina mediatriz. Dos segmentos cualesquiera pueden tener o no puntos en común. Diremos que dos segmentos son concatenados cuando tienen un extremo común y son consecutivos cuando tienen un extremo común y están alineados.

Si consideramos dos líneas rectas en el plano, las posiciones que pueden tener son:

1. *Rectas secantes*: tienen solo un punto en común. Analíticamente $r \cap s = \{P\}$ (figura 10).

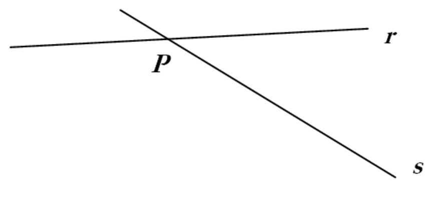


Figura 10. Representación de rectas secantes en el plano

2. *Rectas paralelas no coincidentes*: no tienen ningún punto en común. Analíticamente $r \cap s = \varphi$ (figura 11).

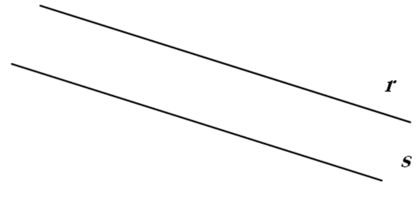


Figura 11. Representación de rectas paralelas no coincidentes

3. *Rectas paralelas coincidentes*: tienen todos los puntos comunes. Analíticamente $r \cap s = r = s$ (figura 12).

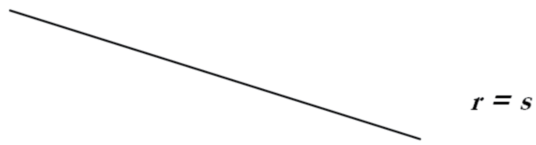


Figura 12. Representación de rectas paralelas coincidentes

Nota: Si consideramos dos líneas rectas en el espacio, se tendría que añadir un nuevo caso a estas tres: *Rectas que se cruzan en el espacio*, tampoco tienen puntos en común y no pertenecen al mismo plano. Por tanto, $r \cap s = \Phi$ (figura 13).

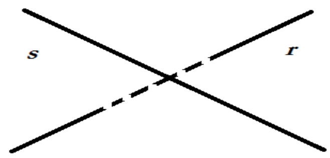


Figura 13. Representación de rectas que se cruzan en el espacio

3.1.3. La circunferencia

Definimos circunferencia como el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro. Esta distancia fija se denomina radio. Debemos advertir que con la palabra radio, nos referimos también a cada uno de los segmentos que unen el centro con un punto cualquiera de la circunferencia. La circunferencia más sencilla posible sería aquella que está centrada en el **(0,0)** (figura 14). Partiremos de ella y si llamamos **(x,y)** a cualquier punto de la circunferencia y ***r*** al radio, entonces la definición anterior se traduce al lenguaje formal como $d((x,y),(0,0)) = r$.

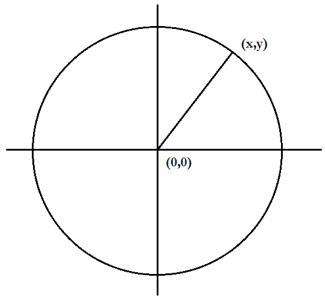


Figura 14. Representación de una circunferencia centrada en (0,0)

Como la distancia entre dos puntos siempre es el módulo del vector que los une, calculamos el vector entre los puntos **(x,y)** y **(0,0)**. Al restar las coordenadas, el vector obtenido, sería **(x,y)**. Calculando el módulo de este vector: $\sqrt{x^2 + y^2}$, y sustituyendo esta expresión en la anterior:

$$\sqrt{x^2+y^2}=r \Rightarrow x^2+y^2=r^2$$

Si el centro de la circunferencia es cualquier punto, $C(c_1,c_2)$ y el radio ***r*** (figura 15), el procedimiento sería igual, y la ecuación a la que se llegaría sería:

$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=r^2$$

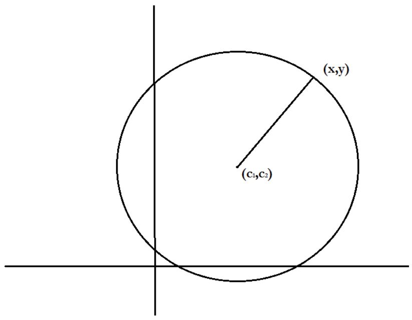


Figura 15. Representación de una circunferencia centrada en (c_1,c_2)

Para ampliar el conocimiento de la circunferencia, definimos a continuación algunos de sus elementos básicos:

- *Cuerda:* segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.
- *Diámetro:* cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.
- *Arco:* tramo o porción de la circunferencia comprendido entre dos puntos de esta. Cuando los puntos son los extremos de un diámetro, el arco se llama semicircunferencia.

Cuando haya que calcular la longitud de una circunferencia de radio ***r***, utilizaremos la expresión $L=2\cdot\pi\cdot r$.

Si consideramos ahora dos circunferencias en el plano, las posiciones relativas que pueden tener son:

1. Cuando no tienen ningún punto en común (figura 16). Estas se situarán de dos posibles maneras, exteriores o interiores. Un caso particular de las últimas serían las circunferencias que comparten el mismo centro, llamadas concéntricas.
2. Cuando tienen puntos en común (figura 16). Encontramos ahora dos posibilidades, un solo punto en común o dos puntos de contacto. En el primer caso pueden ser tangentes interiores o exteriores y, en el segundo, se llaman secantes.

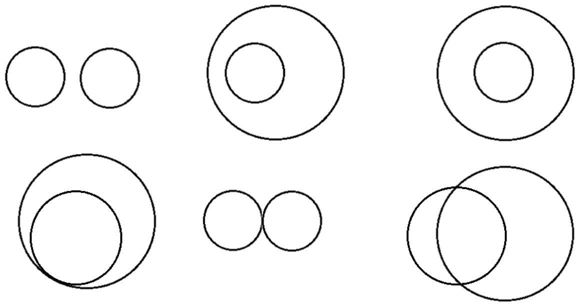


Figura 16. Representación de circunferencias exteriores (arriba, izquierda), interiores (arriba, centro), concéntricas (arriba, derecha), tangentes interiores (abajo, izquierda), tangentes exteriores (abajo, centro) y secantes (abajo, derecha)

Si se considera una circunferencia y una recta, las posiciones relativas que pueden tener en el plano son las siguientes (figura 17):

a) *Recta tangente:* la recta y la circunferencia solo tienen un punto en común.
b) *Recta secante:* la recta y la circunferencia tienen dos puntos en común.
c) *Recta exterior:* la recta y la circunferencia no tienen puntos en común.

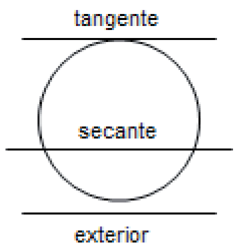


Figura 17. Representación de las posiciones relativas de una circunferencia y una recta en el plano

De todos los tipos de líneas que podemos encontrar en el plano, nos interesan particularmente las abiertas y las cerradas simples (aquellas que no tienen ningún punto por donde la línea pasa dos veces). En el caso de las abiertas, sus principio y final son dos puntos diferenciados, mientras que en las cerradas son el mismo punto. En general, obtendremos líneas abiertas simples al aplicar una transformación topológica a una recta, una semirrecta o un segmento y líneas cerradas simples al aplicarla a una circunferencia.

3.2. Superficies en el plano

Una superficie plana es una figura geométrica que resulta de considerar una parte del plano determinada por líneas del mismo. En particular, cualquier recta de un plano lo divide en dos regiones denominadas semiplanos, que incluyen la recta.

Una superficie plana es convexa (figura 18) cuando contiene todos los segmentos que unen cualquier par de puntos de ella. Y cóncava (figura 19) cuando alguno de estos segmentos no está contenido en la superficie.

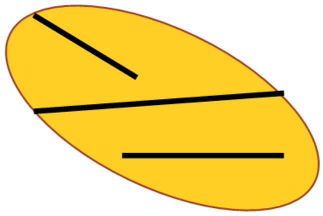


Figura 18. Representación de una superficie plana convexa

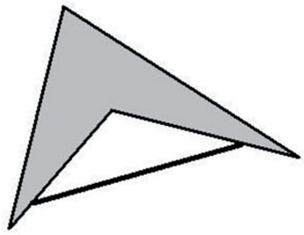


Figura 19. Representación de una superficie plana cóncava

3.2.1. Ángulos

Las primeras superficies planas que estudiaremos serán las que se denominan ángulos.

Cuando dos rectas son secantes, definen cuatro regiones del plano. Se llama ángulo a cada una de estas regiones, incluidas las semirrectas de origen común que las definen. A este origen se le llama vértice del ángulo y a las semirrectas, lados del mismo (figura 20).

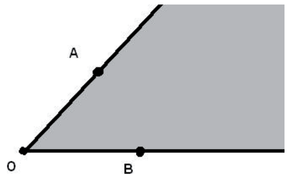


Figura 20. Representación de una región angular

Simbolizamos el ángulo de dos maneras diferentes: solo mediante el vértice, $\hat{O}$, o bien con una terna de puntos compuesta por un punto de cada lado del ángulo y su vértice entre ellos, $A\hat{O}B$.

Cuando las cuatro regiones son iguales, los ángulos se llaman rectos, y su amplitud angular es de 90º. Cuando las semirrectas que determinan el ángulo son opuestas, este se llama ángulo llano, su amplitud es igual a dos ángulos rectos, es decir, 180º. Los ángulos que tienen una amplitud menor que el recto se llaman agudos.

Aquellos ángulos cuya amplitud está comprendida entre un ángulo recto y un ángulo llano, se llaman obtusos.

Cuando las dos semirrectas que determinan el ángulo son coincidentes, el ángulo que se forma se llama completo. Su amplitud es igual a cuatro ángulos rectos, es decir 360º.

Estos cinco tipos de ángulos son convexos. Serán cóncavos los restantes ángulos, es decir, los que miden más de 180º y menos de 360º.

Dos ángulos se llaman complementarios cuando la suma de sus amplitudes es igual a 90º; serán suplementarios cuando sumen 180º y conjugados cuando sumen 360º.

En cualquier ángulo, se denomina bisectriz a la semirrecta contenida en él que tiene su origen en el vértice del ángulo y lo divide en dos partes iguales.

3.2.2. Polígonos

Definimos línea poligonal como una colección de segmentos concatenados no consecutivos.

Una línea poligonal será simple (figura 21) si no hay ningún punto diferente de los extremos de los segmentos que pertenezca a dos de ellos a la vez. En caso contrario se denomina no simple (figura 22).

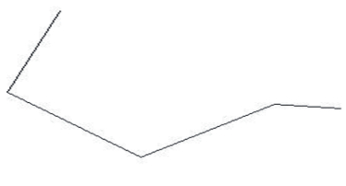


Figura 21. Representación de una línea poligonal simple

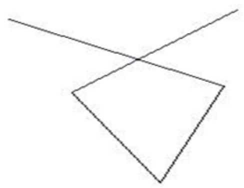


Figura 22. Representación de una línea poligonal no simple

Si el primero y el último segmento de una línea poligonal de más de dos segmentos tienen un extremo común, esta será cerrada. En caso contrario, será abierta.

A partir de estos conceptos, definimos polígono como la porción del plano limitada por una línea poligonal cerrada simple, incluyendo esta línea.

Cada segmento de la línea poligonal se denomina lado del polígono y si sumamos las longitudes de todos los lados de un polígono, obtenemos su perímetro. Los extremos de los lados se llaman vértices del polígono. El segmento que une dos vértices no consecutivos de un polígono se llama diagonal del mismo.

Designaremos los lados de un polígono con letras minúsculas, a, b, c..., y sus vértices con letras mayúsculas, A, B, C... En el caso de los triángulos, se acostumbra a utilizar la misma letra para un lado y para su vértice opuesto.

Las semirrectas que contienen dos lados concurrentes del polígono y que tienen su origen en el vértice común a estos lados determinan dos ángulos. El ángulo que contiene al polígono se llama ángulo interior del polígono. Usualmente, se llaman ángulos del polígono a sus ángulos interiores.

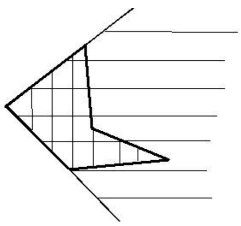


Figura 23. Representación de un ángulo interior de un polígono

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º. Para cualquier polígono que tenga **n** lados, esta será **(n-2) · 180º** (se comprueba fácilmente descomponiendo el polígono en triángulos).

El ángulo convexo determinado por la semirrecta que contiene un lado del polígono y la que prolonga uno de sus lados concurrentes y tiene su origen en el vértice común, se llama ángulo exterior del polígono (figura 24).

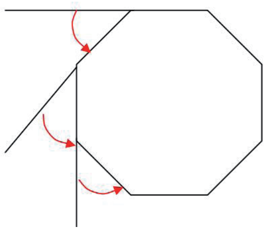


Figura 24. Representación de algunos ángulos exteriores de un polígono

La suma de todos los ángulos exteriores de un polígono convexo (obtenidos prolongando los lados en un mismo sentido del contorno), siempre resulta 360º. En efecto, cada ángulo exterior es adyacente de uno del polígono, es decir, suma con él un ángulo llano. La suma de los ángulos exteriores e interiores vale, por tanto, tantos ángulos llanos como lados, y como los interiores suman dos ángulos llanos menos, esta es precisamente la suma de los exteriores.

Un polígono es equilátero cuando tiene sus lados de la misma longitud. Se dice que es equiángulo cuando sus ángulos interiores tienen la misma amplitud y se dice que es regular cuando es equilátero y equiángulo. Los polígonos regulares tienen en su interior un punto equidistante a todos los vértices que se denomina centro del polígono.

Los polígonos se nombran por el número de los lados o ángulos. Así, encontramos: triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos, heptágonos, octógonos, eneágonos o nonágonos, decágonos, endecágonos, dodecágonos, tridecágonos, tetradecágonos, pentadecágonos, hexadecágonos, heptadecágonos, octodecágonos, eneadecágonos, icoságonos..., triacontágonos (30)..., hectágonos (100), kiliágonos (1.000)..., miriágonos (10.000). Para construir el nombre de un polígono de más de 20 lados, pero menos de 100, hay que utilizar la siguiente tabla:

Decenas		**y**	**Unidades**		**Sufijo final**
			1	-hena-	
20	Icosi-		2	-di-	
30	Triaconta-		3	-tri-	
40	Tetraconta-		4	-tetra-	
50	Pentaconta-		5	-penta-	
60	Hexaconta-	-kai-	6	-hexa-	-gono
70	Heptaconta-		7	-hepta-	
80	Octaconta-		8	-octa-	
90	Eneaconta-		9	-enea-	

Por ejemplo, el nombre de un polígono de 42 lados sería: tetracontakaidígono.

A continuación, se estudiarán más detalladamente algunos polígonos, por su relevancia en las aulas de infantil y primaria y por su facilidad para ser imaginados.

3.2.2.1. Triángulos

Un triángulo es un polígono determinado por una línea poligonal simple cerrada de tres segmentos. Tendrá, por tanto, tres lados, tres ángulos y tres vértices.

Podemos nombrar los triángulos en función de sus ángulos y de sus lados.

Si atendemos a los ***ángulos***, la denominación produce la siguiente clasificación:

G. Lorenzo / M. Alcalde / I. Pérez - ISBN: 978-84-16356-31-7 La geometría y la estadística en el aula de primaria - UJI - DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia109

A. *Triángulos acutángulos*, son aquellos que tienen los tres ángulos agudos (figura 25).

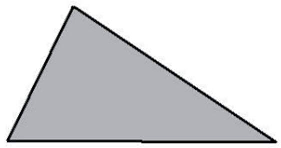


Figura 25. Representación de un triángulo acutángulo

B. *Triángulos rectángulos*, los que tienen un ángulo recto (figura 26). Los lados que determinan el ángulo recto se denominan catetos y el tercer lado, hipotenusa.

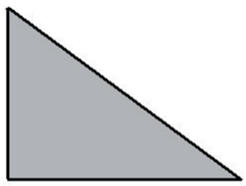


Figura 26. Representación de un triángulo rectángulo

C. *Triángulos obtusángulos*, uno de los tres ángulos es obtuso (figura 27).

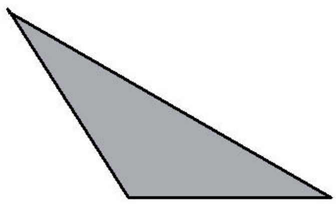


Figura 27. Representación de un triángulo obtusángulo

Si atendemos a los ***lados***, las denominaciones son:

A. *Triángulos equiláteros,* son aquellos que tienen los tres lados de igual longitud (figura 28).

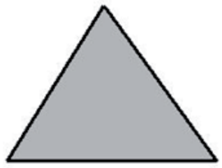


Figura 28. Representación de un triángulo equilátero

B. *Triángulos isósceles*, tienen dos lados de igual longitud (figura 29).

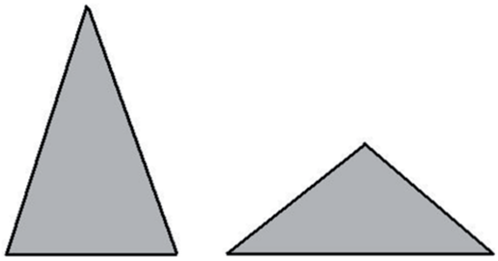


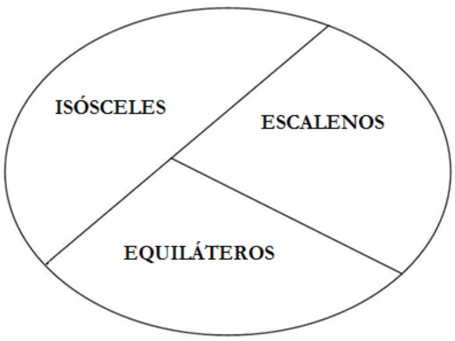
Figura 29. Representación de dos triángulos isósceles

C. *Triángulos escalenos*, los tres lados tienen diferente longitud (figura 30).

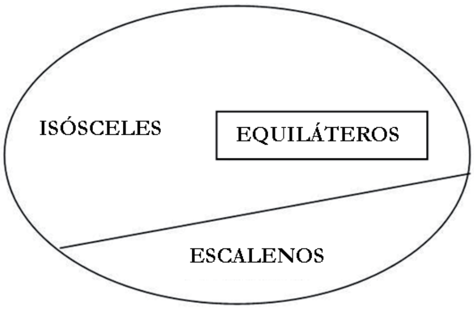
Figura 30. Representación de un triángulo escaleno

Si nos fijamos en los lados de los triángulos podemos obtener dos clasificaciones diferentes. Una sería excluyente y otra inclusiva. La clasificación excluyente es aquella que presenta tantas clases de equivalencia (véase anexo) como denominaciones diferentes hay. La inclusiva permite que en una misma clase pueda haber elementos correspondientes a más de una denominación. La diferencia se encontrará en la manera de definir los elementos.

Por ejemplo: si se dice que «los triángulos isósceles son aquellos que ***solo*** tienen dos lados iguales», un triángulo equilátero no es isósceles. Por tanto, lo hemos excluido. Es decir, conseguimos una clasificación excluyente de los triángulos que se puede representar de la siguiente manera:



Pero si la definición considerada es «los triángulos isósceles son aquellos que tienen al menos dos lados iguales», un triángulo equilátero sí que es isósceles. Por eso, este tipo de clasificación se denomina inclusiva, porque incluye. En este caso obtenemos dos clases de equivalencia: la de los isósceles, que contiene a los equiláteros como un subconjunto, y la de los escalenos:



Además de interesarnos las medidas de los lados, de los ángulos o del contorno de un triángulo, también nos puede interesar medir su superficie. Ya conocemos la expresión que calcula el valor de esta medida (Pérez, Alcalde y Lorenzo, 2014), es decir, el área del triángulo: $\frac{base \times altura}{2}$, donde la base será la longitud del lado del triángulo sobre el que se apoya la figura, y la altura es la longitud del segmento de la perpendicular a la recta que contiene la base, por el vértice opuesto (figura 31).

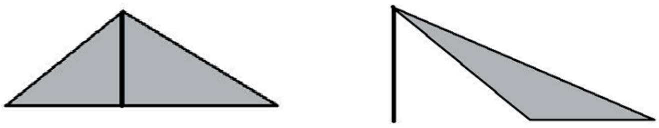


Figura 31. Representación de algunas alturas de dos triángulos

Resolver un triángulo significa conocer las medidas de sus lados y de sus ángulos. En ocasiones, estos cálculos pueden resultar complicados y requieren la ayuda de la trigonometría. En otras, se simplifican usando relaciones entre los lados de triángulos, como por ejemplo la que expresa el teorema de Pitágoras para los triángulos rectángulos: $a^2 = b^2 + c^2$, donde **a** es la longitud de la hipotenusa, y ***b*** y ***c*** las de los catetos. La comprobación gráfica es muy evidente (figura 32):

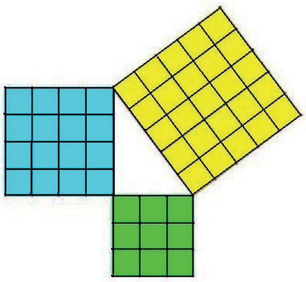


Figura 32. Representación geométrica del teorema de Pitágoras

Es decir, el área del cuadrado de lado la hipotenusa, coincide con la suma de las áreas de los cuadrados cuyos lados son los catetos.

3.2.2.2. Cuadriláteros

Un cuadrilátero es un polígono determinado por una línea poligonal simple cerrada de cuatro segmentos. Tendrá, por tanto, cuatro lados, cuatro vértices y cuatro ángulos.

Hay diferentes tipos de cuadriláteros. Según las características que consideremos para cada uno de ellos, obtendremos diferentes clasificaciones.

Así, si atendemos al paralelismo de los lados encontramos tres grandes clases de cuadriláteros: paralelogramos (tienen los dos pares de lados opuestos paralelos), trapecios (tienen solo un par de lados opuestos paralelos, que se llaman bases) y trapezoides (no tienen ningún lado paralelo a otro).

Los cuadriláteros que componen cada una de estas clases se pueden determinar por las siguientes definiciones:

A. *Paralelogramos*. Atendiendo a la igualdad de los lados y/o de los ángulos, obtenemos las cuatro subclases siguientes:

A.1. Cuadrados (figura 33).
- Los cuatro ángulos son de igual amplitud (equiángulo). Y además, son de 90º.
- Los cuatro lados son de igual longitud (equilátero).

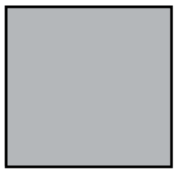


Figura 33. Representación de un cuadrado

A.2. Rectángulos (figura 34).
- Los cuatro ángulos son de igual amplitud (equiángulo). Y además, son de 90º.
- Los lados opuestos son de igual longitud. Los consecutivos no lo son.

Figura 34. Representación de un rectángulo

A.3. Rombos (figura 35).
- Los ángulos opuestos son de la misma amplitud. Los no opuestos no lo son.
- Los cuatro lados son de igual longitud (equilátero).

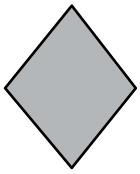


Figura 35. Representación de un rombo

A.4. Romboides (figura 36).

- Los ángulos opuestos son de la misma amplitud. Los no opuestos no lo son.
- Los lados opuestos son de igual longitud. Los consecutivos no lo son.

Figura 36. Representación de un romboide

B. *Trapecios*. Atendiendo a la igualdad de los lados y/o de los ángulos, obtenemos las dos subclases siguientes:

B.1. Trapecios isósceles (figura 37).

- Las longitudes de los lados no paralelos son iguales.
- Los ángulos que comparten un mismo lado básico son iguales dos a dos.

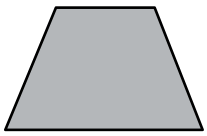


Figura 37. Representación de un trapecio isósceles

B.2. Trapecios escalenos (figura 38).

- Las longitudes de los lados no paralelos son diferentes.

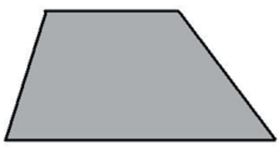


Figura 38. Representación de un trapecio escaleno

Cuando en un trapecio escaleno uno de los lados no paralelos es perpendicular a las bases se le denomina trapecio rectángulo (figura 39).

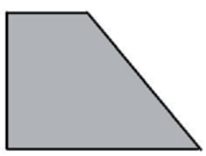


Figura 39. Representación de un trapecio rectángulo

C. *Trapezoides*. No tienen ningún lado paralelo y no se exige igualdad de lados ni de ángulos (figura 40).

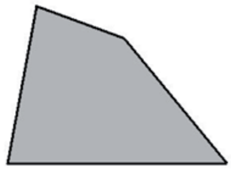


Figura 40. Representación de un trapezoide

Con estas definiciones se consigue una clasificación excluyente de los cuadriláteros, que se puede representar de la siguiente manera:

PARALELOGRAMOS	TRAPECIOS	
CUADRADOS	T. ISÓSCELES	TRAPEZOIDES
RECTÁNGULOS		
ROMBOS	T. ESCALENOS	
ROMBOIDES		

Si se quiere obtener una clasificación inclusiva de los paralelogramos tendremos que incorporar algunos cambios en las definiciones anteriores. Para facilitar la comprensión de la nueva clasificación, nos inclinamos por mantener las tres grandes clases de la clasificación inicial de los cuadriláteros, modificar las definiciones de los paralelogramos y dejar sin cambios las de los trapecios y trapezoides.

Así, consideraremos:

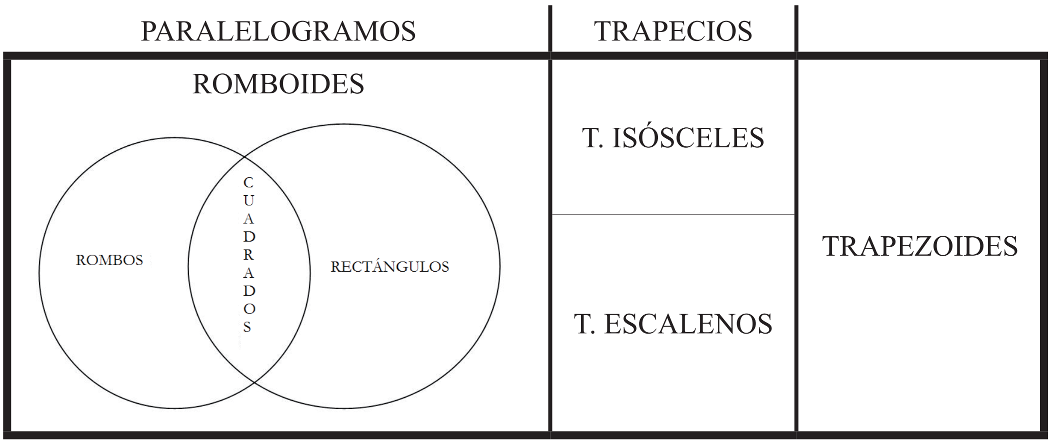
Romboide como el cuadrilátero que tiene los lados opuestos de igual longitud.

Rombo como el que tiene los cuatro lados de igual longitud.

Rectángulo como el que tiene los cuatro ángulos rectos.

Cuadrado como el que tiene los cuatro lados de igual longitud y los cuatro ángulos rectos.

Según las definiciones expuestas, la idea general de paralelogramo se identifica con el concepto de romboide. Además, los cuadrados están incluidos en las clases de rectángulos y de rombos. Entonces, la representación gráfica de esta clasificación inclusiva será:



3.2.2.3. Pentágonos

Un pentágono es un polígono determinado por una línea poligonal simple cerrada de cinco segmentos. Tendrá, por tanto, cinco lados, cinco ángulos y cinco vértices. Podemos considerar pentágonos regulares e irregulares. Aunque habitualmente se asocia la idea de este polígono a un pentágono regular, deberemos tener en cuenta que existen también otros pentágonos que no lo son, tanto convexos como cóncavos (figura 41).

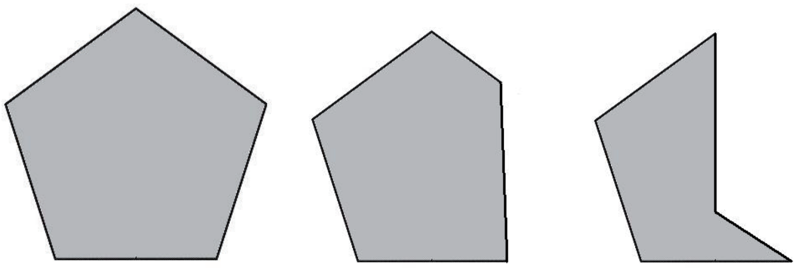


Figura 41. Representación de pentágonos: regular convexo (izquierda), irregular convexo (centro) e irregular cóncavo (derecha)

El pentágono regular ha sido muy utilizado históricamente en los ámbitos de la construcción, la religión, las creencias y el arte.

Las rectas que contienen los lados del pentágono regular se cortan en puntos exteriores a este, determinando una figura que se llama pentáculo (figura 42) y que corresponde al tipo de polígonos conocidos como estrellados. Uniendo los puntos de corte mencionados encontramos un nuevo pentágono.

Figura 42. Representación de un pentáculo

En el arte, el pentáculo también se ha utilizado durante toda la historia. Uno de los casos más significativos es el cuadro de Dalí, *Leda atómica*, donde la armonía de las formas se consigue por la inscripción de todas las figuras en un pentáculo regular, como se muestra en la figura 43.

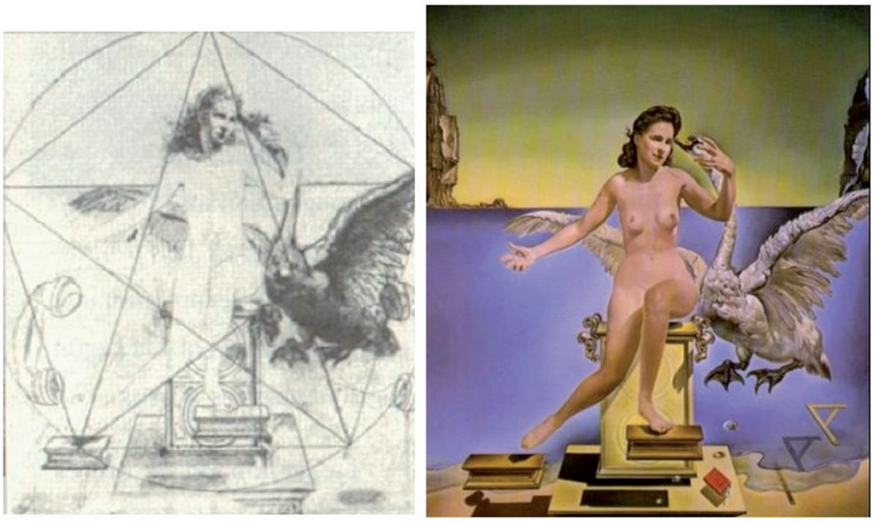


Figura 43. Representación del boceto y el cuadro *Leda atómica* de Dalí, 1949

3.2.2.4. Hexágonos

Un hexágono es un polígono determinado por una línea poligonal simple cerrada de seis segmentos. Tendrá, por tanto, seis lados, seis ángulos y seis vértices. Podemos considerar hexágonos regulares e irregulares. Aunque habitualmente se asocia la idea de este polígono a un hexágono regular, debemos tener en cuenta que existen también otros hexágonos que no lo son, tanto convexos como cóncavos (figura 44).

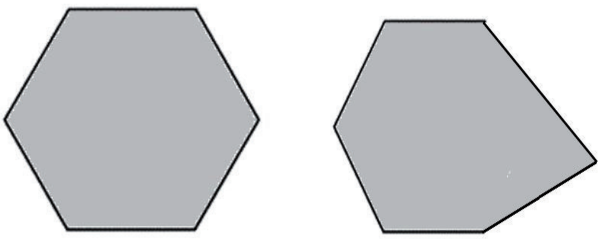


Figura 44. Representación de hexágonos: regular convexo (izquierda), irregular convexo (centro) e irregular cóncavo (derecha)

Una característica que se repite en todos los polígonos regulares es que se pueden dividir en triángulos isósceles uniendo el centro con todos los vértices del polígono. Particularmente, en el hexágono regular, estos triángulos son equiláteros (figura 45).

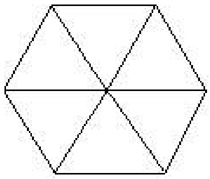


Figura 45. Representación de un hexágono dividido en triángulos equiláteros

El hexágono es un polígono con mucha presencia en la naturaleza. La imagen más común es la red de celdas de sección hexagonal que forman las abejas en los panales o las facetas de los ojos de algunos insectos (figura 46).

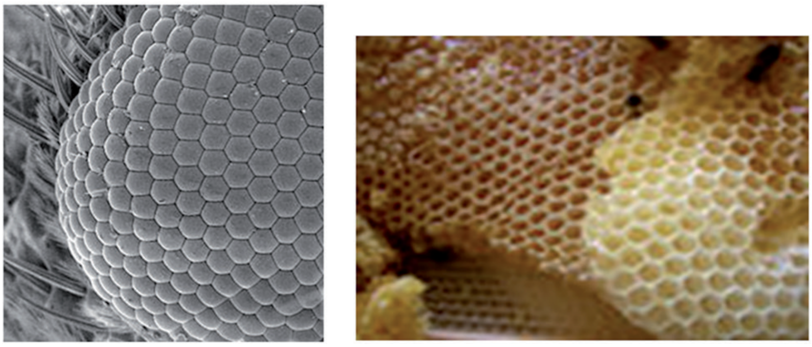


Figura 46. Representación de formas hexagonales en la naturaleza: facetas del ojo de un insecto (izquierda), panales de abejas (derecha)

En el ámbito de la química, el hexágono aparece también en muchas de las formas con las que el carbono se presenta en la naturaleza, en particular la conocida como carbono 60 que presenta una estructura tridimensional semejante a la de un balón de fútbol, como la que se muestra en la figura 47.

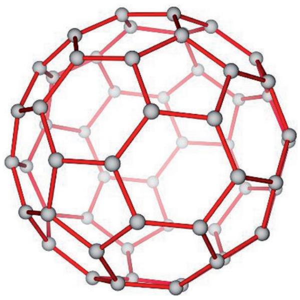


Figura 47. Representación de la estructura tridimensional del carbono 60 (imagen proporcionada por www.pdm.com.co)

Una vez estudiados ejemplos de polígonos con número par e impar de lados, es innecesario detenerse en el estudio detallado de polígonos con más lados, dado que los conceptos vistos hasta ahora se repiten de manera semejante.

3.2.3. Consideraciones sobre los polígonos

3.2.3.1 Mosaicos

Los mosaicos son imágenes compuestas por piezas que tradicionalmente han sido utilizados por el arte. Su origen se sitúa en construcciones de civilizaciones antiguas (Grecia, Roma, figura 48) y posteriormente se han encontrado también en otras culturas llegando hasta nuestros días.

Figura 48. Imagen de un mosaico romano en Carranque: La Casa de Materno (proporcionada por flickr.com)

Están compuestos por piezas de cerámica o vidrio, cuyo objetivo es formar una figura plana sin dejar ningún fragmento de superficie por cubrir. Cada una de estas piezas se llama tesela, y por esta razón los mosaicos también se conocen como teselaciones.

Matemáticamente, se han estudiado los recubrimientos del plano cuando las teselas son polígonos regulares. Las conclusiones de este estudio son:

1. Si utilizamos solo polígonos regulares de un único tipo, las redes que se pueden obtener son las que se muestran en la figura 49:

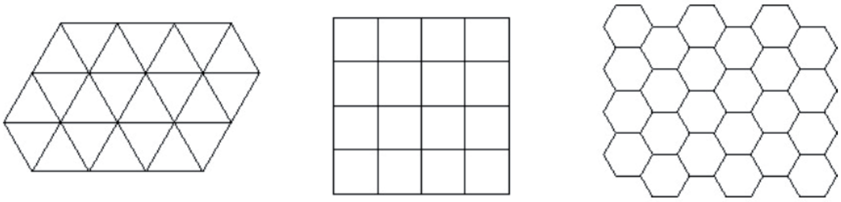


Figura 49. Redes de teselas de un solo polígono: triángulo equilátero (izquierda), cuadrado (centro) y hexágono regular (derecha)

Hay que destacar que solo se encuentran estas tres redes porque para recubrir el plano es necesario que en un punto dado los ángulos de los polígonos que concurren sumen 360º, y eso solo pasa con estos tres polígonos regulares.

2. Si se utiliza más de un tipo de polígono regular, solo se cumple la condición anterior en los casos de las combinaciones de la figura 50:

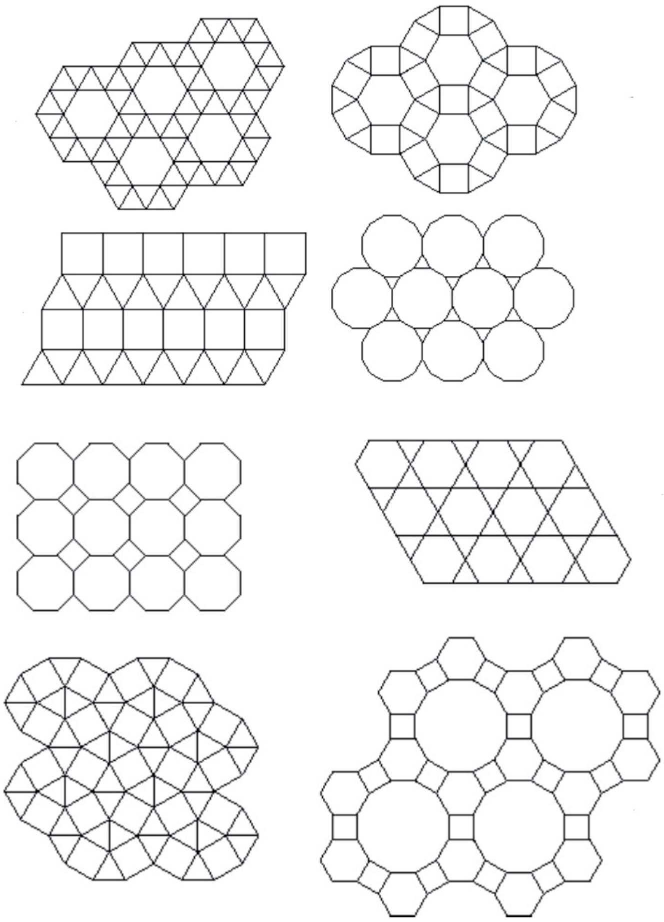


Figura 50. Redes de teselas con formas de diferentes polígonos regulares

3.2.3.2. Circunferencia circunscrita e inscrita en un polígono

Diremos que una circunferencia está circunscrita a un polígono regular cuando es exterior al polígono, y los puntos de contacto con él son sus vértices. También se puede decir que el polígono regular está inscrito en la circunferencia (figura 51).

De la misma manera, la circunferencia estará inscrita en el polígono regular cuando sea interior al polígono y los puntos de contacto de una y el otro sean el punto medio de cada lado. Podemos decir también que el polígono regular está circunscrito a la circunferencia.

En los dos casos el centro de la circunferencia y el del polígono regular coinciden.

La circunferencia está presente en la construcción de cualquier polígono regular y ha sido la herramienta usual para construirlos inscritos en ella a lo largo de la historia.

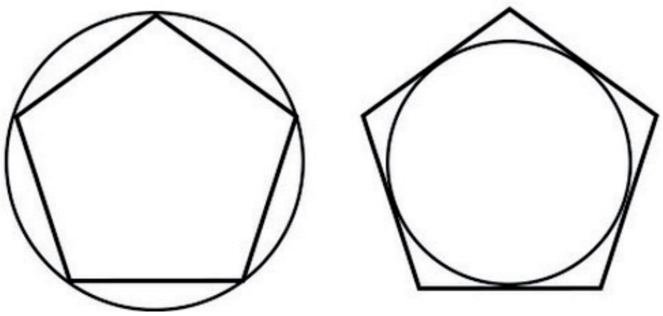


Figura 51. Representación de circunferencias: circunscrita a un pentágono (izquierda) e inscrita en un pentágono (derecha)

3.2.3.3. Polígonos regulares: simetrías

Una figura será simétrica cuando a partir de un eje de simetría se desarrolle de igual manera a cada lado de este. El eje de simetría será una recta, que no existe en la realidad, pero que podemos imaginar. Los polígonos regulares, por ser equiláteros y equiángulos, tienen igual número de ejes de simetría que de lados. Las dos figuras siguientes nos servirán para ilustrar los casos generales:

1. Cuando el número de lados es impar, el eje de simetría es la bisectriz de un ángulo interno y pasa por el punto medio del lado opuesto al vértice del ángulo. Como hay tantos ángulos como lados, el número de ejes de simetría coincide con el de lados. Un ejemplo para el caso de un triángulo equilátero, lo encontramos en la figura 52.

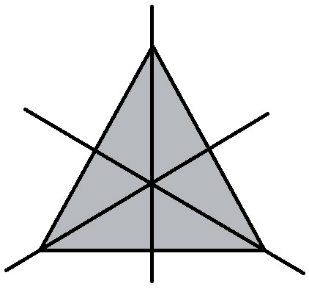


Figura 52. Representación de los ejes de simetría de un triángulo equilátero

2. Cuando el número de lados es par, hay dos tipos de ejes de simetría. Las bisectrices de los ángulos internos, que en este caso coinciden para cada par de ángulos opuestos, y las rectas que pasan por los puntos medios de lados opuestos. Por ello, el número de ejes de simetría que son bisectrices, será la mitad del número de ángulos del polígono y el número de ejes de simetría que pasan por el centro de los lados opuestos, será la mitad del número de lados. Sumando estas dos cantidades, obtendremos el número total de ejes que coincidirá nuevamente con el número de lados. Un ejemplo para el caso de un cuadrado, lo encontramos en la figura 53.

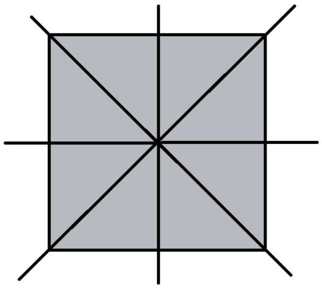


Figura 53. Representación de los ejes de simetría de un cuadrado

Cuando el polígono no es regular, no se puede garantizar el número de ejes de simetría, pero eso no niega que pueda tenerlos.

3.2.3.4. Perímetro y área de un polígono regular

Estas medidas son necesarias a la hora de estudiar los polígonos regulares. Ya se conoce el perímetro de un polígono, que en el caso de los regulares se puede calcular multiplicando el número de lados por la longitud de uno de estos, y el área, que es la medida de su superficie.

Para calcular el área de un polígono cualquiera hay que dividirlo en triángulos, y sumar las áreas de cada uno de ellos. Como ya se ha comentado en el punto 3.2.2.4, en el caso de los polígonos regulares los triángulos son iguales e isósceles. Este hecho facilita la construcción de la expresión para calcular el área de un polígono regular: $\frac{perímetro \times apotema}{2}$ donde la apotema del polígono es la altura de cada uno de los triángulos isósceles en los que se ha descompuesto (considerando los lados del polígono como bases de los triángulos).

3.2.4. Círculo

Definimos círculo como la porción del plano limitada por una circunferencia, incluyendo también esta línea. También se podría definir como el lugar geométrico de los puntos del plano, cuya distancia a un punto, llamado centro, ***C***, es menor o igual que un valor ***r***, denominado radio. Analíticamente y por analogía con el caso de la circunferencia, la ecuación del círculo que tiene como centro el punto $C(c_1, c_2)$ y como radio ***r***, es:

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 \leq r^2$$

Para calcular el área de un círculo, utilizaremos la fórmula $A = \pi \cdot r^2$.

Teniendo en cuenta las definiciones de los elementos básicos de la circunferencia incluidas en el punto 3.1.3, podemos definir algunas superficies notables relacionadas con el círculo:

- *Ángulo Central*: es el que está determinado por dos semirrectas que contienen dos radios y tiene su vértice en el centro del círculo (figura 54). Es necesario observar que hay dos ángulos centrales representados en la figura: el que se encuentra sombreado que es convexo y su conjugado que es cóncavo.

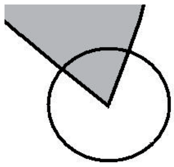


Figura 54. Representación de un ángulo central

- *Sector circular*: es la intersección de un círculo con cualquier ángulo central del mismo (figura 55). Cuando el ángulo central es un ángulo llano el sector circular es un semicírculo. Para calcular el área de esta figura usaremos: $\frac{\pi \cdot r^2 \cdot n}{360^{\text{o}}}$, donde ***n*** es el número de grados del ángulo central que determina el sector circular.

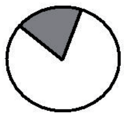


Figura 55. Representación de un sector circular

- *Segmento circular*: es la porción de círculo comprendida entre una cuerda y su arco correspondiente (figura 56). Se ve claramente que cualquier cuerda determina dos segmentos circulares, ya que sus extremos delimitan dos arcos en la circunferencia. Cuando la cuerda es un diámetro, el segmento circular se llama semicírculo, que también se puede definir como la porción de círculo comprendida entre una semicircunferencia y el diámetro que la define.

  Para calcular el área de esta figura distinguiremos dos casos: (a) cuando el sector circular asociado al segmento es convexo, tendremos que restar al área del sector la del triángulo determinado por el centro del círculo y los extremos de la cuerda; (b) cuando el sector circular asociado es cóncavo, hay que añadir a su área la de dicho triángulo.

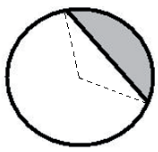


Figura 56. Representación de los dos segmentos circulares de un círculo determinados por la misma cuerda

- *Corona circular*: es la porción del plano delimitada por dos circunferencias concéntricas (figura 57), cuya área se calcula restando las de los correspondientes círculos.

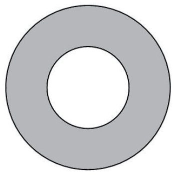


Figura 57. Representación de una corona circular

3.3. Figuras en el espacio

Como se ha comentado en el punto 3.1.1 dos rectas secantes determinan un plano. Si se considera una tercera recta no coplanaria con ellas y que sea perpendicular a las dos, aparece una nueva dimensión que completa las que ya tenía el plano. Estas tres dimensiones configuran el ente geométrico denominado espacio, que es el conjunto de todos los puntos existentes, introducido en 2.1.

Cualquier plano del espacio lo divide en dos regiones denominadas semiespacios, que incluyen el plano.

3.3.1. Ángulos en el espacio

Si consideramos dos planos en el espacio, las posiciones que pueden tener son:

1. *Planos secantes*: tienen solo una recta en común (figura 58). Analíticamente $\pi_1 \cap \pi_2 = r$.

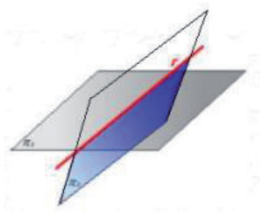


Figura 58. Representación de dos planos secantes en el espacio

2. *Planos paralelos no coincidentes*: no tienen ningún punto en común (figura 59). Analíticamente $\pi_1 \cap \pi_2 = \varphi$.

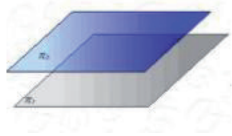


Figura 59. Representación de dos planos paralelos no coincidentes

3. *Planos paralelos coincidentes*: tienen todos los puntos en común (figura 60). Analíticamente $\pi_1 \cap \pi_2 = \pi_1 = \pi_2$.

G. Lorenzo / M. Alcalde / I. Pérez - ISBN: 978-84-16356-31-7 La geometría y la estadística en el aula de primaria - UJI - DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia109

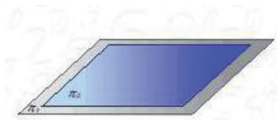


Figura 60. Representación de dos planos paralelos coincidentes

Cuando dos planos son secantes, determinan cuatro regiones en el espacio. Se denomina ángulo diedro o simplemente diedro a cada una de estas regiones, incluidos los semiplanos que las delimitan (figura 61). La recta común a los dos semiplanos se llama arista del ángulo diedro. Obtendremos la medida de este ángulo, midiendo la amplitud del ángulo plano que determinan dos semirrectas de origen común contenidas en cada uno de los semiplanos y que sean perpendiculares a la recta de intersección de estos.

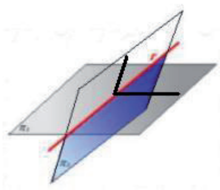


Figura 61. Representación de los elementos de un ángulo diedro

Cuando el número de planos que consideramos en el espacio es superior a dos, la cantidad de posiciones en las que nos los podremos encontrar aumenta considerablemente. Nos fijaremos únicamente en aquellas situaciones en las que todos los planos tienen solo un punto en común y consideraremos las semirrectas de origen común en ese punto, de manera que el plano determinado por cada dos semirrectas consecutivas deja a todas las demás en el mismo semiespacio. Llamaremos ángulo poliedro convexo a la intersección de todos los semiespacios determinados por los planos que cada pareja de estas semirrectas consecutivas define (figura 62).

El origen común de las semirrectas es el vértice del ángulo, cada una de estas es una arista del ángulo poliedro y la porción de superficie plana limitada por cada dos semirrectas consecutivas (el ángulo bidimensional que determinan) se llama cara del ángulo.

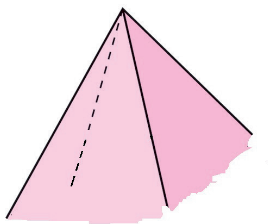


Figura 62. Representación de un ángulo poliedro

En el caso de tres planos con un punto en común, el ángulo recibe el nombre de ángulo triedro o simplemente triedro. Cuando el número de planos que determinan el ángulo, ***n***, es igual o superior a cuatro, se llamará o bien usando las raíces griegas o bien usando la expresión ángulo poliedro con ***n*** caras.

La medida de un ángulo poliedro se obtendrá sumando las amplitudes de todos los ángulos bidimensionales que determinan las parejas de aristas consecutivas del mismo. Esta medida deberá ser menor de 360º, pues si se llegara a esa cantidad de grados, la superficie que formarían las caras del ángulo poliedro sería un plano en el espacio y dejaría de limitar un ángulo poliedro.

3.3.2. Cuerpos geométricos

Además de las superficies planas, en el espacio podemos encontrar superficies que no lo son y que se llaman curvas. A diferencia de las superficies planas finitas, que siempre son abiertas, las superficies finitas curvas pueden ser abiertas o cerradas (cuando no rodean o sí rodean una zona del espacio, respectivamente).

Un cuerpo geométrico es una figura geométrica que resulta de considerar una parte del espacio limitada por una superficie cerrada simple (aquella que solo delimita una región interior en el espacio) incluyendo esta superficie. Estas figuras también se llaman sólidos.

Análogamente a superficie plana, cóncava y convexa, se podrán definir cuerpos geométricos cóncavos y convexos.

Para el trabajo que se realiza en el aula de primaria, consideraremos dos tipos de cuerpos geométricos: poliedros y cuerpos redondos. Los primeros estarán delimitados por polígonos, y los segundos por superficies curvas y/o superficies planas no poligonales.

3.3.2.1. Poliedros

Serán aquellos cuerpos geométricos limitados por superficies cerradas simples compuestas por polígonos. A cada uno de estos polígonos se le llama cara del poliedro. Los lados de los polígonos se llaman aristas del poliedro y sus vértices son también vértices del poliedro. En cada una de las aristas se forma un ángulo diedro, y en cada uno de los vértices, un ángulo poliedro.

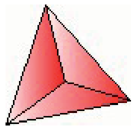
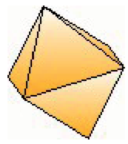
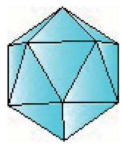
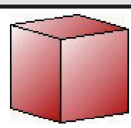
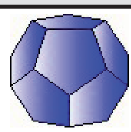
Cualquier poliedro convexo tiene, por lo menos, 4 caras, 4 vértices y 6 aristas. Un vértice de un poliedro pertenece, por lo menos, a 3 caras y a 3 aristas. En cualquier poliedro convexo se cumple la fórmula de Euler, que relaciona el número de caras (C), de vértices (V) y de aristas (A), según la expresión: $C + V = A + 2$.

Podemos clasificar los poliedros atendiendo a las siguientes características: la regularidad de sus caras, la igualdad de estas y la igualdad de los ángulos del mismo tipo que se forman en el poliedro. Obtendremos así dos clases, la de los poliedros regulares y la de los que no lo son. Si un poliedro verifica las tres condiciones anteriores diremos que es regular o platónico. Si no verifica alguna de las condiciones anteriores, diremos que es irregular. En particular, si verifica la primera y la tercera pero no la segunda, diremos que es arquimediano.

Poliedros regulares

Estudiaremos cuáles son los poliedros regulares que existen y cómo se construyen a partir de los polígonos que los delimitan.

Teniendo en cuenta que la medida de un ángulo poliedro debe ser menor de **360º** y que, como mínimo, en cada vértice deben concurrir tres caras, aparecen los siguientes sólidos platónicos:

CARAS	***Número de caras por vértice***	***Suma de los ángulos***	***Poliedro***	***Representación***
Triángulos equiláteros	3	**3 · 60º = 180º**	TETREDRO REGULAR	
	4	**4 · 60º = 240º**	OCTAEDRO REGULAR	
	5	**5 · 60º = 300º**	ICOSAEDRO REGULAR	
	6	**6 · 60º = 360º**	No existe	
Cuadrados	3	**3 · 90º = 270º**	CUBO O HEXAEDRO REGULAR	
	4	**4 · 90º = 360º**	No existe	
Pentágonos regulares	3	**3 · 108º = 324º**	DODECAE-DRO REGULAR	
	4	**4 · 108º = 432º**	No existe	
Hexágonos regulares	3	**3 · 120º = 360º**	No existe	

Y como se ve, a partir del hexágono regular no se puede formar ningún ángulo poliedro, porque la suma de tres ángulos de cualquier otro polígono regular siempre será superior a 360º y, por tanto, no se podrá determinar ningún poliedro. Entonces, solo se pueden formar poliedros regulares con triángulos equiláteros, cuadrados y pentágonos regulares.

Nos fijaremos ahora en la construcción de estos cuerpos:

Índice

Cuando son triángulos equiláteros:

A partir de la red que ya se ha estudiado de triángulos equiláteros, nos fijamos en una parte sola, la que forma un hexágono (figura 63).

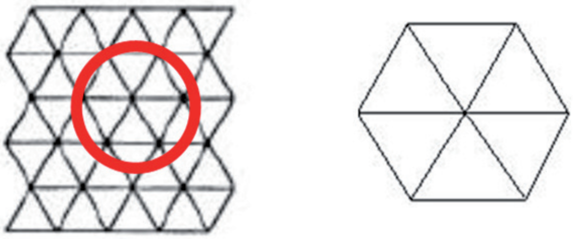


Figura 63. Representación de una red de triángulos equiláteros (izquierda)
y una selección de seis (derecha)

Está claro que este hexágono no se puede doblar para formar una figura susceptible de ser un cuerpo tridimensional (como puede verse en el cuadro anterior). Tendremos, por tanto, que quitar triángulos para poder hacerlo.

Si se elimina uno de los triángulos, entonces el cuerpo que se puede formar tendrá vértices en los que confluyan cinco caras que son triángulos equiláteros. Para completar el cuerpo regular, necesitamos quince triángulos equiláteros más, y el que se obtiene recibe el nombre de icosaedro regular (figura 64).

Figura 64. Representación de la construcción de un icosaedro regular

Si se quitan ahora dos triángulos equiláteros, el cuerpo que se puede formar tendrá vértices en los que confluyan cuatro triángulos equiláteros. Para completar el cuerpo regular, necesitamos cuatro triángulos equiláteros más, y lo que se obtiene es un octaedro regular (figura 65).

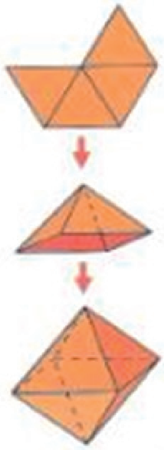


Figura 65. Representación de la construcción de un octaedro regular

Por último, si son tres los triángulos que se quitan, el cuerpo que se puede formar tendrá vértices en los que confluirán tres triángulos equiláteros. Solo necesitaremos otro para completar el cuerpo geométrico que se denomina tetraedro regular (figura 66).

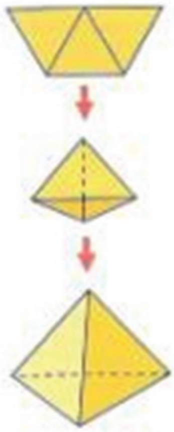


Figura 66. Representación de la construcción de un tetraedro regular

> *Nota*: En general, a cualquier poliedro cuyas caras sean todas triángulos equiláteros se le denomina deltaedro.

Cuando son cuadrados:

A partir de la red formada por cuadrados (figura 67) y tomando solo cuatro, se puede seguir un procedimiento semejante.

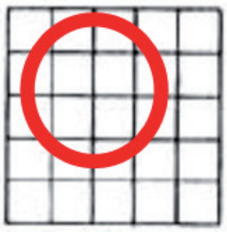


Figura 67. Representación de una red de cuadrados

Como necesitamos tres caras para conseguir un vértice, solo se puede quitar uno de los cuadrados. Necesitaremos tres cuadrados más para completar el cuerpo geométrico que se llama hexaedro regular o cubo (figura 68).

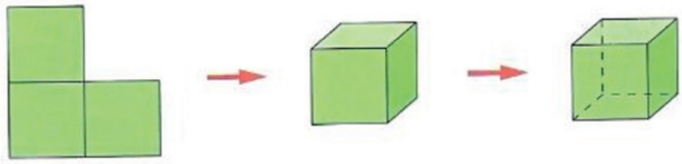


Figura 68. Representación de la construcción de un cubo

Cuando son pentágonos regulares:

En este caso no se puede partir de una red plana, no existe, ya que con pentágonos regulares no se puede recubrir el plano, pero sí que se puede formar un poliedro. Al construir el vértice haciendo coincidir tres caras en él, la suma de los ángulos que lo forman es menor de 360º, pues cada uno de los ángulos interiores de un pentágono regular mide 108º.

En este caso necesitaremos nueve pentágonos más para completar el cuerpo que se llama dodecaedro regular (figura 69).

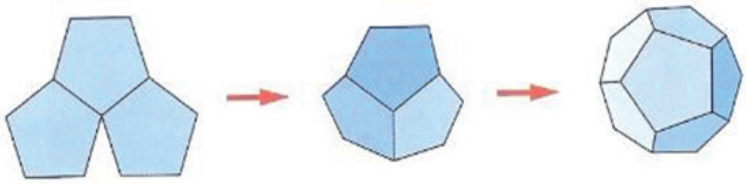


Figura 69. Representación de la construcción de un dodecaedro regular

Dentro del conjunto de todos los poliedros, encontramos unas familias muy particulares, la de los prismas y la de las pirámides, que por la gran variedad de cuerpos que contienen, serán las primeras que estudiaremos.

Prismas

Un prisma es un poliedro limitado por dos polígonos iguales y paralelos (homólogos en una traslación –véase 3.4.1.1–) y tantos paralelogramos como lados tengan aquellos (figura 70). Los polígonos mencionados se denominan caras básicas o bases y los paralelogramos, caras laterales. La altura del prisma es el segmento de la perpendicular a las dos bases comprendido entre ellas.

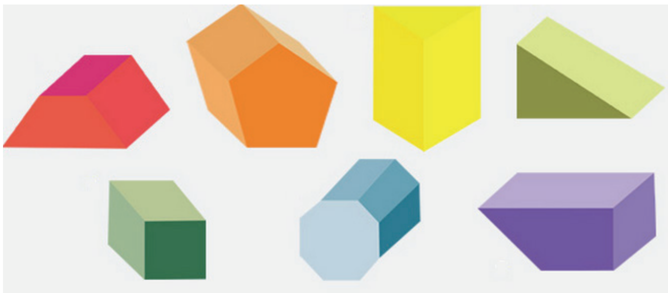


Figura 70. Representación de prismas de diferentes bases

Si las bases del prisma son polígonos cóncavos o convexos, el prisma se denomina cóncavo o convexo, respectivamente.

Si todas las caras laterales son rectángulos, serán perpendiculares a las bases y por eso se le llama prisma recto. Si las caras laterales no son perpendiculares a las bases, se denomina prisma oblicuo (figura 71).

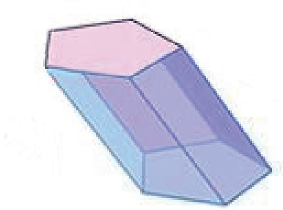


Figura 71. Representación de un prisma oblicuo

Si las bases de un prisma recto son polígonos regulares, el prisma se denomina regular.

Las aristas laterales de un prisma son segmentos iguales y paralelos entre sí. En los prismas rectos son perpendiculares a las bases.

Según que las bases sean triángulos, cuadriláteros, pentágonos... el prisma se denomina triangular, cuadrangular, pentagonal...

El desarrollo plano de un prisma es el resultado de desplegar y colocar sobre un plano todas sus caras de modo que cada dos contiguas estén unidas por una arista. Veamos, por ejemplo, en la figura 72, el caso de un prisma regular hexagonal.

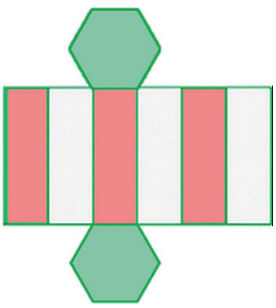


Figura 72. Representación del desarrollo plano de un prisma regular hexagonal
(imagen proporcionada por narceaeduplastica.weebly.com)

Es importante destacar que la expresión «desarrollo plano de un cuerpo geométrico» se refiere solo al de la superficie que limita el cuerpo y no al del cuerpo completo que es sólido y macizo y que, evidentemente, no se puede desarrollar en un plano.

Paralelepípedos:

Un paralelepípedo es un prisma cuyas caras son todas paralelogramos. Cada dos caras opuestas son iguales (figura 73).

Si las bases son cuadrados, este paralelepípedo sería un prisma cuadrangular, ya mencionado antes.

Si todas las caras son rectángulos, se le llama ortoedro. Si son cuadrados, se le llama hexaedro regular o cubo, también mencionado antes. Si son rombos, se le llama romboedro.

Figura 73. Representación de un ortoedro

Para calcular el área total de un prisma, hay que sumar el área de las dos bases y el área lateral (suma de las áreas de las caras laterales). Con esta idea, calcularemos también el área total de un ortoedro y de un cubo.

Por lo que respecta al volumen, tendremos que calcular solo el área de una de las bases y multiplicarla por la altura.

Pirámides

Una pirámide es un poliedro que tiene como cara básica o base un polígono cualquiera, y como caras laterales triángulos con un vértice común, que se denomina vértice, cúspide o ápice de la pirámide. La altura es el segmento de la perpendicular a la base trazada por el vértice de la pirámide, que tiene por extremos el propio vértice y la intersección de esta perpendicular con el plano que contiene la base de la pirámide.

Si la base de la pirámide es un polígono cóncavo o convexo la pirámide se denomina cóncava o convexa, respectivamente.

Si las caras laterales son triángulos isósceles (pueden ser también equiláteros), la pirámide se llama recta. En caso contrario, será oblicua (figura 74).

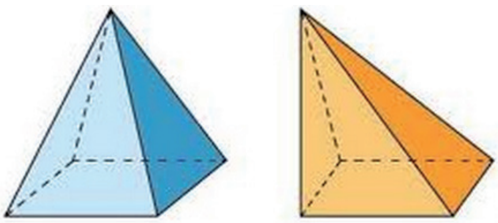


Figura 74. Representación de una pirámide cuadrangular recta (izquierda) y de una oblicua (derecha)

Si la base de una pirámide recta es un polígono regular, esta se denomina pirámide regular. El vértice de la pirámide regular se proyecta sobre el centro de su base.

En una pirámide regular todas las aristas laterales son de la misma longitud y las caras laterales son triángulos isósceles iguales. Las alturas de los triángulos se denominan apotemas de la pirámide.

Según las bases sean triángulos, cuadriláteros, pentágonos, etc., la pirámide se denomina triangular, cuadrangular, pentagonal...

Vemos en la figura 75 un ejemplo del desarrollo plano de una pirámide regular cuadrangular:

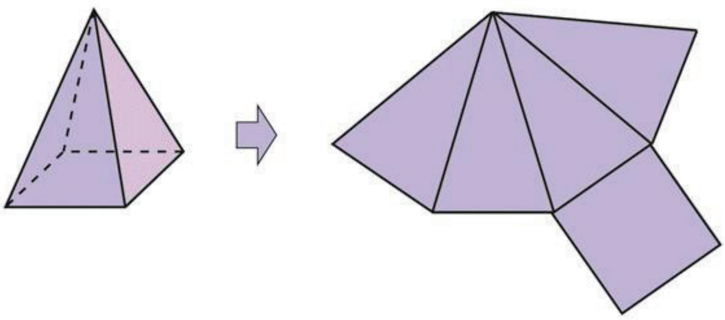


Figura 75. Representación del desarrollo plano de una pirámide cuadrangular

Por lo que respecta al área total de la pirámide, hay que sumar el área de la base y el área lateral (suma de las áreas de las caras laterales).

En el caso del volumen de la pirámide, habrá que multiplicar por $\frac{1}{3}$ el volumen de un prisma que tenga su misma altura y cuyas bases sean polígonos iguales a la base de la pirámide.

Tronco de pirámide

Cuando se trunca una pirámide por un plano paralelo al de la base, el cuerpo comprendido entre los dos planos se denomina tronco de pirámide (figura 76).

Un tronco de pirámide recta tiene dos bases que son polígonos semejantes (homólogos en una semejanza –véase 3.3.2.4–). La altura del tronco es el segmento de la perpendicular a los planos que contienen las dos bases, comprendido entre estas. Si la pirámide es regular, el tronco de pirámide correspondiente también se llama regular. Las caras laterales son trapecios isósceles iguales. La altura de cada uno de ellos se denomina apotema del tronco de pirámide.

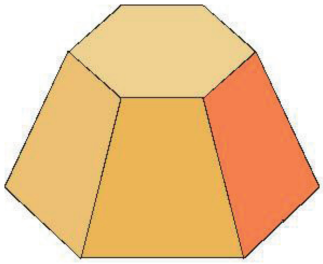


Figura 76. Representación de un tronco de pirámide regular hexagonal

Por lo que respecta al área total del tronco de pirámide, hay que sumar las áreas de las bases y el área lateral (suma de las áreas de las caras laterales). Si lo que se quiere calcular es el volumen, se tienen que observar los datos proporcionados y, si es necesario, se deberá usar el teorema de Thales para obtener este volumen como la diferencia entre el volumen de la pirámide completa y el de la que se quita para conseguir el tronco.

3.3.2.2. Cuerpos redondos

Son aquellos cuerpos geométricos limitados por superficies cerradas simples en las que todas las caras sean superficies curvas y/o planas no poligonales.

Aunque existen muchos cuerpos de este tipo, nos interesaremos particularmente por aquellos que derivan del círculo o que contienen círculos entre las superficies que los delimitan.

Empezaremos hablando de los cuerpos de revolución que son los sólidos que resultan al girar una figura plana alrededor de un eje, denominado eje de revolución. Dependiendo de cómo sea esta figura, se obtendrán diferentes cuerpos. Estudiaremos a continuación los más representativos para el aula de primaria: el cilindro y el cono rectos, y la esfera.

Cilindro

Si se hace girar una recta denominada generatriz, alrededor de un eje paralelo a ella, se genera una superficie infinita, en forma de tubo, que denominamos superficie cilíndrica circular recta.

El cilindro circular recto, a partir de ahora cilindro recto, es el cuerpo geométrico que se obtiene al hacer girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados, o bien el cuerpo que queda delimitado al cortar una superficie cilíndrica por dos planos paralelos entre sí y perpendiculares al eje de revolución. La intersección de los planos con la superficie cilíndrica da lugar a dos circunferencias que determinan dos círculos.

Estos dos círculos son las bases del cilindro y a la superficie cilíndrica comprendida entre ellas se le llama superficie o cara lateral del cilindro. La altura, ***h***, es el segmento de la perpendicular a los planos que contienen las bases comprendido entre estos, y el radio de las bases es el radio del cilindro, ***r***.

De manera análoga a los poliedros, podemos obtener el desarrollo plano de un cuerpo redondo. En la figura 77 se muestra un cilindro recto y su desarrollo plano:

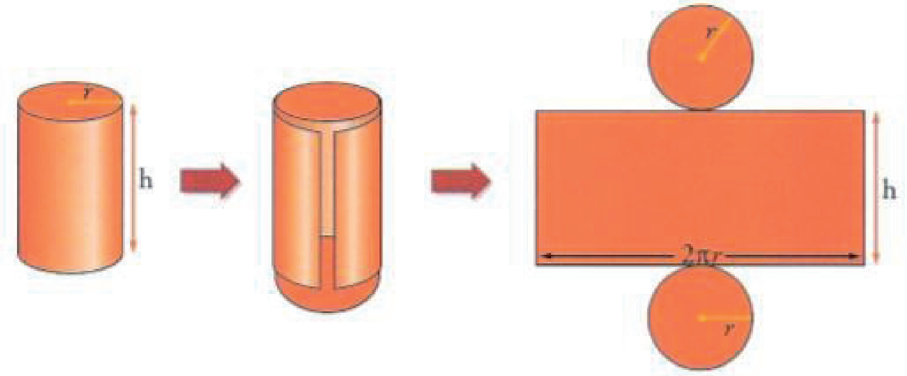


Figura 77. Representación de un cilindro recto y su desarrollo plano

Los cálculos de las medidas de la superficie y el volumen de estos cuerpos se realizarán de acuerdo con las indicaciones que a continuación se especifican.

Si lo que se desea es calcular el área total, habrá que sumar el área lateral y el área de las bases, según las expresiones:

- Área lateral: $\mathbf{2 \cdot \pi \cdot r \cdot h}$
- Área bases: $\mathbf{2 \cdot \pi \cdot r^2}$

Si lo que se desea es calcular el volumen, habrá que multiplicar el área de una base por la altura; así, la expresión será: $\mathbf{\pi \cdot r^2 \cdot h}$.

Cuando la generatriz del cilindro circular no es perpendicular a las bases, el cilindro se llama oblicuo, como se muestra en la figura 78.

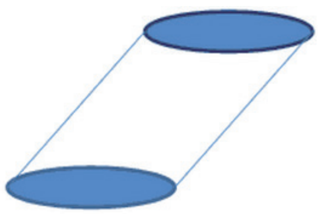


Figura 78. Representación de un cilindro oblicuo

Se puede extender la idea de cilindro, tanto recto como oblicuo, a otros cuerpos redondos cuyas bases no son círculos, sino superficies planas que pueden estar delimitadas por elipses u otro tipo de líneas curvas cerradas planas (figura 79).

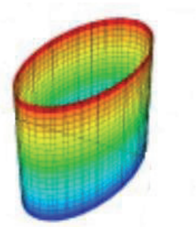


Figura 79. Representación de un cilindro elíptico

La superficie cilíndrica también se puede entender como la superficie generada por una recta que se desplaza paralela a sí misma y tangente a una línea curva cerrada que se denomina directriz.

Cono

Si hacemos girar una recta, denominada generatriz, alrededor de un eje, al que corta, se genera una superficie infinita, en forma de dos cucuruchos con el vértice común, que denominamos superficie cónica.

Si hacemos girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos, obtenemos un cuerpo geométrico llamado cono circular recto, o simplemente, cono recto. También podemos conseguir este cuerpo si consideramos el espacio que queda delimitado al cortar la superficie cónica anterior por su vértice y por un plano perpendicular al eje de revolución. La intersección de este plano con la superficie cónica da lugar a una circunferencia que determina un círculo.

Este círculo es la base del cono y a la superficie cónica comprendida entre ella y el vértice se le llama superficie o cara lateral del cono. El segmento de la generatriz comprendido entre el vértice y la base es la generatriz del cono, ***g***. La altura, ***h***, es el segmento de la perpendicular al plano que contiene la base del cono trazada por el vértice y comprendido entre este y dicho plano. El radio de la base es el radio del cono, ***r***. En el caso de los conos rectos, la altura une el vértice con el centro del círculo de la base.

De manera análoga al cilindro, podemos obtener el desarrollo plano de un cono, como se muestra en la figura 80:

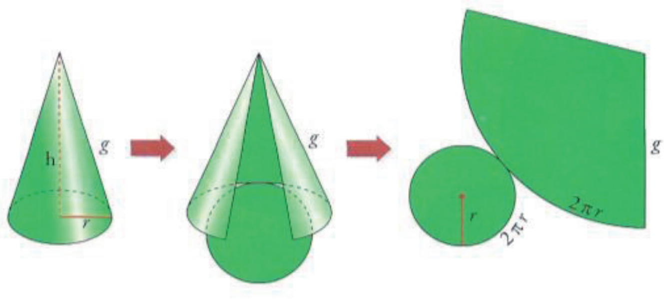


Figura 80. Representación de un cono circular recto y su desarrollo plano

Los cálculos de las medidas de la superficie y el volumen de estos cuerpos se realizan de acuerdo con las indicaciones que a continuación se especifican.

Si se quiere calcular el área total, habrá que sumar el área lateral y el área de la base, según las expresiones:

- Área lateral: $\pi \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{g}$
- Área base: $\pi \cdot \mathbf{r^2}$

Análogamente al caso del volumen de la pirámide, para calcular el de un cono se tiene que multiplicar por $\frac{1}{3}$ el volumen de un cilindro que tenga la misma altura que este y cuyas bases sean círculos iguales a la base del cono. Es decir: $\mathbf{1/3} \cdot \pi \cdot \mathbf{r^2} \cdot \mathbf{h}$.

Cuando el plano que contiene la base del cono circular no es perpendicular al eje de revolución, el cono se llama oblicuo (figura 81). En este caso, la altura del cono no pasa por el centro de la base.

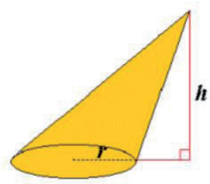


Figura 81. Representación de un cono oblicuo

Se puede extender la idea de cono, tanto recto como oblicuo, a otros cuerpos redondos cuya base no es un círculo, sino una superficie plana que puede estar delimitada por elipses u otro tipo de líneas curvas cerradas planas.

La superficie cónica también se puede entender como la superficie generada por una recta que se desplaza manteniendo fijo uno de sus puntos y de manera tangente a una línea curva cerrada que se denomina directriz.

Tronco de cono

Si se corta un cono por un plano paralelo al que contiene a la base, el cuerpo geométrico comprendido entre los dos planos, se denomina tronco de cono (figura 82).

El tronco de cono recto es un cuerpo de revolución que se genera haciendo girar un trapecio rectángulo alrededor del lado perpendicular a las bases. Tiene dos caras básicas circulares y la altura es el segmento de la perpendicular a los planos que contienen las bases comprendido entre estos. La generatriz, ***g***, es el segmento que ha generado la superficie lateral y, por tanto, es el lado del trapecio no perpendicular a las bases.

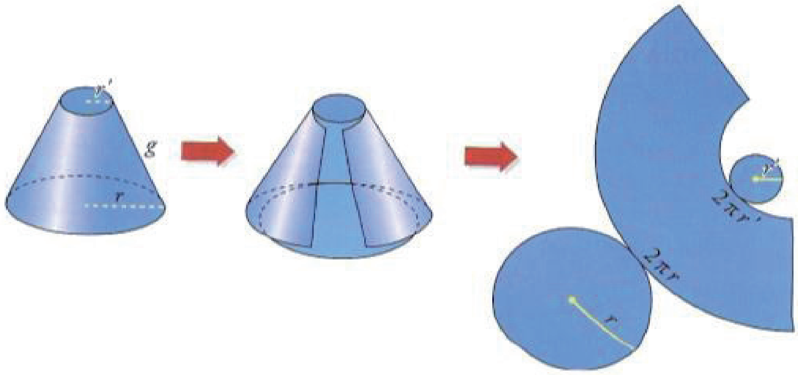


Figura 82. Representación de un tronco de cono recto y su desarrollo plano

Para calcular el área total se tienen que sumar el área lateral y el área de las bases, según las expresiones:

- Área lateral: $\pi \cdot \mathbf{(r + r') \cdot g}$
- Área de las bases: $\pi \cdot \mathbf{r^2} + \pi \cdot \mathbf{(r')^2}$

Si lo que se quiere calcular es el volumen, se tienen que observar los datos proporcionados y, si es necesario, se deberá usar el teorema de Thales para obtenerlo como la diferencia entre el volumen del cono que se trunca y el del que se quita para conseguir el tronco de cono.

Esfera

La esfera se genera haciendo girar un semicírculo alrededor de un eje que contiene al diámetro que lo determina. También se podría definir como el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia a un punto denominado centro es menor o igual que un valor ***R*** llamado radio.

La superficie de la esfera, llamada superficie esférica, se genera al hacer girar una semicircunferencia alrededor del diámetro. Solo se puede desarrollar sobre el plano aproximadamente, pero no de manera exacta. No obstante, se puede medir el área mediante una fórmula sencilla: $\mathbf{4} \cdot \pi \cdot \mathbf{R^2}$.

Curiosamente, si imaginamos un cilindro que se ajusta por completo a la esfera, el área lateral de este cilindro es $\mathbf{2\pi R \cdot 2R = 4} \cdot \pi \cdot \mathbf{R^2}$ y coincide con la expresión anterior (figura 83).

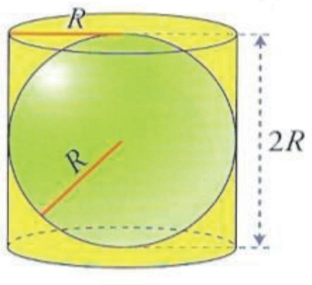


Figura 83. Representación de una esfera ajustada por un cilindro circular recto

Por lo que respecta al volumen, este coincide con las dos terceras partes del volumen del cilindro $\mathbf{2/3 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot 2R = 4/3 \cdot \pi \cdot R^3}$.

A continuación se definen algunas figuras derivadas de la esfera y la superficie esférica.

Llamamos casquete esférico (figura 84) a cada una de las dos partes de la superficie esférica que resultan de cortarla con un plano. Si lo que se corta es una esfera, las dos partes resultantes se llaman segmentos esféricos de una base. Si el plano secante pasa por el centro, obtendríamos respectivamente, dos semisuperficies esféricas o dos semiesferas.

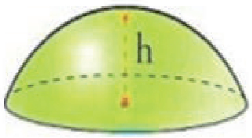


Figura 84. Representación de un casquete esférico

A la porción de superficie esférica comprendida entre dos planos paralelos que la cortan, se le llama zona esférica (figura 85). Si lo que se corta es una esfera, la figura resultante se llama segmento esférico de dos bases.

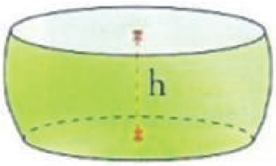


Figura 85. Representación de una zona esférica

Si se considera un ángulo diedro, cuya arista contiene el diámetro de la esfera, su intersección con la superficie esférica se llama huso esférico. La intersección con la esfera se llama cuña esférica (figura 86).

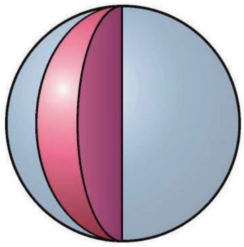


Figura 86. Representación de una cuña esférica

3.4. Transformaciones geométricas en el plano

Como ya se ha explicado en el punto 2.2, una transformación geométrica es una aplicación biyectiva del espacio en sí mismo que a una figura geométrica le hace corresponder otra. En este apartado se trabajarán algunas de las transformaciones geométricas planas que se pueden definir. Concretamente se verán las isometrías y las transformaciones equiformes en el plano.

3.4.1. Movimientos rígidos o isometrías

Un movimiento rígido o isometría es una transformación geométrica que conserva las dimensiones de las figuras. Dicho de otra manera, es una transformación que cumple la siguiente condición: la distancia entre los puntos de la figura original es la misma que la que hay entre sus correspondientes homólogos en la figura transformada. Cuando dos figuras son homólogas por una isometría se dice que son congruentes.

3.4.1.1. Traslaciones

Una traslación de vector $\vec{v}$, $T_{\vec{v}}$ es un movimiento rígido en el plano según el cual todos sus puntos se desplazan siguiendo este vector, que se llama vector de traslación.

Para ver el comportamiento de estas transformaciones, trabajamos con el ejemplo de la figura 87, en el que la traslación está determinado por el vector libre $\vec{v} = \overrightarrow{AA'}$.

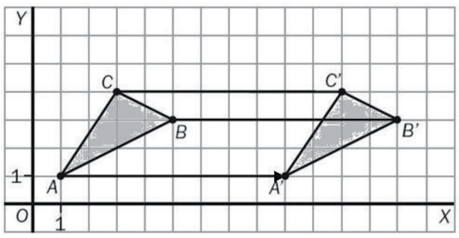


Figura 87. Representación de dos triángulos homólogos por una traslación

En este caso $T_{\vec{v}}(A) = A'$ y la figura homóloga del triángulo ***ABC*** es el triángulo ***A'B'C'***, es decir, $T_{\vec{v}}(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$. Se puede comprobar también que ***d(A,C) = d(A',C')***, ***d(A,B) = d(A',B')*** y ***d(B,C) = d(B',C')***, o lo que es lo mismo, se conservan las distancias, por tanto, es una isometría.

Como se ve en la figura 87, el sentido de orientación del plano que determinan los puntos ***A***, ***B*** y ***C*** es el mismo que el determinado por sus respectivos homólogos ***A'***, ***B'*** y ***C'***, es decir, la traslación es una isometría que conserva el sentido de orientación del plano. Por esta razón las traslaciones se denominan movimientos directos.

Cuando el vector $\vec{v} = \mathbf{0}$ la traslación es la transformación identidad, y entonces para cualquier punto ***P*** del plano: $T_o(P) = P$.

3.4.1.2. Giros o rotaciones

Un giro o rotación de centro ***O*** y ángulo α, $G_{O,\alpha}$ es un movimiento rígido en el plano según el cual un punto cualquiera de este ***P*** distinto de ***O***, se transforma en otro punto ***P'*** de manera que $\widehat{POP'} = \alpha$, ***d(O,P)= d(O,P')*** y el centro de giro ***O*** es un punto fijo que se transforma en él mismo: $G_{O,\alpha}(O) = O$.

El ángulo de giro viene determinado por su amplitud y un sentido de giro. Este sentido será negativo cuando coincida con el movimiento de las agujas del reloj y positivo en caso contrario.

Para ver un ejemplo de giro, trabajamos con la figura 88, en la que el centro de giro es el origen de coordenadas y el ángulo de giro es α = **+ 90º.**

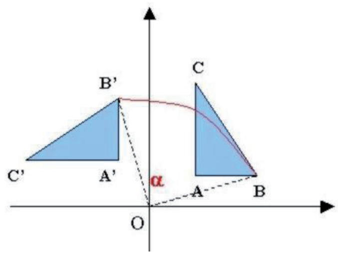


Figura 88. Representación de dos triángulos homólogos por un giro

En este caso $G_{O,+90^\circ}(B) = B'$ y la figura homóloga del triángulo ***ABC*** es el triángulo ***A'B'C'***, es decir, $G_{O,+90^\circ}(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$. Se puede comprobar también que ***d(A,C) = d(A',C'), d(A,B) = d(A',B')*** y ***d(B,C) = d(B',C')***, lo que quiere decir que se conservan las distancias, por tanto es una isometría.

Como se ve en la figura 88, el sentido de orientación del plano que determinan los puntos ***A***, ***B*** y ***C*** es el mismo que el determinado por sus respectivos homólogos ***A'***, ***B'*** y ***C'***, es decir, el giro es una isometría que conserva el sentido de orientación del plano. Por esta razón los giros se denominan también movimientos directos.

Cuando el ángulo es **0º** el giro es la transformación identidad, y para cualquier punto ***P*** del plano: $G_{O,0^\circ}(P) = P$.

Y cuando el ángulo es **180º**, el giro se denomina simetría central: $G_{O,180^\circ} = S_O$. Un ejemplo de estas transformaciones se ve en la figura 89, en la que **O** es el punto (0,+1).

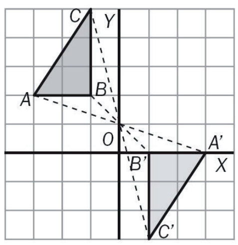


Figura 89. Representación de dos triángulos homólogos por una simetría central (giro de 180º)

3.4.1.3. Simetrías axiales

Una simetría axial de eje ***e***, S_e es un movimiento rígido en el plano en el que un punto de este ***P***, exterior a la recta ***e***, se transforma en otro punto ***P'*** de manera que la recta ***e*** es la mediatriz del segmento $\overline{PP'}$ y cualquier punto ***Q*** del eje de simetría se transforma en él mismo, $S_e(Q) = Q$, es decir, el eje de simetría es homólogo de sí mismo, $S_e(e) = e$.

Para ver un ejemplo de simetría axial, trabajamos con la figura 90, en la que el eje de simetría es la recta vertical ***e***.

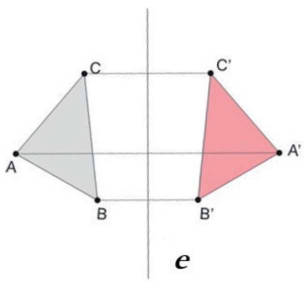


Figura 90. Representación de dos triángulos homólogos por una simetría axial

En este caso $S_e(A) = A'$ y la figura homóloga del triángulo ***ABC*** es el triángulo ***A' B'C'***, es decir, $S_e(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$. Se puede comprobar que ***d(A,C) = d(A',C')***, ***d(A,B) = d(A',B')*** y ***d(B,C) = d(B',C')***, o lo que es lo mismo, se conservan las distancias, por lo tanto es una isometría.

Como se ve en la figura 90, el sentido de orientación del plano que determinan los puntos ***A***, ***B*** y ***C***, es el contrario del determinado por sus respectivos homólogos ***A'***, ***B'*** y ***C'***. La simetría axial es, pues, un movimiento que cambia el sentido de orientación del plano. Por esta razón las simetrías axiales se denominan movimientos inversos.

3.4.1.4. Composición de movimientos en el plano

Si aplicamos sucesivamente dos movimientos a una figura geométrica plana obtenemos como resultado una figura congruente con la primera. Diremos que estas dos figuras son homólogas mediante una composición de movimientos. Intuitivamente lo que se está haciendo es desplazar y girar la figura original, o desplazarla dos veces, o girarla y después desplazarla...

Cuando componemos dos simetrías axiales obtenemos como resultado traslaciones o giros según los ejes de las simetrías sean, respectivamente, paralelos o secantes. Podemos observar estas composiciones en la figura 91.

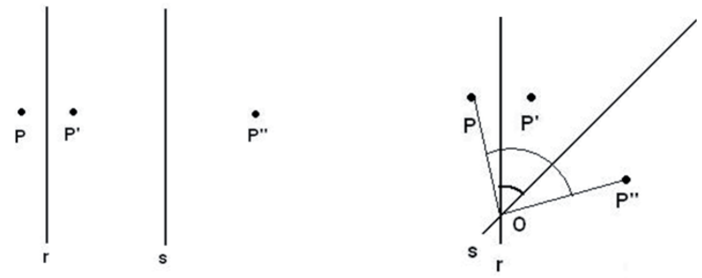


Figura 91. Representación de dos composiciones de simetrías axiales: ejes paralelos (izquierda) y ejes secantes (derecha)

En el caso de los ejes paralelos, el punto ***P*** se ha trasladado a ***P”***, de acuerdo con el vector de traslación $\vec{PP''}$, que viene determinado por su dirección, perpendicular a los ejes de las simetrías, por su sentido, origen ***P*** y extremo ***P”***, y por su módulo $\left|\vec{PP''}\right| = 2 \cdot d(r,s)$.

Si los ejes se cortan en el punto **O** formando un ángulo agudo α, el punto ***P*** se ha transformado en ***P”***, según un giro de centro **O** y de ángulo $P\hat{O}P'' = 2 \cdot \alpha$.

3.4.2. Transformaciones equiformes

Una transformación geométrica equiforme es aquella que transforma una figura en otra de la misma forma y dimensiones proporcionales a las de la original. Cuando dos figuras son homólogas por una transformación equiforme se dice que son semejantes.

3.4.2.1. Proporcionalidad de segmentos

Dados dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, definimos razón entre ellos como la razón numérica entre sus respectivas longitudes, calculadas respecto de una unidad de medida común. Es decir, $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{d(A,B)}{d(C,D)}$.

Si tenemos dos parejas de segmentos, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$, diremos que son proporcionales si las razones entre los segmentos de cada par son iguales, es decir, $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{RS}}$. A este valor se le denomina razón de proporcionalidad entre los pares de segmentos.

3.4.2.2. Teorema de Tales

Una aplicación directa de la definición de proporcionalidad entre segmentos que acabamos de ver es el conocido teorema de Thales: «Si tres rectas paralelas **a, b** y **c** cortan a dos rectas secantes **r** y **r'**, los segmentos que se determinan en ellas son proporcionales». Una representación geométrica de este teorema se ofrece en la figura 92.

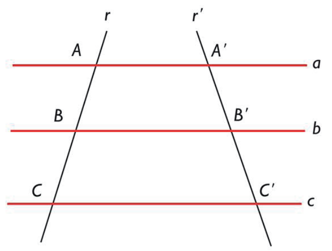


Figura 92. Representación geométrica del teorema de Tales

De la representación anterior, se desprende la siguiente relación entre las longitudes de los segmentos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

Este teorema es muy importante para trabajar la semejanza de figuras en general y en particular la de triángulos.

3.4.2.3. Homotecias

Una homotecia de centro ***O*** y razón $k \in R$, $\boldsymbol{H_{O,k}}$ es una transformación geométrica en el plano en la que uno cualquiera de sus puntos ***P,*** distinto de ***O***, se transforma en otro punto ***P'***, situado sobre la recta ***OP*** tal que $\overline{OP'} = k \cdot \overline{OP}$ y el punto ***O*** permanece fijo.

Como se observa en la figura 93, $\boldsymbol{H_{O,k}(A) = A'}$ y como $k > 0$ el punto ***A'*** pertenece a la semirrecta ***OA***. La figura homóloga del pentágono **ABCDE** es el pentágono **A'B'C'D'E'**.

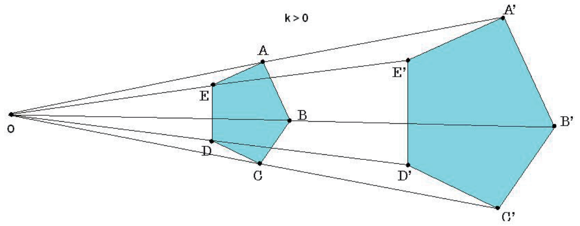


Figura 93. Representación de dos pentágonos homólogos por una homotecia de razón positiva

Análogamente, si ***k* < *0*** el punto ***A'*** pertenece a la semirrecta opuesta a ***OA***, como se observa en la figura 94.

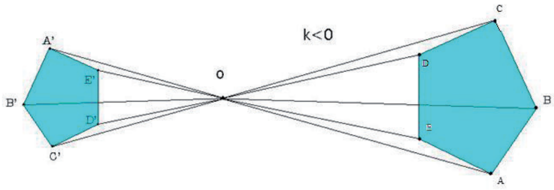


Figura 94. Representación de dos pentágonos homólogos por una homotecia de razón negativa

Cabe resaltar que si $|k| > 1$ las longitudes que se pueden medir en la figura homóloga son proporcionalmente mayores que las correspondientes de la figura original; es decir, la figura homóloga es una ampliación de la original.

Si $0 < |k| < 1$ las longitudes de la figura homóloga son proporcionalmente menores que las correspondientes de la figura original; es decir, la figura homóloga es una reducción de la original.

En las figuras anteriores se puede ver una ampliación, en el primer caso, y una reducción en el segundo.

3.4.2.4. Semejanzas

Una semejanza es una transformación geométrica en el plano que resulta de la composición de una homotecia y un movimiento rígido o al revés.

Como ya se ha comentado, dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma y las dimensiones de los segmentos homólogos son proporcionales (figura 95).

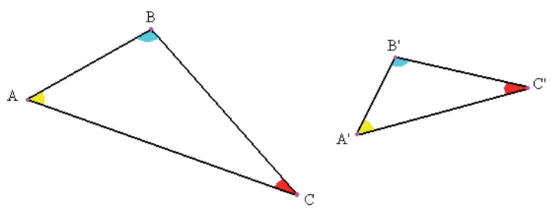


Figura 95. Representación de dos triángulos semejantes

De esta definición se deduce que cualquier homotecia es una semejanza en la que el movimiento rígido utilizado en la composición de transformaciones es la identidad.

Del mismo modo se puede deducir también que un movimiento es una semejanza cuya homotecia es de razón +1.

3.5. Transformaciones geométricas en el espacio

Todas las transformaciones vistas en el plano tienen sus correspondientes en el espacio.

La definición de traslación espacial es idéntica a la que se ha dado para el caso del plano, teniendo en cuenta que las figuras y los vectores son tridimensionales.

La definición de giro en el espacio es análoga a la de giro en el plano, con la diferencia que, en el espacio, se gira alrededor de un eje que se mantiene fijo, en lugar de girar alrededor de un punto.

Una simetría axial en el espacio es un giro espacial cuyo eje es el de la simetría y la amplitud del ángulo de giro es de 180º.

La definición de homotecia espacial es análoga a la que se ha dado para el caso del plano, teniendo en cuenta que las figuras son tridimensionales.

La definición de semejanza espacial es idéntica a la que se ha dado para el caso del plano, teniendo también en cuenta que las figuras son tridimensionales.

Como la simetría especular en el espacio es una transformación que no procede de la generalización al mismo de ninguna transformación plana, vamos a tratarla de manera más detallada.

3.5.1. Simetría especular

Una simetría especular respecto del plano π, S_π, es una transformación geométrica en el espacio según la cual un punto de este, ***A***, exterior al plano π, se transforma en otro punto ***A’*** de manera que π es el plano «mediatriz» del segmento $\overline{AA'}$ y cualquier punto ***Q*** del plano de simetría se transforma en él mismo, $S_\pi(Q)=Q$; es decir, el plano de simetría es homólogo de sí mismo, $S_\pi(\pi)=\pi$. Un ejemplo de simetría especular lo encontramos en la figura 96.

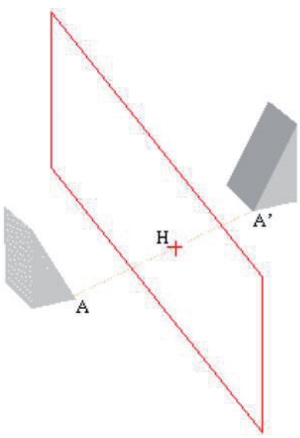


Figura 96. Representación de dos prismas triangulares homólogos por una simetría especular

4. Capacidades a desarrollar en el aula de primaria

4.1. Listado de capacidades

El trabajo en educación primaria, referente al bloque de geometría, tiene como objetivo contribuir a desarrollar en el alumnado las capacidades que se expresan en la siguiente lista, cuya finalidad es favorecer la adquisición de la competencia matemática de los niños y las niñas y servir de ayuda para el resto de competencias de esta etapa educativa.

1. Aplicar las nociones de orientación espacial a la situación del propio cuerpo y de los objetos.
2. Recorrer, organizar y dibujar trayectos y laberintos, usando el vocabulario adecuado. Interpretar y representar croquis y planos sencillos. Escalas.
3. Reconocer y reproducir el orden espacial: lineal y cíclico.
4. Adquirir intuitivamente las nociones de punto, línea, superficie y espacio y reconocerlas en su entorno.
5. Líneas y superficies abiertas y cerradas. Profundizar en las nociones «dentro» y «fuera», relacionándolas con los conceptos de frontera y región.
6. Líneas rectas y curvas. Posiciones de la línea recta. Paralelismo y perpendicularidad de rectas.
7. Distinguir y construir superficies planas y curvas.
8. Identificar, construir y dibujar ángulos en el plano. Clasificación y posiciones de los ángulos.
9. Localización de puntos en el plano utilizando coordenadas cartesianas. Puntos cardinales y referencias en mapas.
10. Distinguir, construir y representar líneas poligonales abiertas y cerradas.
11. Identificar, describir, construir y dibujar polígonos. Reconocer sus elementos básicos: lados, vértices, bases, diagonales, ángulos. Clasificar polígonos.
12. Clasificaciones de triángulos y cuadriláteros.
13. Relaciones entre los lados y entre los ángulos de un triángulo.
14. Identificar, describir, construir y dibujar circunferencias y círculos. Reconocer sus elementos básicos: centro, radio, diámetro.
15. Posiciones relativas de circunferencias y círculos con rectas: tangente, secante, cuerda, arco y sector circular.
16. Medida del contorno y de la superficie de figuras geométricas planas: perímetro y área.
17. Identificar, describir y construir poliedros y cuerpos redondos. Reconocer sus elementos básicos: aristas, vértices, bases, caras laterales. Clasificar cuerpos geométricos.
18. Componer y descomponer figuras planas y cuerpos geométricos. Completar rompecabezas, puzles, mosaicos, maquetas...
19. Adquirir nociones de transformaciones geométricas: simetrías, giros, traslaciones, semejanzas. Identificarlas en el entorno familiar y en la naturaleza. Componer y dibujar figuras simétricas.

4.2. Desarrollo de las capacidades

El objetivo de este apartado es trabajar algunos de los contenidos geométricos presentados en la parte teórica, de manera que los niños y las niñas puedan asimilarlos naturalmente, identificándolos y reconociéndolos a partir de su observación en la realidad y de su manipulación, construcción y representación.

Como criterio general, con el trabajo se perseguirá que el alumnado pueda verbalizar e intercambiar información sobre todos estos conceptos, así como utilizar un vocabulario claro y preciso que determine inequívocamente cada uno de los objetos matemáticos estudiados. Se considera también como referente los niveles y las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele (Van Hiele, 1957; 1986).

1. *Aplicar las nociones de orientación espacial a la situación del propio cuerpo y de los objetos*

Esta capacidad se considera el primer paso para conocer el espacio y relacionarse con él. Se pretende encontrar respuestas a las siguientes preguntas que la realidad nos plantea: ¿dónde nos encontramos? ¿dónde se encuentran los otros elementos en el espacio?

Se hace necesario, por lo tanto, conocer las diferentes posiciones espaciales que puede ocupar cualquier persona u objeto en un contexto determinado. Insistiremos en los tres niveles de dificultad trabajados en educación infantil:

1. El punto de referencia es el propio cuerpo del niño y se observan posiciones espaciales de otros niños o de objetos respecto de él: «El juguete está lejos de ti».
2. El punto de referencia es un elemento ajeno al niño y se observan posiciones espaciales del niño respecto de algunos objetos: «Ponte al lado de la puerta».
3. El punto de referencia es de nuevo un elemento ajeno al niño, y ahora se observan posiciones espaciales de otros elementos también ajenos al niño: «Deja la mochila encima de la mesa».

En 1.º de primaria, se repasarán los dos primeros niveles de dificultad y se prestará más atención al tercero, haciendo referencia a las siguientes nociones de orientación espacial:

- Delante/detrás
- Arriba/abajo
- Izquierda/derecha
- Cerca/lejos
- Junto/separado
- Estar entre
- Estar alrededor de
- Estar frente a o enfrente de

El trabajo se realizará con movimientos y escenificaciones, verbalmente y con representaciones gráficas.

Insistiremos especialmente en las nociones de lateralidad (izquierda y derecha) con la finalidad de conseguir su dominio a lo largo de los dos primeros cursos. Se tendrá muy presente la gran dificultad que para el niño o la niña representa la identificación de la lateralidad de otras personas, cuando estas no tienen la misma orientación en el espacio que él o ella.

La dificultad aumenta cuando se trata de reconocer la lateralidad de algunos objetos inanimados, sobre todo de aquellos cuya lateralidad no viene dada claramente por su forma, por ejemplo: «Ponte a la derecha de la pelota». En general, la lateralidad del objeto se construye a partir de la del niño/a, por lo que es imprescindible que esta esté bien construida (para que el niño/a esté a la derecha de la pelota, esta deberá estar situada a la izquierda del niño/a).

En 3.er curso de primaria el alumnado debe dominar las mencionadas nociones de orientación espacial y sus combinaciones con seguridad, para ser capaces de localizar de manera precisa todos los elementos del espacio.

2. Recorrer, organizar y dibujar trayectos y laberintos usando el vocabulario adecuado. Interpretar y representar croquis y planos sencillos. Escalas

En esta capacidad se amplía el conocimiento de la orientación espacial estática trabajada en la anterior, con el de la orientación espacial dinámica que considera las diferentes posibilidades de movimiento en el espacio.

Empezaremos revisando los contenidos de educación infantil relativos a los conceptos de trayectos y laberintos, de acuerdo con las siguientes aproximaciones intuitivas: entenderemos como trayecto, recorrido o itinerario un camino que se puede recorrer desde un punto inicial a uno final sin necesidad de retroceder en ningún momento, y como laberinto el recorrido en el que se pueden encontrar obstáculos que nos obligan a retroceder y buscar un tramo del camino alternativo. Podríamos considerar el trabajo con laberintos como una manera de aplicar las posibilidades de movimiento por el espacio que se aprenden con el trabajo de trayectos o recorridos.

Se continúa ampliando el conocimiento de los niños y las niñas con los contenidos específicos de educación primaria: croquis, planos, mapas y el concepto de escala. Consideraremos un croquis como un diseño hecho sin precisión ni detalle que el individuo debe realizar para ofrecer una información aproximada referente a un trayecto, paisaje, terreno u objeto.

Cuando se quiere precisar la información, aparece el concepto de escala. Es la expresión numérica de una proporción que nos permite representar en un mapa, plano o maqueta, las distancias y dimensiones de los trayectos, terrenos, edificios, máquinas u objetos originales con total precisión.

Por mapa se entiende la representación geográfica de la Tierra o parte de ella en una superficie plana, y por plano se considera la representación esquemática, también en una superficie plana, de un terreno, población, máquina, construcción, etc.

En 1.^{er} y 2.º curso de primaria se retoma lo que se ha visto en infantil. Es importante no tan solo que deban recorrer caminos y laberintos, sino también que los construyan. Es necesario que sean capaces de interpretar itinerarios y de utilizar vocabulario geométrico para describirlos. Además, también es importante que interpreten, describan y elaboren croquis. Hay muchas actividades a realizar, hemos de intentar que combinen el aspecto lúdico del trabajo con el objetivo que se quiere conseguir.

Se pueden organizar recorridos y laberintos dentro del aula, en el edificio del colegio o en el patio, en el barrio o en el pueblo, integrados en algún proyecto globalizado o en alguna salida relacionada con el trabajo del aula. En el caso de los recorridos hay diferentes maneras de trabajar:

1. Recorrer un camino real sin tomar nota de lo recorrido, simplemente señalizando con cuerdas o líneas el trayecto por donde se pasa y verbalizando los diferentes movimientos y cambios de dirección.
2. Completar la actividad anterior con la representación gráfica del recorrido en el plano de manera simultánea al desplazamiento.
3. Recorrer un camino a partir de las indicaciones verbales o escritas (plano) que han sido proporcionadas por el maestro u otro grupo de compañeros.
4. Recorrer un camino en la realidad y, después de realizar la actividad, señalar el trayecto sobre el plano correspondiente verbalizando los diferentes movimientos realizados.
5. Recorrer un camino en la realidad y, después de realizar la actividad, representar el trayecto o recorrido sobre papel en blanco, elaborando el croquis correspondiente y verbalizando los diferentes movimientos realizados.

En el caso de los laberintos, encontramos:

1. Recorrer un laberinto real, hecho en clase por la maestra, con mesas y sillas, con cajas vacías (por ejemplo, de electrodomésticos), etc.
2. Completar la actividad anterior con la representación gráfica del laberinto en el plano de manera simultánea al desplazamiento.
3. Recorrer un laberinto en la realidad y, después de realizar la actividad, señalar el recorrido seguido sobre el esquema del laberinto verbalizando los diferentes movimientos realizados.
4. A partir de un laberinto representado gráficamente, marcar en él el camino adecuado para llegar del punto de salida al punto de llegada, verbalizando los diferentes movimientos realizados.

También es necesario que el alumnado pueda llegar a construir sus propios laberintos (tanto en la realidad como gráficamente), por ejemplo por grupos, para ser resueltos individualmente o por otro grupo. Esto los motivará a hacerlos complicados, como mínimo que cuesten de recorrer, y conseguiremos que se involucren más en las actividades.

Un material didáctico que nos puede ayudar a desarrollar este trabajo es el geoplano. Consiste en una superficie plana cuadrada y rígida en la que hay una red de pivotes en los que se pueden enganchar gomas elásticas para representar diferentes figuras geométricas planas. Según la disposición de los pivotes los geoplanos pueden ser de malla cuadrada (los pivotes ocupan vértices de cuadrados iguales), de malla triangular (los pivotes ocupan vértices de triángulos equiláteros iguales) y de malla circular (los pivotes ocupan puntos de una o de varias circunferencias concéntricas) (figura 97).

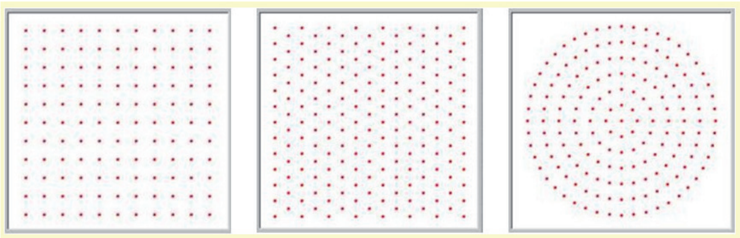


Figura 97. Representación de tres geoplanos: malla cuadrada (izquierda), malla triangular (centro) y malla circular (derecha)

Utilizando este material, el alumnado puede construir diferentes trayectos y laberintos con los elásticos y posteriormente recorrerlos con el dedo.

Durante los cursos siguientes se reproducen actividades semejantes a las anteriores, con un mayor grado de dificultad en la interpretación y elaboración de mapas, planos y croquis.

En 6.º curso de primaria, y una vez trabajadas la proporcionalidad directa y la regla de tres en el bloque de números y operaciones, se podrá hacer uso de estos conceptos para construir el de escala y utilizarlo para mejorar el trabajo con croquis, planos y mapas con más precisión que en los cursos anteriores.

Para transformar una figura de dos dimensiones en otra también de dos, iniciaremos el trabajo con escalas de una manera muy sencilla, por ejemplo a partir de algunas situaciones de transformar determinadas representaciones gráficas en su doble, mitad, triple, tercio, etc. (ampliar un dibujo de una revista para hacer un mural, reducir un dibujo de un cartel para ponerlo en el cuaderno, etc.).

Continuaremos este trabajo planteándoles otras situaciones problemáticas reales con escalas de mayor dificultad; por ejemplo, la distribución de un mobiliario en el plano de una vivienda (escala 1:100 o 1:50), el cálculo de la longitud de un recorrido a partir de un plano de la ciudad o de un mapa de carreteras…

Por último, y para relacionar los objetos de tres dimensiones con su representación plana, podemos desarrollar actividades en las que los niños intenten dibujar a escala algunos objetos reales sencillos: la mesa de estudio, la papelera, un armario de clase...

3. Reconocer y reproducir el orden espacial: lineal y cíclico

Estos conceptos se han iniciado en educación infantil y se refieren al reconocimiento y reproducción del orden espacial de puntos, que complementan, en 1.^{er} curso de primaria la idea de localización en el espacio, que se trabaja en otras capacidades.

En este sentido, es preciso recordar que el orden lineal se refiere a puntos situados sobre una línea abierta, y el orden cíclico, sobre una cerrada.

El trabajo consistirá en reproducir este orden, pero en situaciones diferentes, para hacerlos conscientes de lo que representa ordenar en el espacio. Podemos relacionar estas actividades con las transformaciones topológicas que, a pesar de las deformaciones producidas, mantienen el orden de los puntos.

Se repasa el trabajo realizado en educación infantil con las situaciones más sencillas de orden lineal y cíclico, y se completan estos conceptos con cuestiones más específicas de educación primaria.

Así, se prestará una atención especial al orden lineal en direcciones perpendiculares, a las transformaciones de orden lineal en cíclico y viceversa, y al orden inverso tanto lineal como cíclico.

Trabajaremos actividades en las que el alumnado tenga que reproducir el orden marcado en una línea horizontal sobre otra línea vertical, y al revés. En cualquiera de los casos es importante que los niños y las niñas decidan el primer y último elementos para reproducir la ordenación adecuadamente. Por ejemplo, al aula han llegado paquetes de cartulinas de colores, debemos organizarlas en una estantería vertical siguiendo el mismo orden de colores que las pastillas de plastilina que hay en otra estantería horizontal.

Cuando se trata de transformar los tipos de orden, hay que reproducir el orden de una línea cerrada en otra abierta y al revés. Será necesario decidir el primer elemento y el sentido del orden para los puntos que se sitúan en la línea cerrada. Un ejemplo de transformación del orden cíclico en lineal sería la elaboración de un collar con bolas de colores que se deben enhebrar en un cordón siguiendo el modelo cerrado propuesto. Para transformar un orden lineal en otro cíclico podemos pedir a un niño que ponga alrededor de una mesa los nombres ordenados de sus compañeros que se encuentran en una fila.

Del mismo modo, se puede trabajar la inversión del orden tanto en el caso lineal como en el cíclico. Deben reproducir el orden de los puntos pero en sentido inverso, lo que les obliga a modificar las posiciones primera y última y las relaciones espaciales que se establecen entre los puntos.

Se considera finalizado el trabajo de esta capacidad en 1.º de primaria. Solo si se detecta que es necesario se repasará al comienzo del curso siguiente.

4. Adquirir intuitivamente las nociones de punto, línea, superficie y espacio, y reconocerlas en su entorno

En educación infantil se inició la diferenciación entre los elementos geométricos punto, línea, superficie y espacio, a partir del contacto directo de los niños y las niñas con sus aproximaciones reales y de la reflexión sobre las posibilidades de estas experiencias.

En educación primaria, y dada la importancia que tienen las mencionadas nociones para la construcción de todos los demás conceptos geométricos, se reanuda el contacto con ellas para adquirirlas más matemáticamente.

En este sentido, es importante que los y las docentes tengan clara la diferencia entre las dimensiones de los elementos geométricos que estamos estudiando. La abstracción que exige entender estas cuestiones no es adecuada para el alumnado de primaria, pero conocerlas ayudará a los maestros a medir la dificultad que presentan. Matemáticamente un punto tiene dimensión 0, una línea tiene dimensión 1, una superficie 2 y el espacio, dimensión 3.

La percepción de los niños y las niñas de educación infantil y primaria es global, por tanto empezaremos aproximándonos al espacio y a los cuerpos o sólidos que ocupan partes de él, posteriormente a las superficies y, por último, a las líneas y los puntos. Hay que orientar al alumnado hacia la intuición de estas abstracciones a través de objetos de la realidad, para saber distinguir un cuerpo de una superficie o de una línea.

Se inicia esta capacidad en primer curso de primaria, pero no se desarrolla puntualmente en él. Se retoma por medio del trabajo geométrico realizado en el resto de capacidades que se hace durante toda la etapa, gracias al cual se refuerza la conceptualización matemática de las nociones que nos ocupan. Así, se podrá hablar de partes de espacio ocupado, superficies, líneas y puntos, al trabajar diferentes cuerpos geométricos y figuras planas (caras, aristas, lados, vértices...).

Para interiorizar estas nociones geométricas se hace necesario representarlas, teniendo en cuenta las restricciones mencionadas en el punto 2.1, respecto a las figuras de 1 y 2 dimensiones.

5. Líneas y superficies abiertas y cerradas. Profundizar en las nociones «dentro» y «fuera» relacionándolas con los conceptos de frontera y región

Intuitivamente, en educación infantil, se han trabajado los conceptos de abierto y cerrado, aplicados a líneas y superficies, y se han relacionado con la existencia o no de extremos perfectamente determinados en las figuras (abiertas, cuerda y cara de una hoja; cerradas, borde de un aro, superficie exterior de una pelota, por ejemplo).

Asociados a ellos se deben experimentar los de dentro y fuera en situaciones que lo permitan: línea cerrada de un dibujo, caja abierta, habitación cerrada...; pintar dentro de la línea del dibujo, encontrarse dentro o fuera de una caja, del aula, del edificio del colegio...

Todos estos conceptos están relacionados con las transformaciones topológicas que deforman los objetos sin romperlos, conservando por tanto las nociones de abierto y cerrado y las de región interior y región exterior. Se hace necesario hablar del concepto de frontera como un conjunto de puntos que separa en dos regiones claramente diferenciadas (interior y exterior) una línea, una superficie o el espacio y que es necesario atravesar para ir de una región a la otra.

Sin embargo, evidentemente, la definición anterior va irremediablemente unida al elemento geométrico del que sea frontera; por eso, si estamos hablando del espacio, la frontera será una superficie cerrada (una caja tapada, un armario cerrado...). En el caso de las superficies, la frontera vendrá determinada por una línea cerrada (la circunferencia del círculo central de un campo de fútbol, un diagrama de Venn, etc.). Podemos encontrar superficies en las que algunas líneas cerradas no sean frontera. Por ejemplo, en la superficie de un flotador o de la cámara de un neumático, que matemáticamente se llaman superficies toroidales y no son objeto de estudio en esta etapa, cada una de las líneas representadas en la figura 98 no forma frontera por ella misma.

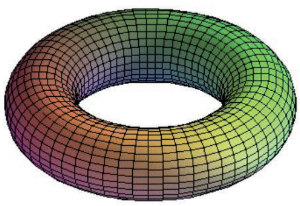


Figura 98. Representación de una superficie toroidal

Por último, cuando se trate de líneas (figura 99), la frontera vendrá determinada por un punto, en el caso de las abiertas y por dos puntos no consecutivos, en el de las cerradas (establecer dos tramos en las bolas de un collar abierto o cerrado, etc.).

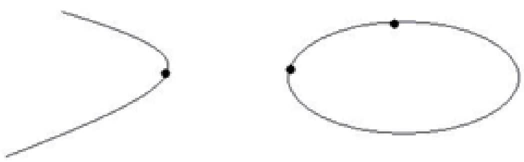


Figura 99. Representación de fronteras en dos líneas: abierta (izquierda) y cerrada (derecha)

En 1.er curso de primaria se reanudan las actividades realizadas en educación infantil, relacionadas con estos conceptos. Así, los niños y las niñas continuarán reconociendo diferentes superficies abiertas y cerradas y se situarán dentro o fuera de ellas perfeccionando el vocabulario referente a estas posiciones espaciales. Además, se insistirá en situaciones en las que exista más de una frontera con la intención de que puedan reconocer relaciones espaciales con más de un referente (fuera de la caja pero dentro del aula, dentro del colegio pero fuera del comedor, etc.).

El trabajo se continúa con fronteras en superficies, que trabajaremos directamente con actividades sobre estas (colorear un dibujo hecho sin salirse del borde, dibujar elementos dentro del diagrama de un conjunto...) o realizando representaciones en el papel de posiciones reales de diferentes elementos en el espacio (por ejemplo, dibujar sus posiciones o las de determinados objetos respecto de algunas fronteras en un plano del colegio…).

Con ejemplos análogos al del establecimiento de tramos en un collar, se puede trabajar el concepto de frontera tanto en líneas abiertas, como en cerradas (determinar dos tramos en una fila o en un corro de personas...).

Con el trabajo desarrollado en este curso, el alumnado debe dominar los conceptos de interior y exterior, dentro y fuera, frontera y región, que se utilizarán en el resto de cursos sin necesidad de volver a trabajarlos de manera específica.

6. Líneas rectas y curvas. Posiciones de la línea recta. Paralelismo y perpendicularidad de rectas

En educación infantil los niños y las niñas ya distinguen entre una línea recta y una curva a partir de su propio movimiento y también por la vista y el tacto. Esta distinción es intuitiva y no hay muchos problemas para llegar a reconocer qué es recto y qué no lo es.

En 1.^{er} curso de primaria debemos profundizar un poco más en todo esto y reflexionar sobre el hecho de que una serie de pasos encima de una línea recta o unas cuantas regletas colocadas en fila indican alineación en una única dirección. Cuando las actividades se relacionan con líneas curvas, las reflexiones nos conducen a concluir que la dirección no se mantiene constante a lo largo de toda la línea.

De manera simultánea al trabajo con actividades en la realidad, hay que representar con lápiz y papel estas líneas. Así, deberán descubrir que para dibujar las rectas tienen que ayudarse de algún instrumento (por ejemplo, una regla) que les permita construir la línea correctamente. Si lo que quieren es representarla en un lugar concreto de la hoja, previamente habrá que indicar por donde debe pasar la línea recta marcando dos puntos en el papel, sobre los que podremos colocar una regla y dibujarla. Evidentemente, nunca podremos representar la infinitud de una recta; por lo tanto, serán segmentos lo que realmente plasmemos en los dibujos.

Si queremos representar líneas curvas, las posibilidades se multiplican, dada la gran cantidad de tipos diferentes de estas líneas que existe.

En educación infantil se han trabajado las posiciones de la línea recta: vertical, horizontal y oblicua (inclinada) a partir de las posiciones del cuerpo del alumnado y de algunos otros referentes (por ejemplo, persona de pie, árbol, persona acostada, horizonte, perfil de una escalera o tobogán, respectivamente). En 1.º de primaria hay que revisar estos conceptos y relacionarlos con las direcciones espaciales determinadas por *de arriba a abajo* para la vertical, *de izquierda a derecha* para la horizontal y marcar la diferencia con cualquier otra dirección que, genéricamente, se denominará oblicua.

Se completará el trabajo con su reconocimiento en objetos reales y la representación de algunas líneas especiales, así como el dominio del vocabulario asociado a ellas. Así trabajaremos:

- Línea quebrada: formada por segmentos de recta concatenados no consecutivos. Pueden ser abiertas o cerradas como puede verse en la figura 100.

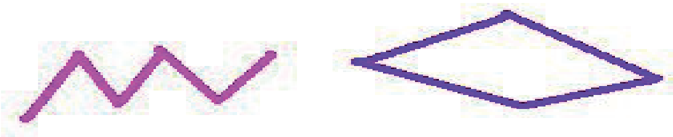


Figura 100. Representación de dos líneas quebradas: abierta (izquierda) y cerrada (derecha)

- Línea mixta: formada por segmentos de recta y de curva que se unen por uno de sus extremos. Pueden ser abiertas o cerradas como se ve en la figura 101.

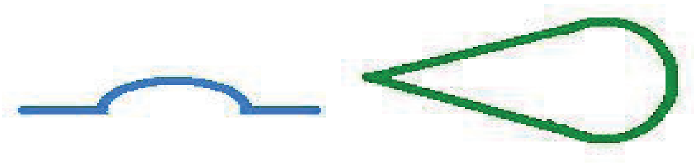


Figura 101. Representación de dos líneas mixtas: abierta (izquierda) y cerrada (derecha)

- Línea espiral: línea curva descrita por un punto que gira alrededor de otro punto o de un eje del que se aleja continua y uniformemente, como se muestra en la figura 102.

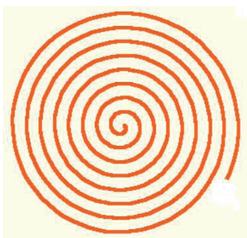


Figura 102. Representación de una línea espiral

Para completar el conocimiento de la línea recta y de sus posiciones individuales, en 3.er y 4.º curso de primaria, debemos trabajar también las posiciones relativas de más de una recta situadas en el mismo plano (coplanarias), a partir de la observación de referentes reales y/o gráficos y de la reflexión sobre ellos (lados paralelos o no de una mesa o de un folio, orillas de una carretera, raíles del ferrocarril, cruces de algunas calles...). Así, diremos que dos rectas son paralelas, cuando no tienen ningún punto en común y que son secantes cuando se cortan en un punto.

Una vez trabajados los ángulos y diferenciados los rectos de los que no lo son, introduciremos el concepto de rectas perpendiculares como aquellas que se cortan formando ángulos rectos y oblicuas como las que se cortan formando ángulos que no son rectos.

El concepto de paralelismo resulta complicado para los niños y las niñas, ya que está asociado al concepto de infinito y exige siempre que piensen en la prolongación de las líneas que están observando y aventuren si se cortarán o no más allá de lo que se ve, por no poderse representar nunca la línea completamente.

Las actividades específicas para trabajar todos estos conceptos (reproducir y clasificar figuras planas, dibujar y construir maquetas, reproducir planos, recorrer diferentes itinerarios, representar trayectos...) pueden encontrarse inmersas en otras ya descritas o que se describirán posteriormente. En ellas se debe insistir en la verbalización correcta de los mencionados términos y en el trabajo con lápiz y papel, así como con programas informáticos de geometría dinámica, que ayudarán a fijarlos. En 5. º y 6.º curso de primaria se completa el conocimiento de las líneas rectas paralelas y perpendiculares con la utilización de instrumentos de dibujo para construirlas correctamente. En la figura 103 se ven ejemplos de procesos respectivos de construcción de estas rectas con la ayuda de la escuadra y el cartabón.

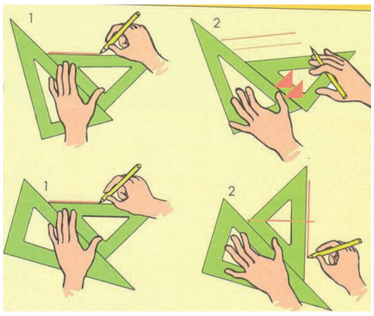


Figura 103. Representación de un proceso para dibujar paralelas y de otro para perpendiculares

Un caso particular del trazado de líneas rectas perpendiculares es la construcción de la mediatriz de un segmento (véase 3.1.1), encontrando su punto medio con una regla y trazando la perpendicular con la escuadra y el cartabón.

Con un compás y una regla también podemos construir la mediatriz, haciendo centro en los extremos del segmento y dibujando dos arcos de circunferencia con el mismo radio (mayor que la mitad del segmento), que se cortan en dos puntos. La recta que une estos dos puntos es la mediatriz del segmento, como se observa en la figura 104.

G. Lorenzo / M. Alcalde / I. Pérez - ISBN: 978-84-16356-31-7 La geometría y la estadística en el aula de primaria - UJI - DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia109

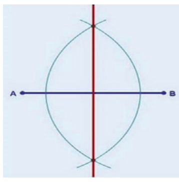


Figura 104. Representación de un proceso para dibujar perpendiculares

7. Distinguir y construir superficies planas y curvas

Esta capacidad se ha trabajado en educación infantil de manera muy intuitiva, pasando la mano sobre los dos tipos de superficies y observando las diferencias de contacto con ellas.

En 1.er y 2.º curso de primaria se ha de continuar el refuerzo de estas ideas y se debe llegar a la abstracción matemática de las diferencias anteriores a partir de la posibilidad o imposibilidad de dibujar líneas rectas en cualquier dirección sobre las superficies planas o curvas, respectivamente.

Todo ello se realizará de manera manipulativa, reconociéndolas a su alrededor a partir de la observación de objetos reales (superficies de una pizarra, de un bote de refresco, de la parte superior de una mesa, de un vaso o botella, de cajas, de un balón…) y construyéndolas con diferentes materiales (papel, cartón, cartulina, tela, arcilla, plastilina, etc.) asociando esta tarea a la confección de objetos, maquetas y construcciones. También se representarán gráficamente, cuando sea necesario, dentro de las posibilidades de los niños y las niñas de estos cursos.

8. Identificar, construir y dibujar ángulos en el plano. Clasificación y posiciones de los ángulos

En educación infantil y en 1.er y 2.º curso de primaria, cuando se trabajan experiencias de exploración del espacio y de conocimiento de figuras planas, los niños y las niñas han tomado contacto con los ángulos y han utilizado este concepto para referirse a esquinas o puntas (vértices) de los cuerpos y de las figuras planas.

A partir de 3.º de primaria podemos partir de algunos trabajos con rectas secantes para fijar la atención del alumnado en las cuatro regiones que se determinan en el plano siempre que se cortan dos rectas. Algunas situaciones de este tipo pueden estar relacionadas, por ejemplo, con la representación esquemática de dos caminos que cruzan un parque cortándose en su punto central, con la representación gráfica de itinerarios coincidentes en algún punto o de las líneas divisorias de un campo de deportes o del plano de un edificio...

En el proceso de identificar y diferenciar estas regiones aparece un nuevo concepto denominado ángulo que, como se definía en el punto 3.2.1 de este tema, coincidirá con cada una de las regiones, incluyendo las semirrectas que la determinan.

Análogamente a lo que ocurre con las rectas y las semirrectas, el concepto de ángulo también lleva implícito el de infinito. Ello provoca que sea imposible representar un ángulo realmente y que haya que trabajar con la superficie limitada del papel, la pizarra o las pantallas de los dispositivos electrónicos.

Como las regiones serán diferentes en cada una de las situaciones, aparecerán distintos tipos de ángulos y, por tanto, habrá que definirlos y clasificarlos como rectos, agudos, obtusos, llanos, cóncavos y completos, como se ha hecho en el mencionado punto 3.2.1.

Para trabajar con el alumnado estas definiciones y sus diferencias se pueden observar los distintos ángulos que forman los brazos con el tronco del cuerpo, las piernas, las agujas de un reloj, una tijera abierta, las varillas de un abanico... Podemos ayudar a los niños y las niñas a estudiar los tipos de ángulos utilizando actividades de construcción (con cuerdas, con plegado de papel...) y de su representación en un geoplano o por medio de programas informáticos de geometría, que posibilitan la visualización de diferentes conceptos (ángulos, paralelismo, etc.) sin necesidad de dibujarlos, que a esas edades es una dificultad añadida. En todas estas actividades hay que insistir en que el ángulo es la porción de la superficie limitada por los lados, y no solo esas dos semirrectas.

Algunos de los mencionados ejemplos se pueden ver en la figura 105.

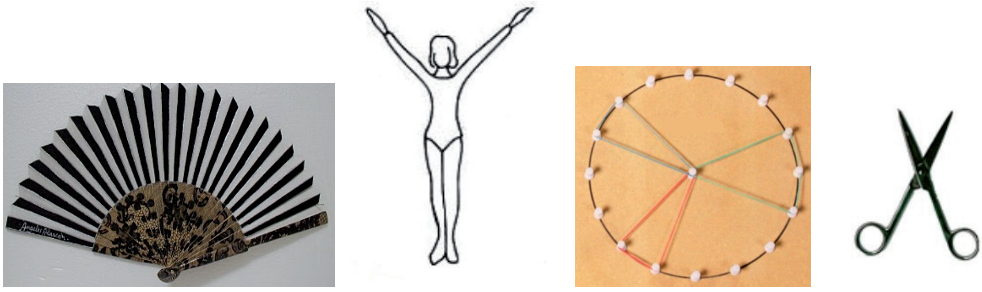


Figura 105. Representación de visualizaciones de ángulos en objetos reales

Además, hemos de trabajar los ángulos en las actividades de diseño y construcción de maquetas y figuras planas que se desarrollarán también en la capacidad 18. Todas estas actividades se completarán con la utilización correcta del vocabulario asociado por parte de los niños.

De la misma manera que se estudian las posiciones de dos rectas, a partir de 5.º habrá que prestar atención también a las posiciones de dos ángulos y encontrar ángulos consecutivos, adyacentes u opuestos por el vértice. Así, diremos que dos ángulos son consecutivos cuando tienen el vértice y un lado común y los otros dos lados están en distinta región del plano con respecto a la recta del mencionado lado común; diremos que son adyacentes cuando son consecutivos y los lados no comunes pertenecen a la misma recta, y que son opuestos por el vértice cuando tienen este punto en común y los lados de un ángulo son semirrectas opuestas a los lados del otro (figura 106).

G. Lorenzo / M. Alcalde / I. Pérez - ISBN: 978-84-16356-31-7 La geometría y la estadística en el aula de primaria - UJI - DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia109

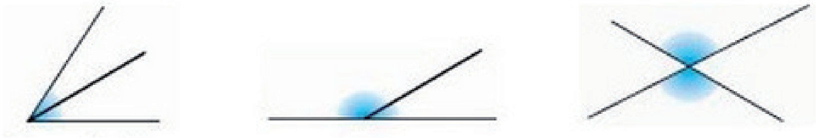


Figura 106. Representación de los lados de dos ángulos consecutivos (izquierda), adyacentes (centro) y opuestos por el vértice (derecha)

Podemos encontrar contextos concretos en los que el alumnado de primaria visualice estos tipos de ángulos en el trabajo de construcción de cenefas y mosaicos, y en la observación de los planos de algunas viviendas. En la figura 107 se muestran algunos ejemplos.

Figura 107. Representación de ejemplos reales de ángulos consecutivos, adyacentes y opuestos por el vértice

A partir de 5.º de primaria se completan todos estos conceptos y se asocian los diferentes tipos de ángulos con su amplitud angular, cuyas mediciones y unidades se habrán estudiado en el bloque de contenidos de medida.

De nuevo hemos de volver a reflexionar sobre la idea de ángulo como una superficie y no como las dos semirrectas que lo limitan.

Hacia el final de la etapa se puede introducir el concepto de bisectriz de un ángulo (véase 3.2.1) y construirla por medio de diferentes procedimientos.

Uno muy elemental consiste en plegar un papel en el que se ha dibujado un ángulo haciendo coincidir sus lados y obteniendo así un eje de simetría plana (véase 3.4.1.3) de la figura, que es la bisectriz del ángulo.

Otro utiliza un semicírculo graduado. Con este instrumento se mide la amplitud angular, se divide por la mitad y se marca en el interior del ángulo un punto que corresponde a esta cantidad de grados. La recta que une este punto con el vértice del ángulo será la bisectriz que se buscaba.

Con regla y compás también podremos construir la bisectriz, haciendo centro en el vértice del ángulo y encontrando dos puntos, uno en cada lado, equidistantes del vértice. Haciendo centro en estos dos puntos se dibujan dos arcos de circunferencia con el mismo radio, que se cortan en un punto. La recta que une este punto con el vértice del ángulo es su bisectriz, como se observa en la figura 108.

G. Lorenzo / M. Alcalde / I. Pérez - ISBN: 978-84-16356-31-7 La geometría y la estadística en el aula de primaria - UJI - DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia109

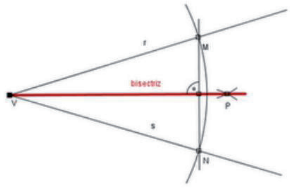


Figura 108. Representación de la construcción de la bisectriz de un ángulo con regla y compás

9. Localización de puntos en el plano utilizando coordenadas cartesianas. Puntos cardinales y referencias en mapas

Para que el alumnado aprenda cómo localizar la situación de un punto determinado (el colegio, su casa, el parque, una montaña, un lago, el nacimiento de un río...) en el plano de una ciudad o pueblo, o en un mapa de una zona geográfica, hay que introducir a los niños y niñas en la utilización de las coordenadas cartesianas.

A partir de 3.^{er} curso de primaria podemos aprovechar el juego de «Hundir la flota» o una actividad de orientación con un plano cuadriculado para hacerles ver que necesitamos dos informaciones, una referente a la dirección horizontal y otra a la vertical, para encontrar un punto concreto en el plano. Habitualmente, en los dos casos presentados, los datos vienen dados en forma de letras mayúsculas y números, como se muestra en la figura 109.

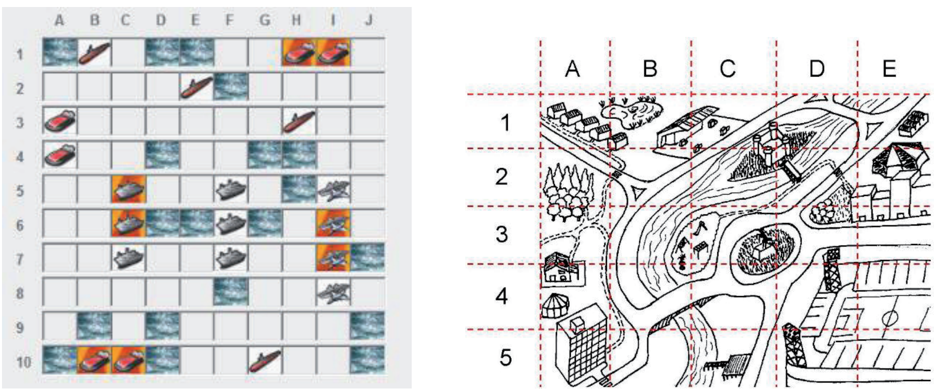


Figura 109. Representación de un juego y de un plano en los que se usan coordenadas en el plano

Como el conocimiento de las coordenadas es intuitivo a partir del juego o del plano, habrá que aproximarlos, en 5.º de primaria, a su matematización, con la introducción de las coordenadas cartesianas (René Descartes, 1596-1650).

El sistema de referencia se construye a partir de dos rectas perpendiculares, llamadas ejes, como se especificó en el punto 3.1.1 del tema.

Como los niños y las niñas no conocen los números enteros hasta el último curso de la etapa, trabajaremos hasta entonces solo con la parte positiva de los ejes; es decir, consideraremos únicamente el primer cuadrante del plano cartesiano como se muestra en la figura 110.

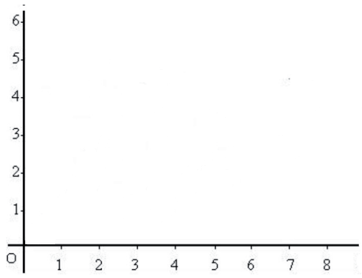


Figura 110. Representación del 1.er cuadrante del plano cartesiano

A partir de actividades variadas en las que haya que encontrar lugares u objetos en algunos planos o bien representar en el plano diferentes lugares de la realidad, trabajaremos este contenido, sabiendo que en el primer caso, los niños y niñas utilizarán un sistema de coordenadas ya creado, mientras que en el segundo, en el momento de representar la realidad, tienen que establecer un sistema de coordenadas que les permita situar sobre el mismo los puntos considerados.

En 6.º curso se puede completar el trabajo con planos y mapas introduciendo los puntos cardinales y su aplicación para localizar diferentes puntos o lugares en las representaciones de la realidad que se estén utilizando. Así, el alumnado podrá desplazarse por un plano o mapa siguiendo indicaciones que se puedan referir a movimientos en dirección horizontal o vertical, matizados por el punto cardinal hacia el que se dirigen. Un ejemplo de mapa con los puntos cardinales señalados lo podemos encontrar en la figura 111.

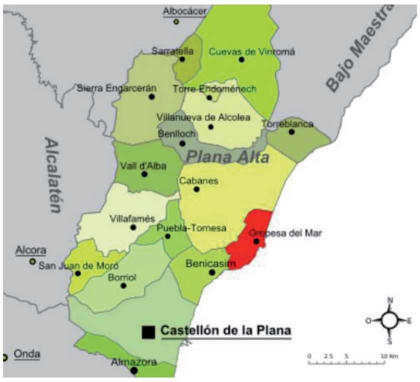


Figura 111. Representación de un mapa de la provincia de Castellón con indicación de los puntos cardinales

De manera interdisciplinar y en actividades que puedan requerir orientación en campo abierto, se puede completar la construcción de este conocimiento con la utilización y manejo de la brújula.

En este curso, y aprovechando el conocimiento de los números enteros, se puede ampliar la representación de los ejes cartesianos incorporando las semirrectas correspon-

G. Lorenzo / M. Alcalde / I. Pérez - ISBN: 978-84-16356-31-7 La geometría y la estadística en el aula de primaria - UJI - DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia109
Índice

dientes a los números negativos, completando así los cuatro cuadrantes que representan el plano como se muestra en la figura 112. De esta manera, los niños y las niñas dispondrán de una ayuda que les permitirá representar cualquier punto del plano cuyas coordenadas sean números enteros y preparar, así, las representaciones posteriores en educación secundaria, que puedan integrar coordenadas racionales y reales.

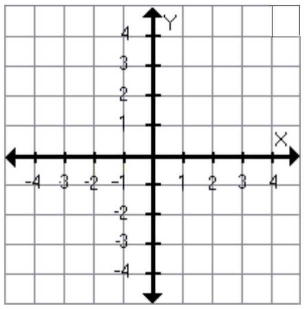


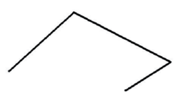
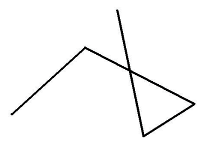
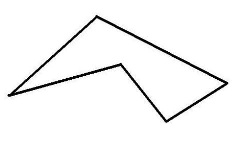
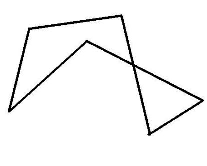
Figura 112. Representación de los ejes cartesianos

10. Distinguir, construir y representar líneas poligonales abiertas y cerradas

En 1.er y 2.º curso de primaria, y relacionado con el trabajo de trayectos y laberintos desarrollado en la capacidad 2, podemos pedir que el alumnado haga recorridos compuestos por tramos rectos que van cambiando de dirección en diferentes momentos. Cuando lo hagan en la realidad deben señalar el camino recorrido con un hilo o cuerda que indique por donde han pasado (intentando que el hilo se quede fijo en los puntos en los que cambia la dirección). Si representan un desplazamiento determinado en un croquis, plano o mapa, han de dibujar correctamente los tramos rectos que constituyen el camino o itinerario seguido.

Siguiendo con la nomenclatura de la capacidad 6, las líneas originadas en estos recorridos se llaman quebradas. En este momento, y como preparación del concepto de polígono, introduciremos una nueva denominación para ellas: líneas poligonales.

De acuerdo con el punto 3.2.2, trabajaremos con los niños y las niñas, tanto en la realidad como en representaciones planas, líneas poligonales abiertas y cerradas y líneas poligonales simples y no simples, así como su vocabulario correspondiente.

	Simple	No simple
Abierta		
Cerrada		

Además, para trabajar los diferentes tipos de líneas poligonales, podemos ayudarnos de su construcción con geoplanos.

También podemos utilizar un material didáctico manipulable llamado listones geométricos (figura 113), compuesto por listones de plástico o madera de distintas longitudes y colores, agujereados en diferentes puntos de su longitud, que se articulan unos con otros por medio de encuadernadores o de tornillos y tuercas.

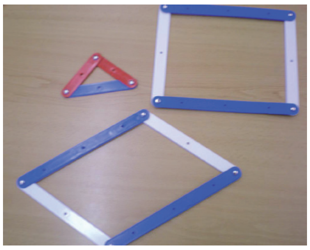


Figura 113. Listones geométricos (Geo Strip, fabricado por Invicta Plastics Ltd.)

11. Identificar, describir, construir y dibujar polígonos. Reconocer sus elementos básicos: lados, vértices, bases, diagonales, ángulos. Clasificar polígonos

En educación infantil se ha trabajado la identificación, descripción, construcción y representación de triángulos, cuadrados, rectángulos y círculos, dentro de las posibilidades del alumnado de esta etapa educativa.

Enmarcado en el estudio de las figuras planas, en esta capacidad nos centraremos en los polígonos y en la 14 dedicaremos atención a la circunferencia y al círculo.

En 1.er curso de primaria, y continuando con actividades semejantes a las realizadas en infantil, los niños y las niñas deben identificar triángulos, cuadrados y rectángulos en objetos reales (cajas de diferentes tipos, señales de tráfico, alimentos, etc.). Se repasarán también los nombres de las figuras, el recuento de sus lados y vértices y las diferencias esenciales entre ellas (número de lados y su longitud).

A partir de los objetos reales en los que se ha detectado la presencia de estas figuras y para acercarnos a la bidimensionalidad de los polígonos, es necesario realizar representaciones gráficas, situando sobre el papel estos objetos y bordeando su contorno con un lápiz de manera que este quede dibujado. Para completar la representación colorearemos el interior del contorno y reconoceremos la figura representada como la porción pintada del papel.

Después de este trabajo con los tres tipos de figuras mencionadas, reflexionaremos con el alumnado sobre las líneas que las limitan con la intención de descubrir que todas ellas son líneas poligonales cerradas simples. Este descubrimiento nos permite incorporar el nombre de polígono para referirnos a cualquiera de los tipos de figuras anteriores e introducir el concepto de polígono como la porción de plano limitada por una línea poligonal cerrada simple, incluyendo la propia línea. En este momento habrá que dar a conocer los términos lado y vértice y relacionarlos con los segmentos de la línea poligonal y los extremos de estos segmentos, respectivamente.

Asociado a la observación de los objetos reales y en 2.º curso, los pondremos en contacto con polígonos de cuatro lados que no sean cuadrados ni rectángulos. Se debe proceder de manera análoga a los casos anteriores, para introducir los rombos, romboides, trapecios y trapezoides y reconocerlos también en el marco del concepto general de polígonos. Para presentar estas nuevas figuras el maestro o la maestra deberá elegir una de las dos clasificaciones presentadas en el punto 3.2.2.2 y utilizar las definiciones correspondientes. Esta elección debería tomarse en consenso con el resto de docentes del centro, porque afecta a todos los cursos de educación primaria.

Si fijamos la atención en el número de lados de estos últimos polígonos, nos daremos cuenta que coincide con el de los cuadrados y rectángulos estudiados anteriormente e introduciremos el nombre de cuadriláteros para referirnos a todos ellos.

Las actividades de identificación y descripción de los polígonos se han iniciado a partir de objetos reales. Hemos de continuar manipulando materiales didácticos estructurados que los representen (figura 114) y observar con ellos la superficie, los lados y los vértices que corresponden a cada polígono.

Figura 114. Figuras geométricas planas (Geometric Shapes, fabricado por Ness Arnold Ltd.)

Relacionado con la confección de puzles, rompecabezas, mosaicos, maquetas... debemos trabajar la construcción de polígonos. Además, con diferentes materiales: hilos, cuerdas, palillos, listones geométricos, geoplanos, etc., podemos representar su contorno e insistiremos en que cuando nos referimos a los polígonos hemos que considerar siempre la superficie limitada por la línea poligonal y observar las condiciones que deben cumplir los «segmentos» utilizados para construir cada uno de ellos.

Debemos dedicar atención también a la representación gráfica de estas figuras planas. Se puede utilizar, en principio, un modelo para que lo puedan copiar y más adelante dejarlos dibujar las figuras libremente a partir de la imagen mental que se hayan formado de ellas.

En 3.º y 4.º de primaria hay que reforzar y completar el conocimiento de los cuadriláteros y comprobar que los conocen y diferencian adecuadamente en función de la clasificación elegida.

Relacionando el concepto de cuadrilátero con el de paralelismo de rectas que se trabaja en los mismos cursos, deben reconocer el paralelismo de lados opuestos en algunos de estos polígonos. Así, observaremos que los trapecios tienen solo un par de lados paralelos, mientras que los cuadrados, rectángulos, rombos y romboides tienen dos. Por este hecho agrupamos los últimos cuatro cuadriláteros con el nombre de paralelogramos (véase 3.2.2.2).

Para ampliar el conocimiento al resto de polígonos seguiremos un procedimiento análogo al utilizado para introducir los triángulos y los cuadriláteros. Así, buscaremos objetos reales (cajas, señales de tráfico, alimentos, parterres de algunos parques, carteles, fachadas de edificios, etc.) que nos acerquen a los polígonos sin delimitar la cantidad de lados y, a partir de la representación en el papel del borde de la figura, encontraremos polígonos con diferente número de lados. Para designarlos introduciremos el vocabulario correspondiente, que viene dado etimológicamente por el número de ángulos de la figura (véase 3.2.2), aunque usualmente se relaciona con el número de lados (lo cual no plantea problemas dada la coincidencia de estas dos cantidades). Así utilizaremos las palabras: pentágono, hexágono, heptágono, etc.

Hay aproximaciones de polígonos que son difíciles de encontrar en la realidad (heptágono, eneágono...). Para estos casos y para completar la información alrededor de los polígonos se puede recurrir a materiales didácticos (figura 114) en los que se pueden encontrar estas figuras.

El trabajo con materiales didácticos manipulables y programas informáticos de geometría que utilizamos para representar y construir polígonos, se desarrollará en estos cursos con los mismos criterios que en los anteriores. Además, se trabajarán los conceptos de diagonal (véase 3.2.2) y de ejes de simetría (véase 3.2.3.3) de los polígonos (la simetría se estudiará en la capacidad 19).

El alumnado también debe identificar como base de un polígono el lado que ocupa una posición horizontal inferior respecto del observador. En principio, cualquier lado puede actuar como base. Excepcionalmente, en el caso del trapecio solo se consideran bases los lados paralelos.

Tanto en las actividades de reconocimiento como en las de construcción de los polígonos, será necesario que los niños y las niñas observen la igualdad o desigualdad de las longitudes de sus lados o de las amplitudes de sus ángulos. Así, encontrarán algunos que tienen iguales solo las longitudes de los lados (rombo común), otros que tienen iguales solo las amplitudes de sus ángulos (rectángulo común) y otros que cumplen las dos igualdades (cuadrado). Introduciremos en 4.º de primaria el nombre de polígonos regulares (véase 3.2.2) para referirnos a los últimos y deben reconocer, construir y dibujar polígonos de diferente número de lados, tanto regulares como irregulares. Debemos tener en cuenta las limitaciones del alumnado de este curso a la hora de dibujar manualmente los regulares.

Otro criterio para clasificar los polígonos, a partir de 3.º de primaria, tendrá en cuenta su concavidad y su convexidad (véase 3.2). Una actividad intuitiva para iniciar el trabajo de los mencionados conceptos puede incluir la movilidad de los niños y las niñas. Cuando se recorre la línea exterior del campo de fútbol o baloncesto del patio de su colegio, que es un polígono convexo, el sentido de giro en los vértices siempre es el mismo (figura 115).

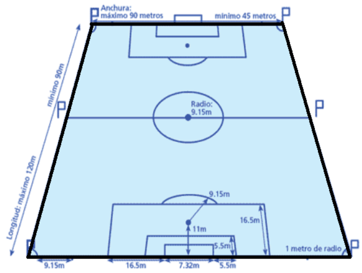


Figura 115. Representación de un campo de fútbol

Cuando la línea que se recorre es la del contorno del edificio del colegio o de otro próximo (es necesario que la planta sea cóncava) se observará que hay algunos vértices en los que se debe cambiar el sentido de giro con respecto al del vértice anterior (figura 116).

Figura 116. Representación del plano de un colegio

Después de descubrir que hay dos tipos de polígonos, los cóncavos y los convexos, será necesario que los construyan (con papel, cartulina, hilos, cuerdas, geoplanos...), los dibujen y los nombren añadiendo el apellido cóncavo o convexo a la palabra que los identifica por su número de ángulos o de lados (pentágono convexo, heptágono cóncavo...). Observarán también que en los polígonos cóncavos podemos encontrar por lo menos un ángulo interior mayor que un ángulo llano, es decir, un ángulo cóncavo (figura 117).

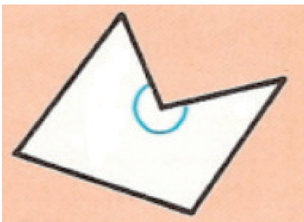


Figura 117. Representación de un polígono cóncavo

En 5.º y 6.º de primaria, partiendo de la experimentación, prestaremos una atención más matemática a los conceptos sobre polígonos trabajados en los cursos anteriores, repasándolos y reforzando su conocimiento, intentando elaborar expresiones de los conceptos que se aproximen a las definiciones, teniendo en cuenta el desarrollo matemático y cognitivo del alumnado.

A la hora de trabajar la construcción y la representación gráfica de los polígonos debemos tener en cuenta que, en estos cursos, los niños y las niñas estudian la medida de la amplitud angular y que, con el conocimiento de la suma de los ángulos interiores de un polígono (se trabaja en la capacidad 13) y la utilización del transportador de ángulos, además de la regla y el compás, podrán dibujar polígonos regulares siguiendo un procedimiento adecuado a sus posibilidades.

Para complementar todos estos aspectos, intentaremos que el alumnado llegue a comprobar que en un polígono convexo todos los segmentos que unen cualquier par de puntos de la figura, están contenidos en ella, pero en los cóncavos existen algunos de los mencionados segmentos que no lo están (véase 3.2).

12. Clasificaciones de triángulos y cuadriláteros.

En 3.^er y 4.º curso de primaria, en las actividades de identificación, descripción, construcción y dibujo de los triángulos (necesarias para la realización de algunas actividades de confección de maquetas, mosaicos, murales..., y otros trabajos del aula) los niños y las niñas encontrarán distintos tipos de estas figuras y observarán las diferencias entre ellas (véase 3.2.2.1).

Así, en referencia a los lados aparecerán triángulos que tienen tres lados iguales, dos lados iguales o ningún lado igual. Los llamaremos triángulos equiláteros, isósceles y escalenos, respectivamente. La exigencia de igualdad de al menos dos lados o de solo dos lados en un triángulo isósceles determinará si nos estamos refiriendo a la clasificación inclusiva o a la excluyente.

Con respecto a los ángulos, encontrarán triángulos que tienen los tres ángulos agudos, un ángulo recto o un ángulo obtuso. En este caso los nombres correspondientes serán triángulos acutángulos, rectángulos y obtusángulos, respectivamente.

Al observar todos estos tipos de triángulos, el alumnado comprobará por superposición la igualdad de los ángulos de cualquier triángulo equilátero, por lo que reconocerán estos triángulos también como equiángulos, es decir, como polígonos regulares.

En el trabajo correspondiente a los cuadriláteros y de manera análoga al desarrollado con los triángulos, los niños y las niñas reflexionarán sobre la igualdad o desigualdad de las longitudes de los lados de las diferentes figuras y de las amplitudes de sus ángulos (véase 3.2.2.2).

Así, reconocerán la igualdad de los cuatro lados en los cuadrados y los rombos y la de cada par de lados opuestos en los rectángulos y romboides. Relacionarán este hecho con el paralelismo de los lados opuestos y con el concepto de paralelogramos mencionado en la capacidad anterior.

Con respecto a los ángulos observarán que los cuadrados y los rectángulos tienen cuatro ángulos rectos y que los rombos y romboides más comunes tienen dos opuestos agudos y los otros dos, obtusos.

Todas estas consideraciones nos permitirán identificar el cuadrado como el único cuadrilátero regular.

En 5.º y 6.º curso debemos reforzar todos los conceptos anteriores con las clasificaciones de triángulos y cuadriláteros inclusivas o excluyentes, según la elección hecha por el claustro de profesores del colegio (véanse 3.2.2.1 y 3.2.2.2).

En el caso de los triángulos insistiremos en que la clasificación en función de sus ángulos es excluyente. Si nos fijamos en los lados profundizaremos sobre el hecho de que cada clase de triángulos es independiente de las otras si trabajamos con la clasificación excluyente, mientras que todos los triángulos equiláteros son también isósceles si lo hacemos con la inclusiva.

Para ayudar a los niños y las niñas a deducir este último hecho podemos llevar a cabo la siguiente experiencia: cogemos tres listones geométricos de la misma longitud y unimos cada uno de los dos extremos de uno de ellos con un extremo de los otros dos, como se muestra en la parte izquierda de la figura 118 (señalamos con la letra **A** el extremo libre de uno de los listones).

Si para conseguir el triángulo que determinan los tres listones iguales desplazamos el punto A a lo largo del horizontal, obtendremos sucesivos triángulos isósceles (imágenes centrales de la figura 118) antes de llegar al triángulo equilátero que se conseguirá cuando el punto A coincida con el extremo libre del listón horizontal (parte derecha de la figura 118). Entonces, el triángulo equilátero es uno de los infinitos triángulos isósceles que podemos encontrar.

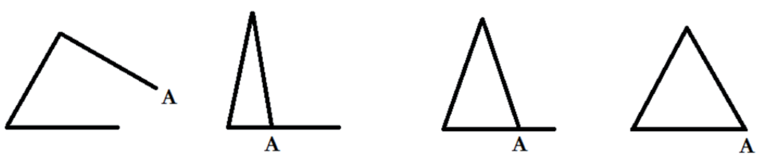


Figura 118. Representación de un triángulo equilátero como elemento de la clase de los isósceles

Por lo que respecta a la clasificación de los cuadriláteros atendiendo al paralelismo de sus lados reforzaremos la idea de la existencia de tres clases independientes: paralelogramos, trapecios y trapezoides.

En referencia a los paralelogramos trabajaremos la existencia de cuatro clases independientes, si hemos optado por la clasificación excluyente, y de una clase general, los romboides, que contiene las clases de los rectángulos y de los rombos que tienen en común la familia de los cuadrados, si hemos elegido la clasificación inclusiva.

Se pueden visualizar las relaciones inclusivas anteriores mediante actividades de proyecciones de sombras producidas por diferentes figuras al exponerlas a la luz del sol (véase 2.2). Así, si partimos de un romboide común y vamos modificando su posición respecto del plano de proyección de la sombra, obtendremos un rectángulo o un rombo, según el caso. Por otra parte, si partimos de un rectángulo o de un rombo, procediendo de manera análoga, podemos obtener un cuadrado en cualquiera de los dos casos.

13. Relaciones entre los lados y entre los ángulos de un triángulo

A partir de 5.º de primaria y como complemento del conocimiento de los triángulos trabajaremos las relaciones entre sus lados. El alumnado comprobará que la longitud de un lado siempre es menor que la suma de las longitudes de los otros dos y mayor que su diferencia (desigualdad triangular).

Lo podríamos ver experimentalmente utilizando listones geométricos u otros materiales para construir los contornos de los triángulos (trozos de cuerda de distintas medidas, palos de madera...) y comprobando que no se puede llevar a cabo la actividad si las longitudes previstas por los lados no cumplen las condiciones anteriores.

Por ejemplo, se les proporcionan cuerdas para cerrar un recinto triangular en el patio (diseño de un jardín triangular, o del huerto escolar...). Las longitudes de las cuerdas de unos grupos de niños podrían ser 3, 4 y 5 m y otras de 2, 10 y 7 m. La posibilidad o imposibilidad de construir los contornos de los triángulos con estas medidas permitirá comprobar las relaciones iniciales. Posteriormente, en clase, se reforzará esta idea trabajando con ternas de listones de diferentes longitudes, unas permitirán la construcción de los bordes de los triángulos y otras no.

Otro ejemplo podría ser ante una situación de cálculo de la longitud de un recorrido en un mapa de carreteras, el alumnado puede comprobar que la distancia en línea recta entre dos ciudades es siempre menor que la que se recorre si se pasa por otra ciudad no alineada con ellas. Este hecho nos permite reforzar la primera de las relaciones entre los lados de un triángulo que hemos enunciado antes.

Como consecuencia de estas actividades debemos conseguir que solo conociendo las longitudes de los tres lados sean capaces de afirmar razonadamente si se puede o no construir el triángulo, basando su afirmación en las relaciones numéricas entre estas longitudes.

Asociado a las mencionadas actividades se podrá también comprobar que, además de las condiciones anteriores, para que el triángulo que van a construir sea rectángulo se deberá cumplir la igualdad denominada teorema de Pitágoras: la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados que forman el ángulo recto, catetos, será igual al cuadrado de la longitud del otro lado, hipotenusa (véase 3.2.2.1).

En referencia a los ángulos de un triángulo y también en 5.º o 6.º curso de primaria, el alumnado comprobará manipulativamente que la suma de las amplitudes de los tres ángulos es 180º.

Para realizar esta actividad necesitaremos papel o cartulina, rotuladores y tijeras. En un primer momento, cada niño o niña dibuja un triángulo sin indicaciones de cómo deben ser las longitudes de los lados. A continuación, marcan los ángulos interiores y cortan la figura en tres trozos, cada uno de los cuales debe contener uno de los ángulos del triángulo. Por último, es necesario que dispongan como consecutivos los tres ángulos señalados y se percaten de que forman un ángulo llano, por tanto, de 180º. En la figura 119 se muestra este proceso:

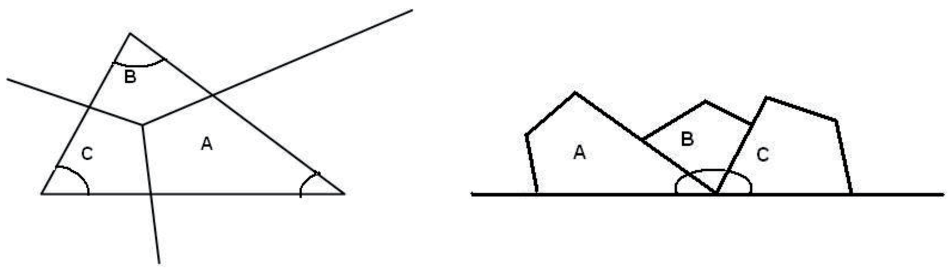


Figura 119. Representación del proceso manipulativo para comprobar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º

También podrían llegar a descubrir el mismo hecho relacionando el bloque de contenidos de medida con el de geometría, midiendo los ángulos interiores de un triángulo con el transportador de ángulos o semicírculo graduado y sumándolos después.

> *Nota*: Se puede usar este resultado para comprobar la relación entre el número de lados de un polígono convexo y la suma de sus ángulos interiores. Para apoyar la explicación usaremos la figura 120, que representa el caso particular de un pentágono. Hay que observar que el polígono se puede descomponer en tantos triángulos como lados tiene (eligiendo un punto de su interior y uniéndolo con todos los vértices). Para calcular la suma de los ángulos interiores del polígono habrá que multiplicar los 180º de cada triángulo por el número de triángulos que hay y restar a esta cantidad los 360º (2 × 180º) del ángulo completo formado por los ángulos de todos los triángulos que tienen el vértice en el punto interior elegido anteriormente. Así comprueban la relación conocida como «la suma de los ángulos interiores de un polígono de *n* lados es (n-2)·180º».

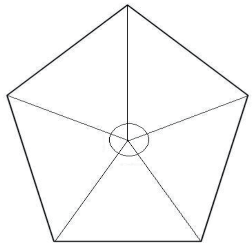


Figura 120. Representación de un pentágono descompuesto en triángulos

14. Identificar, describir, construir y dibujar circunferencias y círculos. Reconocer sus elementos básicos: centro, radio, diámetro

En 1.er curso de primaria y como continuación del trabajo realizado en educación infantil, se trabajará el círculo, a partir de su identificación en objetos reales que ruedan (galletas redondas, monedas, botellas o botes, relojes...). De manera análoga al proceso que se hizo con los polígonos y para acercarnos a la bidimensionalidad del círculo, haremos un trabajo de representación gráfica trasladando sobre el papel los mencionados objetos y recorriendo con un lápiz su contorno de manera que este quede dibujado. Para completar la representación colorearemos el interior del contorno y reconoceremos el círculo como la porción pintada del papel.

El conocimiento de esta figura se trabajará también utilizando materiales didácticos estructurados (bloques lógicos, figuras geométricas planas...), para percatarse de que no hay vértices ni lados rectos, sino que todo el contorno es curvado y, por tanto, le permite rodar. Habrá que verbalizar todos estos descubrimientos, para que sean capaces de describir las características del círculo y expresar sus diferencias con los polígonos.

También debemos trabajar la construcción (con cuerdas, geoplanos de malla circular, etc.) y la representación gráfica (con dibujos a mano alzada) del círculo, reconociendo las limitaciones del alumnado para hacerlo.

A partir de 2.º curso, al repasar el concepto de círculo, fijaremos la atención en su contorno. Introduciremos el nombre de esta figura, circunferencia, y la reconoceremos como una línea cerrada curva plana y simple. Para trabajar su representación sin utilizar aún el compás, podemos ayudarnos de la siguiente actividad: se ata un lápiz a cada extremo de un cordel no elástico, se fija uno de ellos en un punto del papel y se hace girar el otro alrededor del primero, manteniendo tenso el cordel y dibujando algunas de las posiciones que va ocupando este. Al finalizar la acción obtendremos el punto que ha marcado el lápiz fijo, denominado centro de la circunferencia, la línea marcada por el otro lápiz, que es la circunferencia y algunos segmentos que unen el centro con puntos de la circunferencia y que se llaman radios (figura 121). Hay que destacar que el radio y el centro de una circunferencia también son el radio y el centro del círculo que esta determina.

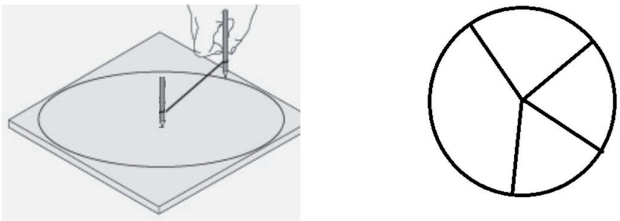


Figura 121. Representación del proceso para construir una circunferencia
y sus elementos con lápiz y cordel

La reflexión con el alumnado sobre esta actividad nos permitirá obtener como consecuencia que la distancia de los puntos de la circunferencia a su centro se mantiene constante y reconocer esta curva como la determinada por todos los puntos del plano que equidistan del centro. Cualquier segmento que una dos de estos puntos, pasando por el centro de la circunferencia, se llama diámetro.

En los cursos siguientes se repasan los conceptos estudiados y además, en 4.º de primaria se introduce el uso del compás y la regla para construir y dibujar circunferencias, círculos y sus elementos básicos.

15. Posiciones relativas de circunferencias y círculos con rectas: tangente, secante, cuerda, arco y sector circular

Una vez trabajadas la línea recta, la circunferencia y el círculo de manera individual, pasaremos a estudiar las posiciones relativas que pueden ocupar en el plano las líneas rectas en relación a las circunferencias y círculos, y los elementos geométricos que determinan.

A partir de 3.er curso de primaria y para completar el trabajo realizado en la capacidad anterior, se ampliará el conocimiento de la circunferencia con los conceptos de recta secante, cuerda y arco, que se generan cuando una recta corta a una circunferencia en dos de sus puntos (véase 3.1.3).

Un ejemplo para visualizar en la realidad estos conceptos lo podemos encontrar en las líneas que delimitan las diferentes zonas de un campo de fútbol, en colaboración interdisciplinar con la asignatura de Educación Física. La actividad consistiría en observar las líneas en el campo del patio del colegio, dándonos cuenta de que podemos dibujar una circunferencia haciendo centro en el punto de penalti que al intersecarse con la línea del área de penalti determina un arco y una cuerda (figura 122). De la misma manera, en la circunferencia central del campo se observa la existencia de una cuerda que pasa por el centro y por tanto es un diámetro, y consecuentemente de dos arcos que son dos semicircunferencias.

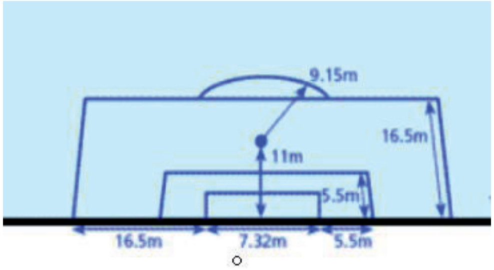


Figura 122. Representación de los elementos geométricos presentes en el *área* de un campo de fútbol

Una vez observados y trabajados estos conceptos, los pueden usar en el momento de hacer construcciones o representaciones gráficas en los que intervengan (diseñar un jardín, un parque, reproducir el croquis de un objeto o de un lugar, los chaflanes de las calles que confluyen en una rotonda...).

También a partir de 3.er curso el trabajo se ampliará con los conceptos de recta tangente y sector circular (véanse 3.1.3 y 3.2.4). Los animaremos a buscar estas figuras en la realidad.

Para aproximarnos a la idea de recta tangente a una circunferencia, se puede observar la línea recta que describiría un ciclista en la calzada y el punto de contacto con la circunferencia de cada rueda (como se ve en la figura 123). En el momento que quieran representar una situación semejante con la ayuda de un compás y una regla, será necesario que se percaten de que la circunferencia y la recta solo deben tener en común un punto llamado punto de tangencia.

Figura 123. Representación de la tangencia de dos ruedas de una bicicleta con la línea que describe su recorrido

Para encontrar sectores circulares deberán observar figuras que los contengan, como por ejemplo una porción de pizza, de queso, de pastel... Para acercarnos a su bidimensionalidad, hay que trasladar los mencionados objetos sobre el papel y dibujar su contorno, coloreando su interior. Convendrá recordar que el sector circular es toda la pieza dibujada y coloreada, no solo el contorno.

Seguidamente habrá que encontrar estos sectores en representaciones de dos dimensiones como, por ejemplo, el recorrido de una puerta en un plano de una casa, un diagrama de sectores (estadística descriptiva), la zona de posicionamiento del balón en el lanzamiento de córner del fútbol, etc., e insistiremos en que el sector circular viene determinado, en un círculo, por dos de sus radios y el arco de la circunferencia del contorno que une los extremos no comunes de los radios. En algunos de estos ejemplos encontrarán sectores circulares convexos y otros cóncavos (véase 3.2.4).

A partir de ejemplos que pueden aparecer en el aula (diagramas de sectores en los que uno de ellos representa una frecuencia del 50 % (figura 124), media pizza, medio queso,...) se puede introducir el concepto de semicírculo como el sector circular que se determina cuando los dos radios se encuentran alineados formando un diámetro.

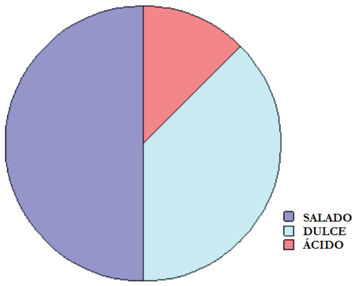


Figura 124. Representación de un semicírculo a partir de un diagrama de sectores

16. Medida del contorno y de la superficie de figuras geométricas planas: perímetro y área.

A partir de 2.º curso de primaria debemos hacer un trabajo relacionado con la magnitud longitud que conduzca al alumnado hacia la noción de perímetro y, a partir de 3.º, su equivalente con la superficie y el área.

Hay una parte de manipulación de estos conceptos que han podido experimentar en el trabajo indicado en el tema de Magnitudes y Medida (Pérez, Alcalde y Lorenzo, 2014). Ejemplos de todo ello pueden ser: encontrar la cantidad de cuerda suficiente para cerrar un recinto, saber la longitud de un cable que debe recorrer las paredes de una habitación..., calcular la superficie de papel continuo necesario para cubrir el piso en una actividad concreta, etc.

Para construir el concepto de perímetro, en un primer momento, trabajaremos la medida de la longitud del contorno en polígonos, recordando todas estas actividades previas. Como saben utilizar la regla, les podemos plantear una actividad en la que se necesite conocer la medida de la longitud de los lados de una figura poligonal, por ejemplo, las paredes de una casa en un plano. Será necesario que vayan tomando nota de cada una de las medidas de los lados, y para saber la cantidad final, tendrán que sumarlas. La conclusión de esta y otras actividades semejantes debe ser que el perímetro de un polígono es la suma de las medidas de las longitudes de sus lados.

En los últimos cursos de primaria, nos planteamos medir la longitud del contorno de una figura circular, por ejemplo, de un bidón cilíndrico que se encuentra en el patio. Usaremos una cuerda o una cinta métrica flexible para encontrar esta medida y obtendrán el resultado de manera relativamente sencilla. Pero cuando la actividad es con lápiz y papel, hay una dificultad añadida: es muy complicado rodear una circunferencia representada en un papel con un instrumento de medida de longitud, cuando esta tiene, por ejemplo, 3 cm de radio. Después de dejarlos que intenten resolver la duda de manera autónoma y, evidentemente, no encontrar una manera fiable de hacerlo, les indicaremos que debe haber una atajo en las matemáticas que nos ayude a averiguar esta medida. Realizaremos una búsqueda en diferentes fuentes de información (libros de texto, Internet...) y encontraremos una expresión un poco innovadora para calcular esta longitud: $\mathbf{2 \cdot \pi \cdot r}$, donde r es el radio de la circunferencia, y $\pi = 3{,}141592...$ Parece que π es un valor constante, que no es fruto de la observación o de la medida de una circunferencia concreta. Para comprobarlo deberemos resolver dos dudas. La primera es ver si funciona, recalculando con esta expresión las medidas que sí habíamos podido obtener, como por ejemplo las del bidón cilíndrico. El segundo es saber si π vale siempre igual, independientemente de la circunferencia.

Para contestar a la primera de las preguntas, habrá que encontrar el radio del bidón. Es necesario que experimenten y lleguen a la conclusión de que encontrar el diámetro es una tarea mucho más sencilla que la de encontrar el radio cuando se desconoce el centro (solo es necesario encontrar la distancia más larga entre dos puntos de la circunferencia con una cuerda o cinta métrica). Una vez encontrado el valor del diámetro solo habrá que dividir entre dos esta medida para saber el radio. En el momento que usen la expresión de la longitud de la circunferencia, se percatarán de que deben multiplicar por dos el producto del radio y de π, así que rápidamente se darán cuenta de que hay que multiplicar el diámetro por π. Haciendo el cálculo y comprobando que les resulta, aproximadamente, lo mismo que habían medido con la cinta flexible, tendrán contestada la primera pregunta.

Para contestar a la segunda, la del valor fijo de π, les podemos proponer la siguiente actividad: tienen que llevar a clase objetos, cuya base en algunos casos sea un círculo. También deberán llevar hilo, regla y calculadora. Ajustarán el hilo al contorno del círculo y estirándolo y midiendo su longitud con la regla, obtendrán la longitud de la circunferencia contorno del círculo. Como pueden calcular con la regla el diámetro de las circunferencias manipuladas, dividirán la longitud estimada anterior por el valor del diámetro calculado.

Cada alumno ha hecho los cálculos con circunferencias diferentes y, aproximadamente, todos obtendrán el mismo valor de π. Así habrán comprobado (dentro de sus posibilidades) que este valor es siempre constante y la relación numérica de proporcionalidad entre la longitud de la circunferencia y la longitud del diámetro es precisamente el valor encontrado, π.

Como comentario final, les haremos relacionar este contenido con el de números racionales y deben darse cuenta de que este número tiene infinitas cifras decimales no periódicas. Si tienen curiosidad pueden consultar en Internet para encontrar expresiones de π con la cantidad de decimales que quieran.

Para aproximarnos al cálculo del área de figuras planas, el trabajo partirá, nuevamente, del que se ha hecho para la medida de superficies (Pérez, Alcalde y Lorenzo, 2014). Se puede recordar, por ejemplo, cómo se medía la superficie de una habitación rectangular, es decir, que si tenemos un rectángulo, su área se obtendrá como el producto de las medidas de las longitudes de los lados. Reflexionaremos que en el caso del cuadrado la manera de calcular su área es semejante. También se había introducido el área de un triángulo, como el producto de la longitud de la base por la de la altura dividido entre 2.

Una vez recordados estos conocimientos previos respecto del área, les podemos proponer la actividad de medir la superficie de una figura poligonal irregular (inicialmente, sin embargo, que se pueda descomponer en triángulos rectángulos, cuadrados y/o rectángulos, por ser figuras cuya área es fácil de calcular). Esta actividad puede estar enmarcada en la de conocer la superficie de un piso en un plano, de un parque donde irán de excursión, etc. Por grupos y de manera autónoma, es necesario que vayan encontrando sus descomposiciones en figuras de áreas conocidas. Como cada grupo puede hacerlo de diferentes maneras, será interesante la tarea posterior de debate, haciendo crítica constructiva de los resultados de cada grupo, para llegar a comprobar que la medida de la superficie final es la misma. En actividades sucesivas es necesario que, en las descomposiciones de las figuras, aparezcan triángulos que no sean directamente rectángulos y que deban resolver el problema de encontrar la altura usando perpendiculares (véase 3.2.2.1).

Solo nos quedaría hacer alguna reflexión respecto de los polígonos regulares de más de cuatro lados. Es evidente que pueden dividirlos en figuras conocidas de muchas maneras, pero se deberá encaminar el diálogo hacia la obtención de una forma de dividir los polígonos que simplifica enormemente la tarea. Se trata de dividirlos en triángulos iguales y que todos tengan un vértice en el centro del polígono regular. Se nos plantean dos casos en el momento de encontrar este centro:

a) Cuando el polígono regular tiene un número par de lados, por ejemplo, el hexágono, deben encontrar dos diagonales que sean al mismo tiempo ejes de simetría de la figura. El punto en común de estas dos diagonales será el centro. Una vez encontrado el centro, habrá que unir este punto con los vértices del polígono. Ya lo tienen dividido en triángulos isósceles, cada uno de los cuales está formado por dos triángulos rectángulos. Trabajando diferentes ejemplos les haremos llegar a la conclusión de que solo en el caso del hexágono estos triángulos son también equiláteros.

b) Cuando el polígono regular tiene un número impar de lados, el hecho de encontrar el centro implica intersecar dos ejes de simetría del polígono. Deberán investigar diferentes posibilidades y llegarán a encontrarlo de manera práctica, utilizando cualquiera de los siguientes métodos (aunque desconozcan formalmente los conceptos geométricos que están usando): (*b*.1) conocen el concepto de eje de simetría (recta que une un vértice con el punto medio de su lado opuesto) y lo aplican, (*b*.2) encuentran el centro como punto de intersección de las bisectrices de cualesquiera dos ángulos interiores del polígono, o (*b*.3) lo encuentran como punto de intersección de las mediatrices de cualquier par de lados del polígono.

Cuando lo que se quiere es medir la superficie de un círculo, el problema de no poder encontrar una descomposición en figuras cuya superficie sea fácil de calcular nos lleva, necesariamente, a introducir la expresión $\pi \cdot \mathbf{r}^2$ para utilizarla en el cálculo del área de esta figura (probablemente los niños y las niñas la habrán encontrado en el trabajo previo de descubrir la expresión de la longitud de la circunferencia). La comprobación experimental de esta fórmula implica la aproximación al área del círculo por sucesiones de áreas de polígonos inscritos y circunscritos en la circunferencia contorno del círculo, lo cual queda fuera de las posibilidades del alumnado de primaria.

17. Identificar, describir y construir poliedros y cuerpos redondos. Reconocer sus elementos básicos: aristas, vértices, bases, caras laterales. Clasificar cuerpos geométricos

En educación infantil se ha trabajado la identificación y descripción de cubos y esferas a partir de objetos reales y de algunos materiales didácticos, dentro de las posibilidades de los niños y las niñas de esta etapa educativa.

En 1.er y 2.º curso de primaria y por medio de un trabajo semejante al realizado en la etapa anterior, el alumnado debe observar y manipular objetos reales que estén presentes en el aula o que puedan traer de sus casas. Encontrarán objetos en los que todas las caras sean polígonos (cajas de medicinas, de zapatos, de leche o zumo, de juguetes, de galletas, de chocolate, objetos de decoración...) y otros cuyas caras sean superficies curvas y/o planas no poligonales (bote de tomate, de refresco, botellas de diferentes líquidos, vasos, fiambreras...). Los niños y las niñas verbalizarán las características que diferencian un tipo de objetos del otro y llegarán al descubrimiento de dos grandes grupos de sólidos geométricos: los poliedros y los cuerpos redondos, que pueden diferenciar más claramente observando materiales didácticos específicos, que los reproducen con exactitud (figura 125).

Figura 125. Figuras geométricas en el entorno (fabricado por Akros)

Hacia 2.º curso y respecto de los poliedros, se revisará el conocimiento de estos cuerpos y se fijará la atención en dos grandes grupos: los prismas y las pirámides. Deben observar y manipular de nuevo diversos objetos reales para encontrar y verbalizar sus diferencias en cuanto al número de bases y al tipo de caras laterales que presentan, y distinguir claramente las caras que son básicas de las que no lo son. Completaremos este trabajo con la construcción de los mencionados cuerpos utilizando arcilla, plastilina, etc., teniendo en cuenta las posibilidades de los niños y las niñas de esta edad y con la manipulación y estudio de los materiales didácticos estructurados correspondientes.

Para realizar esta tarea con el alumnado es imprescindible introducir el vocabulario asociado a los poliedros y empezar a utilizar las palabras: cara, base, arista, vértice, sin que sea necesario que los alumnos lo dominen. Introduciremos la manera de nombrar los prismas y las pirámides en función de sus bases y según los polígonos conocidos, como un primer paso hacia la ampliación de estos conocimientos en cursos posteriores.

En el estudio de los prismas y en referencia a uno de los objetos que se ha manipulado muy frecuentemente en la realidad (cajas de zapatos, de medicinas...), introduciremos el nombre de ortoedros para referirnos a los prismas que tienen todas sus caras rectangulares.

También en 2.º de primaria y como continuación del trabajo realizado en cursos anteriores, deben encontrar, además de las esferas, dos grandes grupos de cuerpos redondos: los cilindros y los conos. Observarán y manipularán varios objetos reales para encontrar y verbalizar sus diferencias con respecto al número de bases y al tipo de caras laterales que presentan y reforzarán también este trabajo con la manipulación y estudio de los materiales didácticos correspondientes.

A partir de los objetos reales y de los materiales didácticos con los que se han visualizado estas figuras y para acercarnos a su tridimensionalidad, tendremos que hacer un trabajo aproximado de construcción. Podemos usar como ayuda materiales existentes en el mercado, como los que se muestran en las figuras 126 y 127, que les permiten visualizar al mismo tiempo el cuerpo compacto y su desarrollo plano.

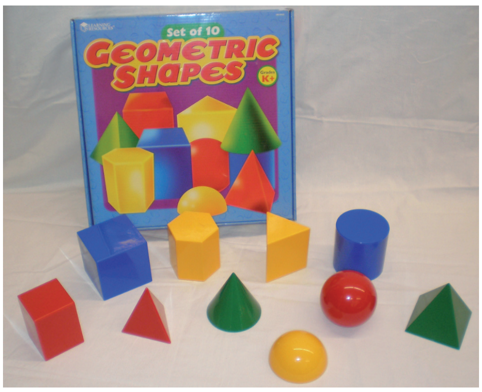


Figura 126. Cuerpos geométricos compactos
(Set of 10 Geometric Shapes, fabricado por Learnings Resources Ltd)

Figura 127. Cuerpos geométricos desplegables
(Folding Geometric Shapes, fabricado por Learnings Resources Ltd)

También se pueden utilizar otros materiales didácticos que proporcionan elementos que se unen, necesarios para montar los cuerpos a partir de sus caras (por ejemplo, los polígonos troquelados, que nos permiten construir poliedros, pero no cuerpos redondos), como puede verse en la figura 128. Una vez finalizado el montaje, se volverá a reflexionar sobre la actividad realizada y lo que les ha interesado: aristas, vértices, caras..., recordando que el cuerpo es todo el espacio que limitan las caras que hemos ajustado.

Figura 128. Polígonos troquelados

En 3.^{er} y 4.º de primaria, y de manera análoga al trabajo realizado en los dos cursos anteriores, se revisará el conocimiento de los cuerpos ya iniciados ampliando el estudio a los prismas y pirámides cuyas bases son polígonos que se estudiarán en estos cursos (pentágono, hexágono...). Se insistirá en las diferencias entre los poliedros y los cuerpos redondos y dentro de cada uno de estos dos grupos en los distintos cuerpos que contienen: prismas y pirámides, conos y cilindros, respectivamente, además, claro, del cubo y la esfera.

Se reforzarán todas estas cuestiones con materiales didácticos específicos (manipulativos e informáticos) y la utilización correcta por parte de los niños y las niñas del vocabulario asociado a estos cuerpos: bases, caras, vértices, aristas, para conseguir su identificación y su descripción correcta.

Una vez conocidos los conceptos de radio y diámetro de un círculo, se introducirán estos elementos en referencia a los cuerpos redondos. Así, hablaremos de radio de un cilindro y de un cono, como los de sus bases. Los conceptos de diámetro y radio de una esfera se construirán generalizando los correspondientes conceptos referidos al círculo.

Completaremos el trabajo con la construcción de algunos de los cuerpos estudiados y usaremos los mismos materiales descritos en los cursos anteriores, ampliándolos con la utilización de otros cuya dificultad para unir piezas es mayor, pero con los que se obtienen sólidos que se parecen más a los cuerpos teóricos e incluso permiten la construcción de cuerpos redondos. En el caso de los poliedros se pretende que preparen los desarrollos planos de los cuerpos y, a partir de ellos, que los construyan. En el de los cuerpos redondos, no se podrá hacer así, ya que hay piezas que no son planas (figura 129).

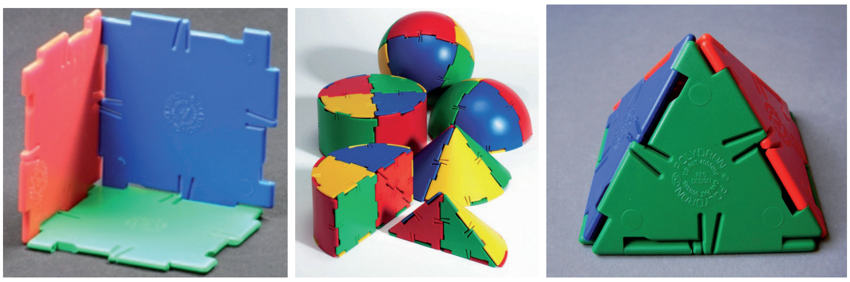


Figura 129. Polydron (fabricado por Polydron International Ltd.)

Debemos volver a reflexionar sobre el hecho de que el cuerpo geométrico no está vacío, sino macizo, es decir, que no es solo la superficie que lo delimita, sino la porción del espacio rodeada por la mencionada superficie.

Para reforzar esta cuestión intentaremos realizar construcciones de estos cuerpos con materiales que completen la idea de sólido que queremos transmitir (plastilina, arcilla...). Para distinguir qué sería la frontera del cuerpo, se podría pintar la figura con un color diferente al de la plastilina, y una vez pintada toda la superficie exterior del cuerpo, cortarlo y comprobar que solo hay una finísima capa pintada y por dentro del cuerpo el color es el inicial de la plastilina.

En 5.º y 6.º de primaria profundizaremos en el trabajo realizado en los cursos anteriores y desde la manipulación de materiales didácticos específicos introduciremos al alumnado en reflexiones un poco más profundas acerca de los elementos básicos de los cuerpos geométricos con los que estamos trabajando.

Así, respecto de los vértices observarán que hay cuerpos geométricos en los que todos ellos son igual de importantes, pero hay otros en los que un vértice es más significativo (pirámides) y otros cuerpos que solo tienen uno (conos). En los dos últimos casos este punto se llama *vértice* de la figura correspondiente.

Análogamente, encontrarán que hay figuras cuyas aristas son todas de la misma longitud (caso de todos los poliedros regulares) y otros en los que no ocurre eso.

En este último caso, a veces existen aristas de igual longitud que delimitan caras características (caso de polígonos regulares en las caras básicas de prismas y pirámides).

Observarán también que en los prismas siempre encontramos pares de caras enfrentadas que son paralelas, mientras que en las pirámides nunca podemos encontrar caras que lo sean. Además, en los cuerpos redondos se puede diferenciar entre las caras planas que siguen siéndolo cuando se trabaja el desarrollo plano del cuerpo que delimitan, y las caras curvas que se convierten en planas en el mismo caso (cilindros y conos) o las que no pueden hacerlo (la superficie esférica no se puede desarrollar en dos dimensiones).

Todas estas reflexiones completan la idea que el alumnado construye de las figuras estudiadas y nos permiten reforzar su conocimiento, así como tener cada vez más clara su clasificación en poliedros y cuerpos redondos y en las diferentes clases que encontramos dentro de cada uno de estos grupos: prismas y pirámides para el primer caso, y cilindros, conos y esferas para el segundo.

Podemos completar esta clasificación estudiando con los niños y las niñas el grupo particular de prismas que recibe el nombre de paralelepípedos (véase 3.3.2.1) y clasificando los diferentes tipos que existen, siguiendo patrones semejantes a los que utilizamos para clasificar los paralelogramos.

Así, encontraremos los paralelepípedos generales (sus caras son paralelogramos), los cubos (todas las caras cuadradas), los ortoedros (todas las caras rectangulares) y los romboedros (todas las caras rómbicas). Esta clasificación será inclusiva o excluyente dependiendo de la elegida para los paralelogramos. En el caso de la excluyente, cada clase será disjunta con las otras. En el de la inclusiva, los cubos estarán en la intersección de la clase de los ortoedros con la de los romboedros.

Para complementar todo este trabajo, intentaremos que el alumnado llegue a comprobar que un poliedro también puede ser convexo o cóncavo, con un trabajo semejante al realizado en los polígonos.

Aprovechando las observaciones de los niños y las niñas sobre caras y aristas y basándonos en la regularidad del cubo, podemos introducir los otros cuatro poliedros regulares existentes: el tetraedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro, utilizando sus representaciones con materiales didácticos adecuados.

En estos cursos hemos de conseguir que utilicen el vocabulario correspondiente a los cuerpos geométricos con precisión y seguridad, y que sean capaces de aproximarse de manera clara a las definiciones académicas de los conceptos estudiados.

El trabajo de esta capacidad debería ampliarse con el cálculo de las áreas lateral y total de los cuerpos geométricos estudiados, partiendo del conocimiento previo del cálculo de áreas de figuras planas estudiadas anteriormente (triángulo, paralelogramos y círculo).

A partir del estudio de las unidades de volumen, tratado en el bloque de medida de magnitudes y relacionando la magnitud volumen con las tres dimensiones que la definen podemos trabajar con el alumnado, al final de la etapa, el cálculo de los volúmenes de algunos de los cuerpos mencionados en el párrafo anterior. Hay que insistir en las ideas de construcción de la expresión del volumen tanto en prismas y cilindros, como en pirámides y conos. Por lo que respecta a los primeros, se centrará la atención en la construcción de la idea de volumen a partir de la multiplicación del área de la base por su altura. Por lo que respecta a los segundos, se puede observar experimentalmente la relación de 1/3 que hay entre el volumen de una pirámide respecto de un prisma y de un cono respecto de un cilindro, cuando tengan las mismas base y altura, respectivamente.

18. Componer y descomponer figuras planas y cuerpos geométricos. Completar rompecabezas, puzles, mosaicos, maquetas, etc.

En educación infantil se ha iniciado la composición y descomposición de figuras planas, dentro de las posibilidades de los niños y las niñas de esta etapa educativa. Podemos enmarcar estas actividades en el trabajo relacionado con mosaicos y rompecabezas, que desarrollan la visión espacial y el reconocimiento de una imagen a partir de fragmentos.

En la etapa de primaria se continúa en este campo, profundizando en la composición y descomposición de figuras planas.

Por lo que respecta al descubrimiento en la realidad de los contenidos que queremos trabajar, les haremos observar a su alrededor para que descubran situaciones en las que la superficie haya sido recubierta por figuras planas (azulejos en el piso, dibujos en alfombras, cortinas, papel pintado...).

Para manipular y crear diferentes composiciones con figuras geométricas planas, usaremos materiales didácticos que nos proporcionen piezas de diferentes medidas y colores como, por ejemplo, el que aparece en la figura 130.

Figura 130. Mosaico múltiple (Playshapes, fabricado por Invicta Plastics Ltd.)

Del trabajo libre que pueda realizar el alumnado, tendrán que sacar conclusiones:

1. Cuando componemos dos cuadrados de la misma medida por cualquiera de sus lados (colocarlos el uno al lado del otro), obtenemos un rectángulo. Si los hacemos coincidir por dos vértices cualesquiera, obtenemos una figura plana que no tiene nombre conocido, pero que es cóncava.

2. Cuando componemos un cuadrado con un rectángulo, hay varias posibilidades:
   a) Si hay dos lados de igual medida y los hacemos coincidir, se obtiene un nuevo rectángulo.
   b) Si no hay dos lados de igual medida, se compone una figura cóncava, que no tiene nombre.
   c) Si los hacemos coincidir por dos vértices, nuevamente la figura compuesta es cóncava.

3. Si son dos rectángulos:
   a) Si no tienen lados de igual medida: la figura resultante es una figura plana, cóncava, sin nombre.
   b) Si tienen dos lados de igual medida: la figura resultante es otro rectángulo.
   c) Si son dos rectángulos iguales:
      i. Si los componemos por lados de la misma medida, obtenemos rectángulos nuevamente.
      ii. En caso de que el lado corto del rectángulo sea, exactamente, la mitad de longitud del lado largo, al componer por los dos lados largos, obtendremos un cuadrado.

4. Con dos triángulos el trabajo es semejante:
   a) Si tienen lados de la misma medida y los hacemos coincidir por estos lados, la figura compuesta es un cuadrilátero convexo.
   b) Si no tienen de la misma medida, o los hacemos coincidir por el vértice, la figura resultante es cóncava.

Hay más combinaciones, pero la idea es reflexionar con ellos y ellas alrededor de las figuras que se van componiendo, incidiendo en las condiciones que deben darse para formar una nueva figura geométrica conocida por ellos. A partir de 3.º de primaria aprovecharemos algunas de estas actividades para trabajar los conceptos de concavidad y convexidad de figuras planas.

El siguiente paso es trasladar al papel las actividades de observación y manipulación realizadas. En un primer momento les propondremos componer figuras libremente, haciendo referencia al aspecto artístico del trabajo (elección de colores, cenefas, mosaicos...) y con la condición de que la composición forme una figura continua (sin agujeros) que, en el caso de las cenefas, se pueda repetir indefinidamente. Es importante el trabajo de verbalización que hagan, para saber en qué están fijando su atención: si es en una composición artística en la que la motivación es el aspecto final de la obra, si han buscado regularidades en su expresión *geométrica-artística,* o si por el contrario han realizado una composición irregular y para que expliquen a sus compañeros todas sus motivaciones que, con seguridad, serán interesantes. Más adelante, realizarán actividades semejantes en las que incluiremos la exigencia de que sus composiciones sean regulares, es decir, que se repita un patrón.

El anterior trabajo nos servirá también para educar la mirada de nuestro alumnado hacia la descomposición de figuras planas. En este tipo de actividades les proporcionaremos imágenes cuyas formas se hayan obtenido por composición de figuras geométricas conocidas, pero que no se distinguen directamente y tendrán que encontrarlas dentro de la proporcionada. En esta línea de acción, existe un material muy conocido, el Tangram, compuesto por las piezas que se pueden apreciar en la parte izquierda de la figura 131, con el que podemos potenciar la habilidad de imaginar composiciones y descomposiciones de figuras, siempre en el nivel correspondiente a cada curso de primaria y que se puede empezar a utilizar indicando a los niños y las niñas los contornos de las figuras que componen la imagen (como puede verse en la parte derecha de la figura 131).

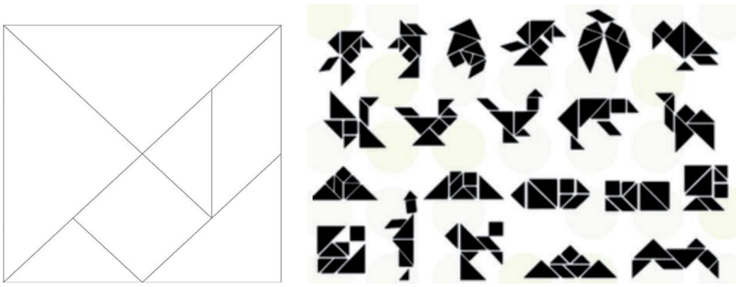


Figura 131. Representación de piezas de un Tangram (izquierda) y de las descomposiciones de algunas figuras (derecha)

A medida que se avanza en la etapa, se pueden realizar actividades semejantes a las anteriores, con un mayor grado de dificultad, estudiando nuevas posibilidades y confeccionando las piezas ellos mismos utilizando diferentes materiales, como por ejemplo papel, cartón, cartulina, goma EVA… Con ellas se refuerza el conocimiento de las nociones de orientación espacial y se incide en un resultado geométrico importante: cualquier polígono se puede descomponer en triángulos. En el caso de los polígonos regulares, estos triángulos son isósceles y solo en el caso del hexágono regular, además de isósceles son equiláteros (véase la capacidad 16).

En el desarrollo de todo este trabajo podrán encontrar situaciones en las que las figuras que utilicen recubran todo el plano y otras en las que no. El interés se centrará en las primeras, con la intención de concluir que las únicas figuras planas que recubren el plano repitiéndolas indefinidamente son algunos triángulos, algunos cuadriláteros y los hexágonos regulares.

En algunos casos, la composición de figuras planas puede constituir el desarrollo plano de un cuerpo geométrico. Por lo tanto, a partir de la composición de figuras de dos dimensiones podemos llegar también a la construcción de otras tridimensionales (véase la capacidad 17).

De manera semejante a lo realizado para las figuras planas y a lo largo de toda la etapa de educación primaria, se presta también atención a la composición y descomposición de figuras tridimensionales. Tendrán que encontrar en la realidad cubos, prismas, pirámides, esferas, cilindros y conos. Por ejemplo, cajas de diferentes tipos, pelotas, botes, sombreros de mago... Nos fijaremos en las composiciones que puede haber de estas figuras en cualquier conjunto arquitectónico, de decoración, de muebles... En este momento, el trabajo puede reforzarse con la construcción de maquetas que reproduzcan situaciones espaciales sencillas de su entorno.

Con la ayuda de material didáctico continuaremos el trabajo de descubrir estas composiciones observadas en la realidad. Con un abanico de material suficientemente extenso encontraremos relaciones de composición de figuras tridimensionales:

1. Con dos cubos:
   a) Si son de igual arista, obtendrán un prisma.
   b) Si son de diferente arista, un cuerpo tridimensional cóncavo.

2. Con un cubo y un prisma (de cualquier base), hay que distinguir:
   a) Si cualquier cara del cubo es igual a la base del prisma cuadrangular y los componemos por estas, obtenemos un prisma más alto.
   b) Con cualquier otra combinación, se obtiene un cuerpo tridimensional cóncavo.

3. Con un cubo o prisma y una pirámide (de cualquier base), hay que distinguir:
   a) Si cualquier cara del cubo o la base del prisma cuadrangular es igual a la base de la pirámide cuadrangular y los componemos por estas, obtenemos un cuerpo convexo.
   b) Con cualquier otra combinación, se obtiene un cuerpo tridimensional cóncavo.

4. Con dos pirámides (de cualquier base), hay que distinguir:
   a) Si las bases son polígonos iguales, y las hacemos coincidir por estas, obtenemos un cuerpo convexo.
   b) Si las pirámides son triangulares e iguales y las componemos por sus caras laterales, podemos encontrar casos de cuerpos cóncavos y de convexos.
   c) Con cualquier otra combinación, se obtiene un cuerpo tridimensional cóncavo.

5. Con un cilindro y un cono (con base de cualquier radio), hay que distinguir:
   a) Si el radio de la base del cilindro es igual al radio de la base del cono y los componemos por estas, obtenemos un cuerpo convexo.

6. En cualquier otra combinación, se obtiene un cuerpo tridimensional cóncavo
   Con dos conos (de base de cualquier radio), hay que distinguir:
   a) Si los radios de las bases de los conos son iguales y los componemos por estas, obtenemos un cuerpo convexo.
   b) Con cualquier otra combinación, se obtiene un cuerpo tridimensional cóncavo.

Deberán observar la dificultad de componer la esfera con cualquier otro cuerpo, por su forma geométrica, concluyendo que siempre se encontrará un cuerpo cóncavo en cualquier combinación con los cuerpos estudiados en primaria.

De nuevo hay más combinaciones, pero la idea es reflexionar con ellos y ellas acerca de los cuerpos que se van componiendo, incidiendo en las condiciones que deben darse para formar un nuevo cuerpo conocido. Si no ocurre así, a partir de 5.º curso de primaria aprovecharemos estas actividades para trabajar los conceptos de concavidad y convexidad de figuras tridimensionales.

Una vez trabajadas la proporcionalidad directa y la regla de tres en el bloque de números y operaciones, se podrá hacer uso de estos conceptos para construir el de escala y utilizarlo para mejorar el trabajo con mosaicos y maquetas con más precisión que en los cursos anteriores. De esta manera, se trabajará la transformación de figuras de dos o tres dimensiones en otras de dos o tres, respectivamente, además de intentar dibujar figuras de tres dimensiones sobre el papel.

Si lo que se quiere es trabajar tres dimensiones, se podrá hacer una maqueta a escala de objetos de su alrededor: la mesa de estudio, la papelera, un armario de clase... para acabar con la posibilidad de hacer la maqueta de un conjunto arquitectónico concreto de su barrio o pueblo, del que previamente se hayan informado de las dimensiones reales. Habrá que relacionar esta tarea con el concepto de semejanza (véanse 3.4.2.3 y 3.4.2.4), donde las longitudes de los segmentos homólogos son proporcionales y la amplitud de los ángulos homólogos se conserva.

En último caso, y para relacionar los objetos de tres dimensiones con su representación plana, podemos desarrollar actividades en las que los niños intenten dibujar a escala algunos objetos reales sencillos: una bicicleta, una televisión…

19. Adquirir nociones de transformaciones geométricas: simetrías, giros, traslaciones, semejanzas. Identificarlas en el entorno familiar y en la naturaleza. Componer y dibujar figuras simétrica

En educación infantil se ha trabajado la lateralidad y las direcciones vertical, horizontal u oblicua de una manera muy intuitiva, con un gran componente de juego, incidiendo en la simetría de nuestro cuerpo, a partir de un eje vertical.

A partir de 1.º de primaria hemos de continuar con el estudio de la simetría. Y para ello se retoman las actividades con el propio cuerpo, ya que podemos considerar que su imagen es simétrica. Ellos y ellas deben llegar a descubrir el eje de simetría a través de su imagen en un espejo u otro tipo de representación, ayudándose de su propia lateralidad.

También se trabaja el descubrimiento de la simetría plana en el entorno, buscándola en diferentes objetos e imágenes; tendrán que reconocer su presencia y encontrar a partir de qué eje se desarrolla la simetría en cada caso (figura 132).

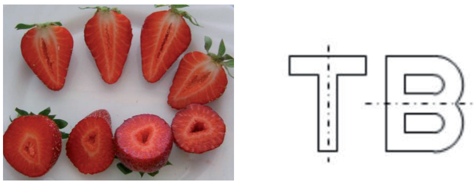


Figura 132. Representación de imágenes simétricas en objetos y figuras

Se puede trabajar la construcción de figuras simétricas utilizando algunos materiales didácticos que permitan disposiciones simétricas de piezas o fichas para formarlas (figura 133).

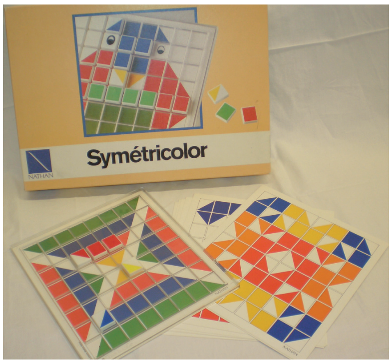


Figura 133. Symétricolor (fabricado por Nathan)

Posteriormente, tendrán que dibujar figuras simétricas, dentro de sus posibilidades. Se trabajará con figuras planas sencillas y se utilizará, como ayuda, una cuadrícula que les permita encontrar fácilmente los puntos homólogos respecto del eje de simetría, que coincidirá con una de las direcciones de las rectas de la cuadrícula (figura 134).

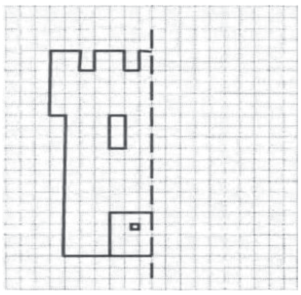


Figura 134. Representación de la mitad de una imagen simétrica

A partir de 3.er curso nos ocuparemos de las traslaciones, los giros y las simetrías. En un primer momento tendremos que encontrar estos movimientos (véase 3.4.1) en la realidad.

Cuando se produce un desplazamiento en línea recta y se conservan las formas y medidas de los objetos, se ha realizado una traslación.

Buscaremos giros en la realidad, aun a sabiendas de que se puede girar el objeto sobre sí mismo o alrededor de un eje externo (imaginario o no), que se llama eje de giro. Los ejemplos son abundantes y muchos los pueden encontrar en las atracciones de la feria, en el tambor de una lavadora, en el volante de un vehículo...

Continuaremos el trabajo de la simetría de los cursos anteriores alrededor de su reconocimiento en la realidad y utilizaremos material didáctico para descubrir regularidades. Deben ser capaces de identificar si un objeto, figura o dibujo es simétrico o no. Pueden utilizar espejos para averiguar rápidamente si lo es u observar cómo sería la simetría de un objeto dado. Además, se continúa con la representación de figuras planas simétricas con la ayuda de la cuadrícula mientras sea necesaria.

La aplicación de determinados giros a algunas figuras planas simétricas debe llevarlos a relacionar estos dos tipos de movimientos. Así, por ejemplo, para poder rotar objetos planos se fijarán por su centro a una superficie, en la que habremos marcado su contorno. Tendrán que observar cuándo la figura vuelve a coincidir con su silueta dibujada en la superficie. Las simétricas, al dar una vuelta completa coincidirán con el contorno dibujado tantas veces como ejes de simetría tienen (por ejemplo, el rectángulo dos veces, como se puede comprobar haciendo girar la tapa de una caja de zapatos) y, más concretamente, los polígonos regulares (cuadrados, triángulos equiláteros..., como se observa con la tapa cuadrada de una caja o con un trébol) tantas veces como lados tienen (figura 135).

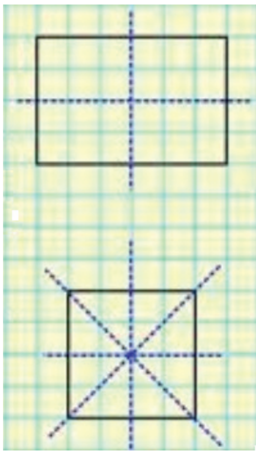


Figura 135. Representación de los ejes de simetría de un rectángulo (superior)
y un cuadrado (inferior)

En el resto de polígonos, al completar la vuelta completa, la figura solo coincide una vez con su contorno; por ejemplo, el trapecio de la imagen 136.

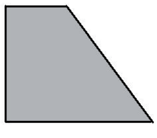


Figura 136. Representación de un trapecio rectángulo

Mención especial en este estudio debe tener el círculo, donde la experimentación (con la tapa de una cazuela, por ejemplo) permite comprobar que por muchos giros diferentes que le apliquemos siempre coincide con el contorno dibujado inicialmente (figura 137). La conclusión que el alumnado debería obtener es que el círculo tiene infinitos ejes de simetría.

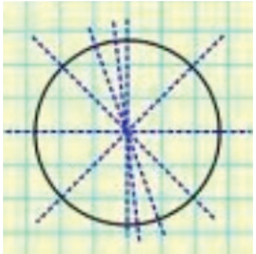


Figura 137. Representación de algunos ejes de simetría de un círculo

A partir de 4.º de primaria continuaremos el trabajo iniciado en los cursos anteriores y será el momento de cuantificar el desplazamiento, midiendo en el caso de las traslaciones la longitud del vector de traslación (véanse 3.4.1.1 y 3.5) y, en el caso de los giros, la amplitud del ángulo de giro (véanse 3.4.1.2 y 3.5) que son contenidos correspondientes al bloque de medida.

También hay que seguir representando con lápiz y papel figuras planas que sean simétricas respecto de un eje. Se pueden repasar actividades con la ayuda de papel cuadriculado, teniendo en cuenta la dificultad que representa para los niños y las niñas la utilización de ejes de simetría que no coincidan con ninguna de las direcciones de las líneas de la cuadrícula. Posteriormente utilizaremos papel sin cuadricular, entonces el alumnado tendrá que servirse de los instrumentos de dibujo (regla, compás y transportador de ángulos) para medir distancias y ángulos en la figura original y reproducirlas al otro lado del eje.

En 6.º curso se deben trabajar las reducciones y ampliaciones proporcionales de figuras. Es un trabajo ya introducido con las escalas aplicadas a croquis, mapas y planos en la capacidad 2 y con los mosaicos y maquetas en la capacidad anterior. Debemos relacionar la semejanza con el concepto de proporcionalidad (véanse 3.4.2.3 y 3.4.2.4), observar que hay un valor en estas transformaciones que siempre se mantiene, la constante de proporcionalidad, y que sirve para encontrar las medidas lineales que habrán de aumentar o disminuir. Un ejemplo con heptágonos cóncavos se puede encontrar en la figura 138.

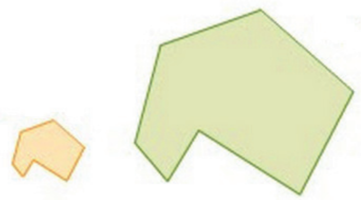


Figura 138. Representación de heptágonos cóncavos semejantes

TEMA 2

Estadística, azar y probabilidad

1. Introducción

1.1. Histórica

La palabra *estadística* tiene el mismo origen que la palabra *estado*. Los estados tienen la necesidad de formular programas para resolver, de manera inteligente, los problemas que plantean las administraciones de sus países. Habrá que confeccionar tablas numéricas que recojan los datos de interés y, a partir de su estudio y análisis, aceptar o rechazar los programas a plantear y estas son las llamadas estadísticas. No solo los estados, diferentes empresas y organismos tienen también necesidades parecidas.

La estadística, como todas las ciencias, no surgió de improviso, sino mediante un proceso largo de desarrollo y evolución, desde hechos de simple recolección de datos, hasta la diversidad y rigurosa interpretación de los mismos que se dan hoy en día. Así, podemos encontrar el origen de la estadística a comienzos de la historia y esto se sabe tanto a través de crónicas y datos escritos, como de restos arqueológicos, y es explicable por la inherente necesidad de la sociedad de conocer aspectos elementales de su vida cotidiana. Estos aspectos podían ser cuántos habitantes tiene una tribu o pueblo, de cuántos bienes dispone, etc.

El origen de la estadística empieza posiblemente en la isla de Cerdeña, donde hay monumentos prehistóricos que constan de bloques de basalto superpuestos sin mortero. En las paredes de estos bloques se encuentran grabados toscos signos que han sido interpretados con mucho de acierto como muescas que servían para llevar la cuenta del rebaño y la caza. Poco a poco, a medida que evolucionó la sociedad, estos registros fueron más frecuentes y ajustados a la realidad.

La civilización egipcia llevaba la cuenta de los movimientos poblacionales y continuamente hacía censos. Incluso tenían a Safnkit como diosa de los libros y las cuentas.

En la Biblia observamos, en uno de los libros del Pentateuco bajo el nombre de Números, el censo que realizó Moisés después de la salida de Egipto.

En China, Confucio, en uno de sus textos clásicos, *Shu-King*, escrito hacia el año 550 a. C., nos narra cómo el rey Yao, en 2238 a. C., mandó hacer una estadística agrícola, industrial y comercial.

También en la Grecia clásica se realizaron importantes estudios estadísticos en cuanto a distribución de terrenos, servicio militar, etc. Así mismo, hay que citar entre los griegos principalmente a Sócrates, Heródoto y Aristóteles, quienes a través de sus escritos estimularon la estadística por su importancia para el Estado.

En Roma, su perfecta organización política, jurídica y administrativa favoreció el desarrollo de una manera de hacer, que se podría decir ahora que era estadística.

Con Carlomagno, en Francia, volvieron las estadísticas a Europa, con un carácter netamente financiero y administrativo. En Inglaterra, Guillermo el Conquistador, encomendó la realización de una especie de catastro, que constituye un documento estadístico-administrativo.

Hacia la mitad del siglo XVII, gracias a Vito Seckendorff y sobre todo a German Conring, a quien se conoce como el fundador de la estadística, se define esta como la descripción de hechos notables de un Estado. El mejor de sus seguidores fue Gottfried Achenwall, quien consolidó definitivamente los postulados de la nueva ciencia y le dio el nombre de estadística. Von Scholer separó la teoría de la estadística de su aplicación práctica. Todos estos estudiosos formaron parte de la tendencia de la estadística universitaria alemana, conocida como estadística descriptiva y que se corresponde con la manera actual de trabajarla (Muñoz, 2004).

Los conceptos de azar e incertidumbre son tan antiguos como la propia civilización. La humanidad siempre ha tenido que soportar la incertidumbre del clima, la provisión de alimentos y otros aspectos del medio ambiente y ha tenido que esforzarse para reducir esta incertidumbre y sus efectos. Aproximadamente, hacia el año 3500 a. C., los juegos de azar se practicaban en Egipto con objetos de hueso, considerados como los precursores de los dados. Sabemos que el juego con dados ha sido muy popular desde entonces y que fue parte importante en el primer desarrollo de la teoría de la probabilidad. A pesar de que no fue hasta finales del siglo XVI, el XVII y principios del XVIII cuando se desarrolló esta teoría. Girolano Cardano y Galileo Galilei introdujeron los conceptos relacionados con la probabilidad numérica. A mitad del siglo XVII, matemáticos como Blaise Pascal y Pierre Fermat iniciaron la teoría matemática de la probabilidad y consiguieron obtener probabilidades exactas para ciertos problemas relacionados con los juegos de dados. Un poco más tarde, Christiaan Huygens publicó el primer texto sobre las probabilidades.

Ya más adelantado el siglo XVIII, Jakob Bernouilli y Joseph-Louis Lagrange hacen evidente la relación entre los juegos de azar y los fenómenos aleatorios en ciencias como física, medicina, biología y ciencias sociales e introducen, también, un buen número de nociones básicas de combinatoria que se utilizaron como aplicaciones en el cálculo de probabilidades. Abraham de Moivre descubre y desarrolla el concepto de distribución normal que, posteriormente, retoma Pierre-Simon Laplace publicando en 1812 la *Théorie analytique des probabilités*.

Esta rama de las matemáticas toma la forma actual a partir de 1930, cuando Andrey Kolmogorov establece, con sus axiomas para el cálculo de probabilidades, las bases matemáticas para establecer la teoría. Émile Borel proporciona una demostración de la ley de los grandes números donde ya maneja la noción de probabilidad con las propiedades aditivas (Arribas *et al.*, 2012).

1.2. Modelo estadístico

Con el nombre de modelo estadístico se hace referencia a la secuencia de grandes pasos que constituyen un procedimiento. En primer lugar, tiene que haber un problema susceptible de ser resuelto con técnicas estadísticas. Una vez delimitado este problema, se puede trabajar de diferentes maneras. Los pasos siguientes no pretenden indicar que siempre se tenga que pasar por cada uno de ellos; un estudio estadístico podría ser de uno, dos o tres pasos.

1.º: Encontrar toda la información posible sobre el problema (recogida de datos). Dentro de este paso, que se desarrollará en el siguiente capítulo del tema, se encontraría la confección de la encuesta y la puesta en práctica.

2.º: Organizar los datos. Se trata de hacer esta organización de forma que aporte la mayor cantidad posible de información y que describa claramente el problema. También entraría dentro de este paso calcular medidas o índices de estos datos con la misma intención, aportar información directa de la recogida (estadística descriptiva).

3.º: Generalizar. Cuando se hacen muchos experimentos o estudios estadísticos y se consigue obtener regularidades y generalizar los problemas, se llega al concepto de probabilidad. Si se continúa con este proceso se pueden obtener modelos que recogen las características comunes a conjuntos de problemas parecidos (modelos de probabilidad).

4.º: Extraer información del conjunto sobre el cual se había hecho un estudio, pero sin que esta información esté de manera expresa en los datos recogidos. Si es sobre la muestra utilizada (subconjunto de la población), se denomina regresión y solo se usan técnicas descriptivas. Pero podemos querer obtener información de la población de la cual se había sacado una muestra y entonces nos hará falta la probabilidad y los modelos de probabilidad (inferencia estadística).

1.3. Al tema

El objetivo del tema es hacer una primera aproximación a los conceptos básicos de la estadística descriptiva y la probabilidad, así como su tratamiento en un aula de primaria. Del modelo estadístico anterior, nos interesan los pasos 1.º y 2.º y, además, parte del 3.º.

2. Fundamentación teórica

2.1. Recogida de datos

Se entiende por recogida de datos el proceso por el que se obtiene la información necesaria para hacer un estudio descriptivo o cualquiera otro tipo de estudio estadístico (Nortes, 1987).

2.1.1. Aspectos generales

2.1.1.1 ¿Qué es una encuesta?

Antes de empezar la recogida de datos hay que tener perfectamente definidos los elementos que integran la población objeto de estudio. Además, es importante escoger la manera de proceder. Debe ser ordenada, sobre todo si el número de datos es elevado y hay que tener previamente preparado el material necesario, como por ejemplo: cuestionarios, impresos, personas encargadas, etc. A pesar de todo, habremos de tener en cuenta que siempre se pueden producir errores humanos, fallos en la transcripción de datos, datos inexactos, etc. Se denomina trabajo de campo al conjunto de todo aquello relacionado con la recogida de los datos: fechas, preparación del material, selección de personal (si procede), etc.

La técnica de obtención de datos más utilizada es la encuesta, estudio de investigación que permite obtener información de la población a partir de unos métodos estandarizados. En el estudio estadístico se pueden recoger datos de toda la población o de una muestra de esta (que puede ser o no representativa). Un ejemplo de encuesta a todos los individuos afectados por una variable de estudio es el censo poblacional, otro el censo electoral...

Dos cuestiones a tener en cuenta a la hora de realizar estos tipos de estudios son las siguientes:

1. El objetivo:
   a) Describir y comparar. Tanto si es de toda la población (censo), como si es de una muestra, se puede tener solo el objetivo de presentar unos resultados que describan el problema que se quiere estudiar de los individuos y comparar este estudio con otros que se hayan podido hacer en otro momento (pasos 1.º y 2.º del modelo estadístico).
   b) Obtener conclusiones de un colectivo mayor. En este caso, hay que elegir una muestra y estudiar las características de sus datos. A partir de ellas se inferirá información del colectivo mayor (4.º del modelo estadístico, este punto no se estudia en el tema).

2. La definición de los caracteres de los individuos de la población. Los individuos tienen que presentar una característica que se quiera estudiar, llamada

variable y las preguntas sobre esta siempre deben tener una posible respuesta. También hay que prever de qué tipo son estas variables: cualitativas (no se puede precisar numéricamente, por ejemplo, el color del cabello) o cuantitativas (determinadas por una cantidad numérica) y, en este caso, pueden ser continuas (la variable puede tomar muchos valores diferentes y, por lo tanto, es recomendable agruparlos, como el peso de las personas, por ejemplo) o discretas (puede tomar pocos valores y no hace falta el agrupamiento, como es el caso del número de hijos e hijas de una familia).

2.1.1.2. Población y muestra

Cualquier investigación estadística tiene que estar referida a un conjunto de personas o cosas que presentan una propiedad determinada. Estos colectivos reciben el nombre de población. Cada uno de los elementos que la forman se denomina individuos. La dimensión de la población se define como el número de elementos que la componen (finito o infinito) y normalmente se representa con la letra «N». Las propiedades o cualidades que presentan todos los elementos de la población son las variables definidas en el punto anterior.

Una subpoblación es un subconjunto de la población donde todos los individuos reúnen ciertas características que no tienen el resto de los elementos de la población.

Se define una muestra como un subconjunto de la población. La dimensión de la muestra se define como el número de elementos que la componen y normalmente se representa con la letra «n». Hay diferentes métodos para seleccionar una muestra, los cuales se conocen como tipos de muestreo.

A. Representatividad de una muestra

Para que una muestra represente a la población debe garantizar una serie de condiciones, tanto en el momento del muestreo, como en la selección adecuada de los individuos de la muestra.

En el muestreo se pueden cometer dos tipos de errores: muestrales (por el hecho de no contar con todos los elementos de la población y está claro que siempre se producirá este tipo de error, si utilizamos muestras) y de sesgo (por no haber cogido los elementos de manera aleatoria).

B. Tipos de muestreo

- Opinático. Los elementos de la muestra se eligen a criterio del investigador. No es representativo porque no se puede medir la diferencia que existe entre el valor observado en la muestra y el verdadero valor en la población.

- Aleatorio o probabilístico. Cualquier elemento de la población tiene la misma probabilidad de ser escogido, es decir, los individuos se eligen al azar. Por lo tanto, la representatividad de la muestra se garantiza totalmente. Puede ser:
  - Simple: cualquier elemento tiene la misma probabilidad de ser elegido durante todo el proceso.
  - Irrestricto: al inicio del proceso, cualquier elemento tiene la misma probabilidad de ser elegido, pero una vez escogido no se puede volver a elegir.

- Estratificado. Los elementos de la población se dividen por estratos (estos pueden estar determinados por edades, nivel económico, profesiones, por ejemplo). La muestra se forma con la elección de un número de elementos de cada uno de los estratos. Así, se consigue utilizar muestras de menor dimensión y, por lo tanto, más fiables. La dimensión de cada uno de los estratos de la muestra es proporcional a la de los estratos correspondientes de la población. La representatividad de la muestra se garantiza dado que a cada uno de los estratos se le aplica un muestreo aleatorio.

- Por áreas o conglomerados. Los elementos de la muestra se agrupan por conglomerados (habitualmente relacionados con la distribución territorial de la población), dentro de cada uno se aplica muestreo aleatorio. Un conglomerado puede ser, por ejemplo, el conjunto de números de una calle de una determinada ciudad o diferentes pueblos de una comarca. La representatividad de la muestra viene garantizada por el hecho de haber elegido los conglomerados por un método aleatorio.

- Sistemático. El primer elemento de la muestra se elige al azar, el resto se selecciona de acuerdo con una regla predeterminada. También recibe el nombre de muestreo con comienzo aleatorio. En este procedimiento se tiene la misma representatividad que en el muestreo simple si la lista utilizada es aleatoria respecto de la variable objeto de estudio.

- Secuencial. Se toma una decisión por cada unidad (o grupo de unidades) de un lote de elementos. Esta decisión es de aceptación, rechazo o continuación de la inspección y se hace de acuerdo con unas especificaciones previamente establecidas. Fundamentalmente, proporciona una gran disminución en el volumen de la muestra, a pesar de que puede provocar una ligera pérdida de representatividad.

2.1.1.3. Pasos en la realización de una encuesta

1. A partir de la detección de un problema susceptible de ser estudiado estadísticamente, hay que formularlo claramente, indicar los objetivos de la encuesta y expresarlos con la mayor precisión posible.

2. Definición de la población a la cual se aplicará la encuesta. Al elegir una muestra, esta lo será de la población sobre la cual deseamos obtener información.
3. Determinación de las preguntas a efectuar. La cantidad debe ser la menor posible y en consonancia con el interés de los datos que se desea obtener. Las preguntas tienen que ser de fácil comprensión y, además, las más decisivas hay que situarlas al principio o al final del cuestionario.
4. Métodos de grabación. Las maneras de registrar las preguntas y sus respuestas pueden permitir codificar los datos, lo cual simplifica el posterior tratamiento de los resultados.
5. Elección de unidades de muestreo, es decir, organizar los elementos de la población en clases disjuntas. El conjunto de las unidades y las informaciones de las cuales se dispone para realizar la encuesta se denomina marco de la encuesta.
6. Elección de un tipo de muestreo.
7. Selección de la muestra.
8. Encuesta piloto, es decir, probarla a un grupo reducido antes de pasarla a toda la muestra.
9. Organización del trabajo de campo.
10. Tabulación y depuración de datos. Hay que hacer una revisión de los cuestionarios obtenidos y una valoración de las respuestas desestimadas por los encuestados.

2.1.1.4. Tipos de encuestas

Las encuestas pueden clasificarse de varias maneras:

a) Según el ámbito que alcanzan:
- Exhaustivas: se dispone de todo el colectivo para hacerlas, es decir, de la población.
- Parciales: se utiliza una muestra que debería representar a todo el colectivo.

b) Por la manera de obtener los datos:
- Directas: los datos se obtienen de manera específica y directamente de los individuos del problema concreto que se quiere tratar.
- Indirectas: los datos se pueden obtener a partir de bancos de datos correspondientes a otros estudios.

c) Según el interés del estudio:
- De opinión: las preguntas pretenden conocer la opinión de una población respecto de un tema.
- De hechos: las preguntas pretenden recoger datos de un acontecimiento.
- Mixta: incluye preguntas que alcanzan opiniones y hechos.

2.1.2. Elaboración de la recogida y planificación de las acciones a realizar

2.1.2.1. El cuestionario

Se podría definir como un conjunto de preguntas alrededor de los hechos o aspectos interesantes para la investigación y que responden los encuestados. Estas preguntas pueden presentarse en varios formatos (papel, digital, etc.). Podemos clasificar los cuestionarios en:

- Cuestionario individual. En esta modalidad la tarea de registro de las respuestas la realiza el encuestado.
- Cuestionario lista. Hay una persona, el encuestador, que recoge las respuestas.

Los tipos de preguntas que pueden aparecer en el cuestionario, según la respuesta, son:

- Abiertas. No está especificada la respuesta en opciones.
- Cerradas. Se ofrecen las posibles respuestas, dicotómicas o de múltiples opciones. Estas deben ser excluyentes y exhaustivas.

Las recomendaciones a la hora de redactar las preguntas del cuestionario son:

1. Tienen que ser cómodas para los encuestados: pocas, cortas, que no impliquen esfuerzos de memoria, consultas documentales, ni cálculos numéricos complicados, etc.
2. Deben ser precisas para evitar confusiones: que proporcionen información de solo una idea, preferiblemente cerradas, con lenguaje sencillo y sin palabras ambiguas, planteadas de manera concreta, que provoquen respuestas directas e inequívocas, etc.
3. Hace falta que eviten la diversificación excesiva de las respuestas y si son abiertas, no dar opción alternativa.
4. Tienen que formularse de manera neutral, evitando preguntas indiscretas, con carga emocional o que provoquen prejuicios en los encuestados.

Cuando se prepara el cuestionario, se deberían respetar las siguientes etapas:

1. Formular hipótesis generales y específicas para determinar lo que se pretende medir y, con las preguntas que se hagan, intentar contestar a estas hipótesis. Todo el cuestionario tiene que tender a validarlas.
2. Determinar las variables o características a medir.
3. Planificar el contenido del cuestionario.
4. Redactar las preguntas.
5. Presentar el cuestionario, con dos consideraciones:
   a) técnica, tiene que poder tabularse después.
   b) material, si es cuestionario individual o cuestionario lista, si tiene que haber notas aclaratorias o no...

En la distribución del cuestionario, hay que tener en cuenta:

1. La fecha. Si, por ejemplo, se hace por correo, deben evitarse los momentos de vacaciones.
2. Las formas de hacerla:
   a) correo postal
   b) repartidor
   c) encuestador

Finalmente, la recogida se debe hacer por las mismas vías utilizadas en la distribución.

2.1.2.2. La entrevista

La entrevista es el acto que reúne a dos o más personas, una de las cuales es la que pregunta y anota las respuestas.

La importancia de la entrevista recae en que es concreta (en ese momento, el centro de atención es la encuesta misma), personal, directa y de respuestas inmediatas. La entrevista con cuestionario es más dirigida, las preguntas están ya dispuestas y teóricamente, no se puede salir de estas. Esto provoca poca espontaneidad pero, por el contrario, mucha fiabilidad. En cambio, sin cuestionario no está tan dirigida, pero es más espontánea, a pesar de que menos fiable.

Podemos considerar que hay ventajas al utilizar cuestionario con encuestador, por ejemplo, que es más comprometido el responder, porque mientras que una encuesta recibida por correo puede ser olvidada o rota en el acto, esta modalidad, no. Permite obtener más respuestas y, como hay una persona que lee las preguntas y anota las respuestas, puede ser dirigida a personas analfabetas o no. Como desventaja, la presencia o influencia del encuestador puede condicionar las respuestas del individuo.

Cuando se quiere ejecutar la entrevista, es bueno avisar, propiciar un clima agradable y no involucrar la opinión del propio encuestador en la que pueda tener el encuestado. Y esto se tendría que acompañar con otras características que debe tener esta persona, como por ejemplo, cualidades éticas (para realizarla correctamente, sin manipular los datos), cualidades sociales (que no generen sentimientos que perjudiquen las respuestas) y cualidades técnicas (saber un poco del trabajo que desarrolla).

El último paso es el vaciado de los datos de las entrevistas. Se tienen que contabilizar las preguntas con respuestas cuantitativas. Si son cualitativas, hay que codificarlas y, por último, detectar los errores que se hayan podido producir, lo cual es importante con vistas a las próximas realizaciones.

En este momento, el terreno está preparado para que sea la estadística descriptiva la que se encargue de describir y organizar los datos.

2.2. Estadística descriptiva

2.2.1. Organización de datos

La estadística descriptiva se encarga de la recogida y posterior representación, ordenación y tabulación de los datos obtenidos en las diferentes observaciones, es decir, es la parte de la estadística que se ocupa de una primera fase, en la cual se debe sintetizar la información y describirla. Como los datos pueden estar agrupados o no y corresponder a una variable o a más de una, la presentación tendrá que ser de manera diferente según sean estas. Para describirlos podemos disponer de dos vías: la numérica (tablas de frecuencias y medidas estadísticas) y la gráfica (diagramas de barras, histogramas, diagrama de sectores, etc.).

2.2.1.1. Tablas de frecuencias

El objetivo de las tablas de frecuencias es facilitar la lectura de los datos recogidos. Es una manera ordenada de presentarlos y poder recontarlos sin demasiada dificultad.

A. Tabla de frecuencias para datos no agrupados

Si se quieren presentar los datos de una variable de manera individualizada, hay que optar por un tipo de tabla como la que se muestra a continuación, donde k es el número de valores o modalidades diferentes de la variable y, por lo tanto, $i \in \{1,...,k\}$:

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
x_i x_2 ⋮	n_i n_2 ⋮	f_i f_2 ⋮	N_i N_2 ⋮	F_i F_2 ⋮
-	n	*1*	-	-

Donde los elementos que intervienen son:

x_i: Valores o modalidades diferentes de la variable. Los valores tienen que estar ordenados de menor a mayor.

n_i: Frecuencia absoluta de x_i. Es el número de elementos con valor o modalidad x_i. Entonces $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

$f_i = \frac{n_i}{n}$: Frecuencia relativa de x_i. Expresa la frecuencia absoluta de ese valor o modalidad en su relación con n, por tanto, la relativa está referida a la unidad. Si se multiplica por 100, se obtiene el porcentaje de elementos de la muestra con valor o modalidad x_i.

$N_i = n_1 + ... + n_i$: Frecuencia absoluta acumulada de x_i. Es la suma de las frecuencias absolutas de los valores $\leq x_i$ o de las modalidades anteriores o coincidentes con x_i.

$F_i = f_1 + ... + f_i$: Frecuencia relativa acumulada de x_i. Es la suma de las frecuencias relativas de los valores $\leq x_i$ o de las modalidades anteriores o coincidentes con x_i. Si se multiplica por 100 se obtiene el porcentaje de elementos de la muestra con valor $\leq x_i$ o de modalidades anteriores o coincidentes con x_i.

La tabla, con estas columnas, se considera una tabla de frecuencias completa para datos sin agrupar.

B. Tabla de frecuencias para datos agrupados

Si queremos presentar los datos de una variable de manera agrupada, clasificaremos sus valores en intervalos que denominaremos clases. Hay que decir que los criterios y las decisiones de agrupación son de la persona que esté confeccionando la tabla, aunque puede haber algunas indicaciones objetivas:

- Las clases deben estar acotadas.
- Tienen que ser disjuntas y exhaustivas. Por lo tanto, los intervalos habrán de ser cerrados por la izquierda y abiertos por la derecha, por ejemplo. En el supuesto de que el último valor de la variable coincida con el extremo superior del último intervalo, se tiene que cerrar este por la derecha.
- Se debe establecer un número adecuado de intervalos. Una manera de aproximar este número es la fórmula de Nordiffe, $\sqrt{n}$, donde n es el número de datos.
- Llamamos a_i a la amplitud de los intervalos. Cuando se decide que todos los intervalos sean de la misma amplitud, esta será: $a_i = \frac{\text{Re}}{I}$, donde $\mathbf{Re} = x_{\max} - x_{\min}$ es el recorrido de la variable e I es el número de intervalos elegido.
- Si L_{i-1} es el extremo inferior del intervalo y L_i el superior, se llama marca de clase al punto medio, $c_i = \frac{L_{i-1} + L_i}{2}$, que será el representante del intervalo.

La tabla de frecuencias completa para una variable agrupada es:

$[L_{i-1}, L_i)$	c_i	n_i	f_i	N_i	F_i
$[L_0, L_1)$	c_i	n_i	f_i	N_i	F_i
$[L_1, L_2)$	c_2	n_2	f_2	N_2	F_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	-	n	*1*	-	-

Donde las columnas de frecuencias tienen el mismo significado que en la tabla del apartado anterior.

C. Tabla de frecuencias para datos bidimensionales

Si tenemos dos variables por cada individuo, los datos se recogen en una tabla de doble entrada que se denomina tabla de correlación (variables cuantitativas) o de contingencia (variables cualitativas). La tabla siguiente muestra el caso de dos variables no agrupadas. Aunque no se verá, en el caso de ser una o las dos agrupadas, el tratamiento sería por intervalos del mismo modo que en el caso anterior.

X \ Y	y_j	$n_{i\bullet}$	$f_{i\bullet}$	$N_{i\bullet}$	$F_{i\bullet}$
x_i	n_{ij} / f_{ij}				
$n_{\bullet j}$		n			
$f_{\bullet j}$			1	-	-
$N_{\bullet j}$			-		
$F_{\bullet j}$			-		

Donde los elementos que intervienen son:

- (x_i, y_j): Valores de las variables cuantitativas o modalidades de los atributos en las variables cualitativas. Los valores de cada variable tienen que estar ordenados de menor a mayor o agrupados en intervalos, si procede.
- n_{ij}: Frecuencia absoluta conjunta. Es el número de veces que se presenta en la muestra la pareja (x_i, y_j). Separada por una diagonal representaremos también la frecuencia relativa conjunta f_{ij}.
- $n_{i\bullet}$: Frecuencia absoluta marginal del valor o modalidad x_i. Es el número de veces que se repite el valor x_i sin tener en cuenta los valores de Y.
- $n_{\bullet j}$: Frecuencia absoluta marginal del valor o modalidad y_j. Es el número de veces que se repite el valor y_j sin tener en cuenta los valores de X.
- $f_{i\bullet}, f_{\bullet j}$: Frecuencias relativas marginales de los valores o modalidades de una de las variables, sin tener en cuenta los valores o modalidades de la otra.

Del mismo modo que en las tablas de una variable finalizamos con las frecuencias acumuladas, en este caso marginales: $N_{i\bullet}$ y $F_{i\bullet}$ y las correspondientes $N_{\bullet j}$ y $F_{\bullet j}$.

2.2.1.2. Representaciones gráficas

- *Diagrama de barras*: Es la representación gráfica más usual para variables cuantitativas con datos sin agrupar o para variables cualitativas. En el eje de abscisas representamos los diferentes valores o modalidades de la variable. Sobre cada valor o modalidad levantamos una barra de altura igual a su frecuencia (figura 139).

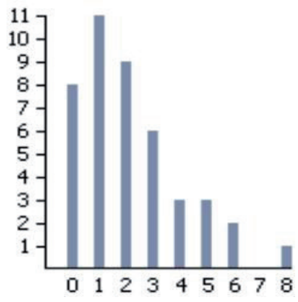


Figura 139. Representación de un diagrama de barras

- *Histograma*: Es la representación gráfica equivalente al diagrama de barras para datos agrupados de la variable. En el eje de abscisas representamos las clases y, sobre cada clase, levantamos rectángulos unidos entre sí, de área equivalente a la frecuencia de la clase (figura 140).

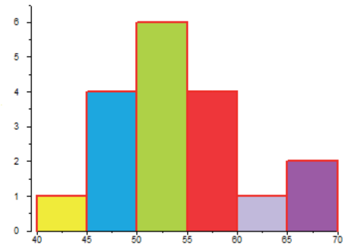


Figura 140. Representación de un histograma

- *Polígono de frecuencias*: Es una de las representaciones habituales de las frecuencias para variables cuantitativas con datos agrupados. En el caso de frecuencias no acumuladas se construye uniendo con segmentos los puntos medios de los lados superiores de los rectángulos del histograma, obteniendo así la línea poligonal correspondiente (figura 141).

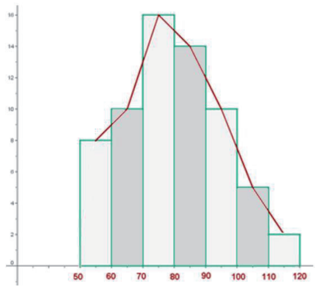


Figura 141. Representación de un polígono de frecuencias no acumuladas

El de frecuencias acumuladas se construye uniendo los vértices superiores derechos de los rectángulos. En el primer rectángulo, hay que unir el extremo izquierdo inferior, con el extremo superior derecho (figura 142).

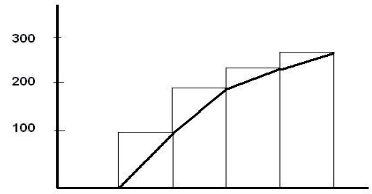


Figura 142. Representación de un polígono de frecuencias acumuladas

También se puede utilizar para datos sin agrupar. Las representaciones serán análogas, con la diferencia de que las barras estarán separadas.

- *Diagrama de sectores*: Es lo más usual para variables cualitativas. Se representa mediante un círculo. A cada modalidad o valor de la variable se le asocia el sector circular, cuyo ángulo es proporcional a su frecuencia o porcentaje (figura 143).

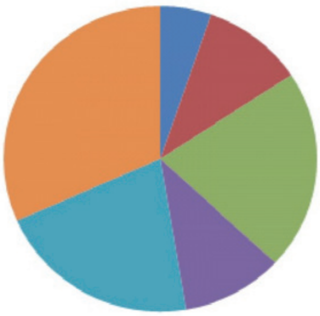


Figura 143. Representación de un diagrama de sectores

- *Pictograma*: Expresa, con dibujos alusivos al tema de estudio, las frecuencias de las modalidades o valores de la variable. Generalmente, la altura de las figuras representadas coincide con las frecuencias correspondientes. También se puede utilizar la superficie de los dibujos como representación de las mencionadas frecuencias (figura 144).

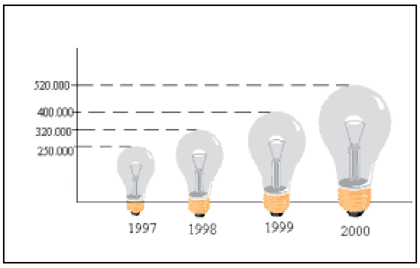


Figura 144. Representación de un pictograma relativo a la venta de bombillas

- *Pirámides de población*: Son un caso muy concreto de gráfico estadístico. Se utilizan para estudiar conjuntamente la variable edad y el atributo sexo, y así se puede analizar la distribución de la población de acuerdo con estas características y las consecuencias de una guerra o conocer el control demográfico, entre otros (figura 145).

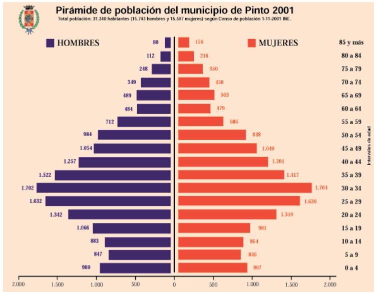


Figura 145. Representación de una pirámide de población

- *Nube de puntos o diagrama de dispersión*: Es el gráfico más utilizado para variables bidimensionales. Consiste en representar cada pareja de valores por un punto del plano. Cuando una pareja está repetida, se indica, junto a la representación correspondiente, el valor de la frecuencia (figura 146).

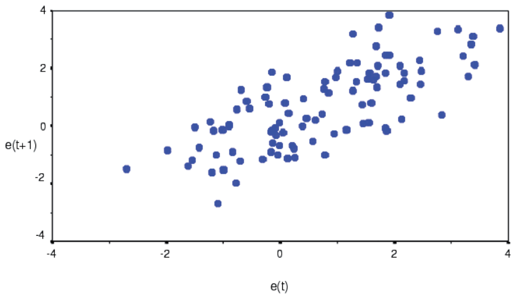


Figura 146. Representación de una nube de puntos

Otras representaciones gráficas que se pueden encontrar, pero que son mucho menos frecuentes serían: gráficos con columnas divididas, con columnas dobles, de series cronológicas, gráficos en espiral, estereogramas, etc.

2.2.1.3. Tendenciosidad y errores más comunes

En un estudio estadístico es importante que el informe que de este se haga sea suficientemente claro y exprese con precisión y exactitud los resultados obtenidos, de forma que no puedan ser malinterpretados.

Las causas que provocan la inutilidad de un informe estadístico pueden ser muy diversas y en ocasiones son debidas a errores durante la toma de datos o en su expresión.

Esencialmente, se pueden describir tres tipos de errores:

- Errores en la recogida de datos. Suelen ser debidas a que la muestra elegida no es representativa de la población, a que la técnica de obtención de los datos de algunos elementos de la muestra no es la adecuada o a no haberlos depurado adecuadamente.

- Errores en la expresión de los datos. Por ejemplo, cuando el informe se hace de manera gráfica, que este no sea interpretable, o que no aparezcan las unidades de medida en cada una de las representaciones... En el caso de valores agrupados de la variable, el error más común es la elección incorrecta de los intervalos de agrupación, es decir, que estos no constituyan una partición del recorrido de la variable a estudiar.
- Tendenciosidad de la expresión de los datos. Es uno de los principales problemas que se puede presentar en un informe estadístico, ya sea de manera intencionada o no. Consiste en que la información, a pesar de ser verdadera, se presenta de forma que puede inducir a error. Un claro ejemplo puede ser recortar un gráfico, o a la hora de representar gráficamente, tomar una escala inadecuada.

2.2.2. Cálculo de medidas de los datos de la variable

Generalmente, en un estudio estadístico no interesa la información de todos los elementos de la población, sino que el interés recae sobre un elemento típico suyo que se caracterizará por una serie de números, que denominamos medidas o parámetros estadísticos, y que se extraen de la masa de los datos. Estas medidas permiten resumir un gran número de ellos en unos pocos valores que proporcionan una idea aproximada de toda la población. Evidentemente, como pasa en cualquier proceso de síntesis, se produce una pérdida en la cantidad de información, pero esta se compensa con la facilidad de manejo de estos números. Los mencionados parámetros, además, sirven para comparar dos distribuciones de frecuencias. Hay de tres tipos, de centralización, de posición y de dispersión.

2.2.2.1. Medidas de centralización

Las medidas de centralización, posición central o localización central se expresan con las mismas unidades que las observaciones y determinan una cantidad central en la distribución alrededor de la cual se encuentran repartidos los valores de la variable. Las más importantes son las siguientes:

A. Media aritmética

Es una medida que pretende representar todos los valores de la distribución. Es un número calculado y, por lo tanto, puede no coincidir con ningún valor de la distribución. Se define como el resultado de dividir la suma de todos los datos por el número de estos y se representa por $\bar{x}$. En el momento de calcularla distinguiremos dos casos:

- Datos no agrupados de la variable. La media aritmética de una serie de valores $\mathbf{x_1, x_2, \cdots, x_k}$ que toma una variable estadística $\boldsymbol{X}$, cuando los datos no se encuentran agrupados se calcula de la manera anteriormente señalada:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i}{n}.$$

- Datos agrupardos de la variable. Se toma como valores de la variables las marcas de clase de cada uno de los intervalos (**c_i**) y se procede como si los datos no estuvieron agrupadas, por lo tanto la expresión quedará:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} c_i \cdot n_i}{n}.$$

Ventajas de la utilización de la media aritmética:

- Se determina de manera objetiva y es única.
- Tiene un significado interpretativo muy claro.
- Es sencilla de calcular.
- En el caso de datos no agrupados de la variable, se utilizan todos los valores de la distribución para calcularla.

Inconvenientes:

- Los valores extremos de la distribución, muy dispares, influyen de manera notable en el valor de la media aritmética, lo cual puede hacerle perder representatividad.
- En el caso de datos agrupados de la variable, no se utilizan todos los valores de la distribución, sino los representantes de los intervalos, **c_i** y, por lo tanto, se pierde parte de información.

B. Moda

Se representa por ***Mo*** y se define como el valor o valores de la variable con la mayor frecuencia absoluta (análogamente modalidades de la variable si es cualitativa). Del mismo modo que en el caso anterior, para calcularla distinguiremos:

- Datos no agrupados de la variable. Su cálculo es muy sencillo en este caso, solo hay que mirar la columna **n_i** y la **x_i** asociada al mayor de estos valores, será la moda (puede haber más de una).

- Datos agrupados de la variable. Seguiremos dos pasos:
  1. Encontrar el intervalo modal (puede haber más de uno): será aquel con la mayor frecuencia absoluta. Nombraremos este intervalo como $\left[L_{i-1}, L_i\right)$.
  2. Hacer un cálculo para obtener, no el valor exacto de la moda, sino una aproximación que vendrá determinada por las siguientes hipótesis:
     – Hay una moda en cada intervalo modal.
     – En el interior del mencionado intervalo, la moda es el punto que equilibra las frecuencias absolutas de los intervalos adyacentes, suponiendo que los valores se reparten en el interior de los intervalos de manera

uniforme. Por lo tanto, si los intervalos tienen la misma amplitud, la moda se calcula como:

$$Mo = L_{i-1} + b \rightarrow n_{i-1} \cdot b = \left(a_i - b\right) \cdot n_{i+1} \rightarrow b = \frac{n_{i+1}}{n_{i-1} + n_{i+1}} \cdot a_i$$

y, por tanto,

$$Mo = L_{i-1} + \frac{n_{i+1}}{n_{i-1} + n_{i+1}} \cdot a_i$$

Una representación geométrica de la moda para datos agrupados la podemos encontrar en la figura 147.

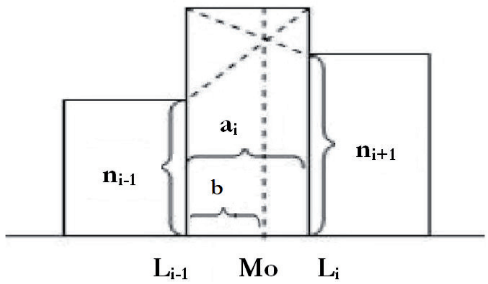


Figura 147. Representación geométrica de la moda

Si los intervalos tienen distinta amplitud, tenemos que encontrar, en primer lugar, la densidad de frecuencia de cada intervalo, d_i, que se define como el cociente entre la frecuencia absoluta y la amplitud del intervalo, $d_i = \frac{n_i}{a_i}$. El intervalo modal **[L_{i-1},L_i)** será ahora el de mayor densidad de frecuencia y para encontrar la moda aplicamos de nuevo la fórmula anterior, pero sustituyendo las frecuencias por las densidades de frecuencia, es decir:

$$Mo = L_{i-1} + \frac{d_{i+1}}{d_{i-1} + d_{i+1}} \cdot a_i$$

Ventajas de la utilización de la moda:

- Es sencilla de calcular.
- Tiene una interpretación muy fácil.

Inconvenientes:

- Es menos representativa que las otras medidas de centralización. Es útil, mayoritariamente, si se trata de distribuciones con datos cualitativos, porque no se puede calcular la media aritmética, al no tomar valores numéricos la variable.
- En el cálculo de la moda no se utilizan todos los valores de la distribución y, por lo tanto, se puede perder representatividad.
- Se puede encontrar cercana a valores extremos.
- Podemos encontrar distribuciones llamadas bimodales, trimodales..., según encontremos dos, tres o más modas.

C. Mediana

Representa el valor de la variable que se encuentra en la posición central de la distribución (si los datos se encuentran ordenados de menor a mayor) y podemos encontrarla tanto en variables cualitativas como cuantitativas. Puede ocurrir que en las cuantitativas haya que hacer un cálculo para obtenerla y, por lo tanto, que no coincida con ningún valor de la distribución. Es necesario resaltar que en el caso de las cualitativas esta medida depende totalmente del criterio de ordenación que se elija.

Se representa por ***Me*** y se define como el valor de la variable (real o calculado) que deja el mismo número de observaciones a su derecha y a su izquierda, cuando las observaciones están ordenadas de menor a mayor. El procedimiento para obtener este parámetro es diferente si los valores de la variable se encuentran agrupados o no:

- Datos no agrupados de la variable. En el caso de una variable cuantitativa, si el número de datos es impar, la mediana será el valor central. Para encontrarla, se tiene que calcular $\frac{n}{2}$ y se compara este valor con los de la columna N_i de la tabla de frecuencias. Se ha de elegir el primer valor de N_i igual o superior a $\frac{n}{2}$. La mediana es el valor x_i asociado a esta frecuencia absoluta acumulada.

  Si el número de datos es par, tomaremos como mediana la media aritmética de los dos valores centrales. Será un número calculado, y por lo tanto, no coincidirá con ningún valor de la distribución.

  En el caso de una variable cualitativa con un número impar de datos, el procedimiento es análogo a la misma situación para variable cuantitativa. Cuando el número de datos sea par y las dos modalidades que ocupan los lugares centrales sean diferentes, no se puede encontrar la mediana.

- Datos agrupados de la variable. Para obtener la mediana, seguiremos dos pasos:

  1. Encontrar el intervalo mediano. Para hallarlo, se tiene que calcular $\frac{n}{2}$ y comparar este valor con los de la columna N_i de la tabla de frecuencias. Se ha de encontrar el primer valor de N_i igual o superior a $\frac{n}{2}$. El intervalo mediano $\left[L_{i-1}, L_i\right)$ es el asociado a esta frecuencia absoluta acumulada.

  2. Calcular la mediana. En primer lugar, construimos el polígono de frecuencias absolutas acumuladas y buscamos la intersección con la recta de ecuación $y = \frac{n}{2}$ tal y como indica la figura 148. La mediana es la abscisa

del punto de intersección del polígono con la recta y se puede calcular mediante la fórmula:

$$Me = L_{i-1} + b \rightarrow \frac{n_i}{\frac{n}{2} - N_{i-1}} = \frac{a_i}{b} \rightarrow b = \frac{\frac{n}{2} - N_{i-1}}{n_i} a_i$$

y, por tanto,

$$Me = L_{i-1} + \frac{\frac{n}{2} - N_{i-1}}{n_i} a_i$$

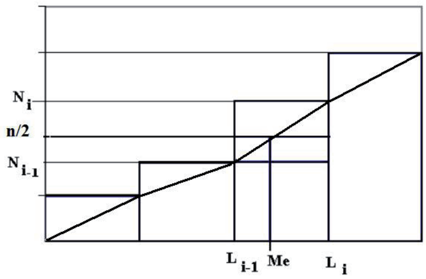


Figura 148. Representación geométrica de la mediana

Si se quiere establecer una relación entre la media aritmética, la moda y la mediana, se puede observar:

- Si la distribución es simétrica (lo es cuando en un diagrama de barras o un histograma, a partir de la vertical en la que se situaría la media aritmética, el gráfico se desarrolla igual a derecha e izquierda) y unimodal, los tres parámetros coinciden.
- Si la distribución es moderadamente asimétrica, se ha comprobado de manera empírica que $\left|\bar{x} - Mo\right| \leq 3 \cdot \left|\bar{x} - Me\right|$, expresión que se conoce como desigualdad de Pearson.

2.2.2.2. Medidas de posición: cuantiles

Son parámetros no centrales que dividen en partes los valores de la distribución ordenados de menor a mayor.

Para obtener cualquier cuantil los cálculos necesarios son parecidos a los que se han explicado para el caso de la mediana.

Si los valores de la variable no están agrupados, el cálculo inicial de $\frac{n}{2}$ se tiene que sustituir por el adecuado al cuantil que se quiera encontrar.

Si los valores de la variable están agrupados, el primer paso tiene que ser encontrar el intervalo donde se situará el cuantil. En el segundo paso se utilizará una expresión parecida a la de la mediana, en la que hemos de sustituir $\frac{n}{2}$ por el cálculo asociado a cada cuantil.

Los más importantes son:

- *Cuartiles*. Dividen la distribución de datos en cuatro partes iguales, que corresponden cada una de ellas a un 25 % de los datos. Normalmente se representan por $\boldsymbol{C_1, C_2, C_3}$ y se denominan habitualmente primero, segundo y tercer cuartil.
- *Deciles*. Valores que dividen la distribución de datos en diez partes iguales, correspondientes ahora a un 10 % de los datos. Normalmente se representan por $\boldsymbol{D_1, D_2,..., D_9}$. Generalmente se llaman decil 1, decil 2...
- *Percentiles*. Valores que dividen la distribución de datos en cien partes iguales, que en este caso contendrán un 1 % de los datos. Normalmente se representan por $\boldsymbol{P_1, P_2,..., P_9}$. De manera análoga al caso anterior se denominan percentil 1, 2...

Hay que destacar que entre los diferentes cuantiles y otras medidas de posición, se establecen las siguientes relaciones:

- $C_1 = P_{25}$
- $C_2 = D_5 = P_{50} = Me$
- $C_3 = P_{75}$
- $D_1 = P_{10},..., D_9 = P_{90}$

2.2.2.3. Medidas de dispersión

Son los parámetros estadísticos que intentan medir la mayor o menor concentración de los datos alrededor de los valores centrales de la distribución, es decir, alrededor de una de las medidas de centralización que en este caso será la media aritmética. Las principales son:

A. Recorrido

Se define como la diferencia entre el mayor y el menor valores de la variable. Se representa por Re y también se conoce como rango muestral. Cuanto menor sea el recorrido, mayor será la concentración de los valores de la variable alrededor de una medida central.

B. Varianza y desviación típica

La varianza es la medida de dispersión más utilizada y se define como la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones respecto a la media aritmética. Se representa por S_x^2 y se calcula de la siguiente manera:

- Para datos no agrupados de la variable: $S_x^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 \cdot n_i}{n}$

  Como esta expresión puede ser complicada a la hora de realizar los cálculos, normalmente se usa: $S_x^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} x_i^{\,2} \cdot n_i}{n} - \left(\bar{x}\right)^2$, y se obviará su demostración por no ser objeto de estudio en este apartado.

- Si los valores se encuentran agrupados utilizaremos cualquiera de las expresiones anteriores, sustituyendo $\boldsymbol{x_i}$ por $\boldsymbol{c_i}$.

La raíz cuadrada positiva de la varianza, S_x , se conoce como desviación típica.

C. Coeficiente de variación de Pearson

Se define como el cociente entre la desviación típica y el valor absoluto de la media aritmética, siempre y cuando esta sea distinta de cero, $CV = \dfrac{S_x}{\left|\bar{x}\right|}$. Es una cantidad que no tiene unidades y, por lo tanto, es invariante frente a los cambios de unidad de medida de los datos de la distribución.

Sirve para comparar la representatividad de $\bar{x}$ en muestras diferentes. Si tenemos el CV de dos distribuciones, la de menor CV tiene menor dispersión, por lo cual su media aritmética representa mejor la distribución correspondiente.

2.2.2.4. Medida de simetría

Se utiliza para estudiar la simetría de la distribución respecto de la media aritmética. Definimos el coeficiente de Fisher como $\boldsymbol{g_i} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \bar{x}\right)^3 \cdot n_i}{n \cdot S_x^{\,3}}$ que mide esta simetría y que permite extraer las siguientes conclusiones:

- Si $\boldsymbol{g_i = 0}$, la distribución de frecuencias es simétrica.
- Si $\boldsymbol{g_i > 0}$, la distribución de frecuencias presenta una asimetría hacia la derecha (figura 149).

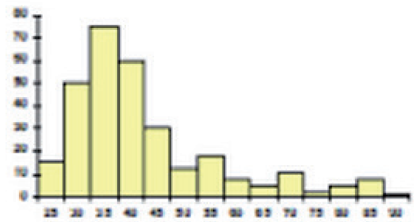


Figura 149. Representación de un histograma asimétrico hacia la derecha

- Si $\boldsymbol{g_i} < \mathbf{0}$, la distribución de frecuencias presenta una asimetría hacia la izquierda (figura 150).

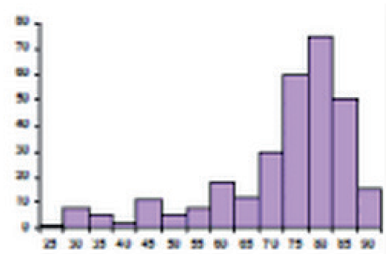


Figura 150. Representación de un histograma asimétrico hacia la izquierda

2.3. Azar y probabilidad

2.3.1. Espacios muestrales. Sucesos

Los fenómenos deterministas se caracterizan porque siempre que se repite un experimento en idénticas condiciones, se obtienen los mismos resultados.

La probabilidad es la ciencia encargada de estudiar los fenómenos no deterministas, los fenómenos llamados aleatorios, aquellos para los cuales no se puede predecir el resultado del experimento.

Se define el espacio muestral de un experimento aleatorio como el conjunto de todos sus posibles resultados. Este conjunto se representa por Ω.

Cualquier subconjunto del espacio muestral se denomina suceso.

Dado el espacio muestral de un experimento aleatorio, Ω, entonces:

- Se llama suceso seguro a Ω, es decir, aquel que se verifica siempre.
- Se llama suceso imposible a φ, es decir, al que no se verifica nunca.
- Se denomina suceso elemental a cualquiera constituido por un único elemento, es decir, al suceso que no se puede descomponer como unión otros sucesos.

- Se denomina espacio muestral simple aquel que está formado únicamente por sucesos elementales.

2.3.2. Definición de probabilidad y propiedades

Dado un suceso ***A*** del espacio muestral Ω, se define la probabilidad de ***A*** y se representa por $P(A)$ como el número real que verifica los siguientes axiomas:

- Axioma 1: $\forall A \subset \Omega,\ P(A) \geq 0$
- Axioma 2: $P(\Omega) = 1$
- Axioma 3: Para cualquier sucesión infinita de sucesos disjuntos, $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ de Ω, se verifica: $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Propiedades:

1. $P(\varphi) = 0$
2. $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$, donde todos los A_i son disjuntos entre ellos.
3. $\forall A \subset \Omega,\ P(A^c) = 1 - P(A)$, donde A^c es el complementario de *A* respecto a Ω.
4. $\forall A \subset \Omega,\ 0 \leq P(A) \leq 1$
5. $\forall A, B \subset \Omega : A \subseteq B \rightarrow P(A) \leq P(B)$
6. $\forall A, B \subset \Omega : P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

2.3.3. Espacios muestrales finitos

Supongamos que tenemos experimentos para los cuales el espacio muestral Ω contiene solo un número finito de resultados. Sean $S_1, S_2, \ldots, S_n$ todos los sucesos elementales de este espacio. Cada uno de estos sucesos S_i tiene una probabilidad $\boldsymbol{p_i}$, donde $p_i = P(S_i)$. De acuerdo con la definición de probabilidad, $\boldsymbol{p_i \geq 0}$ y $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Diremos que los sucesos son equiprobables si la probabilidad de cada uno de ellos es la misma, es decir, si $p_i = \frac{1}{n}$. En este caso, el espacio muestral diremos que es simple y equiprobable.

Si un suceso **A** de este espacio muestral contiene exactamente **m** resultados, entonces: $P(A) = P(S_1) + \cdots + P(S_m) = \sum_{i=1}^{m} P(S_i) = \sum_{i=1}^{m} p_i = \frac{m}{n}$.

Esta manera de calcular probabilidades se conoce como regla de Laplace y enuncia que la probabilidad de un suceso es el cociente entre el número de casos favorables y el de casos posibles.

A veces esta regla se utiliza como definición de probabilidad.

2.3.4. Leyes del azar

A. Ley de los grandes números

Si las pruebas necesarias para calcular la frecuencia relativa de un suceso se realizan en idénticas condiciones y, además, en cada una de estas pruebas, el número de experimentos es suficientemente grande, la frecuencia relativa tiende a la estabilidad, es decir, tiende a aproximarse a un número real fijo, que coincide con la probabilidad del suceso. Esta propiedad se conoce como ley del Azar o ley de los Grandes Números. Esta ley nos permite definir el concepto de probabilidad en función de la frecuencia relativa.

La probabilidad de un suceso **A** es el número alrededor del cual se estabiliza la frecuencia relativa de este suceso.

La definición clásica de probabilidad supone que el número de resultados posibles de un experimento es finito y que, además, los sucesos son equiprobables. Cuando no se verifica alguna de las dos condiciones, utilizamos la ley de los Grandes Números para el cálculo de probabilidades.

B. Espacio probabilístico o espacio de probabilidad

Un espacio probabilístico será un espacio muestral donde todos los sucesos tienen asignada una probabilidad de ocurrir.

Dos sucesos cualesquiera del espacio muestral Ω son mutuamente excluyentes si la aparición de uno de ellos excluye la aparición del otro en un mismo experimento. En este caso $P(A \cap B) = 0$ y, por tanto, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Dos sucesos cualesquiera del espacio muestral Ω son independientes cuando la probabilidad de que uno de ellos ocurra no está afectada por la aparición o no del otro suceso. En este caso, se verifica: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. En caso contrario, diremos que los sucesos son dependientes.

C. Probabilidad condicionada

En un espacio probabilístico, tenemos un suceso **A** y otro **B** del que sabemos el resultado. Se denomina probabilidad de **A** condicionada a **B** y se representa por $P(A/B)$, al valor: $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, es decir, a la probabilidad de que ocurra el suceso **A** si sabemos que ha ocurrido el suceso **B**.

Nota: Una herramienta muy útil para el cálculo de probabilidades condicionadas es el diagrama de árbol. Su esquema es el que se muestra en la figura 151 y en él también se pueden apreciar y calcular fácilmente todas las posibilidades de probabilidad condicionada donde intervienen los sucesos ***A, A^c^, B, B^c^***.

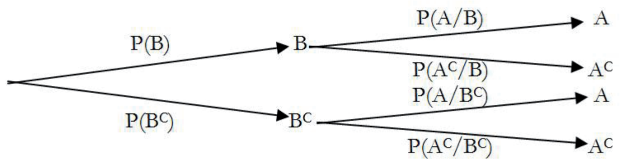


Figura 151. Representación del diagrama de árbol de una probabilidad condicionada

3. Capacidades a desarrollar en el aula de primaria

3.1. Listado de capacidades

El trabajo en educación primaria referente al tema de estadística, azar y probabilidad, tiene como objetivo contribuir a desarrollar en el alumnado las capacidades que se expresan en el siguiente listado, que tienen como finalidad favorecer el desarrollo de la competencia matemática y representar una ayuda para el resto de competencias de esta etapa educativa. El orden es secuencial, es decir, progresivo y de intensidad de dificultad creciente:

1. Descubrir la necesidad de recoger datos sobre un hecho objeto de interés, mediante experiencias sencillas. Elaborar cuestionarios para recoger estos datos. Reconocer diferentes tipos de variables.
2. Organizar datos en tablas de frecuencias absolutas y relativas. Interpretación de tablas.
3. Representar datos con diagramas de barras, pictogramas, polígonos de frecuencias, histogramas, diagramas de sectores y nubes de puntos. Interpretación de gráficos.

4. Necesidad de concentrar la información con medidas que la representan: media aritmética, mediana, moda y rango.
5. Reconocer el azar en la vida diaria. Diferenciar sucesos según su posibilidad de ocurrir. Sucesos elementales y compuestos. Elaborar árboles de posibilidades.
6. Construir el concepto de probabilidad a partir de la frecuencia relativa y del árbol de posibilidades.
7. Relacionar los conceptos de probabilidad y porcentaje.

3.2. Desarrollo de las capacidades

El objetivo de este apartado es trabajar algunos de los contenidos de estadística, azar y probabilidad presentados en la parte teórica, de forma que el alumnado pueda asimilarlos naturalmente, identificarlos y reconocerlos en situaciones reales.

Como criterio general, con el trabajo se persigue que puedan verbalizar e intercambiar información sobre todos estos conceptos, así como utilizar un vocabulario claro y preciso que determine inequívocamente cada uno de los objetos matemáticos estudiados.

1. *Descubrir la necesidad de recoger datos sobre un hecho objeto de interés, mediante experiencias sencillas. Elaborar cuestionarios para recoger estos datos. Reconocer diferentes tipos de variables*

Para saber más sobre algunos hechos interesantes de nuestro entorno, también para recordarlos, analizarlos, comunicarlos, etc., hemos de trabajar en el aula la necesidad de recoger datos sobre ellos.

Es una tarea que ha iniciado su desarrollo durante la educación infantil. Por ejemplo, cada día se hace el recuento el alumnado que hay en clase y de los que se han quedado en casa, se recogen datos respecto del tiempo meteorológico, de los tipos de alimentos que llevan los niños y las niñas para almorzar, etc.

En 1.er y 2.º curso de primaria se puede continuar con esta recogida de datos diaria y hacer también otros tipos de actividades que necesiten la elaboración de un cuestionario muy elemental. Por ejemplo, se pueden recoger datos de la familia de cada niño o niña para construir su propio árbol genealógico inmediato, elaborar unas preguntas básicas de número de hermanos, de abuelos, de tíos... Conviene que estas preguntas se piensen en clase y sea decisión de la mayoría hacerlas.

En general, se debe intentar que los contextos en los cuales se haya trabajado sean cercanos para el alumnado y que los números que aparezcan relacionados con los datos respeten los conocimientos numéricos de los niños y las niñas.

A medida que se avanza en estos primeros cursos y mejoran su comprensión y expresión oral y escrita, se pueden plantear investigaciones con cuestionarios más elaborados o con más preguntas.

En los primeros años de primaria se puede trabajar con situaciones de variable cuantitativa y/o cualitativa. Es evidente que han podido aparecer con antelación estos dos tipos de variables, pero no se ha insistido en las diferencias entre ellas. En este momento se debe observar que en las variables cuantitativas los datos siempre son numéricos (número de hermanos, edades de los compañeros de clase, calificaciones, grados de temperatura...), mientras que en las cualitativas no lo son (color preferido, lugares para hacer una excursión, películas a ver, cuentos favoritos...). Hacia 3.º o 4.º de primaria, se pueden introducir los nombres de los dos tipos de variables sin pretender que los niños y las niñas los utilicen cotidianamente.

Si en el desarrollo de este trabajo se hace necesario elaborar algún cuestionario, en el caso de las variables cualitativas, se puede dar para cada pregunta una batería de posibles respuestas, para evitar su dispersión.

Hacia el final de primaria, el mayor conocimiento numérico del alumnado, posibilitará la introducción de estudios sobre hechos en los que la variable tome una gran cantidad de valores, por ejemplo la altura o el peso de cada niño o niña. El objetivo es encontrar valores candidatos a ser agrupados para hacer la distinción con los no agrupados que son los que se venían usando hasta este momento.

En un principio trataríamos los datos de manera parecida al trabajo realizado en los cursos anteriores. Al observar la dificultad que supone la gran cantidad de valores de la variable, propondremos al alumnado una reflexión alrededor de otras maneras más cómodas, más rápidas de obtener la información que buscamos, con la intención de concluir que es necesario agrupar los valores en intervalos para poder trabajar con los datos más fácilmente.

Habrá que explicar a los niños y las niñas, de acuerdo con su nivel evolutivo, la idea matemática de intervalo. En este caso nos interesa aclarar que un dato concreto solo puede estar en un único intervalo, por lo tanto se tiene que pactar el extremo del intervalo por el cual se cerrará este y aquel por el que permanecerá abierto. Se pone la atención en la diferencia de tratamiento entre las dos clases de variables cuantitativas y se incorpora la manera de denominarlas como variables de datos agrupados y no agrupados.

Generalmente, los valores de las variables de datos no agrupados corresponderían a números naturales o enteros y los de agrupados a números racionales, aunque puede haber excepciones en ambos casos.

En todo el trabajo de elaboración de cuestionarios realizado en la etapa, se debe intentar seguir las normas que se han indicado en el apartado 2.1.2.1, pero evidentemente tienen que adaptarse al desarrollo cognitivo y matemático de los niños y las niñas.

2. Organizar datos en tablas de frecuencias absolutas y relativas. Interpretación de tablas

La organización de datos es el paso natural una vez se ha hecho la recogida de estos. No tendría sentido recoger datos, si después no se hace nada con ellos. Es decir, el desarrollo de esta capacidad está intrínsecamente ligado al de la anterior. De hecho, ya en la educación infantil se trabaja una organización de datos de manera muy intuitiva, poniéndolos en una tabla que los alumnos construyen. En el ejemplo de la rutina diaria de pasar lista, se obtendría una como la que se ve a continuación:

Días de la semana	Recuento	Vienen a clase
Lunes	XXXXXXXXXXXX	12
Martes	XXXXXXXXXXXXXXX	15
Miércoles	XXXXXXXXXX	10
Jueves	XXXXXXXXXXX	11
Viernes	XXXXXXXX	8

Durante toda la etapa de educación primaria, la organización de los datos se realiza únicamente mediante tablas de frecuencias absolutas. Se ha de intentar que el número de valores de la variable permita trabajar con los datos sin necesidad de agruparlos.

Las columnas de la tabla correspondiente a estos casos serán las que aparecen en la tabla siguiente:

x_i	$\mathbf{n_i}$	N_i
	n	-

A partir de 5.º de primaria hay que trabajar también las tablas de doble entrada. Con ejemplos fáciles organizaremos los datos a partir de la colocación en una fila y una columna de los valores de las dos variables (véase 2.2.1.1). Por ejemplo, un listado de alumnos y alumnas de la clase en la primera columna y los posibles lugares de una excursión en la primera fila. Los niños y las niñas tienen que rellenar las casillas de la tabla en función de las preferencias y de las instrucciones acordadas en asamblea (elegir un solo lugar, elegir varios lugares, elegir lugares con ordenación de preferencia...). Una representación parecida podría ser:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_m	$n_{i\bullet}$
x_1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	$\cdots$	n_{1m}	
x_2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	$\cdots$	n_{2m}	
x_3	n_{31}	n_{32}	n_{33}	$\cdots$	n_{3m}	
$\cdots$	$\cdots$					
x_n	n_{n1}	n_{n2}	n_{n3}	$\cdots$	n_{nm}	
$n_{\bullet j}$						

En 6.º curso se puede continuar el trabajo con los mismos tipos de tablas de los cursos anteriores, además de introducir la utilización de las frecuencias relativas. En este caso, las tablas tendrían el aspecto siguiente:

x_i	n_i	N_i	f_i	F_i
	n	-	1	

Cuando el alumnado conozca el concepto de porcentaje, se puede relacionar con las nuevas frecuencias y estudiar los diferentes niveles de información que nos ofrecen estas cantidades (véase 2.2.1.1-A).

En estos últimos cursos de primaria, también es interesante que aparezcan ejemplos donde sea conveniente agrupar los valores de la variable cuantitativa (edades de los miembros de las familias de los niños y las niñas, alturas de los mismos...).

Cuando haya que hacer cálculos con este tipo de tabla, por ejemplo, para encontrar la media aritmética, y ante la imposibilidad de poder realizarlos con todo el intervalo, aparece la necesidad de elegir un valor que lo representa. En este momento se introduce la idea de marca de clase (**c_i**) y la manera de calcularla (véase 2.2.1.1-B) y se amplía la tabla con una columna, inmediatamente a la derecha de la de los intervalos, que contiene estos nuevos valores. En este caso, el aspecto de la tabla es el siguiente:

$[L_{i-1},L_i)$	c_i	n_i	N_i	f_i	F_i
		n	-	1	

A medida que el alumnado vaya adquiriendo dominio de las TIC aprovecharemos estas herramientas para la realización de tablas de los estudios estadísticos que se plantean.

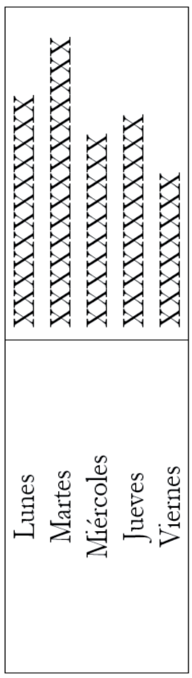
A lo largo de toda la etapa tenemos que trabajar con los niños y las niñas sobre la obtención de información, el análisis y la interpretación de tablas, tanto elaboradas por ellos mismos cómo obtenidas de diferentes fuentes de información. El objetivo de esta tarea es extraer de las tablas la mayor cantidad de conclusiones posible referentes al interés del estudio y a las razones por las cuales se ha realizado.

3. *Representar datos con diagramas de barras, pictogramas, polígonos de frecuencias, histogramas, diagramas de sectores y nubes de puntos. Interpretación de gráficos*

En educación infantil ya se ha podido estudiar una primera representación muy elemental del diagrama de barras a partir de la tabla de frecuencias absolutas (por ejemplo, la utilizada en la capacidad anterior):

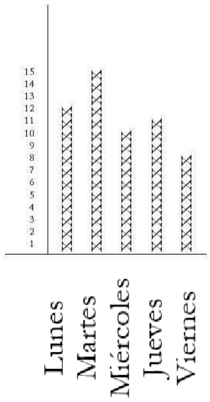
Días de la semana	Recuento	Vienen a clase
Lunes	XXXXXXXXXXXX	12
Martes	XXXXXXXXXXXXXXX	15
Miércoles	XXXXXXXXXX	10
Jueves	XXXXXXXXXXX	11
Viernes	XXXXXXXX	8

Haciendo un giro de 90º, hacia la izquierda, de una parte de la tabla, encontramos que sobre cada uno de los días de la semana, hay una columna de altura proporcional a la frecuencia, lo que se podría considerar una aproximación a un diagrama de barras:



En 1.er curso de educación primaria se continúa con un trabajo parecido. Se pueden utilizar representaciones en dos y tres dimensiones similares a diagramas de barras, y se utilizan datos cercanos al alumnado (número de hermanos, de primos, de amigos de la calle...). En dos dimensiones se pueden construir bien representando y pintando barras que expresen un conjunto de datos, o bien con gomets adhesivos que cada alumno colocará sobre su marca en el eje horizontal, de forma que conseguirá una columna. En tres dimensiones, las columnas se pueden construir con cajas iguales que cada alumno habrá decorado y que se colocaran una encima de la otra formando una torre que sería la barra del diagrama.

En cualquiera de estas representaciones, se puede añadir la numeración que corresponde al eje vertical (frecuencias absolutas) con el objetivo de ofrecer más información de la que proporcionan las barras. Con la incorporación de los números, como se muestra en la tabla siguiente, obtenemos una gráfica que se parece más a lo que posteriormente se presentará como diagrama de barras.



Como complemento de los diagramas de barras podemos utilizar los pictogramas. Su funcionamiento es semejante, pero hay que sustituir cada barra por un dibujo alusivo a la variable tratada, cuya altura debe ser proporcional a la frecuencia (véase 2.2.1.2).

A partir de 2.º se continúa el trabajo iniciado en los cursos anteriores y se amplía el conocimiento de los diagramas de barras introduciendo progresivamente también el vocabulario asociado. Lo utilizaremos para datos no agrupados de la variable y siempre con las barras separadas.

Se debe reflexionar con los niños y las niñas sobre el hecho diferenciador de los diagramas de barras frente a las tablas de frecuencias, llegando a concluir que, al primer golpe de vista, con esta representación gráfica se capta la información más rápidamente que con la tabla.

En 5.º y 6.º de educación primaria se continúa con el trabajo de diagramas de barras realizado en cursos anteriores y se amplía el conocimiento de los tipos de representaciones gráficas, poniendo a los niños y las niñas en contacto con ellas a partir de situaciones reales y de diferentes fuentes de información (prensa, televisión, Internet, facturas de luz, agua, gas...).

Hace falta que representen los diagramas de barras de manera adecuada, incorporando habitualmente las frecuencias en el eje vertical. Para poder realizar correctamente este trabajo, reflexionaremos con ellos y ellas sobre la necesidad de establecer una escala ajustada a las cantidades que aparecen en la columna de las frecuencias que queremos representar y al espacio que hay para construir el diagrama. Por ejemplo, como se puede ver en la tabla anterior, en el eje vertical se han representado todos los números desde el 1 hasta el 15, pero también podríamos haberlos indicado solo de cinco en cinco. En otro ejemplo, en el cual aparezcan cantidades muy elevadas, alrededor de 1000, podríamos indicarlas de 100 en 100 o de 200 en 200, de acuerdo con las condiciones particulares con las que se quiere realizar el diagrama.

Cuando en estos cursos se trabaja con variables cuyos valores se encuentran agrupados, la representación parecida al diagrama de barras se denomina histograma (véase 2.2.1.2). El procedimiento para esta nueva gráfica es análogo al realizado para los diagramas anteriores, teniendo en cuenta que cuando se representan las barras no se tiene que dejar ninguna separación entre ellas. La justificación se encuentra en la idea de continuidad que se deduce de la agrupación de estos valores.

Otra manera de plasmar la idea de continuidad se puede aproximar en 6.º curso con los polígonos de frecuencias, constituidos por segmentos cuyos extremos son los puntos medios de los lados superiores de los rectángulos de los histogramas, cuando las frecuencias no son acumuladas. En algunas ocasiones, pueden no estar representados estos rectángulos, en otras, sí. Habitualmente, los polígonos de frecuencias explican muy intuitivamente la evolución temporal de los fenómenos. Si son de cariz económico o empresarial se usan con las frecuencias acumuladas y los segmentos van indicando el aumento de la frecuencia en cada intervalo (véase 2.2.1.2).

También puede aparecer este último tipo de representaciones para variables cuyos datos no se encuentran agrupados, aunque se transmite una idea de continuidad que puede no existir.

Otra forma gráfica que podemos utilizar en 6.º curso son los diagramas de sectores (véase 2.2.1.2) en los que se pueden representar situaciones comunes de la clase, por ejemplo, preferencias en la realización de un deporte (20 % patinar, 30 % bicicleta y 50 % fútbol), al elegir un lugar donde ir de excursión, etc. Para construir estos diagramas es necesario haber trabajado previamente con los niños y las niñas los conceptos de proporcionalidad, porcentaje, amplitud angular y sector circular, además del manejo del compás y del transportador de ángulos (Pérez, Alcalde y Lorenzo, 2014).

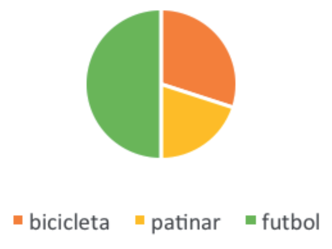


Figura 152. Representación de un diagrama de sectores para deportes

Para ampliar la oferta de representaciones gráficas presentadas hasta ahora, introduciremos también, en 5.º de primaria, una muy sencilla para variables bidimensionales, la nube de puntos (véase 2.2.1.2), por ejemplo, al estudiar la relación entre las horas que pasa el alumnado viendo la televisión y las calificaciones que obtiene o las temperaturas máxima y mínima de un pueblo en diferentes días. Para construir esta representación es necesario haber trabajado previamente con los niños y las niñas la localización de puntos en el plano utilizando coordenadas cartesianas.

Aprovecharemos el dominio que el alumnado vaya adquiriendo de las TIC para la realización de diferentes diagramas de los estudiados.

A lo largo de toda la etapa tenemos que trabajar con los niños y las niñas sobre la obtención de información, el análisis y la interpretación de gráficos, tanto elaborados por ellos mismos como obtenidos de diferentes fuentes de información. El objetivo de esta tarea es extraer de los gráficos la mayor cantidad posible de conclusiones referentes al interés del estudio y a las razones por las cuales se ha realizado.

4. *Necesidad de concentrar la información con medidas que la representan: media aritmética, mediana, moda y rango*

En el análisis de las tablas y gráficos comentados en las capacidades anteriores hay informaciones que no se pueden extraer directamente. Nos referimos a valores que concentran la información de toda la distribución. Se hace necesario encontrar medidas estadísticas que den respuesta a estas cuestiones.

Desde 1.º de educación primaria, se han realizado estudios sencillos a partir de las tablas y/o los gráficos, como ya se ha comentado. Será en 6.º cuando se deban introducir la media aritmética, la mediana, la moda y el rango y los cálculos necesarios para obtenerlas.

Al trabajar estas medidas hay que tener en cuenta la variable sobre la que se calculan, así será diferente la tarea a realizar si hablamos de una variable cualitativa o cuantitativa y, en este último caso, si los datos de esta variable se encuentran agrupados o no.

A partir de una situación problemática de una variable cuantitativa sin agrupar, por ejemplo *número de hermanos de los compañeros de clase*, nos planteamos alguna pregunta que nos encamine hacia la media aritmética: «Ante una acogida de niños y niñas saharauis, por algunas familias de alumnado del colegio, queremos saber si en general tienen más hermanos ellos que nosotros». Tendrían que pensar en contestar la pregunta de manera autónoma y darse cuenta de que no se puede comparar de manera individual, es decir, el número particular de hermanos de cada alumno o alumna con los que tienen los del intercambio. Se trata de llegar a pensar que necesitamos encontrar un valor que represente, en cada caso, los del colectivo correspondiente. Se está gestando la idea de media aritmética.

Para encontrar este valor, particularizaremos en un ejemplo con tres niños o niñas que tengan 1, 2 y 3 hermanos. La pregunta que les haríamos es: «¿Qué número de hermanos representa a los tres casos?». Intuitivamente llegarán a que este valor es el 2 y aprovecharemos esta situación para reflexionar cuáles son las operaciones que deberíamos hacer para encontrar este 2. Si no se llega directamente a que es la suma de los tres valores dividida entre 3, habrá que coger un caso en el cual intervengan más valores, por ejemplo 0, 4, 3, 1 y 2. Si en el ejemplo anterior la compensación era muy evidente, en este caso no lo es tanto. Deben continuar pensando hasta llegar a la conclusión definitiva: sumar y dividir $\frac{0+4+3+1+2}{5} = 2$.

Una vez trabajado este ejemplo, la extensión al caso de todo el alumnado de la clase es evidente. Tendrán que sumar ahora el número de hermanos de todos los niños y niñas de la clase y dividir el resultado por la cantidad de compañeros del aula. Del mismo modo, deberán encontrar la media aritmética del número de hermanos de los visitantes saharauis. En este momento introduciremos el nombre de la medida calculada, media aritmética, y su símbolo, $\bar{x}$.

Cuando el alumnado haya adquirido este conocimiento puede ser el momento de reflexionar sobre el significado de la media aritmética y su posición en una línea imaginaria en la que el primer valor de la variable se situaría a la izquierda y el último a la derecha. Habitualmente la media ocuparía una posición hacia el centro de esta línea (no necesariamente en el centro), por eso se denomina medida de centralización.

Para introducir la moda, les podemos formular la siguiente pregunta: «¿La cantidad habitual de hermanos de los saharauis coincide con la que tenemos aquí?». Esta pregunta se contesta rápidamente si tienen la tabla de frecuencias de la variable. Solo hay que mirar la columna de las frecuencias absolutas y encontrar la mayor. El valor de la variable asociado a este número es la respuesta a la pregunta en cualesquier de los dos casos. Nuevamente, se tiene que introducir el nombre de la medida obtenida, moda, y su símbolo, **Mo**.

Si observamos las tablas siguientes, nos damos cuenta de que los números de hermanos en un caso van de 4 a 8 y en el otro de 0 a 4. Les resulta curioso este hecho porque las columnas de frecuencias en las tablas tienen la misma cantidad de filas con números distintos de 0. *¿Cómo es posible que llegando en un caso a 8 hermanos tengamos solo 5 filas con números diferentes de 0, igual que en el otro caso donde solo llegamos a 4 hermanos?* Sería una de las posibles preguntas que se podrían hacer.

Saharauis: número de hermanos	Número de familias
0	0
1	0
2	0
3	0

Españoles: número de hermanos	Número de familias
0	2
1	5
2	6
3	3

Saharauis: número de hermanos	Número de familias
4	7
5	5
6	2
7	2
8	1

Españoles: número de hermanos	Número de familias
4	1
5	0
6	0
7	0
8	0

Es la diferencia entre los números de hermanos, mayor y menor, en ambos casos, la que nos permite dar la respuesta. Como el valor que resulta es el mismo, se justifica que las tablas tengan la misma cantidad de filas con números distintos de 0. A este valor lo denominamos recorrido o rango de los valores de la variable, y su símbolo es **Re**. Se puede reflexionar con ellos y ellas que esta medida cuantifica la variabilidad de los valores de la variable, es decir, nos aporta información sobre la dispersión de la variable.

A partir de una situación problemática de una variable cuantitativa con datos agrupados, se tiene que proceder de manera análoga al caso anterior para la media aritmética.

Para el caso de la moda, hemos de tener en cuenta que su cálculo formal se debería realizar con la expresión que figura en el punto 2.2.2.1-B. Pero como esta resulta inasequible para el alumnado, usaremos las marcas de clase como si fueran los valores de la variable sin agrupar y se procederá como en estos casos. La aproximación de la moda que obtenemos trabajando con las marcas de clase es un resultado aceptable para los niveles educativos en los que estamos trabajando.

Para obtener el rango se tiene que calcular la diferencia entre el extremo superior del último intervalo y el extremo inferior del primero.

En una situación problemática con variable cualitativa, por ejemplo *colores preferidos por los niños y las niñas,* y a partir de su tabla de frecuencias, nos planteamos un estilo de pregunta parecida a la que nos conducía antes a la moda. Descubrimos que para encontrarla tenemos que seguir el mismo procedimiento que se ha descrito para las variables cuantitativas.

Si planteamos una pregunta referente a la media aritmética, han de llegar a la conclusión de que es imposible el cálculo de la mencionada medida a partir de las modalidades de la variable.

En el caso de variable cualitativa, hay que encontrar una medida que pueda sustituir a la anterior. Necesariamente se tiene que recurrir al orden de posición establecido para las modalidades, porque es el criterio que las diferencia, habiendo decidido previamente cuál será el criterio de ordenación. Para encontrar la medida de posición central buscada, hay que elegir aquella que deje la misma cantidad de modalidades a su izquierda que a su derecha. Como en los casos anteriores, se introducirá el nombre de la medida obtenida, mediana, y su símbolo, **Me**.

En el caso excepcional de tener una cantidad par de datos no hay posición central. Encontraremos entonces dos modalidades susceptibles de ocupar esta posición. Si las dos coinciden, esta modalidad es la mediana. Si son diferentes, no existe este parámetro.

Se puede hacer extensivo el concepto de mediana para variables cuantitativas, tanto con valores agrupados como no agrupados. El procedimiento para obtenerla es parecido al descrito para variables cualitativas (cuando los datos de la variable estén agrupados se trabajará con las marcas de clase). Solo cambia cuando el número total de datos sea par y en la posición central haya dos valores diferentes de la variable. En este caso, hay que hacer la semisuma de estos y el número que se obtenga como resultado será la mediana.

5. *Reconocer el azar en la vida diaria. Diferenciar sucesos según su posibilidad de ocurrir. Sucesos elementales y compuestos. Elaborar árboles de posibilidades*

Desde 1.º de educación primaria hay que trabajar con el alumnado el descubrimiento de situaciones sencillas de azar a su alrededor. Estas pueden hacer referencia al tiempo atmosférico que hará en los días siguientes, a la lista de asistencia de compañeros de clase en los próximos días... El objetivo es encaminarlos a que descubran que las mencionadas situaciones no se pueden predecir con seguridad, por lo tanto, estamos creando el concepto de fenómeno aleatorio.

El siguiente paso es provocar situaciones de azar recreadas, es decir, no observables habitualmente a su alrededor, como por ejemplo, los juegos de azar. El abanico de posibilidades es muy grande y está relacionado con dados, cartas, recipientes con bolas...

Trabajando solo con sucesos elementales, hay que empezar a introducir un vocabulario adecuado, como suceso posible (obtener un 2 al lanzar un dado cúbico usual, en adelante, un dado), imposible (obtener un 7 al lanzar un dado), seguro (obtener un número entre el 1 y el 6 al lanzar un dado) (véase 2.3.1), realizando posteriormente la experiencia para comprobarlo. Para estos primeros cursos, no se exigirá el uso normalizado del vocabulario por parte del alumnado, aunque el maestro lo usará de manera habitual.

En 3.er y 4.º curso hemos de continuar trabajando los contenidos relacionados con el azar iniciado en los niveles escolares anteriores e intensificar la dificultad y completarlos con nuevos conceptos. Así, introduciremos las ideas de sucesos elementales y compuestos, por ejemplo, al lanzar un dado obtener un 2 en el primer caso o un 1, un 3 o un 5 en el segundo caso (véase 2.3.1).

Realizaremos experimentos aleatorios, cuyos resultados recogerán en tablas los niños y las niñas. El maestro o la maestra tiene que analizar con el alumnado la corrección de las tablas, teniendo en cuenta: la presencia de todos los resultados posibles, una disposición ordenada de los mismos, la frecuencia de cada uno de estos y el número total de repeticiones del experimento. Así, podrán sacar conclusiones al respecto de las predicciones hechas (poco probable, probable, muy probables, posible, imposible…).

En 5.º y 6.º de primaria tenemos que ampliar el trabajo realizado en los cursos anteriores, pudiendo usar juegos de azar con más dificultad, no en el material, sino en lo que se hace con este, como por ejemplo «lanzar ordenadamente dos dados y sumar los resultados». En un primer momento, los niños y las niñas tienen que pensar en todos los resultados que se pueden obtener en este caso y reflexionar sobre la diferencia con los obtenidos cuando se lanza un solo dado. Hemos de aprovechar este momento para introducir la idea de espacio muestral y observar que para un dado, este es $\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$, mientras que en el caso que nos encontramos es $\Omega_2 = \{2,3,...,12\}$. Hace falta clarificar al lector que Ω_1 es un espacio muestral simple, mientras que Ω_2 no lo es. Si en el caso de los dos dados se quisiera trabajar con un espacio muestral simple deberíamos considerar $\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),...,(6,6)\}$.

Una vez determinados todos los valores del espacio muestral, hace falta que empiecen a lanzar los dados y anotar los resultados. Tendría que repetirse el experimento un número elevado a veces, al menos 100. Se darán cuenta que hay sucesos del espacio muestral que en los 100 lanzamientos se producen más veces. *¿Por qué?*

En un primer momento, por analogía con el caso de un solo dado, les parece que todos los resultados deberían aparecer un número parecido de veces, pero no es así. Hace falta que observen los sumandos que determinan cada suceso elemental. Así encontrarán que hay varias combinaciones que provocan sumas iguales. Por ejemplo, para conseguir el 6 pueden salir diferentes números en los dados (1,5), (2,4), (3,3)..., mientras que para conseguir el 12, solo hay una posibilidad (6,6) y esto es lo que ha condicionado la cantidad de veces que han obtenido un resultado u otro.

Para pensar de manera exhaustiva y ordenada en todas las posibles combinaciones de sumandos, nos podemos ayudar de los diagramas de árbol para representar el recuento y visualizarlo (véase nota del 2.3.4-C).

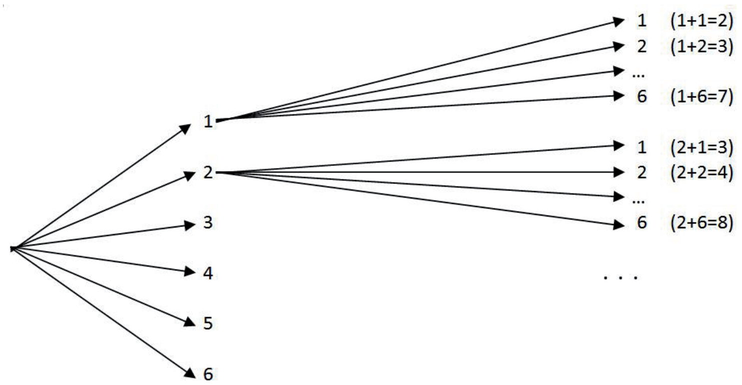


Figura 153. Representación en un diagrama de árbol del suceso de lanzar ordenadamente dos dados y sumar el resultado

Podemos reforzar este trabajo con situaciones reales de recuento, por ejemplo, maneras de formar grupos de cinco compañeros con los alumnos de clase, o bien de elegir delegado y subdelegado..., y construir el árbol en todos estos casos.

En general, hay que preguntarse si todas las ramas de cada árbol son igual de posibles o no. Por ejemplo, si en el caso de la elección del delegado y subdelegado se exige que los dos sean chicos o chicas, o un chico y una chica, el árbol de posibilidades les ayudará a detectar que todas las ramas no son igual de posibles, a diferencia del ejemplo anterior del lanzamiento de dos dados (figura 153) en el cual sí que lo son.

A partir de este punto se ha creado el interrogante para introducir el concepto de probabilidad de un suceso.

6. *Construir el concepto de probabilidad a partir de la frecuencia relativa y del árbol de posibilidades*

En los cuatro primeros cursos de educación primaria y para aproximarnos al concepto de probabilidad, debemos acompañar algunas actividades cotidianas en las cuales interviene el azar con las expresiones «más probable», «menos probable» o «igual de probable (equiprobables)», para verbalizar los resultados de las comparaciones entre sucesos con más, menos o igual posibilidades de ocurrir, respectivamente.

En 4.º curso se tiene que acabar de construir el concepto de probabilidad y llegar a la cuantificación numérica de la posibilidad de ocurrir de un suceso aleatorio.

Para hacer este camino conectaremos el concepto de frecuencia relativa con el de probabilidad, introducido por la regla de Laplace (véase 2.3.3). Continuaremos con el mismo ejemplo que se estaba utilizando antes, «lanzar ordenadamente dos dados y sumar el resultado». Si se elige otro ejemplo, hay que comprobar que los sucesos simples sean equiprobables en el espacio muestral simple, condición necesaria para poder aplicar esta regla. Observamos que en el espacio muestral simple del ejemplo expresado en la capacidad anterior $\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),...,(6,6)\}$, todos los sucesos simples son equiprobables.

Calcularemos las frecuencias relativas de los diferentes valores de la variable en las 100 repeticiones y las anotaremos en la correspondiente columna de la tabla de frecuencias que se ha trabajado en la capacidad 2. Por ejemplo, nos fijaremos en que la frecuencia relativa del suceso «lanzar ordenadamente dos dados y sumar los resultados, obteniendo el valor 3» es $\frac{5}{100}$.

Al analizar el árbol de posibilidades (construido en la capacidad anterior) los niños y las niñas observarán que la relación entre el número de caminos que nos llevan al resultado 3 y el número total de caminos que aparecen al árbol es $\frac{2}{36}$.

Para comparar las dos fracciones podemos recurrir a los cocientes que representan. Si estos no fueran muy aproximados sería conveniente aumentar el número de lanzamientos hasta que lo sean.

En este caso y en el resto de casos del espacio muestral del experimento, hay que darse cuenta que la primera fracción puede variar y que, en función del aumento del número total de lanzamientos que realizamos, se aproximará cada vez más a la segunda fracción, que es constante e independiente del número de lanzamientos (conclusión de la «Ley de los Grandes Números», véase 2.3.4-A). Esta condición de la segunda fracción, la invariabilidad de su valor, nos permite utilizarla para expresar la cuantificación numérica de la posibilidad de ocurrir de un suceso aleatorio. A este valor se le denomina probabilidad de un suceso según la Regla de Laplace, y se obtiene al dividir el número de casos favorables de que se produzca este suceso por el número total de casos posibles del experimento.

Se tienen que trabajar más ejemplos similares para afianzar el concepto de probabilidad y comprobar que todos los valores que obtenemos para las diferentes probabilidades se encuentran siempre entre 0 (probabilidad del suceso imposible) y 1 (probabilidad del suceso seguro).

7. Relacionar los conceptos de probabilidad y porcentaje

A partir de 4.º de educación primaria y una vez estén trabajados los porcentajes en el bloque de números y también las frecuencias relativas en la parte de estadística, podemos relacionar el nuevo concepto de probabilidad y el ya conocido de porcentaje. Esta conexión permite una aproximación más intuitiva a la probabilidad, al expresarla mediante un porcentaje en lugar de utilizar un número entre 0 y 1. Es importante aclarar que no han de identificarse ambas expresiones numéricas igualando la probabilidad de un suceso con su porcentaje. La probabilidad siempre será un valor que pertenece al intervalo [0,1], mientras que el porcentaje será un valor del intervalo [0,100].

A partir de ejemplos parecidos a los desarrollados en las capacidades anteriores y de manera similar al trabajo realizado para calcular un porcentaje desde una frecuencia relativa, llegamos a calcular un porcentaje a partir de una probabilidad multiplicada por 100. Por ejemplo, en el caso anterior «lanzar ordenadamente dos dados y sumar los resultados, obteniendo el valor 3», la probabilidad es $\frac{2}{36} = 0{,}0\widehat{5}$, mientras que el porcentaje que supone este suceso respecto de todos los sucesos del espacio muestral simple es $\frac{2}{36} \times 100\ \% = 0{,}0\widehat{5} \times 100\ \% = 5{,}\widehat{5}\ \%$.

De este modo tenemos dos cantidades que expresan la medida de incertidumbre de un suceso aleatorio.

Presentamos a continuación algunos conceptos básicos de la Teoría de Conjuntos, necesarios para fundamentar los contenidos referentes a los Números Naturales que se trabajan en esta publicación. No son objeto de estudio por los futuros maestros, pero tienen la finalidad de facilitar su consulta a los lectores que lo necesiten.

1. Formalización de conceptos de Teoría de Conjuntos

La Teoría de Conjuntos es la encargada de simbolizar el lenguaje matemático. Por eso formando conjuntos expresamos algunos conceptos que componen el currículum escolar y favorecemos su aprendizaje.

Presentamos a continuación una breve formalización de los conceptos de Teoría de Conjuntos, necesarios para trabajar los contenidos de esta publicación.

1.1. Introducción

El concepto de *conjunto* es intuitivo y se podría entender como «una agrupación de elementos hecha con cualquier criterio». El criterio puede no ser una propiedad característica común, sino simplemente el deseo o la necesidad de agrupar ciertos elementos. Así, podemos hablar de un conjunto de personas, de ciudades, de bolígrafos, o del conjunto de objetos que hay en un momento determinado encima de una mesa.

Un conjunto está bien determinado si se sabe si un elemento dado pertenece o no al conjunto; así, el conjunto de los bolígrafos azules está bien definido, porque al ver un bolígrafo podemos saber si es azul o no. El conjunto de las personas altas no está bien definido, porque al ver una persona, no siempre se podrá decir si es alta o no, o puede haber diferentes personas que opinen si esa persona es alta o no lo es.

Los conjuntos se representan, normalmente, con una letra mayúscula: A, B, K...

Llamaremos *elemento* a cada uno de los objetos (físicos o abstractos) que forman parte de un conjunto. Estos elementos tienen carácter individual, cualidades que nos permiten diferenciarlos y cada uno de ellos es único, de manera que no hay elementos duplicados o repetidos. Los representaremos generalmente con una letra minúscula: a, b, k...

Se define *cardinal* de un conjunto como «la cantidad de elementos que hay en el conjunto».

Se denomina *conjunto universal* o *referencial*, que habitualmente representaremos con la letra *U*, al conjunto de todas las cosas de las cuales se esté tratando; así, si hablamos de Números Naturales, *U* es el conjunto de los Números Naturales; si hablamos de ciudades, *U* es el conjunto de todas las ciudades; este conjunto *universal* puede mencionarse explícitamente o, en la mayoría de los casos, se da por conocido según el contexto en el que se esté trabajando.

Siempre ha sido muy utilizada la idea de conjunto a lo largo de la historia, en cualquier representación o explicación matemática. Pero no será hasta el siglo XIX cuando se le otorgará rigor. En este siglo, Cantor, pone las bases para la construcción de la Teoría de Conjuntos: definiciones, introducción a los cardinales, conjunto bien ordenado...

Aparecen fisuras en esta teoría, como la paradoja de Russell, que surge cuando se supone un conjunto $\mathrm{A} = \left\{ \mathrm{C\ conjuntos} / \mathrm{C} \notin \mathrm{C} \right\}$, a partir del cual se hace la pregunta de la pertenencia de A a sí mismo, es decir, $A \in A \leftrightarrow A \notin A$. La respuesta nos lleva a la conclusión que ¿$A \in A$ *o* $A \notin A$?, que constituye la paradoja mencionada.

Para resolver estos problemas de la Teoría de Conjuntos se crean los sistemas axiomáticos correspondientes (son conjuntos de afirmaciones admitidas como verdaderas sin necesidad de demostración) y así tenemos los de Zermelo-Frenkel, los de Newman...

1.2. Conjuntos

En este apartado se hace un recorrido por algunos conceptos (operaciones, relaciones...) que se pueden definir en relación a los conjuntos.

1.2.1. Definiciones y conceptos básicos

Como se ha dicho en el punto anterior, se admite la idea de conjunto como la agrupación en un todo de determinados objetos bien caracterizados y diferenciados los unos de los otros.

- Conjuntos iguales: *aquellos que, elemento a elemento, son iguales.*

- Determinaciones de un conjunto:
  - Por comprensión: *explicitando la propiedad característica de sus elementos.*
  - Por extensión: *enumerando, uno por uno, todos los elementos que lo componen.*

- Representaciones de un conjunto:
  - Representación gráfica: diagrama lineal, diagrama de Venn (línea curva cerrada que delimita los elementos del conjunto) o cualquier línea cerrada.
  - Representación simbólica: como se ha dicho antes, se utilizarán letras en minúscula para representar los elementos de un conjunto y en mayúscula para representar los conjuntos.

- Subconjuntos: $A \subset C \leftrightarrow \forall a \in A \rightarrow a \in C$

- Conjunto universal o referencial: se representa con la letra *U*.

- Conjunto complementario de un subconjunto:

  $A \subset U : A_U^c = \{x \in U / x \notin A\}$

- Conjunto vacío: Φ, aquel que no tiene elementos.

- Conjunto de partes de un conjunto: es un conjunto que está formado por todos los subconjuntos de un conjunto dado, es decir: $P(A) = \{B / B \subset A\}$. Es importante notar que de esta definición se deduce que $A \in P(A)$ y $\Phi \in P(A)$.

Utilizando números combinatorios se puede demostrar que el conjunto *P(A)* tiene como cardinal $2^{card\,(A)}$: $card\left[P(A)\right] = 2^{card(A)}$.

1.2.2. Operaciones entre conjuntos

- Unión: $A \bigcup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$

- Intersección: $A \bigcap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$. Si la intersección de dos conjuntos es el conjunto vacío, estos se denominan *conjuntos disjuntos*.

> *Propiedades de la unión y de la intersección:*
>
> 1. *Conmutativa*: $\mathrm{A} \bigcup \mathrm{B} = \mathrm{B} \bigcup \mathrm{A}$ y $\mathrm{A} \bigcap \mathrm{B} = \mathrm{B} \bigcap \mathrm{A}$
> 2. *Asociativa*: $\mathrm{A} \bigcup (\mathrm{B} \bigcup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \bigcup \mathrm{B}) \bigcup \mathrm{C}$ y $\mathrm{A} \bigcap (\mathrm{B} \bigcap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \bigcap \mathrm{B}) \bigcap \mathrm{C}$
> 3. *Idempotencia*: $\mathrm{A} \bigcup \mathrm{A} = \mathrm{A}$ y $\mathrm{A} \bigcap \mathrm{A} = \mathrm{A}$
> 4. *Absorción*: $\mathrm{A} \bigcup \left(\mathrm{A} \bigcap \mathrm{B}\right) = \mathrm{A}$ y $\mathrm{A} \bigcap \left(\mathrm{A} \bigcup \mathrm{B}\right) = \mathrm{A}$
> 5. *Distributiva:*
>
> $\mathrm{A} \bigcup (\mathrm{B} \bigcap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \bigcup \mathrm{B}) \bigcap (\mathrm{A} \bigcup \mathrm{C})$ y $\mathrm{A} \bigcap (\mathrm{B} \bigcup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \bigcap \mathrm{B}) \bigcup (\mathrm{A} \bigcap \mathrm{C})$
> 6. $A \bigcup A^c = U$ y $A \bigcup \Phi = A$
> 7. $A \bigcap A^c = \Phi$ y $A \bigcap \Phi = \Phi$
>
>   *Nota: Leyes de De Morgan:*
>
>   - $\left(A \bigcup B\right)^C = A^C \bigcap B^C$
>   - $\left(A \bigcap B\right)^C = A^C \bigcup B^C$

- Partición de un conjunto: $\{N_1, N_2,..., Nn\}$ es una partición de un conjunto A, si y solo si (en adelante sii):

  1. $N_i \subset A \wedge N_i \neq \Phi, \forall i = 1,..., n$
  2. $\bigcup_{i=1}^{n} N_i = A$
  3. $N_i \bigcap N_j = \Phi, \forall i \neq j$

- Diferencia de conjuntos: $A - B = \{x \in A / x \notin B\}$

- Producto cartesiano: $A\ x\ B = \{(a, b) / a \in A \wedge b \in B\}$

  Propiedades:

  $card(A \times B) = card(A) \cdot card(B)$

  $A \times B \neq B \times A$

  $A' \subset A, B' \subset B \leftrightarrow A' \times B' \subset A \times B$

  $A \times B = \Phi \leftrightarrow A = \Phi \vee B = \Phi$

  $A \times (B \bigcup C) = (A \times B) \bigcup (A \times C)$

  $A \times (B \bigcap C) = (A \times B) \bigcap (A \times C)$

  $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

1.3. Correspondencias

Una correspondencia **f** es una terna **(A, B, G)**, donde:

- **A**, **B** son conjuntos y $f : A \rightarrow B$ asocia elementos de **A** con elementos de **B**, denominándose **A** conjunto inicial y **B** conjunto final.

- $D(f) = \{x \in A / \exists y \in B : f(x) = y\}$, es el *conjunto dominio* de la correspondencia y está formado por los elementos (llamados *origen* o *antiimagen*) del conjunto inicial que tienen algún elemento correspondiente en el conjunto final.

- $\mathrm{Im}(f) = \{y \in B / \exists x \in A : f(x) = y\}$ es el *conjunto imagen* de la correspondencia y está formado por los elementos (llamados *imagen*) del conjunto final que se corresponden con algún elemento del dominio de la correspondencia.

- $G \subset AxB$, se denomina Grafo de la correspondencia y está formado por pares **(x, y)** donde $x \in D(f)$ e $y \in \mathrm{Im}(f)$:
  $G(f) = \{(x, y) \in A \times B / x \in D(f) \wedge y \in \mathrm{Im}(f) \wedge f(x) = y\}$

- Cualquier correspondencia **f** nos permite definir su correspondencia recíproca o inversa, de la siguiente manera:

  $f^{-1}: B \to A \,/\, D(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f) \; i \; \mathrm{Im}(f^{-1}) = D(f)$.

  Algunas correspondencias pueden ser:

  - *Unívoca*: *a cada elemento de A le corresponde un elemento o ninguno de B*.
  - *Biunívoca: tanto f, como* f^{-1}*, son unívocas*.
  - *Aplicación: todo elemento de A tiene imagen en B y esta es única. Es decir*, $\forall a \in A, \exists! b \in B \,/\, f(a) = b$.

    Algunas aplicaciones pueden ser:

    – *Suprayectiva*: todo elemento de B es imagen de algún elemento de A: $\forall b \in B, \exists a \in A \,/\, f(a) = b$

    – *Inyectiva*: elementos distintos de A tienen imágenes distintas en B: $\forall a, b \in A : a \neq b \to f(a) \neq f(b)$

    – *Biyectiva*: suprayectiva i inyectiva al mismo tiempo.

  - *Composición de aplicaciones: dada una aplicación* $f: A \to B$, *y otra* $g: B \to C$ *de forma que* $\forall a \in A \;\; f(a) = b \;\wedge\; \forall b \in B \;\; g(b) = c$*, se define la composición de aplicaciones como otra aplicación* $g \circ f : A \to C$, *cumpliéndose que* $\forall a \in A \quad g \circ f(a) = g\big(f(a)\big) = g(b) = c$. Si las aplicaciones *f* y *g* son biyectivas su composición *f* o *g* también lo es.

1.4. Relaciones binarias

Una *relación binaria* es una asociación o conexión que se establece entre parejas de elementos de un conjunto. Puede haber muchas definidas en un mismo conjunto. Analíticamente, podemos decir que una relación **R** es una terna **(A, A, G)**, donde $G \subset A \times A$, como ocurre en el punto anterior, entonces diremos que **xRy** sii **(x,y)** pertenece a **G**.

Propiedades: $\forall x, y, z \in A$

1. *Reflexiva:* **xRx**
2. *Antirreflexiva:* **x** no se relaciona consigo mismo.
3. *Simétrica:* **xRy** → **yRx**
4. *Antisimétrica:* **xRy** ∧ **yRx** → **x = y** o bien, **x ≠ y** ∧ **xRy** → **y**$\overline{\mathbf{R}}$**x**
5. *Transitiva:* **xRy** ∧ **yRz** → **xRz**
6. *Circular:* **xRy** ∧ **yRz** → **zRx**
7. *Conexa:* **xRy** ∨ **yRx**

Nota: Si una relación binaria definida en un conjunto cumple algunas de las propiedades anteriores, recibe el nombre de:

- *Relación binaria de equivalencia: cumple reflexiva, simétrica y transitiva.*
- *Relación binaria de preordren: cumple reflexiva y transitiva.*
- *Relación binaria de orden (también llamada de orden amplio): cumple reflexiva, antisimétrica y transitiva.*
- *Relación binaria de orden estricto: cumple antireflexiva, antisimétrica y transitiva.*
- *Cualquier relación de orden definida anteriormente se denominan de* orden parcial*, porque no se le ha exigido que cumpla la propiedad conexa. Si esta propiedad se cumple, las relaciones de orden se denominan de* orden total*.*

1.4.1. Clases de equivalencia

Una *relación binaria* de equivalencia definida en un conjunto, organiza sus elementos en subconjuntos que constituyen una partición del conjunto (véase anexo 1.2.2). Esta organización se denomina *clasificación* y cada uno de los subconjuntos se denomina *clase de equivalencia* y está formado por los elementos del conjunto que se relacionan mediante la relación.

1.4.2. Conjunto cociente

Una vez establecida una clasificación, las clases de equivalencia forman un conjunto que se denomina *conjunto cociente*. Si *A* es el conjunto donde tenemos definida la relación de equivalencia *R*, el conjunto cociente se representa por *A/R*.

1.5. Estructuras algebraicas

Cuando se estudian las propiedades de las operaciones en los diferentes conjuntos numéricos, se observan algunas que se repiten de manera regular en todos ellos, y otras que se presentan de manera específica. Estas contribuyen a determinar la estructura algebraica de dichos conjuntos numéricos.

En general, cuando hablamos de estructura algebraica nos referimos a las propiedades que cumplen las operaciones definidas entre los elementos de un conjunto. De acuerdo con estas se establece una clasificación de los conjuntos, en la cual cada una de las clases de equivalencia corresponde a una de las estructuras que se recogen a continuación.

Las operaciones necesarias para determinar una estructura pueden ser *internas* o *externas*:

- Se define operación interna, como una aplicación (*): $\mathbf{A} \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$. Es decir, operando elementos de un conjunto **A**, obtenemos elementos del mismo conjunto.

- Se define operación externa, como una aplicación $(\cdot) : \mathbf{K} \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$. Es decir, operando elementos de un conjunto **A** con elementos de otro conjunto **K**, llamado de escalares, obtenemos elementos del conjunto **A**.

Las operaciones definidas pueden cumplir algunas de las siguientes propiedades:

- Asociativa (aso): $\forall a, b, c \in A$: $\mathbf{(a*b)*c = a*(b*c)}$
- Conmutativa (conm): $\forall a, b \in A$: $\mathbf{a*b = b*a}$
- Elemento neutro (en): $\exists n \in A / \forall a \in A$: $\mathbf{a*n = n*a = a}$
- Elemento simétrico (es): $\forall a \in A, \exists a' \in A /$ $\mathbf{a*a' = a*a' = n}$
- Distributiva de • respecto de *: $\forall$a, b$\in$ A $\wedge$ $\forall$ k$\in$K: k • **(a*b) = (k • a) * (k • b)**

Las principales estructuras son:

Para la operación interna:

	Asociativa	*Conmutativa*	*Elemento neutro*	*Elemento simétrico*
Semigrupo	X			
Semigrupo conmutativo	X	X		
Monoide	X		X	
Monoide conmutativo	X	X	X	
Grupo	X		X	X
Grupo conmutativo o abeliano	X	X	X	X

Para dos operaciones internas:

	Primera operación					*Segunda operación*					*Distributiva de la 2.ª respecto de la 1.ª*
	aso	*conm*	*en*	*es*		*aso*	*conm*	*en*	*es*		
Semianillo	X	X	X			X					X
Semianillo conmutativo	X	X	X			X	X				X
Semianillo conmutativo unitario	X	X	X			X	X	X			X
Anillo	X	X	X	X		X					X
Anillo conmutativo	X	X	X	X		X	X				X
Anillo conmutativo unitario	X	X	X	X		X	X	X			X
Cuerpo	X	X	X	X		X		X	X (*)		X
Cuerpo conmutativo	X	X	X	X		X	X	X	X (*)		X

(*): Exceptuando el elemento neutro de la primera, todos los elementos del conjunto tienen simétrico para la segunda operación.

Habría que añadir, finalmente, las definiciones de *semimódulo* y *espacio vectorial*:

Un conjunto (M, *, ·), con una operación interna (*) y otra externa (·), definida con la ayuda de un semianillo (A, +, x), es un semimódulo si:

- $(M, *)$ es un semigrupo conmutativo.
- $\forall \alpha, \beta \in A \wedge \forall a, b \in M$ se cumplen las siguientes propiedades:

  – $(\alpha + \beta) \cdot a = (\alpha \cdot a) * (\beta \cdot a)$

  – $\alpha \cdot (a * b) = (\alpha \cdot a) * (\alpha \cdot b)$

  – $\alpha \cdot (\beta \cdot a) = (\alpha \times \beta) * a$

Un conjunto **(V, *, ·)**, con una operación interna (*) y otra externa (·) definida con la ayuda de un cuerpo (**K**, +, ×) es un espacio vectorial si:

- **(V, *)** es un grupo abeliano.
- $\forall u, v \in V, \quad \forall \lambda, \mu, 1 \in K$ se cumplen las siguientes propiedades:

  – (λ + μ) · v = (λ · v) * (μ · v)
  – λ · (u * v) = (λ · u) * (λ · v)
  – λ · (μ · v) = (λ × μ)· v
  – 1 · v = v

Referencias bibliográficas

Alcalde, M.; Pérez, I.; Lorenzo, G. (2014): *Los números naturales en el aula de primaria*. Col·lecció Sapientia, núm. 90. Publicacions de la Universitat Jaume I. Castelló. http://hdl.handle.net/10234/89550.

Argüelles, J. (1989): *Historia de la Matemática*. Torrejón de Ardoz, Madrid. Akal.

Arribas, J. M. *et al.* (2012): *Historia de la Probabilidad y la Estadística.* Actas del VI Congreso Internacional de Historia de la Estadística y de la Probabilidad. uned.

Dorce, C. (2013): *Història de la Matemàtica. Des de Mesopotàmia al Renaixement*. Barcelona. Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona.

— (2014): *Història de la Matemàtica. Des del segle xvii fins a l'inici de l'època contemporània*. Barcelona. Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona.

Muñoz, D. R. (2004): *Manual de estadística*. Eumed.net. Recuperado de http://www.eumed.net/cursecon/libreria/drm/drm-estad.pdf.

Nortes, A. (1987): *Encuestas y precios*. Matemáticas: cultura y aprendizaje, núm. 28. Madrid. Síntesis.

Pérez, I.; Alcalde, M.; Lorenzo, G. (2014): *Els nombres enters i racionals, les magnituds i la mesura a l'aula de primària*. Col·lecció Sapientia, núm. 96. Publicacions de la Universitat Jaume I. Castelló. http://hdl.handle.net/10234/108098.

Stewart, I. (2008): *Historia de las matemáticas en los últimos 10000 años.* Barcelona. Crítica.

Van Hiele, P. M. (1986): *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education*. London. Academic Press.

— (1957): *De problematiek van het inzicht, gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstof* (Dissertation). Groningen (Nederlanden): J. B. Wolters.

Bibliografía recomendada

Alcalde, M. (2004): *Ensenyament-aprenentatge de continguts d'estadística en Educació Primària. Una perspectiva pràctica*. Castelló de la Plana. Actes del congrés Encuentro de Profesores de Matemáticas. Matemáticas para el siglo xxi.

Algás, P. *et al.* (2010): *Los proyectos de trabajo en el aula.* Barcelona. Graó.

Alsina, A. (2004): *Desarrollo de las competencias matemáticas con recursos lúdico-manipulativos: para niños de 6 a 12 años.* Madrid. Narcea.

Alsina, C.; Burgués, C.; Fortuny, J. M. (1987): *Invitación a la didáctica de la geometría*. Matemáticas: cultura y aprendizaje núm. 12. Madrid. Síntesis.

— (1988): *Materiales para construir la Geometría*. Matemáticas: cultura y aprendizaje, núm. 11. Madrid. Síntesis.

Alsina, C.; Pérez, R.; Ruiz, C. (1989): *Simetría dinámica*. Matemáticas: cultura y aprendizaje, núm. 13. Madrid. Síntesis.
Amón, J. (1991a): *Estadística para psicólogos. 1. Estadística descriptiva*. Psicología. Madrid. Pirámide S. A.
— (1991b): *Estadística para psicólogos. 2. Probabilidad. Estadística inferencial*. Psicología. Madrid. Pirámide S. A.
Batanero, C.; Godino, J. D. (2003): *Estocástica y su didáctica para maestros.* Granada. Universidad de Granada. (Última visita 1-7-2015 en http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/6_Estocastica.pdf).
Calvo, F. (1989): *Estadística aplicada*. Bilbao. Deusto S. A.
Canals, M. A. (2009a): *Transformacions geomètriques.* Barcelona. Rosa Sensat.
— (2009b): *Superfícies, volums i línies.* Barcelona. Rosa Sensat.
— (2009c): *Estadística, combinatòria i probabilitat.* Barcelona. Rosa Sensat.
Castelnuovo, E. (1981): *La Matemàtica. La Geometria*. Barcelona. Ketres.
Corberán, R. M. *et al.* (1989): *Didáctica de la Geometría: modelo Van Hiele*. València. Universitat de València.
Díaz, J.; Batanero, M. C.; Cañizares, M. J. (1987): *Azar y probabilidad*. Matemáticas: cultura y aprendizaje, núm. 27. Madrid. Síntesis.
Godino, J. D.; Ruiz, F. (2003): *Geometria y su didáctica para maestros.* Granada. Universidad de Granada. (Última visita 1-7-2015 en http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4_Geometria.pdf).
Guillén, G. (1991): *Poliedros*. Matemáticas: cultura y aprendizaje, núm. 15. Madrid. Síntesis.
Gutiérrez, A.; Fernández, A. (1985): *Actividades con el geoplano para la egb*. València. Escola Universitària de Professorat d'egb de València.
Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1986): *Traslaciones, giros y simetrías en el plano*. València. Escola Universitària de Professorat d'egb de València.
Hernán, F.; Carrillo, E. (1988): *Recursos en el aula de matemáticas*. Matemáticas: cultura y aprendizaje, núm. 34. Madrid. Síntesis.
Martínez, A.; Juan, F. (coord.) (1989): *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría*. Matemáticas: cultura y aprendizaje, núm. 16. Madrid. Síntesis.
Padilla, F. *et al.* (1991): *Circulando por el círculo*. Matemáticas: cultura y aprendizaje, núm. 18. Madrid. Síntesis.
Saa, M. D. *et al.* (1990): *Los ángulos: recursos para su aprendizaje*. Colección Blanca,14. Murcia. Secretariado de Publicaciones Universidad de Murcia.
Tomeo, V.; Uña, I. (1989): *Diez lecciones de estadística descriptiva*. *(Curso teórico-práctico)*. Madrid. AC.
Welkowitz, J.; Ewen, R. B.; Cohen, J. (1981): *Estadística aplicada a las ciencias de la educación*. Aula XXI. Madrid. Santillana.

Índice de figuras

G. Lorenzo / M. Alcalde / I. Pérez - ISBN: 978-84-16356-31-7 La geometría y la estadística en el aula de primaria - UJI - DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia109