

UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA  
INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

**Mestrado em: Ciências Actuarias**

# **Avaliação da Participação nos Resultados Futura**

*Aplicação ao Seguro de Capital Diferido com  
Contrasseguro*

**Ana Rita Aguadeiro Ramos**

**Orientação:** Professor Doutor Onofre Alves Simões

**Júri:**

**Presidente:** Professora Doutora Maria de Lourdes Caraças Centeno

**Vogais:** Professor Doutor Manuel L. Esquível

Professor Doutor Onofre Alves Simões

Setembro/2010

# **AVALIAÇÃO DA PARTICIPAÇÃO NOS RESULTADOS FUTURA:**

## ***Aplicação ao Seguro de Capital Diferido com Contrasseguro***

Ana Rita Aguadeiro Ramos

Mestrado em: Ciências Actuarias

Orientador: Professor Doutor Onofre Alves Simões

Provas concluídas em: Setembro de 2010

### **Resumo**

A avaliação da participação nos resultados futura é um problema que se torna particularmente relevante no âmbito do Projecto “Solvência II” e das novas regras contabilísticas. Trata-se de uma variável que depende de um vasto conjunto de variáveis económicas e financeiras, para além da própria estrutura de cada contrato e do esquema de participação associado.

A aplicação ao seguro de capital diferido com contrasseguro faz com que o problema central subjacente consista na estimação dos resultados financeiros futuros obtidos com a gestão dos contratos, dada a sua natureza marcadamente financeira. Como tal, para se proceder à resolução deste problema, propõe-se a implementação de duas metodologias de avaliação: um algoritmo de simulação estocástica e uma análise por cenários, integrada num modelo de optimização da carteira de activos representativa das responsabilidades.

Enquanto no primeiro caso os resultados financeiros são estimados com base numa possível adaptação do Modelo de Inflação de Wilkie, no segundo caso considera-se explicitamente a questão da estratégia óptima de investimento.

**Palavras-chave:** Participação nos Resultados, Capital Diferido com Contrasseguro dos Prémios, Solvência II, *Best Estimate*, Simulação Estocástica, Optimização da Rendibilidade.

# **VALUATION OF FUTURE PROFIT SHARING:**

## *An Application to Deferred Capital Insurance Contract with Return of Premiums*

Ana Rita Aguadeiro Ramos

Master in: Ciências Actuarias

Advisor: Professor Doutor Onofre Alves Simões

Approved in: September, 2010

### **Abstract**

The valuation of future profit sharing is a problem which has become especially important on “Solvency II” framework and also regarding the recent changes on accounting systems. It is a variable that depends on several economic and financial factors, beyond the structure of each contract itself and its associated profit sharing mechanism.

The application of this analysis to the specific case of the deferred capital insurance with return of premiums reveals that the main problem is the estimation of future financial income, arising from the management of these contracts; in fact, this kind of income has the major impact on those contracts. Two different valuation methodologies are proposed in this project, in order to solve the problem. The first is an algorithm of stochastic simulation and the second lays on a scenario analysis, integrated into a model of optimization of the representative portfolio of the liabilities. While in the first methodology financial income is estimated using an adapted version of the Inflation Model of Wilkie, in the second one, the issue of optimal investment strategy is explicitly considered.

**Keywords:** Profit Sharing, Deferred Capital Insurance with Return of Premiums, Solvency II, Best Estimate, Stochastic Simulation, Maximization of Returns.

# Índice

<b>Índice de Gráficos</b> .....	7
<b>Índice de Tabelas</b> .....	12
<b>Lista de Notação</b> .....	13
<b>Agradecimentos</b> .....	19
<b>Capítulo 1 - Introdução</b> .....	20
<b>Capítulo 2 - Revisão de Literatura</b> .....	24
<b>Capítulo 3 - Estrutura do Contrato e Formalização do Problema</b> .....	28
3.1. Introdução .....	28
3.2. Estrutura do Contrato .....	30
3.3. Descrição do Plano de Participação nos Resultados .....	33
3.4. Formalização do Problema .....	37
3.5. Modelação da <i>Best Estimate</i> .....	39
3.5.1. Prémios futuros .....	40
3.5.2. Custos com sinistros .....	42
3.5.3. Valores de resgate .....	44
3.5.4. Custos de exploração .....	44
<b>Capítulo 4 – Metodologia 1 - Avaliação da Participação nos Resultados Futura     com Enquadramento no Modelo de Wilkie</b> .....	46
4.1. Introdução .....	46
4.2. Adaptação do Modelo de Wilkie à Modelação do PIB .....	59
4.3. Modelação das Variáveis Associadas ao Contrato .....	54
4.4. Algoritmo de Simulação Estocástica .....	56
4.5. Modelação das Taxas de Mortalidade .....	59
4.6. Modelação das Despesas .....	60
4.7. Taxa de Desconto .....	61
4.8. Taxa de Retorno das Provisões para Participação nos Resultados .....	61
<b>Capítulo 5 - Análise dos Dados</b> .....	63
<b>Capítulo 6 - Aplicação Prática da Metodologia 1</b> .....	69

6.1. Modelação Estocástica dos Resgates, Reduções e Anulações .....	69
6.1.1. Taxa de severidade dos resgates.....	71
6.1.2. Taxa de severidade dos resgates, reduções e anulações.....	71
6.1.3. Simulação da força de crescimento do PIB.....	73
6.1.4. Simulação das forças de crescimento das variáveis macroeconómicas explicativas.....	75
6.1.5. Simulação das Taxas de Resgate, Redução e Anulação .....	82
6.2. Modelação dos Prémios Pagos .....	84
6.3. Modelação da Participação nos Resultados Passada .....	87
6.4. Modelação Estocástica do Peso dos Prémios Futuros no Capital Seguro .....	89
6.5. Modelação Estocástica das Taxas de Mortalidade .....	91
6.6. Modelação das Despesas .....	93
6.7. Modelação dos Resultados Financeiros.....	94
6.8. Resultados Finais .....	99
6.9. Validação Histórica da Metodologia .....	105
<b>Capítulo 7 - Metodologia 2 – Modelo de Optimização da Rendibilidade do</b>	
<b>Portfólio.....</b>	<b>107</b>
7.1. Introdução .....	108
7.2. Modelação dos Resultados Financeiros.....	108
7.3. Cálculo da Participação nos Resultados Futura.....	124
7.4. Modelação Estocástica dos Preços das Obrigações.....	125
7.5. Construção de Cenários .....	128
<b>Capítulo 8 - Aplicação Prática da Metodologia 2 .....</b>	<b>130</b>
8.1. Modelação Estocástica dos Preços das Obrigações.....	130
8.1.1. Obrigações dos Estados da União Europeia.....	131
8.1.2. Obrigações Privadas da União Europeia.....	131
8.1.3. Resultados .....	131
8.2. Construção de Cenários .....	132
8.3. Resultados Finais .....	136
<b>Capítulo 9 - Conclusão .....</b>	<b>141</b>
<b>Bibliografia .....</b>	<b>146</b>

<b>Anexo 1 – Modelo Gaussiano com 2 Factores</b> .....	<b>150</b>
<b>Anexo 2 – Notas Adicionais sobre a Modelação do Preço das Obrigações</b> ... ..	<b>150</b>
<b>Anexo 3 – Programas</b> ... ..	<b>150</b>

# Índice de Gráficos

<b>Gráfico 1:</b> Evolução dos prémios e da provisão matemática entre 1995 e 2007.....	<b>63</b>
<b>Gráfico 2:</b> Prémios em percentagem do capital seguro entre 1995 e 2007. ....	<b>64</b>
<b>Gráfico 3:</b> Evolução dos prémios, desagregando os prémios novos entre 2001 e 2007.	<b>65</b>
<b>Gráfico 4:</b> Prémios em percentagem do capital seguro com desagregação dos prémios novos entre 2001 e 2007.....	<b>65</b>
<b>Gráfico 5:</b> Evolução do número de apólices entre 1984 e 2007.....	<b>66</b>
<b>Gráfico 6:</b> Evolução das taxas de crescimento do capital seguro entre 1985 e 2007.....	<b>66</b>
<b>Gráfico 7:</b> Evolução das taxas de resgate em função do capital seguro e do número de contratos, entre 1985 e 2007.....	<b>67</b>
<b>Gráfico 8:</b> Evolução das taxas de redução em função do capital seguro, entre 1985 e 2007. ....	<b>67</b>
<b>Gráfico 9:</b> Evolução das taxas de anulação em função do capital seguro e do número de contratos, entre 1985 e 2007.....	<b>68</b>
<b>Gráfico 10:</b> Taxas de severidade dos resgates observadas e estimadas, entre 1989 e 2007. ....	<b>72</b>
<b>Gráfico 11:</b> Taxas de severidade dos resgates, reduções e anulações observadas e estimadas, entre 1989 e 2007.....	<b>73</b>
<b>Gráfico 12:</b> Média observada e estimada da força de crescimento acumulada do PIB, entre 1988 e 2007.....	<b>74</b>
<b>Gráfico 13:</b> Resultados da simulação da série do PIB, entre 1988 e 2007.....	<b>75</b>
<b>Gráfico 14:</b> Média observada e estimada da força de crescimento acumulada da diferença entre o PIB e o consumo privado, entre 1988 e 2007.....	<b>76</b>
<b>Gráfico 15:</b> Resultados da simulação da série do consumo privado, entre 1988 e 2007	<b>77</b>
<b>Gráfico 16:</b> Média observada e estimada da força de crescimento acumulada da diferença entre o PIB e o consumo público, entre 1989 e 2007. ....	<b>77</b>

<b>Gráfico 17:</b> Resultados da simulação da série do consumo público, entre 1989 e 2007.	<b>77</b>
<b>Gráfico 18:</b> Média observada e estimada da força de crescimento acumulada da diferença entre o PIB e a procura interna, entre 1989 e 2007. ....	<b>78</b>
<b>Gráfico 19:</b> Resultados da simulação da série da procura interna, entre 1989 e 2007...	<b>78</b>
<b>Gráfico 20:</b> Média observada e estimada da força de crescimento acumulada da diferença entre o PIB e o Índice geral de cotação das acções da Bolsa de Valores de Lisboa, entre 1990 e 2007. ....	<b>78</b>
<b>Gráfico 21:</b> Resultados da simulação da série do Índice geral de cotação das acções da Bolsa de Valores de Lisboa, entre 1990 e 2007. ....	<b>79</b>
<b>Gráfico 22:</b> Média observada e estimada da força de crescimento acumulada da diferença entre o PIB e o Índice Obrigacionista (3 meses), entre 1990 e 2007. ....	<b>79</b>
<b>Gráfico 23:</b> Resultados da simulação da série do Índice Obrigacionista (3 meses), entre 1990 e 2007. ....	<b>79</b>
<b>Gráfico 24:</b> Taxa de desemprego observada e estimada, entre 1998 e 2007.....	<b>80</b>
<b>Gráfico 25:</b> Média observada e estimada da força de crescimento acumulada da diferença entre a taxa de desemprego real e estimada, entre 1990 e 2007.	<b>81</b>
<b>Gráfico 26:</b> Resultados da simulação da série taxa de desemprego, entre 1989 e 2007.	<b>82</b>
<b>Gráfico 27:</b> Média observada e estimada da força de crescimento acumulada da diferença entre a taxa de resgates real e estimada, entre 1989 e 2007. ....	<b>83</b>
<b>Gráfico 28:</b> Resultados da simulação da série taxa de resgates, entre 1989 e 2007.....	<b>83</b>
<b>Gráfico 29:</b> Média observada e estimada da força de crescimento acumulada da diferença entre a taxa de resgates, reduções e anulações real e estimada, entre 1989 e 2007. ....	<b>83</b>
<b>Gráfico 30:</b> Resultados da simulação da série taxa de resgates, reduções e anulações, entre 1989 e 2007. ....	<b>84</b>
<b>Gráfico 31:</b> Capital seguro observado e estimado, entre 1990 e 2007. ....	<b>86</b>

<b>Gráfico 32:</b> Prémios pagos observados e estimados, em percentagem do capital seguro, entre 1990 e 2007. ....	<b>87</b>
<b>Gráfico 33:</b> Prémios pagos observados e estimados, entre 1990 e 2007. ....	<b>87</b>
<b>Gráfico 34:</b> Participação nos resultados atribuída, em percentagem do capital seguro, entre 1990 e 2007. ....	<b>88</b>
<b>Gráfico 35:</b> Participação nos resultados atribuída, entre 1990 e 2007. ....	<b>89</b>
<b>Gráfico 36:</b> Prémios (excluindo a produção nova) em percentagem do capital seguro, entre 2001 e 2007. ....	<b>90</b>
<b>Gráfico 37:</b> Média observada e estimada da força de crescimento acumulada da diferença entre o peso dos prémios no capital seguro real e estimada, entre 2001 e 2007. ....	<b>91</b>
<b>Gráfico 38:</b> Resultados da simulação dos prémios em função do capital seguro, entre 2001 e 2007. ....	<b>91</b>
<b>Gráfico 39:</b> Resultados obtidos para ${}_t q_{25}$ , $0 \leq t \leq 40$ , para a população segura masculina. ....	<b>92</b>
<b>Gráfico 40:</b> Resultados obtidos para ${}_t q_{25}$ , $0 \leq t \leq 40$ , para a população segura feminina. ....	<b>93</b>
<b>Gráfico 41:</b> Resultados obtidos para ${}_t p_{25}$ , para $0 \leq t \leq 40$ , para a população segura masculina. ....	<b>92</b>
<b>Gráfico 42:</b> Resultados obtidos para ${}_t p_{25}$ , para $0 \leq t \leq 40$ , para a população segura feminina. ....	<b>92</b>
<b>Gráfico 43:</b> Valores observados e estimados das despesas de gestão em relação ao capital seguro, entre 2000 e 2007. ....	<b>92</b>
<b>Gráfico 44:</b> Comparação entre as composições das carteiras representativas dos produtos do ramo Vida, entre 2000 e 2007. ....	<b>95</b>
<b>Gráfico 45:</b> Resultados financeiros realizados em percentagem da provisão matemática, entre 2001 e 2007. ....	<b>96</b>

<b>Gráfico 46:</b> Saldo de mais e menos valias não realizadas em percentagem da provisão matemática, entre 1998 e 2007.....	<b>97</b>
<b>Gráfico 47:</b> Média observada e estimada da força de crescimento acumulada da diferença entre o peso dos resultados financeiros realizados na provisão matemática real e estimada, entre 2001 e 2007.....	<b>98</b>
<b>Gráfico 48:</b> Resultados da simulação dos resultados financeiros realizados em função da provisão matemática, entre 2001 e 2007. ....	<b>98</b>
<b>Gráfico 49:</b> Média observada e estimada da força de crescimento acumulada da diferença entre saldo de mais e menos valias real e estimada, entre 1989 e 2007.....	<b>98</b>
<b>Gráfico 50:</b> Resultados da simulação do saldo de mais e menos valias em função da provisão matemática, entre 1998 e 2007.....	<b>99</b>
<b>Gráfico 51:</b> Distribuição das idades da população segura.....	<b>99</b>
<b>Gráfico 52:</b> Resultados da simulação dos prémios futuros até ao <i>run-off</i> .....	<b>100</b>
<b>Gráfico 53:</b> Resultados da simulação dos custos em caso de vida até ao <i>run-off</i> . ....	<b>100</b>
<b>Gráfico 54:</b> Resultados da simulação dos custos em caso de morte até ao <i>run-off</i> .....	<b>100</b>
<b>Gráfico 55:</b> Resultados da simulação dos valores de resgate até ao <i>run-off</i> . ....	<b>101</b>
<b>Gráfico 56:</b> Resultados da simulação das despesas de exploração até ao <i>run-off</i> .....	<b>101</b>
<b>Gráfico 57:</b> Resultados da simulação <i>best estimate</i> até ao <i>run-off</i> .....	<b>102</b>
<b>Gráfico 58:</b> Resultados da simulação da participação nos resultados futura, atribuída anualmente até ao <i>run-off</i> , em função de $BE_1$ .....	<b>103</b>
<b>Gráfico 59:</b> Histograma de $PRD_{Total}$ resultante do processo de simulação. ....	<b>104</b>
<b>Gráfico 60:</b> Distribuição ajustada de $PRD_{Total}$ .....	<b>104</b>
<b>Gráfico 61:</b> Validação histórica de $PRD_t$ , entre 2002 e 2006. ....	<b>105</b>
<b>Gráfico 62:</b> <i>Yield curve</i> das obrigações dos Estados de <i>rating</i> A e das privadas de <i>rating</i> BBB da UE. ....	<b>132</b>
<b>Gráfico 63:</b> Evolução futura da taxa de crescimento do PIB para diferentes cenários.	<b>133</b>

<b>Gráfico 64:</b> Evolução futura da taxa de crescimento do consumo privado, para diferentes cenários.....	<b>133</b>
<b>Gráfico 65:</b> Evolução futura da taxa de crescimento do consumo público, para diferentes cenários.....	<b>134</b>
<b>Gráfico 66:</b> Evolução futura da taxa de desemprego, para diferentes cenários.....	<b>134</b>
<b>Gráfico 67:</b> Evolução futura da taxa de crescimento da procura interna, para diferentes cenários.....	<b>134</b>
<b>Gráfico 68:</b> Evolução futura do OT a 3 meses, para diferentes cenários. ....	<b>135</b>
<b>Gráfico 69:</b> Evolução futura do BVL, para diferentes cenários. ....	<b>133</b>
<b>Gráfico 70:</b> Evolução futura das taxas de resgate, para diferentes cenários. ....	<b>135</b>
<b>Gráfico 71:</b> Evolução futura das taxas de resgate, redução e anulação, para diferentes cenários.....	<b>135</b>
<b>Gráfico 72:</b> Evolução futura dos prémios em função do capital seguro, para diferentes cenários.....	<b>136</b>
<b>Gráfico 73:</b> Resultados da participação nos resultados futura, atribuída anualmente até ao <i>run-off</i> , em função de $BE_1$ .....	<b>137</b>
<b>Gráfico 74:</b> Evolução do peso das obrigações privadas na carteira, até ao <i>run-off</i> .....	<b>138</b>
<b>Gráfico 75:</b> Estrutura temporal das <i>yields</i> associadas às obrigações privadas BBB da UE.....	<b>155</b>

# Índice de Tabelas

<b>Tabela 1:</b> Correlações empíricas entre o PIB e outras variáveis macroeconómicas. ....	<b>70</b>
<b>Tabela 2:</b> Sumário das estatísticas relativas à qualidade de ajustamento de $\ln(\widehat{1 + st})$ .	<b>71</b>
<b>Tabela 3:</b> Sumário das estatísticas relativas à qualidade de ajustamento de $\ln(1 + \widehat{st + rt + at})$ .....	<b>72</b>
<b>Tabela 4:</b> Estimativas dos parâmetros do modelo de simulação das variáveis explicativas.....	<b>76</b>
<b>Tabela 5:</b> Sumário das estatísticas relativas à qualidade de ajustamento de $\ln(1 + \widehat{desemp}_t)$ .....	<b>80</b>
<b>Tabela 6:</b> Sumário das estatísticas relativas à qualidade de ajustamento de $\ln(1 + \widehat{\rho}_t^{hist})$ . ....	<b>86</b>
<b>Tabela 7:</b> Sumário das estatísticas relativas à qualidade de ajustamento de $\ln(1 + \widehat{PRD}_t^{hist})$ . ....	<b>88</b>
<b>Tabela 8:</b> Sumário das estatísticas relativas à qualidade de ajustamento de $\ln(\widehat{1 + \rho}_t)$ .	<b>90</b>
<b>Tabela 9:</b> Sumário das estatísticas relativas à qualidade de ajustamento de $\ln(\widehat{1 + RF}_t)$ . ....	<b>96</b>
<b>Tabela 10:</b> Sumário das estatísticas relativas à qualidade de ajustamento de $\ln(1 + \widehat{MMV}_t)$ . ....	<b>97</b>
<b>Tabela 11:</b> Estimativas dos parâmetros do modelo de simulação dos resultados financeiros. ....	<b>97</b>
<b>Tabela 12:</b> Resultados da simulação de $PRD_{Total}$ , associados a diferentes hipóteses de transferência dos resultados. ....	<b>103</b>
<b>Tabela 14:</b> Limites das restrições de risco.....	<b>137</b>
<b>Tabela 15:</b> Resultados de $PRD_{Total}$ em relação à <i>best estimate</i> , para os diferentes cenários.....	<b>137</b>

## Lista de Notação

$C_t$	Capital seguro no ano $t$ .
$C_t^m$	Capital a pagar em caso de morte no ano $t$ .
$PRD'_t$	Participação nos resultados atribuída no ano $t$ a um contrato particular.
$k$	Taxa garantida do contrato.
$P_t$	Montante de prémios recebidos no ano $t$ .
$P'_t$	Montante de prémios recebidos no ano $t$ , líquido de custos de aquisição e de gestão.
$PR_t$	Parcela dos resultados financeiros realizados no ano $t$ que são transferidos para a provisão para participação nos resultados atribuída.
$BE_t$	<i>Best estimate</i> constituída no ano $t$ , líquida da participação nos resultados futura.
$RF_t$	Resultados financeiros realizados no ano $t$
$PPR_{a\_atrib,t}$	Provisão para participação nos resultados a atribuir no ano $t$ .
$PPR_{atrib,t}$	Provisão para participação nos resultados atribuída no ano $t$ .
$a_t$	Porcentagem do excesso dos resultados realizados em relação à taxa garantida, transferida para a $PPR_{atrib,t}$ , no ano $t$ .
$b_t$	Porcentagem da $PPR_{a\_atrib,t}$ , transferida para a $PPR_{atrib,t}$ , no ano $t$ .
$d_t$	Porcentagem da $PPR_{atrib,t}$ , distribuída no ano $t$ .
$MMV_t$	Saldo de mais e menos valias não realizadas de investimentos, no ano $t$ .
$i_t$	Taxa rendibilidade dos investimentos afectos à $PPR_{a\_atrib,t}$ , no ano $t$ .
$i'_t$	Taxa rendibilidade dos investimentos afectos à $PPR_{atrib,t}$ , no ano $t$ .
$PRD_t$	Participação nos resultados distribuída no ano $t$ .
$PRD_{Total}$	Montante da participação nos resultados futura total.
$P(t, t + s)$	Valor de uma obrigação de cupão zero, emitida em $t$ e de maturidade $t + s$ .

$f(0, t, t + s)$	Taxa <i>forward</i> entre $t$ e $t + s$ , estimada no momento 0.
$CS_t$	Custos com sinistros no ano $t$ .
$E_t$	Custos de exploração suportados no ano $t$ .
$R_t$	Valores de resgate suportados no ano $t$ .
$s_t$	Taxa de resgate no ano $t$ .
$\pi_t$	Taxa de redução no ano $t$ .
$\alpha_t$	Taxa de anulação no ano $t$ .
$\rho_t$	Peso dos prémios recebidos no ano $t$ , em relação a $C_t$ .
${}_{t-1}q_{x_i}$	Taxa de mortalidade de uma pessoa de idade $x_i$ , decorridos $t - 1$ anos.
$w_i$	Peso dos segurados com idade $x_i$ na carteira.
$G_t$	Percentagem de vencimento dos contratos em vigor, até ao ano $t$ .
$g_t$	Percentagem de vencimento dos contratos em vigor, no ano $t$ .
$p_{x_i}$	Probabilidade de uma pessoa de idade $x_i$ atingir a idade $x_i + 1$ .
$CSvida_t$	Custos com sinistros em caso de vida no ano $t$ .
$PRD_t^{hist}$	Participação nos resultados atribuída da carteira no ano histórico $j$ .
$CSmorte_t$	Custos com sinistros em caso de morte no ano $t$ .
$P_j^{hist}$	Prémios pagos da carteira no ano histórico $j$ .
$C_j^{hist}$	Capital seguro da carteira no ano histórico $j$ .
$m_j^{hist}$	Valor das saídas por morte no ano histórico $j$ .
$g_j^{hist}$	Valor das saídas por vencimento no ano histórico $j$ .
$s_j^{hist}$	Valor das saídas por resgate no ano histórico $j$ .
$\pi_j^{hist}$	Valor das saídas por redução no ano histórico $j$ .
$\alpha_j^{hist}$	Valor das saídas por anulação no ano histórico $j$ .
$o_j^{hist}$	Valor das saídas de ordem residual no ano histórico $j$ .
$r$	Taxa de penalização por resgate.
$I_t$	Taxa de crescimento da variável entre $t - 1$ e $t$ .
$\delta_t$	Força de crescimento da variável entre $t - 1$ e $t$ .

$\mu$	Valor médio de $\delta_t$ .
$a$	Peso do desvio periódico entre $\delta_t$ e $\mu$ .
$\sigma$	Desvio padrão de uma série de ruídos brancos com distribuição Normal.
$Z_t$	Variável aleatória com distribuição Normal reduzida.
$r_t$	Taxa de crescimento acumulada da variável até $t$ .
$\Delta_{t_i}$	Força de crescimento entre $i$ e $t$ .
$\mu(t)$	Média da força de crescimento acumulada até $t$ .
$\sigma^2(t)$	Desvio padrão da força de crescimento acumulada até $t$ .
$Cov(t, s)$	Covariância entre as forças de crescimento acumuladas até $t$ e até $s$ .
$R_{t,d}$	Valor acumulado das forças de crescimento entre $d$ e $d + t$ .
$I_{t,d}$	Taxa de crescimento da variável entre $d$ e $d + t$ .
$\bar{I}_t$	Taxa de crescimento da variável entre 0 e $t$ .
$desemp_t$	Taxa de desemprego no ano $t$ .
$cpriv_t$	Taxa de crescimento do consumo privado no ano $t$ .
$cpub_t$	Taxa de crescimento do consumo público no ano $t$ .
$BVL_t$	Índice geral de cotação das acções da Bolsa de Valores de Lisboa, no ano $t$ .
$OT3_t$	Índice obrigacionista (3 meses), no ano $t$ .
$proc_t$	Taxa de crescimento da procura interna, no ano $t$ .
$PIB_t$	Taxa de crescimento do Produto Interno Bruto, no ano $t$ .
$M_k$	Variável aleatória com distribuição de Bernoulli que assume o valor 1 em caso de morte.
$N_{x_i}$	Número de pessoas seguras com idade $x_i$ .
$q_{x_i}$	Taxa de mortalidade de uma pessoa de idade $x_i$ quando atingir a idade $x_i + 1$ .
$\hat{q}_{x_i}^{(1-\alpha)}$	Taxa de mortalidade estimada para o nível de confiança $1 - \alpha$ , de uma pessoa de idade $x_i$ quando atingir a idade $x_i + 1$ .

$z_\alpha$	Valor crítico da distribuição Normal para o nível de confiança $1 - \alpha$ .
$e_t$	Peso das despesas de gestão em relação aos prémios, no ano $t$ .
$CG_t$	Custos de gestão da carteira, no ano $t$ .
$F_t$	Resultados realizados com a alienação de activos, no ano $t$ .
$J_t$	Rendimentos realizados com a detenção de activos, no ano $t$ .
$g_{1t}$	Custos de gestão da carteira de activos, no mês $t$ .
$c_j$	Cupão anual associado à obrigação do tipo $j$ .
$P_j(t, T_k)$	Preço de uma obrigação do tipo $j$ , com maturidade $T_k$ , no mês $t$ .
$x_{t,j}(k)$	Quantidade investida numa obrigação do tipo $j$ , com maturidade decorridos $k$ meses, no mês $t$ .
$S_t^+$	Vector dos preços das obrigações disponíveis para compra, no mês $t$ .
$S_t^-$	Vector dos preços das obrigações disponíveis para compra, no mês $t - 1$ , disposto pelas maturidades das obrigações válidas em $t - 1$ .
$V_t^-$	Restrição orçamental no mês $t$ .
$x_t^*$	Vector das quantidades óptimas a investir em cada obrigação, no mês $t$ .
$Cp_t$	Matriz dos cupões das obrigações, no mês $t$ .
$VN_t$	Vector dos valores nominais das obrigações, no mês $t$ .
$VN_{t,j}(k)$	Valor nominal da obrigação do tipo $j$ que matura dentro de $k$ meses, no mês $t$ .
$c_{t,j}(k)$	Cupão anual associado à obrigação do tipo $j$ que matura dentro de $k$ meses, no mês $t$ .
$j_t$	Montante de juros recebidos no mês $t$ .
$g_1$	Taxa de gestão mensal da carteira.
$Da_{t,j}$	Duração global das obrigações do tipo $j$ detidas, no mês $t$ .
$Ca_{t,j}$	Convexidade global das obrigações do tipo $j$ detidas, no mês $t$ .
$D_{lt}$	Duração global das responsabilidades, no mês $t$ .
$C_{lt}$	Convexidade global das responsabilidades, no mês $t$ .

$x_t^o$	Vector das quantidades investidas, adquiridas e vendidas, no mês $t$ .
$x_t^b$	Vector das quantidades adquiridas no mês $t$ .
$x_t^s$	Vector das quantidades vendidas no mês $t$ .
$S_t^{o-}$	Vector dos preços das obrigações disponíveis para compra, no mês $t$ , disposto pelas maturidades válidas em $t - 1$ , referente a $x_t^o$ .
$S_t^{o+}$	Vector dos preços das obrigações disponíveis para compra, no mês $t$ , referente a $x_t^o$ .
$x_t^{-o}$	Vector das quantidades investidas, adquiridas e vendidas, no mês $t$ , disposto pelas maturidades das obrigações válidas em $t - 1$ .
$Rm_t$	Rendibilidade mensal esperada, no mês $t$ .
$g_2$	Taxa cobrada por transacção efectuada.
$k_{1,j}$	Peso mínimo admissível da obrigação $j$ na carteira.
$k_{2,j}$	Peso máximo admissível da obrigação $j$ na carteira.
$f_t$	Resultados realizados com a alienação de obrigações, no mês $t$ .
$f_{i,j}(k)$	Resultados realizados com a alienação da obrigação $j$ , no mês $t$ , que matura dentro de $k$ meses.
$x_t^{aa}$	Vector com a variação das quantidades investidas nas obrigações entre $t - 1$ e $t$ .
$x_{t,j}^{aa}(k)$	Vector com a variação das quantidades investidas na obrigação $j$ , que matura dentro de $k$ meses, entre $t - 1$ e $t$ .
$S_t^{aa}$	Vector dos preços de aquisição médios das obrigações no fim do ano $t$ .
$S_{t,j}^{aa}(k)$	Preço de aquisição médio da obrigação $j$ , que matura dentro de $k$ meses, no fim do ano $t$ .
$x_t^m$	Vector das quantidades investidas mantidas em carteira entre o início e o fim do ano $t$ .
$x_{t,j}^{aa-total}(k)$	Vector das quantidades adquiridas da obrigação $j$ , que matura dentro de $k$ meses, entre $t - 1$ e $t$ .

$v_{t,j}^i(k)$	Vector das quantidades adquiridas da obrigação $j$ , que matura dentro de $k$ meses, no $(12 - i)^{\text{o}}$ mês do ano $t$ .
$x_{t,j}^{aq(MV),i}(k)$	Vector das quantidades adquiridas da obrigação $j$ , que matura dentro de $k$ meses, entre $t - 1$ e $t$ , excluindo as aquisições efectuadas a partir do $(12 - i)^{\text{o}}$ mês.
$MV_{1t}$	Parcela do saldo de mais e menos valias não realizadas de obrigações detidas em carteira no início do ano $t$ .
$MV_{2t}$	Parcela do saldo de mais e menos valias não realizadas de obrigações adquiridas ao longo do ano $t$ .
$D(t)$	Deflator associado a um cenário genérico, aplicado ao desconto de um determinado <i>cash-flow</i> , momento $t$ .
$D_i(t)$	Deflator aplicado ao desconto de um <i>cash-flow</i> gerado no cenário $i$ no momento $t$ .
$PRD_t^j$	Parcela da participação nos resultados distribuída, originada pelo retorno da obrigação $j$ .
$p_i$	Probabilidade real de ocorrência do cenário $i$ .
$q_i$	Probabilidade neutra ao risco associada ao cenário $i$ .
$RF_t^j$	Parcela dos resultados financeiros totais originada pelo retorno da obrigação $j$ .
$D^j(t)$	Deflator aplicado ao desconto de um <i>cash-flow</i> gerado pela obrigação $j$ , no cenário $i$ e no momento $t$ .

## **Agradecimentos**

Ao Professor Onofre Alves Simões pela sua excelente orientação e preciosa ajuda, ao longo de todas as fases deste trabalho.

Ao Conselho Directivo do Instituto de Seguros de Portugal, Dr. Gabriel Bernardino e Dr. António Egídio dos Reis, pela oportunidade de frequência deste mestrado e pelo tempo concedido para a sua realização.

Ao Dr. Francisco Cruz Alves e Dr. Hugo Borginho pelos conselhos e ideias sugeridas no decurso do trabalho.

A todos os membros do Departamento de Análise de Riscos e Solvência do Instituto de Seguros de Portugal pelo apoio neste último ano de realização do presente trabalho.

Aos meus pais e irmã, pelo seu incessante apoio a todos os níveis na minha vida, o qual me permitiu concluir mais uma etapa.

Aos meus amigos e colegas do ISEG, pelo apoio, amizade e confiança depositada.

# Capítulo 1

## Introdução

O presente trabalho tem enquadramento no Projecto “Solvência II” e apresenta como objectivo a avaliação da participação nos resultados futura, aplicada ao caso particular de um seguro de capital diferido com contrasseguro dos prémios.

Um dos principais aspectos que diferencia o sistema em vigor do sistema que virá a ser implementado reside no facto de este último se basear essencialmente em princípios, em detrimento dos factores quantitativos rígidos, que aquele privilegiava. Estes princípios encontram-se focalizados na mensuração dos diferentes riscos a que cada empresa de seguros se encontra sujeita, no cumprimento das suas responsabilidades para com os tomadores de seguros. O novo sistema pretende incentivar as companhias a procederem à avaliação e gestão dos riscos a que se encontram expostas, de uma forma mais rigorosa.

Uma das principais consequências da nova abordagem encontra-se no cálculo das provisões técnicas. Com efeito, estas passam a ter que ser decompostas, por um lado, pelos valores actuariais de todos os *cash-flows* decorrentes dos contratos em vigor e, por outro, por uma margem de risco, que se traduz no custo adicional que uma empresa de

seguros terá de suportar para que um investidor racional aceite a transferência das responsabilidades em causa.

Neste trabalho, apenas se considera o cálculo da *best estimate* das responsabilidades associadas ao contrato escolhido. Deve, desde já, salientar-se que a participação nos resultados a atribuir no futuro é uma parcela importante deste valor e que o seu cálculo se revela bastante complexo.

Isto deve-se, em primeiro lugar, ao facto de a referida avaliação implicar a projecção dos resultados financeiros futuros, os quais se encontram dependentes de um leque variado de factores; em segundo lugar, ao facto de o valor da participação nos resultados a distribuir num determinado ano depender não apenas dos resultados gerados nesse ano, mas igualmente dos resultados obtidos em anos anteriores; em terceiro e último lugar, ao facto de se encontrar intimamente relacionada com o comportamento dos vários factores de risco que afectam as restantes responsabilidades, como por exemplo, a mortalidade, a ocorrência de resgates, etc.

A nova filosofia trazida pelo “Solvência II” obriga a que toda esta estrutura de dependências deva ser considerada, para uma correcta avaliação da participação nos resultados. Se na realidade a atribuição dos resultados é função da própria *best estimate*, não é correcto dissociá-la das restantes responsabilidades com os mesmos contratos. Por conseguinte, a presente avaliação exige que se considere tanto o comportamento dos passivos como o dos activos afectos aos contratos em estudo, tendo de se garantir uma avaliação consistente das duas vertentes, considerando todas as relações existentes entre as duas realidades. Tal exigência leva a um esforço notável de decomposição e, em seguida, de recomposição.

Existindo factores de risco que afectam tanto os activos como as responsabilidades, e que assumem uma natureza estocástica, devendo ser tratados como tal, no

desenvolvimento deste trabalho foi necessário primeiramente proceder ao estudo dos factores que têm um maior impacto na avaliação em causa.

Desenvolveu-se em seguida um algoritmo de simulação estocástica, com o objectivo de estimar o valor da participação nos resultados distribuída em cada um dos anos que compõem o horizonte de projecção. Este algoritmo permite interligar os factores de risco relevantes para o cálculo da participação nos resultados e procura reproduzir a estrutura de dependência temporal existente entre os valores atribuídos ao longo do tempo.

Alternativamente, e ao mesmo tempo de forma complementar, implementou-se uma metodologia de avaliação que permite estimar directamente as diferentes parcelas dos resultados financeiros, a partir da resolução de sucessivos problemas de optimização linear ao longo do tempo. A função objectivo é a maximização do valor esperado da rendibilidade do portfólio para o período subsequente, dado um conjunto de restrições orçamentais, de risco e de *matching* entre activos e passivos.

O objectivo desta última análise prende-se com a criação de possíveis *benchmarks* para a participação nos resultados, assumindo que a empresa de seguros pode mudar a composição da carteira, dentro de determinados limites, e atendendo designadamente à cobrança de custos de transacção. Esta análise foi implementada para cinco cenários económicos distintos, escolhidos de acordo com critérios de representatividade.

Sistematizando a estrutura do trabalho, refira-se que no Capítulo 2 se faz uma revisão da literatura mais relevante para o tema. No Capítulo 3, descreve-se a estrutura do contrato objecto de estudo e explica-se o plano de participação nos resultados associado. Ainda neste capítulo, efectua-se uma análise no que toca ao cálculo da *best estimate* inerente ao contrato em causa.

Nos capítulos seguintes, procede-se primeiramente à apresentação detalhada de cada uma das metodologias propostas, desde os respectivos modelos gerais de avaliação, às formas de resolução de questões específicas decorrentes da respectiva implementação.

No final de cada uma destas exposições teóricas, passa-se à respectiva aplicação prática, apresentando-se os cálculos intermédios relevantes implementados para efectuar a avaliação, nomeadamente ajustamentos estatísticos e processos auxiliares de simulação estocástica, e os resultados finais.

Importa referir que a aplicação prática do primeiro método é antecedida de uma breve análise dos dados relativos ao produto estudado, na perspectiva de se obter uma melhor compreensão da forma como este é comercializado no âmbito do mercado português, e se poder aferir as tendências de evolução de algumas variáveis relevantes para o estudo.

## Capítulo 2

### Revisão de Literatura

Nos últimos anos têm surgido múltiplos trabalhos dedicados à avaliação de contratos que incluem cláusulas de participação nos resultados. Constituem factores decisivos para este facto:

- A criação de novas regras contabilísticas que incidem sobre o justo valor.
- A futura implementação do Projecto “Solvência II”, que apela para a necessidade de uma avaliação mais sofisticada e separada das opções e garantias embutidas nos contratos.
- O aparecimento de produtos mais complexos, sob este aspecto, no mercado.

Grosen e Jorgensen (2000) procedem à avaliação do valor de mercado de um contrato que confere participação nos resultados, decompondo o seu valor em três partes: uma parcela associada à taxa garantida, outra associada à participação nos resultados e uma terceira, referente à opção de resgate. As três parcelas são avaliadas de forma separada recorrendo-se a métodos numéricos para aferir os respectivos valores.

Em Jorgensen (2001), recorre-se à simulação de Monte Carlo para estimar o valor de mercado de um conjunto de contratos de seguro e fundos de pensões com opção de resgate e garantias de rendibilidade mínima e de participação nos resultados. Assume-se

que a evolução do valor dos activos segue um processo de Vasicek com reversão para a média.

É igualmente importante referir o trabalho de Jensen, Jorgensen e Grosen (2001), em que se procura avaliar um contrato temporário com participação nos resultados com base em métodos numéricos, partindo do modelo de Black-Scholes. Analisa-se o caso em que a opção de resgate é integrada, bem como o caso de um contrato mais simples.

Outro trabalho, de certa forma pioneiro, encontra-se em Milterssen e Persen (2001), onde se estuda um produto que inclui dois tipos de garantias de rendibilidade do investimento: uma taxa garantida afecta ao investimento inicial, e outra taxa garantida, incidente sobre o excedente de rendibilidade obtido em relação à primeira taxa, ao longo do prazo do contrato.

Também Consiglio, Cocco e Zenios (2001) procedem à avaliação de um contrato misto com garantia de participação nos resultados, empregando um modelo de gestão de activos e passivos integrado numa análise por cenários. A projecção dos preços dos activos é realizada com recurso a técnicas de *bootstrap*, relativamente aos valores observados de alguns índices escolhidos como referência.

Em Bacinello (2003), é estudada a avaliação de um contrato do tipo misto com prémios periódicos com as mesmas opções referidas nos trabalhos acima indicados. Assume-se que o prémio é sujeito a ajustamentos em função da participação nos resultados atribuída e que a taxa de juro sem risco é constante. A avaliação do contrato é efectuada com recurso ao modelo Cox, Ross and Rubinstein (CRR) (1979). Szu-Lang, Chi-Kai e Shih-Kuei (2006) retomam o problema, aplicando o modelo CRR bidimensional, com tratamento estocástico da taxa de juro.

Importa ainda mencionar o trabalho de Ballota (2004), dedicado à avaliação de contratos ligados a fundos de investimento com taxas garantidas, em que se assume que o valor do portfólio segue um processo de difusão com saltos.

Em Tanskanen e Lukkarinen (2004) é desenvolvido um modelo de avaliação que permite obter soluções numa forma fechada para a avaliação do valor de mercado da componente de garantia de rendibilidade do contrato, assim como da componente de participação nos resultados sob diferentes mecanismos, à luz da hipótese de ausência de arbitragem e de que os mercados têm suficiente liquidez.

Bernard, Courtois e Quittard-Pinon (2005) tratam a avaliação de contratos com cláusulas de participação nos resultados, integrando a probabilidade de liquidação da empresa de seguros. A taxa de juro é tratada de forma estocástica e o modelo geral de avaliação baseia-se na equação de Fortet's (1943), sendo posteriormente comparado com os resultados gerados através de simulação de Monte Carlo. Estes três autores realizaram em 2006 um estudo relativo ao desenho de um novo contrato, em que a taxa garantida se encontra alocada à *yield* das obrigações do Estado, sendo a sua avaliação efectuada com base numa fórmula fechada, admitindo as mesmas hipóteses do estudo de 2005.

Em Kiesel, Liebmann e Kassberger (2005), estima-se o valor de mercado de contratos com garantias embebidas de rendibilidade e participação nos resultados. A estimação é efectuada à luz de diferentes processos de Lévy para explicar o comportamento do valor dos activos.

Refira-se ainda a comparação entre diversos esquemas de atribuição de participação nos resultados associada a diferentes tipos de contratos que é analisada em Torres (2005) e seus impactos na solvência da empresa.

Em Kling, Richter e Russ (2006), é estudado o caso em que o esquema de atribuição dos benefícios de participação nos resultados se efectua a uma taxa aproximadamente constante, acima da taxa garantida, sendo para isso necessária a constituição de reservas nos anos de maior rendibilidade, como forma de compensar os anos em que os resultados são menos favoráveis. Neste trabalho, expõe-se um modelo geral de avaliação, que procura reflectir o impacto sobre a solvência da empresa das interligações existentes entre o comportamento dos mercados, a situação financeira da própria empresa e o sistema de regulação e decisões de gestão.

Gatzert, N. e King, A. (2006) procedem a uma avaliação de contratos do ramo Vida com participação nos resultados, atendendo a que as empresas de seguros, na prática, poderão não assumir estratégias de investimento que lhes permitam cobrir os riscos dos contratos de forma perfeita. Como tal, é explorada uma possível extensão da avaliação neutra ao risco, com o objectivo de incorporar estratégias de investimento mais realistas.

Castellani, De Felici, Moriconi e Pacati (2007) desenvolvem um estudo com o objectivo de avaliar algumas opções e garantias embutidas em contratos de seguro de Vida, utilizando uma extensão do modelo Black-Scholes.

Existem ainda outros trabalhos de algum modo relacionados com o tema, alguns até mais recentes, mas os contributos referidos foram, de uma forma geral, os que se revelaram mais úteis para o desenvolvimento deste projecto, quer porque têm uma proximidade maior com as características do contrato escolhido, quer pelas abordagens e metodologias neles adoptadas.

## Capítulo 3

### Estrutura do Contrato e Formalização do Problema

#### 3.1. Introdução

As empresas de seguros que operam no ramo Vida concentram um grande leque de responsabilidades, de muitas naturezas e proveniências. No âmbito do Projecto “Solvência II”, a avaliação das responsabilidades com a participação nos resultados prevista em alguns dos respectivos contratos comercializados, trata-se de uma matéria especialmente relevante.

De acordo com as especificações técnicas do *QIS4 (Quantitative Impact Study 4)*, as empresas de seguros têm de reflectir, no cálculo das provisões técnicas, todo o tipo de pagamentos aos tomadores de seguro e beneficiários, incluindo a concessão de benefícios de natureza discricionária, desde que expectável.

Deste modo, os benefícios concedidos pela via da participação nos resultados têm de ser avaliados, sendo parte integrante da *best estimate* do ramo Vida, tal como definida no art.º 76, n.º 2 da ‘Directiva do Parlamento Europeu e do Conselho relativa ao acesso e prática da actividade de seguro e resseguro, Solvência II’.

Para além disto, será exigido o reporte da *best estimate* de acordo com a seguinte desagregação:

- Benefícios garantidos, com inclusão do valor da participação nos resultados efectivamente atribuída à data da avaliação;
- Benefícios futuros decorrentes de obrigações legais/contratuais, o que se refere, designadamente, aos benefícios de participação nos resultados futuramente atribuída, decorrente da realização dos resultados futuros de exploração da carteira de contratos;
- Benefícios discricionários futuros não incluídos nos itens anteriores, correspondentes ao excedente de benefícios que poderão ser futuramente atribuídos, via participação nos resultados, em relação ao mínimo contratualmente previsto.

Ainda de acordo com as imposições da União, cada uma destas classes de benefícios deve ser avaliada respeitando os princípios gerais de cálculo da *best estimate*, ou seja, deverá corresponder à média ponderada dos *cash-flows* futuros, descontados à taxa de juro sem risco. O seu cálculo tem de ser efectuado com recurso à fixação de pressupostos que permitam reflectir a realidade da melhor forma possível, de acordo com uma vertente prospectiva e consistente com a informação de mercado.

Em particular, devem ter-se em consideração as práticas de gestão normalmente seguidas pela empresa de seguros, as quais têm impacto especialmente sobre a última parcela da *best estimate*, podendo reflectir-se em estratégias com o objectivo, por exemplo, de reforçar a posição concorrencial no mercado, de promover determinados produtos, ou, por outro lado, de reduzir as responsabilidades futuras efectivas.

O impacto da participação nos resultados poderá variar de acordo com as especificidades do produto a que se encontra associada, pelo que é necessário ter em

consideração as características de cada produto, em relação ao qual este tipo de responsabilidade se encontra embebida.

Como resultado, tem-se que a avaliação deverá ser feita de forma separada por tipo de produto, embora haja alguns casos em que a separação pode não ser necessária, como sucede por exemplo quando o impacto da responsabilidade em estudo se considera imaterial (à luz do Princípio da Proporcionalidade estabelecido no Artigo n.º 85, (h) da Proposta da Directiva do Parlamento Europeu e do Conselho em matéria de “Solvência II”). Também quando o esquema de atribuição da participação é relativamente simples, e não depende substancialmente das características que diferenciam os produtos, a separação pode dispensar-se.

No caso em estudo, o esquema de atribuição da participação nos resultados apresenta uma forte dependência em relação às características dos produtos sobre os quais assenta, tal como se irá explicar em 3.3. Em consequência, o trabalho é conduzido tomando como base um produto determinado, tornando-se no entanto evidente que a metodologia poderá ser adaptada a outro tipo de contratos que partilhem um plano semelhante de atribuição da participação nos resultados. A estrutura do contrato é apresentada no ponto seguinte.

### **3.2. Estrutura do Contrato**

O tipo de contrato escolhido para o desenvolvimento do trabalho é um contrato de seguro individual de capital diferido, com contrasseguro dos prémios, ou seja:

- o segurado terá direito a receber, no fim do prazo do contrato, o capital seguro;
- em caso de morte durante este prazo, o beneficiário do contrato receberá o valor dos prémios pagos até à data;

- o contrato é igualmente caracterizado pela inclusão das opções de resgate e de redução durante o respectivo prazo;
- está ainda prevista a distribuição dos benefícios concedidos pela via de participação nos resultados.

Trata-se de um seguro não ligado a fundos de investimento, ou seja, o capital a receber no fim do prazo não depende da evolução do valor das unidades de participação do fundo subjacente, situação em que o risco se encontra do lado do tomador do seguro.

A análise que aqui se propõe incide sobre uma carteira fechada e homogénea (constituída apenas por contratos do tipo referido). De acordo com os princípios gerais subjacentes ao cálculo da *best estimate* do ramo Vida, é necessário assumir a primeira hipótese enunciada, já que a avaliação da *best estimate* se restringe às responsabilidades decorrentes de contratos em vigor à data da avaliação, as quais têm de ser avaliadas até ao respectivo *run-off*.

Prestados os primeiros esclarecimentos no que toca às características do contrato, vão expor-se de forma detalhada as garantias que lhe estão subjacentes. Assim, no início do prazo do contrato, acorda-se o pagamento de um determinado capital  $C_1$  no final da maturidade, em caso de vida do segurado, com garantia de rendibilidade dada por uma taxa fixa  $k$ .

O valor do capital poderá aumentar, ao longo do prazo do contrato, através do mecanismo de participação nos resultados. Com efeito, no que se refere à forma de distribuição dos benefícios concedidos via participação nos resultados, assume-se que é realizada através do aumento das importâncias seguras, ou seja, o valor da participação é utilizado como prémio único na aquisição de um capital adicional a acrescer ao capital

seguro. Esta forma de distribuição é bastante usual tendo sido abordada em diversos trabalhos, designadamente em Jensen, B. *et al.* (2001) e em Bacinello, A. R. (2003).

Como se irá explicar no ponto seguinte, aquele mecanismo é desenvolvido ao nível da carteira, pois os resultados são apurados para o universo dos contratos que a compõem, efectuando-se *a posteriori* a sua repartição pelos vários contratos.

Esta repartição deve ser efectuada de modo a reflectir, o melhor possível, o contributo de cada contrato na realização dos resultados a distribuir. O valor da participação nos resultados atribuída no ano  $t$  será designado por  $PRD'_{t-1}$ , uma vez que depende dos resultados obtidos no ano anterior, e dá origem à aquisição de um capital seguro adicional.

Pode assumir-se uma correspondência directa entre o acréscimo de capital aqui subjacente e a própria participação atribuída, já que o risco de mortalidade é cancelado pela presença da garantia de contrasseguro dos prémios.

Note-se que a repartição da participação nos resultados pelos contratos não é relevante no âmbito deste trabalho, pretendendo-se apenas a avaliação das responsabilidades ao nível da carteira; contudo, é importante tê-la em consideração para um melhor entendimento da estrutura em causa.

Tendo isto presente, considere-se um contrato representativo da carteira em análise, que entrou em vigor no início de um determinado ano 0, tendo como maturidade  $T$  anos.

Das hipóteses estabelecidas resulta que:

$$C_t = C_{t-1}(1+k) + PRD'_{t-1} = C_1(1+k)^t + \sum_{i=1}^{t-1} (PRD'_i(1+k)^{t-i-1}), \quad t = 2, 3, \dots, T. \quad (3.2.1)$$

Relativamente à garantia de contrasseguro dos prémios pagos,  $C_t^m$ , é importante notar que, de igual modo, o montante a pagar é incrementado pela taxa técnica garantida e pela participação nos resultados atribuída. Deste modo, o beneficiário do contrato tem direito a receber o valor dos prémios líquidos de encargos pagos até à data, capitalizados à taxa  $k$ , e adicionados do valor da participação atribuída até ao ano da morte do segurado, também capitalizada à mesma taxa, ou seja,

$$C_t^m = \sum_{i=1}^t (P'_i (1+k)^{t-i}) + \sum_{i=1}^{t-1} (PRD'_i (1+k)^{t-i-1}), \quad (3.2.2)$$

onde  $P'_i$  traduz o montante do prémio pago no ano  $i$ , depois de deduzidos os custos de aquisição e gestão do contrato imputáveis ao ano. Não se estabelece um esquema de pagamentos específico dos prémios, isto é, estes poderão revestir a forma de prémio único, ser nivelados ou variáveis, ou apresentar ainda uma estrutura flexível em termos de montante e ocorrência do(s) pagamento(s). Contudo, é importante realçar a crescente importância da comercialização deste produto a prémio único.

Seguidamente, apresenta-se o plano de atribuição de participação nos resultados, que constitui o aspecto mais saliente do estudo.

### 3.3. Descrição do Plano de Participação nos Resultados

Existem, em Portugal, vários esquemas de participação nos resultados, utilizados no âmbito de diversos produtos comercializados pelas companhias que operam no ramo Vida.

A participação nos resultados poderá provir do nível de resultados técnicos e/ou financeiros decorrentes da exploração das carteiras de contratos. A título de exemplo, na grande maioria dos produtos financeiros ligados a fundos de investimento o risco financeiro encontra-se exclusivamente no lado do tomador de seguro, pois a

participação nos resultados depende apenas da performance do fundo de investimento subjacente, não existindo qualquer garantia de rendibilidade. Nalguns produtos, no entanto, garante-se o reembolso do valor investido, situação em que o risco é assim também assumido pela empresa de seguros.

Para além disto, em cada uma das modalidades consideradas, é possível encontrar regras distintas de atribuição dos resultados, designadamente ao nível dos fluxos de entrada e de saída que são considerados para efeitos de apuramento dos resultados, da inclusão do efeito de *smoothing* (como forma de nivelar os resultados atribuídos) e do estabelecimento de diferentes percentagens mínimas de atribuição e distribuição dos resultados apurados.

No estudo realizado, optou-se por assumir que o esquema de participação nos resultados se baseia apenas nos resultados financeiros originados pelo investimento dos activos representativos da parcela da *best estimate* da provisão matemática afecta à carteira escolhida. A razão para isso prende-se com o baixo peso dos resultados técnicos neste tipo de contrato, aspecto que se justifica pela existência da garantia de contrasseguro.

Antes de se proceder à exposição mais detalhada do plano, é conveniente começar por explicar o papel da provisão para participação nos resultados *a atribuir* e o da provisão para participação nos resultados *atribuída*, instituídas pela Norma Regulamentar N.º 20/2007-R, de 31 De Dezembro e a Circular N.º 03/2008, de 15 de Maio.

Sinteticamente, a provisão para participação nos resultados *a atribuir* “corresponde ao valor líquido dos ajustamentos de justo valor relativos aos investimentos afectos a seguros de vida com participação nos resultados...”, ao passo que a provisão para participação nos resultados *atribuída* “inclui os montantes destinados aos tomadores de seguro ou aos beneficiários dos contratos, sob a forma de participação nos resultados, que não tenham ainda sido distribuídos mas que já lhes foram atribuídos”. Daqui resulta

que somente os resultados que se encontram efectivamente integrados nesta última provisão constituem inequivocamente um direito reconhecido dos tomadores de seguro.

O valor constante da provisão para participação nos resultados *a atribuir* pode ser utilizado na absorção, até à respectiva concorrência, dos ajustamentos de justo valor negativos, se anualmente resultar deste saldo um valor positivo, havendo lugar à transferência de uma percentagem mínima do valor desta provisão para a provisão para participação nos resultados *atribuída*.

Para além deste contributo para a formação do valor daquela última provisão, uma parte do valor dos resultados financeiros realizados através da exploração da carteira de contratos em causa é directamente afecta à mesma, desde que o respectivo saldo ultrapasse um limite previamente estabelecido. Este limite mínimo encontra-se associado a uma taxa técnica fixa, tal como se irá explicar no ponto seguinte.

Contudo, não é suficiente avaliar a provisão para participação nos resultados atribuída para se obter o valor da participação nos resultados, uma vez que existe um desfasamento temporal entre a atribuição da mesma e a respectiva distribuição, derivado do facto de, em cada ano, se retirar uma percentagem do valor desta provisão para efeitos de distribuição. A parcela que se mantém na provisão em causa estará sujeita ao efeito da capitalização verificada ao nível dos seus activos representativos, sendo canalizada para distribuição de participação nos resultados futura.

Para uma assimilação mais fácil dos principais aspectos referidos, considere-se o seguinte esquema:

**Figura 1:** Esquema descritivo de transferência dos valores destinados a participação nos resultados.



Note-se que o valor da provisão para participação nos resultados a atribuir terá de ser nulo no *run-off*, ou seja, esta provisão tem de ser integralmente utilizada através das duas vias indicadas, a cobertura das menos valias dos investimentos afectos à *best estimate* e a atribuição de participação nos resultados.

É importante referir ainda que os resultados financeiros realizados, em princípio, não se destinam na sua totalidade a ser incorporados na provisão para participação nos resultados atribuída, pois existe uma parcela que é integrada nos fundos próprios da empresa de seguros.

Em síntese, as receitas e despesas de índole financeira consideradas no presente plano (excluindo os referidos ajustamentos de justo valor directamente transferidos para a provisão para participação nos resultados a atribuir) são as seguintes:

1. Proveitos realizados de investimentos afectos à *best estimate* relativa à carteira de base.
2. Custos realizados de investimentos representativos da *best estimate* relativa à carteira de base.
3. Eventual saldo devedor da presente conta de resultados financeiros do ano anterior.

Como é evidente, 2. e 3. representam custos financeiros, que terão de ser subtraídos a 1.

Os resultados realizados de investimentos são originados pelas efectivas trocas de fluxos financeiros associadas às operações efectuadas ao nível da carteira de activos subjacente, de que são exemplos os resultados da alienação de activos, o recebimento de juros, o recebimento de dividendos, etc., devendo ainda salientar-se os custos de gestão da carteira.

Refira-se que a inclusão da terceira parcela decorre de uma prática usual efectuada pelas empresas de seguros, e tem como objectivo obter um maior alisamento dos resultados atribuídos, traduzindo-se ainda numa forma de compensação de possíveis resultados negativos, em anos sucessivos.

### 3.4. Formalização do Problema

Após a descrição do esquema de participação nos resultados em estudo, procurará construir-se uma apresentação formal do problema.

Seja  $PR_t$  a parcela dos resultados financeiros realizados dos investimentos afectos à *best estimate*,  $BE_t$ , no ano  $t$ , que são transferidos para a provisão para participação nos resultados atribuída.

Como agora se sabe, só há lugar à afectação dos resultados financeiros aos contratos em carteira, sob este mecanismo, se o respectivo saldo ultrapassar a taxa técnica previamente definida,  $k$ , que incide sobre o valor de  $BE_t$ . Seja  $a_t$  a proporção deste excedente que é integrada naquela provisão; pode então escrever-se:

$$PR_t = a_t \text{Max}\{RF_t - kBE_t, 0\},$$

$RF_t$  o saldo de proveitos e custos financeiros realizados.

Para além desta fonte de resultados, há ainda o resultado das mais e menos valias não realizadas de investimentos, que poderá ser transferido a partir da provisão para participação nos resultados a atribuir,  $PPR_{a\_atrib,t}$  (no ano  $t$ ).

Designa-se o saldo dos ajustamentos de justo valor relativos ao ano  $t$  por  $MMV_t$ , a proporção do saldo desta última provisão, que é inserido no valor da provisão para participação nos resultados atribuída, por  $b_t$  e, finalmente, a taxa de retorno dos activos representativos de  $PPR_{a\_atrib,t}$  por  $i_t$ .

Então, tendo em conta a explicação dada no ponto anterior sobre a natureza de  $PPR_{a\_atrib,t}$ , vem

$$PPR_{a\_atrib,t} = \text{Max} \left\{ \left( (1 - b_{t-1}) PPR_{a\_atrib,t-1} (1 + i_t) + MMV_t \right), 0 \right\}.$$

A empresa de seguros poderá definir um valor mínimo positivo para o valor de  $PPR_{a\_atrib,t}$ , com o propósito de manter ou reforçar a respectiva posição competitiva no mercado, mas a Norma Regulamentar N.º 20/2007-R e a Circular N.º 03/2008 não definem qualquer limiar mínimo.

É agora possível apresentar a fórmula de cálculo do valor da provisão para participação nos resultados atribuída,  $PPR_{atrib,t}$ , avaliada após a entrada dos resultados referentes ao ano de avaliação  $t$ . Vem

$$PPR_{atrib,t} = (1 - d_{t-1}) PPR_{atrib,t-1} (1 + i'_t) + b_t PPR_{a\_atrib,t} + PR_t,$$

onde  $d_t$  representa a percentagem de  $PPR_{atrib,t}$  que é distribuída ao nível dos contratos em carteira. A taxa de retorno dos fundos afectos a esta provisão é  $i'_t$ , para não se confundir com a taxa de retorno de  $PPR_{a\_atrib,t}$ , que é representada por  $i_t$ .

Assim, o valor efectivamente distribuído sob a forma de participação nos resultados,  $PRD_t$ , num determinado ano  $t$ , é

$$PRD_t = d_t PPR_{atrib,t}.$$

Por último, o valor actual da responsabilidade com a participação nos resultados relativa aos contratos em vigor à data de avaliação é

$$PRD_{Total} = \sum_{t=1}^T (P(0, t) PRD_t), \quad (3.4.1)$$

onde  $P(t, t + s)$  corresponde ao valor de uma obrigação de cupão zero, emitida em  $t$  e de maturidade  $t + s$ . O cálculo destes factores de desconto será objecto de estudo no âmbito de cada uma das metodologias propostas.

### 3.5. Modelação da *Best Estimate*

A *best estimate* ( $BE_t$ ) da provisão matemática da carteira em análise corresponde à soma algébrica de quatro parcelas:

- valor actuarial dos montantes pagos em caso de sobrevivência das pessoas seguras;
- valor actuarial dos montantes pagos em caso de morte das pessoas seguras;
- valor dos resgates, das despesas futuras a incorrer com a gestão dos contratos, investimentos, etc.;
- valor estimado dos prémios futuros (a deduzir), devidamente actualizados à data da avaliação.

Então,

$$BE_t = \sum_{j=t}^T \left[ \left( 1 + f \left( 0, t, j + \frac{1}{2} \right) \right)^{-(j-t+\frac{1}{2})} (CS_j + R_j + E_j - P_j) \right], \quad (3.5.1)$$

onde  $CS_j$ ,  $R_j$  e  $E_j$  correspondem, respectivamente, ao custo com sinistros, às entregas de valores de resgate e aos custos de exploração, pagos no ano  $j$ . Em termos genéricos,

define-se  $f(0, t, t + s)$  como a taxa *forward* entre  $t$  e  $t + s$ , estimada no momento 0.  $P_j$  é o valor dos prémios recebidos no âmbito da carteira, para o ano em questão. Como se pode observar, assume-se que os montantes são pagos a meio do ano o que, numa óptica de avaliação da carteira, é uma hipótese recorrente. A estimação dos valores é tratada posteriormente.

Salienta-se o facto de a *best estimate* apresentada ser líquida do valor da participação nos resultados futura. O resultado da avaliação desta responsabilidade terá de ser adicionado à estimativa, em ordem a obter a *best estimate* total. Contudo, os valores já atribuídos da participação têm de ser considerados, pois foram incorporados nos capitais seguros.

Nos parágrafos que se seguem explica-se a forma como se podem estimar as diferentes parcelas da *best estimate*, começando-se por analisar a projecção dos prémios futuros.

### 3.5.1. Prémios futuros

A estimação dos prémios futuros deverá reflectir os seguintes cenários possíveis, devidamente ponderados pelas respectivas probabilidades de ocorrência: pagamento do prémio de acordo com o previsto no contrato; pagamento de um prémio de valor inferior, decorrente da redução do contrato; não pagamento do prémio, devido a ocorrência de sinistro (morte do segurado); não pagamento do prémio, decorrente do exercício da opção de resgate; e não pagamento do prémio, decorrente de quaisquer outras vias – por exemplo, anulações. Daqui resulta que a estimação em causa requer a modelação das taxas de mortalidade, resgate, redução e anulação do contrato em estudo.

Mais ainda, é necessário conhecer a distribuição das idades das pessoas seguras e a distribuição das maturidades dos contratos.

O facto de não se assumir um esquema de pagamentos rígido dos prémios deve-se, por um lado, à tentativa de se conseguir obter uma modelação que se possa aplicar a uma

carteira mais heterogénea e, por outro, às dificuldades em obter informação mais detalhada. Aliás, mesmo que fosse possível dispor de tal informação, isso traria pouco valor acrescentado, tendo em conta o baixo peso dos prémios no universo de uma carteira fechada, para um produto que, na sua maioria, é comercializado a prémio único (cerca de 93% da carteira de mercado no final de 2007).

Quanto às taxas de resgate, redução e anulação, serão estimadas com referência ao capital seguro, pelo que a projecção dos prémios se fará em função da evolução daquele, ao longo do horizonte de projecção. Para isso, é necessário conhecer a relação entre os prémios e o capital seguro, questão a abordar no Capítulo 6.

Avançando na formalização, sejam  $s_j$ ,  $\pi_j$  e  $\alpha_j$  as taxas de resgate, redução e anulação relativas ao ano  $t$ , e seja  $\rho_t$  o peso dos prémios em relação ao capital seguro, no mesmo ano.

Conhecendo ainda as taxas de mortalidade à idade  $x_i$ , decorridos  $j$  anos,  ${}_{j-1|}q_{x_i}$ , e o peso de cada idade na carteira,  $w_i$ , e assumindo que a carteira é constituída por  $n$  contratos, tem-se que o valor dos prémios da carteira recebidos em  $t$  é

$$P_t = \rho_t C_1 (1 - G_t) \left( 1 - \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^t (w_i {}_{j-1|}q_{x_i}) - \sum_{j=1}^t (s_j + \pi_j + \alpha_j) \right), \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (3.5.1.1)$$

onde  $G_t$  traduz a proporção de contratos cujo vencimento ocorre entre os anos 1 e  $t - 1$  e  $C_1$  conserva o significado anterior – capital seguro no início do período de avaliação.

Quando não se dispõe de informação acerca da duração das responsabilidades para os diferentes contratos que compõem a carteira, uma opção possível será estimar a idade dos segurados e a duração média das responsabilidades (devidamente ponderada pelos capitais seguros), tornando a fórmula (3.5.1.1) ligeiramente mais simples.

### 3.5.2. Custos com sinistros

No que se refere aos custos com sinistros  $CS_t$ , traduzem-se na soma dos capitais pagos em caso de vida,  $CSvida_t$ , e em caso de morte,  $CSmorte_t$ , para um dado ano  $t$ .

$CSvida_t$  pode ser dado por:

$$CSvida_t = \left( 1 - \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^{t-1} j_{-1} |q_{x_i} - \sum_{j=1}^t (s_j + \pi_j + \alpha_j) \right) \left( g_t C_t \sum_{i=0}^n (w_i p_{x_i+t-1}) \right) (1 - G_t) \quad (3.5.2.1)$$

Tendo em conta que  $C_t$  corresponde ao capital seguro da carteira no ano  $t$ , vem

$$C_t = C_{t-1}(1 + k) + PRD_{t-1} = C_1(1 + k)^t + \sum_{j=1}^{t-1} (PRD_j(1 + k)^{t-j-1}), \quad t = 2, 3, \dots, T.$$

Note-se que  $g_t$  traduz a proporção de contratos que se vencem no ano  $t$  e  $p_{x_i+t-1}$  é a probabilidade de uma pessoa de idade  $x_i + t - 1$  atingir a idade  $x_i + t$ .

Deve ter-se em atenção que, na prática, o valor da participação nos resultados atribuída poderá não estar directamente incluído no capital seguro; nesse caso talvez seja necessário calcular a participação nos resultados histórica, isto é, atribuída até ao momento da avaliação, a qual, conjuntamente com o valor da participação nos resultados estimada entre 0 e  $t - 1$ , será adicionada ao capital seguro para efeitos de apuramento do benefício total.

Nestas condições, se representarmos o valor da participação nos resultados distribuída relativa à carteira, para um dado ano histórico  $j$ , por  $PRD_j^{hist}$ , fica

$$C_t = C_1(1 + k)^t + \sum_{j=1}^{t_{hist}} (PRD_j^{hist}(1 + k)^{t+t_{hist}-j-1}) + \sum_{j=1}^{t-1} (PRD_j(1 + k)^{t-j-1}).$$

Para o efeito assumiu-se que a carteira foi constituída há  $t_{hist}$  anos atrás, pelo que o ano de avaliação corresponde, à luz desta notação, a  $(t_{hist} + 1)$ .

Relativamente ao custo com sinistros por morte dos segurados, a sua estimação torna-se mais complicada, pois o capital a pagar é igual à soma dos prémios recebidos até à data, capitalizados à taxa  $k$ , com a participação nos resultados atribuída. Uma vez que acima se apresentou uma fórmula de estimação dos prémios válida para o horizonte temporal futuro (3.5.1.1), esta pode ser usada na estimação dos prémios futuros que afectarão o valor dos benefícios devidos por morte.

Se notarmos, no entanto, que o valor total dos prémios históricos relativos à carteira de contratos, assim como a participação nos resultados atribuída no passado, têm igualmente impacto nos benefícios em causa, é necessário, por conseguinte, estimar tais prémios, para além da participação nos resultados distribuída neste horizonte temporal, caso, mais uma vez, não exista informação histórica que permita ultrapassar o problema.

Para efeitos de exposição, designe-se o valor dos prémios líquidos de encargos, pagos num dado ano histórico  $j$ , por  $P_j^{hist}$ . Deste modo, tem-se:

$$\begin{aligned}
 CSmorte_t = & \left[ \sum_{j=1}^t (P_j - E_j)(1+k)^{t-j} \left( 1 - \sum_{i=0}^n \sum_{k=j+1}^{t-1} {}_{k-1}q_{x_i} - \sum_{k=j+1}^t (s_k + \pi_k + \alpha_k) \right) (G_t - G_j) \right. \\
 & + \sum_{j=1}^{t-1} PRD_j (1+k)^{t-j-1} \left( 1 - \sum_{i=0}^n \sum_{k=j+1}^{t-1} {}_{k-1}q_{x_i} - \sum_{k=j+1}^t (s_k + \pi_k + \alpha_k) \right) (G_t - G_j) \\
 & + \left( \sum_{j=1}^{t_{hist}} P_j^{hist} (1+k)^{t+t_{hist}-j} + PRD_j^{hist} (1+k)^{t+t_{hist}-j-1} \right) \times \\
 & \left. \times \left( 1 - \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^{t-1} {}_{j-1}q_{x_i} - \sum_{j=1}^t (s_j + \pi_j + \alpha_j) \right) \times (1 - G_t) \right] \sum_{i=0}^n w_i {}_{t-1}q_{x_i} \quad (3.5.2.2)
 \end{aligned}$$

Atendendo a que  $P_j^{hist}$  pode ser obtido como uma proporção do capital seguro,  $C_j^{hist}$ , tal como já se tinha assumido no âmbito da estimação dos prémios futuros, ou seja,

$$P^{hist}(j) = \rho_j C_j^{hist}, \quad j = 1, 2, \dots, t_{hist},$$

bastará conhecer o valor dos capitais seguros associados à carteira, em cada ano histórico, para se poder estimar o valor dos prémios históricos.

Supondo que apenas se dispõe de informação relativa à carteira aberta, terá de se estimar o valor dos capitais seguros da carteira fechada com base nas taxas históricas de saída, como função dos capitais seguros da carteira aberta, assumindo-se como válidas para a outra carteira. Deste modo, pode partir-se do valor do capital seguro do ano da avaliação e calcular-se recursiva e regressivamente o seu valor nos anos anteriores, com base nas taxas de saída observadas:  $m_j^{hist}$  referente às saídas por morte,  $g_j^{hist}$  ao termo dos contratos,  $s_j^{hist}$  aos resgates,  $\pi_j^{hist}$  às reduções,  $\alpha_j^{hist}$  às anulações e  $o_j^{hist}$  a outras causas, como transferências ou transformações. Formalmente, tem-se:

$$C_j^{hist} = C_{j+1}^{hist} (1 - m_j^{hist} - g_j^{hist} - s_j^{hist} - \pi_j^{hist} - \alpha_j^{hist} - o_j^{hist}).$$

### 3.5.3. Valores de resgate

Em caso de exercício da opção de resgate pelo tomador de seguro, num dado ano  $t$ , a empresa de seguros terá de devolver o valor dos prémios encaixados até à data, incidindo normalmente uma penalização sobre este valor, a qual se pode designar por  $r$ . Deste modo,  $R_t$  pode obter-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned} R_t = (1 - r) & \left[ \sum_{j=1}^t (P_j - E_j)(1 + k)^{t-j} \left( 1 - \sum_{i=0}^n \sum_{k=j+1}^t ({}_{k-1|}q_{x_i} + \pi_k + \alpha_k) - \sum_{k=j+1}^{t-1} s_k \right) (G_t - G_j) \right. \\ & + \sum_{j=1}^{t-1} PRD_j (1 + k)^{t-j-1} \left( 1 - \sum_{i=0}^n \sum_{k=j+1}^t ({}_{k-1|}q_{x_i} + \pi_k + \alpha_k) - \sum_{k=j+1}^{t-1} s_k \right) (G_t - G_j) \\ & + \left( \sum_{j=1}^{t_{hist}} P_j^{hist} (1 + k)^{t+t_{hist}-j} + PRD_j^{hist} (1 + k)^{t+t_{hist}-j-1} \right) \times \\ & \left. \times \left( 1 - \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^t ({}_{j-1|}q_{x_i} + \pi_j + \alpha_j) - \sum_{j=1}^{t-1} s_j \right) \times (1 - G_t) \right] s_t \end{aligned} \quad (3.5.3.1)$$

#### **3.5.4. Custos de exploração**

Por último, é necessário estimar os custos de exploração futuros, que englobam apenas os custos de gestão dos contratos. A exposição do método de cálculo desta componente é remetida para o Capítulo 6.

Para efeitos de avaliação da participação nos resultados futura, recorreu-se a duas metodologias alternativas, começando por se apresentar a primeira metodologia no capítulo seguinte. Na exposição de ambas as metodologias, apresenta-se em primeiro lugar o modelo geral de avaliação que lhes está subjacente, seguido de aspectos mais específicos de cada uma em particular.

## **Capítulo 4**

### **Metodologia 1 – Avaliação da Participação nos Resultados Futura com Enquadramento no Modelo de Wilkie**

#### **4.1. Introdução**

Este quarto capítulo é dedicado à introdução da primeira metodologia que se achou conveniente usar no trabalho, devendo desde já advertir-se que a respectiva aplicação prática se remete só para o Capítulo 6 - no Capítulo 5, faz-se uma análise genérica do seguro em estudo ao longo do tempo. Trata-se, por isso (e porventura) de um capítulo um tanto ‘árido’, no sentido em que se limita a apresentar os procedimentos adoptados, os quais se revestem de alguma complexidade, sem que se sigam imediatamente os resultados que com eles foi possível obter.

A primeira metodologia assenta em ferramentas de simulação estocástica e consiste basicamente numa adaptação do modelo de inflação de Wilkie (MW), que desde a sua criação se tem mostrado adequado para explicar o comportamento de outras variáveis, para além da inflação (sempre que necessário, com as devidas adaptações), como por exemplo, o retorno dos investimentos e a taxa de juro de longo prazo (Wilkie (1984)), a taxa de juro de curto prazo (Wilkie (1992)) e o produto interno bruto (Rodrigues (2003)).

No caso vertente, tem-se por primeiro objectivo adaptar o MW para explicar o comportamento do PIB. Uma vez este objectivo alcançado, os resultados obtidos serão por sua vez *input* de modelos que visam explicar o comportamento de outras variáveis. Tal opção não deve causar estranheza, pois é bem sabido que o PIB apresenta um elevado poder explicativo do comportamento das principais variáveis que também reflectem o cenário macroeconómico. Procurará assim fazer-se a projecção das variáveis relevantes neste estudo, para o horizonte temporal relativamente ao qual se pretende avaliar as responsabilidades em causa.

O facto de a participação nos resultados futura depender fortemente do enquadramento macroeconómico em que as companhias se inserem conduz a que o primeiro aspecto que se tem de considerar para efectuar a referida avaliação corresponda exactamente à reprodução dos possíveis cenários económicos futuros.

Para se compreender melhor este aspecto, é importante referir que tal relação se verifica essencialmente através de duas vias; é fácil concluir que os resultados financeiros são fortemente influenciados pelo ambiente económico mas, para além destes, os próprios custos com sinistros e ocorrência de resgates, reduções e anulações, assim como a entrada de prémios relativos aos contratos em vigor, dependem também das condições económicas envolventes.

Tendo igualmente em consideração que a *best estimate* terá de reflectir as expectativas em relação a estas variáveis e o facto de o seu comportamento ser determinante no valor da participação nos resultados futura, é necessário que a avaliação seja efectuada de forma consistente, no que se refere às relações entre os activos e passivos envolvidos. A criação dos cenários económicos resulta desta problemática.

Posto isto, refira-se que, na maioria dos trabalhos desenvolvidos sobre estas matérias, a avaliação da participação nos resultados se foca num contrato particular e determina-se

directamente a partir da performance do fundo de investimento subjacente. Neste caso, o problema reside essencialmente na projecção do valor do fundo (ver, por exemplo, Tanskanen e Lukkarinen (2004) e Ballota (2004)).

Em diversos trabalhos, apenas o risco financeiro é modelado, assumindo-se que não ocorrem mortes ou resgates durante o prazo do contrato (Gatzert, N., King, A. (2006) e Grosen e Jorgensen (2000)). No presente trabalho esta hipótese não foi estabelecida. De facto, a participação nos resultados, no caso do contrato analisado, não se pode dissociar destas variáveis, o que obrigou a tentar explicar cada um dos referidos comportamentos, de modo individualizado, para além dos de outras variáveis relevantes para o problema.

Convém ressaltar o facto de este tipo de abordagem ter a vantagem de garantir uma avaliação do contrato de forma consistente com a avaliação de mercado, o que em termos teóricos é desejável. Contudo, isto acarreta a fixação de hipóteses que não se verificam na realidade para o contrato em causa, já que não existe nenhum activo financeiro no mercado que permita replicar exactamente a responsabilidade que se pretende avaliar; a validação dos resultados que tal abordagem geraria seria assim pouco praticável.

Por outro lado, a carteira de activos representativa das responsabilidades da empresa irá certamente variar ao longo do horizonte previsional, e uma avaliação *market-consistent* tem de ter directamente em conta a evolução da respectiva composição. A elevada incerteza que qualquer previsão neste sentido acarreta pode comprometer a fiabilidade e estabilidade dos resultados.

As razões anteriores justificam que se tenha optado por desenvolver, em primeiro lugar, uma metodologia que permita traçar o comportamento expectável da participação nos resultados futura e, como tal, gerar uma aproximação ao valor de mercado desta responsabilidade.

Noutros trabalhos ainda, tal como em Bacinello (2003) e Szu-Lang *et al.* (2006), procura-se avaliar os contratos de seguros, separando o valor da opção de resgate do valor da participação nos resultados, ou seja, calculando o valor desta última componente como a diferença entre o valor do contrato com e sem participação nos resultados, excluindo, em cada caso, a opção de resgate. O facto de a participação nos resultados se encontrar dependente do comportamento das taxas de resgate fez com que não se tivesse seguido abordagem semelhante neste trabalho.

Apesar disso, no trabalho de Szu-Lang *et al.* (2006), para além de se proceder à modelação estocástica do preço dos activos representativos, também se dá um tratamento semelhante à mortalidade e aos resgates, decompondo-se assim o problema da avaliação do contrato em várias partes, à semelhança do processo adoptado no seio da metodologia que se irá expor neste ponto. Mesmo assim, diversos factores obrigaram a escolher caminhos distintos, em alguns aspectos, dos percorridos em grande parte dos trabalhos referenciados. Alguns exemplos:

- A natureza do contrato e o esquema de atribuição da participação nos resultados apresentam certas especificidades. O facto de se tratar de um produto não ligado a fundos de investimento impossibilita a aplicação de métodos idênticos aos aplicáveis nos outros casos, já que a variável em estudo não depende exclusivamente do comportamento do fundo subjacente, não existindo, como já se referiu, nenhum activo financeiro no mercado que permita replicar a responsabilidade. Paralelamente a isto, a reprodução do esquema de participação nos resultados requer a separação da modelação dos resultados financeiros realizados e não realizados.

- O objectivo de se reconhecer, na modelação, o comportamento estocástico das principais variáveis que influenciam o valor da participação nos resultados, quer afectando os passivos, quer os activos representativos das responsabilidades.
- O facto de a variável analisada depender do valor da *best estimate* em cada ano e de esta, por sua vez, depender da participação nos resultados atribuída até à data, gerando uma estrutura temporal de dependências entre os valores atribuídos sob este mecanismo.
- O objectivo de estimar especificamente o valor desta componente do contrato, e não o contrato na sua forma global, com separação *a posteriori* da parcela indicada.

Em suma, nesta primeira abordagem ao problema faz-se a reprodução de cada cenário económico (por outras palavras, de cada réplica do processo de simulação estocástica), partindo do comportamento do PIB português. Como já se referiu, os resultados obtidos são apresentados no Capítulo 6.

Partindo então para a modelação do comportamento do PIB português, segue-se uma exposição teórica que inclui os aspectos fundamentais do modelo utilizado para o efeito (MW).

## 4.2. Adaptação do Modelo de Wilkie à Modelação do PIB

Considere-se  $I_t$  a taxa de crescimento do PIB no período compreendido entre  $t - 1$  e  $t$ , dada por:

$$I_t = e^{\delta_t} - 1, \quad (4.2.1)$$

sendo  $\delta_t$  a força de crescimento do PIB, entre  $t - 1$  e  $t$ ; admite-se que  $\delta_t$  obedece a um processo  $AR(1)$  da seguinte forma:

$$\delta_t = \mu + a(\delta_{t-1} - \mu) + \sigma Z_t, \quad Z_t \sim N(0,1) \quad (4.2.2)$$

onde:

$\mu$  = Valor médio de  $\delta_t$ ;

$a$  = Peso do desvio periódico entre  $\delta_t$  e  $\mu$ ;

$\sigma$  = Desvio padrão de uma série de ruídos brancos com distribuição Normal.

Defina-se ainda a taxa de crescimento acumulada até  $t$  como  $r_t$ , seja

$$r_t = 1 + I_t = e^{\delta t}.$$

A força de crescimento nos primeiros  $t$  períodos é

$$\Delta_{t_i} = \Delta(i, t) = \sum_{i=1}^{t+i-1} \delta_i, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad \Delta(0, t) = 0,$$

pelo que o vector  $[\Delta_{t_1}, \Delta_{t_2}, \dots, \Delta_{t_n}]$  apresenta uma distribuição Normal Multivariada, ou seja,

$$\Delta_{t_i} \sim N(\mu t, \sigma \sqrt{t}).$$

Perante isto, é possível determinar a média e o desvio-padrão de cada componente do vector, bem como a covariância entre cada par de elementos, os quais se podem designar, respectivamente, por  $\mu(t)$ ,  $\sigma^2(t)$  e  $Cov(t, s)$ .

Por sua vez, considere-se o valor acumulado resultante das forças de crescimento nos primeiros  $t$  períodos:

$$R(1, t) = \exp(\Delta(1, t)) = \exp\left(\sum_{i=1}^t \delta_i\right),$$

v. a. cuja distribuição pode ser directamente identificada: é uma distribuição Lognormal.

Seguidamente apresenta-se o método de avaliação numérica de Werner Hürlimann (1991), que tem como objectivo a dedução de fórmulas analíticas no âmbito do modelo de Wilkie.

Em primeiro lugar, considere-se as fórmulas recursivas obtidas por Dhaene (1989, Teorema 2) para o cálculo de  $\mu(t)$ ,  $\sigma^2(t)$  e  $Cov(s, t)$ . Relativamente ao primeiro momento, considere-se:

$$\mu(t) = (1 - a)\mu + (1 + a)\mu(t - 1) - a\mu(t - 2),$$

onde  $\mu(0) = 0$  e  $\mu(-1) = -\delta_0$ .

Resolvendo esta fórmula recursiva, é possível obter:

$$\mu(t) = \mu t + (\delta_0 - \mu)a \frac{1 - a^t}{1 - a}. \quad (4.2.3)$$

No que se refere a  $\sigma^2(t)$ , é calculada de acordo com a seguinte fórmula:

$$\sigma^2(t) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{t-1} \alpha_i^2, \quad (4.2.4)$$

sendo que  $\sigma^2(0) = 0$  e  $\alpha_i$  é o resultado da aplicação da seguinte forma recursiva:

$$\alpha_i = (1 + a)\alpha_{i-1} - a\alpha_{i-2} \quad i \geq 2, \quad (4.2.5)$$

$\alpha_0 = 1$  e  $\alpha_1 = 1 + a$ .

Finalmente,  $Cov(t, s)$  é dada por:

$$Cov(t, s) = \sigma^2 \sum_{i=1}^s \alpha_{t-i} \alpha_{s-i}, \quad 1 \leq s < t.$$

Resolvendo a fórmula recursiva (4.2.5) obtém-se, para  $i = 1, 2, \dots$ ,

$$\alpha_i = \frac{1 - a^{i+1}}{1 - a},$$

o que nos permite escrever  $Cov(t, s)$  da seguinte forma:

$$Cov(t, s) = \left(\frac{\sigma}{1-a}\right)^2 \left[ s - (1 + a^{t-s})a \frac{1-a^s}{1-a} + a^{t-s}a^2 \frac{1-a^{2s}}{1-a^2} \right].$$

Donde resulta imediatamente:

$$\sigma^2(t) = \left(\frac{\sigma}{1-a}\right)^2 \left[ t - 2a \frac{1-a^t}{1-a} + a^2 \frac{1-a^{2t}}{1-a^2} \right]. \quad (4.2.6)$$

Posto isto, considere-se o caso genérico da taxa de crescimento acumulada entre  $d$  e  $d + t$ , seja  $R_{t,d}$ :

$$R_{t,d} = \prod_{k=d}^{d+t-1} (1 + I_k).$$

Designando a taxa média de crescimento do PIB entre  $d$  e  $d + t$  por  $I_{t,d}$ , obtém-se:

$$R_{t,d} = (1 + I_{t,d})^t,$$

donde resulta,

$$I_{t,d} = (R_{t,d})^{\frac{1}{t}} - 1.$$

Como por definição  $\Delta_{t,d} = \ln(R_{t,d})$  e designando o valor médio de  $I_t$  por  $\bar{I}_t$ , obtém-se

$$\ln(1 + \bar{I}_t) = \frac{\Delta_{t,d}}{t}.$$

Deste modo,  $\ln(1 + \bar{I}_t)$  também segue uma distribuição Normal de parâmetros  $\frac{\mu(t)}{t}$  e  $\sigma^2(t)$ , o que implica que  $(1 + \bar{I}_t)$  segue uma distribuição Lognormal; logo,

$$E[\bar{I}_t] = \exp\left(\frac{\mu(t)}{t} + \frac{\sigma^2(t)}{2t}\right) - 1$$

$$Var[\bar{I}_t] = \exp\left(\frac{2\mu(t)}{t} + \frac{\sigma^2(t)}{t^2}\right) \left\{ \exp\left(\frac{\sigma^2(t)}{t^2}\right) - 1 \right\}.$$

Alternativamente, pode recorrer-se à simulação de Monte Carlo a fim de se obterem estimativas para  $E[\bar{I}_t]$  e  $Var[\bar{I}_t]$ , em vez da abordagem analítica descrita.

Para tal, em primeiro lugar geram-se números pseudo-aleatórios independentes de distribuição Normal padrão, aplicando o método de Box e Muller (1958) [ver Bratley e al. (1983)].

Partindo do número de anos de informação disponível,  $T$ , geram-se  $N$  réplicas para cada  $\delta_t$ , ou seja, constrói-se a matriz dos resultados com elemento genérico  $\delta_{t,i}$ , aplicando a fórmula (4.2.2). Por conseguinte,  $\bar{I}_t$  é o resultado de:

$$\bar{I}_t = \exp\left(\frac{\Delta_{t,i}}{t}\right) - 1, \quad t = 1, 2, \dots, T \text{ e } i = 1, 2, \dots, N$$

Os estimadores de  $E[\bar{I}_t]$  e  $Var[\bar{I}_t]$  pelo método dos momentos são

$$E[\bar{I}_t] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{I}_{t,i}$$

$$Var[\bar{I}_t] = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\bar{I}_{t,i} - E[\bar{I}_t])^2.$$

### 4.3. Modelação das Variáveis Associadas ao Contrato

Para além da modelação estocástica do PIB, é necessário explicar o comportamento de outras variáveis macroeconómicas, por sua vez determinantes para a explicação do comportamento das variáveis associadas ao contrato:

- Resgates, reduções e anulações;
- Prémios futuros;
- Resultados financeiros realizados;
- Saldo de mais e menos valias não realizadas.

Para tal, testou-se a existência de relações entre um amplo conjunto de variáveis macroeconómicas (Formação Bruta de Capital Fixo, Consumo Privado, Taxa de Desemprego, Consumo Público, um Índice de Cotação de Acções, Emprego Total, PIB Real Mundial, Procura Interna, Índice de Obrigações do Tesouro (3 meses)) e cada uma das variáveis acima, o que se fez com recurso ao método dos mínimos quadrados e com base nos dados históricos disponíveis. Foi possível obter ajustamentos aceitáveis em todos os casos.

Com base nos resultados, fez-se então a identificação do conjunto de variáveis explicativas, cujo comportamento futuro terá também de ser modelado, de forma a permitir a projecção dos comportamentos das variáveis associadas à carteira, essenciais em todo este procedimento.

Mais uma vez, recorreu-se ao MW para explicar estes comportamentos, no entanto, não se reproduziu exactamente o mesmo processo de modelação utilizado para a taxa de crescimento do PIB, mas, consoante a relação detectada entre esta última e a taxa de crescimento de cada destas variáveis, seguiram-se caminhos diferentes. Assim, para os casos em que se obtiveram valores positivos e suficientemente elevados para os coeficientes de correlação empíricos respeitantes às taxas de crescimento da variável em análise e do PIB, optou-se por tentar modelar a série das diferenças entre estas taxas de crescimento seguindo o mesmo processo de simulação desenvolvido para o PIB já que a evolução do próprio PIB permite, neste cenário, explicar uma parte significativa da taxa de crescimento da variável a modelar.

Nos casos em que os coeficientes de correlação evidenciaram resultados mais baixos, inclusivamente valores negativos bastante mais próximos de 0 do que de -1, efectuou-se um processo semelhante ao que se aplica às variáveis associadas ao contrato, ou seja, obtiveram-se ajustamentos estatísticos para as variáveis a modelar, utilizando-se como

regressores alguma(s) das variáveis macroeconómicas cujo(s) comportamento(s) foram susceptíveis de ser explicados pelo processo alternativo, isto é, com base no comportamento do PIB (casos em que se observou uma correlação positiva elevada com as taxas de crescimento do PIB). Para além disto, por imposição do método, há ainda que considerar – nestes casos em que se tem de recorrer a ajustamentos estatísticos – a natureza estocástica das diferenças entre os valores observados e os valores estimados das variáveis estudadas a partir dos ajustamentos referidos, sendo estas mesmas diferenças modeladas exactamente da mesma forma que as diferenças referidas no parágrafo anterior, sendo que no outro caso as diferenças a explicar advinham das taxas de crescimento da variável explicada e do PIB.

Uma vez ultrapassado o problema da projecção das variáveis económicas, é possível efectuar a previsão do comportamento das variáveis associadas ao contrato a partir dos ajustamentos estatísticas que apresentam as primeiras variáveis como explicativas, os quais são expostos no Capítulo 6. A estes resultados adiciona-se a série modelada das diferenças entre os valores observados das variáveis explicadas e as regras estimadas, mais uma vez, com base no MW.

Após esta exposição, é possível descrever o processo de simulação a desenvolver, para cada ano do horizonte temporal considerado. Este processo é explicado num conjunto de passos que deverão ser cuidadosamente seguidos, como forma de se reconhecer a estrutura de dependências entre as variáveis ao longo do tempo.

#### **4.4. Algoritmo de Simulação Estocástica**

O algoritmo de simulação estocástica proposto é o seguinte:

1. Simulação de  $N$  réplicas para a taxa de crescimento do PIB.

2. Com base nos resultados obtidos em **1**, para cada réplica  $i$ , simular as taxas de crescimento das restantes variáveis macroeconómicas.
3. Estimar as forças associadas às seguintes variáveis: taxas de resgate; soma das taxas de resgate, redução e anulação; peso dos prémios em relação ao capital seguro; peso dos resultados financeiros realizados e do saldo de mais e menos valias em relação à *best estimate*. Utilizar, para o efeito, as regras práticas estimadas, dando como *input* os resultados obtidos em **2**.
4. Adicionar as diferenças modeladas entre os valores observados e os valores estimados, aos resultados obtidos em **3**.
5. Calcular os valores simulados das variáveis referidas em **3**, efectuando a transformação (4.2.1).

Chegados a este ponto, e para além das variáveis referidas, há igualmente que considerar a natureza estocástica das taxas de mortalidade, cujo processo de simulação é independente dos processos anteriores e se apresenta no ponto seguinte. Como é evidente, tem que se simular  $N$  réplicas das taxas de mortalidade nas várias idades consideradas, em cada ano integrante do horizonte de projecção.

O facto de a participação nos resultados distribuída em cada ano afectar o valor da *best estimate* a ser constituída nos anos futuros (pois influencia directamente os valores dos custos com sinistros em caso de vida, em caso de morte e dos resgates) faz com que os referidos montantes tenham de ser determinados *após* a estimação da participação nos resultados distribuída no ano anterior, no âmbito de cada réplica.

Seguidamente apresenta-se este processo de forma detalhada, partindo dos resultados da primeira réplica,  $i = 1$ .

6. Para o primeiro ano de projecção,  $t = 1$ , calcular  $CS_1, R_1, E_1$  e  $P_1$ .

7. Para os restantes anos do horizonte de projecção, começando em  $t = 2$ , estimar  $C_t$ ,  $C_t^m$ ,  $CS_t$ ,  $R_t$ ,  $E_t$  e  $P_t$  com base nos valores médios das taxas de mortalidade e dos valores obtidos em **5** respeitantes a cada  $t$ .
8. Calcular  $BE_1$ , tendo como *input* os resultados obtidos em **6** e **7**.
9. Calcular  $PR_1$ ,  $PPR_{a\_atrib,1}$ ,  $PPR_{atrib,1}$  e  $PRD_1$ , utilizando directamente os resultados gerados em **5** e **8**.
10. Somar à participação nos resultados atribuída passada, o valor de  $PRD_1$ .

Posto isto, passa-se para o ano de projecção seguinte,  $t = 2$  e assim sucessivamente. Em termos genéricos:

11. Para o ano de projecção  $t$ , calcular  $CS_t$ ,  $R_t$ ,  $E_t$  e  $P_t$ , tendo em conta a participação nos resultados acumulada no ano anterior e os valores simulados das diferentes variáveis na presente réplica, para o ano  $t$ .
12. Para os restantes anos do horizonte de projecção, começando em  $t + 1$  estimar  $C_t$ ,  $C_t^m$ ,  $CS_t$ ,  $R_t$  e  $P_t$  com base nos valores médios de cada uma das variáveis modeladas.
13. Calcular  $BE_t$ .
14. Calcular  $PR_t$ ,  $PPR_{a\_atrib,t}$ ,  $PPR_{atrib,t}$  e  $PRD_t$ .
15. Somar o valor de  $PRD_t$  à participação nos resultados acumulada.

Quando  $t = T$ , calcula-se  $PRD_{Total}$  associada à primeira réplica do processo de simulação.

Em seguida é possível passar para a réplica seguinte, e obter outro valor simulado para  $PRD_{Total}$ . Com base nos resultados deste processo, consegue-se estimar parâmetros como a média, desvio-padrão e mediana de  $PRD_{Total}$ , assim como os diferentes quantis. Para além disto, dependendo dos resultados obtidos, pode ainda tentar ajustar-se uma

distribuição teórica para a variável em causa, partindo da distribuição empírica obtida pelo processo de simulação.

Fica assim definido o modelo geral de avaliação da participação nos resultados futura.

Nos próximos pontos são tratados aspectos mais particulares deste modelo.

#### **4.5. Modelação Estocástica das Taxas de Mortalidade**

A estimação das taxas de mortalidade da população segura é realizada com suporte na informação relativa ao número de mortes da população segura do ramo Vida em termos globais.

A grande dimensão da amostra foi conveniente para se assumir a hipótese que está na base do processo de estimação proposto: aplicação do Teorema de De Moivre-Laplace para ajustar a distribuição do número de mortes no seio da população segura. Considere-se:

$$\frac{\sum_{k=1}^N M_k - N_{x_i} q_{x_i}}{\sqrt{N_{x_i} q_{x_i} (1 - q_{x_i})}} \sim N(0,1),$$

$M_k$  uma variável aleatória de Bernoulli que assume o valor 1 em caso de morte da  $k$ -ésima pessoa segura,  $N_{x_i}$  o número de pessoas seguras de idade  $x_i$ .

A partir disto, pode-se estimar os diferentes quantis para as taxas de mortalidade. Seguidamente, apresenta-se o estimador do quantil da taxa de mortalidade de pessoas de idade  $x_i$ , para o nível de confiança  $1 - \alpha$ :

$$\hat{q}_{x_i}^{(1-\alpha)} = q_{x_i} - z_{\alpha} \frac{\sqrt{N_{x_i} q_{x_i} (1 - q_{x_i})}}{N_{x_i}}.$$

De acordo com o exposto no capítulo anterior, não é suficiente estimar estas taxas de mortalidade mas é igualmente necessário modelar as taxas  ${}_t|q_{x_i}$ , ou seja, a

probabilidade de morte de uma pessoa de idade  $x_i$ , exactamente no ano compreendido entre a idade  $x_i + t$  e  $x_i + t + 1$ .

Perante isto, recorreu-se à informação dada por uma tábua de mortalidade por gerações com referência ao ano de avaliação considerado neste estudo, tendo-se estimado os quantis associados a cada uma das taxas referentes a cada par  $(x_i, t)$ , de acordo com a seguinte fórmula:

$${}_t q_{x_i} = {}_t q_{x_i+t} \prod_{k=1}^{t-1} (1 - {}_k q_{x_i+k}).$$

Convencionou-se que  ${}_0 q_{x_i} = q_{x_i}$ .

Por último, foi possível simular as probabilidades de sobrevivência,  ${}_t p_{x_i}$ , para cada um destes pares, assumindo-se que existe independência entre as taxas de mortalidade no decorrer dos anos:

$${}_t p_{x_i} = \prod_{k=1}^{t-1} (1 - {}_k q_{x_i}).$$

#### **4.6. Modelação das Despesas**

Relativamente à estimação das despesas futuras, considerou-se que podem ser expressas como uma proporção do capital seguro, tendo-se procurado ajustar um modelo do tipo  $AR(2)$ , a fim de explicar a evolução do seu peso em relação a esta variável. Trata-se de uma hipótese que produziu um ajustamento bastante positivo, face à informação disponível.

Designando esta proporção por  $e_t$ , o seu valor esperado pode ser estimado de acordo com a seguinte fórmula:

$$\hat{e}_t = e_{t-1} + a_1(e_{t-1} - \mu_e) + a_2(e_{t-1} - e_{t-2}), \quad (4.6.1)$$

onde  $a_1$  e  $a_2$  são os parâmetros do modelo e  $\mu_e$  corresponde ao valor esperado de  $e_t$ . Para efeitos de simplificação, assumiu-se que o peso destas despesas em relação ao capital seguro trata-se de uma variável determinística, considerando-se o resultado de (4.6.1) em cada réplica do algoritmo de simulação. Por conseguinte, a sua única fonte de incerteza reside no comportamento dos capitais seguros futuros.

Deste modo  $\hat{E}_t$  é estimado de acordo com a seguinte fórmula:

$$\hat{E}_t = \hat{e}_t \hat{C}_t.$$

#### **4.7. Taxa de Desconto**

Todos os *cash-flows* relevantes para o cálculo da *best estimate* têm de ser descontados à taxa de juro sem risco. A estrutura temporal considerada para o efeito corresponde à estrutura temporal das *yields* das obrigações dos Estados Europeus com *rating* AAA, publicada pelo BCE.

No entanto, a utilização directa desta estrutura temporal, à luz dos pressupostos efectuados nos termos da metodologia, particularmente o facto de a projecção dos retornos financeiros se ter realizado com base em medidas de risco real, gera uma limitação que se prende com o facto de se obter apenas uma avaliação *market-consistent* aproximada (ver ponto 4.1).

#### **4.8. Taxa de Retorno das Provisões para Participação nos Resultados**

No ponto 3.3, referiu-se a existência de um desfasamento temporal entre o momento da formação dos resultados e o momento da sua afectação à  $PPR_{atrib,t}$  sob a forma de transferência a partir da  $PPR_{a\_atrib,t}$ . Para além disto, existe novo desfasamento temporal entre a alocação à primeira e a sua efectiva distribuição. Perante este cenário, há lugar a possíveis valorizações dos activos representativos de ambas as provisões, incrementando os benefícios a distribuir, os quais devem ser em teoria reconhecidos no

modelo de avaliação, tal como se apresentou no capítulo anterior. No entanto, a falta de informação referente à natureza destes activos obrigam a que se considerasse simplesmente a taxa de juro sem risco para efeitos de reconhecimento das referidas valorizações.

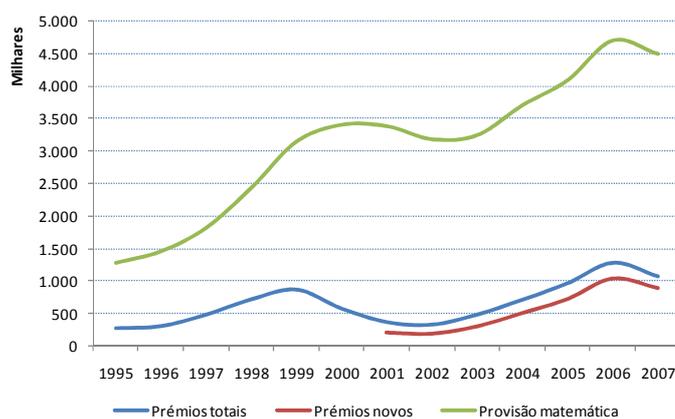
# Capítulo 5

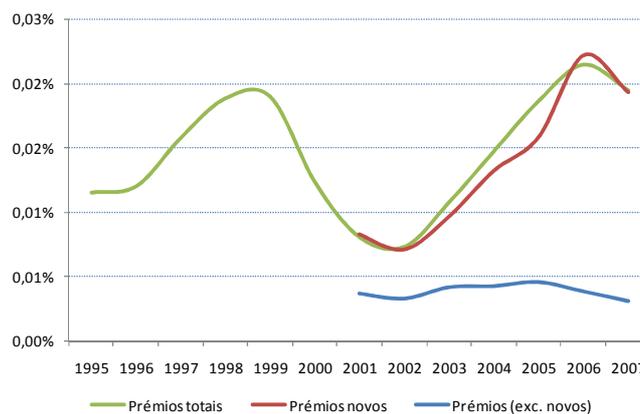
## Análise dos Dados

Antes de se proceder à aplicação prática da metodologia exposta no capítulo anterior, importa efectuar uma breve análise dos dados que servirão de base à respectiva aplicação. A informação foi disponibilizada pelo Instituto de Seguros de Portugal (ISP).

Em primeiro lugar, importa apresentar a evolução dos prémios e da provisão matemática do mercado relativamente ao produto em análise, cf. Gráficos 1 e 2.

**Gráfico 1:** Evolução dos prémios e da provisão matemática entre 1995 e 2007.



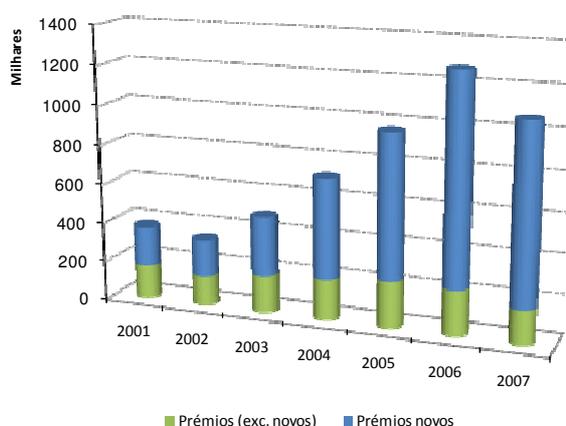
**Gráfico 2:** Prémios em percentagem do capital seguro entre 1995 e 2007.

É possível detectar uma tendência crescente a nível da provisão matemática, embora com uma queda visível em 2002 e no último ano analisado. Tal como esperado, estas descidas são acompanhadas por evolução semelhante no que se refere aos prémios. O abrandamento do crescimento económico em Portugal e na União Europeia ocorrido neste ano, motivado pelo fraco crescimento da procura externa, contracção do investimento ao nível da formação bruta de capital fixo e forte moderação do consumo privado, associada a medidas de política interna implementadas com vista à progressiva correcção de alguns desequilíbrios gerados no final da década de 90, estão associados a esta evolução negativa (ver *Relatório do Sector Segurador e Fundos de Pensões* (2002) do ISP). Mais recentemente, a iminência da crise mundial emergida em 2008 no seio dos mercados financeiros encontra-se já reflectida na redução que se começou a detectar em 2007.

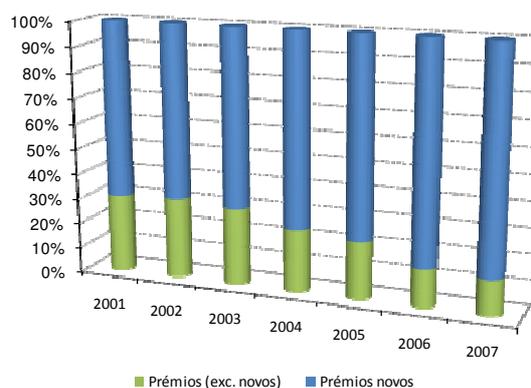
Analisando a tendência de evolução dos prémios novos entre 2001 e 2007, conclui-se que estes são os responsáveis pelo crescimento verificado a nível dos prémios totais, que verificaram uma contracção no último ano. Isto acontece porque a produção nova tem vindo a assumir um peso crescente na produção total (representando cerca de 84% em 2007), não porque o número de apólices tenha aumentado (o que se pode comprovar pela observação dos gráficos 3 e 4 representados abaixo) mas porque o valor destes, em

relação ao capital seguro total, cresceu nitidamente. Uma possível explicação para este facto assenta na prevalência de uma política comercial caracterizada pela venda de contratos a prémio único, permitindo melhorar o *matching* entre as maturidades dos activos e as das responsabilidades, perante o contínuo decréscimo, entre 1999 e 2005, das taxas de juro anuais das emissões obrigacionistas (ver *Relatório do Sector Segurador e Fundos de Pensões* (2006) do ISP e Gráficos 3 e 4).

**Gráfico 3:** Evolução dos prémios, desagregando os prémios novos entre 2001 e 2007.



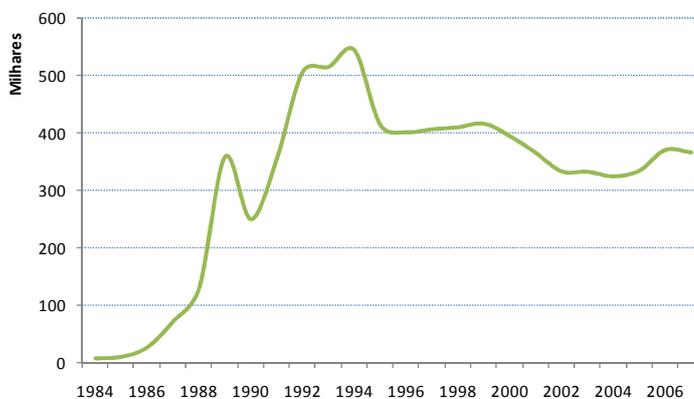
**Gráfico 4:** Prémios em percentagem do capital seguro com desagregação dos prémios novos entre 2001 e 2007.



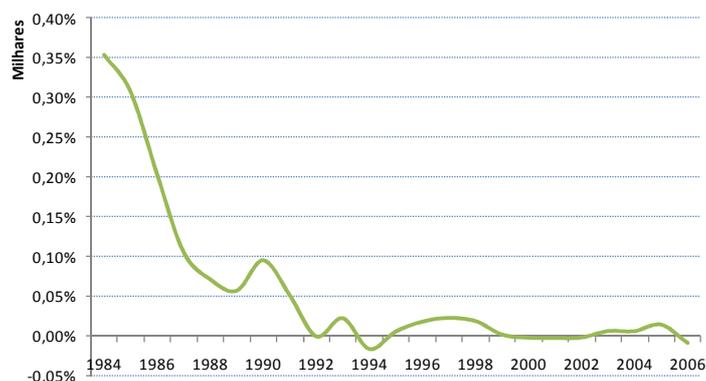
Nos Gráficos 5 e 6 que se seguem, encontram-se representadas as evoluções do número de apólices e do capital seguro, ao longo do período estabelecido entre 1984 e 2007. A redução do número de apólices observada a partir de 2000 poderá estar associada a uma tendência de substituição deste produto por produtos de maior componente financeira,

salientando-se os PPR/E, para além das causas de ordem macroeconómica que terão certamente prevalecido nos anos imediatamente a seguir.

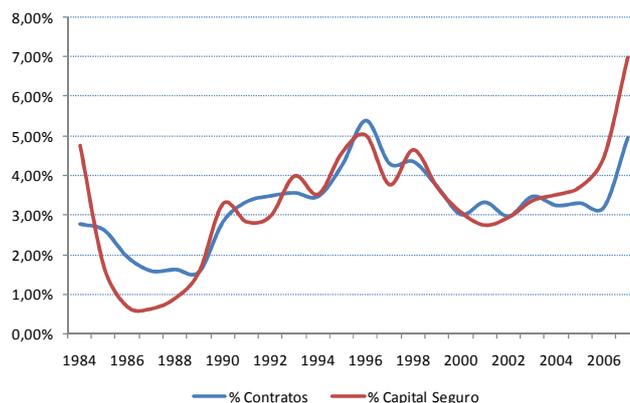
**Gráfico 5:** Evolução do número de apólices entre 1984 e 2007.



**Gráfico 6:** Evolução das taxas de crescimento do capital seguro entre 1984 e 2007.



Seguidamente, apresenta-se o gráfico com a evolução das taxas de resgate em função do número de contratos e do valor do capital seguro. Tal como se pode ver, a evolução das taxas não foi regular ao longo dos anos representados, tendo atingido os valores mais elevados em 1996 e em 2007. De facto, se a análise se basear exclusivamente na proporção do capital seguro resgatado, conclui-se que este último ano foi marcado pelo valor mais elevado do período analisado.

**Gráfico 7:** Evolução das taxas de resgate em função do capital seguro e do número de contratos, entre 1984 e 2007.

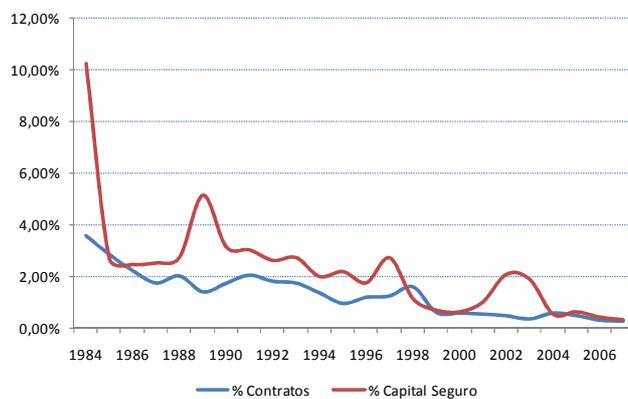
Relativamente às taxas de redução dos capitais seguros (Gráfico 8), verificou-se uma tendência mais ou menos crescente entre 1984 e 2001. Em 2002, por sua vez, denotou-se uma redução expressiva nas referidas taxas, tendo-se mantido em valores reduzidos em 2003, o que em princípio poderá dever-se às próprias variações registadas a nível do emprego total. Esta tendência foi contrariada nos dois anos seguintes, tendo atingido o valor mais elevado do período em 2004, 3,2%; voltando a descer em 2006 para apenas 0,7% e, finalmente, fixou-se em 1,8% no último ano.

**Gráfico 8:** Evolução das taxas de redução em função do capital seguro, entre 1984 e 2007.

Por sua vez, a percentagem de contratos anulados tem vindo a decrescer ao longo dos anos, registando uma taxa de apenas 0,3% em 2007. No entanto, o valor dos capitais seguros anulados tem verificado uma evolução mais volátil, observando-se um valor bastante elevado em 1989, em que ultrapassou 5% das importâncias seguras totais e um

novo pico nos anos de 2002 e 2003 (excedendo 2%). Em 2007 o valor relativo do capital anulado é quase coincidente com a taxa de contratos anulados. Esta informação está no Gráfico 9.

**Gráfico 9:** Evolução das taxas de anulação em função do capital seguro e do número de contratos, entre 1984 e 2007.



Note-se que as anulações normalmente estão associadas a erros de emissão de apólices, à falta de pagamento do prémio, ou à desistência do contrato por parte do tomador de seguros dentro de um curto período de tempo.

## **Capítulo 6**

### **Aplicação Prática da Metodologia 1**

Como anunciado, procede-se neste capítulo à implementação prática da primeira metodologia proposta para a resolução do problema em estudo, começando-se por efectuar os ajustamentos estatísticos necessários. O primeiro aspecto a ser analisado prende-se com a modelação estocástica das taxas de resgate, redução e anulação dos contratos.

#### **6.1. Modelação dos Resgates, Reduções e Anulações**

Para a estimação dos resgates, reduções e anulações, considerou-se parte da informação apresentada no capítulo anterior, isto é, as séries das taxas de severidade anuais dos resgates, reduções e anulações, entre 1989 e 2007.

Para aplicar o processo de modelação descrito no Capítulo 4 para as variáveis em análise, averiguou-se, em primeiro lugar, o nível de correlação que existe entre o conjunto de variáveis macroeconómicas indicadas nesse capítulo e a taxa de crescimento do PIB, tendo-se explicado que a referida modelação assenta nesta relação. Como tal, calcularam-se os coeficientes de correlação empíricos entre cada uma das variáveis deste conjunto e as taxas de crescimento do PIB, para diferentes

desfasamentos. Os resultados aparecem na Tabela 1, encontrando-se destacadas os coeficientes de correlação com valores mais elevados.

**Tabela 1:** Correlações empíricas entre o PIB as outras variáveis macroeconómicas.

<i>PIB</i>	<i>lag(-2)</i>	<i>lag(-1)</i>	<i>lag(0)</i>	<i>lag(1)</i>	<i>lag(2)</i>
Formação bruta Cap fixo	0,10	0,31	0,79	0,47	0,59
Consumo privado	0,28	0,46	0,73	0,14	0,41
Taxa de desemprego	-0,73	-0,60	-0,26	0,43	0,21
Consumo público	-0,02	0,24	0,70	0,17	0,51
Índice de cotações de acções	-0,38	-0,23	-0,10	0,53	0,35
Emprego total	0,62	0,60	0,77	-0,12	0,40
Pib Real Mundial	-0,59	-0,45	0,05	0,23	0,27
Procura interna	0,33	0,57	0,83	0,33	0,14
Índice de obrigações do Tesouro (3 m)	0,52	0,73	0,54	0,63	0,43

Fonte: Banco de Portugal.

Seguidamente, procedeu-se à formalização de um conjunto de possíveis modelos lineares, numa tentativa de explicar a evolução das variáveis em estudo. Os modelos foram então estimados com o método dos mínimos quadrados e realizaram-se os testes estatísticos habituais para aferir das respectivas validades.

De todos estes procedimentos chegou-se à conclusão de que apenas a taxa de severidade dos resgates pode ser bem modelada a partir das variáveis macroeconómicas apresentadas, não tendo sido possível encontrar nenhum modelo que produzisse um ajustamento satisfatório para as duas restantes variáveis.

Na verdade, estas apresentam no período analisado comportamentos caracterizados por uma maior volatilidade, em relação à taxa de resgate, tal como apresentado no Capítulo 5.

Perante este cenário, e dada a natural agregação das três variáveis, procurou construir-se um modelo de ajustamento que permitisse explicar a evolução das três taxas em termos agregados, o que se conseguiu. Esta é uma solução razoável dado que, (ver Capítulo 2)

apenas é necessário conhecer o resultado da soma das três taxas. A exceção existe precisamente no que se refere às taxas de resgate, que têm de ser modeladas isoladamente para efeitos do cálculo dos valores de resgate, o que não representa qualquer obstáculo uma vez que, tal como se referiu, foi possível obter um modelo de ajustamento economicamente razoável e estatisticamente válido para estas.

Os modelos referidos e os resultados dos testes estatísticos apresentam-se de seguida.

### 6.1.1. Taxa de severidade dos resgates

$$\ln(\widehat{1 + s_t}) = \{18,363 + 10,711\ln(1 + desemp_{t-1}) - 0,168\ln(1 + cpub_t) + 11,365\ln(1 + cpriv_{t-1}) - 0,226\ln(1 + desemp_{t-1}) \times \ln(1 + cpriv_{t-1})\}/100$$

$desemp_t$  traduz a taxa de desemprego,  $cpub_t$ , a taxa de crescimento do consumo público e  $cpriv_t$ , a taxa de crescimento do consumo privado, referentes ao ano  $t$ .

**Tabela 2:** Sumário das estatísticas relativas à qualidade de ajustamento de  $\ln(\widehat{1 + s_t})$ .

Coeficientes	P-value (T)
<i>Intercept</i>	34,9%
<i>Desemp(1)</i>	0,5%
<i>Cpriv(1)</i>	7,7%
<i>Cpub</i>	13,9%
<i>Desemp(1) x Cpriv(1)</i>	6,7%
<b>P-value (F)</b>	0,2%
$R^2$	67,5%

### 6.1.2. Taxa de severidade dos resgates, reduções e anulações

$$\ln(1 + \widehat{s_t + r_t + \alpha_t}) = \{3,167 + 0,410\ln(1 + desemp_t) - 0,701\ln(1 + proc_t) + 0,488\ln(1 + cpriv_{t-1}) - 0,183\ln(1 + proc_t) \times \ln(1 + cpriv_{t-1})\}/100,$$

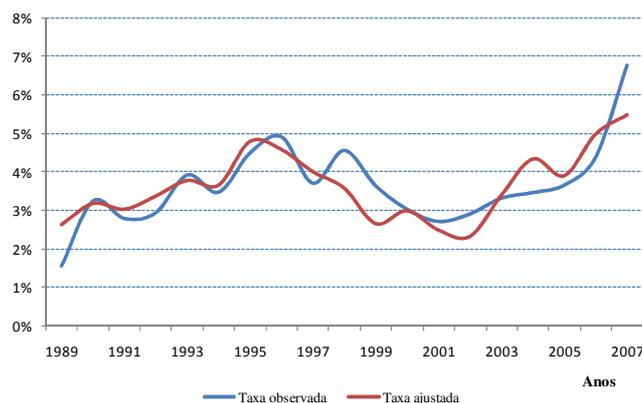
Onde  $proc_t$  corresponde à taxa de crescimento da procura interna, para o ano  $t$ .

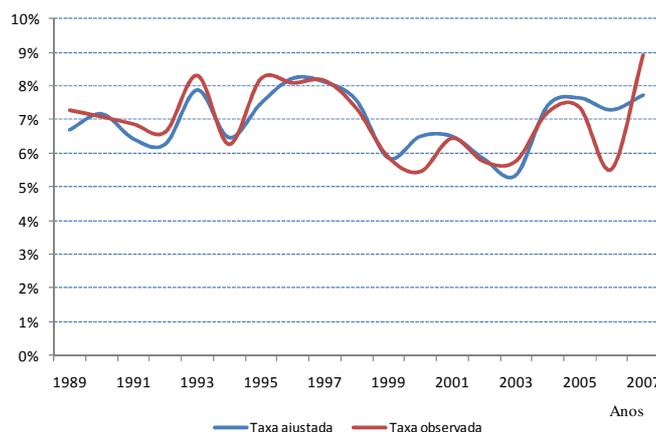
**Tabela 3:** Sumário das estatísticas relativas à qualidade de ajustamento de  $\ln(1 + \widehat{s}_t + r_t + \alpha_t)$ .

<b>Coefficientes</b>	<b>P-value (T)</b>
<i>Intercept</i>	3,0%
<i>Desemp</i>	4,4%
<i>Proc</i>	0,1%
<i>Cpriv(1)</i>	0,9%
<i>Proc x Cpriv(1)</i>	0,4%
<b>P-value (F)</b>	0,6%
<b>R<sup>2</sup></b>	62,1%

Pela observação dos resultados expostos nas tabelas, pode concluir-se que os ajustamentos são aceitáveis, salientando-se a relação positiva entre a taxa de desemprego e as variáveis explicadas e a relação negativa, no que se refere à procura interna e ao consumo público, para o mesmo ano de referência.

Relativamente à qualidade estatística dos modelos, salienta-se o facto de, embora algumas variáveis pudessem ser alvo de exclusão, à luz de um critério traduzido por um valor-p de 5%, se tenha optado por mantê-las, dada a sua relevância na explicação das variáveis modeladas numa lógica denexo de causalidade. Nos gráficos que se seguem encontram-se os resultados dos ajustamentos efectuados.

**Gráfico 10:** Taxas de severidade dos resgates observadas e estimadas, entre 1989 e 2007.

**Gráfico 11:** Taxas de severidade dos resgates, reduções e anulações observadas e estimadas, entre 1989 e 2007.

Na próxima secção, faz-se a modelação do PIB, conforme explicado em 4.2, implementando-se o processo de simulação da variável ao longo do período observado, com o objectivo de confrontar os respectivos resultados com as observações disponíveis. Findo este processo, passa-se directamente para a projecção futura do comportamento da variável. Procedimento idêntico é adoptado no que se refere à modelação das restantes variáveis macroeconómicas de que dependem as variáveis que determinam o cálculo da participação nos resultados futura (objectivo primeiro deste trabalho).

### 6.1.3. Simulação da força de crescimento do PIB

Neste processo de estimação, utilizou-se a informação correspondente às taxas de crescimento do PIB observadas entre 1988 e 2007, tendo-se obtido as seguintes estimativas para os parâmetros:

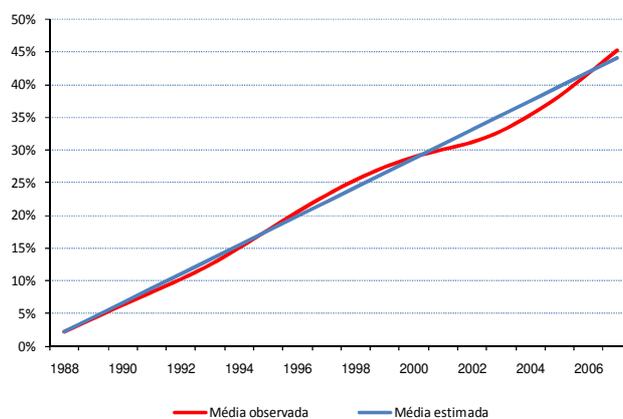
$$\begin{cases} \hat{\mu} = 0,022 \\ \hat{\alpha} = 0,820 \\ \hat{\sigma} = 0,015 \end{cases}$$

A forma como estes parâmetros foram estimados encontra-se explicada em Rodrigues, (2003), referindo-se que o método de estimação de  $\mu$  corresponde ao método dos mínimos quadrados ponderados, enquanto as estimativas dos restantes dois parâmetros

foram resultado da comparação entre a série das variâncias observada e a estimada de acordo com a fórmula (4.2.4), tendo-se optado pelo conjunto de parâmetros que correspondem a um melhor ajustamento a este nível.

No próximo gráfico apresentam-se os resultados da média da força de crescimento acumulada observada e estimada do PIB, sendo esta última calculada aplicando a fórmula (4.2.3).

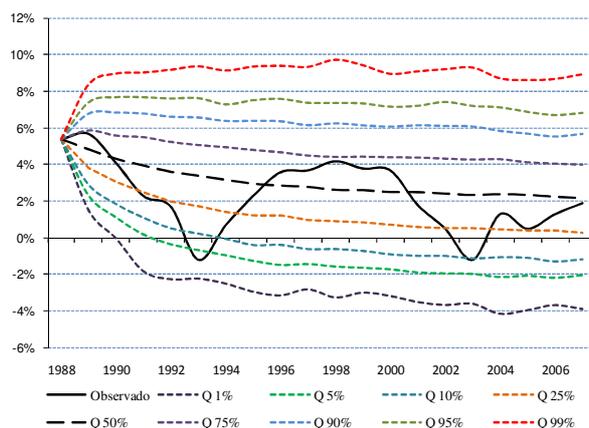
**Gráfico 12:** Média observada e estimada da força de crescimento acumulada do PIB, entre 1988 e 2007.



Verifica-se uma quase coincidência entre a média observada e a média estimada da força de crescimento acumulada do PIB, para o período observado, o que aponta para um ajustamento satisfatório.

No gráfico seguinte sintetizam-se os resultados do processo de simulação da série do PIB para o horizonte temporal referido, com indicação de um conjunto de quantis representativos, os quais podem ser comparados com os valores observados.

O número de réplicas utilizado neste processo de simulação, assim como nos restantes processos realizados no desenvolvimento deste trabalho, correspondeu a 10.000.

**Gráfico 13:** Resultados da simulação da série do PIB, entre 1988 e 2007.

Verifica-se que o modelo se ajusta aos dados históricos, já que a série simulada da força de crescimento do PIB se mantém compreendida nos intervalos de confiança indicados.

Como forma de não sobrecarregar a exposição, não se apresentam os resultados da previsão do PIB para o horizonte temporal de projecção da participação nos resultados. Estes resultados serão oportunamente incluídos no Capítulo 8.

#### **6.1.4. Simulação das forças de crescimento das variáveis macroeconómicas explicativas**

Em resultado dos níveis de correlação elevados existentes entre as variáveis macroeconómicas atrás indicadas e o PIB (exceptuando o caso da taxa de desemprego), a modelação destas foi efectuada com base nas diferenças entre as respectivas forças de crescimento observadas e o resultado da simulação do PIB. Para tal, aplicou-se às referidas diferenças o mesmo tipo de processo estocástico que se implementou à força de crescimento do PIB.

Na próxima tabela, apresentam-se as estimativas que se obtiveram para os parâmetros do modelo, para cada série de diferenças.

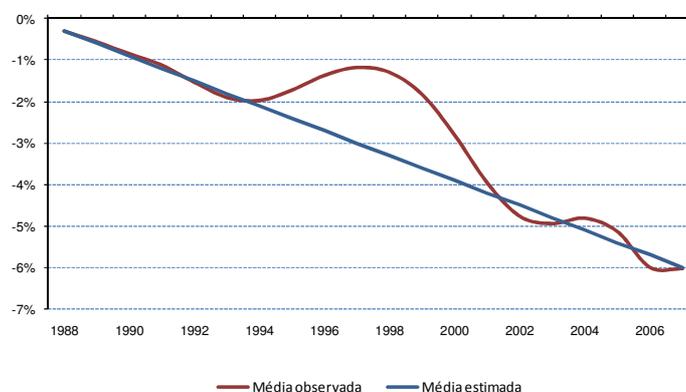
**Tabela 4:** Estimativas dos parâmetros do modelo de simulação das variáveis explicativas.

Parâmetros	$\mu$	$a$	$\sigma$
<i>Cpriv</i>	-0,003	0,600	0,009
<i>Cpub</i>	-0,005	0,600	0,015
<i>Proc</i>	-0,004	0,750	0,017
<i>BVL(1)</i>	0,046	0,650	0,150
<i>OT3</i>	0,006	0,800	0,005

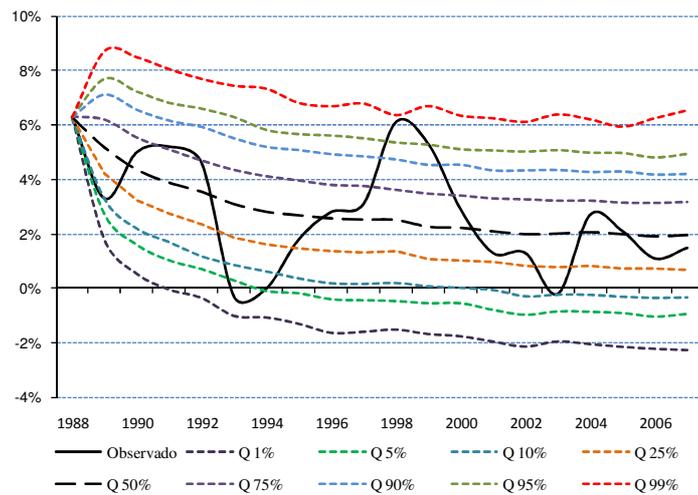
A fim de se efectuar a simulação de cada uma destas variáveis – à semelhança do processo descrito no ponto anterior, relativamente à série do PIB – às forças de crescimento simuladas da série das diferenças, acresceu-se a força de crescimento média do PIB. Após concluída a modelação das séries transformadas, retomou-se a simulação dos valores da série de origem com uma transformação do tipo  $e^{\hat{\delta}t} - 1$ . Posto isto, foi possível estimar os principais quantis a partir dos resultados da simulação.

Nos próximos gráficos representam-se as séries com a média observada e estimada da força de crescimento acumulada da diferença entre o PIB e cada uma das variáveis indicadas, bem como os quantis estimados destas últimas, para o período de avaliação. Na generalidade dos casos, foi possível obter um ajustamento razoável.

### a) Consumo Privado

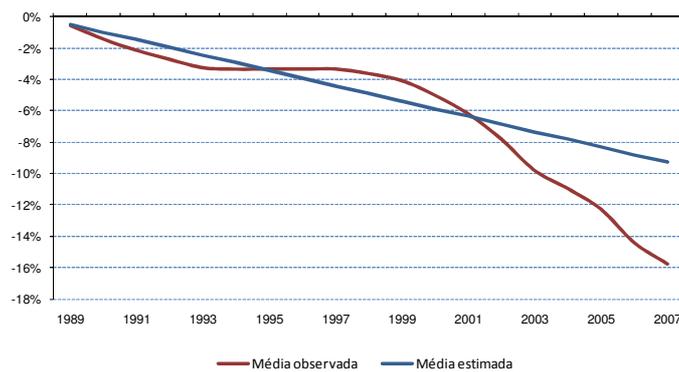
**Gráfico 14:** Média observada e estimada da força de crescimento acumulada da diferença entre o PIB e o consumo privado, entre 1988 e 2007.

**Gráfico 15:** Resultados da simulação da série do consumo privado, entre 1988 e 2007.

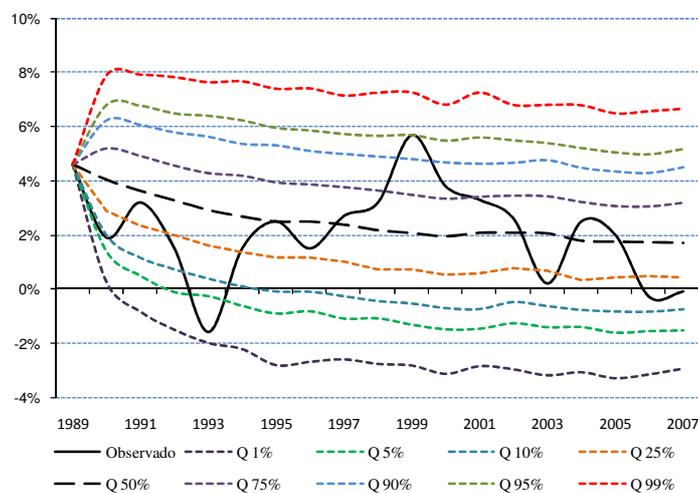


## b) Consumo Público

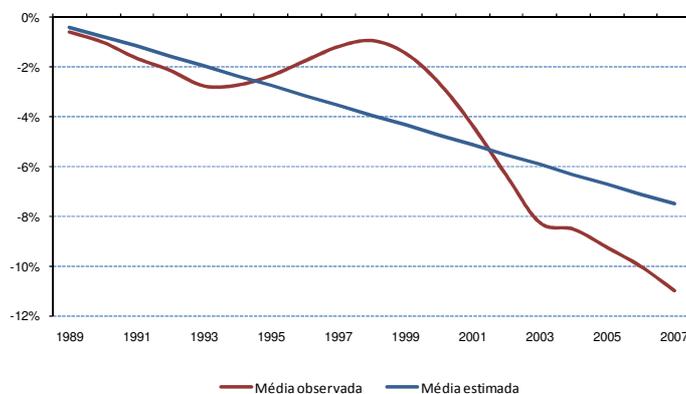
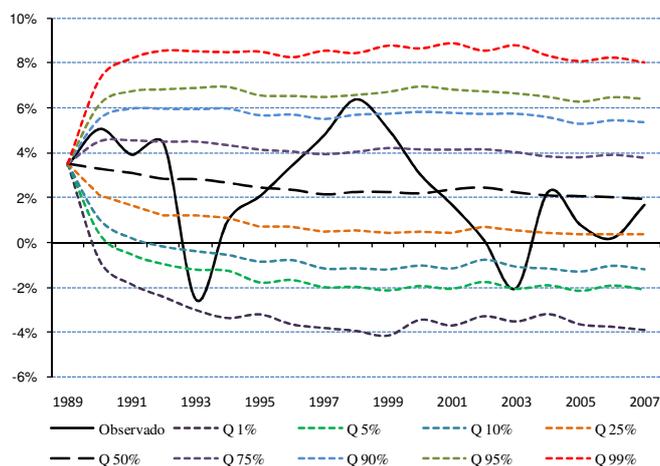
**Gráfico 16:** Média observada e estimada da força de crescimento acumulada da diferença entre o PIB e o consumo público, entre 1989 e 2007.



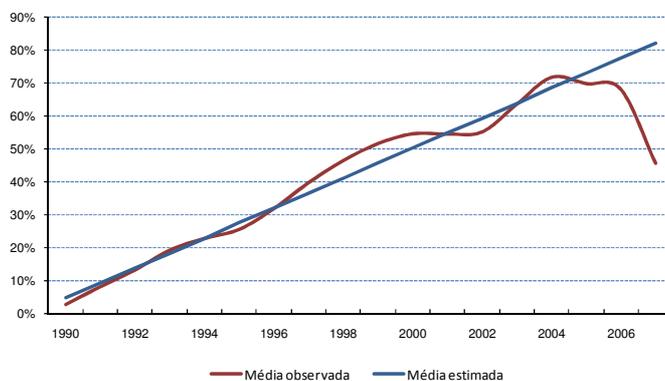
**Gráfico 17:** Resultados da simulação da série do consumo público, entre 1989 e 2007.

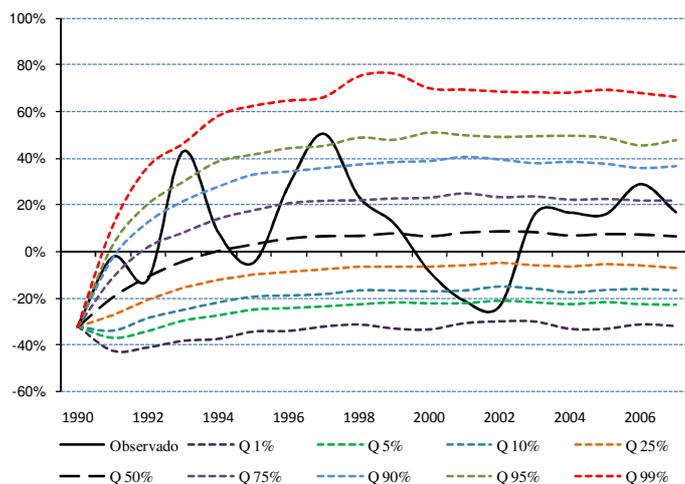


## c) Procura Interna

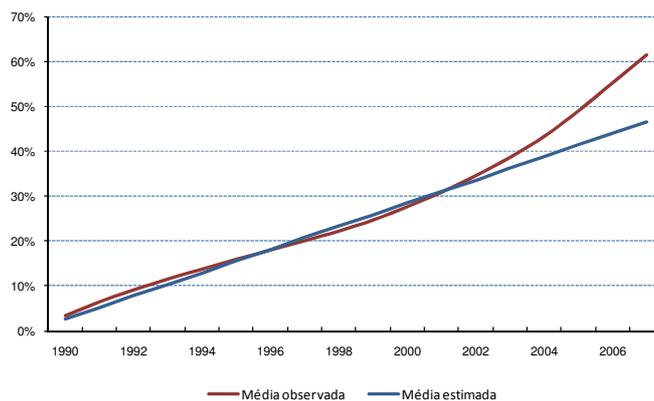
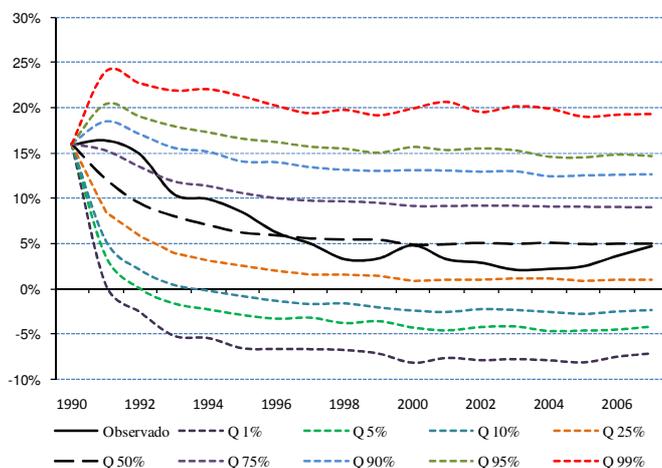
**Gráfico 18:** Média observada e estimada da força de crescimento acumulada da diferença entre o PIB e a procura interna, entre 1989 e 2007.**Gráfico 19:** Resultados da simulação da série da procura interna, entre 1989 e 2007.

## d) Índice geral de cotação das acções da Bolsa de Valores de Lisboa

**Gráfico 20:** Média observada e estimada da força de crescimento acumulada da diferença entre o PIB e o Índice geral de cotação das acções da Bolsa de Valores de Lisboa, entre 1990 e 2007.

**Gráfico 21:** Resultados da simulação da série do Índice geral de cotação das ações da Bolsa de Valores de Lisboa, entre 1990 e 2007.

### e) Índice Obrigacionista

**Gráfico 22:** Média observada e estimada da força de crescimento acumulada da diferença entre o PIB e o Índice Obrigacionista (3 meses), entre 1990 e 2007.**Gráfico 23:** Resultados da simulação da série do Índice Obrigacionista (3 meses), entre 1990 e 2007.

### f) Taxa de Desemprego

Relativamente à taxa de desemprego, foi necessário ajustar uma regra prática entre esta variável e outras possíveis variáveis macroeconómicas que permitissem explicar o seu comportamento. Este processo de modelação foi explicado no ponto 4.3, enquadrando-se no caso em que se verifica um nível de correlação baixo em relação ao PIB. Assim, obteve-se o seguinte ajustamento:

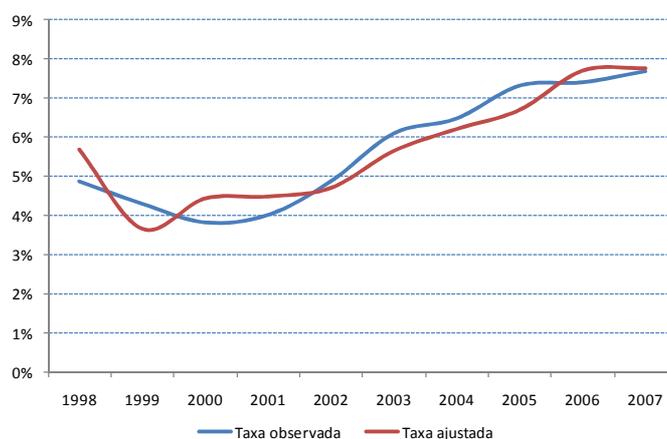
$$\ln(1 + \widehat{desemp}_t) = \{1,737 - 0,082\ln(1 + cpriv_t) \times \\ \times \ln(1 + cpub_t) + 0,814\ln(1 + desemp_{t-1})\}/100$$

**Tabela 5:** Sumário das estatísticas relativas à qualidade de ajustamento de  $\ln(1 + \widehat{desemp}_t)$ .

Coeficientes	P-value (T)
<i>Intercept</i>	11,3%
<i>Cpriv*Cpub</i>	1,4%
<i>Desemp(1)</i>	0,1%
<b>P-value (F)</b>	0,1%
<b>R<sup>2</sup></b>	87,7%

O ajustamento revela-se, desta forma, bastante razoável, o que se pode confirmar com a análise do gráfico que se segue.

**Gráfico 24:** Taxa de desemprego observada e estimada, entre 1998 e 2007.



Neste caso, em vez de se modelar a diferença entre o PIB e a variável explicada, aplicou-se o referido processo de modelação à série das diferenças entre a taxa de

desemprego real e a estimada de acordo com a regra prática acima indicada. As estimativas que se obtiveram para o referido processo correspondem a:

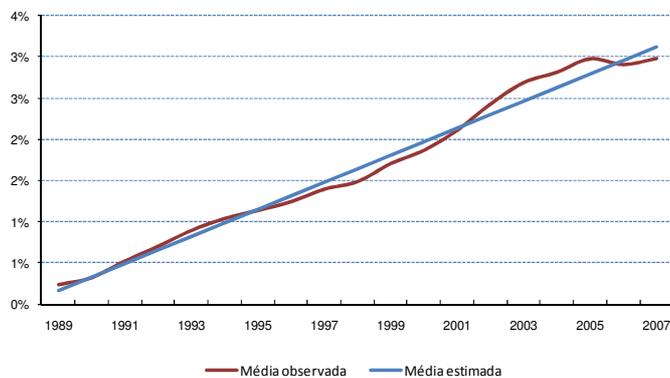
$$\begin{cases} \hat{\mu} = 0,002 \\ \hat{\alpha} = 0,500 \\ \hat{\sigma} = 0,003 \end{cases}$$

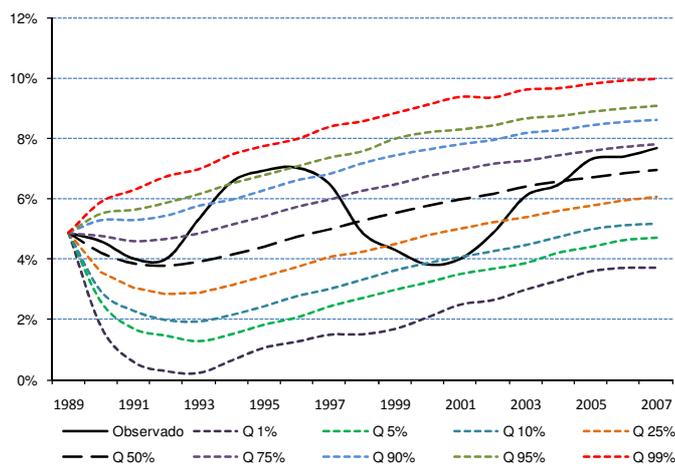
É importante salientar que a série simulada através do modelo de ajustamento depende dos processos de simulação das forças de crescimento de cada uma das variáveis explicativas, os quais foram referidos em primeiro lugar.

Resta acrescentar que aos valores resultantes da conjugação destes processos terá de se aplicar a transformação analítica referida anteriormente, como forma de se obterem as estimativas finais das taxas.

Os resultados encontram-se nos gráficos subsequentes, sendo que o ajustamento se revelou bastante satisfatório.

**Gráfico 25:** Média observada e estimada da força de crescimento acumulada da diferença entre a taxa de desemprego real e estimada, entre 1990 e 2007.



**Gráfico 26:** Resultados da simulação da série taxa de desemprego, entre 1989 e 2007.

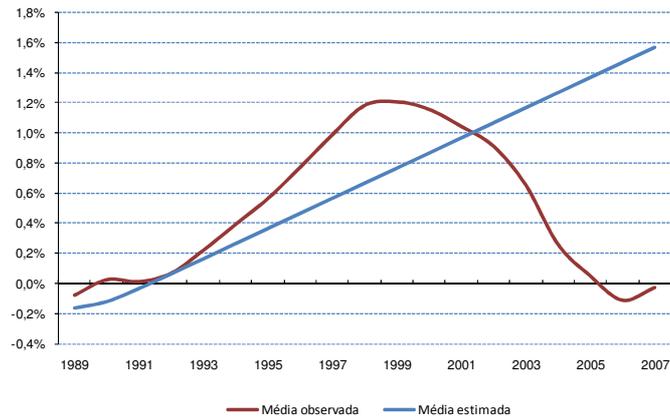
### 6.1.5. Simulação das Taxas de Resgate, Redução e Anulação

Posto isto, foi possível proceder-se à aplicação dos modelos de ajustamento das taxas de resgate, redução e anulação, tendo como base os resultados dos processos de simulação mencionados. Para o efeito, efectuou-se o mesmo tipo de simulação estocástica à série das diferenças entre as estimativas das variáveis dependentes dadas por estes modelos de ajustamento e os valores efectivamente observados no mesmo período. Para ambos os casos, os parâmetros estimados resultaram idênticos, não se tratando de um resultado inesperado, uma vez que a taxa de resgate constitui a principal componente da segunda série, sendo estas estimativas as que se seguem:

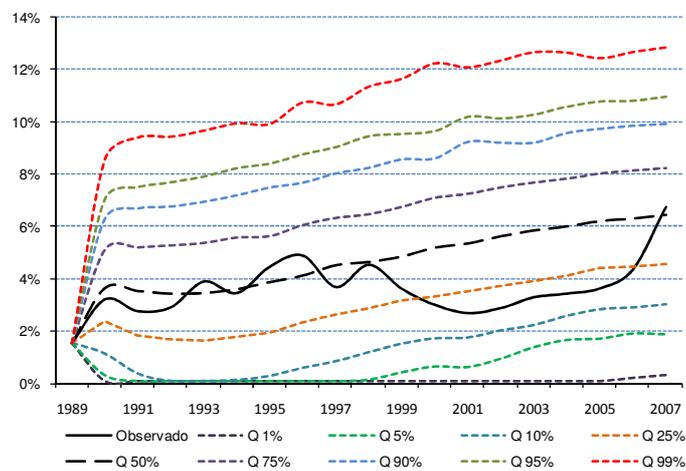
$$\begin{cases} \hat{\mu} = 0,001 \\ \hat{\alpha} = 0,220 \\ \hat{\sigma} = 0,007 \end{cases}$$

Posteriormente, teve de se adicionar à série das diferenças simulada, as forças de crescimento obtidas a partir do modelo estimado, tal como se efectuou para o caso da taxa de desemprego. Os resultados finais apresentam-se de seguida.

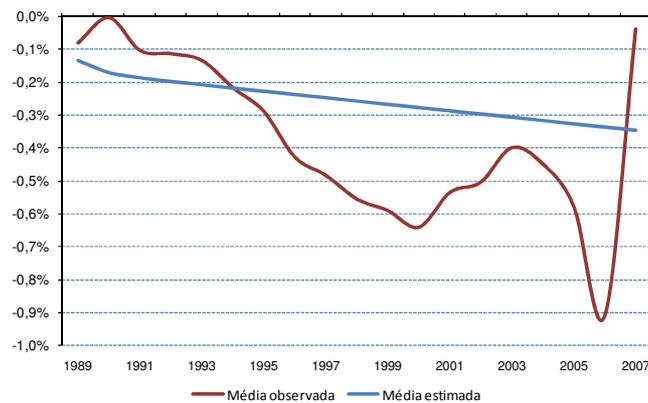
**Gráfico 27:** Média observada e estimada da diferença acumulada entre a taxa de resgates real e estimada, entre 1989 e 2007.

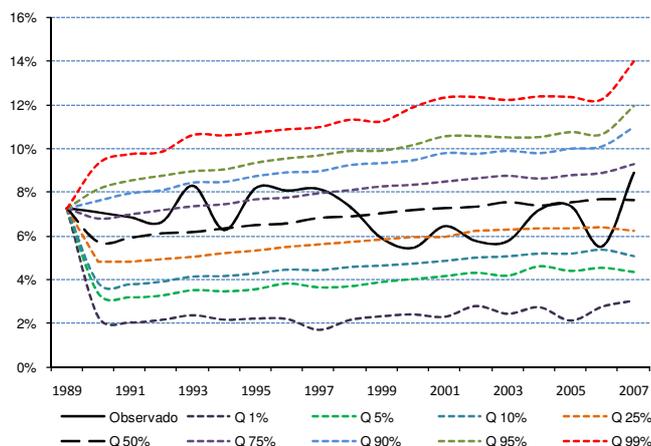


**Gráfico 28:** Resultados da simulação da série taxa de resgates, entre 1989 e 2007.



**Gráfico 29:** Média observada e estimada da diferença acumulada entre a soma das taxas de resgates, reduções e anulações real e estimada, entre 1989 e 2007.



**Gráfico 30:** Resultados da simulação da série da soma das taxas de resgates, reduções e anulações, entre 1989 e 2007.

Apesar das limitações que se podem detectar visualmente nos Gráficos 27 e 29, em ambos estes casos, verificou-se que as séries das taxas observadas não ultrapassam, inferiormente, o nível de confiança de 10% e, superiormente, o de 90%.

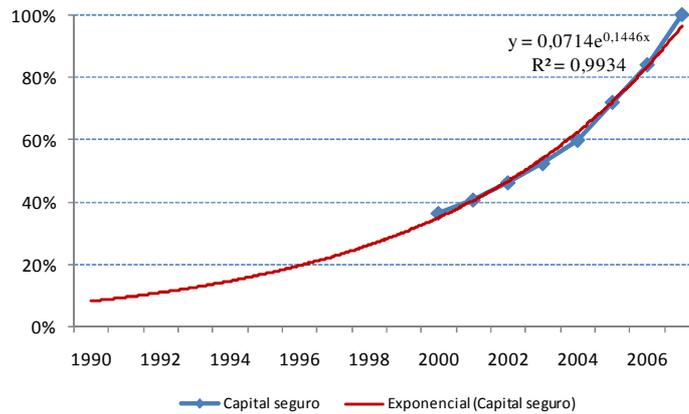
## 6.2. Modelação dos Prémios Pagos

Foi também referido que os custos futuros em caso de morte e os valores de resgate dependem fortemente do valor dos prémios (líquidos de encargos) já encaixados, para além dos prémios futuros dos contratos em estudo, tendo em conta a garantia de contrasseguro. Se existir informação disponível especificamente para a carteira analisada, estes dados deverão ser directamente utilizados, caso contrário, terão de ser estimados. É o que acontece neste caso.

Como primeiro passo para se efectuar esta estimação, procedeu-se ao cálculo do capital seguro inerente à carteira constituída em 2007, relativo a cada um dos anos em que se assumiu que já existia pelo menos um contrato ainda válido em 2007. O limite temporal escolhido foi o ano de 1990, já que foi essencialmente a partir desse ano que se deu início à comercialização de contratos de capital diferido cuja estrutura é consistente com a exposta neste trabalho.

Tal como se verificou no âmbito da modelação considerada no ponto anterior, o presente cálculo foi efectuado com base em informação de mercado disponível relativa ao mesmo produto, o que se traduz em dados respeitantes a uma carteira aberta, não sendo possível dispor de dados específicos para a carteira estudada. Esta informação corresponde aos valores das saídas da carteira, não apenas sob a forma de resgate, redução e anulação, mas igualmente causadas pela morte, vencimento dos contratos, transferência e quaisquer outras causas de saída, inerente aos anos compreendidos entre 2000 e 2007. Isto permitiu obter valores aproximados para o capital seguro da carteira para esses mesmos anos. Por conseguinte, encontra-se aqui implícita a hipótese de que as taxas de saída da carteira aberta são semelhantes às da carteira fechada. Para além das razões práticas apontadas para se fixar esta hipótese, pode-se argumentar que, em princípio, não existem razões sólidas para que tal não se verifique.

Uma vez estimados estes valores, calculou-se a percentagem de capital seguro que se encontrava constituído em cada um dos anos anteriores, face ao valor de 2007. Da análise dos resultados obtidos para o capital seguro da carteira existente entre 2000 e 2007, foi possível detectar uma tendência de evolução do capital seguro quase perfeitamente do tipo exponencial. Deste modo, ajustou-se a função exponencial, que permitiu o melhor ajustamento aos dados, expandindo-se esta evolução para os anos anteriores, tal como se pode observar no gráfico abaixo.

**Gráfico 31:** Capital seguro observado e estimado, entre 1990 e 2007.

O passo seguinte consistiu em calcular a percentagem dos prémios pagos em cada ano de informação histórica (1995-2007), em relação ao capital seguro. Tal como se pode ver no Gráfico 32, estes valores são marcados por uma acentuada volatilidade, tendo-se observado uma proporção de apenas 7,4% em 2002 face a, por exemplo, 21,4% em 2006.

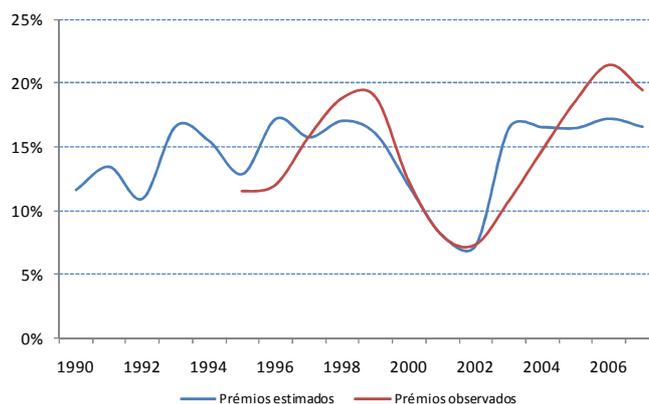
As referidas variações não podem ser explicadas sem recurso às condições económicas observadas nos anos em questão, pelo que se tentou modelar as referidas percentagens em função das mesmas. O melhor modelo de ajustamento que se obteve, face à informação disponível, depende da série das forças de crescimento do Índice Geral de Cotação das Acções da Bolsa de Valores de Lisboa,  $BVL_t$ , ou seja:

$$\ln(1 + \widehat{\rho}_t^{hist}) = \{13,067 + 1,886\ln(1 + BVL_t) - 0,313\ln(1 + BVL_t)^2\}/100.$$

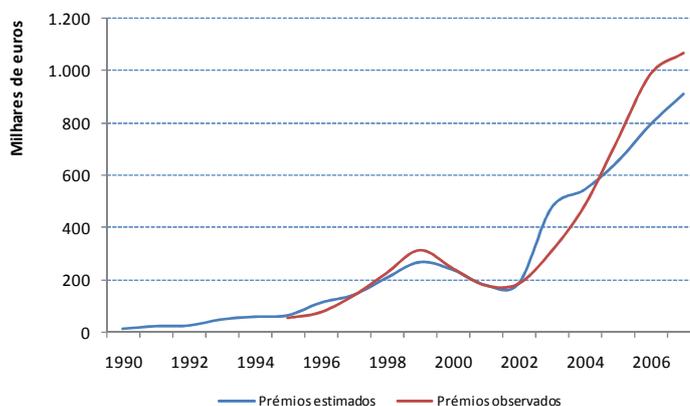
Os resultados alcançados com este ajustamento revelaram-se bastante aceitáveis, tal como se pode concluir pela análise do próximo gráfico e dos gráficos subsequentes.

**Tabela 6:** Sumário das estatísticas relativas à qualidade de ajustamento de  $\ln(1 + \widehat{\rho}_t^{hist})$ .

Coeficientes	P-value (T)
<i>Intercept</i>	0,0%
<i>BVL</i>	0,4%
<i>BVL^2</i>	8,1%
<b>P-value (F)</b>	1,1%
$R^2$	59,2%

**Gráfico 32:** Prémios pagos observados e estimados, em percentagem do capital seguro, entre 1990 e 2007.

No Gráfico 33, encontram-se os resultados em termos absolutos.

**Gráfico 33:** Prémios pagos observados e estimados, entre 1990 e 2007.

### 6.3. Modelação da Participação nos Resultados Passada

A estimação dos custos com sinistros, quer em caso de vida, quer em caso de morte, requer o conhecimento do valor da participação nos resultados atribuída até à data da avaliação. À semelhança do que se mencionou no âmbito dos prémios pagos, no caso de não se dispor directamente desta informação, então terá de ser estimada.

O processo de estimação destes valores assemelha-se ao seguido no âmbito da estimação dos prémios pagos, tendo-se neste caso optado por tentar explicar o comportamento a partir da série das forças de crescimento da rendibilidade dos Títulos do Tesouro a 91 dias no mercado primário (LISBOR 3 meses),  $OT3_t$ . A escolha desta

variável explicativa deve-se ao facto de a carteira de activos representativa deste tipo de seguros ser, na sua grande maioria, constituída por obrigações, sendo uma parte significativa das mesmas respeitante a obrigações da dívida pública. A equação estimada apresenta-se de seguida, bem como os resultados das estatísticas, tal como se tem vindo a fazer.

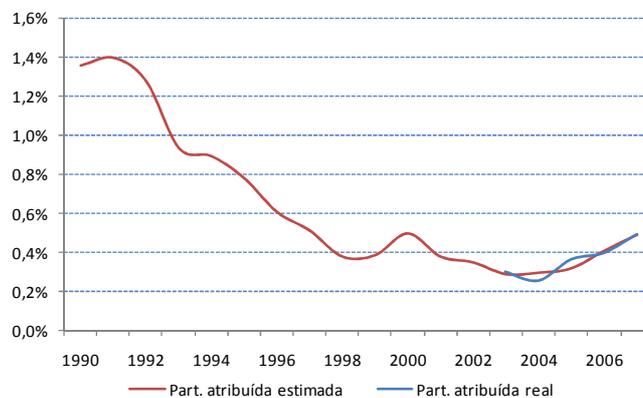
$$\ln(1 + \widehat{PRD}_t^{hist}) = \{0,001 + 0,077\ln(1 + OT3_t)\}/100$$

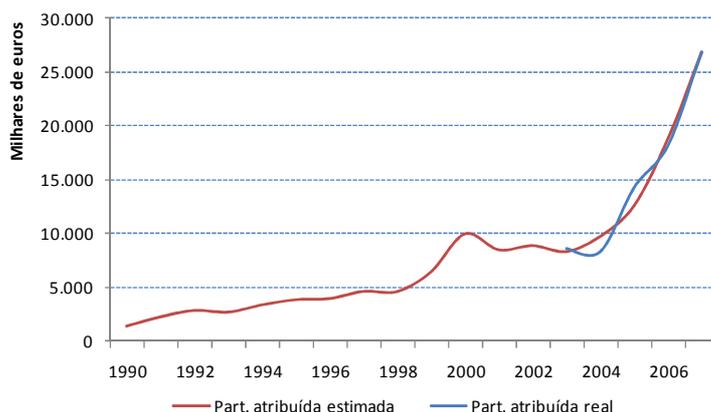
**Tabela 7:** Sumário das estatísticas relativas à qualidade de ajustamento de  $\ln(1 + \widehat{PRD}_t^{hist})$ .

<b>Coefficientes</b>	<b>P-value (T)</b>
<i>Intercept</i>	8,9%
<i>OT3</i>	1,8%
<b>P-value (F)</b>	1,8%
<b>R<sup>2</sup></b>	88,1%

Tal como expectável, tendo em consideração os resultados estatísticos expostos, os Gráficos 34 e 35 revelam um ajustamento bastante satisfatório.

**Gráfico 34:** Participação nos resultados atribuída, em percentagem do capital seguro, entre 1990 e 2007.



**Gráfico 35:** Participação nos resultados atribuída, entre 1990 e 2007.

#### 6.4. Modelação Estocástica do Peso dos Prémios Futuros no Capital Seguro

No ponto 6.2 procedeu-se à estimação dos prémios pagos até à data de avaliação, especificamente no que se refere à carteira composta no último ano de informação, ou seja, excluindo o valor dos prémios inerentes a contratos que já se venceram, foram resgatados, anulados ou cujo término se deu por qualquer outra via. Para o efeito, obteve-se o ajustamento indicado, que não é aplicável na projecção dos prémios futuros. Isto acontece pelo facto de os dados utilizados nesse âmbito incluírem os prémios associados aos novos contratos, não reflectindo a evolução dos prémios futuros no que se refere à carteira fechada. Tendo em conta que a produção nova assume um peso bastante elevado na totalidade dos prémios, peso esse que tem vindo a crescer significativamente, procedeu-se à eliminação do efeito desta última parcela nos dados, subtraindo-se o valor da produção nova em cada ano de informação disponível, o que se traduziu numa redução dos anos de informação. Deste modo, determinou-se o peso dos restantes prémios no capital seguro total, sendo estas as proporções consideradas para a modelação de  $\rho_t$ , definido na fórmula de  $P_t$ .

O modelo estimado tem a forma:

$$\ln(\widehat{1 + \rho_t}) = \{4,355 - 0,067\ln(1 + OT3_t)^2 + 0,127\ln(1 + BVL_t)\}/100$$

De forma semelhante ao observado relativamente aos prémios históricos, também agora existe uma relação positiva entre  $BVL_t$  e  $\rho_t$ , contrabalançada pelo efeito inverso motivado pela força de crescimento da rendibilidade das obrigações, já que, para o mesmo capital garantido, pode argumentar-se que a ocorrência de uma quebra neste índice poderá ser compensada pela fixação de prémios de montante mais elevado. A tabela que resume a qualidade do ajustamento é apresentada de seguida.

**Tabela 8:** Sumário das estatísticas relativas à qualidade de ajustamento de  $\ln(\widehat{1 + \rho}_t)$ .

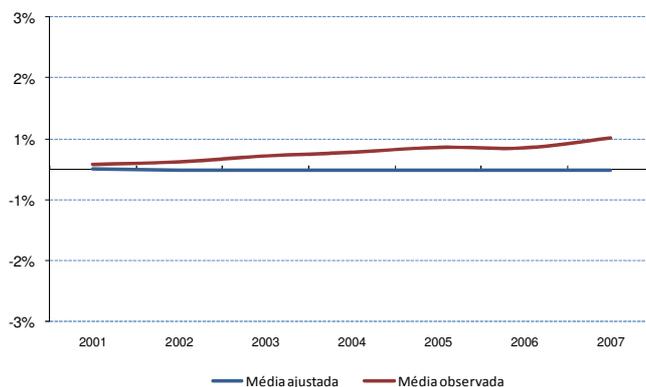
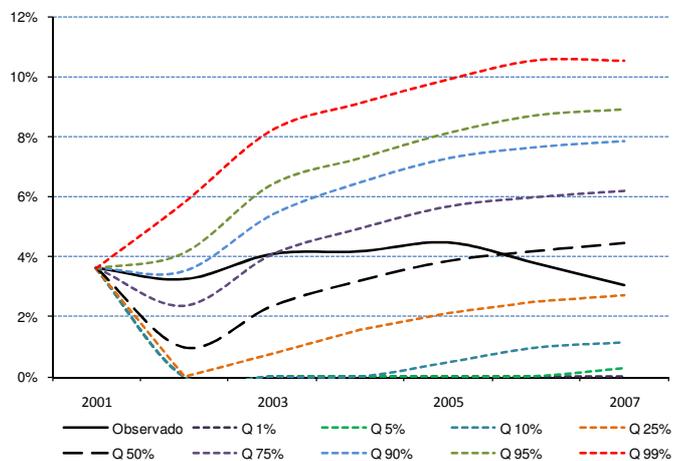
<b>Coefficientes</b>	<b>P-value (T)</b>
<i>Intercept</i>	0,0%
<i>OT3^2</i>	1,9%
<i>BVL</i>	7,5%
<b>P-value (F)</b>	3,2%
$R^2$	82,3%

Finalmente, no próximo gráfico é possível estabelecer a comparação entre os prémios observados e os estimados pelo modelo.

**Gráfico 36:** Prémios (excluindo a produção nova) em percentagem do capital seguro, entre 2001 e 2007.



Conclui-se esta secção apresentando os resultados da simulação estocástica para a variável em causa.

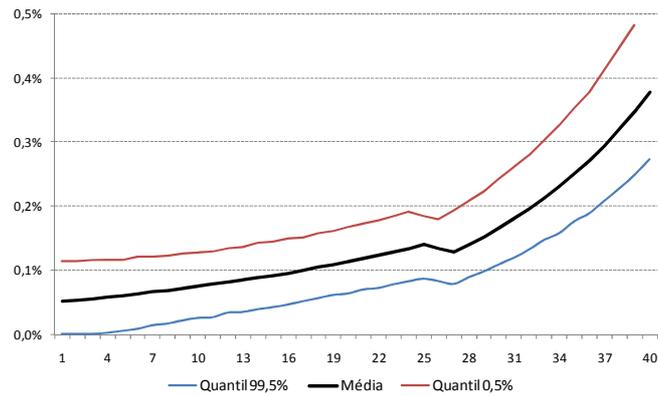
**Gráfico 37:** Média observada e estimada da diferença acumulada entre o peso dos prémios no capital seguro real e estimada, entre 2001 e 2007.**Gráfico 38:** Resultados da simulação dos prémios em função do capital seguro, entre 2001 e 2007.

### 6.5. Modelação Estocástica das Taxas de Mortalidade

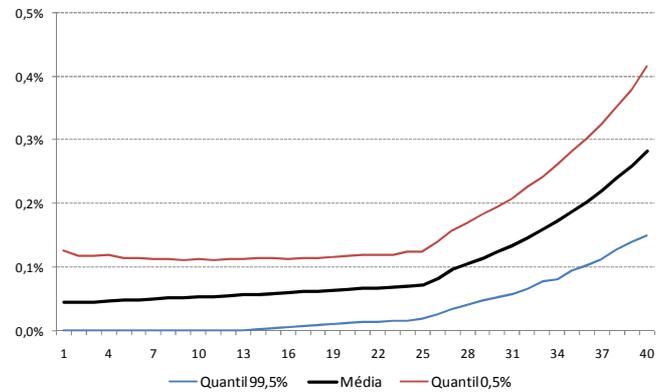
Para se estimar as taxas de mortalidade da população segura, considerou-se a informação relativa ao número de mortes da população segura do ramo Vida em termos globais, dadas as limitações em termos de informação.

Os gráficos com as probabilidades de morte válidas para uma pessoa de 25 anos de idade do sexo masculino e do sexo feminino apresentam-se abaixo. Para além das taxas médias, estimaram-se os quantis a 0,5% e a 99,5%.

**Gráfico 39:** Resultados obtidos para  ${}_t q_{25}$ ,  $0 \leq t \leq 40$ , para a população segura masculina.

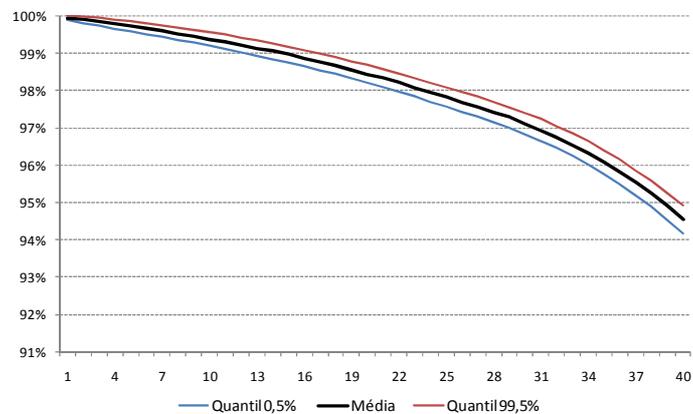


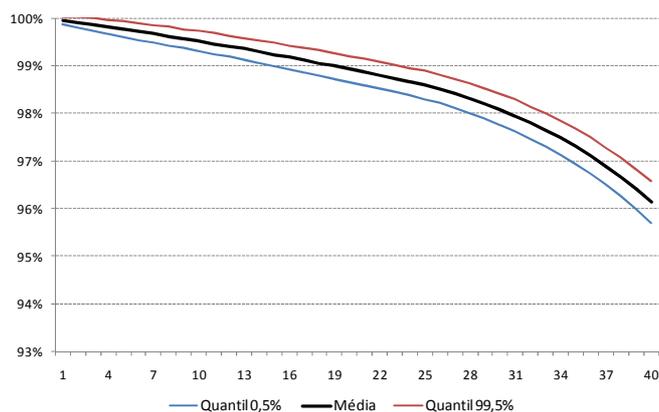
**Gráfico 40:** Resultados obtidos para  ${}_t q_{25}$ ,  $0 \leq t \leq 40$ , para a população segura feminina.



Os resultados que se obtiveram para as probabilidades de sobrevivência,  ${}_t p_{x_t}$ , para o mesmo conjunto de pessoas, são os seguintes:

**Gráfico 41:** Resultados obtidos para  ${}_t p_{25}$ ,  $0 \leq t \leq 40$ , para a população segura masculina.



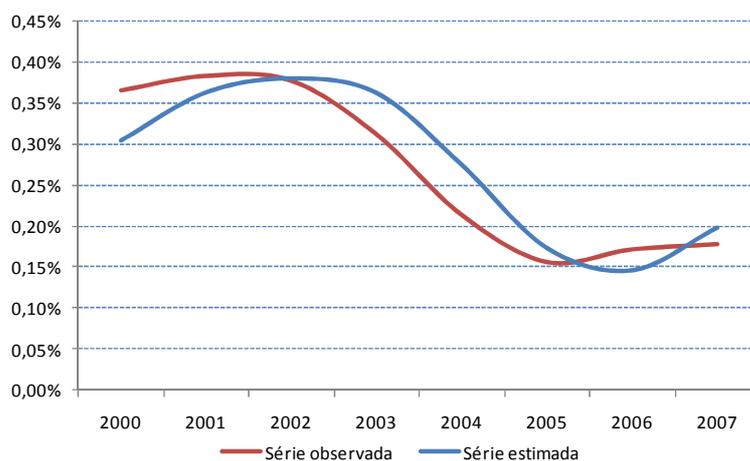
**Gráfico 42** Resultados obtidos para  ${}_t p_{25}$ ,  $0 \leq t \leq 40$ , para a população segura feminina.

## 6.6. Modelação das Despesas

O tratamento das despesas de gestão é efectuado de forma determinística, tendo-se chegado à conclusão de que a relação abaixo do tipo  $AR(2)$  é adequada para explicar o comportamento do peso das despesas em relação ao capital seguro:

$$\hat{e}_t = e_{t-1} - 0,5300(e_{t-1} - 0,0029) + 0,1504(e_{t-1} - e_{t-2}).$$

O Gráfico 43 espelha este ajustamento.

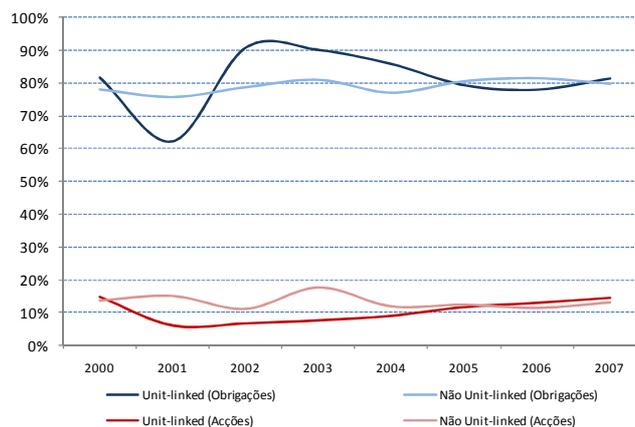
**Gráfico 43:** Valores observados e estimados das despesas de gestão em relação ao capital seguro, entre 2000 e 2007.

### 6.7. Modelação dos Resultados Financeiros

Finalmente, procede-se à modelação dos resultados financeiros, tendo este processo sido efectuado com base na separação dos resultados em realizados e não realizados, o que é conveniente para a reprodução do mecanismo estudado de atribuição dos resultados.

Para o efeito, recorreu-se a informação disponível dada pelo mercado, para o conjunto das empresas de seguros a operar no ramo Vida, no que se refere aos resultados globais para o ramo. Apurou-se o peso que estes dados assumem na provisão matemática, sendo esta a variável que se pretende modelar. Contudo, estes resultados incluem uma componente que respeita a produtos com algumas características distintas das do tipo de contrato em estudo, designadamente *unit-linked* e operações de capitalização, tendo sido necessário retirar a componente a estes relativa, aos dados utilizados. Saliente-se que a medida de volume utilizada (provisão matemática) não abrange, de igual modo, estes últimos produtos.

Assim, aferiu-se a composição da carteira representativa das responsabilidades com os produtos do tipo *unit-linked* e a dos restantes produtos, fazendo a desagregação nos dois principais tipos de activos que as compõem, obrigações por um lado e acções e unidades de participação em fundos de investimento, por outro. Foi então possível desenhar o seguinte gráfico:

**Gráfico 44:** Comparação entre as composições das carteiras representativas dos produtos do ramo Vida, entre 2000 e 2007.

É visível que existe uma tendência para que ambas as estruturas coincidam. No entanto, se esta análise for aprofundada, chega-se à conclusão de que o principal aspecto que diferencia o perfil de investimento associado a cada um dos tipos de produtos consiste no facto de, no âmbito dos produtos do tipo *unit-linked* existir um forte investimento em obrigações privadas (cerca de 80% da carteira em 2007 e nos restantes produtos esta componente, embora bastante importante, ser de cerca de 50%). Acresce que, em contrapartida, existe nestes um investimento em obrigações do Estado na ordem de 30% do valor da carteira, e no outro produto, apenas cerca de 2%.

Tendo em conta o facto de as diferenças em termos de estratégias de investimento não serem materiais, aliado ao facto de não existir informação específica por produto no que se refere aos resultados, optou-se apenas por retirar aos resultados financeiros totais o peso da parcela de investimentos afecta aos produtos de maior componente financeira, não representados na provisão matemática; assim se procurou garantir a consistência entre ambas as parcelas, não se efectuando qualquer outro ajustamento, em virtude da hipótese de que a rendibilidade obtida em ambas as carteiras é tendencialmente idêntica. Do ponto de vista do objectivo deste trabalho, tal hipótese torna-se relativamente prudente, dado o maior risco que existe no outro tipo de carteira, a que se associa, em princípio, um nível de rendibilidade relativamente superior.

Em primeiro lugar, apresenta-se o melhor ajustamento que se obteve para explicar o comportamento dos resultados financeiros realizados, em relação às forças de crescimento das variáveis já modeladas.

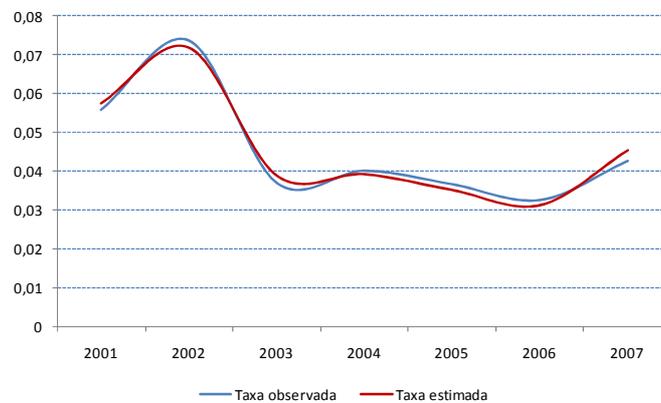
$$\ln(1 + \widehat{RF}_t) = \{5,096 - 0,088\ln(1 + BVL_t) + 0,021\ln(1 + PIB_t)\ln(1 + BVL_t)\}/100$$

**Tabela 9:** Sumário das estatísticas relativas à qualidade de ajustamento de  $\ln(1 + \widehat{RF}_t)$ .

Coeficientes	P-value (T)
<i>Intercept</i>	0,0%
<i>BVL</i>	0,4%
<i>PIB*BVL</i>	2,2%
<b>P-value (F)</b>	0,9%
$R^2$	85,9%

Como facilmente se constata, o ajustamento é bastante aceitável, o que é visível no gráfico abaixo.

**Gráfico 45:** Resultados financeiros realizados em percentagem da provisão matemática, entre 2001 e 2007.

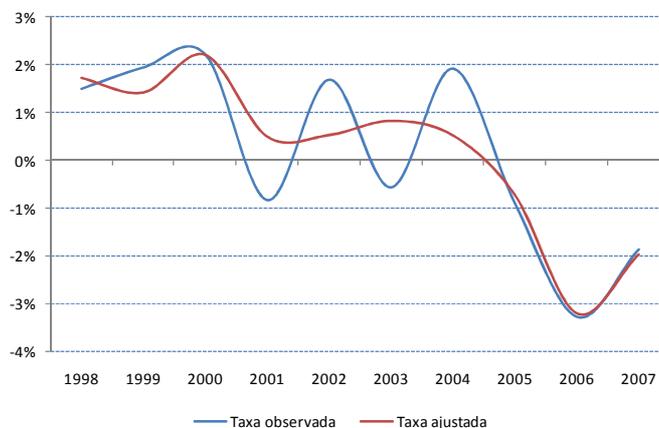


Relativamente ao saldo de mais e menos valias, o ajustamento obtido e respectivos resultados são os que se seguem.

$$\ln(1 + \widehat{MMV}_t) = \{12,233 - 0,057\ln(1 + BVL_t) - 6,993\ln(1 + OT3_t) + 0,274\ln(1 + PIB_t)^2 + 0,846\ln(1 + OT3_t)^2\}/100$$

**Tabela 10:** Sumário das estatísticas relativas à qualidade de ajustamento de  $\ln(1 + \widehat{MMV}_t)$ .

<b>Coeficientes</b>	<b>P-value (T)</b>
<i>Intercept</i>	6,6%
<i>BVL</i>	3,4%
<i>OT3</i>	7,9%
<i>PIB^2</i>	1,1%
<i>OT3^2</i>	11,9%
<b>P-value (F)</b>	4,7%
<b>R<sup>2</sup></b>	65,9%

**Gráfico 46:** Saldo de mais e menos valias não realizadas em percentagem da provisão matemática, entre 1998 e 2007.

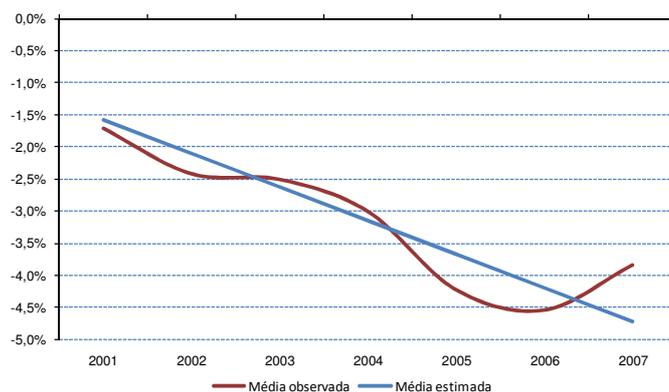
Posto isto, simularam-se as diferenças entre o verdadeiro valor das séries e as respectivas relações ajustadas, tal como efectuado nos casos anteriores, sendo que as estimativas dos parâmetros para os presentes dados são as seguintes:

**Tabela 11:** Estimativas dos parâmetros do modelo de simulação dos resultados financeiros.

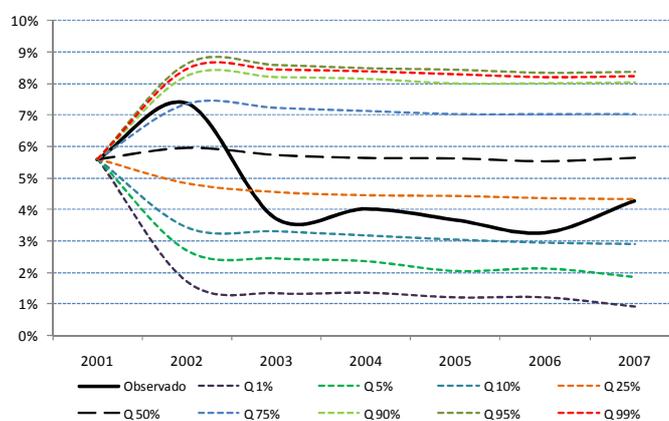
<b>Parâmetros</b>	$\mu$	$a$	$\sigma$
<i>Res. Fin. Real.</i>	-0,005	0,700	0,008
<i>MMV</i>	0,011	0,700	0,003

É agora possível apresentar os resultados finais da presente modelação para as duas componentes dos ganhos líquidos de investimentos.

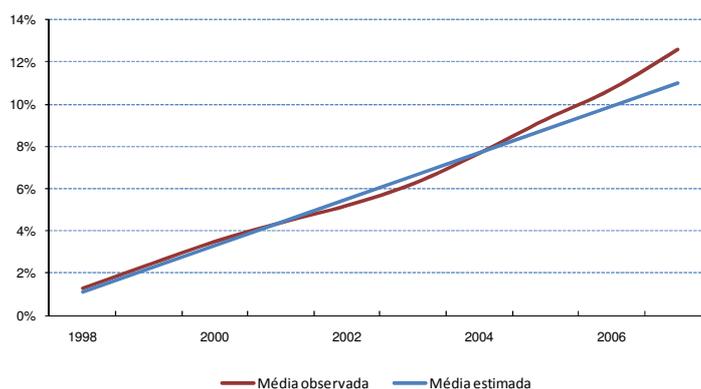
**Gráfico 47:** Média observada e estimada da diferença acumulada entre o peso dos resultados financeiros realizados na provisão matemática real e estimada, entre 2001 e 2007.

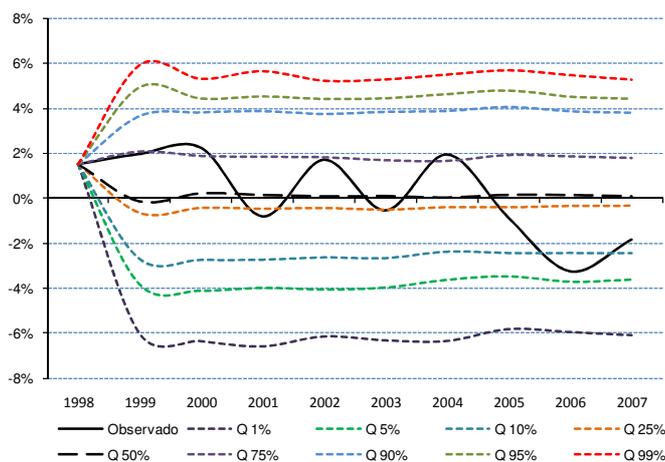


**Gráfico 48:** Resultados da simulação dos resultados financeiros realizados em função da provisão matemática, entre 2001 e 2007.



**Gráfico 49:** Média observada e estimada da diferença acumulada entre saldo de mais e menos valias real e estimada, entre 1989 e 2007.

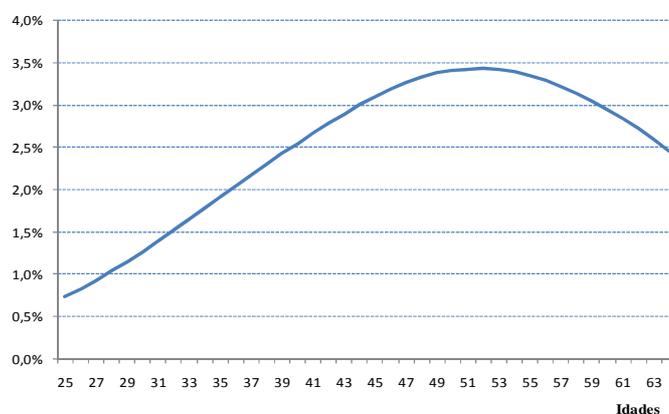


**Gráfico 50:** Resultados da simulação do saldo de mais e menos valias em função da provisão matemática, entre 1998 e 2007.

## 6.8. Resultados Finais

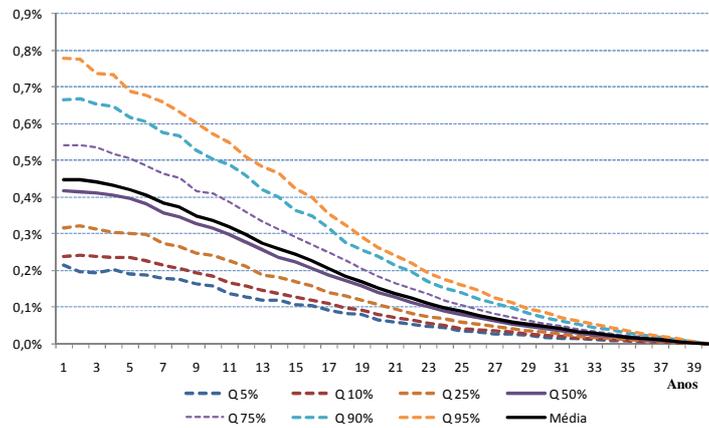
Neste ponto apresentam-se os resultados obtidos com a aplicação da metodologia em análise. Com base nos ajustamentos indicados no capítulo anterior, foi possível projectar os vários tipos de responsabilidades decorrentes do contrato estudado.

Relativamente à estrutura etária da população que compõe a carteira, considerou-se que as idades variam entre 25 e 64 anos e que o peso de cada uma destas corresponde ao peso assumido no âmbito do conjunto de seguros do ramo Vida. A distribuição das idades apresenta-se no gráfico seguinte.

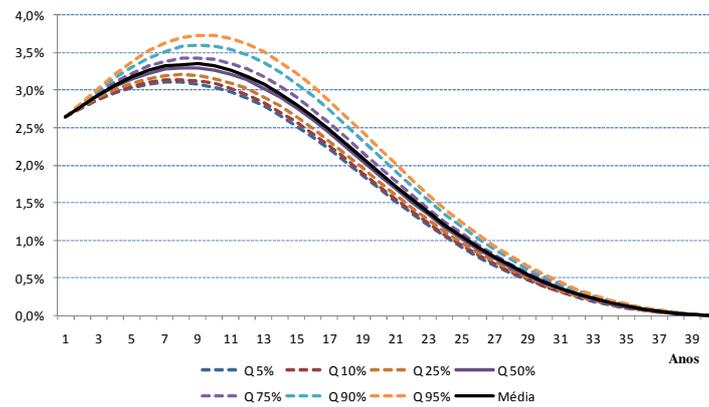
**Gráfico 51:** Distribuição das idades da população segura.

Nos próximos gráficos encontra-se representada a evolução prevista dos prémios futuros, dos custos em caso de vida e de morte, dos valores de resgate e das despesas de exploração emergentes da carteira estudada.

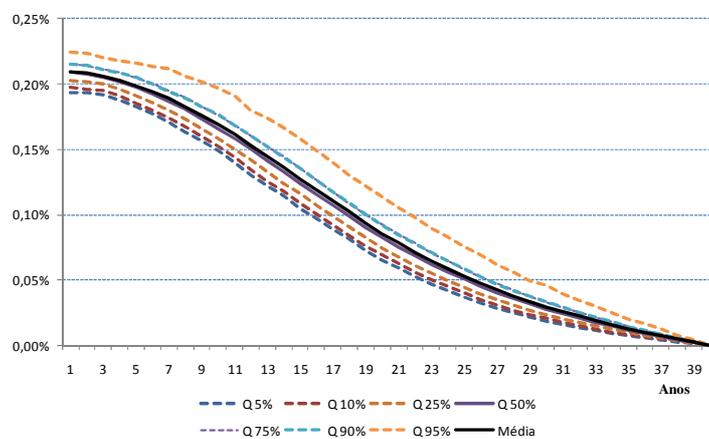
**Gráfico 52:** Resultados da simulação dos prémios futuros até ao *run-off*.

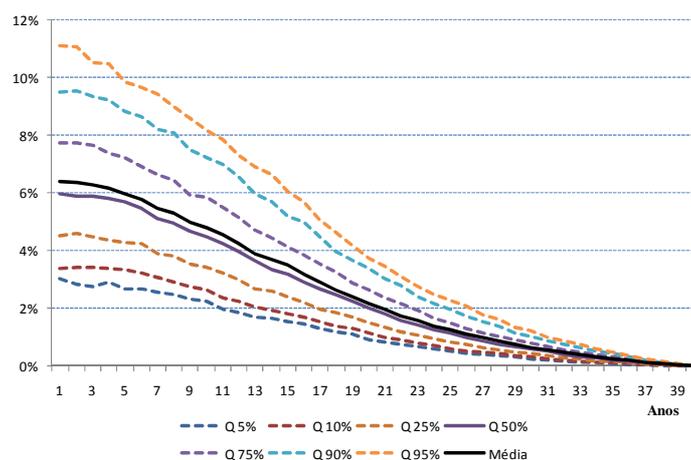
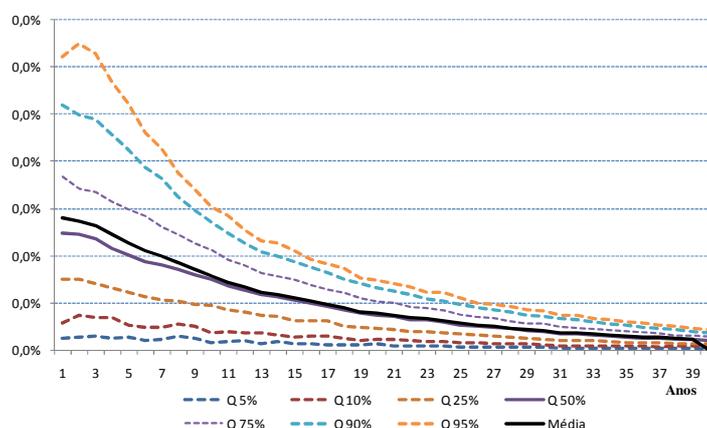


**Gráfico 53:** Resultados da simulação dos custos em caso de vida até ao *run-off*.

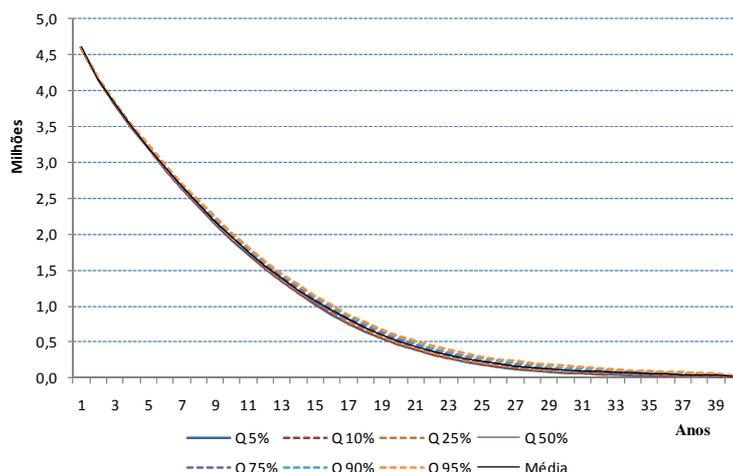


**Gráfico 54:** Resultados da simulação dos custos em caso de morte até ao *run-off*.



**Gráfico 55:** Resultados da simulação dos valores de resgate até ao *run-off*.**Gráfico 56:** Resultados da simulação das despesas de exploração até ao *run-off*.

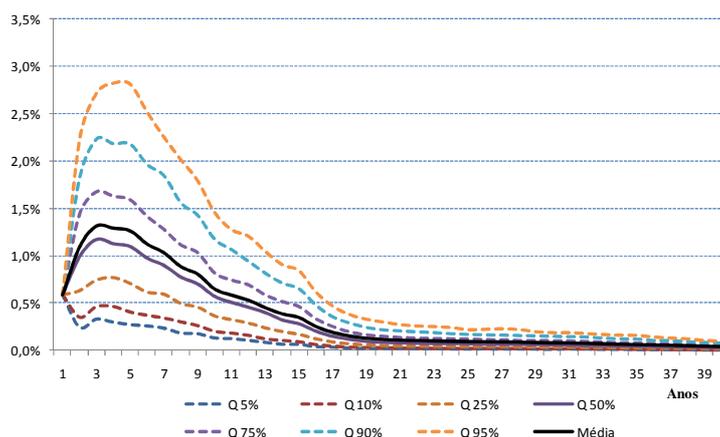
Tal como se explicou, a participação nos resultados influencia o valor destas últimas variáveis, sendo incorporada anualmente nos capitais seguros. Como tal, não seria possível efectuar a estimação destes valores sem, para isso, estimar a referida participação, pelo que os valores apresentados reflectem os benefícios atribuídos sob esta via. No próximo gráfico, analise-se a evolução futura da *best estimate* (que inclui apenas o valor da participação nos resultados atribuída até à data a que diz respeito).

Gráfico 57: Resultados da simulação *best estimate* até ao *run-off*.

Verifica-se que as responsabilidades com os contratos em vigor são amortizadas, na sua grande maioria, nos primeiros 20 anos de projecção. Se for tido em conta o comportamento das taxas de saída da carteira bem como a distribuição das idades da população segura, torna-se mais fácil a compreensão deste aspecto.

Contudo, esta análise ainda não permite analisar directamente o comportamento futuro da participação nos resultados, encontrando-se a mesma diluída nos montantes acima, pelo que importa efectuar uma análise detalhada deste mesmo comportamento.

Tal como se explicou no Capítulo 2, o cálculo da participação depende, designadamente, dos parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $d$ , os quais podem ser, até certa medida, controlados pela empresa de seguros. Este controlo é limitado porque poderão estar contratualmente estabelecidos, limites mínimos para os mesmos. De acordo com uma pesquisa efectuada, constatou-se que é relativamente vulgar fixar-se  $a = d = 0,75$ , tendo sido estes os valores escolhidos para se efectuar uma análise mais aprofundada. Quanto a  $b$ , optou-se por fixá-lo em 0,5, não tendo sido possível obter informação específica sobre este parâmetro. Partindo destas hipóteses, apresenta-se a evolução de  $PDR_t$  ao longo do horizonte de projecção, em função da *best estimate* calculada para o ano de avaliação.

**Gráfico 58:** Resultados da simulação da participação nos resultados futura, atribuída anualmente até ao *run-off*.

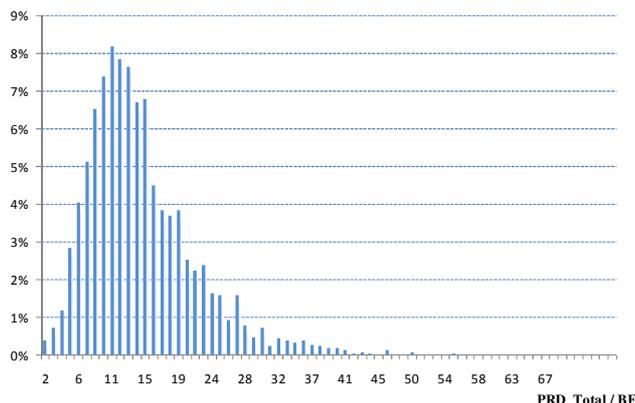
Tal como se pode observar, a incerteza quanto ao valor a distribuir de participação nos resultados é bastante mais relevante nos primeiros 15 anos de projecção do que nos anos seguintes, isto porque a  $BE_t$  decresce progressivamente ao longo deste limite temporal, sendo as responsabilidades com os contratos em vigor em 2007 bastante menos significativas nos anos subsequentes.

Posto isto, estimou-se um conjunto de intervalos de confiança para o peso do valor actual da participação nos resultados futura total ( $PRD_{Total}$ ) em relação ao valor da *best estimate*. Esta estimacção foi acompanhada de uma análise de sensibilidade em relação aos parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $d$ . Observam-se os resultados na tabela seguinte.

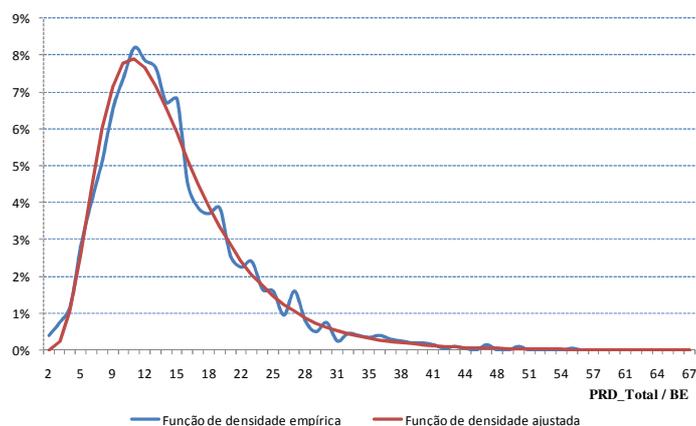
**Tabela 12:** Resultados da simulação de  $PRD_{Total}$ , associados a diferentes hipóteses de transferência dos resultados.

	Q5%	Q10%	Q25%	Q50%	Q75%	Q90%	Q95%	Média
$a=d=0,75$ $b=0,5$	5,2%	6,5%	9,1%	12,6%	17,2%	23,3%	27,5%	13,9%
$a=d=b=0,75$	5,8%	7,0%	9,6%	13,2%	17,9%	23,9%	28,8%	14,7%
$a=0,75$ $d=0,9$ $b=0,75$	5,4%	6,8%	9,5%	13,1%	17,9%	24,1%	28,8%	14,5%
$a=0,9$ $d=0,75$ $b=0,9$	6,8%	8,3%	11,1%	15,1%	20,0%	25,9%	30,9%	16,3%
$a=d=0,9$ $b=0,5$	6,0%	7,6%	10,6%	14,6%	19,6%	25,7%	30,1%	15,9%
$a=d=b=0,9$	6,5%	8,1%	11,2%	15,1%	20,3%	26,4%	30,5%	16,4%
$a=d=1$ $b=1$	7,3%	8,9%	12,2%	16,4%	21,5%	27,8%	32,7%	17,7%

Seguidamente, construiu-se o histograma dos valores simulados de  $PRD_{Total}$  com o intuito de retirar conclusões acerca da sua distribuição. Note-se que foram utilizados os mesmos parâmetros para o efeito.

**Gráfico 59:** Histograma de  $PRD_{Total}$  resultante do processo de simulação.

Verifica-se que existe uma assimetria do tipo positivo na distribuição de  $PRD_{Total}$ , propondo-se a distribuição Lognormal como a adequada para explicar o comportamento desta variável. Aplicando o método dos mínimos quadrados, obteve-se o seguinte ajustamento:

**Gráfico 60:** Distribuição ajustada de  $PRD_{Total}$ .

Com a respectiva função de densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \frac{1}{1,20962x} \exp \left[ -\frac{(\ln(x) - 2,54042)^2}{0,48257} \right]$$

O presente ajustamento passa no teste de Kolmogorov-Smirnov para um nível de confiança de 5%, pois a estatística teste obtida totaliza 1,3%, inferior ao respectivo valor crítico (4,3%).

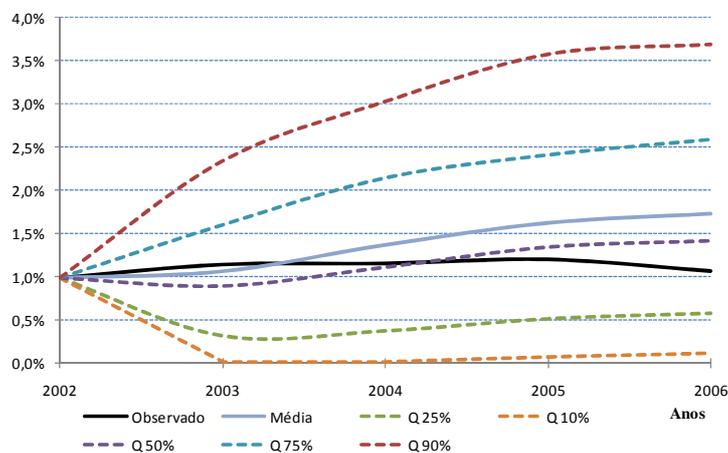
### 6.9. Validação Histórica da Metodologia

Para efectuar a validação histórica desta metodologia, implementou-se o mesmo processo de simulação para o início do período em que se dispõe de informação relativamente ao valor da participação nos resultados atribuída no âmbito dos seguros de Vida não ligados a fundos de investimento (2002), uma vez que não se dispõe deste tipo de informação especificamente para o produto em análise.

Os pressupostos assumidos foram exactamente os mesmos que se fixaram para a projecção efectuada, salientando-se apenas o facto de o mecanismo de cálculo dos benefícios ter sido aplicado directamente sobre os valores históricos da provisão matemática, (que difere da *best estimate* de Vida, pois à primeira, encontra-se associado um determinado nível de prudência).

O gráfico que resume os resultados obtidos encontra-se abaixo.

**Gráfico 61:** Validação histórica de  $PRD_t$ , entre 2002 e 2006.



Pela análise do gráfico é possível concluir que o modelo se ajusta aos dados de forma satisfatória, encontrando-se os valores observados compreendidos entre os quantis de 25% e 75%.

No entanto, importa fazer a ressalva de que os valores sobre os quais se efectuou esta validação compreendem um universo bastante mais alargado do que o contrato em análise, assim como uma diversidade de esquemas de participação nos resultados. Mais ainda, os próprios mecanismos não são rígidos e dependem de vários aspectos como as próprias acções de gestão e políticas internas de cada empresa de seguros. Logo, esta validação histórica, embora tenha revelado resultados favoráveis, é apenas indicativa, pelos motivos referidos.

No Capítulo 7, procede-se à exposição da segunda metodologia estudada.

## **Capítulo 7**

### **Metodologia 2 – Avaliação da Participação nos Resultados Futura no Quadro da Optimização da Rendibilidade do Portfólio**

#### **7.1. Introdução**

Uma vez desenvolvida e implementada a Metodologia 1, procurou-se completar o estudo efectuado neste trabalho, explorando uma metodologia que se focasse directamente na estimação dos resultados financeiros futuros a partir da previsão da evolução da composição da carteira de activos associada às responsabilidades, dado o seu papel central na explicação do comportamento da participação nos resultados. Note-se que no âmbito da metodologia anterior, os resultados financeiros foram estimados com base na modelação de um conjunto de variáveis económicas que revelaram um elevado poder explicativo sobre este comportamento, partindo das observações dos pesos destes mesmos resultados nas provisões matemáticas constituídas.

Esta segunda abordagem tem, por conseguinte, como fundo a estimação dos resultados financeiros futuros, que a empresa de seguros poderá obter com a gestão da carteira de activos representativa das responsabilidades decorrentes dos contratos em vigor. Para o efeito, é necessário considerar a evolução do preço dos activos que a compõem, bem como as possíveis alterações da sua composição ao longo do tempo. Procura igualmente

ter-se em conta os custos de transacção a suportar e a verificação das principais condições de *matching* entre os activos e as responsabilidades.

Esta metodologia é integrada numa análise de diferentes cenários económicos. Em Consiglio, Cocco e Zenios (2001) segue-se uma abordagem relativamente semelhante, com o objectivo de traçar uma estratégia de investimento óptima que permita a cobertura das responsabilidades com contratos de seguro similares.

O facto da Metodologia 2 ter em conta a evolução do portfólio representativo das responsabilidades permite reproduzir, pelo menos em termos aproximados, uma avaliação consistente com o mercado, já que se tornará possível conhecer, em cada momento do horizonte previsional, a composição desse portfólio. Tal como se irá explicar em 7.3, o cálculo dos resultados financeiros é efectuado a partir de medidas de risco reais; no entanto, as hipóteses que se estabelecem para a projecção permitirão deduzir as medidas de risco neutrais subjacentes, que serão utilizadas para estabelecer a ponte para uma avaliação *market-consistent* da participação nos resultados.

O ponto de partida é o modelo geral de avaliação dos resultados financeiros da carteira, seguindo-se explicações mais específicas associadas ao método, nomeadamente sobre a projecção do preço dos activos e a construção dos cenários a analisar.

## 7.2. Modelação dos Resultados Financeiros

Os resultados financeiros realizados num dado período resultam da soma algébrica das seguintes parcelas: o saldo de ganhos e perdas decorrentes da alienação de activos,  $F_t$ , os rendimentos vencidos,  $J_t$ , e os custos de gestão dos investimentos,  $CG_t$ , ou seja,

$$RF_t = F_t + J_t - CG_t. \quad (7.2.1)$$

Antes de se proceder à apresentação das formas de estimação destes resultados, importa referir que a carteira de activos representativa das responsabilidades com os contratos

abrangidos por este estudo é essencialmente constituída por obrigações (públicas e privadas), pelo que a presente análise incidirá apenas sobre este tipo de activos. Note-se, contudo, que a exposição pode ser adaptada a uma carteira com composição diferente.

Naturalmente, as diferentes parcelas dos resultados financeiros que vão ser consideradas dependem directamente da gestão da carteira, ao longo do horizonte de projecção considerado. Para reflectir as acções de gestão aqui subjacentes, assume-se que, no fim de cada mês, a empresa de seguros poderá alterar a composição da sua carteira, tendo em consideração as expectativas de evolução dos preços dos activos. A opção pela periodicidade mensal resulta da necessidade de equilibrar a aderência à realidade com a exequibilidade prática do método.

Deste modo, será necessário calcular o valor da carteira no fim de cada mês, a fim de se apurar os recursos financeiros disponíveis para (re)investimento. Para o efeito, pode-se assumir que a entrada e saída de *cash-flows* ocorre uniformemente em cada ano, ou seja, uma vez calculados os valores dos prémios, custos com sinistros, valores de resgate e despesas de exploração dos contratos para o ano em causa, considera-se que o que foi encaixado em cada mês corresponde ao saldo que daqui resulta dividido por 12. Para além dos *cash-flows* referidos, há que considerar os rendimentos mensais auferidos pela detenção dos activos,  $j_t$ , e o pagamento de despesas de gestão dos investimentos,  $g_{1t}$ .

Tal como se referiu, para se poder prever a evolução futura do valor da carteira é requerida a projecção dos preços dos activos, aspecto que será aprofundado adiante. No caso das obrigações, a série dos preços depende da estrutura das taxas de juro conhecidas à data, a partir da qual se derivam as taxas *forward*. No problema em causa, é necessário efectuar a previsão do preço das várias obrigações, para diferentes maturidades, ao longo do tempo, tendo-se por conseguinte uma série para cada maturidade.

Represente-se o preço de uma obrigação  $j$  de cupão  $c_j$ , com  $c_j \geq 0$  no momento  $t$ , e com maturidade  $T_k$ , por  $P_j(t, T_k)$ . Então o vector  $S_0$  dos preços de cada obrigação no momento inicial poderá ser escrito da seguinte forma, admitindo que na carteira há  $n$  tipos de obrigações:

$$S_0^T = [P_1(0,1), P_1(0,2), \dots, P_1(0, T_1) : \dots : P_j(0,1), P_j(0,2), \dots, P_j(0, T_j) : \dots : P_n(0,1), P_n(0,2), \dots, P_n(0, T_n)]^T$$

A estrutura escolhida para o vector dos preços resulta da separação das obrigações por blocos, em que cada bloco respeita a uma entidade ou grupo de entidades emittentes e, dentro de cada bloco, há uma ordenação crescente das obrigações por maturidades, em que cada uma destas se encontra associada a um cupão representativo do conjunto de obrigações.

Relativamente ao vector  $x_t$  das quantidades de obrigações de cada modalidade detidas, este deverá apresentar exactamente a mesma estrutura. Define-se então  $x_t$  como:

$$x_t = [x_{t,1}(1), x_{t,1}(2), \dots, x_{t,1}(T_1) | \dots | x_{t,j}(1), x_{t,j}(2), \dots, x_{t,j}(T_j) | \dots | x_{t,n}(1), x_{t,n}(2), \dots, x_{t,n}(T_n)].$$

Cada elemento  $x_{t,j}(k)$  representa o número de obrigações do tipo  $j$  detidas em  $t$ , que maturam  $k$  períodos depois (portanto, com referência ao momento 0, maturam em  $t + k$ ).

Como forma de se conseguir captar possíveis escolhas futuras decorrentes de futuras emissões, deverá modificar-se a estrutura de maturidades em cada período, tendo igualmente em conta as possibilidades que deixam de ser admissíveis pela via dos vencimentos das obrigações no decurso do tempo. Mais especificamente, num dado período, deixam de ser consideradas as obrigações que se venceram no decorrer do mesmo, ou seja, as que verificaram  $k = 0$  e, por outro lado, passa-se a considerar as novas obrigações que são emitidas durante esse horizonte temporal. Pode admitir-se que

o preço destas novas obrigações corresponde ao das restantes obrigações em carteira, com as mesmas características, tal como a data de vencimento e o tipo de emitente. Refira-se ainda que a maior maturidade possível associada às novas emissões é  $T_j$ .

Posto isto, apresenta-se a composição genérica do vector dos preços no momento em que se reestrutura a carteira,  $S_t^+$ .

$$S_t^{+T} = [P_1(t, 1+t), \dots, P_1(t, T_1+t) : \dots : P_j(t, 1+t), \dots, P_j(t, T_j+t) : \dots : P_n(t, 1+t), \dots, P_n(t, T_n+t)]^T.$$

Convencionou-se, assim, que a dimensão de  $S_t^+$ ,  $\forall t$ , é a de  $S_0$ , não dependendo de  $t$ , sendo:  $\sum_{j=1}^n T_j$ . Para simplificar a notação, cada elemento deste vector pode ser designado apenas por  $S_{t,j}^+(k)$  em que  $k$  se define da mesma forma que em  $x_{t,j}(k)$ .

A conveniência de se utilizar esta notação encontra-se na maior facilidade de distinção do vector dos preços das obrigações em carteira no fim do período  $t$ , antes de se efectuar a actualização do vector, para efeitos de tomada de decisão no que respeita à nova composição da carteira.

Importa definir um novo vector,  $S_t^-$  cuja diferença em relação a  $S_t^+$  se traduz no facto do primeiro conter os valores de reembolso das obrigações que então se vencem, e não incluir as novas obrigações disponíveis para compra.  $S_t^-$  corresponde então a:

$$S_t^{-T} = [P_1(t, 1+(t-1)), \dots, P_1(t, T_1+(t-1)) : \dots : \dots : P_n(t, 1+(t-1)), \dots, P_n(t, T_n+(t-1))]^T$$

Se designarmos por  $V_t^-$  o valor da carteira no fim do mês  $t$ , imediatamente antes de se proceder à reestruturação da sua composição, e considerarmos as variáveis relativas ao ano completo com o índice  $t'$ , pode escrever-se

$$V_t^- = x_{t-1} S_t^- + \frac{P_{t'} - CS_{t'} - R_{t'} - E_{t'}}{12} + j_t - g_{1t} \quad 0 \leq t' \leq T, 0 \leq t \leq 12T. \quad (7.2.2)$$

Este valor é incluído na restrição orçamental em  $t$ , quando se passa à determinação do vector óptimo das quantidades a investir em cada uma das obrigações,  $x_t^*$ ; o objectivo é maximizar a rendibilidade esperada para o mês seguinte, atendendo também aos custos de transacção gerados no processo.

Antes de se proceder à apresentação do problema de optimização, importa explicar como serão calculados os *cash-flows* financeiros relativos ao mês  $t$ , ou seja,  $j_t$  e  $g_{1t}$ .

A variável  $j_t$  corresponde à soma dos cupões vencidos das obrigações detidas no período analisado, expressas nas quantidades  $x_{t-1}$ . Para se poder proceder a este cálculo, é necessário conhecer as taxas de cupão associadas a cada conjunto de obrigações consideradas na carteira, bem como os respectivos valores nominais.

Defina-se, então, a matriz diagonal dos cupões,  $Cp_t$ , e o vector coluna que contém os valores nominais,  $VN_t$ , cuja estrutura é idêntica à do vector  $S_t^-$ , onde os respectivos elementos  $c_{t,j}(k)$  e  $VN_{t,j}(k)$  representam o cupão e o valor nominal associados às obrigações do tipo  $j$  detidas em  $t$ , que se vencem  $k$  períodos depois.

Uma forma de simplificar este problema será assumir taxas de cupão e valores nominais representativos de cada obrigação (por exemplo, considerar os respectivos valores médios), o que não implica uma aproximação demasiado grosseira.

É possível obter a seguinte aproximação para o valor dos juros pagos em cada mês,  $j_t$ :

$$\hat{j}_t = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{T_j} c_{t,j}(k) x_{t-1,j}(k) VN_{t,j}(k). \quad (7.2.3)$$

No final do ano, apura-se:

$$\hat{J}_t = \sum_{t=1}^{12} \hat{j}_t. \quad (7.2.4)$$

Refira-se que quer os elementos de  $Cp_t$ , quer os de  $VN_t$  irão variar em função de  $t$ , ou seja, em função das entradas e saídas de obrigações na carteira; no entanto, dado o tipo de cálculos, pode assumir-se que os mesmos são representados pelos respectivos valores médios observados à data de avaliação. No que se refere à frequência de pagamento dos cupões, poder-se-á estabelecer uma proporcionalidade, de forma a estimar o cupão mensal equivalente ao real, introduzindo-se este resultado em  $Cp_t$ .

A outra componente financeira,  $g_{1t}$ , é obtida através da aplicação de uma taxa,  $g_1$ , incidente sobre o valor da carteira, respeitando na sua maioria a comissões de gestão. Para determinar este valor em cada mês, consideram-se as quantidades investidas e uma estimativa do preço médio observado em cada período, isto é,

$$g_{1t} = g_1 x_{t-1} \frac{S_{t+1}^- + S_t^+}{2}. \quad (7.2.5)$$

Para além da restrição orçamental, existem duas condições que deverão ser satisfeitas, como forma de se assegurar que qualquer decisão de reestruturação da carteira que se possa tomar não compromete o *matching* entre activos e passivos, ou seja, a duração e a convexidade associadas a ambas as componentes devem manter as condições necessárias para tal.

Deste modo, definam-se as matrizes diagonais que contêm as durações e convexidades das obrigações, respectivamente,  $D_{a,t,j}$  e  $C_{a,t,j}$ . A duração e a convexidade das responsabilidades, expressas por  $BE_t$ , irão diminuir ao longo do tempo, pelo que deverão ser recalculadas em cada mês, tal como se explica adiante. Estas últimas variáveis serão designadas, respectivamente, por  $D_{l,t}$  e  $C_{l,t}$ .

Antes de se proceder à apresentação do problema de optimização a resolver no fim de cada mês, impõe-se uma breve explicação de como se poderá considerar a inclusão da

cobrança de custos de transacção sobre as compras e vendas de activos, assumindo-se que os mesmos resultam de uma percentagem fixa, incidente sobre o valor dos novos investimentos.

Uma forma simples de se ultrapassar este problema é definir o vector das variáveis de decisão em três blocos: o primeiro coincidente com o próprio vector  $x_t$  e os seguintes, exactamente da mesma dimensão, respeitando às quantidades adquiridas e alienadas. Formalmente, defina-se o vector das variáveis de decisão por  $x_t^o$ , vindo:

$$x_t^o = [x_t \quad x_t^b \quad x_t^s]$$

onde,

$x_t^b$  = Vector das quantidades adquiridas no período  $t$ ;

$x_t^s$  = Vector das quantidades vendidas no período  $t$ .

A formalização do problema exige que se definam novos vectores para os preços dos activos com o triplo da dimensão de  $S_t^-$  e  $S_t^+$ , em que cada um dos três blocos que os compõem são idênticos a cada um destes últimos vectores. Estes novos vectores designam-se por  $S_t^{o-}$  e  $S_t^{o+}$ .

É ainda necessário definir o vector  $x_t^{-o}$  que contém as quantidades de obrigações detidas em  $t - 1$ , cujo vencimento ainda não se deu no período  $t$ , com elemento genérico dado por:

$$x_{t,j}^{-o}(k) = \begin{cases} x_{t-1,j}^o(k+1), & \text{se } k \neq T_j \\ 0, & \text{se } k = T_j \end{cases}$$

Seguidamente, apresenta-se o problema de optimização que será necessário resolver no fim de cada mês; como se referiu. A função objectivo é dada pela estimativa da rendibilidade mensal,  $Rm_t$ , que deve ser maximizada.

$$\text{Max } Rm_t = I_1 x_t^o (S_{t+1}^{o-} - S_t^{o+})$$

$$x_t^o$$

s. a:

$$I_1 x_t^o S_t^{o+} \leq I_1 x_{t-1}^o S_t^{o-} + \frac{P_{t'} - CS_{t'} - R_{t'} - E_{t'}}{12} + j_t - g_{1t} - g_2 I_2 x_t^o S_t^{o+}$$

$$\frac{1}{x_t^o v_1} I_1 x_t^o D_{at} S_t^{o+} = D_{lt} B E_t$$

$$\frac{1}{x_t^o v_1} I_1 x_t^o C_{at} S_t^{o+} \geq C_{lt} B E_t \quad \text{iii)}$$

$$I_1 x_t^o = I_1 x_t^{-o} + I_3 x_t^o \quad \text{iv)}$$

$$k_{1,j} \leq \frac{x_{t,j}}{x_t^o v_1} \leq k_{2,j} \quad \text{v)}$$

$$t = 1, 2, \dots, 12T$$

Como facilmente se verifica,  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  são matrizes diagonais de ordem  $3n$  tais que: em  $I_1$  apenas os  $n$  primeiros elementos da diagonal são não nulos e iguais a 1; em  $I_2$  são os últimos  $2n$  que são não nulos e iguais a 1; quanto a  $I_3$ , os  $n$  primeiros elementos da diagonal são nulos, os  $n$  seguintes são iguais a -1 e os  $n$  restantes são iguais a 1. Por sua vez,  $v_1$  define-se como um vector linha de dimensão  $3n$  cujos elementos coincidem com a diagonal de  $I_1$ .

Assim, tem-se:

- a restrição orçamental, *i*);
- duas restrições destinadas a assegurar o *matching* entre activos e passivos, *ii*) e *iii*);
- um conjunto de relações entre as quantidades adquiridas finais e as compras e vendas de activos no fim de cada período, representadas por *iv*); estas relações são introduzidas em consequência da forma como o problema foi construído, no que diz respeito à inclusão dos custos de transacção.

— finalmente, as restrições de risco para cada tipo de activo a fim de limitar as proporções investidas em cada um destes, em  $v$ ).

As últimas restrições têm como finalidade, por um lado, penalizar o investimento em activos que comportam um maior risco para a carteira e, por outro, assegurar que a solução deste problema será suficientemente realista. Isto faz-se por intermédio dos parâmetros (proporções)  $k_{1,j}$  e  $k_{2,j}$ , fixados tendo em conta que não foram observadas alterações muito significativas na evolução da estrutura da carteira de mercado representativa das responsabilidades com o tipo de contrato em estudo.

No que se refere aos custos de transacção inseridos no problema, salienta-se o facto de  $g_2$  corresponder a uma taxa inferior à verdadeira taxa cobrada por cada transacção efectuada, sob pena de se dar a duplicação de custos, já que se assume que uma venda pode dar logo lugar a uma compra e vice-versa, o que para o efeito consiste em apenas uma operação.

Como se pode concluir, este problema pressupõe que é possível prever a evolução futura dos preços dos activos disponíveis para investimento. Isto implica que é necessário efectuar essa previsão *a priori*, sendo os resultados dados como *input*.

Para o efeito, optou-se por não considerar apenas uma estimativa do valor esperado dos preços de cada um dos activos, e sim um conjunto de cenários representativos do comportamento futuro desses preços, em diferentes condições, resolvendo-se depois o problema de optimização em causa, para cada um dos cenários estabelecidos, ao longo de todo o horizonte temporal.

Por conseguinte, a restrição orçamental será diferente consoante o cenário tratado e, para além disto, a restrição de risco poderá igualmente variar, devendo reflectir, o melhor possível, as acções de gestão que a empresa de seguros poderá levar a cabo em

cada um destes. Por exemplo, num cenário caracterizado por uma tendência de decrescimento acentuada do preço de um determinado activo, será de esperar que a empresa tenda a reduzir progressivamente a sua posição no mesmo, passando a impor-se um limite inferior mais baixo que os limites estabelecidos para cenários mais optimistas.

Deste modo, poder-se-á encontrar a solução óptima, para cada mês analisado, caso exista, criando-se novamente as condições para a resolução dos problemas de optimização subsequentes, os quais se encontrarão associados ao mês seguinte,  $t + 1$ . Para tal, terá de se substituir, na restrição orçamental do problema,  $x_{t-1}$  por  $x_t^*$ . E assim se percorre todo o horizonte, para cada um dos cenários.

Retomando o cálculo de  $RF_t$ , apresenta-se de seguida a forma como se poderá calcular cada uma das suas parcelas, dispondo dos resultados dados pela resolução dos problemas de optimização respeitantes a cada ano futuro.

Em primeiro lugar,  $F_t$  resulta da adição dos resultados com a venda de obrigações obtidos ao longo de cada mês,  $f_t$ . Para se efectuar este cálculo, tem de se considerar as obrigações cuja variação, em quantidade, foi negativa, de forma a captar as quantidades vendidas. Logicamente que na referida variação se encontram excluídas as obrigações vencidas, o que se torna bastante fácil de garantir, dada a forma de construção de  $x_t$ . Note-se que uma alternativa possível seria retirar directamente esta informação a partir de  $x_t^S$ , mas por conveniência dos cálculos seguintes, não se segue esta via.

Assim, considere-se o vector que contém o número de obrigações transaccionadas em cada período,  $x_t^{aq}$ , com estrutura idêntica a  $x_t$ , em que cada elemento resulta da seguinte fórmula:

$$x_{t,j}^{aq}(k) = \begin{cases} x_{t,j}(k) - x_{t-1,j}(k+1), & \text{se } k \neq T_j \\ x_{t,j}(k), & \text{se } k = T_j \end{cases} \quad (7.2.6)$$

Uma vez construído este último vector, é possível obter directamente as quantidades adquiridas e vendidas: as primeiras coincidem com os elementos de sinal positivo e as vendas com os elementos de sinal negativo.

Posto isto,  $f_t$  pode ser determinado como o produto entre as quantidades vendidas e o resultado unitário associado:

$$\hat{f}_t = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{T_j-1} \text{Max}\{-x_{t,j}^{aq}(k), 0\}(S_{t,j}^+(k) - S_{t,j}^{aq}(k)), \quad (7.2.7)$$

onde  $S_{t,j}^{aq}$ , que tem a mesma estrutura de  $S_{t,j}^+$ , traduz o valor de aquisição dos activos vendidos, calculado de forma exacta ou aproximada, em cada período. Tem-se, por fim,

$$\hat{F}_t = \sum_{t=1}^{12} \hat{f}_t. \quad (7.2.8)$$

No caso de não se dispor de informação relativa aos valores de aquisição históricos, serão assumidas hipóteses simplificadoras para a determinação dos mesmos, na base mais realista possível. Assim, para se obter  $f_t$  é necessário separar este cálculo em duas parcelas: uma respeitante às aquisições anteriores ao período de projecção dos resultados e outra associada a todas as aquisições previstas neste período.

Considere-se o vector dos preços médios de aquisição para os activos que compõem a carteira no fim do primeiro período,  $S_1^{aq}$ , ou seja, excluindo tanto as obrigações entretanto vencidas e as novas emissões, entretanto realizadas.

Começando por analisar este primeiro período de optimização, determina-se  $x_1^{aq}$ . Para os elementos deste vector com sinal negativo, ou seja, para  $x_{1,j}^{aq}(k < 0)$ , calcula-se

$|x_{1,j}^{aa}(k)|(S_{1,j}^+(k) - S_{1,j}^{aa}(k))$ , agregando-se todas as parcelas que advêm da verificação da condição. Relativamente aos elementos de sinal positivo, embora não se trate de parcelas a considerar para o apuramento deste resultado, constituem informação relevante para possíveis futuras alienações dos activos a que respeitam, pelo que se determina, neste caso, o novo valor de aquisição, que irá ser considerado, caso se dê a venda deste activo no período seguinte, ou seja,

$$S_{t,j}^{aa}(k) = \begin{cases} \frac{x_{t,j}^{aa}(k)}{x_{t-1,j}(k+1) + x_{t,j}^{aa}(k)} S_{t,j}^+(k) + \frac{x_{t-1,j}(k+1)}{x_{t-1,j}(k+1) + x_{t,j}^{aa}(k)} S_{t-1,j}^{aa}(k+1), & \text{se } k \neq T_j \\ S_{t,j}^+(k), & \text{se } k = T_j \end{cases}$$

mantendo-se este processo nos períodos seguintes.

Apresenta-se de seguida o esquema geral de cálculo de  $F_t$ .

**Passo 1:** Na iteração  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, 12$ ), calcular  $x_{i,j}^{aa}$

Para  $j = 1, 2, \dots, n$ ,

Para  $k = 1, 2, \dots, T_j$

Calcular  $S_{i,j}^{aa}(k)$

Se  $x_{i,j}^{aa}(k) < 0 \Rightarrow f_{i,j}(k) = |x_{i,j}^{aa}(k)|(S_{i,j}^+(k) - S_{i,j}^{aa}(k))$

Fazer  $i = i + 1$

**Passo 2:** Se  $i \leq 12$ , voltar ao **Passo 1**

C. c. calcular  $\hat{F}_t = \sum_{i,j,k} f_{i,j}(k)$

Uma vez aplicado este processo para o primeiro ano, parte-se do valor de  $S_{13,j}^{aa}$  para o ano seguinte, dado como *output* neste processo, substituindo-o em  $S_{1,j}^{aa}$ , e assim sucessivamente.

Por sua vez, os custos totais de gestão dos investimentos para o ano  $t$ ,  $CG_t$ , são dados pelos custos incorridos em cada um dos meses a que respeita, ou seja,

$$\widehat{CG}_t = \sum_{j=1}^{12} \left( g_{1j} + g_2 \left( \frac{\sum_{k=1}^{T_j-1} |x_{t,j}(k) - x_{t-1,j}(k+1)| S_{t,j}^+(k) + x_{t,j}(T_j) S_{t,j}^+(k)}{2} \right) \right). \quad (7.2.9)$$

No que se refere ao valor dos juros, assume-se que no primeiro ano estes são conhecidos, sendo necessário assumir os cupões associados às futuras emissões; pode manter-se uma estrutura semelhante à inicial ou, no caso de se optar por assumir um cupão médio, este pressuposto deverá ser mantido, na ausência de informação que conduza à fixação de uma hipótese diferente. A fórmula de cálculo desta componente é idêntica a (7.2.3).

Por último, o saldo de mais e menos valias não realizadas de investimentos, designadas anteriormente por  $MMV_t$ , pode ser decomposto em duas parcelas: a primeira resultante da variação do preço dos activos que se mantiveram em carteira entre o início e o fim do ano em relação ao qual os resultados são calculados, e a segunda respeitante à diferença entre o preço, no final do ano, dos activos adquiridos ao longo deste e o respectivo valor de aquisição. No que toca a esta última componente, é importante salientar que, no caso de se dar a compra de novas obrigações no fim do último mês do ano de avaliação, esta terá de ser excluída da análise, dado tratar-se de investimentos que ainda não geraram ajustamento de justo valor.

Deste modo, é necessário calcular, numa primeira fase, o vector que contém as quantidades de activos que se mantiveram em carteira entre o início e o fim do ano  $t'$ ,  $x_{t'}^m$ . Este vector poderá ser expresso pelo valor mínimo entre  $x_{12t'}$  e os elementos de  $x_{12(t'-1)}$  que não se venderam durante este mesmo ano. Mais especificamente, se

$x_{12t',j}(k) \geq x_{12(t'-1),j}(k + 12)$ , tal significa que, para além dos investimentos na obrigação  $j$  que já se encontravam realizados no início do ano, se efectuaram novos investimentos na mesma, devendo, neste âmbito, considerar-se apenas as quantidades existentes no início do ano. Caso contrário, se  $x_{12t',j}(k) < x_{12(t'-1),j}(k + 12)$ , significa que houve uma redução do investimento nas obrigações em causa. Neste caso, apenas são relevantes as quantidades existentes no final do ano, devendo calcular-se

$$x_{12t',j}^m(k) = \text{Min} \{x_{12t',j}(k); x_{12(t'-1),j}(k + 12)\}, \quad 1 \leq k \leq T_j - 12.$$

Posto isto, é possível calcular o valor da primeira componente,  $MV_{1t'}$ , de  $MMV_{t'}$ :

$$\widehat{MV}_{1t'} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{T_j-12} x_{t',j}^m(k) (S_{12t'}^+(k) - S_{12(t'-1)}^+(k + 12)). \quad (7.2.10)$$

O cálculo da segunda componente é mais complexo, uma vez que exige a análise das transacções efectuadas durante o ano, pelo que aqui, para além de se enquadrar o caso em que  $x_{12t',j}(k) > x_{12(t'-1),j}(k + 12)$ , há que se considerar as aquisições das novas emissões de obrigações ao longo do ano, exceptuando as que foram compradas no último mês, pelo motivo já referido. Considere-se novamente o vector das quantidades adquiridas calculado agora com as quantidades em carteira no fim do ano, em relação às existentes no início deste,  $x_{t'}^{aq-total}$ , com elemento genérico:

$$x_{12t',j}^{aq-total}(k) = \begin{cases} \text{Max} \{x_{12t',j}(k) - x_{12(t'-1),j}(k + 12), 0\}, & \text{se } 1 \leq k \leq T_j - 12 \\ x_{12t',j}(k), & \text{se } k \geq T_j - 12 \end{cases}.$$

Para além disto, é necessário conhecer os preços de aquisição subjacentes aos investimentos, pelo que se terá de aferir exactamente quais os momentos em que ocorreram as aquisições, o que neste caso se refere aos finais dos 11 meses anteriores.

Conhecendo as quantidades adquiridas, calcula-se um vector auxiliar, referente aos últimos dois meses do ano, com elemento genérico:

$$v_{12t',j}^0(k) = \begin{cases} \text{Max}\{x_{12t',j}(k) - x_{12t'-1,j}(k+1), 0\}, & \text{se } k \neq T_j \\ x_{12t',j}(k), & \text{se } k = T_j \end{cases}$$

Os resultados obtidos consistem nas quantidades adquiridas no fim do último ano, as quais têm de ser retiradas do vector  $x_{t'}^{aq\_total}$ , de forma a obter apenas as quantidades adquiridas que são relevantes para o cálculo pretendido, o vector  $x_{12t'}^{aq(MV),0}$ . Cada elemento deste vector calcula-se de acordo com a fórmula:

$$x_{12t',j}^{aq(MV),0}(k) = \text{Max}\{x_{12t',j}^{aq\_total}(k) - v_{12t',j}^0(k), 0\}.$$

Posto isto, calcula-se novamente  $v_{12t',j}^i(k)$ , para cada  $k, i = 1, 2, \dots, 11$ . O seu elemento genérico é

$$v_{12t',j}^i(k) = \begin{cases} 0, & \text{se } k \leq i \\ \text{Max}\{x_{(12-i)t',j}(k) - x_{(12-i-1)t',j}(k+i), 0\}, & \text{se } i < k < T_j, \\ x_{(12-i)t',j}(k), & \text{se } k = T_j \end{cases}$$

e é necessário identificar quais as componentes que têm valores positivos. Nestes casos, testa-se se os valores em causa não são inferiores aos elementos de  $x_{12t',j}^{aq(MV),0}$  a que se referem. Se isto se verificar, encontra-se determinado o momento de aquisição dos activos associados (neste caso estar-se-ia presente uma única aquisição), sendo possível estimar o preço de aquisição nesse mesmo momento e, logo, a mais ou menos valia emergente, ou seja,  $x_{12t',j}^{aq(MV),0}(k)(S_{12t',j}^+(k-1) - S_{(12-1)t',j}^+(k))$ .

Caso contrário, existem pelo menos dois momentos no ano em que se deram aquisições do activo, pelo que apenas será possível determinar uma parte da mais ou menos valia

subjacente, dada pelo produto entre o correspondente elemento do vector auxiliar e a diferença de preços representada.

Independentemente do resultado deste teste, para cada  $i$ , terá de se retirar a  $x_{12t',j}^{aq(MV),i}$  as quantidades adquiridas que já foram detectadas, sendo possível aplicar um procedimento idêntico para os meses antecessores, vindo,

$$x_{12t',j}^{aq(MV),i}(k) = \text{Max} \left\{ x_{12t',j}^{aq_{total}}(k) - \sum_{p=0}^i v_{12t',j}^p(k), 0 \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, 11.$$

Seguidamente resume-se o algoritmo explicado.

**Passo 1:** Calcular  $x_{12t',j}^{aq_{total}}$  e  $x_{12t'}^{aq(MV),0}$ .

**Passo 2:** Na iteração  $i$ , calcular  $v_{12t',j}^i$  para  $i = 1, 2, \dots, 11$

Para  $j = 1, 2, \dots, n$

Para  $k = 1, 2, \dots, T_j$

Se  $v_{12t',j}^i(k) \geq x_{12t',j}^{aq(MV),i-1}(k)$

$$MV_{i,j}(k) = x_{12t',j}^{aq(MV),i-1}(k) \left( S_{12t',j}^+(k-i) - S_{(12-i-1)t',j}^+(k) \right)$$

$$\text{C. c. } MV_{i,j}(k) = v_{12t',j}^i(k) \left( S_{12t',j}^+(k-i) - S_{(12-i-1)t',j}^+(k) \right).$$

**Passo 3:** Calcular  $MV_i = \sum_{j=1}^n MV_{i,j}$ .

Se  $i < 11$ , ir para o **Passo 4**.

Se  $i = 11$ , ir para o **Passo 5**.

**Passo 4:** Se  $i < 11$ , calcular  $x_{12t',j}^{aq(MV),i}$ .

Fazer  $i = i + 1$  e voltar ao **Passo 2**.

**Passo 5:** Calcular  $MV_{2_{t'}} = \sum_{i=1}^{11} MV_i$ .

Finalmente, a fórmula de cálculo do saldo global de mais e menos valias para o ano  $t'$  é dado por:

$$MMV_{t'} = MV_{1_{t'}} + MV_{2_{t'}}. \quad (7.2.11)$$

### 7.3. Cálculo da Participação nos Resultados Futura

Apresentam-se de seguida as etapas a percorrer para se determinar o valor da participação nos resultados futura, recorrendo à aplicação do método descrito.

Assumindo que são conhecidos os comportamentos futuros das principais variáveis, no âmbito de um determinado cenário económico, de tal forma que seja possível determinar o valor dos principais *cash-flows* relativos à carteira de contratos (sem considerar, por agora, o efeito da participação nos resultados a distribuir no futuro), é possível estabelecer a restrição orçamental para o primeiro problema de optimização. Para além disto, é possível calcular as durações e convexidades correspondente a cada conjunto de activos – assim como às responsabilidades futuras, que no primeiro ano correspondem a  $BE_1$ .

Deste modo, é possível identificar e resolver o primeiro problema de optimização. A resolução é relativamente simples uma vez que se insere no domínio da programação linear, podendo aplicar-se o algoritmo do *Simplex*.

Uma vez obtida a solução para o primeiro problema, o problema a resolver no período seguinte fica automaticamente identificado, tendo em conta as alterações que é necessário efectuar, nomeadamente o recálculo das durações e convexidades, e assim sucessivamente, até ao momento em que se dá o apuramento da participação nos resultados do primeiro ano, ou seja, após a resolução dos primeiros 12 problemas. Neste momento, terá de se aplicar o seguinte processo:

1. Apuramento de  $RF_1$  e de  $MMV_1$ ;
2. Cálculo de  $PR_1$ ,  $PPR_{a\_atrib,1}$ ,  $PPR_{atrib,1}$  e  $PRD_1$ ;
3. Somar à participação nos resultados atribuída passada, o valor de  $PRD_1$ ;
4. Calcular  $CS_2$ ,  $R_2$ ,  $P_2$  e  $BE_2$ , tendo em conta a participação nos resultados determinada em 3;
5. Cálculo de  $Dl_{12}$  e  $Cl_{12}$ ;
6. Formalização e resolução do 13.º problema.

O esquema descrito pode ser directamente generalizado para qualquer um dos anos futuros, tendo-se optado por expor o exemplo do primeiro ano para tornar a explicação mais clara.

Para  $t = T$ , para além de se calcular o valor do último montante de participação nos resultados a distribuir no âmbito dos contratos actualmente em vigor ( $PRD_T$ ), é possível determinar, por fim,  $PRD_{Total}$  para o cenário analisado. A forma como se irá proceder, para o caso da presente metodologia, ao desconto de cada um dos valores de  $PRD_t$  deverá ser cuidadosamente escolhida de modo a garantir uma avaliação consistente com a avaliação do mercado.

Com isto, no ponto seguinte definem-se as bases para a projecção dos preços das obrigações e para a dedução da estrutura temporal relativa às taxas de desconto necessárias para determinar o valor de  $PRD_{Total}$ .

#### **7.4. Modelação Estocástica dos Preços das Obrigações e das Taxas de Desconto**

Para se estimar a evolução futura do preço das obrigações irá recorrer-se a um modelo Gaussiano com dois factores. A opção por dois factores em detrimento de apenas um, deve-se ao facto de, em princípio, se conseguir assim um melhor ajustamento para a evolução da curva das taxas de cupão zero. Com efeito, a grande desvantagem de se

optar por um modelo com apenas um factor prende-se com a circunstância de tal implicar que existe uma correlação positiva perfeita entre as taxas em causa, num determinado instante. Atendendo ainda a que a estrutura de covariâncias entre as taxas instantâneas, para o mesmo processo, se mantém inalterada quando se passa da medida de probabilidade real para a medida neutra ao risco, a escolha de um processo com mais do que um factor será aconselhável (ver Brigo e Mercurio, (2001)). No Anexo 1, encontra-se a exposição teórica do modelo. Para um estudo mais aprofundado desta matéria, consultar, por exemplo, a obra referenciada.

As taxas de desconto apropriadas para actualizar as rendibilidades de cada obrigação, ao longo do tempo, numa óptica *market-consistent*, deverão ser geradas a partir da construção dos factores de desconto que permitem assegurar que o valor actual da responsabilidade mensurada sob medidas reais é equivalente ao seu valor actual, se avaliado com base em medidas neutras ao risco. O cálculo de tais factores de desconto – *deflators* – é revestido de alguma complexidade e requer a dedução das medidas de probabilidade neutras ao risco implícitas nos cenários reais, dependendo assim destes últimos e de cada momento do tempo.

Defina-se o processo estocástico em tempo contínuo  $D(t)$ , com  $D(0) = 1$  e  $D(t) > 0$ ,  $0 < t < T$ , de tal modo que o valor de  $PRD_{Total}$  pode ser expresso como:

$$PRD_{Total} = \frac{1}{D(0)} \sum_{t=1}^T (E_P[D(t)PRD_t]) = \sum_{t=1}^T (E_P[D(t)PRD_t]),$$

onde  $P$  é a medida de risco real. Encontra-se aqui implícito o comportamento de uma martingala, ou seja, poder-se-ia considerar o valor de  $PRD_{Total}$  no momento  $t$  como se de um activo financeiro se tratasse, isto é,

$$PRD_{Total,t} = \sum_{s=t+1}^T \left( E_P \left[ \frac{D(s)}{D(t)} PRD_s \right] \right).$$

É assim possível estabelecer uma relação entre estes factores e uma avaliação neutra ao risco (medida  $Q$ ) da seguinte forma:

$$\sum_{s=t+1}^T \left( E_P \left[ \frac{D(s)}{D(t)} PRD_s \right] \right) = \sum_{s=t+1}^T (E_Q[P(t,s)PRD_s]),$$

onde  $P(t,s)$  se encontra calibrado com a estrutura temporal das taxas de juro sem risco.

Designando a probabilidade de subida neutra ao risco associada ao cenário  $i$  por  $q_i$  e a probabilidade real por  $p_i$ , deduz-se facilmente que o o *deflator* para o momento  $t$ ,  $D_i(t)$  é dado por:

$$D_i(t) = \frac{q_i}{p_i} P(0,t)$$

À luz do modelo utilizado para projectar os preços das obrigações, é possível deduzir a medida de probabilidade neutral, que neste caso não se define apenas a partir de uma única probabilidade, mas de três, dada a existência dos 2 factores. Esta medida encontra-se no Anexo 1 (ver demonstração na obra referida acima).

Em termos práticos, terá de se calcular, para cada ano e em cada réplica do processo de simulação dos preços de cada obrigação,  $D_i(t)$ , aferindo-se para cada par  $(i,t)$ , o movimento simulado de subida ou descida dos preços, de forma a ser possível calcular a probabilidade neutral subjacente.

Como a análise que se propõe é realizada por cenários, por fim, quando se optar por considerar uma determinada trajectória de evolução dos preços de cada uma das obrigações, (que será dada como *input* no modelo de avaliação da participação nos resultados, tal como explicado anteriormente) os *deflators* simulados que se associam a cada uma dessas trajectórias serão utilizados para descontar o valor da participação total.

Contudo esta aplicação só se faz de forma directa se o portfólio for constituído por apenas um activo ou for representado por somente um processo de rendibilidades. Como no presente caso se irá utilizar o modelo de taxa de juro referido para extrapolar os preços de mais do que um tipo de obrigações, terá de se calcular, num determinado momento e num determinado cenário, tantos *deflators* quanto o número de activos considerados.

Por conseguinte, o valor dos resultados obtidos em cada cenário para efeitos de atribuição da participação terá de ser decomposto em cada uma das partes que é devida a cada activo existente. Por fim, cada uma destas parcelas de resultados tem de ser descontada aplicando o *deflator* que se lhe encontra associado. Mais especificamente, se existirem  $n$  activos na carteira,  $PRD_{Total}$  pode ser calculada em cada cenário como:

$$PRD_{Total} = \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^n PRD_t^j D^j(t),$$

onde  $PRD_t^j$  traduz a fracção de  $PRD_t$  que advém da rendibilidade gerada pelo activo  $j$  no ano  $t$  e  $D^j(t)$  é o *deflator* correspondente.

Resta acrescentar que  $PRD_t^j$  se poderá determinar da seguinte forma:

$$PRD_t^j = \frac{RF_t^j}{RF_t} PRD_t,$$

atendendo a que  $PRD_t$  resulta do algoritmo exposto em 7.2. e  $PRD_t^j$  pode ser um valor negativo, mesmo que  $PRD_t$  seja não nula; nesse caso, a rendibilidade verificada pelo activo  $j$  é negativa para o período em causa, mas o retorno gerado por outros activos na carteira é suficientemente elevado para não só compensar os resultados negativos mas também para permitir a atribuição de participação nos resultados nesse período.

### **7.5. Construção de Cenários**

A construção dos cenários baseia-se no processo de simulação estocástica abordado na Metodologia 1. Mais especificamente, cada cenário caracteriza-se pelo facto de lhe estar associado uma série de quantis do PIB. Através da mesma, pode estimar-se a evolução futura de cada uma das variáveis macroeconómicas analisadas, o que é efectuado com base na informação da referida série, de acordo com o disposto no Capítulo 4. Posto isto, torna-se possível obter as séries com os valores projectados para as variáveis: taxas de resgate, redução e anulação e peso dos prémios futuros em relação ao capital seguro.

No tocante às taxas de mortalidade, optou-se por considerar os respectivos valores esperados em cada cenário, uma vez que o principal objectivo com a criação dos diferentes cenários é gerar diferentes ambientes económicos, nos quais se pretende estimar a participação nos resultados futura.

Mais uma vez, assumiu-se que existe uma relação positiva entre o PIB e o índice obrigacionista, o que pode ser parcialmente justificado pelo elevado coeficiente de correlação apurado entre as variáveis.

Deste modo, considerou-se que, a um cenário caracterizado por um determinado nível de confiança para o PIB e, logo, para o índice de obrigações, se associa a série estimada do preço das obrigações para o quantil da mesma ordem.

## **Capítulo 8**

### **Aplicação Prática da Metodologia 2**

O primeiro problema que será tratado para que se torne possível a implementação prática desta metodologia consiste na modelação estocástica dos preços das obrigações, já que estas correspondem à esmagadora maioria dos activos representativos das responsabilidades em estudo no trabalho, tal como referido.

#### **8.1. Modelação Estocástica dos Preços das Obrigações**

Para se modelar o preço das obrigações foram constituídos dois grupos de obrigações, o primeiro referente às obrigações do Estado e o segundo composto pelas privadas, no seio da União Europeia. A escolha destes grupos foi suportada com base na informação disponível, pelo facto de as mesmas se tratarem das principais componentes do tipo de carteiras em análise e devido à própria informação existente para efeitos de projecção destes preços. Um maior conhecimento da composição da carteira à data da avaliação e a existência de séries temporais adequadas para a modelação de cada tipo de activo, constituem factores determinantes para um maior refinamento na aplicação desta metodologia.

### **8.1.1. Obrigações dos Estados da União Europeia**

A estrutura de maturidades das obrigações aqui considerada foi extraída do site do BCE, tendo como limite máximo de maturidades 30 anos. O facto de ser desejável dispor de uma maturidade até 40 anos fez com que se procedesse à extrapolação da curva, sendo os detalhes desta projecção dados no Anexo 2.

Uma vez ultrapassado este problema, aplicou-se o Modelo Gaussiano com 2 Factores (ver Anexo 1) para se obter os preços futuros das obrigações e as medidas de risco neutrais subjacentes e os *deflators*, tendo-se por fim seleccionado cinco cenários diferentes (descritos em 8.2).

A escolha dos parâmetros existentes no seio das dinâmicas das taxas de juro, definidos no Anexo 1, foi efectuada com base na aplicação do método dos mínimos quadrados, utilizando a informação histórica disponível, ou seja, escolheram-se os parâmetros que dão origem aos valores médios dados pelo processo, mais próximo dos valores observados. Os valores obtidos encontram-se no Anexo 2.

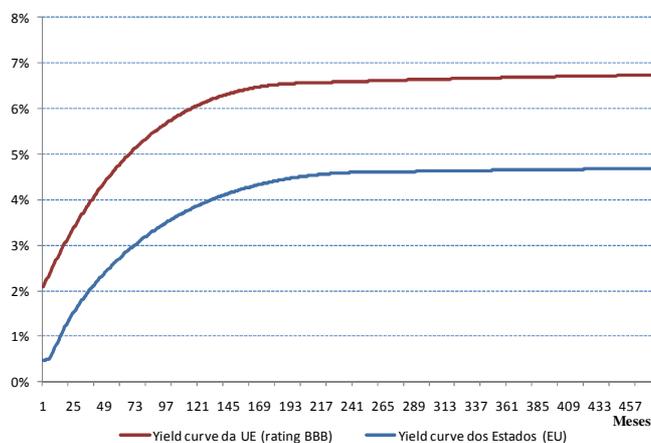
### **8.1.2. Obrigações Privadas da União Europeia**

No que se refere a este conjunto de obrigações, refira-se que a informação utilizada para prever os preços das mesmas correspondeu à série mensal das *yields* disponibilizada no site da Bloomberg. O facto de existirem maturidades para as quais não há informação sobre o valor das *yields* fez com que, em primeiro lugar, se ajustasse o modelo de Svensson para permitir estimar estes dados em falta e, seguidamente, se procedesse a uma extrapolação da curva para maturidades mais alargadas (consultar Anexo 2).

### 8.1.3. Resultados

A projecção de ambas as curvas em análise deu origem aos seguintes resultados:

**Gráfico 62:** *Yield curve* estimada das obrigações dos Estados de *rating* A e das privadas de *rating* BBB da UE.



A baixa volatilidade que se encontra associada a cada ponto destas curvas, cujo método de estimação é igualmente remetido para o Anexo 1, faz com que graficamente não sejam suficientemente perceptíveis as diferenças entre as curvas associadas a cada um dos cenários, daí se ter optado por representar apenas os respectivos valores médios.

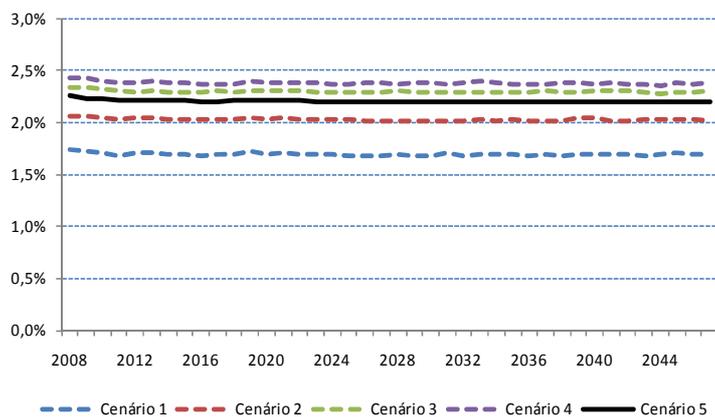
### 8.2. Construção de Cenários

Os cenários económicos que serviram de base à aplicação da presente metodologia foram estabelecidos de acordo com o disposto no Capítulo 4, relativamente à previsão do comportamento futuro de um conjunto de variáveis macroeconómicas, centrada nas séries das taxas de crescimento futuras do PIB. Assim:

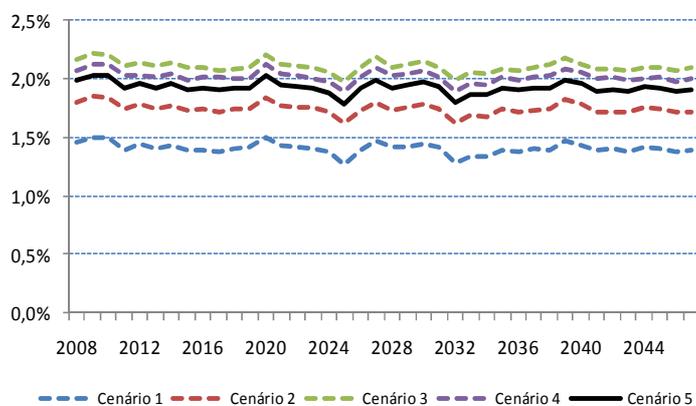
- **Cenário 1:** Quantil de ordem 10%;
- **Cenário 2:** Quantil de ordem 25%;
- **Cenário 3:** Quantil de ordem 75%;
- **Cenário 4:** Quantil de ordem 90%;
- **Cenário 5:** Valor médio.

Nos próximos gráficos encontram-se representados os resultados da previsão das taxas de crescimento do PIB, das restantes variáveis macroeconómicas e das variáveis associadas ao contrato, que dependem das anteriores, para cada um dos cenários estabelecidos.

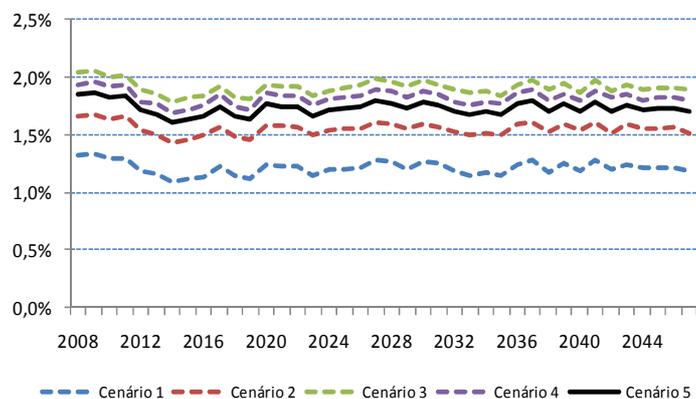
**Gráfico 63:** Evolução futura da taxa de crescimento do PIB, para diferentes cenários.



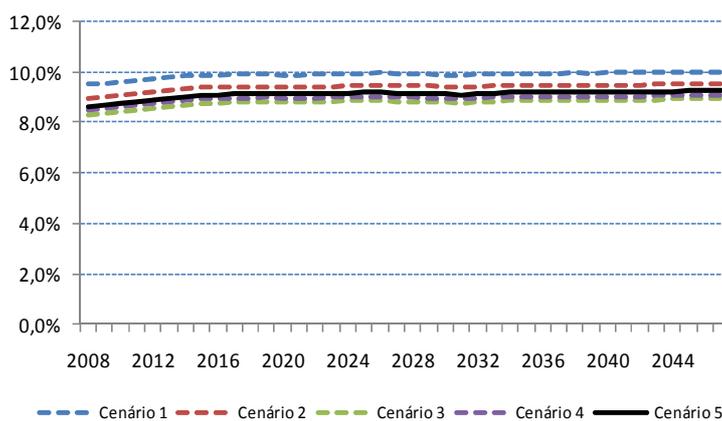
**Gráfico 64:** Evolução futura da taxa de crescimento do consumo privado, para diferentes cenários.



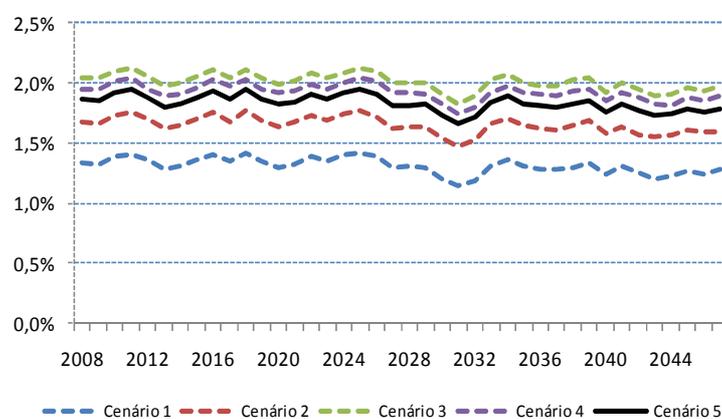
**Gráfico 65:** Evolução futura da taxa de crescimento do consumo público, para diferentes cenários.



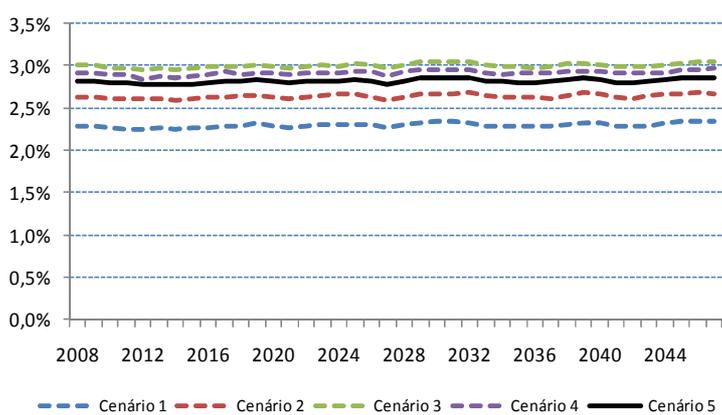
**Gráfico 66:** Evolução futura da taxa de desemprego, para diferentes cenários.



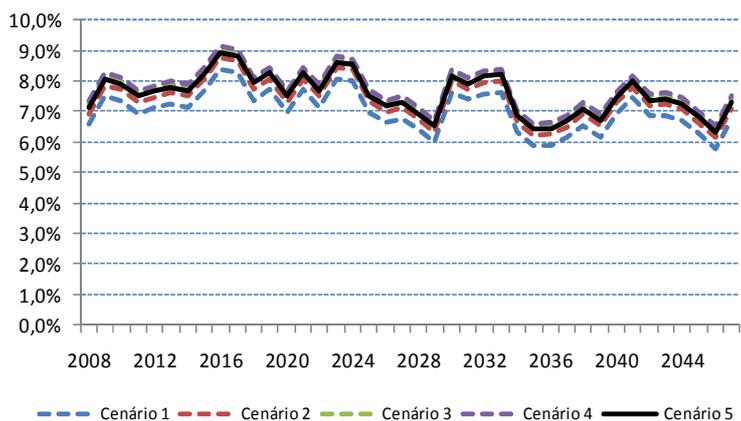
**Gráfico 67:** Evolução futura da taxa de crescimento da procura interna, para diferentes cenários.



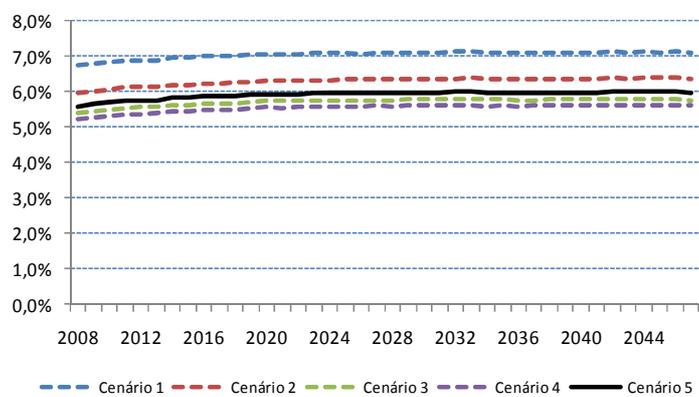
**Gráfico 68:** Evolução futura do OT a 3 meses, para diferentes cenários.



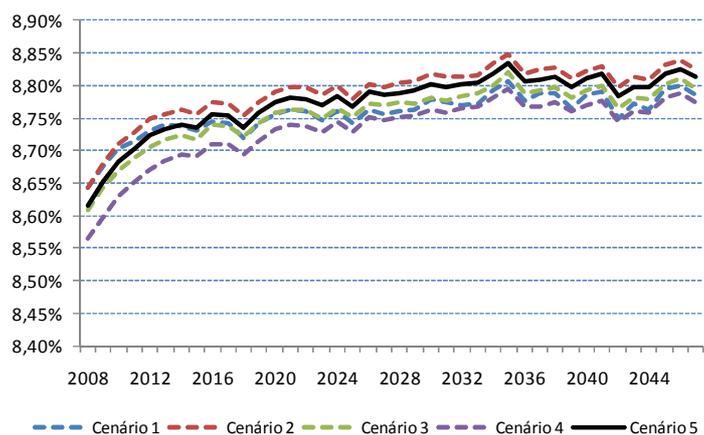
**Gráfico 69:** Evolução futura do BVL, para diferentes cenários.

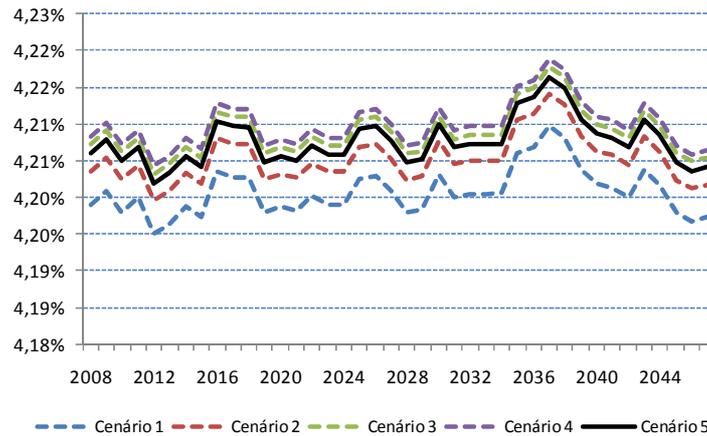


**Gráfico 70:** Evolução futura das taxas de resgate, para diferentes cenários.



**Gráfico 71:** Evolução futura das taxas de resgate, redução e anulação, para diferentes cenários.



**Gráfico 72:** Evolução futura dos prémios em função do capital seguro, para diferentes cenários.

### 8.3. Resultados Finais

Antes de se proceder à apresentação dos resultados, importa referir algumas hipóteses assumidas no que se refere a certos *inputs* do modelo que não são captados pelos cenários criados. Estes dados correspondem aos factores  $c_{t,j}(k)$ ,  $VN_t$ ,  $g_1$ ,  $g_2$  e foram fixados de acordo com a informação histórica. Mais especificamente, estimou-se o cupão anual médio das obrigações da carteira, tendo-se obtido a taxa anual 4,3%, optando-se por fixar  $c_{t,j}(k) = 4\%, \forall t, j, k$ . Quanto a  $VN_t$ , fixou-se o valor em 100 – valor nominal da quase totalidade das obrigações da carteira.

Relativamente a  $g_1$  e  $g_2$ , sabe-se que se referem a custos de gestão de investimentos que, no âmbito da provisão matemática, representam, em média, menos de 1%. Assim, fixou-se este valor para  $g_2$ , mas para  $g_1$  assumiu-se a taxa de 2,5%, de modo a garantir uma maior prudência em termos de custos na avaliação, já que não se tem conhecimento dos verdadeiros valores.

Resta referir os limites impostos às restrições de risco,  $k_{1,j}$  e  $k_{2,j}$ , tendo-se aplicado os mesmos limites em todos os cenários, encontrando-se estes valores na tabela seguinte.

**Tabela 14:** Limites das restrições de risco.

	Estado	Privadas
$k_{1,j}$	20%	60%
$k_{2,j}$	40%	80%

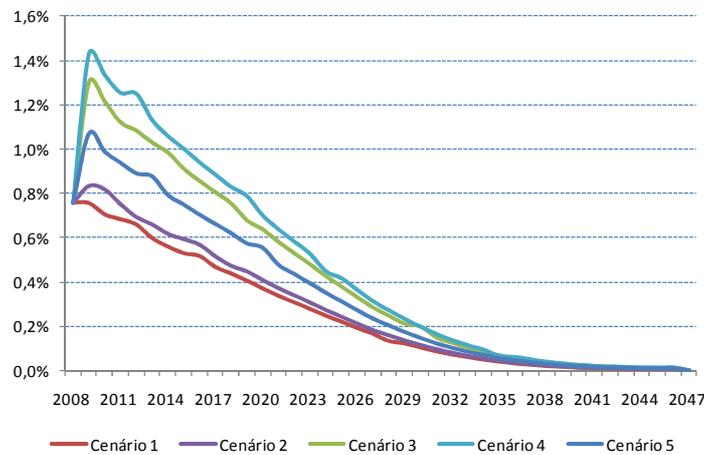
Por último, apresentam-se os resultados da metodologia, para os cinco cenários estabelecidos acima.

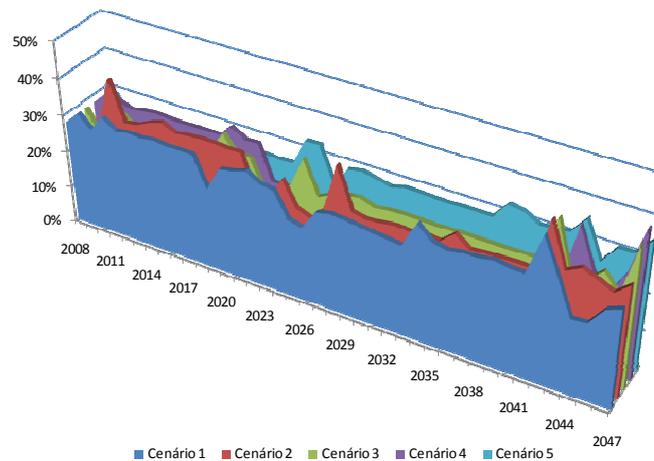
**Tabela 15:** Resultados de  $PRD_{Total}$  em relação à *best estimate*, para os diferentes cenários.

Cenário 1	Cenário 2	Cenário 3	Cenário 4	Cenário 5
10,3%	11,3%	17,7%	19,4%	14,5%

Comparando com os resultados obtidos pela primeira metodologia, verifica-se que as diferenças não são muito significativas.

Nos próximos gráficos representa-se  $PRD_{Total}$  em relação à *best estimate* à data da avaliação, e a evolução da composição da carteira, para os cinco cenários em estudo.

**Gráfico 73:** Resultados da participação nos resultados futura, atribuída anualmente até ao *run-off*, em função de  $BE_1$ .

**Gráfico 74:** Evolução do peso das obrigações privadas na carteira, até ao *run-off*.

Pelo Gráfico 73 é possível concluir que existe uma tendência mais ou menos estável relativamente ao valor da participação a atribuir em cada ano futuro, face a  $BE_1$ . O facto de a carteira ser constituída apenas por obrigações de rendimento fixo contribui decisivamente para a estabilidade dos comportamentos previstos.

O Gráfico 74 revela alguns picos em determinados meses do horizonte previsional, o que se deve à tomada de decisões com base nas rendibilidades mensais. No plano real há uma tendência natural para que as proporções relativas a cada tipo de obrigação sejam mais alisadas, pois as decisões são tomadas sobre um conjunto de factores e um horizonte temporal mais alargados que os considerados na função objectivo de cada problema.

À medida que se passa do Cenário 1 para os restantes, verifica-se que o valor da participação distribuída tende a crescer. Isto deve-se ao facto de se passar para cenários em que o índice obrigacionista (de rendimento fixo) tende a apresentar uma evolução mais positiva, ou seja, as *yields to maturity* subjacentes são sucessivamente mais baixas e, como tal, os preços têm uma evolução mais favorável. Naturalmente, isto implica a formação de resultados mais elevados a distribuir pelos tomadores de seguro.

Ao contrário do que se efectuou no âmbito da metodologia anterior, não se efectua o processo de validação histórica desta metodologia, o que, tendo em conta a semelhança de resultados face à primeira, torna este aspecto menos problemático. Com a presente análise pretendeu-se apenas calcular *benchmarks* para a evolução dos referidos valores, no seio de diferentes cenários representativos, mas na prática as empresas de seguros poderão tomar decisões relativamente à composição da carteira significativamente diferentes das subjacentes a estes cenários, e também o comportamento da *yield curve* associada a estes grupos de obrigações poderá desviar-se do que foi obtido em cada cenário.

A grande razão para não se efectuar o processo de validação histórica prende-se com a falta de informação. Para que se compreenda melhor este motivo, considere-se a justificação que se segue.

Neste processo de validação histórica teria de se passar por 4 etapas:

1. Recolha de informação relativa à composição da carteira representativa das responsabilidades no início do período de validação;
2. Recolha de informação relativa à evolução dos preços das obrigações para o período de validação, a ser dado como *input* no problema de optimização, as taxas cobradas no âmbito das transacções efectuadas e de cupão das obrigações detidas e o peso dos custos de gestão da carteira;
3. Recolha dos dados referentes ao montante dos prémios, custos com sinistros e provisão matemática constituída em cada um dos anos que compõem o período de avaliação;
4. Se necessário, revisão dos parâmetros das restrições de risco, como forma de se garantir que os mesmos são consistentes com as observações da carteira.

Mais ainda, seria necessário, em cada ano que compõe o período de validação, estimar a duração e convexidade dos activos e das responsabilidades então existentes, tendo em consideração que tal validação teria de ser efectuada para uma carteira aberta, ao contrário do que sucede no âmbito da projecção.

Assim, em cada ano, ao mesmo tempo que se teria de considerar as entradas e saídas de fluxos técnicos e financeiros decorrentes da carteira fechada, ter-se-ia, ainda, de considerar os *cash-flows* decorrentes dos novos contratos.

Ora, a falta de informação relativa aos montantes que se referem a cada uma das parcelas não permite a estimação destes dois valores, não sendo possível implementar este processo.

## Capítulo 9

### Conclusão

As metodologias estudadas no presente trabalho tiveram como objectivo o cálculo da participação nos resultados futura decorrente dos contratos de seguro de capital diferido com contrasseguro dos prémios. A análise foi efectuada para o caso concreto do mercado português, no âmbito dos requisitos quantitativos implementados com o Projecto “Solvência II”.

A primeira metodologia desenvolvida consistiu num algoritmo de simulação estocástica que recorre a uma possível adaptação do Modelo de Inflação de Wilkie para efeitos de projecção das variáveis que permitem traçar o enquadramento macroeconómico.

A ideia subjacente a este algoritmo traduz-se na previsão do comportamento das variáveis económicas que se propõem explicar a evolução de outras variáveis que influenciam directamente o valor da participação nos resultados, designadamente, os resultados financeiros, os prémios e os resgates, já que estas últimas dependem fortemente do cenário macroeconómico.

Resolvido este problema, procedeu-se à simulação do valor da participação nos resultados distribuída em cada ano, aplicando um algoritmo de simulação apropriado. Teve-se aqui igualmente em conta o facto de o valor da participação nos resultados

atribuída num dado ano depender dos valores estimados nos anos anteriores, e de ser directamente integrada no capital seguro.

Em termos dos resultados obtidos, concluiu-se que o valor da participação nos resultados é mais elevado nos primeiros 15 anos do horizonte temporal de projecção, tendendo progressivamente para zero nos anos seguintes, à medida que as responsabilidades assumidas no âmbito da carteira vão desaparecendo.

Estas responsabilidades vão sendo anuladas não apenas por força dos vencimentos dos contratos e das mortes ocorridas, mas igualmente por força dos resgates e reduções, salientando-se o elevado peso dos primeiros no total de pagamentos previstos.

Chegou-se à conclusão que o valor esperado do peso da participação nos resultados em relação à *best estimate* (líquida de participação nos resultados) ultrapassa 1% em alguns anos, que acrescem à taxa garantida fixada para o contrato (3%).

Concluiu-se igualmente que não existem diferenças materiais entre os resultados, perante diferentes hipóteses assumidas para os parâmetros referentes ao plano de atribuição dos benefícios em causa. Obteve-se, assim, um hiato de menos de 4% relativamente ao valor total da participação nos resultados em relação à restante *best estimate*, assumindo os parâmetros fixados como mais prováveis, que no estudo efectuado constituem os mais baixos, e os que implicam uma distribuição total dos benefícios.

O valor médio obtido para a participação nos resultados global, em relação à *best estimate*, é de cerca de 13,9%, face a uma mediana estimada de aproximadamente 12,6%. Para as mesmas hipóteses quanto ao plano de participação e decisões de gestão, obteve-se um intervalo de confiança a 90% para esta variável delimitado por 5,2% e

27,5%. No que se refere à distribuição da variável, concluiu-se que a respectiva distribuição empírica se aproxima fortemente da distribuição Lognormal.

A validação histórica deste algoritmo permitiu um ajustamento bastante razoável para os anos passados, reforçando a sua credibilidade.

Como principais limitações aqui subjacentes, refere-se a própria informação utilizada, mais concretamente, o facto de a série dos resultados financeiros respeitarem à Conta Técnica Vida (excluindo os produtos em que o risco de investimento é assumido pelo tomador de seguros), não se tratando dos resultados directamente associados ao produto estudado, ao passo que os próprios valores da participação nos resultados utilizados para efeitos deste processo de validação histórica se referem ao universo dos produtos não ligados.

Implementou-se ainda uma segunda metodologia, que assenta na resolução de sucessivos problemas de optimização da rendibilidade do portfólio representativo das responsabilidades, sujeito a um conjunto de restrições de natureza orçamental, de risco e de *matching* entre os activos e os passivos envolvidos. Esta análise foi desenvolvida para cinco cenários distintos.

Foram assumidas algumas hipóteses simplificadoras sobre a composição da carteira, limitando-se a análise às suas componentes mais relevantes: obrigações governamentais e privadas.

Recorrendo à informação relativa à composição da carteira à data de avaliação, foi possível obter determinadas informações, como a estrutura de maturidades das mesmas, os cupões associados, etc., tendo-se optado por fixar um valor médio para estes últimos, assim como para os custos de transacção e de gestão.

Para além disto, assumiu-se que as entradas e saídas de *cash-flows* seguem uma distribuição uniforme ao longo do tempo e que a mudança de composição do portfólio só pode ser efectuada no fim de cada mês.

Os resultados desta metodologia foram relativamente semelhantes aos gerados pela primeira. Para o cenário construído a partir das taxas de crescimento médias do PIB, obteve-se um valor bastante aproximado do valor médio dado por aquela, *i. e.*, cerca de 14,5% da *best estimate*.

Por sua vez, o cenário económico com maior subida do PIB resulta num valor de 19,4%, face a um resultado de 10,3% que se associa ao cenário oposto. Isto poderá indiciar uma menor volatilidade nos resultados que a subjacente à primeira metodologia. Contudo, trata-se de uma abordagem diferente, apenas se podendo inferir alguma conclusão neste sentido, se um maior número de cenários tivesse sido explorado.

Como principal limitação inerente à Metodologia 1, refere-se o facto de se tratar de uma abordagem que não produz resultados *market-consistent*, o que do ponto de vista teórico se trata de uma desvantagem. Contudo, em termos práticos, a inexistência de activos no mercado que consigam replicar a responsabilidade avaliada e a forte dependência que esses resultados iriam verificar relativamente às hipóteses subjacentes a um modelo desta natureza, poderiam comprometer significativamente a fiabilidade de tais resultados.

Para além disto, poderia ter sido efectuada um estudo mais aprofundado sobre o tipo de processos estocásticos que melhor permitissem reproduzir o comportamento das variáveis económicas, no sentido de explorar outras alternativas possíveis.

Refere-se ainda o facto de se ter assumido a hipótese de que a participação nos resultados distribuída é automaticamente integrada no capital seguro, o que condiciona

o desenho do método. Contudo, trata-se de uma das hipóteses que maior dificuldade introduz no método, o que faz aumentar o interesse em explorá-la, pois incrementa a interdependência entre a participação nos resultados e as restantes responsabilidades.

Por sua vez, existem alguns aspectos inerentes à Metodologia 2 que podem ser revistos e o seu âmbito alargado, como a possibilidade de inclusão de um maior número de activos disponíveis para escolha, nomeadamente a consideração de obrigações de cupão variável, e a reformulação da função objectivo de tal forma que vise, a título de proposta de trabalho, a maximização da rendibilidade anual em detrimento da mensal, o que acarretaria um maior nível de complexidade.

É importante referir o facto de os resultados obtidos se encontrarem bastante dependentes das alterações da composição do portfólio previstas em cada cenário, que na prática poderão ser distintas das estratégias de investimento definidas por cada empresa. Na realidade, estas dependem de um conjunto de factores bastante mais alargado que os considerados neste quadro teórico.

Como proposta de trabalho futuro, sugere-se a aplicação deste tipo de metodologias a outro tipo de contratos em que o plano de atribuição da participação nos resultados se possa aplicar, prevendo-se a necessidade de adaptá-las às características desses mesmos contratos. Em particular, pode ser de interesse teórico e prático estudar contratos em que os resultados técnicos obtidos com a sua exploração constituem uma componente material, como os contratos mistos ou temporários sem contrasseguro.

## Bibliografia

- Ballotta, L. (2004). Alternative Framework for the Fair Valuation of Participating Life Insurance Contracts. Working Paper, Cass Business School, City University. London.
- Bacinello, A. R. (2001). Fair Pricing of Life Insurance Participating Policies with a Minimum Interest Rate Guaranteed. *Astin Bulletin*. **31**: 275-297.
- Bacinello, A. R. (2003). Pricing Guaranteed Life Insurance Participating Policies with Annual Premiums and Surrender Option. *North American Actuarial Journal*. **7**: 1-17.
- Bernard, C *et al.* (2005). Market Value of Life Insurance Contracts under Stochastic Interest Rates and Default Risk. *Insurance: Mathematics and Economics*. **36**: 499-516.
- Bernard C., Le Courtois O. e Quittard-Pinon F. (2006). Development and Pricing of a New Participating Contract. *North American Actuarial Journal*. **10(4)**: 179-195.
- Bratley, P. *et al.* (1983). *A Guide to Simulation*, ed. New York: Springer-Verlag.
- Brigo, D. e Mercurio, F. (2001). *Interest Rate Models – Theory and Practise, With Smile, Inflation and Credit*. 2ª Edição, Springer Finance. New York.
- Castellani, G., *et al.* (2007). Pricing Formulae for Financial Options and Guarantees Embedded in Profit Sharing Life Insurance Policies. Working Paper.
- Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors (2008). QIS4 – Technical Specifications, (MARKT/2505/08).
- Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors (2009). Consultation Paper N.º 39 - Draft CEIOPS Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II: Actuarial and statistical methodologies to calculate the best estimate.

Consiglio, A. *et al.* (2001). Asset and Liability Modeling for Participating Policies with Guarantees. Working Paper N.º 00-41-C. Financial Institutions Center, The Wharton School, University of Pennsylvania. Pennsylvania.

Corrigan, J. *et al.* (2007). Deflators Demystified. Working Paper.

Dhaene, J. (1989). Stochastic Interest Rates and Autoregressive Integrated Moving Average Processes. *ASTIN Bulletin*. **19 (2)**: 131-138.

Gatzert, N. e King, A. (2006). Analysis of Participating Life Insurance Contracts: A Unification Approach. Working papers on risk management and insurance N.º 18.

Gibbs, S. e McNamara, E. (2007). Practical Issues in ALM and Stochastic Modeling for Actuaries. Trabalho apresentado ao Institute of Actuaries of Australia Biennial Convention. September 23–26.

Grosen, A. e Jorgensen, P. (2000). Fair Valuation of Life Insurance Liabilities: The Impact of Interest Rate Guarantees, Surrender Options, and Bonus Policies. *Insurance: Mathematics and Economics*. **26**: 37-57.

Grosen, A. e Jorgensen, P. (2002). Life Insurance Liabilities at Market Value: An Analysis of Insolvency Risk, Bonus Policy, and Regulatory Intervention Rules in a Barrier Option Framework. *Journal of Risk and Insurance*. **69**: 63-91.

Hurlimann, W. (1992). Numerical Evaluation of the Wilkie Inflation Model. *Insurance: Mathematics and Economics*. **11**: 311-314.

Instituto de Seguros de Portugal (2002). *Relatório do Sector Segurador e Fundos de Pensões*.

Jarvis, J. *et al.* (2001). Modern Valuation Techniques. Trabalho apresentado à Staple Inn Actuarial Society. London.

Jensen, B. *et al.* (2001). A Finite Difference Approach to the Valuation of Path Dependent Life Insurance Liabilities. *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*. **26**: 57-84.

Jorgensen, P. (2001). Life Insurance Contracts with Embedded Options. *Journal of Risk Finance*. **3(1)**: 19-30.

Kiesel, R., Liebmann, T. e Kassberger, S. (2005). Fair Valuation of Insurance Contracts under Lévy Process Specifications. *Insurance: Mathematics and Economics*. **42**: 419-433.

Kling, A., Richter, A. e Russ, J. (2006). The Interaction of Guarantees, Surplus Distribution, and Asset Allocation in With Profit Life Insurance Policies. *Insurance: Mathematics and Economics*. **40**: 164-178.

Leal, D. (2006). *Requisitos de Adequação de Capital para o Ramo Vida*, Relatório de Estágio realizado no Instituto de Seguros de Portugal. Universidade Técnica de Lisboa – Instituto Superior de Economia e Gestão. Lisboa.

Meindl, P. (2006). Portfolio Optimization and Dynamic Hedging with Receding Horizon Control, Stochastic Programming, and Monte Carlo Simulation. Dissertação submetida ao Departamento de Ciências de Gestão e Engenharia e ao Comité de estudos Graduados da Universidade de Stanford em preenchimento parcial dos requisitos para o grau de Doutoramento.

Miltersen, K. e Persson, S. (2001). Guaranteed Investment Contracts: Distributed and Undistributed Excess Returns. Working Paper.

Plat, R. e Pelsser, A. (2008). Analytical Approximations for Prices of Swap Rate Dependent Embedded Options in Insurance Products. Working Paper.

Rodrigues, M. (2003). *Modelização Estocástica sobre a Ocorrência de Resgates, Reduções e Anulações em Apólices do Ramo Vida*. Relatório de Estágio realizado no Instituto de Seguros de Portugal. Universidade Nova de Lisboa – Faculdade de Ciências e Tecnologia, Lisboa.

Svensson, L.E.O., (1994). Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994. Stockholm - International Economic Studies, Papers 579.

Szu-Lang, *et al.* (2006). Fair Valuation of Participating Policies in Stochastic Interest Rate. Working Paper.

Tanskanen A. J. e Lukkarinen J. (2003). Fair Valuation of Path-Dependent Participating Life Insurance Contracts. *Insurance: Mathematics and Economics*. **33**: 595 - 609.

Torres, J. (2005). Profit Sharing with the Life Insured and Solvency. Faculty of Economics and Business Administration of the University of Barcelona. Barcelona.

Wilkie, D. (1986). A Stochastic Investment Model for Actuarial Use. *Transactions of the Faculty of Actuaries*. **39**: 341-403.

Wilkie, A. D. (1987). An Option Pricing Approach to Bonus Policy. *Journal of the Institute of Actuaries*. **114**: 21-77.

Wilson D. (2004). Deflators—The Solution to a Stochastic Conundrum?. Society of Actuaries Newsletter. Issue 45.

# **ANEXOS**

## Anexo 1 – Modelo Gaussiano com 2 Factores

Assume-se que o comportamento do processo da taxa de juro instantânea, sob a medida ajustada ao risco  $Q$ , é dado por:

$$r(t) = x(t) + y(t) + \varphi(t), \quad r(0) = r_0,$$

em que os processos  $\{x(t): t \geq 0\}$  e  $\{y(t): t \geq 0\}$  obedecem às dinâmicas:

$$dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dW_1(t), \quad x(0) = 0$$

$$dy(t) = -by(t)dt + \eta dW_2(t), \quad y(0) = 0$$

e  $(W_1, W_2)$  é um movimento Browniano bi-dimensional, com correlação instantânea  $\rho$ , isto é:

$$dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt, \quad 0 \leq \rho \leq 1;$$

$r_0, a, b, \sigma$  e  $\eta$  são constantes positivas; a função  $\varphi(t)$  é determinística e tem domínio no intervalo  $[0, T]$  e  $\varphi(0) = r_0$ ;  $\mathcal{F}_t$  é a sigma-álgebra gerada por  $(x, y)$  no momento  $t$ .

A integração das equações acima, implica, para  $s < t$ ,

$$\begin{aligned} r(t) = & x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_1(u) + \\ & + \eta \int_s^t e^{-b(t-u)} dW_2(u) + \varphi(t), \end{aligned}$$

o que significa que  $r(t)$  segue uma distribuição Normal condicionada em  $\mathcal{F}_s$ , com média e variância dadas por:

$$E\{r(t)|\mathcal{F}_s\} = x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} + \varphi(t)$$

$$Var\{r(t)|\mathcal{F}_s\} = \frac{\sigma^2}{2a} [1 - e^{-2a(t-s)}] + \frac{\eta^2}{2a} [1 - e^{-2b(t-s)}] + 2\rho \frac{\sigma\eta}{a+b} [1 - e^{-(2+b)(t-s)}].$$

O preço de uma obrigação de cupão zero de valor nominal unitário e com maturidade  $T$ , no momento  $t$ , irá designar-se por  $P(t, T)$ :

$$P(t, T) = E \left\{ e^{-\int_t^T r_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right\},$$

onde  $E$  corresponde ao valor esperado sob a medida  $Q$  ajustada ao risco.

Para se obter este valor esperado, considere-se o seguinte teorema (ver, por exemplo, Brigo e Mercurio, (2001)):

**Teorema:** O preço de uma obrigação de cupão zero de valor nominal unitário e com maturidade  $T$ , no momento  $t$ , é dado por

$$P(t, T) = \exp \left\{ - \int_t^T \varphi(u) du - \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} x(t) - \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} y(t) + \frac{1}{2} V(t, T) \right\},$$

$$V(t, T) = \frac{\sigma^2}{a^2} \left[ T - t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right]$$

$$+ \frac{\eta^2}{b^2} \left[ T - t + \frac{2}{b} e^{-b(T-t)} - \frac{1}{2b} e^{-2b(T-t)} - \frac{3}{2b} \right]$$

$$+ 2\rho \frac{\eta\sigma}{ab} \left[ T - t + \frac{e^{-a(T-t)} - 1}{a} + \frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b} - \frac{e^{(a+b)(T-t)} - 1}{a + b} \right].$$

A taxa *forward* instantânea no momento  $t$ , para a maturidade  $T$ , define-se como:

$$f(t, T) = \frac{\partial}{\partial T} \ln(P(t, T)),$$

sendo possível provar que a respectiva volatilidade é dada por:

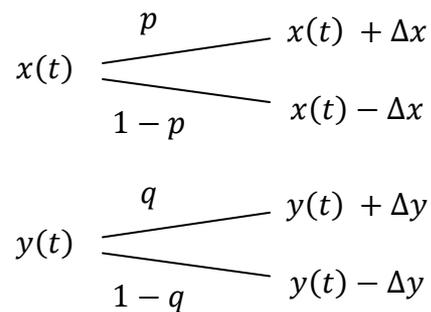
$$\sigma_f(t, T) = \sqrt{\sigma^2 e^{-2a(T-t)} + \eta^2 e^{-2b(T-t)} + 2\rho\sigma\eta e^{-(a+b)(T-t)}}.$$

Com esta medida, é possível construir intervalos de confiança para as taxas *forward*, assumindo, para o efeito, que estas variáveis seguem uma determinada distribuição.

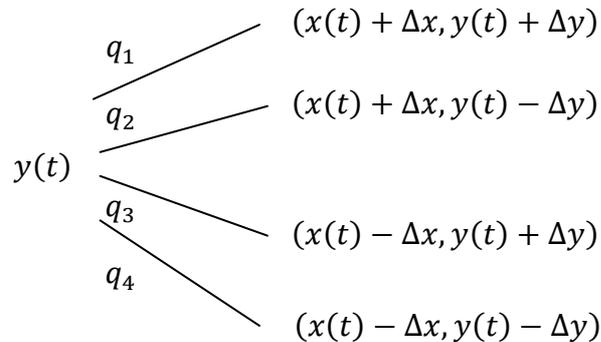
Neste caso, a distribuição eleita prendeu-se com a distribuição Normal.

Seguidamente, procede-se à apresentação do problema de construção das árvores binomiais associadas aos processos  $x(t)$  e  $y(t)$  e, finalmente, uma árvore aproximada para o processo  $r(t)$ .

Para os primeiros processos considerem-se as seguintes representações, para um determinado período  $t$ :



Como a evolução de  $r(t)$  depende do comportamento de ambos os processos, a árvore que permite representar as respectivas dinâmicas irá apresentar 4 ramos, que se podem definir da seguinte forma:



Tendo em consideração um conjunto de restrições que as probabilidades neutras ao risco devem verificar, é possível demonstrar que (ver Brigo e Mercurio, (2001)):

$$\begin{cases} q_1 = \frac{1 + \rho}{4} - \frac{b\sigma y(t) + a\eta x(t)}{4\sigma\eta} \sqrt{\Delta t} \\ q_2 = \frac{1 - \rho}{4} + \frac{b\sigma y(t) - a\eta x(t)}{4\sigma\eta} \sqrt{\Delta t} \\ q_3 = \frac{1 - \rho}{4} - \frac{b\sigma y(t) - a\eta x(t)}{4\sigma\eta} \sqrt{\Delta t} \\ q_4 = \frac{1 + \rho}{4} + \frac{b\sigma y(t) + a\eta x(t)}{4\sigma\eta} \sqrt{\Delta t} \end{cases}$$

Note-se que destas expressões nem sempre resultam valores entre 0 e 1 para todos os pares  $(x(t), y(t))$ , pelo que nessas situações se pode corrigir a situação efectuando pequenas alterações aos parâmetros do modelo.

## Anexo 2 – Notas Adicionais sobre a Modelação do Preço das Obrigações

### a) Obrigações dos Estados da União Europeia

A estrutura temporal das *yields* das obrigações dos Estados da UE foi extraída da base de dados do BCE, a qual foi estimada pelo modelo de Svensson, até uma maturidade de 30 anos.

Tendo em conta a tendência da curva para as maturidades mais elevadas, concluiu-se que a função que melhor poderia traduzir esta evolução corresponde à função logarítmica. Para um maior alisamento da curva, optou-se por considerar o referido ajustamento a partir dos 20 anos de maturidade.

A função ajustada, para cada mês, é:

$$4,197\% + 0,132\% \ln(t), \quad t = \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \dots$$

Resta referir o conjunto de parâmetros escolhidos no âmbito do modelo de taxa de juro utilizado:

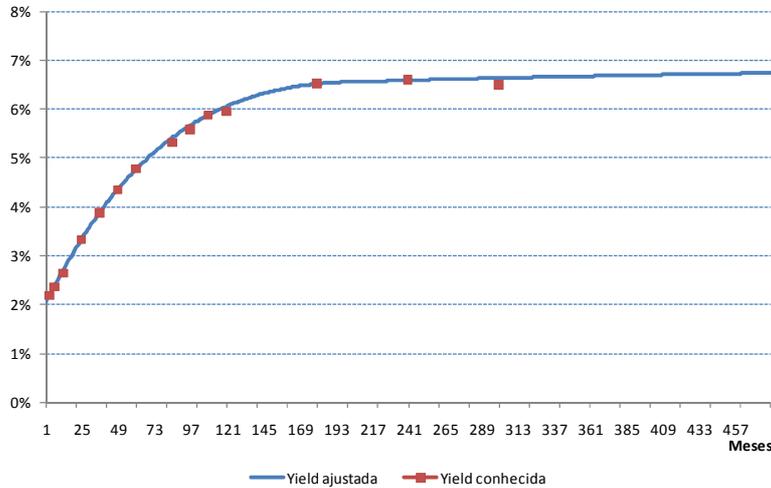
$$\begin{cases} a = 1,33\% \\ b = 68,47\% \\ \sigma = 0,23\% \\ \eta = 13,64\% \\ \rho = 1 \end{cases}$$

### b) Obrigações Privadas da União Europeia

Com o objectivo de traçar a estrutura temporal das obrigações privadas da UE, retirou-se da base de dados da *Bloomberg* o valor das taxas *spot* associadas às obrigações de *rating* BBB. O facto de se dispor desta informação apenas para um conjunto restrito de anos levou a que se tivesse de estimar o valor das taxas para os anos sem informação. Para tal, recorreu-se ao modelo de Svensson, tendo-se estimado os respectivos

parâmetros com a aplicação do método dos mínimos quadrados a partir dos dados disponíveis. Assim, foi possível obter o seguinte gráfico:

**Gráfico 75:** Estrutura temporal das *yields* associadas às obrigações privadas BBB da UE.



A fórmula do Modelo de Svensson aqui utilizada é, para  $t = \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \dots$ :

$$s(t) = 0,62 + 1,38 \left[ \frac{1 - e^{-\frac{t}{10,65}}}{\frac{t}{10,65}} \right] + 16,25 \left[ \frac{1 - e^{-\frac{t}{10,65}}}{\frac{t}{10,65}} - e^{-\frac{t}{10,65}} \right] + 1,44 \left[ \frac{1 - e^{-\frac{t}{11,87}}}{\frac{t}{11,87}} - e^{-\frac{t}{11,87}} \right],$$

onde  $s(t)$  corresponde à taxa *spot* da maturidade  $t$ .

O facto da função  $s(t)$  se tornar decrescente a partir de certa maturidade, fez com que se tivesse seguido um processo semelhante ao efectuado em a), ou seja, assumir que a função logarítmica permite explicar as taxas *spot* de maturidades superiores. Assim, o modelo de Svensson foi somente utilizado até aos 17 anos de maturidade ( $t = \frac{204}{12}$ ).

A partir deste ponto, considerou-se a função:

$$5,943\% + 0,215\% \ln(t), \quad t = \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \dots$$

Finalmente, o conjunto de parâmetros escolhidos no âmbito do modelo de taxa de juro é dado por:

$$\begin{cases} a = 2,75\% \\ b = 2,50\% \\ \sigma = 0,51\% \\ \eta = 0,10\% \\ \rho = 2,0\% \end{cases}$$

### Anexo 3 - Programas

Em primeiro lugar apresenta-se o programa de base que foi utilizado para realização dos ajustamentos estatísticos apresentados no Capítulo 6. Este programa foi implementado no software R, expondo-se o exemplo da estimação da regressão que tem por objectivo explicar a taxa de resgates.

```
-----  
Resgates <- read.table("Resgates.csv", dec = ",", sep = ";", header = TRUE)  
summary(Resgates)  
attach(Resgates)  
  
modelo <- lm(Resg~Desemp1+Cpubl+Cpriv1+Cpriv1*Desemp1)  
summary(modelo)  
  
eta <- predict(modelo, type="response")  
  
print (eta)  
print (Resg)  
  
anova(modelo, test="Chi")  
-----
```

Os próximos programas retratam os algoritmos desenvolvidos para a efectiva aplicação prática da Metodologia 1, seguindo-se o programa que permite efectuar a simulação do PIB. Após este, mostra-se o programa que dá como *output* as taxas de resgate simuladas, sendo os processos de simulação das restantes variáveis que foram alvo deste tipo de tratamento traduzidos por programas bastante semelhantes.

Por fim, é exposto o programa final, que tem por objectivo a modelação estocástica da participação nos resultados, bem como de outras variáveis relevantes, cujos resultados se apresentaram no ponto 6.8.

---

Private Sub Simular\_PIB()

Pi = Cells(16, 3)

a = Cells(9, 2)

u = Cells(9, 4)

s = Cells(9, 6)

d1 = Cells(9, 8)

Dim mat(10000, 20)

For i = 1 To 10000

    mat(i, 1) = d1

Next

Randomize

For j = 2 To 20

    For i = 1 To 10000 / 2

        u1 = Rnd()

        u2 = Rnd()

        mat(2 \* i - 1, j) = u + a \* (mat(i, j - 1) - u) + s \* (Cos(2 \* Pi \* u1) \* (-2 \* Log(u2))  
        ^ 0.5)

        mat(2 \* i, j) = u + a \* (mat(i, j - 1) - u) + s \* (Sin(2 \* Pi \* u1) \* (-2 \* Log(u2)) ^  
        0.5)

    Next

Next

For j = 1 To 20

    For i = 1 To 10000

        Cells(22 + i, 2 + j) = Exp(mat(i, j)) - 1

    Next

Next

End Sub

---

```
Private Sub Simular_Resgates()
```

```
Dim mat(10000, 19)
Dim matpriv(10000, 19)
Dim matpub(10000, 19)
Dim matdesemp(10000, 19)
Dim matprod(10000, 19)
Dim matresg(10000, 19)
Dim vectpriv(1, 19)
Dim vectpub(1, 19)
Dim vectdesemp(1, 19)
Dim vectprod(1, 19)
```

```
Pi = Cells(16, 3)
a = Cells(9, 2)
u = Cells(9, 4)
s = Cells(9, 6)
d1 = Cells(9, 8)
```

```
'Construção do vector dos valores observados do PIB a adicionar à série das diferenças
'entre o cada variável e o PIB
```

```
For j = 1 To 19
    vectpriv(1, j) = Cells(13, 48 + j)
Next
```

```
For j = 1 To 19
    vectpub(1, j) = Cells(14, 48 + j)
Next
```

```
For j = 1 To 19
    vectdesemp(1, j) = Cells(15, 48 + j)
Next
```

```
For j = 1 To 19
    vectprod(1, j) = Cells(16, 48 + j)
Next
```

```
apriv = Cells(5, 50)
upriv = Cells(5, 52)
spriv = Cells(5, 54)
d1priv = Cells(5, 56)
```

```
adesemp = Cells(6, 50)
udesemp = Cells(6, 52)
sdesemp = Cells(6, 54)
d1desemp = Cells(6, 56)
```

```
apub = Cells(7, 50)
upub = Cells(7, 52)
```

```
spub = Cells(7, 54)
d1pub = Cells(7, 56)
```

```
beta0 = Cells(9, 48)
beta1 = Cells(9, 50)
beta2 = Cells(9, 52)
beta3 = Cells(9, 54)
beta4 = Cells(9, 56)
```

```
For i = 1 To 10000
    mat(i, 1) = d1
Next
```

‘Simula as diferenças entre os valores reais dos resgates e a regra prática

Randomize

```
For j = 2 To 19
    For i = 1 To 10000 / 2
        u1 = Rnd()
        u2 = Rnd()
        mat(2 * i - 1, j) = u + a * (mat(i, j - 1) - u) + s * (Cos(2 * Pi * u1) * (-2 * Log(u2))
        ^ 0.5)
        mat(2 * i, j) = u + a * (mat(i, j - 1) - u) + s * (Sin(2 * Pi * u1) * (-2 * Log(u2)) ^
        0.5)
    Next
Next
```

```
For j = 1 To 19
    For i = 1 To 10000
        Cells(22 + i, 2 + j) = Exp(mat(i, j)) - 1
    Next
Next
```

```
For i = 1 To 10000
    matpriv(i, 1) = d1priv
Next
```

‘Simula a diferença entre a taxa de crescimento do consumo privado e o PIB

Randomize

```
For j = 2 To 19
    For i = 1 To 10000 / 2
        u1 = Rnd()
        u2 = Rnd()
        matpriv(i, j) = upriv + apriv * (matpriv(i, j - 1) - upriv) + spriv * (Cos(2 * Pi * u1)
        * (-2 * Log(u2)) ^ 0.5)
        matpriv(2 * i, j) = upriv + apriv * (matpriv(i, j - 1) - upriv) + spriv * (Sin(2 * Pi *
        u1) * (-2 * Log(u2)) ^ 0.5)
    Next
Next
```

‘Aplica a transformação, adicionando a parcela do PIB

```

For j = 1 To 19
  For i = 1 To 10000
    Cells(22 + i, 94 + j) = Exp(matpriv(i, j) + vectpriv(1, j)) - 1
  Next
Next

For i = 1 To 10000
  matpub(i, 1) = d1pub
Next

Randomize
For j = 2 To 19
  For i = 1 To 10000 / 2
    u1 = Rnd()
    u2 = Rnd()
    matpub(i, j) = upub + apub * (matpub(i, j - 1) - upub) + spub * (Cos(2 * Pi * u1) *
    (-2 * Log(u2)) ^ 0.5)
    matpub (2 * i, j) = upub + apub * (matpub (i, j - 1) - upub) + spub * (Sin(2 * Pi *
    u1) * (-2 * Log(u2)) ^ 0.5)
  Next
Next

For j = 1 To 19
  For i = 1 To 10000
    Cells(22 + i, 140 + j) = Exp(matpub(i, j) + vectpub(1, j)) - 1
  Next
Next

For i = 1 To 10000
  matdesemp(i, 1) = d1desemp
Next

Randomize
For j = 2 To 19
  For i = 1 To 10000 / 2
    u1 = Rnd()
    u2 = Rnd()
    matdesemp(i, j) = udesemp + adesemp * (matdesemp(i, j - 1) - udesemp) +
    sdesemp * (Cos(2 * Pi * u1) * (-2 * Log(u2)) ^ 0.5)
    matdesemp (2 * i, j) = udesemp + adesemp * (matdesemp (i, j - 1) - udesemp) +
    sdesemp * (Sin(2 * Pi * u1) * (-2 * Log(u2)) ^ 0.5)
  Next
Next

For j = 1 To 19
  For i = 1 To 10000
    Cells(22 + i, 206 + j) = Exp(matdesemp(i, j) + vectdesemp(1, j)) - 1
  Next
Next

```

‘Obtenção dos resultados da simulação das taxas de resgate

For j = 1 To 19

For i = 1 To 10000

matresg(i, j) = Exp(mat(i, j) + (beta0 + beta1 \* Log(1 + Cells(22 + i, 206 + j)) \*  
100 + beta2 \* Log(1 + Cells(22 + i, 140 + j)) \* 100 + beta3 \* Log(1 + Cells(22 + i,  
94 + j)) \* 100 + beta4 \* Log(1 + Cells(2133 + i, 206 + j)) \* 100 \* Log(1 + Cells(22  
+ i, 94 + j)) \* 100) / 100) - 1

Next

Next

For j = 1 To 19

For i = 1 To 10000

If matresg(i, j) > 0 Then

Cells(22 + i, 48 + j) = matresg(i, j)

Else

Cells(22 + i, 48 + j) = 0

End If

Next

Next

End Sub

---

```
Sub Participacao_Resultados()
```

```
Pi = Cells(23, 26)
a = Cells(23, 18)
u = Cells(23, 20)
s = Cells(23, 22)
d1 = Cells(23, 24)
```

```
Dim mat(10000, 60) As Double
```

```
For i = 1 To 10000
  mat(i, 1) = d1
Next
```

```
'Simulação do PIB
```

```
Randomize
```

```
For j = 2 To 60
  For i = 1 To 10000 / 2
    u1 = Rnd()
    u2 = Rnd()
    mat(i, j) = u + a * (mat(i, j - 1) - u) + s * (Cos(2 * Pi * u1) * (-2 * Log(u2)) ^ 0.5)
    mat (2 * i, j) = u + a * (mat (i, j - 1) - u) + s * (Sin(2 * Pi * u1) * (-2 * Log(u2)) ^
    0.5)
  Next i
Next j
```

```
'Simulação das restantes variáveis macroeconómicas
```

```
apriv = Cells(15, 18)
upriv = Cells(15, 20)
spriv = Cells(15, 22)
d1priv = Cells(15, 24)
apub = Cells(13, 18)
upub = Cells(13, 20)
spub = Cells(13, 22)
d1pub = Cells(13, 24)
```

```
adesemp = Cells(6, 7)
udesemp = Cells(6, 9)
sdesemp = Cells(6, 11)
d1desemp = Cells(6, 13)
```

```
aot3 = Cells(21, 18)
uot3 = Cells(21, 20)
sot3 = Cells(21, 22)
d1ot3 = Cells(21, 24)
```

```
aproc = Cells(17, 18)
```

```

uproc = Cells(17, 20)
sproc = Cells(17, 22)
d1proc = Cells(17, 24)

```

```

abvl = Cells(19, 18)
ubvl = Cells(19, 20)
sbvl = Cells(19, 22)
d1bvl = Cells(19, 24)

```

```

Dim matpriv_dif(10000, 60) As Double
Dim matpub_dif(10000, 60) As Double
Dim matdesemp_dif(10000, 60) As Double
Dim matproc_dif(10000, 60) As Double
Dim matot3_dif(10000, 60) As Double
Dim matbvl_dif(10000, 60) As Double

```

```

Dim matpriv(10000, 60) As Double
Dim matpub(10000, 60) As Double
Dim matdesemp(10000, 60) As Double
Dim matproc(10000, 60) As Double
Dim matot3(10000, 60) As Double
Dim matbvl(10000, 60) As Double
Dim matdesemp_aux(10000, 60) As Double
Dim matot3_aux(10000, 60) As Double

```

```

‘Simulação da diferença entre as variáveis económicas e o PIB
For i = 1 To 10000
    matpriv_dif (i, 1) = d1priv
Next

```

```

Randomize
For j = 2 To 60
    For i = 1 To 10000 / 2
        u1 = Rnd()
        u2 = Rnd()
        matpriv_dif (i, j) = upriv + apriv * (matpriv(i, j - 1) - upriv) + spriv * (Cos(2 * Pi *
        u1) * (-2 * Log(u2)) ^ 0.5)
        matpriv_dif (2 * i, j) = upriv + apriv * (matpriv (i, j - 1) - upriv) + spriv * (Sin(2 *
        Pi * u1) * (-2 * Log(u2)) ^ 0.5)
    Next
Next

```

```

For i = 1 To 10000
    matpub_dif(i, 1) = d1pub
Next

```

```

Randomize
For j = 2 To 60
    For i = 1 To 10000 / 2
        u1 = Rnd()

```

```

    u2 = Rnd()
    matpub_dif (i, j) = upub + apub * (matpub(i, j - 1) - upub) + spub * (Cos(2 * Pi *
    u1) * (-2 * Log(u2)) ^ 0.5)
    matpub_dif (2 * i, j) = upub + apub * (matpub (i, j - 1) - upub) + spub * (Sin(2 * Pi
    * u1) * (-2 * Log(u2)) ^ 0.5)
Next
Next

For i = 1 To 10000
    matdesemp_dif (i, 1) = d1desemp
Next

Randomize
For j = 2 To 60
    For i = 1 To 10000 / 2
        u1 = Rnd()
        u2 = Rnd()
        matdesemp_dif (i, j) = udesemp + adesemp * (matdesemp(i, j - 1) - udesemp) +
        sdesemp * (Cos(2 * Pi * u1) * (-2 * Log(u2)) ^ 0.5)
        matdesemp_dif (2 * i, j) = udesemp + adesemp * (matdesemp (i, j - 1) - udesemp)
        + sdesemp * (Sin(2 * Pi * u1) * (-2 * Log(u2)) ^ 0.5)
    Next
Next

For i = 1 To 10000
    matproc_dif (i, 1) = d1proc
Next

Randomize
For j = 2 To 60
    For i = 1 To 10000 / 2
        u1 = Rnd()
        u2 = Rnd()
        matproc_dif (i, j) = uproc + aproc * (matproc(i, j - 1) - uproc) + sproc * (Cos(2 * Pi
        * u1) * (-2 * Log(u2)) ^ 0.5)
        matproc_dif (2 * i, j) = uproc + aproc * (matproc (i, j - 1) - uproc) + sproc * (Sin(2
        * Pi * u1) * (-2 * Log(u2)) ^ 0.5)
    Next
Next

For i = 1 To 10000
    matot3_dif (i, 1) = d1ot3
Next

Randomize
For j = 2 To 60
    For i = 1 To 10000 / 2
        u1 = Rnd()
        u2 = Rnd()

```

```

    matot3(i, j) = uot3 + aot3 * (matot3(i, j - 1) - uot3) + sot3 * (Cos(2 * Pi * u1) * (-2
    * Log(u2)) ^ 0.5)
    matot3 (2 * i, j) = uot3 + aot3 * (matot3 (i, j - 1) - uot3) + sot3 * (Sin(2 * Pi * u1) *
    (-2 * Log(u2)) ^ 0.5)
  Next
Next

For i = 1 To 10000
  matbvl_dif (i, 1) = d1bvl
Next

Randomize
For j = 2 To 60
  For i = 1 To 10000 / 2
    u1 = Rnd()
    u2 = Rnd()
    matbvl_dif (i, j) = ubvl + abvl * (matbvl(i, j - 1) - ubvl) + sbvl * (Cos(2 * Pi * u1)
    * (-2 * Log(u2)) ^ 0.5)
    matbvl_dif (2 * i, j) = ubvl + abvl * (matbvl (i, j - 1) - ubvl) + sbvl * (Sin(2 * Pi *
    u1) * (-2 * Log(u2)) ^ 0.5)
  Next
Next

For j = 1 To 60
  For i = 1 To 10000
    matpriv(i, j) = Exp(matpriv_dif(i, j) + mat(i, j)) - 1
  Next
Next

For j = 1 To 60
  For i = 1 To 10000
    matpub(i, j) = Exp(matpub_dif(i, j) + mat(i, j)) - 1
  Next
Next

For j = 1 To 60
  For i = 1 To 10000
    matproc(i, j) = Exp(matproc_dif(i, j) + mat(i, j)) - 1
  Next
Next

b1desemp = Cells(5, 4)
b2desemp = Cells(6, 4)
b3desemp = Cells(7, 4)

For i = 1 To 10000
  matdesemp(i, 1) = d1desemp
Next

```

```

'Adiciona-se o resultado da regra prática à diferença entre a taxa de desemprego e esta
'última
For j = 2 To 59
  For i = 1 To 10000
    matdesemp_aux(i, j) = Exp(matdesemp_dif(i, j) + (b1desemp + b2desemp *
(Log(1 + matpub(i, j)) * 100 * Log(1 + matpriv(i, j)) * 100) + b3desemp * Log(1 +
matdesemp(i, j - 1)) * 100) / 100) - 1
    If matdesemp_aux(i, j) > 0 Then
      matdesemp(i, j) = matdesemp_aux(i, j)
    Else
      matdesemp(i, j) = 0.01
    End If
  Next i
Next j

For j = 1 To 60
  For i = 1 To 10000
    matot3_aux(i, j) = Exp(matot3_dif(i, j) + mat(i, j)) - 1
  Next i
Next j

For j = 1 To 60
  For i = 1 To 10000
    matbvl(i, j) = Exp(matbvl_dif(i, j) + mat(i, j)) - 1
  Next i
Next

Dim matresg(10000, 60)
Dim mattra(10000, 60)
Dim matprem(10000, 60)
Dim matr(10000, 60)
Dim matmmv(10000, 60)

Dim matresg_dif(10000, 60)
Dim mattra_dif(10000, 60)
Dim matprem_dif(10000, 60)
Dim matr_dif(10000, 60)
Dim matmmv_dif(10000, 60)
Dim matresg_aux(10000, 60)
Dim mattra_aux(10000, 60)
Dim matprem_aux(10000, 60)

Dim somaresg(10001) As Double
Dim somarra(10001) As Double
Dim somaprem(10001) As Double
Dim somarr(10001) As Double
Dim somammv(10001) As Double

Dim mediaresg(100) As Double
Dim mediarra(100) As Double

```

Dim mediaprem(100) As Double  
Dim mediarr(100) As Double  
Dim mediammv(100) As Double

b1resg = Cells(11, 4)  
b2resg = Cells(12, 4)  
b3resg = Cells(13, 4)  
b4resg = Cells(14, 4)  
b5resg = Cells(15, 4)

b1rra = Cells(19, 4)  
b2rra = Cells(20, 4)  
b3rra = Cells(21, 4)  
b4rra = Cells(22, 4)  
b5rra = Cells(23, 4)

b1prem = Cells(27, 4)  
b2prem = Cells(28, 4)  
b3prem = Cells(29, 4)

b1rr = Cells(33, 4)  
b2rr = Cells(34, 4)  
b3rr = Cells(35, 4)

b1mmv = Cells(39, 4)  
b2mmv = Cells(40, 4)  
b3mmv = Cells(41, 4)  
b4mmv = Cells(42, 4)  
b5mmv = Cells(43, 4)

aresg = Cells(12, 7)  
uresg = Cells(12, 9)  
sresg = Cells(12, 11)  
d1resg = Cells(12, 13)

arra = Cells(20, 7)  
urra = Cells(20, 9)  
srra = Cells(20, 11)  
d1rra = Cells(20, 13)

aprem = Cells(28, 7)  
uprem = Cells(28, 9)  
sprem = Cells(28, 11)  
d1prem = Cells(28, 13)

arr = Cells(34, 7)  
urr = Cells(34, 9)  
srr = Cells(34, 11)  
d1rr = Cells(34, 13)

```

ammv = Cells(40, 7)
ummv = Cells(40, 9)
smmv = Cells(40, 11)
d1mmv = Cells(40, 13)

```

‘Simulação das taxas de resgate

```

For i = 1 To 10000
    matresg_dif(i, 1) = d1resg
Next

```

Randomize

```

For j = 2 To 60
    For i = 1 To 10000 / 2
        u1 = Rnd()
        u2 = Rnd()
        matresg_dif(i, j) = uresg + aresg * (matresg(i, j - 1) - uresg) + sresg * (Cos(2 * Pi
            * u1) * (-2 * Log(u2)) ^ 0.5)
        matresg_dif(2 * i, j) = uresg + aresg * (matresg(i, j - 1) - uresg) + sresg * (Sin(2 *
            Pi * u1) * (-2 * Log(u2)) ^ 0.5)
    Next
Next

```

For j = 1 To 59

```

    somaresg(1) = 0
    For i = 1 To 10000
        matresg_aux(i, j) = Exp(matresg_dif(i, j) + (b1resg + b2resg * Log(1 +
            matdesemp(i, j)) * 100 + b3resg * Log(1 + matpub(i, j + 1)) * 100 + b4resg *
            Log(1 + matpriv(i, j + 1)) * 100 + b5resg * Log(1 + matdesemp(i, j)) * 100 *
            Log(1 + matpriv(i, j + 1)) * 100) / 100) - 1
        If matresg_aux(i, j) > 0 Then
            matresg(i, j) = matresg_aux(i, j)
        Else
            matresg(i, j) = 0
        End If
        somaresg(i + 1) = somaresg(i) + matresg(i, j)
    Next
    medioresg(j) = somaresg(10001) / 10000
Next

```

‘Simulação da soma das taxas de resgate, redução e anulação

```

For i = 1 To 10000
    mattra_dif(i, 1) = d1rra
Next

```

Randomize

```

For j = 2 To 60
    For i = 1 To 10000 / 2
        u1 = Rnd()
        u2 = Rnd()
    Next
Next

```

```

    matrra_dif (i, j) = urra + arra * (matrra(i, j - 1) - urra) + srra * (Cos(2 * Pi * u1) * (-
2 * Log(u2)) ^ 0.5)
    matrra_dif (2 * i, j) = urra + arra * (matrra (i, j - 1) - urra) + srra * (Sin(2 * Pi * u1)
* (-2 * Log(u2)) ^ 0.5)
Next
Next

For j = 1 To 59
    somarra(1) = 0
    For i = 1 To 10000
        matrra_aux(i, j) = Exp(matrra_dif(i, j) + (b1rra + b2rra * Log(1 + matdesemp(i,
j)) * 100 + b3rra * Log(1 + matproc(i, j + 1)) * 100 + b4rra * Log(1 + matpriv(i,
j)) * 100 + b5rra * Log(1 + matproc(i, j + 1)) * 100 * Log(1 + matpriv(i, j)) *
100) / 100) - 1
        If matrra_aux(i, j) > 0 Then
            matrra(i, j) = matrra_aux(i, j)
        Else
            matrra(i, j) = 0.01
        End If
        somarra(i + 1) = somarra(i) + matrra(i, j)
    Next
    mediarra(j) = somarra(10001) / 10000
Next

For i = 1 To 10000
    matprem_dif(i, 1) = d1prem
Next

Randomize
For j = 2 To 60
    For i = 1 To 10000 / 2
        u1 = Rnd()
        u2 = Rnd()
        matprem_dif (i, j) = uprem + aprem * (matprem(i, j - 1) - uprem) + sprem * (Cos(2
* Pi * u1) * (-2 * Log(u2)) ^ 0.5)
        matprem_dif (2 * i, j) = uprem + aprem * (matprem (i, j - 1) - uprem) + sprem *
(Sin(2 * Pi * u1) * (-2 * Log(u2)) ^ 0.5)
    Next
Next

For j = 1 To 49
    somaprem(1) = 0
    For i = 1 To 10000
        matprem_aux(i, j) = Exp(matprem_dif(i, j) + (b1prem + b2prem * (Log(1 +
matot3(i, j + 3)) * 100) ^ 2 + b3prem * Log(1 + matbvl(i, j + 11)) * 100) / 100) -
1
        If matprem_aux(i, j) > 0 Then
            matprem(i, j) = matprem_aux(i, j)
        Else
            matprem(i, j) = 0
    Next
Next

```

```

    End If
    somaprem(i + 1) = somaprem(i) + matprem(i, j)
  Next
  mediaprem(j) = somaprem(10001) / 10000
Next

For i = 1 To 10000
  matrr_dif(i, 1) = d1rr
Next
Randomize
For j = 2 To 60
  For i = 1 To 10000 / 2
    u1 = Rnd()
    u2 = Rnd()
    matrr_dif (i, j) = urr + arr * (matrr(i, j - 1) - urr) + srr * (Cos(2 * Pi * u1) * (-2 *
    Log(u2)) ^ 0.5)
    matrr_dif (2 * i, j) = urr + arr * (matrr (i, j - 1) - urr) + srr * (Sin(2 * Pi * u1) * (-2
    * Log(u2)) ^ 0.5)
  Next
Next

For j = 1 To 50
  somarr(1) = 0
  For i = 1 To 10000
    matrr(i, j) = Exp(matrr_dif(i, j) + (b1rr + b2rr * (Log(1 + matbvl(i, j + 8)) * 100)
    + b3rr * (mat(i, j + 10) * 100) ^ 2 * Log(1 + matbvl(i, j + 8)) * 100) / 100) - 1
    somarr(i + 1) = somarr(i) + matrr(i, j)
  Next i
  mediarr(j) = somarr(10001) / 10000
Next j

For i = 1 To 10000
  matmmv_dif(i, 1) = d1mmv
Next

Randomize
For j = 2 To 60
  For i = 1 To 10000 / 2
    u1 = Rnd()
    u2 = Rnd()
    matmmv_dif (i, j) = ummv + ammv * (matmmv(i, j - 1) - ummv) + smmv * (Cos(2
    * Pi * u1) * (-2 * Log(u2)) ^ 0.5)
    matmmv_dif (2 * i, j) = ummv + ammv * (matmmv (i, j - 1) - ummv) + smmv *
    (Sin(2 * Pi * u1) * (-2 * Log(u2)) ^ 0.5)
  Next
Next

For j = 1 To 50
  somammv(1) = 0
  For i = 1 To 10000

```

```

matmmv(i, j) = Exp(matmmv_dif(i, j) + (b1mmv + b2mmv * Log(1 + matbvl(i, j
+ 8)) * 100 + b3mmv * Log(1 + matot3(i, j)) * 100 + b4mmv * (Log(1 + mat(i, j
+ 10)) * 100) ^ 2 + b5mmv * ((Log(1 + matot3(i, j))) * 100) ^ 2) / 100) - 1
somammv(i + 1) = somammv(i) + matmmv(i, j)
Next i
mediammv(j) = somammv(10001) / 10000
Next j

```

'Projeção dos custos futuros

```

k = Application.Sheets("Intro").Range("C49").Value
a = Application.Sheets("Intro").Range("F50").Value
b = Application.Sheets("Intro").Range("F52").Value
d = Application.Sheets("Intro").Range("F51").Value
N = Application.Sheets("Intro").Range("C52").Value
C1 = Application.Sheets("Intro").Range("AAN8").Value
r = Application.Sheets("Intro").Range("C50").Value

```

```

Dim gt(1 To 40)
For j = 1 To 40
    gt(j) = Cells(96 - j, 2)
Next j

```

```

Dim G(1 To 40)
G(1) = gt(1)
For t = 2 To 40
    G(t) = G(t - 1) + gt(t)
Next t

```

'Construção do vector com o número de pessoas seguras

```

Dim ni(1 To 40)
For x = 1 To 40
    ni(x) = Cells(55 + x, 4)
Next x

```

```

ReDim soma(1 To 40)
For j = 1 To 40
    soma(j) = 0
    For x = 1 To 40 - (j - 1)
        soma(j) = soma(j) + ni(x)
    Next x
Next j

```

'Cálculo do vector dos pesos de cada idade

```

ReDim wx(1 To 40, 1 To 40)
For j = 1 To 40
    For x = 1 To 40 - (j - 1)
        wx(x, j) = ni(x) / soma(j)
    Next x
Next j

```

```

Dim qx(40, 40)
Dim qxs(40, 40)
Dim count(40, 1)

ReDim qxsimul(1 To 40, 1 To N, 1 To 40)
ReDim tpx(1 To 40, 1 To N, 1 To 40) As Double

For i = 1 To 40
    count(i, 1) = Cells(i + 7, 654)
Next i

'Simulação das taxas de mortalidade
For i = 1 To 40
    For j = 1 To count(i, 1)
        qx(i, j) = Cells(i + 7, j + 612)
        qxs(i, j) = Cells(i + 60, j + 612)
    Next j
Next i

For x = 1 To 40

Randomize
For i = 1 To N
    For j = 1 To count(x, 1)
        qxsimul(x, i, j) = qx(x, j) + qxs(x, j) * (Cos(2 * Pi * Rnd())) * (-2 * Log(Rnd())) ^
        0.5)
    Next j
Next i

For i = 1 To N
    tpx(x, i, 1) = 1 - qxsimul(x, i, 1)
    For j = 2 To count(x, 1)
        tpx(x, i, j) = tpx(x, i, j - 1) * (1 - qxsimul(x, i, j))
    Next j
Next i

Next x

ReDim qx_sum(1 To N, 1 To 40)
For i = 1 To N
    For j = 1 To 40
        qx_sum(i, j) = 0
        For x = 1 To 40
            qx_sum(i, j) = qx_sum(i, j) + wx(x, j) * qxsimul(x, i, j)
        Next x
    Next j
Next i

ReDim qx_sum_BE(1 To 40)

```

```

For j = 1 To 40
  qx_sum_BE(j) = 0
  For x = 1 To 40
    qx_sum_BE(j) = qx_sum_BE(j) + wx(x, j) * qx(x, j)
  Next x
Next j

ReDim tpx_sum(1 To N, 1 To 40)
For i = 1 To N
  For j = 1 To 40
    tpx_sum(i, j) = 0
    For x = 1 To 40
      tpx_sum(i, j) = tpx_sum(i, j) + wx(x, j) * tpx(x, i, j)
    Next x
  Next j
Next i

ReDim CSeguro(1 To N, 1 To 40)
For i = 1 To N
  CSeguro(i, 1) = C1
Next i

For i = 1 To N
  For j = 2 To 40
    CSeguro(i, j) = (CSeguro(i, j - 1) * (1 - matrra(i, j + 18)) * (1 - qx_sum(i, j))) * (1 + k) * (1 - gt(j))
  Next j
Next i

'Leitura das taxas spot e cálculo das taxas forward
'Notação do trabalho: P(t1, t2) => Notação no programa: P(t1 + 1, t2 + 1)

ReDim Forward(1 To 40, 1 To 41)
Forward(1, 1) = 0
For t2 = 2 To 41
  Forward(1, t2) = Cells(6 + t2, 36)
Next t2

For t1 = 2 To 40
  For t2 = t1 + 1 To 41
    Forward(t1, t2) = (((1 + Forward(1, t2)) ^ (t2)) / (1 + Forward(1, t1)) ^ t1) ^ (1 / (t2 - t1)) - 1
  Next t2
Next t1

'Implementação dos processos AR(2) para as despesas
desp (1) = Cells(8, 943)
desp (2) = Cells(8, 943)
media_desp = Cells(4, 944)
alfa = Cells(3, 947)
beta = Cells(4, 947)

```

```

For j = 3 To 42
    desp (j) = desp (j - 1) + alfa * (desp (j - 1) - media_desp) + beta * (desp (j - 2) - desp
(j - 1))
Next j

```

```

ReDim prem_fut(1 To N, 1 To 40)
For i = 1 To N
    For j = 1 To 40
        prem_fut(i, j) = matprem(i, j + 6) * CSeguro(i, j)
    Next j
Next i

```

```

ReDim desp_fut (1 To 42)
For j = 3 To 42
    desp_fut (j) = desp (j) * CSeguro(i, j) + prem_fut(i, j)
Next j

```

```

'Garantia de contrasseguro
ReDim prem_pag(1 To N, 1 To 40)
For i = 1 To N
    prem_pag(i, 1) = Cells(4, 695)
Next i

```

```

For i = 1 To N
    For j = 2 To 40
        prem_pag(i, j) = prem_pag(i, j - 1) * (1 + k) + * prem_fut(i, j) - desp_fut(j + 2)
    Next j
Next i

```

```

ReDim CapMorte(1 To N, 1 To 40)
For i = 1 To N
    CapMorte(i, 1) = prem_pag(i, 1)
Next i

```

```

For i = 1 To N
    For j = 2 To 40
        CapMorte(i, j) = (CapMorte(i, 1) * (1 + k) + prem_fut(i, j) - desp_fut(j + 2)) * (1 -
G(j))
    Next j
Next i

```

```

'Participação nos resultados atribuída em 2007
ReDim PRD(1 To N, 1 To 41)
For i = 1 To N
    PRD(i, 1) = Cells(8, 674)
Next i

```

```

'Participação nos resultados atribuída até 2007
ReDim Prd_Atrib(1 To N, 1 To 41)

```

```

For i = 1 To N
  Prd_Atrib(i, 1) = Cells(4, 674)
Next i

```

‘Modelo geral de avaliação

‘Parte do valor simulado do capital seguro até à data (como se fosse isso que aconteceu  
‘até à data de cada simulação, ou seja, até t1, e para a futuro assume-se sempre que a  
‘melhor estimativa das variáveis para efeitos de apuramento da BE

```

ReDim CVida(1 To N, 1 To 40)
ReDim CMorte(1 To N, 1 To 40)
ReDim VResg(1 To N, 1 To 40)
ReDim CSeguroBE(1 To N, 1 To 40, 1 To 41) As Double
ReDim prem_futBE(1 To N, 1 To 40, 1 To 41) As Double
ReDim CVidaBE(1 To N, 1 To 40, 1 To 41) As Double
ReDim VResgBE(1 To N, 1 To 40, 1 To 41) As Double
ReDim CapmorteBE(1 To N, 1 To 40, 1 To 41) As Double
ReDim CMorteBE(1 To N, 1 To 40, 1 To 41) As Double
ReDim BEaux(1 To N, 1 To 40, 1 To 41) As Double
ReDim BEdisc(1 To N, 1 To 40) As Double
ReDim PR(1 To N, 1 To 40)
ReDim PRAux(1 To N, 1 To 40)
ReDim PR_a_at(1 To N, 1 To 41)
ReDim PR_a_ataux(1 To N, 1 To 41)
ReDim PR_at(1 To N, 1 To 41)
ReDim PRD_disc(1 To N, 1 To 40)
ReDim PRDtotal_sumj(1 To N)

```

```

For i = 1 To N
  PR_a_ataux(i, 1) = Cells(8, 1127)
  PRDtotal_sumj(i) = 0
  PR_at(i, 1) = Cells(8, 1081)
  For j = 1 To 40
    CVida(i, j) = gt(j) * (C1 + Prd_Atrib(i, j)) * (1 - G(j))
    CMorte(i, j) = (CapMorte(i, j) + Prd_Atrib(i, j)) * (1 - gt(j)) * qx_sum(i, j)
    VResg(i, j) = (CapMorte(i, j) + Prd_Atrib(i, j)) * (1 - gt(j)) * matresg(i, j + 18) *
    (1 - r)
    CSeguroBE(i, j, j) = CSeguro(i, j)
    CapmorteBE(i, j, j) = CapMorte(i, j)
    For t2 = j + 1 To 41
      CSeguroBE(i, j, t2) = (CSeguroBE(i, j, t2 - 1) * (1 - mediarra(t2 - 1 + 18) -
      qx_sum_BE(t2 - 1)) * (1 - gt(t2 - 1))) * (1 + k)
      CVidaBE(i, j, t2) = gt(t2 - 1) * (CSeguroBE(i, j, t2) + Prd_Atrib(i, t2 - 1))
      prem_futBE(i, j, t2) = mediaprem(t2 - 1 + 6) * CSeguroBE(i, j, t2)
      CapmorteBE(i, j, t2) = (CapmorteBE(i, j, t2 - 1) * (1 + k) - desp_fut(t2 +
      1)) + prem_futBE(i, j, t2)
      CMorteBE(i, j, t2) = (CapmorteBE(i, j, t2) + Prd_Atrib(i, t2 - 1)) * (1 -
      G(t2 - 1)) * qx_sum_BE(t2 - 1)
    
```

```

    VResgBE(i, j, t2) = (CapmorteBE(i, j, t2) + Prd_Atrib(i, t2 - 1)) * (1 - gt(t2
- 1)) * mediaresg(t2 - 1 + 18) * (1 - r)
    desp_fut(i, j, t2) = desp_fut1(t2 + 1) * CSeguroBE(i, j, t2) + desp_fut2(t2 +
1) * prem_futBE(i, j, t2)
Next t2
    BEaux(i, j, 1) = 0
    For t3 = j + 1 To 41
        BEaux(i, j, t3) = (CVidaBE(i, j, t3) + CMorteBE(i, j, t3) + VResgBE(i,
j, t3) + desp_fut(i, j, t3) - prem_futBE(i, j, t3)) * (1 + Forward(j, t3)) ^
(j - t3)
    Next t3
    BEdisc(i, j) = 0
    For m = j + 1 To 41
        BEdisc(i, j) = BEdisc(i, j) + BEaux(i, j, m)
    Next m
    PRAux(i, j) = a * ((matrr(i, j + 8) - k) * BEdisc(i, j))
    If PRAux(i, j) > 0 Then
        PR(i, j) = PRAux(i, j)
    Else
        PR(i, j) = 0
    End If
    PR_a_ataux(i, j + 1) = (1 - b) * PR_a_ataux(i, j) * (1 + Forward(j, j + 1)) +
matmmv(i, j + 1 + 8) * BEdisc(i, j)
    If j > 1 Then
        If matmmv(i, j + 1 + 8) < 0 Then
            PR_a_ataux(i, j + 1) = (1 - b) * PR_a_ataux(i, j) * (1 + Forward(j, j + 1))
+ (matmmv(i, j + 1 + 8) * BEdisc(i, j) + matmmv(i, j + 8) * BEdisc(i, j -
1))
        End If
    End If
    If PR_a_ataux(i, j + 1) > 0 Then
        PR_a_at(i, j + 1) = PR_a_ataux(i, j + 1)
    Else
        PR_a_at(i, j + 1) = 0
    End If
    PR_at(i, j + 1) = (1 - d) * PR_at(i, j) + b * PR_a_at(i, j + 1) + PR(i, j)
    PRD(i, j + 1) = d * PR_at(i, j + 1)
    PRD_disc(i, j) = PRD(i, j + 1) * (1 + Forward(1, j + 1)) ^ (-j)
    PRDtotal_sumj(i) = PRDtotal_sumj(i) + PRD_disc(i, j)
    Prd_Atrib(i, j + 1) = Prd_Atrib(i, j) * (1 + k) + PRD(i, j + 1)
Next j
Next i

Dim PRDtotal_sumi As Double
Dim PRDtotal_media As Double
For i = 1 To N
    PRDtotal_sumi = PRDtotal_sumi + PRDtotal_sumj(i)
Next
PRDtotal_media = PRDtotal_sumi / N

```

```

Dim Sum As Double
Dim Best_media As Double
For i = 1 To N
    Sum = Sum + BEdisc(i, 1)
Next
Best_media = Sum / N

For j = 1 To 1000
    Cells(112 + j, 3) = PRDtotal_sumj(j)
Next

‘Cálculo do quantil 5% da Participação nos Resultados total
For m = 1 To N * 0.95 + 1
    somamat005 = 0
    For i = 1 To N - m
        If PRDtotal_sumj(i + m) > PRDtotal_sumj(m) Then
            aux = PRDtotal_sumj(m)
            PRDtotal_sumj(m) = PRDtotal_sumj(i + m)
            PRDtotal_sumj(i + m) = aux
            somamat005 = somamat005 + PRDtotal_sumj(i)
        End If
    Next
Next
Cells(106, 2) = 0.95 * PRDtotal_sumj(N * 0.95 + 1) + (1 - 0.95) * PRDtotal_sumj(N * 0.95)

‘Cálculo do quantil 10% da Participação nos Resultados total
For m = 1 To N * 0.9 + 1
    somamat10 = 0
    For i = 1 To N - m
        If PRDtotal_sumj(i + m) > PRDtotal_sumj(m) Then
            aux = PRDtotal_sumj(m)
            PRDtotal_sumj(m) = PRDtotal_sumj(i + m)
            PRDtotal_sumj(i + m) = aux
            somamat10 = somamat10 + PRDtotal_sumj(i)
        End If
    Next
Next
Cells(106, 3) = 0.9 * PRDtotal_sumj(N * 0.9 + 1) + (1 - 0.9) * PRDtotal_sumj(N * 0.9)

‘Cálculo do quantil 25% da Participação nos Resultados total
For m = 1 To N * 0.75 + 1
    somamat25 = 0
    For i = 1 To N - m
        If PRDtotal_sumj(i + m) > PRDtotal_sumj(m) Then
            aux = PRDtotal_sumj(m)
            PRDtotal_sumj(m) = PRDtotal_sumj(i + m)
            PRDtotal_sumj(i + m) = aux
            somamat25 = somamat25 + PRDtotal_sumj(i)
        End If
    Next

```

```

Next
Next
Cells(106, 4) = 0.75 * PRDtotal_sumj(N * 0.75 + 1) + (1 - 0.75) * PRDtotal_sumj(N *
0.75)

‘Cálculo da mediana da Participação nos Resultados total
For m = 1 To N * 0.5 + 1
    somamat50 = 0
    For i = 1 To N - m
        If PRDtotal_sumj(i + m) < PRDtotal_sumj(m) Then
            aux = PRDtotal_sumj(m)
            PRDtotal_sumj(m) = PRDtotal_sumj(i + m)
            PRDtotal_sumj(i + m) = aux
            somamat50 = somamat50 + PRDtotal_sumj(i)
        End If
    Next
Next
Cells(106, 5) = 0.5 * PRDtotal_sumj(N * 0.5 + 1) + (1 - 0.5) * PRDtotal_sumj(N * 0.5)

‘Cálculo do quantil 75% da Participação nos Resultados total
For m = 1 To N * 0.75 + 1
    somamat75 = 0
    For i = 1 To N - m
        If PRDtotal_sumj(i + m) < PRDtotal_sumj(m) Then
            aux = PRDtotal_sumj(m)
            PRDtotal_sumj(m) = PRDtotal_sumj(i + m)
            PRDtotal_sumj(i + m) = aux
            somamat75 = somamat75 + PRDtotal_sumj(i)
        End If
    Next
Next
Cells(106, 6) = 0.75 * PRDtotal_sumj(N * 0.75 + 1) + (1 - 0.75) * PRDtotal_sumj(N *
0.75)

‘Cálculo do quantil 90% da Participação nos Resultados total
For m = 1 To N * 0.9 + 1
    somamat90 = 0
    For i = 1 To N - m
        If PRDtotal_sumj(i + m) < PRDtotal_sumj(m) Then
            aux = PRDtotal_sumj(m)
            PRDtotal_sumj(m) = PRDtotal_sumj(i + m)
            PRDtotal_sumj(i + m) = aux
            somamat90 = somamat90 + PRDtotal_sumj(i)
        End If
    Next
Next
Cells(106, 7) = 0.9 * PRDtotal_sumj(N * 0.9 + 1) + (1 - 0.9) * PRDtotal_sumj(N * 0.9)

‘Cálculo do quantil 95% da Participação nos Resultados total
For m = 1 To N * 0.95 + 1

```

```
somamat995 = 0
  For i = 1 To N - m
    If PRDtotal_sumj(i + m) < PRDtotal_sumj(m) Then
      aux = PRDtotal_sumj(m)
      PRDtotal_sumj(m) = PRDtotal_sumj(i + m)
      PRDtotal_sumj(i + m) = aux
      somamat995 = somamat995 + PRDtotal_sumj(i)
    End If
  Next
Next
Cells(106, 8) = 0.95 * PRDtotal_sumj(N * 0.95 + 1) + (1 - 0.95) * PRDtotal_sumj(N *
0.95)

End Sub
```

-----

Devido à excessiva dimensão do programa realizado para implementar a segunda metodologia, optou-se por não apresentá-lo em anexo, sendo possível acedê-lo, mediante a sua requisição, em dispositivo electrónico. O programa foi desenvolvido no software R.