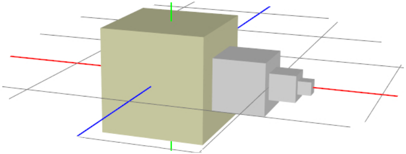


Tema 3: Transformaciones Geométricas

J. Ribelles

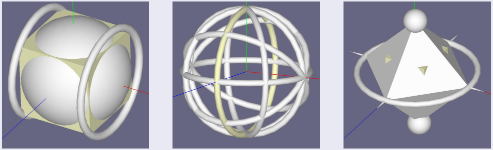
SIE020: Síntesis de Imagen y Animación
Institute of New Imaging Technologies, Universitat Jaume I

Contenido

Introducción

¿Por qué las necesitamos?

- En la etapa de modelado los objetos se definen bajo un sistema de coordenadas propio.
- A la hora de crear una escena, estos objetos se incorporan bajo un nuevo sistema de coordenadas conocido como sistema de coordenadas del mundo.
- Este cambio de sistema de coordenadas es necesario y se realiza mediante transformaciones geométricas.



Transformaciones básicas

Traslación

- Consiste en desplazar el punto $p = (p_x, p_y, p_z)$ mediante un vector $t = (t_x, t_y, t_z)$ de manera que el nuevo punto $q = (q_x, q_y, q_z)$:

$$q_x = p_x + t_x, \qquad q_y = p_y + t_y, \qquad q_z = p_z + t_z \tag{1}$$

- La representación matricial con coordenadas homogéneas:

$$T(t) = T(t_x, t_y, t_z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 0 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 0 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

- Utilizando esta representación, el nuevo punto se obtiene así:

$$\tilde{q} = T(t) \cdot \tilde{p} \tag{3}$$

Escalado

- Consiste en multiplicar el punto $p = (p_x, p_y, p_z)$ con los factores de escala s_x, s_y y s_z de tal manera que el nuevo punto $q = (q_x, q_y, q_z)$:

$$q_x = p_x \cdot s_x, \qquad q_y = p_y \cdot s_y, \qquad q_z = p_z \cdot s_z \tag{4}$$

- La representación matricial con coordenadas homogéneas:

$$S(s) = S(s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

- Utilizando esta representación, el nuevo punto se obtiene así:

$$\tilde{q} = S(s) \cdot \tilde{p} \tag{6}$$

Rotación

- Gira un punto un ángulo ϕ alrededor de un eje.
- La representación matricial con coordenadas homogéneas:

$$R_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$R_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

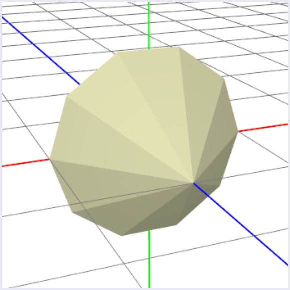
$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

- Utilizando esta representación, el nuevo punto se obtiene así:

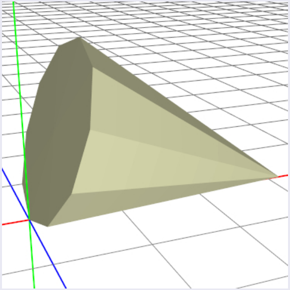
$$\tilde{q} = R(\phi) \cdot \tilde{p} \tag{10}$$

Ejercicio

Determina las transformaciones que situan al cono que se muestra en la figura (a) (radio de la base y altura uno) en la posición que se muestra en la figura (b) (radio de la base uno y altura tres).



(a)



(b)

Concatenación de Transformaciones

Descripción

- Las transformaciones geométricas en su forma matricial con coordenadas homogéneas se pueden concatenar.
- Una sola matriz puede representar a toda una secuencia de matrices de transformación.
- Es muy importante operar la secuencia de transformaciones en el orden correcto ya que el producto de matrices no posee la propiedad conmutativa.
    - Dibuja en el papel como quedaría una esfera de radio unidad centrada en el origen dadas las dos siguientes matrices de transformación $T(5,0,0)$ y $S(5,5,5)$ si las matrices se multiplican de las dos formas posibles, es decir, $M = T \cdot S$ y $M = S \cdot T$.

Matriz de Transformación de la Normal

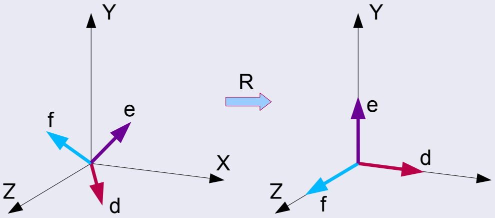
Descripción

- La matriz de transformación no siempre es válida para los vectores normales a la superficie.
- Lo habitual es que la matriz de transformación de la normal N sea la traspuesta de la inversa de la matriz de transformación.
  - Sin embargo, la matriz inversa no siempre existe por lo que se recomienda que la matriz N sea la traspuesta de la matriz adjunta.
  - Como la normal es un vector y la traslación no le afecta, y el escalado y la rotación son transformaciones afines, solo hay que calcular la adjunta de los 3x3 componentes superior izquierda.
- Las longitudes de las normales no se preservan si hay una transformación de escalado, por lo que es necesario normalizarlas.

Giro alrededor de un Eje arbitrario

Descripción

- Sean d y ϕ el vector unitario del eje de giro y el ángulo de giro.
- Hay que calcular una base ortogonal que contenga a d.
- La idea es hacer un cambio de base entre la base que forman los ejes de coordenadas y la nueva base.



Cálculo de la matriz R

- La matriz que representa al cambio de base es esta:

$$R = \begin{pmatrix} d_x & d_y & d_z \\ e_x & e_y & e_z \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix} \tag{11}$$

- e es un vector unitario normal a d.
- f es el producto vectorial de los otros dos vectores $f = d \times e$
- El vector e se puede obtener de la siguiente manera:
  - Partiendo del vector d haz cero su componente de menor magnitud.
  - Intercambia los otros dos componentes y niega uno de ellos.
  - Normalízalo.
- Teniendo en cuenta que R es ortogonal, la matriz de rotación final:

$$R_d(\phi) = R^T R_x(\phi) R \tag{12}$$

Transformaciones en OpenGL

La librería GLM

Proporciona funciones tanto para la construcción de las matrices de transformación como para operar con ellas:

- mat4 translate (float t_x, float t_y, float t_z)
- mat4 scale (float s_x, float s_y, float s_z)
- mat4 rotate (float α, float x, float y, float z)

```
// Para obtener la matriz de transformacion del modelo
mat4 T, S, M;
T = translate (10.0f, 0.0f, 0.0f);
S = scale (2.0f, 2.0f, 2.0f);
M = T*S;

// Para obtener la matriz normal N
mat3 N (mat3(transpose(inverse(M))));
```

¿Dónde calcular las matrices?

La construcción de ambas matrices, la matriz de transformación del modelo y la matriz de transformación de la normal, es conveniente que tenga lugar en la aplicación y que ambas se suministren al procesador de vértices.

Listado 1: Shader para transformar la posición y la normal de cada vértice

```
uniform mat4 M; // matriz de transformacion del modelo
uniform mat3 N; // matriz de transformacion de la normal

in  vec3 posicion, vNormal;
out vec3 normal;

void main ()
{
  normal = normalize (N * vNormal);
  gl_Position = M * vec4(posicion, 1.0);
}
```