



**UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA**

**INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO**

**MESTRADO EM: Ciências Actuariais**

**SISTEMA DE BONUS-MALUS PARA FROTAS DE VEÍCULOS**

Elisabete da Conceição Pires de Almeida Nora

**Orientação:** Doutor Pedro Alexandre da Rosa Corte Real

**Júri:**

**Presidente:** Doutora Maria de Lourdes Caraças Centeno

**Vogais:** Doutor João Manuel de Sousa Andrade e Silva

Doutor Pedro Alexandre da Rosa Corte Real

Doutora Isabel Maria Ferraz Cordeiro

**Agosto/ 2004**

## GLOSSÁRIO DE TERMOS

$\vec{d}_{fi}$  - duração de observação do veículo  $i$  da frota  $f$

$m_f$  - dimensão da frota  $f$

$M_n$  - valor resultante da função de log-verosimilhança

$\mathbb{N}$  - conjunto dos números inteiros

$N_{fi}$  - número de sinistros declarados pelo veículo  $i$  da frota  $f$

$o(h)$  - infinitésimo com  $h$  de uma função

$\hat{p}$  - estimador de credibilidade

$\mathfrak{R}$  - conjunto dos números reais

$R_f$  - heterogeneidade residual na distribuição do risco da frota

$S_{fi}$  - heterogeneidade residual na distribuição do risco do veículo

$U_{fi}$  - heterogeneidade residual na distribuição do número de sinistros

$\vec{x}'_f$  - componente de regressão relacionada com a frota

$\vec{z}'_{fi}$  - componente de regressão relacionada com o veículo

$\vec{\gamma}$  - parâmetro relacionado com a frota

$\vec{\delta}$  - parâmetro relacionado com o veículo

$\vec{\lambda}_{fi}$  - frequência de sinistralidade do veículo  $i$  da frota  $f$

$\rho$  - percentagem de “turnover”

$\omega$  - factor de credibilidade

## RESUMO

Esta dissertação tem como objectivo a construção de um sistema de Bonus-Malus para frotas de veículos, tendo por base o conhecimento da sinistralidade histórica e utilizando os factores individuais dos veículos e das empresas a que correspondem as frotas.

Os coeficientes de bonus-malus são obtidos através das credibilidades específicas do veículo e da frota, tendo em atenção o “turnover” esperado para os veículos de cada frota. A expressão “turnover” indica-nos a percentagem de veículos da frota que, por hipótese, poderão entrar em rotatividade, isto é, supõe-se a possibilidade de existir entradas e saídas de veículos.

As frotas são indexadas por  $f = 1, \dots, F$ , e os veículos são indexados por  $i = 1, \dots, m_f$ , onde  $m_f$  é a dimensão, ou seja, o número de veículos da frota  $f$ . Supondo que o número de sinistros  $N_{fi} \sim P(\lambda_{fi})$  segue uma distribuição de Poisson, o parâmetro  $\lambda_{fi} = d_{fi} \exp(x_f \gamma + z_{fi} \delta)$  será uma função dos factores de avaliação observados ao nível da frota ( $x_f$ ) e do veículo ( $z_{fi}$ ), onde  $d_{fi}$  é a duração de observação do veículo  $i$  da frota  $f$ .

Obtemos o conjunto de estimadores  $\hat{\gamma}$  e  $\hat{\delta}$ , utilizando a Pseudo-Máxima Verosimilhança e o método proposto por Mexia/Corte Real, que se baseia nos Estimadores Extremais, para um conjunto de dados Portugueses, relativos ao período de Novembro de 1997 a Janeiro de 2003. Algumas conclusões serão apresentadas, de acordo com os dados analisados.

**Palavras chave:** Bonus-Malus, credibilidade, veículo, frota, Pseudo-Máxima Verosimilhança, Estimadores Extremais.

# ABSTRACT

The purpose of this thesis is to provide Bonus-Malus System for fleets of vehicles from the history of claims, using the individual characteristics of both the vehicles and the carriers.

Bonus-malus coefficients are obtained from vehicle-specific and fleet-specific credibilities. Coefficients take into account an expected turnover for the vehicles within the fleets. The expression “turnover“ means the percentage of vehicles within the fleet that, by assumption, could take in rotation, because we suppose that exists the possibility of getting in and going out vehicles in the fleet.

Indexing the fleets by  $f = 1, \dots, F$ , and the vehicles by  $i = 1, \dots, m_f$ , where  $m_f$  is the size, that is, the number of vehicles of the fleet  $f$ , if the number of claims  $N_{fi} \sim \mathbf{P}(\lambda_{fi})$  follows a Poisson distribution, we obtain the estimator of the parameter  $\lambda_{fi} = d_{fi} \exp(x_f \gamma + z_{fi} \delta)$ , which will be a function of rating factors observed at the fleet level ( $x_f$ ) and at the vehicle level ( $z_{fi}$ ), with  $d_{fi}$  the duration of the observation period for the vehicle  $i$  in the fleet  $f$ .

We obtain a set of estimators  $\hat{\gamma}$  and  $\hat{\delta}$  using the pseudo maximum-likelihood and the method proposed by *Mexia/Corte Real*, which is based on extremal estimators, for a set of Portuguese data, considering the period from November 1997 to January 2003. Some conclusions are drawn regarding the data analyzed.

**Keywords:** Bonus-malus, credibility, vehicle, fleet, pseudo maximum likelihood, extremal estimators.

# ÍNDICE

<b>Prefácio</b>	<b>9</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>14</b>
<b>1. Sistemas de Bonus-Malus</b>	<b>15</b>
1.1. Tarificação a posteriori	15
1.2. Definição de um Sistema de Bonus-Malus	19
<b>2. Sinistralidade</b>	<b>24</b>
2.1. Modelo de Poisson Homogéneo – Carteira Homogénea	25
2.2. Modelo de Poisson Misto – Carteira Heterogénea	27
2.3. Modelo de Poisson com factores aleatórios numa Carteira estratificada	29
2.3.1. Estimadores Extremais	36
2.3.2. Método de Pseudo-Máxima Verosimilhança	39
<b>3. Teoria da Credibilidade</b>	<b>44</b>
3.1. Fórmula Básica de Credibilidade	45
3.2. Modelo de <i>Bühlmann</i>	48
3.3. Credibilidade no Seguro de Frotas para Veículos	52
<b>4. Estatística Descritiva da Carteira</b>	<b>56</b>
4.1. Características Gerais	56
4.2. Factores Específicos da Frota	58
4.3. Factores Específicos do Veículo	62
<b>5. Aplicação a uma Carteira Portuguesa</b>	<b>66</b>
5.1. Parâmetros Relacionados com a Frota e o Veículo	66
5.2. Sinistralidade	71

5.3. Estimadores das Variâncias	74
5.4. Coeficientes de Bonus-Malus	76
5.5. Sistemas Óptimos Bonus-Malus para veículos, segundo <i>Bühlmann</i>	83
5.6. Prémio Puros versus Indemnizações	92
<b>Conclusões</b>	<b>94</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>98</b>
<b>Anexo</b>	<b>101</b>

## LISTA DE TABELAS

2.1. Exemplo de famílias exponenciais lineares	41
4.1. Distribuição da amostra, de acordo com as variáveis específicas das frotas	60
4.2. Distribuição da amostra, de acordo com as variáveis específicas dos veículos	64
5.1. Estimação dos parâmetros através do Método de Pseudo-Máxima Verosimilhança e do Método <i>Mexia/Corte Real</i>	68
5.2. Função de Log-Verosimilhança e Soma dos Quadrados dos Resíduos	69
5.3. Comparação entre o n.º de sinistros observados e os esperados pelo Método de Pseudo-Máxima Verosimilhança e Método <i>Mexia/Corte Real</i>	72
5.4. Estimadores das variâncias	74
5.5. Factor de credibilidade médio para frotas e veículos de acordo com as variáveis específicas das frotas	76
5.6. Desvio padrão dos coeficientes de bonus-malus de acordo com as variáveis específicas das frotas	78
5.7. Sistema Ótimo Bonus-Malus para frotas de “aluguer de curta duração” – Modelo de Bühlmann	86
5.8. Bónus aplicado ao prémio das frotas de “aluguer de curta duração”, por cada ano sem sinistros	87
5.9. Agravamento aplicado ao prémio das frotas de “aluguer de curta duração”, consoante a sinistralidade declarada	88
5.10. Exemplo de uma distribuição observada para o número de sinistros	89
5.11. Sistema Ótimo Bonus-Malus para frotas de “transporte de mercadorias” – Modelo de Bühlmann	90
5.12. Sistema Ótimo Bonus-Malus para frotas de “transporte de carga” – Modelo de Bühlmann	90
5.13. Sistema Ótimo Bonus-Malus para frotas de “transportador independente (outros)” – Modelo de Bühlmann	91
5.14. Comparação entre montante de indemnizações pagas e prémios puros estimados	93

## LISTA DE FIGURAS

4.1. Distribuição dos veículos por marcas	57
4.2. Distribuição da amostra, segundo a “dimensão da frota”	61
4.3. Distribuição da amostra, segundo os “anos da empresa”	61
4.4. Distribuição da amostra, segundo o “sector de actividade”	61
4.5. Distribuição da amostra, segundo o “peso bruto”	65
4.6. Distribuição da amostra, segundo o “tipo de uso”	65
4.7. Distribuição da amostra, segundo o “tipo de combustível”	65
4.8. Distribuição da amostra, segundo a “cilindrada”	65
5.1. Comparação entre o n.º de sinistros observados e o n.º de sinistros esperados	73
5.2. Prémio de credibilidade, segundo a sinistralidade de cada frota	81



## PREFÁCIO

Os Sistemas de Bonus-Malus foram criados para se poderem ajustar os prémios, *a posteriori*, de acordo com a sinistralidade histórica do condutor, necessidade bem sintetizada numa frase de *Centeno (2002)*, “(...) o melhor predictor do número futuro de sinistros não é a idade do condutor ou do carro, a sua cilindrada ou potência, mas sim a experiência passada.”

No cálculo do prémio, as Seguradoras agrupam os riscos em classes mais ou menos homogêneas, de modo a controlar o risco e a simplificar o esquema de tarifação. Por exemplo, para os veículos ligeiros individuais, os factores são agrupados em classes de modo a tentar chegar ao comportamento real dos segurados.

Assim, as classes mais comuns tipificam-se por: cilindrada/potência, idade do condutor, idade da carta, zona de residência (na falta de zona de circulação), o tipo de combustível (na falta de quilometragem anual). Estes são factores que nos vão ajudar a tentar compreender qual o tipo de condução e comportamento de cada condutor no seu dia-a-dia.

Através da cilindrada/potência podemos tentar perceber qual o tipo de condução efectuada, pois quanto maior for este valor, maior será a velocidade que o veículo pode atingir. Segundo a idade do condutor percebemos a maturidade do mesmo, enquanto que através da idade da carta sabemos se o condutor tem já alguma experiência de condução ou não. Através da zona de residência como do tipo de combustível, podemos tentar perceber qual a exposição ao risco do condutor, pois se a zona de residência

coincidir com zonas urbanas ou se o veículo for a gasóleo, em princípio, existe um maior risco de sinistralidade.

No entanto, em Portugal não existe, em geral, um Sistema de Bonus-Malus específico para frotas de veículos. Grande parte das Seguradoras o que fazem, habitualmente, é aplicar o sistema de bonus-malus do seguro automóvel individual, analisando veículo a veículo, e desprezando o facto de estarem perante um conjunto de veículos com factores semelhantes, como por exemplo, o sector de actividade das frotas.

A prática exercida pela Seguradora em estudo é analisar a sinistralidade agregada dos veículos pertencentes a cada frota e, a partir daí, renovar o contrato de seguro com novo prémio para a anuidade seguinte, sem recorrer a qualquer Sistema de Bonus-Malus.

Desta forma, as empresas, a que correspondem as frotas, desconhecem completamente qual o agravamento ou bónus que se irá reflectir na anuidade seguinte, o que pode prejudicar a “*sede de bónus*”, isto é, a transferência de responsabilidade de pequenos sinistros para o segurado. Não existindo esta transferência de responsabilidade, além de aumentar o montante das indemnizações a pagar, a Seguradora irá ter um acréscimo de trabalho na gestão de sinistros que, sendo de baixos montantes, têm despesas de gestão proporcionalmente elevadas.

Feita esta introdução, cumpre-nos salientar que o trabalho está dividido em cinco Capítulos e o seu principal objectivo é ajudar a colmatar uma lacuna no mercado segurador, ou seja, construir um Sistema de Bonus-Malus para frotas de veículos. Assim sendo, iremos propor um Sistema para cada sector de actividade das empresas, seguindo o modelo proposto por *Desjardins, Dionne & Pinquet (2001)* que tem como principal

característica supor que o número de sinistros segue uma distribuição de Poisson, em que o parâmetro  $\lambda$  se escreve em função dos factores de avaliação da frota e do veículo.

No primeiro Capítulo fazemos uma breve introdução aos Sistemas de Bonus-Malus, explicando a sua importância na tarifação *a posteriori* e apresentando uma definição geral.

O segundo Capítulo apresenta três modelos possíveis para explicar a distribuição do número de sinistros, sendo o último o que melhor se adapta à nossa abordagem, pois propomos a análise com base numa Carteira estratificada por frotas. Além disso, apresentamos dois métodos para obter os estimadores: o método de Pseudo-Máxima Verosimilhança e o método proposto por *Mexia & Corte Real (2003)*.

É importante salientar que nos seguros de frotas de veículos, a Carteira está dividida em estratos (as frotas), onde a cada frota corresponde uma empresa. Neste tipo de contratos não temos qualquer informação sobre o condutor habitual, assim a entrada de um novo veículo apenas poderá ser relacionado com a frota a que este pertence. O modelo proposto agrupa os riscos de acordo com os factores individuais das frotas e dos veículos, considerando que o número de sinistros de cada frota segue uma distribuição de Poisson.

No terceiro Capítulo é feita uma pequena abordagem à teoria da credibilidade, fazendo-se especial referência ao modelo apresentado por *Bühlmann (1967)*. Por último apresentamos os coeficientes de bonus-malus que serão obtidos através dos factores de credibilidade específicos da frota e do veículo. Estes coeficientes para o período

seguinte irão depender do “turnover” esperado para os veículos da frota, de acordo com o modelo apresentado pelos autores acima referidos.

Este modelo será aplicado a uma base de dados de uma Companhia de Seguros Portuguesa. A Carteira de seguros estudada tem 2.698 frotas, que em média representa 9 veículos por frota, somando um total de 24.697 veículos. Toda a análise feita à amostra em estudo será apresentada no Capítulo quatro.

A maior parte das frotas pertencem ao sector de actividade que explora os veículos de aluguer de curta duração. Neste tipo de sector considerámos os veículos que podem ser alugados num curto espaço de tempo (por exemplo, os veículos que os turistas alugam nas férias) e os veículos alugados pelas empresas para desenvolver a actividade profissional, negócio esse recente, mas em grande expansão no nosso país, dado que as empresas preferem não investir em novos veículos. Este negócio surgiu na década de sessenta nos Estados Unidos e na Europa Ocidental.

Estes contratos de gestão de frotas, ou tecnicamente chamados de Aluguer Operacional de Viaturas, são efectuados por períodos que podem ir de dois a cinco anos, onde as empresas podem usufruir de um determinado número de serviços, entre eles a isenção do pagamento de qualquer tipo de seguro para os veículos, do Imposto Municipal, e ainda beneficiam de Assistência em Viagem (em caso de avaria mecânica, acidente, perda de chaves, falta de gasolina, falhas de bateria e/ou furto da viatura), manutenção e revisão do veículo, cartão de combustível, etc. Em contrapartida, têm que pagar uma renda mensal pela utilização do veículo e pelos serviços que lhe são fornecidos, mas permite às empresas dedicarem exclusivamente ao seu negócio, sem terem que se preocupar com a gestão de frotas.

No último Capítulo, apresentamos todos os resultados necessários à estimação da sinistralidade, por forma a obtermos os coeficientes de bonus-malus. Daremos, ainda, alguns exemplos de quais os bônus ou agravamentos que os prémios poderão sofrer e, para finalizar, propomos Sistemas de Bonus-Malus que poderão ser utilizados consoante o sector de actividade da empresa a que corresponde a frota, não tendo a preocupação de encontrar o sistema óptimo de acordo com a abordagem.

Neste trabalho ficam em aberto algumas questões que poderão ser estudadas futuramente:

1. Perceber qual a variável que melhor caracteriza as frotas para encontrar o Sistema de Bonus-Malus óptimo, pois apenas entrámos em consideração com o Sector de Actividade (variável que mais concentrava os veículos numa só classe);
2. Fazer uma análise de sensibilidade aos factores utilizados e tentar perceber se existem outros que melhor caracterizam tanto veículos como frotas;
3. Determinar os factores com maior relevância na determinação da sinistralidade.
4. Comparar os valores de Bonus-Malus obtidos através da Teoria da Credibilidade e o Modelo de Bühlmann.

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de começar por agradecer ao Prof. Doutor Pedro Corte Real pela sua orientação, ajuda e ensinamentos científicos que me transmitiu. Para além disso, agradeço a sua simpatia e a força que sempre me deu, pois foram essenciais na concretização desta dissertação.

Ao Prof. Doutor João Tiago Praça Nunes Mexia pelo interesse e conselhos indispensáveis a este trabalho, assim como a amizade e disponibilidade com que sempre me atendeu.

Ao Dr. João Cordovil e à Dra. Isabel Saraiva Gomes a possibilidade que me foi concedida de frequentar este Mestrado, assim como a disponibilidade em tempo para concluir esta dissertação. Para além disso, agradeço a amizade e os conhecimentos técnicos que sempre me transmitiram.

À Companhia de Seguros, na pessoa do seu Director da Área Técnica I por ter autorizado a utilização da informação disponível na empresa na aplicação prática desta dissertação. Em especial, à actuária deste departamento, pela ajuda preciosa na interpretação da base de dados.

Ao Prof. Doutor Walther Neuhaus pelo interesse demonstrado e ajuda fundamental na procura de bibliografia na fase inicial deste trabalho.

À minha família e amigos que sempre me apoiaram e incentivaram ao longo deste tempo. Um agradecimento muito especial à minha mãe que toda a vida me apoiou nas minhas decisões.

Finalmente, uma palavra de grande agradecimento à pessoa que mais amo neste mundo, o meu marido, pela sua infinita paciência ao longo de todos estes anos de estudo.

Obrigada!

# CAPÍTULO 1

## SISTEMAS DE BONUS-MALUS

### 1.1. Tarifação *a posteriori*

A actividade Seguradora exige, na sua gestão, uma constante busca de equilíbrio técnico. As receitas (prémios a pagar pelos segurados) devem equilibrar as despesas (indenizações, custos de produção e gestão, resseguro) e gerar lucros. Caso contrário, a manutenção de sucessivos resultados negativos poderá conduzir a empresa à ruína.

A Seguradora elabora então as tarifas de prémios que devem cobrir os riscos a garantir, satisfazendo as despesas inerentes à exploração, utilizando técnicas de tarificação *a priori* e, no ramo automóvel, também *a posteriori*.

Considerando o Ramo Automóvel, a tarificação *a priori* determina o prémio em função de determinadas variáveis, tais como a idade do condutor, o tipo de veículo, a zona de circulação, etc., de modo a encontrar classes homogéneas para determinado grau de risco do segurado/condutor. No entanto, existem factores, nos segurados/condutores, que não são mensuráveis, como por exemplo, a região preferencial de condução ou a boa/má experiência de condução. Por outro lado, existem factores possíveis de medir,

mas que nem sempre funcionam porque muitas vezes o tomador de seguro não é o condutor habitual, sendo este apenas conhecido pela Seguradora quando ocorre a participação de sinistro.

A tarificação *a posteriori* procede ao ajustamento do prémio, de acordo com a sinistralidade, de modo a que este se aproxime do risco que o segurado/condutor representa para a Seguradora para que assim exista uma maior equidade na definição dos prémios.

Esta equidade constitui a base do contrato de seguro, sendo que, presentemente, a definição de contrato pouco difere da que o português *Pedro de Santarém* incluiu, em 1552, no seu tratado de seguros “*Tractatus de Assecurationibus et Sponsionibus*”, assim expressa “(...) a convenção pela qual, convencionando o preço dum risco, um toma sobre si o infortúnio de outro.” Este tratado pode ser consultado em *Santarém (1971)*.

A esta definição de *Pedro de Santarém* há que acrescentar os valores da mutualidade que estão nas bases técnicas que orientam a actividade das Seguradoras. *Picard & Besson (1982)* dizem no seu tratado que “esta técnica de seguros repousa essencialmente sobre a existência de uma mutualidade, ou seja, na agregação de riscos com certas características de dispersão, de homogeneidade e de frequências, riscos que a Seguradora deve, inspirando-se na lei dos grandes números, relacionar para poder efectuar a repartição e a compensação, seguindo os dados estatísticos.”

Os Sistemas de Bonus-Malus aparecem então como uma ferramenta importante na tarificação *a posteriori*, agravando ou reduzindo o prémio de acordo com a sinistralidade passada. Este sistema tenta também incentivar os condutores a uma condução mais



cuidadosa, podendo mesmo levá-los a não participar sinistros de pequena gravidade, dando assim origem ao fenómeno denominado “*sede de bónus*”.

Muitos autores já focaram este problema em vários trabalhos, como por exemplo *Norberg (1976)*, *Borgan, Hoem & Norberg (1981)*, *Lemaire (1985)*, *Gilde & Sundt (1989)*, *Andrade e Silva (1991)* e *Centeno & Andrade e Silva (1999)*. Estes autores procuraram otimizar o Sistema de Bonus-Malus.

O modelo apresentado por *Norberg (1976)* considera o problema da determinação dos prémios a vigorarem em cada classe, uma vez fixadas as regras de transição do sistema de bónus, utilizando, para o efeito, uma abordagem próxima da Teoria da Credibilidade. Uma das hipóteses do modelo é que o sistema de bónus seja regido por um processo de Markov de primeira ordem.

*Lemaire (1985)* propõe diversas medidas de avaliação e comparação de Sistemas de Bonus-Malus:

- 1. Nível Médio Relativo de Estacionaridade:** denominado *RSAL* (Relative Stationary Average Level), expresso numa escala de zero a um, mede a posição relativa do segurado médio, uma vez atingida a estacionaridade. Um valor baixo para *RSAL* indica uma grande aglomeração das apólices nas classes com maior desconto, enquanto que um valor mais alto sugere uma melhor distribuição entre as classes.
- 2. Coeficiente de Variação dos Prémios:** definido como o quociente entre o desvio padrão dos prémios e o prémio médio, ambos calculados em condições de estacionaridade, é uma medida da variação dos prémios anuais do conjunto dos segurados da Carteira.

**3. Elasticidade do Prémio Médio:** mede a resposta do Sistema de Bonus-Malus, em condições de estacionaridade, a uma alteração na frequência de sinistralidade. O ideal a longo prazo seria que um aumento da frequência de sinistralidade se traduzisse num mesmo aumento do prémio, o que na realidade não acontece, visto que a percentagem de aumento iria criar situações de ruptura com o cliente.

**4. Elasticidade Transiente:** mede a sensibilidade do valor esperado dos prémios acumulados a variações da frequência de sinistralidade. Esta medida de avaliação depende de um factor económico, sendo introduzida uma taxa de desconto, a partir da qual se calcula o montante actual a pagar por uma apólice.

*Borgan, Hoem & Norberg (1981)* fazem uma generalização do modelo apresentado por *Norberg (1976)*, introduzindo um sistema de ponderadores não negativos,  $(w_n)_{n=0,1,2,\dots}$ , cuja soma seja a unidade. Cada ponderador representa o peso a atribuir ao período  $n$  e  $w_0$  representa o peso atribuir à distribuição estacionária. O modelo de *Norberg (1976)* é um caso particular deste, se  $w_0=1$  e  $w_n=0, n \geq 1$ .

*Gilde & Sundt (1989)* linearizam a escala óptima de prémios. Deste modo garantem que os prémios desta nova escala ficam ordenados de acordo com a gravidade das classes e que evoluem de uma forma regular. A escala de prémios a utilizar é então linear, em que a diferença entre os prémios de duas classes consecutivas é constante.

O modelo apresentado por *Andrade e Silva (1991)* é idêntico ao modelo anterior, só que em vez de utilizar uma escala linear, baseia-se numa escala geométrica. Assim, nesta escala de prémios é o quociente entre os prémios de duas classes consecutivas que será constante.

Por fim, fazemos referência ao modelo de *Centeno & Andrade e Silva (1999)*, pois sugeriram um modelo diferente dos anteriores. Estes autores consideraram uma Carteira aberta, onde cada segurado pode transferir a sua apólice de seguro de uma Seguradora para outra (o que corresponde à realidade no nosso mercado). Estes autores utilizaram cadeias de Markov não homogêneas para modelar o sistema, tendo em atenção as quotas de mercado e assumindo que as novas apólices da Carteira podem ser colocadas em diferentes classes.

Será importante ressaltar que os sistemas de tarifação *a posteriori* baseiam-se somente na frequência de sinistralidade, não levando em consideração o montante de cada sinistro, como aliás este trabalho, o que pode ser um problema para futura análise.

## **1.2. Definição de Sistemas de Bonus-Malus**

Os Sistemas de Bonus-Malus são aplicados em períodos de idêntica duração, sendo normalmente este período de um ano de observação da apólice. Se existirem sinistros o segurado irá sofrer um agravamento no prémio (Malus) nas anuidades seguintes e, em caso de ausência de sinistralidade, será beneficiado com um Bónus, traduzido na redução do prémio das anuidades seguintes.

Importará salientar que, por razões de dificuldade informática, hoje ultrapassadas, a aplicação do Sistema de Bonus-Malus assenta numa cadeia de Markov (processos sem memória) estando apenas registado, no ficheiro informático da apólice, a sua posição no ano anterior na escala de Bonus-Malus. Será também importante salientar que estas escalas podem apresentar os mesmos graus de agravamento ou de desconto em classes

contíguas, permitindo que apenas hajam reduções de prémios ou agravamentos se se verificarem sinistros ou na sua ausência em anos.

Como já referimos anteriormente, na prática, a penalização a aplicar ao prémio depende apenas da frequência de sinistralidade e não do valor das indemnizações atribuídas a cada sinistro. Esta é a filosofia adoptada em Portugal por todas as Companhias de Seguros e na maior parte das Seguradoras Europeias e pressupõe que não existe correlação entre a frequência e a severidade dos sinistros ou, por uma questão de simplicidade, não analisam esta correlação.

Esta suposição é feita pela dificuldade de estudar as correlações que possam efectivamente existir e, bem assim, pela grande dificuldade de modelizar estatisticamente a severidade dos sinistros. No entanto, este é um pressuposto que as Seguradoras e os órgãos de supervisão dos vários países assumem como uma boa aproximação à realidade, sendo este tipo de sistema o mais utilizado.

Contudo, na prática, verifica-se que a correlação existe, como mostra a experiência de sinistralidade de condutores do sexo feminino, que permite inferir que, embora exista uma frequência de sinistralidade mais elevada, os valores de indemnização são mais baixos, o que permite estimar prémios inferiores para estes condutores. Exemplo disso é a tarifa da Tranquilidade que beneficia os condutores do sexo feminino com um desconto de 5% no prémio.

Têm, no entanto, surgido estudos para implementar a severidade dos sinistros nos Sistemas de Bonus-Malus, como por exemplo o trabalho de *Pinquet (1997)*, onde considera que, no seu modelo, o custo médio de um sinistro apresenta uma distribuição

Gama ou Log-Normal, enquanto que o número de sinistros segue uma distribuição de Poisson. Os factores da tarificação, bem como as componentes heterogéneas, são incluídas no parâmetro de escala da distribuição. Considerando que a componente heterogénea segue a mesma distribuição do custo médio, a expressão de credibilidade é obtida de forma a encontrar a média do custo com sinistros para o período seguinte. Por exemplo, o bonus-malus irá aparecer após o primeiro sinistro, se o seu custo for inferior ao esperado pelo modelo de tarificação.

Mas para que um sistema de tarificação *a posteriori* seja designado por Sistema de Bonus-Malus tem que verificar as seguintes condições:

- Os períodos de vigência das apólices são de idêntica duração (geralmente um ano);
- As apólices são agrupadas num número finito de classes  $(C_j)_{j=1,\dots,s}$ . Cada apólice permanece na mesma classe ao longo de um período de tempo;
- A classe do sistema em que um segurado é colocado num determinado período depende da classe a que pertenceu no período anterior e do número de sinistros declarados durante esse mesmo período.

Além disso, um sistema é caracterizado por três elementos:

- A escala de prémios  $\mathbf{b}=(b(1),\dots,b(s))'$ . Sendo  $b(i)$  o factor multiplicativo a aplicar ao prémio da classe  $C_i$  determinado pelos factores *a priori*.
- As regras de transição  $T$  entre todas as classes do sistema. Para o par ordenado  $(i,j)$  temos  $T_{ij}$  que representa a transição de uma apólice da classe  $C_i$  para a classe  $C_j$ , no fim do período, após  $k$  sinistros nesse mesmo período. Neste caso  $T_{ij}=1$ , caso contrário  $T_{ij}=0$ . Para que as regras de transição sejam completas e livres de

contradições é necessário que para cada par ordenado exista um e só um  $j$  tal que  $T_{ij}=1$ .

- A classe de entrada no sistema,  $C_{i0}$ , supõe-se ser a mesma para todos os novos segurados, salvo historial negativo.

Podemos então representar o Sistema de Bonus-Malus pelo trio  $S=(C_{i0}, T, b)$  que fornece uma base de tarifação que consiste na classe de bônus de uma apólice no período  $n$ ,  $Z_{S,n}$ , que é determinada pelas regras  $T$  e pela classe inicial  $C_{i0}$ .

O último elemento que caracteriza um Sistema é a classe de entrada, sendo este elemento muito discutível, já que, na prática, a maior parte das Seguradoras colocam os novos segurados em classes com bônus, de modo a obterem prémios mais competitivos. Observa-se ainda que há tendência, por parte dos segurados, em ocultar historiais negativos, mudando por vezes o tomador do contrato (por exemplo, de pai para filho) com esta exclusiva finalidade.

De realçar que os Sistemas de Bonus-Malus tiveram uma grande aceitação devido à fácil aplicação, não necessitando as Companhias de armazenar informação de anos anteriores. Conhecendo a classe em que o segurado se encontra no momento da renovação do contrato e a sinistralidade do ano vigente, facilmente se chega à classe para que transitará no próximo período. Estamos então perante processos sem memória, ou seja, cadeias de Markov (processo estocástico no qual a evolução futura do sistema, conhecido o presente, não depende do passado).

A otimização/adequação destas escalas de bonus-malus e das correspondentes matrizes de transição não são matéria de estudo deste trabalho, mas devido à sua importância na

adequação da definição de um Sistema de Bonus-Malus deve ser salientado, já que o Instituto de Seguros de Portugal, como organismo de controlo da Actividade Seguradora, obriga a que tanto as escalas como as regras de transição estejam devidamente definidas nas condições especiais das apólices de cada Seguradora.

## CAPÍTULO 2

### SINISTRALIDADE

Tal como referimos anteriormente, o número de sinistros é o único factor a ter em consideração na tarificação *a posteriori*, na maior parte da Seguradoras, e será este também o critério que iremos usar na determinação do nosso modelo.

Assim sendo, se considerarmos que o custo médio das indemnizações por sinistro é o valor unitário, chegamos ao prémio puro através da frequência de sinistralidade.

Neste Capítulo iremos abordar três modelos de Poisson para ajustar a distribuição de probabilidade ao número de sinistros, de acordo com a Carteira de seguros: homogénea, heterogénea e estratificada.

Uma Carteira homogénea é formada por apólices que à partida têm todas o mesmo nível de risco, enquanto que numa Carteira heterogénea isso não acontece, pelo que temos que tentar encontrar classes onde se verifique um certo grau de homogeneidade. Assim, para criar uma tarifa do ramo automóvel devemos ter em consideração as componentes heterogéneas específicas do veículo, que devem reflectir informação sobre variáveis não controladas, como por exemplo a informação sobre os condutores (dado que um veículo pode ser utilizado por vários condutores), de forma a encontrar os tais grupos



homogêneos. Outra variável não controlada poderá ser a quilometragem anual de um veículo, pois depende apenas das viagens programadas para o veículo e não do(s) condutor(es).

A Carteira estratificada será a utilizada no nosso exemplo prático, pois o objectivo desta tese é construir um Sistema de Bonus-Malus para frotas de veículos, consideradas como estratos. À partida a Carteira é heterogênea, mas vamos ter em atenção as componentes heterogêneas específicos do veículo e da frota, de modo a que frotas com características semelhantes venham a ter o mesmo nível de risco. No entanto, e dado que a Carteira tem uma dimensão grande, a componente de heterogeneidade será retirada do parâmetro da distribuição de Poisson e iremos substituir os parâmetros pelos estimadores consistentes.

## **2.1. Modelo de Poisson Homogêneo – Carteira Homogênea**

Se estivermos perante uma Carteira de seguros homogênea significa que todas as apólices têm o mesmo risco *a priori*, ou seja, independentemente do comportamento do segurado, espera-se que a frequência de sinistralidade seja igual para todos. Seguindo este modelo, só através de um Sistema de Bonus-Malus poderemos ajustar os prémios, agravando ou bonificando-os na anuidade seguinte, de acordo com o comportamento do segurado relativamente à sinistralidade.

Podemos então definir um Processo de Poisson homogêneo:

Seja  $N(t)$  o número de sinistros declarados pelo segurado, ocorridos no intervalo de tempo  $]0, t]$ , com  $t \geq 0$  e  $N(0)=0$ .

Um processo de contagem  $\{N(t); t \geq 0\}$  diz-se um Processo de Poisson, de intensidade  $\lambda > 0$ , se verificar as seguintes condições:

1.  $\{N(t); t \geq 0\}$  tem incrementos independentes ;
2.  $\{N(t); t \geq 0\}$  tem incrementos estacionários;
3. Para qualquer  $h \rightarrow 0^+$ ,  $P(N(h) \geq 1) = \lambda h + o(h)$ ;
4. Para qualquer  $h \rightarrow 0^+$ ,  $P(N(h) \geq 2) = o(h)$ .

Nota:  $o(h)$  representa um infinitésimo com  $h$  de uma função  $f$  quando

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0$$

Deste modo, considerando um intervalo de tempo de amplitude  $t$ ,  $N(t)$  segue uma distribuição de Poisson com parâmetro  $\lambda t$ ,  $\forall t \geq 0$ , isto é,

$$P(N(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, k \in \mathbb{N}_0 \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}^+$$

O parâmetro  $\lambda$  designa-se por intensidade do processo e representa a frequência de sinistralidade esperada para uma unidade de tempo, ou seja, o número médio de sinistros declarados por unidade de tempo.

Para um estudo detalhado sobre processos de Poisson homogéneos pode seguir-se os trabalhos de *Centeno (2002)* ou *Lemaire (1995)*.

## 2.2. Modelo de Poisson Misto – Carteira Heterogénea

Um comportamento não homogéneo dos segurados representa a situação mais comum numa Carteira de seguros, existindo factores identificativos impossíveis de quantificar. Daqui surge a necessidade de encontrar um modelo para o número de sinistros que reflecta a heterogeneidade dos riscos inerentes ao comportamento de cada segurado.

O modo de minimizar essa heterogeneidade será considerar um modelo em que o número de sinistros varia de segurado para segurado. Para tal é necessário criar um modelo que, por exemplo, seja sensível às características específicas dos segurados, pois como já vimos anteriormente, existem factores que não são mensuráveis.

Deste modo, consideremos então um processo de Poisson em que  $\lambda$  é o resultado da observação de uma variável aleatória,  $\Lambda$ , não negativa. Seja

$$U(\lambda) = P(\Lambda \leq \lambda)$$

a função de distribuição de  $\Lambda$ . A variável aleatória  $\Lambda$  é designada por variável de estrutura e  $U(\lambda)$  por distribuição de estrutura.

O processo de contagem  $\{N(t); t \geq 0\}$  diz-se um Processo de Poisson Misto se verificar as seguintes condições:

1.  $N(0)=0$ ;
- 2.

$$\begin{aligned} P(N(t+s) - N(s) = k) &= \int_0^{\infty} P(N(t+s) - N(s) = k | \Lambda = \lambda) dU(\lambda) = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dU(\lambda) \end{aligned}$$

Desta igualdade podemos concluir que um processo de Poisson misto tem incrementos estacionários, embora os incrementos não sejam independentes, pois para  $t_0 < t_1 < t_2$ ,

$$\begin{aligned}
& P(N(t_1) - N(t_0) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2) \\
&= \int_0^{\infty} P(N(t_1) - N(t_0) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2 | \lambda) dU(\lambda) \\
&= \int_0^{\infty} P(N(t_1) - N(t_0) = k_1 | \lambda) P(N(t_2) - N(t_1) = k_2 | \lambda) dU(\lambda) \\
&\neq \int_0^{\infty} P(N(t_1) - N(t_0) = k_1 | \lambda) dU(\lambda) \int_0^{\infty} P(N(t_2) - N(t_1) = k_2 | \lambda) dU(\lambda) \\
&= P(N(t_1) - N(t_0) = k_1) P(N(t_2) - N(t_1) = k_2)
\end{aligned}$$

Portanto,  $N(t)$  tem distribuição de Poisson Mista, com distribuição de estrutura  $U(\lambda)$ , isto é,

$$P(N(t) = k) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dU(\lambda)$$

A distribuição de estrutura reflecte assim o grau de heterogeneidade da Carteira e podem ser várias as distribuições que servem para modelar o número de sinistros.

Se o número de sinistros seguir a distribuição Binomial Negativa significa que estamos perante um processo de Poisson de intensidade  $\lambda$ , onde  $\lambda$  é o resultado de uma variável aleatória  $\Lambda$ , com distribuição Gama de parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  (ambos positivos), dando o nome de *Processo de Polya* ao modelo Poisson-Gama, cuja função densidade é

$$u(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha e^{-\beta\lambda} \lambda^{\alpha-1}, \lambda > 0.$$

Este modelo pode ser consultado com mais detalhe em *Centeno (2002)* e *Lemaire (1995)*.

Outra opção será considerar que o número de sinistros segue a distribuição Poisson-Inversa Gaussiana, tendo como distribuição de estrutura a Inversa Gaussiana. *Sichel (1971)* apresentou esta alternativa e daí resulta o nome *Distribuição de Sichel* para o modelo Poisson-Inversa Gaussiana. Neste caso também temos um processo de Poisson de intensidade  $\lambda$ , onde  $\lambda$  é o resultado de uma variável aleatória  $\Lambda$ , com distribuição Inversa Gaussiana de parâmetros  $g$  e  $h$ , cuja função densidade é

$$u(\lambda) = \frac{g}{\sqrt{2\pi h \lambda^{3/2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2h\lambda}(\lambda - g)^2\right\}.$$

Estamos pois perante uma distribuição de Poisson mista, onde a distribuição de Poisson tem parâmetro  $\lambda$  e a distribuição de estrutura segue a distribuição Poisson – Inversa Gaussiana. Esta distribuição não é mais do que a distribuição Binomial Negativa, truncada na origem, estendida, onde fixamos  $\alpha = -0,5$  e  $\beta > 0$ .

### **2.3. Modelo de Poisson com factores aleatórios numa Carteira estratificada**

Como já vimos, o comportamento dos segurados varia de indivíduo para indivíduo, daí a necessidade de encontrar um modelo que reflecta essa heterogeneidade. Quando tentamos analisar uma Carteira de seguros de frota a dificuldade aumenta, pois a distribuição do risco de cada veículo inclui factores específicos do veículo e da frota.

Assim, a história de um veículo não pode ser utilizada para prever o nível de risco de outros veículos na frota, pois cada veículo tem as suas próprias características. Se todos os veículos tivessem o mesmo prémio de risco *a priori* estaríamos perante uma Carteira homogénea, e como tal, só a existência de um sistema de Bonus-Malus poderia diferenciar os prémios *a posteriori*. Por outro lado, se utilizarmos apenas a informação que caracteriza as frotas, a frequência de risco *a priori* seria a mesma para todos os veículos, logo iríamos cair na situação anterior.

Mas o nosso objectivo é avaliar a sinistralidade das frotas e, como se sabe, a soma de variáveis aleatórias com distribuição de Poisson, mutuamente independentes, é ainda uma variável aleatória de Poisson, cujo parâmetro é a soma dos parâmetros originais. Deste modo esta propriedade torna possível que consideremos cada frota como uma classe e a soma dos parâmetros de cada frota irá dar origem ao parâmetro da Carteira.

O modelo que será aqui apresentado é baseado no modelo proposto por *Desjardins, Dionne & Pinquet (2001)*, cuja finalidade é encontrar um método para estimar a sinistralidade de cada frota.

Seja então  $m$  o número de veículos numa dada frota,  $N_i$  o número de sinistros declarados pelo veículo  $i$  e  $\lambda$  a frequência de sinistralidade, isto é, o número esperado de sinistros por unidade de tempo. Se considerarmos que os  $N_i$  são independentes, temos:

$$N_i \sim P(\lambda u), i = 1, \dots, m \Rightarrow \sum_{i=1}^m N_i \sim P(m \lambda u)$$

onde  $u$  é o factor comum aos veículos da frota (componente heterogénea).

Cada classe formada por uma frota contém factores comuns, que lhe confere um grau de homogeneidade interior, no entanto, existem factores que, não são observáveis ou são difíceis de quantificar, o que pode reflectir factores escondidos. Este tipo de factores atribuem a cada risco um certo grau de heterogeneidade dentro do grupo.

Por outro lado, o comportamento das empresas (frotas) pode influenciar as componentes heterogéneas específicas da frota, designadamente quando os proprietários das frotas não obedecem as regras de segurança ou não obrigam os condutores a conduzir com estreita observação ao código da estrada.

No nosso modelo, a natureza hierárquica da Carteira é levada em conta pela dupla indexação. Seja  $N_{fi}$  o número de sinistros declarados pelo veículo  $i$  da frota  $f$ . Se considerarmos que segue uma distribuição de Poisson, temos então

$$N_{fi} \sim P(\lambda_{fi} u_{fi}), f = 1, \dots, F, i = 1, \dots, m_f$$

sendo as frotas indexadas por  $f = 1, \dots, F$ , e os veículos por  $i = 1, \dots, m_f$ , onde  $m_f$  é a dimensão da frota  $f$ .

O parâmetro  $\lambda_{fi}$  escreve-se em função dos factores de avaliação observados ao nível da frota e ao nível do veículo. Os factores específicos da empresa e do veículo e as componentes heterogéneas distinguem-se na regressão, admitindo que

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{fi} &= \bar{d}_{fi} \exp(\bar{x}'_f \bar{\gamma} + \bar{z}'_{fi} \bar{\delta}) \\ u_{fi} &= r_f s_{fi} \end{aligned}$$

logo  $\bar{\lambda}_{fi}$  é proporcional à duração,  $\bar{d}_{fi}$ , do período em que o veículo é observado. Os vectores linha  $\bar{x}'_f$  e  $\bar{z}'_{fi}$  são as componentes de regressão relacionados com a frota e o

veículo, respectivamente. Os parâmetros relacionados com a frota e o veículo são representados pelos vectores coluna  $\bar{\gamma}$  e  $\bar{\delta}$ . Iremos utilizar  $a'$  para indicar vectores transpostos e, daqui adiante, para facilitar a notação, vamos excluir a simbologia vectorial, só a reintroduzindo em caso de necessidade para melhor compreensão do texto.

Quanto a  $u_{fi}$ , representa a heterogeneidade residual da distribuição do número de sinistros, sendo composta pelo factor específico da frota  $r_f$  e pelo factor específico do veículo  $s_{fi}$ . Estas distribuições individuais e as variáveis  $(N_{fi})_{f=1,\dots,F; i=1,\dots,m_f}$  são independentes neste modelo.

Além disso, os factores aleatórios  $(R_f)_{f=1,\dots,F}$  e  $(S_{fi})_{f=1,\dots,F; i=1,\dots,m_f}$  são famílias de variáveis aleatórias, independentes e identicamente distribuídos, supondo-se ainda que as famílias são mutuamente independentes. As distribuições nos modelos com factores aleatórios são misturas de distribuições de Poisson, e referem-se a distribuições individuais genéricas, que representam a classe de distribuições individuais reais com os mesmos factores observáveis (ver *Pinquet (2000)*). O factor aleatório  $S_{fi}$  reflecte a heterogeneidade residual na distribuição do risco do veículo e  $R_f$  a heterogeneidade residual na distribuição do risco da frota.

Usando  $R$  e  $S$  para representar as distribuições das variáveis aleatórias das famílias, respectivamente,  $(R_f)_{f=1,\dots,F}$  e  $(S_{fi})_{f=1,\dots,F; i=1,\dots,m_f}$ , supomos ainda que existem momentos de segunda ordem, isto é,

$$E(R) = E(S) = I$$



$$V(\mathbf{R}) = V_{RR}$$

$$V(\mathbf{S}) = V_{SS}$$

De modo a facilitar a escrita e a leitura, e dado que estamos a seguir a notação dos autores, as variâncias aparecem com nova notação.

Com esta aproximação semiparamétrica, as distribuições com factores aleatórios irão ser apenas especificadas pelas variâncias.

Se  $U=RS$ , e atendendo a que  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{S}$  são independentes, tem-se que

$$E(\mathbf{U}) = E(\mathbf{R})E(\mathbf{S}) = \mathbf{1}$$

$$V(\mathbf{U}) = V_{UU} = E(\mathbf{R}^2)E(\mathbf{S}^2) - \mathbf{1} = V_{RR} + V_{SS} + V_{RR}V_{SS}$$

Com as fórmulas da variância, covariância e a independência assumida no modelo com factores aleatórios para as famílias  $(\mathbf{R}_f)_{f=1,\dots,F}$  e  $(\mathbf{S}_{fi})_{f=1,\dots,F; i=1,\dots,m_f}$ , obtém-se

$$V(N_{fi}) = \lambda_{fi} + \lambda_{fi}^2 V(U_{fi}) = \lambda_{fi} + \lambda_{fi}^2 V_{UU}$$

$$\text{Cov}(N_{fi}, N_{fj}) = \lambda_{fi}\lambda_{fj} \text{Cov}(U_{fi}, U_{fj}) = \lambda_{fi}\lambda_{fj} V_{RR} (i \neq j)$$

com  $f=1,\dots,F$  e  $i=j=1,\dots,m_f$ . (2.1.)

Sendo a Carteira de dimensão grande, podemos substituir os parâmetros pelos estimadores consistentes, na descrição dos dados.

Considerando um modelo de tarifação *a priori* que segue a distribuição Poisson, isto é,

$$N_{fi} \sim P(\lambda_{fi}) \forall f, i.$$

assume-se que

$$\hat{\lambda}_{fi} = d_{fi} \exp(x_f \hat{\gamma} + z_{fi} \hat{\delta})$$

sendo a frequência calculada num modelo de tarifação *a priori*, onde  $\hat{\gamma}$  e  $\hat{\delta}$  são os estimadores de máxima verosimilhança.

Atendendo a que, no modelo com factores aleatórios, temos

$$E(N_{fi}) = E[E[N_{fi}|U_{fi}]] = E(\lambda_{fi} U_{fi}) = \lambda_{fi} E(U_{fi}) = \lambda_{fi}$$

fica imediato que a introdução destes factores não modifica o valor esperado para a sinistralidade. Assim, o estimador de máxima verosimilhança do parâmetro  $\lambda_{fi}$ , no modelo sem factores aleatórios, é consistente para o parâmetro correspondente no modelo com factores aleatórios.

Aliás, esta conclusão será válida para qualquer sucessão constante de estimadores de  $\lambda_{fi}$ , permitindo assim dizer que os prémios calculados com base na frequência de sinistralidade, recorrendo ao modelo de tarifação *a priori*, convergem, em probabilidade, para a sinistralidade esperada de um veículo específico, considerado no modelo com efeitos aleatórios.

Para representar a convergência em probabilidade, vamos usar a notação  $\xrightarrow{P}$ , vindo  $\hat{\lambda}_{fi,n} \xrightarrow{P} \lambda_{fi}$ , onde  $\hat{\lambda}_{fi,n}$  representa uma sucessão constante de estimadores, nas condições acima indicadas.

A demonstração do resultado aqui invocado pode ser encontrada em *Gouriéroux, Monfort & Trognon (1984), Pseudo Maximum Likelihood Methods: Applications to Poisson Models*, onde são apresentadas algumas aplicações do modelo de Poisson de teoria desenvolvida em *Gouriéroux, Monfort & Trognon (1984), Pseudo Maximum Likelihood Methods: Theory*.

Sempre que nada for dito em contrário, considera-se que as convergências indicadas ocorrem quando  $n \rightarrow +\infty$ . Também de modo a facilitar e a aligeirar a notação, vamos representar os termos da sucessão de estimadores  $\{\hat{\lambda}_{fi,n} : n \in \mathbb{N}\}$  por  $\hat{\lambda}_{fi}$ , suprimindo o sub-índice  $n$ .

Deste modo, dos momentos encontrados em (2.1) e pela consistência da sucessão  $\hat{\lambda}_{fi}$ , obtêm-se os seguintes limites estocásticos:

$$\hat{V}_{RR} = \frac{\sum_f \sum_{1 \leq i; j \leq m_f; i \neq j} (n_{fi} - \hat{\lambda}_{fi})(n_{fj} - \hat{\lambda}_{fj})}{\sum_f \sum_{1 \leq i; j \leq m_f; i \neq j} \hat{\lambda}_{fi} \hat{\lambda}_{fj}} \xrightarrow{P} V_{RR}$$

$$\hat{V}_{UU} = \frac{\sum_{f,i} (n_{fi} - \hat{\lambda}_{fi})^2 - n_{fi}}{\sum_{f,i} \hat{\lambda}_{fi}^2} \xrightarrow{P} V_{UU}$$

Desta forma os estimadores consistentes de  $V(U)$  e  $V(R)$  são obtidos através dos estimadores derivados do modelo *a priori*. Como  $V_{UU} = V_{RR} + V_{SS} + V_{RR}V_{SS}$ , temos que

$$\hat{V}_{SS} = \frac{\hat{V}_{UU} - \hat{V}_{RR}}{1 + \hat{V}_{RR}}$$

é um estimador consistente de  $V_{SS}$ .

Assim, o estimador  $\hat{V}_{RR}$  avalia o contágio de sinistralidade, observado entre os diferentes veículos numa mesma frota. Se  $\hat{V}_{RR}$  é bastante maior que zero, significa que a história de um veículo pode revelar factores escondidos na distribuição do risco dos veículos numa mesma frota. No entanto, se  $\hat{V}_{RR}$  for pequeno ou mesmo menor que

zero, significa que estamos perante classes homogéneas, logo não necessitamos de introduzir, no modelo, as componentes heterogéneas.

Como já foi dito, este modelo foi desenvolvido por *Desjardins, Dionne & Pinquet (2001)* e, no artigo publicado pelos autores, podemos encontrar mais detalhes sobre os estimadores das variâncias.

### 2.3.1. Estimadores Extremais

Os Métodos dos Mínimos Quadrados e da Máxima Verosimilhança enquadram-se na Teoria dos Estimadores Extremais. Nesta teoria, o estimador é um extremo da função  $g_n(\bar{\beta}^k, \bar{y}^n)$  definida no produto cartesiano  $\Theta \times \Omega$  dos espaços paramétrico e amostral.

Para garantir a convergência dos estimadores obtidos, convém introduzir condições de regularidade. No que segue admitiremos que:

- $g_n(\bar{\beta}^k, \bar{y}^n)$  converge uniforme e estocasticamente para uma função limite  $g(\bar{\beta}^k)$ , isto é, que  $\forall \varepsilon > 0$

$$P\left(\sup |g_n(\bar{\beta}^k, \bar{y}^k) - g(\bar{\beta}^k)| < \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

- o verdadeiro valor do parâmetro pertence a um compacto.

Por outro lado, *Gouriéroux, Monfort & Trognon (1984)* mostrou que se podem obter bons estimadores, atribuindo às observações distribuições suficientemente regulares e maximizando as pseudo verosimilhanças resultantes. Foi este o caminho que seguimos, atribuindo às observações distribuições de Poisson.

---

Em vez de calcularmos o máximo da pseudo verosimilhança, optámos, segundo *Mexia & Corte Real (2003)*, por obter o centro de gravidade do conjunto dos pontos (vectores de parâmetros), em que a pseudo verosimilhança excedia  $M_n + \delta/(n^{0,48})$ . O respectivo máximo,  $M_n$ , é o valor resultante da função de log-verosimilhança (segundo cada conjunto de estimadores obtido) a dividir pelo número total de pontos aleatórios  $n$ , tendo-se optado por valores de  $\delta$  e de  $0,48$ , escolhidos empiricamente, para a fracção do segundo termo. De acordo com o artigo de *Mexia & Corte Real (2003)*, a potência de  $n$  terá de pertencer ao intervalo  $]0,1/2[$ .

O ponto de partida deste método é a escolha dum conjunto de estimadores inicial qualquer. Se por acaso partirmos de um conjunto de estimadores que não se encontre na vizinhança do centro de gravidade, o método não funciona, pois não conseguimos encontrar nenhum conjunto em que a pseudo verosimilhança exceda o valor acima indicado.

De seguida, simulamos, para  $n$  grande, pontos aleatórios na vizinhança dos estimadores iniciais. O novo conjunto de estimadores será a média dos simulados. Este raciocínio é repetido enquanto encontrarmos conjuntos de estimadores em que a pseudo verosimilhança exceda  $M_n + \delta/(n^{0,48})$ . Deste modo, o número de pontos aleatórios vai aumentando gradualmente e o intervalo para chegar ao centro de gravidade (ao conjunto de estimadores final) vai diminuindo.

Este método parece ser muito complicado à primeira vista, mas comparando-o com o método da Pseudo-Máxima Verosimilhança, que iremos apresentar na próxima secção, podemos concluir que as principais vantagens são: a facilidade em aplicar o método e a possibilidade de encontrar uma região de confiança, o que não acontece nos métodos

clássicos. Assim sendo, podemos afirmar que o método *Mexia/Corte Real* permite pôr em evidência o fenómeno de planalto, ou seja, numa dada região podem existir vários conjuntos de estimadores que maximizem a função de log-verosimilhança.

Este método é muito fácil de aplicar, pois resume-se a cálculos de médias dos estimadores, enquanto que o método da Pseudo-Máxima Verosimilhança recorre à resolução de um sistema de equações com tantas incógnitas quanto o número de factores de avaliação para frotas e veículos que escolhermos.

A principal desvantagem deste método é o tempo que o programa elaborado, recorrendo ao *Mathematica*, demora a obter o conjunto de estimadores final. Dado que o método vai aumentando o número total de pontos aleatórios gradualmente, podemos demorar algumas horas a obter o conjunto de estimadores, enquanto que com o Método de Pseudo-Máxima Verosimilhança ou Mínimos Quadrados Generalizados chegamos em poucos minutos.

De notar que ambos os métodos de cálculo foram desenvolvidos apenas no programa *Mathematica 5.0.*, sendo possível que noutra tipo de software se chegue a valores mais rapidamente.

Relativamente a este método, seria ainda interessante tentar perceber qual a melhor escolha para o conjunto de estimadores iniciais, pois, partindo de conjuntos diferentes, podemos obter estimadores em que sinistralidade pode tomar valores superiores ou inferiores aos observados, como iremos ver na aplicação prática.

Neste trabalho escolhemos, empiricamente, os valores de  $\delta$  e de  $0,48$  para a fracção do segundo termo deste método. Fica por analisar o impacto da alteração destes valores, nos resultados finais da sinistralidade.

### 2.3.2. Método de Pseudo-Máxima Verosimilhança

Como já vimos anteriormente, para determinarmos a frequência de sinistralidade para cada veículo da frota, precisamos de obter os estimadores  $\hat{\gamma}$  e  $\hat{\delta}$ . Esta secção será desenvolvida com base no artigo de *Gouriéroux, Monfort & Trognon (1984)*.

Os estimadores obtidos através da maximização de uma função de verosimilhança, onde a família de distribuições de probabilidade não pertence necessariamente à família escolhida para a função de verosimilhança, são calculados através do Método de Pseudo-Máxima Verosimilhança. Esta técnica é aplicada a modelos de Poisson que podem ser:

- **básicos**, cujo parâmetro pode ser escrito na forma

$$\lambda_i = \exp(x_i \mathbf{b})$$

onde  $x_i$  é a variável exógena associada à  $i$ -ésima observação e  $\mathbf{b}$  é o parâmetro desconhecido.

- **específicos**, em que

$$\lambda_i = \exp(x_i \mathbf{b} + e_i)$$

onde  $e_i$  é o erro específico, sendo uma variável aleatória que não é observável.

Deste modo são determinadas as famílias de funções de pseudo verosimilhança que originam estimadores consistentes e assintoticamente normais dos parâmetros

envolvidos na verdadeira distribuição. Estimadores deste tipo podem ser obtidos através de distribuições que pertencem à família exponencial linear. Relativamente a estas distribuições pode ser consultado, por exemplo, *Murteira(1990)*.

**Definição:** Diz-se que uma variável aleatória  $X$  em  $\mathfrak{R}^G$ , indexada pelo parâmetro  $m \in \mathfrak{M} \subset \mathfrak{R}^G$  tem distribuição pertencente à família exponencial linear se:

a) a sua função densidade de probabilidade se puder escrever na forma

$$f(\bar{x}, \bar{m}) = \exp \left\{ A(\bar{m}) + B(\bar{x}) + C(\bar{m})' \bar{x} \right\}, \quad \bar{x} \in \mathfrak{R}^G,$$

onde  $A(\bar{m})$  e  $B(\bar{x})$  são escalares e  $C(\bar{m})$  é um vector de dimensão  $G$ ;

b)  $\bar{m}$  é o vector da média da distribuição cuja densidade é igual a  $f(\bar{x}, \bar{m})$ .

Facilmente se prova que, por exemplo, a distribuição Poisson pertence à família exponencial linear. Esquecendo a notação vectorial, a função densidade da Poisson é a seguinte:

$$f(x, m) = \frac{e^{-m} m^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \dots$$

que pode ser escrita em termos da família de dispersão exponencial, ou seja,

$$f(x, m) = \exp[-m + x \ln m - \ln x!]$$

e portanto,

$$A(m) = -m; \quad B(x) = -\ln x!; \quad C(m)x = x \ln m$$

Muitas das famílias clássicas de medidas de probabilidade são exponenciais lineares. Alguns exemplos de tais famílias são apresentados na Tabela 2.1.



<b>Tabela 2.1.</b>	
<b>Exemplo de famílias exponenciais lineares</b>	
<b>Família</b>	<b>Função Densidade</b>
Binomial ( $n$ dado)	$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)} \left(\frac{m}{n}\right)^x \left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-x}$
Poisson	$\frac{e^{-m} m^x}{x!}$
Binomial Negativa ( $a$ dado)	$\frac{\Gamma(a+x)}{\Gamma(a)\Gamma(x+1)} \left(\frac{m}{a}\right)^x \left(1+\frac{m}{a}\right)^{-(a+x)}$
Gama ( $a$ dado)	$\frac{x^{a-1} e^{-x/m}}{\Gamma(a) \left(\frac{m}{a}\right)^a}$
Normal ( $\sigma$ dado)	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right]$

Dado estarmos a seguir o modelo de Poisson, estamos nas perfeitas condições para poder utilizar o método de Pseudo-Máxima Verossimilhança, cujo parâmetro é igual a

$$\lambda_{fi} = d_{fi} \exp(x'_f \gamma + z'_{fi} \delta)$$

Por sua vez a média e a variância são iguais,  $\lambda_{fi}$ , e a função densidade de  $N_{fi}$  é

$$\frac{e^{-\lambda_{fi}} \lambda_{fi}^{n_{fi}}}{n_{fi}!}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Logo a função de log-verossimilhança vem

$$\begin{aligned} L(\gamma, \delta) &= \sum_{f=1}^F \sum_{i=1}^{m_f} -\lambda_{fi} + n_{fi} \ln \lambda_{fi} - \ln(n_{fi}!) \\ &= \sum_{f=1}^F \sum_{i=1}^{m_f} -d_{fi} \exp(x'_f \gamma + z'_{fi} \delta) + n_{fi} (\ln d_{fi} + x'_f \gamma + z'_{fi} \delta) - \ln(n_{fi}!) \\ &= \sum_{f=1}^F \sum_{i=1}^{m_f} -d_{fi} \exp\left(\sum_{j_1=1}^{k_1} x_{f,j_1} \gamma_{j_1} + \sum_{j_2=1}^{k_2} z_{fi,j_2} \delta_{j_2}\right) + n_{fi} \left(\ln d_{fi} + \sum_{j_1=1}^{k_1} x_{f,j_1} \gamma_{j_1} + \sum_{j_2=1}^{k_2} z_{fi,j_2} \delta_{j_2}\right) - \ln(n_{fi}!) \end{aligned}$$

onde  $k_1$  corresponde ao número de factores específicos da frota e  $k_2$  ao número de factores específicos do veículo.

Dado  $\ln(n_{fi})$  ser uma constante, vamos obter as funções objectivo que resultam das derivadas parciais de primeira ordem, relativamente aos parâmetros:

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_{j_1}} = \sum_{f=1}^F \sum_{i=1}^{m_f} -\lambda_{fi} x_{f,j_1} + n_{fi} x_{f,j_1}, \quad j_1 = 1, \dots, k_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \delta_{j_2}} = \sum_{f=1}^F \sum_{i=1}^{m_f} -\lambda_{fi} z_{fi,j_2} + n_{fi} z_{fi,j_2}, \quad j_2 = 1, \dots, k_2$$

Assim, as equações de verosimilhança neste modelo são

$$\sum_{f=1}^F \sum_{i=1}^{m_f} (n_{fi} - \hat{\lambda}_{fi}) x_{f,j_1} = 0, \quad j_1 = 1, \dots, k_1$$

$$\sum_{f=1}^F \sum_{i=1}^{m_f} (n_{fi} - \hat{\lambda}_{fi}) z_{fi,j_2} = 0, \quad j_2 = 1, \dots, k_2$$

Dado que este método pode ser utilizado para qualquer distribuição que pertença à família exponencial linear, se seguirmos o mesmo raciocínio para a distribuição Normal vamos obter as seguintes equações de verosimilhança:

$$\sum_{f=1}^F \sum_{i=1}^{m_f} x_{f,j_1} (n_{fi} - \hat{\lambda}_{fi}) \hat{\lambda}_{fi} = 0, \quad j_1 = 1, \dots, k_1$$

$$\sum_{f=1}^F \sum_{i=1}^{m_f} z_{fi,j_2} (n_{fi} - \hat{\lambda}_{fi}) \hat{\lambda}_{fi} = 0, \quad j_2 = 1, \dots, k_2$$

Estas equações reflectem uma relação de ortogonalidade entre o número de resíduos e as componentes de regressão.

Utilizando a Normal, o estimador de Pseudo-Máxima Verosimilhança é igual ao estimador obtido através do Método dos Mínimos Quadrados Generalizados.

Podemos encontrar estes resultados no artigo de *Gouriéroux, Monfort & Trognon (1984)*, bem como um estudo pormenorizado sobre a teoria e a aplicação deste método aos modelos de Poisson.

## CAPÍTULO 3

### TEORIA DA CREDIBILIDADE

Teoria de Credibilidade foi o nome dado por actuários americanos, ao desenvolvimento de várias fórmulas de estimação do prémio, baseadas na experiência individual das indemnizações processadas em períodos passados.

Este método de tarifação veio permitir a simplificação prática do cálculo do prémio, atendendo a que as Seguradoras, normalmente, não dispõem de informação suficiente para tarifar os riscos individualmente. Deste modo, agrupam-se os riscos em classes mais ou menos homogéneas e obtêm-se os prémios em função tanto do risco individual como do colectivo.

Assim sendo, a Fórmula de Credibilidade resume-se à média ponderada entre a média de indemnizações passadas relativas ao risco em análise e o Prémio Puro Colectivo. O Factor de Credibilidade será então o factor de ponderação da experiência passada.

Um dos pioneiros no desenvolvimento desta matéria foi *Bühlmann (1967)* e, hoje em dia, já se utiliza este método em vários tipos de seguros, entre eles os contratos de resseguro, seguros de Acidentes de Trabalho e também em Sistemas de Bonus-Malus no seguro automóvel (como podemos ver em *Andrade e Silva (1991)*). O Sistema de

Bonus-Malus para frotas, que iremos apresentar neste Capítulo, segue também a filosofia do modelo de *Bühlmann (1967)*.

### 3.1. Fórmula Básica de Credibilidade

A Teoria da Credibilidade entra em consideração com dois tipos de prémios: o Prémio Colectivo e o Prémio de Risco. O Prémio Colectivo,  $\mu_N = E(N)$ , é o prémio aplicado a qualquer risco tirado ao acaso do colectivo. Por outro lado, o Prémio de Risco é o prémio “correcto” que deveria ser atribuído a um risco específico do colectivo que, geralmente, permanece desconhecido, devido ao seu factor específico “escondido”  $\lambda$ , devendo ser estimado.

Assim, o principal problema na tarificação, através da Credibilidade, é a estimação do prémio puro de risco,  $\mu(\lambda) = E(N|\lambda)$ . Necessitamos então de um estimador que dependa dos factores específicos do colectivo e dos riscos individuais.

Consideremos então  $\hat{p}$  o estimador de  $\mu(\lambda)$  e  $(N_i)_{i=1, \dots, t}$  o número de indemnizações ocorridas no período  $i$ ,  $t$  o número de períodos em que se pode obter informação

estatística individual do risco e  $\bar{N} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t N_i$ . A **Fórmula de Credibilidade** será a

seguinte:

$$\hat{p} = \omega \bar{N} + (1 - \omega) \mu_N$$

em que  $\omega$  é uma constante compreendida entre 0 e 1, cuja designação é **Factor de Credibilidade** e pode tomar a fórmula a seguir indicada:

$$\omega = \frac{t}{t+k}$$

em que  $k$  é uma constante heurísticamente determinada e tem em conta o tipo de seguro a que se refere o prémio.

Para exemplificar os valores que a fórmula de credibilidade pode tomar, vamos seguir um exemplo apresentado em *Egídio dos Reis (2002)*, onde partimos de uma distribuição *a priori*, chegamos à distribuição *a posteriori* e finalmente obtemos a fórmula de credibilidade.

**Exemplo:** Consideremos que a distribuição *a priori* segue a distribuição Exponencial de parâmetro  $\lambda_j$  e que a distribuição de estrutura segue a distribuição Gama de parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ . Deste modo, a função de probabilidade da distribuição *a priori* será

$$f(n_{ij}|\lambda_j) = \lambda_j e^{-\lambda_j n_{ij}}, \quad n_{ij} > 0 \text{ e } \lambda_j > 0$$

em que a média  $E[N_{ij}|\lambda_j] = \mu(\lambda_j) = 1/\lambda_j$ , e a função de probabilidade da distribuição de estrutura vem

$$u(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta\lambda} \lambda^{\alpha-1}; \quad \lambda > 0 \text{ e } \alpha, \beta > 0.$$

Seguidamente obtemos a função de verosimilhança,

$$L(\lambda_j) = \prod_{i=1}^t f(n_{ij}|\lambda_j) = \lambda_j^t e^{-\lambda_j \sum_{i=1}^t n_{ij}}$$

A distribuição *a posteriori* vem

$$\begin{aligned}
u(\lambda|\bar{n}_j) &= \frac{L(\lambda)u(\lambda)}{\int_0^{+\infty} L(\lambda)u(\lambda)d\lambda} = \frac{\lambda^t e^{-\lambda \sum_{i=1}^t n_{ij}} e^{-\beta\lambda} \lambda^{\alpha-1} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}}{\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda \left( \beta + \sum_{i=1}^t n_{ij} \right)} \lambda^{t+\alpha-1} d\lambda} = \\
&= \frac{\left( \beta + \sum_{i=1}^t n_{ij} \right)^{\alpha+t}}{\Gamma(t+\alpha)} e^{-\lambda \left( \beta + \sum_{i=1}^t n_{ij} \right)} \lambda^{\alpha+t-1} \equiv \mathbf{Gama} \left( \alpha + t; \beta + \sum_{i=1}^t n_{ij} \right)
\end{aligned}$$

Podemos então mostrar que a média *a posteriori* é

$$\begin{aligned}
E[\mu(\lambda)|\bar{n}_j] &= E\left[\frac{1}{\lambda}|\bar{n}_j\right] = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda} \frac{\left( \beta + \sum_{i=1}^t n_{ij} \right)^{t+\alpha}}{\Gamma(\alpha+t)} e^{-\lambda \left( \beta + \sum_{i=1}^t n_{ij} \right)} \lambda^{\alpha+t-1} d\lambda \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+t-1)}{\Gamma(\alpha+t)} \left( \beta + \sum_{i=1}^t n_{ij} \right) \int_0^{+\infty} \frac{\left( \beta + \sum_{i=1}^t n_{ij} \right)^{t+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+t-1)} e^{-\lambda \left( \beta + \sum_{i=1}^t n_{ij} \right)} \lambda^{(\alpha+t-1)-1} d\lambda = \frac{\beta + \sum_{i=1}^t n_{ij}}{\alpha+t-1}
\end{aligned}$$

onde o prémio colectivo é

$$\begin{aligned}
\mu &= E[N_{ij}] = E\left[\frac{1}{\lambda}\right] = \int_0^{+\infty} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\lambda} e^{-\beta\lambda} \lambda^{\alpha-1} d\lambda \\
&= \frac{\beta\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{\beta^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)} e^{-\beta\lambda} \lambda^{(\alpha-1)-1} d\lambda = \frac{\beta}{\alpha-1}, \quad \alpha > 1
\end{aligned}$$

Logo, fica demonstrado que a média *a posteriori* se escreve de acordo com a fórmula de credibilidade, ou seja,

$$E\left[\mu(\lambda)|\bar{n}_{.j}\right] = \frac{\beta}{\alpha+t-1} + \frac{t\bar{n}_{.j}}{\alpha+t-1} = \frac{t}{\alpha+t-1}\bar{n}_{.j} + \frac{\alpha-1}{\alpha+t-1} \times \frac{\beta}{\alpha-1} = \omega\bar{n}_{.j} + (1-\omega)\mu$$

com  $\omega = \frac{t}{t+k}$  e  $k = \alpha - 1$ .

Analisando a fórmula de credibilidade, podemos afirmar que se  $\omega$  estiver próximo de 0 significa que o risco individual não vai trazer informação adicional ao colectivo. Por outro lado, se estiver próximo de 1, podemos dizer que  $\bar{N}$  é um bom estimador de  $\mu(\lambda)$ . Para um risco que integra o colectivo pela primeira vez, então  $\omega$  toma o valor 0 e é-lhe atribuído o prémio do colectivo.

### 3.2. Modelo de *Bühlmann*

Como já dissemos anteriormente, a principal preocupação é conseguir obter o estimador para o “verdadeiro” prémio puro de risco,  $\mu(\lambda)$ . Em geral, um “bom” estimador a utilizar seria a média *a posteriori*  $E[\mu(\lambda)|N_1, N_2, \dots, N_t]$ , mas por vezes chegamos a resultados difíceis de interpretar.

É então que surge *Bühlmann (1967)*, cujo modelo propõe que a estimação do prémio puro seja feita através duma função linear das indemnizações passadas para risco do colectivo, chegando aos estimadores lineares através do critério do Erro Quadrático Médio Mínimo.

Para podermos esquematizar o modelo, iremos resumir as hipóteses apresentadas por *Bühlmann (1967)*, segundo *Egídio dos Reis (2002)*:



**H1:** Dado  $\lambda_j$ , as variáveis aleatórias  $N_{1j}, N_{2j}, \dots, N_{tj}, N_{t+1j}$ , são independentes e identicamente distribuídas.

Esta hipótese indica que as indemnizações agregadas do risco  $j$  são independentes de período para período, segundo a característica  $\lambda_j$ . Além disso, indica também que a distribuição  $N_{ij}$ , condicionada por  $\lambda_j$ , não depende de  $i$ .

**H2:** Os pares  $(\bar{N}_1, \lambda_1), (\bar{N}_2, \lambda_2), \dots, (\bar{N}_T, \lambda_T)$  são independentes e identicamente distribuídos e  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_T$  são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com função distribuição  $U(\lambda)$ .

Esta hipótese indica-nos que existe independência entre os riscos.

Seguindo as hipóteses **H1** e **H2** acima indicadas, podemos chegar facilmente à melhor aproximação linear de  $E[\mu(\lambda)|N_1, N_2, \dots, N_t]$  proposta por *Bühlmann*, como iremos mostrar de seguida:

O estimador  $\hat{p}_j$  chama-se **Estimador de Credibilidade** do verdadeiro prémio puro ou **Fórmula de Credibilidade**, se estimarmos  $\mu(\lambda)$  através duma função linear do vector observável  $\bar{N}_j = (N_{1j}, N_{2j}, \dots, N_{tj})$ , ou seja,

$$\hat{p}_j = a + b\bar{N}_j$$

com  $\bar{N}_j = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t N_{ij}$  e as constantes  $a$  e  $b$  calculadas de forma a minimizar a função de

perca quadrática esperada:

$$R = E[\hat{p}_j - \mu(\lambda)]^2 = E[a + b\bar{N}_{.j} - \mu(\lambda)]^2 \quad (3.1.)$$

Dado que, qualquer que seja a variável aleatória  $X$  e a constante  $c$ , temos que

$$E[X - c]^2 = V[X] + (E[X] - c)^2 \quad (3.2.)$$

a partir da expressão (3.1.) podemos chegar facilmente ao estimador de credibilidade, se a escrevermos na forma (3.2.), isto é,

$$E[a - (\mu(\lambda) - b\bar{N}_{.j})]^2 = V[\mu(\lambda) - b\bar{N}_{.j}] + (a - E[\mu(\lambda) - b\bar{N}_{.j}])^2 \quad (3.3.)$$

Observando esta igualdade, facilmente se conclui que a segunda parcela de (3.3.) é minimizada, para qualquer  $b$ , fazendo

$$a = E[\mu(\lambda) - b\bar{N}_{.j}] = E[\mu(\lambda)] - bE[\bar{N}_{.j}]$$

Através da hipótese **H1**, ou seja, dado  $\lambda_j$ , as variáveis aleatórias  $N_{1j}, N_{2j}, \dots, N_{tj}, N_{t+1j}$  são independentes e identicamente distribuídas temos que

$$E[\bar{N}_{.j}] = E[E[\bar{N}_{.j} | \lambda_j]] = E[\mu(\lambda_j)]$$

Logo obtemos a expressão

$$a = (1 - b)E[\mu(\lambda_j)]$$

Obtida a expressão  $a$ , só nos falta tentar chegar à expressão  $b$ . Começemos por analisar a primeira parcela de (3.3.). Esta pode ser escrita de outra forma, ou seja,

$$V[\mu(\lambda_j) - b\bar{N}_{.j}] = b^2 E[\bar{N}_{.j} - \mu(\lambda_j)]^2 + (1 - b)^2 V[\mu(\lambda_j)]$$

Derivando a expressão em ordem a  $b$  e igualando a zero temos que

$$2bE[\bar{N}_{.j} - \mu(\lambda_j)]^2 - 2(1 - b)V[\mu(\lambda_j)] = 0$$

Logo facilmente chegamos à expressão  $b$ , isto é,

$$b = \frac{V[\mu(\lambda_j)]}{V[\mu(\lambda_j)] + E[\bar{N}_{.j} - \mu(\lambda_j)]^2}$$

Como assumimos que  $N_{1j}, N_{2j}, \dots, N_{tj}, N_{t+1j}$  são independentes e identicamente distribuídas,

$$E[\bar{N}_{.j} - \mu(\lambda_j)]^2 = \frac{1}{t} E[N_{1j} - \mu(\lambda_j)]^2 = \frac{1}{t} E[\sigma^2(\lambda_j)]$$

Deste modo a expressão  $b$  poderá também ser escrita do seguinte modo:

$$b = \frac{V[\mu(\lambda_j)]}{V[\mu(\lambda_j)] + \frac{1}{t} E[\sigma^2(\lambda_j)]}$$

Para finalizar, se substituirmos  $a$  e  $b$  na expressão inicial, obtemos o **estimador de credibilidade**, como pretendido, isto é,

$$\tilde{p}_j = a + b\bar{N}_{.j} = \omega \bar{N}_{.j} + (1 - \omega)\mu_N$$

$$\text{onde } \omega = \frac{t}{t+k} \text{ e } k = \frac{E[\sigma^2(\lambda)]}{V[\mu(\lambda)]}.$$

Para obtermos o **Prémio Empírico de Credibilidade** basta, na expressão do estimador de credibilidade, substituirmos  $k$  pelas suas estimativas, ou seja,

$$\hat{p}_T = \omega_T \bar{N}_{.j} + (1 - \omega_T)\hat{\mu}_N$$

$$\text{com } \omega_T = \frac{t}{t+k} \text{ e } k = \frac{E[\hat{\sigma}^2(\lambda)]}{V[\hat{\mu}(\lambda)]}.$$

Logo, o prémio de credibilidade converge em probabilidade para o estimador de credibilidade.

Dado que este modelo foi desenvolvido por *Bühlmann(1967)*, podemos encontrar mais detalhes nos artigos publicados por este autor. Outros modelos poderão ser aplicados na Teoria da Credibilidade, como se poderá consultar em *Egídio dos Reis(2002)*.

### **3.3. Credibilidade no Seguro de Frotas para Veículos**

Após uma breve exposição da Teoria da Credibilidade e, em especial, do modelo apresentado por *Bühlmann (1967)*, estamos aptos para aplicar esta teoria à nossa Carteira de frotas de veículos. Esta secção irá seguir o trabalho proposto por *Desjardins, Dionne & Pinquet (2001)*.

Os estimadores de credibilidade linear serão calculados segundo o modelo de Poisson, para cada veículo. Estes derivam da sinistralidade observada em cada nível da frota, enquanto que o factor de credibilidade depende do veículo.

Consideremos então que  $i_\theta$  é um veículo pertencente à frota  $f_\theta$ . A Carteira é observada durante um período e o coeficiente de bonus-malus será calculado para o período seguinte. De modo a permitir um “turnover” na Carteira, este veículo pode aparecer apenas no segundo período. Os estimadores são obtidos separadamente para cada frota, supondo que esta contém  $m$  veículos durante o primeiro período.

Assim sendo, o coeficiente de bonus-malus é obtido através do estimador de credibilidade, que para o veículo  $i_\theta$  depende apenas do número de sinistros declarados em toda a frota. O índice da frota será suprimido para simplificar as notações.

O estimador de credibilidade pode então ser escrito como

$$\hat{p} = \hat{a}_{i_0} + \hat{b}_{i_0} \left( \sum_{i=1}^m n_i \right)$$

em que  $\hat{a}_{i_0}$  e  $\hat{b}_{i_0}$  são calculados de forma a minimizar a função de perda quadrática esperada, ou seja,

$$R = E \left[ \hat{p} - U_{i_0} \right]^2 = E \left[ \hat{a}_{i_0} + \hat{b}_{i_0} \left( \sum_{i=1}^m N_i \right) - U_{i_0} \right]^2$$

O valor esperado deriva do modelo com factores aleatórios. Note-se que não foi dada nenhuma espécie de peso à história do veículo.

Para deduzir o estimador procede-se do mesmo modo que o apresentado para o modelo de Bühlmann(1967). Assim, como  $E(U_{i_0}) = 1$ , chegamos à expressão

$$\hat{a}_{i_0} + \hat{b}_{i_0} \left( \sum_{i=1}^m n_i \right) = 1 + \hat{b}_{i_0} \left( \sum_{i=1}^m (n_i - \hat{\lambda}_i) \right) = (1 - cred_{i_0}) + cred_{i_0} \frac{\sum_{i=1}^m n_i}{\sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_i} \quad (3.4.)$$

com

$$cred_{i_0} = \hat{b}_{i_0} \left( \sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_i \right) = \frac{\hat{Cov}(U_{i_0}, \sum_{i=1}^m N_i)}{\hat{V}(\sum_{i=1}^m N_i)} \left( \sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_i \right)$$

Os estimadores consistentes para os momentos individuais serão

$$\hat{Cov}(U_{i_0}, N_i) = \hat{\lambda}_i \hat{Cov}(U_{i_0}, U_i) = \begin{cases} \lambda_i \hat{V}_{RR}(\mathbf{i}_0 \neq \mathbf{i}) \\ \lambda_{i_0} \hat{V}_{UU}(\mathbf{i}_0 = \mathbf{i}) \end{cases}$$

$$\hat{V}(N_i) = \hat{\lambda}_i + \hat{\lambda}_i^2 \hat{V}_{UU}$$

$$\hat{Cov}(N_i, N_j) = \hat{\lambda}_i \hat{\lambda}_j \hat{V}_{RR}(\mathbf{i} \neq \mathbf{j})$$

de acordo com os estimadores obtidos anteriormente.

Neste momento, estamos prontos para calcular o prémio para anuidade seguinte, tendo em atenção os factores específicos das frotas e dos veículos. Este modelo determina o prémio para cada frota e adiciona um coeficiente de bónus ou de agravamento a cada veículo, consoante a sinistralidade. Quando um novo veículo entra para a frota, o prémio apenas entra em consideração com os factores específicos da frota.

No cálculo do factor de credibilidade, duas situações podem acontecer:

- 1) O veículo não é observado durante o primeiro período, o que significa que ele se irá juntar à frota no período seguinte ( $i_0 \neq i \forall i=1, \dots, m$ ). Logo

$$cred_{i_0} = \alpha = \frac{\hat{V}_{RR} \left( \sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_i \right)}{1 + \left( \hat{V}_{RR} \left( \sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_i \right) \right) + \left( \left( \hat{V}_{UU} - \hat{V}_{RR} \right) \frac{\sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_i^2}{\sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_i} \right)}$$

O factor de credibilidade é obtido através dos estimadores acima indicados para os momentos individuais.

- 2) O veículo é observado durante o primeiro período ( $1 \leq i_0 \leq m$ ). Então

$$cred_{i_0} = \alpha + \beta_{i_0}$$

com

$$\beta_{i_0} = \frac{\left( \hat{V}_{UU} - \hat{V}_{RR} \right) \hat{\lambda}_{i_0}}{1 + \left( \hat{V}_{RR} \left( \sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_i \right) \right) + \left( \left( \hat{V}_{UU} - \hat{V}_{RR} \right) \frac{\sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_i^2}{\sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_i} \right)}$$

O factor de credibilidade é a soma do factor específico da frota com o factor específico do veículo. Só pode ser calculado se a variância estimada para o factor específico do

veículo  $\hat{V}_{SS}$  for maior que zero, o que significa que  $\hat{V}_{UU} > \hat{V}_{RR}$ , ou seja, a história de um veículo pode revelar factores escondidos, logo faz sentido introduzir a componente de heterogeneidade. Este factor é o bónus cedido à empresa se não forem declarados sinistros pelos seus veículos.

Se  $\rho$  for o “turnover” esperado para os veículos da frota, a credibilidade igual a  $\alpha + ((1 - \rho)\bar{\beta})$  pode ser retida ao nível da frota, onde  $\bar{\beta}$  é a média dos  $\beta_i$ .

## **CAPÍTULO 4**

### **ESTATÍSTICA DESCRITIVA DA CARTEIRA**

#### **4.1. Características Gerais**

Na amostra utilizada para o estudo, os veículos foram observados de Novembro de 1997, data de início de comercialização do seguro de frotas nesta Seguradora, a Janeiro de 2003. No ficheiro, onde constava toda a informação relativa aos veículos, contabilizaram-se 24.697 veículos, tendo cada um desses veículos a indicação do número da frota a que correspondia, existindo no total 2.698 frotas.

De notar que foram consideradas, para a amostra, apenas as apólices em vigor no final do período de observação. Para isso houve a necessidade de cruzar a informação do ficheiro de veículos com a do ficheiro que indicava o estado da apólice. Analisando o ficheiro de sinistros, observámos o registo de 11.443 sinistros com direito a indemnização, cujo custo médio rondava os 1.060 €.

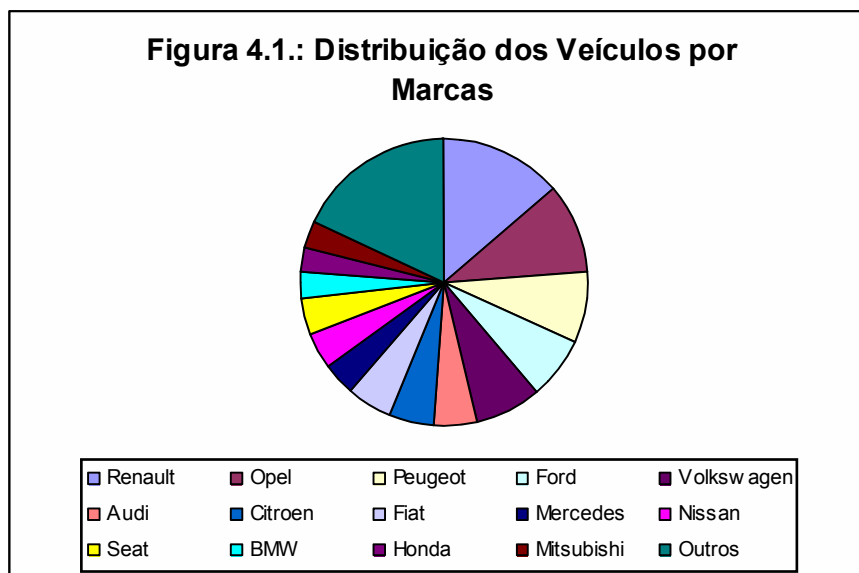
Observando a Carteira no geral, em média, apresentava 9 veículos por frota, em que a maior frota somava 2.113 veículos (frota esta que pertence a uma empresa de aluguer) e a mais pequena apenas 1 veículo. A existência de frotas com apenas 1 ou 2 veículos prende-se com o facto de que, a partir do momento em que se considera que os veículos



pertencem a uma determinada frota, continuam com esse código enquanto a apólice estiver em vigor.

Relativamente às durações das apólices na Carteira, podemos referir que a duração máxima é de aproximadamente cinco anos, que corresponde ao período desde o início da observação dos dados, e a apólice mais recente apresenta uma duração de apenas quinze dias. Será importante relembrar que o nosso modelo entra em consideração com a duração da apólice na estimação da frequência de sinistralidade.

Se fizermos uma análise rápida aos veículos em geral, podemos afirmar que a grande parte são ligeiros, cerca de 86% dos veículos têm peso bruto inferior a 2.500 kg e que apenas 6% escolhe veículos de grande cilindrada. Entre eles o número de marcas de veículos não diferem muito, sendo a Renault a que predomina na carteira, como podemos observar na Figura 4.1.



Como vimos no Capítulo 2, o modelo apresentado, para uma Carteira de frotas, propõe uma diferenciação entre os factores específicos da frota e os factores específicos dos

veículos. Alguns dos factores específicos utilizados foram os mesmos que os propostos por *Desjardins, Dionne & Pinquet (2001)*, no entanto, outros tiveram que ser adaptados à realidade portuguesa.

## 4.2. Factores específicos da frota

Dado que a Seguradora, em estudo, aplica a cada veículo das frotas o mesmo prémio que aplica a um seguro automóvel individual, a informação específica sobre as frotas torna-se irrelevante. Assim sendo, a base de dados sobre a Carteira de frotas, não contém qualquer informação sobre as mesmas. Seria interessante, no futuro, tentar aplicar este modelo em bases de dados onde pudéssemos obter mais informação, de modo a encontrarmos outros factores específicos para as frotas. Deste modo, optámos por seguir os factores utilizados pelos autores acima indicados, que são:

1. **Dimensão da frota**
2. **Idade da empresa**
3. **Sector de actividade.**

**Dimensão da frota:** Este factor é medido pelos anos dos veículos, isto é, para cada veículo calcula-se o período desde a data da sua matrícula até ao final do período de observação da amostra. A dimensão da frota será a soma desses períodos.

**Idade da empresa:** Este factor foi logo à partida um factor desconhecido. Para tal, assumimos que seria o período desde a data de subscrição da primeira apólice, de cada frota, até ao final do período de observação. Nesta análise entrámos também em consideração com as apólices já anuladas, pois poderiam ser estas as mais antigas.

**Sector de actividade:** Por outro lado, a base de dados não tinha qualquer indicação do sector de actividade de cada empresa. Embora exista um campo para o CAE (Código de Actividade Económica), como este código não é necessário para o cálculo do prémio, nunca é requerido o seu fornecimento perante as empresas. Assim, conhecendo o tomador de seguro, ou seja, o nome da empresa e o tipo de veículos usados na sua actividade, classificaram-se as frotas em 4 classes, seguindo a proposta dos autores já mencionados:

- 1. Transporte de mercadorias geral,**
- 2. Transporte de carga**
- 3. Aluguer de curta duração**
- 4. Transportadores independentes (outros).**

Na Tabela 4.1. podemos analisar como se distribui a amostra, de acordo com as variáveis específicas da frota. Enquanto que na primeira e segunda colunas podemos observar a percentagem de frotas ou veículos que se encontram em cada classe (o total da coluna, por variável, corresponde a 100%), na terceira coluna podemos verificar qual a percentagem de sinistros em função do número total de veículos por classe.

De acordo com a Tabela 4.1., embora o maior número de frotas esteja concentrado nas frotas com veículos de 3 a 9 anos, são as frotas com mais de 20 de anos que apresentam um maior número de veículos por frota e, maior sinistralidade relativa.

Não nos podemos esquecer que a variável “Dimensão da frota” é a soma dos anos dos veículos, ou seja, uma frota com poucos veículos, mas com alguma antiguidade, pode ter uma dimensão superior a uma frota com muitos veículos, mas recente.

**Tabela 4.1.: Distribuição da amostra, de acordo com as variáveis específicas das frota**

	Peso das frotas	Peso dos veículos	% sinistros em função do total de veículos por classe
<b>Anos veículos (Dimensão da frota)</b>			
[0,1]	16,1%	2,4%	16,4%
]1,2]	12,4%	2,6%	24,7%
]2,3]	12,0%	2,4%	34,1%
]3,9]	31,6%	10,1%	40,6%
]9,20]	11,6%	9,7%	47,7%
>20	16,3%	72,8%	49,1%
<b>Anos empresa</b>			
[0,1]	71,5%	53,4%	19,0%
]1,2]	9,2%	14,0%	63,9%
]2,3]	8,9%	14,1%	73,2%
>3	10,4%	18,5%	91,5%
<b>Sector de Actividade da Empresa</b>			
Transporte de mercadorias geral	3,1%	10,1%	29,7%
Transporte de carga	1,1%	4,0%	21,9%
Aluguer de curta duração	94,6%	82,2%	49,2%
Transportador independente	1,2%	3,7%	54,4%

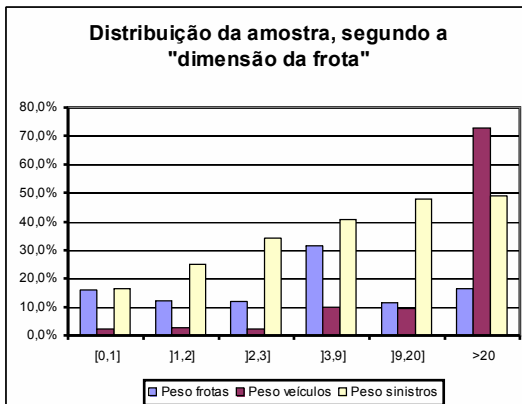
Através da Tabela 4.1., podemos também verificar que a frequência de sinistralidade aumenta tanto com a dimensão da frota como com os anos da empresa. Por fim, se compararmos os diferentes sectores de actividade, podemos concluir que a Carteira é composta essencialmente por frotas de aluguer de curta duração, um negócio que está em franca expansão no nosso país, cujo crescimento ultrapassou os 20% no ano de 2002. A coluna que indica a “% sinistros em função do total de veículos por classe” corresponde ao rácio entre o número de sinistros ocorridos e o número total de veículos por frota.

As empresas estão a aderir, cada vez mais, ao Aluguer Operacional de Viaturas, pois conseguem diminuir os gastos das empresas, relativamente à aquisição e manutenção dos seus veículos, pagamento de seguro automóvel, impostos municipais, etc., e deixam de ter que se preocupar com a gestão das suas frotas.

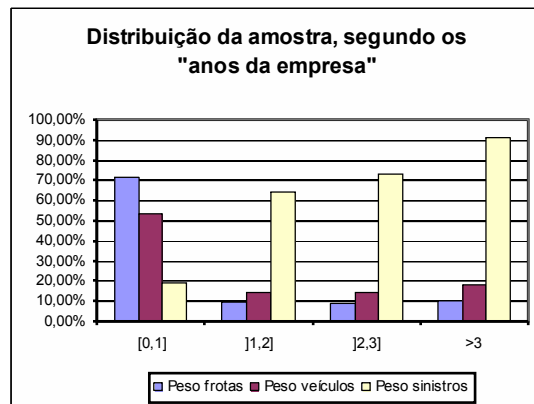
Para isso, basta que celebrem este tipo de contratos e, partir dessa altura, passam a ter ao seu dispor uma viatura e a beneficiar de um enorme número de serviços. A empresa que requerer esses serviços só tem que pagar uma renda mensal para usufruir de todas as vantagens destas novas empresas de gestão de frotas.

Através das figuras a seguir indicadas, podemos ter uma percepção mais rápida da estrutura da amostra, segundo as variáveis específicas das frotas.

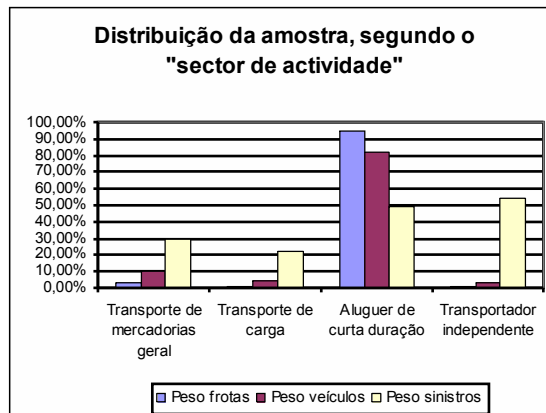
**Figura 4.2.**



**Figura 4.3.**



**Figura 4.4.**



### 4.3. Factores específicos do veículo

Para melhor definir os factores específicos de avaliação dos veículos da nossa Carteira, tivemos também que ter em consideração as variáveis que são utilizadas pelas Seguradoras a operar no mercado Português, na determinação do prémio *a priori*. Assim sendo, para melhor definir os veículos utilizamos os seguintes factores:

1. **Peso bruto**
2. **Tipo de uso**
3. **Tipo de combustível**
4. **Cilindrada.**

Dentro da base de dados, estes foram os factores que mais informação tinham para caracterizar os veículos, embora mesmos estes apresentassem alguns problemas que necessitaram de tratamento.

**Peso bruto:** Neste factor foram utilizados os respectivos valores de peso bruto de cada veículo. No entanto, grande parte dos veículos não tinha qualquer indicação do seu valor. Neste caso foi necessário introduzir na base de dados, um a um, os valores em falta. Sabendo que em qualquer revista Auto da especialidade, conseguimos obter todas as características específicas de cada veículo, cruzámos a informação da revista com cada modelo de veículo que vinha indicado na base de dados.

**Tipo de uso:** Este factor necessitou de ser agrupado em classes, tendo sido utilizada a classificação proposta pelos autores já mencionados. Deste modo formaram-se 3 classes:

1. **Uso comercial**
2. **Transporte de carga**
3. **Outros tipos de transporte.**

Estruturou-se como **classe 1** os veículos ligeiros, de duas rodas e comerciais; na **classe 2** os mistos, caminhetas, “multi purpose vehicles”, camiões e porta-autos e na **classe 3** os restantes veículos (veículos industriais, tractores, máquinas agrícolas, etc.).

**Tipo de combustível:** Este factor também necessitou de ser agrupado dando origem a duas classes:

1. **Gasolina**
2. **Gasóleo**

O ficheiro também não diferenciava o tipo de combustível dos veículos, tendo sido necessário analisar, veículo a veículo, qual o seu combustível através da indicação do seu modelo.

**Cilindrada:** Tal como o peso bruto, este factor não tinha qualquer indicação do seu valor em alguns veículos, tendo sido também introduzidos na base de dados de acordo com o modelo do veículo, seguindo o método utilizado para o factor peso bruto.

Na Tabela 4.2. temos a distribuição dos veículos, de acordo com os seus factores. A interpretação das colunas é feita da mesma forma da Tabela 4.1. Na Carteira observada podemos encontrar veículos ligeiros em maior número. Esses veículos são, principalmente, para uso comercial, sendo o combustível mais utilizado o gasóleo.

**Tabela 4.2.: Distribuição da amostra, de acordo com as variáveis específicas dos veículos**

	<b>Peso dos veículos</b>	<b>% sinistros em função do total de veículos por classe</b>
<b>Peso bruto</b>		
<=2500	85,6%	41,7%
]2500,3500]	11,5%	75,0%
>3500	2,9%	69,2%
<b>Tipo Uso</b>		
Comercial	77,4%	41,4%
Transporte Carga	19,9%	64,9%
Outros tipos de transporte	2,7%	50,4%
<b>Tipo Combustível</b>		
Gasolina	47,8%	38,4%
Gasóleo	52,2%	53,6%
<b>Cilindrada</b>		
<=1500	41,8%	32,6%
]1500,2500]	52,6%	54,8%
>2500	5,6%	69,1%

Analisando a sinistralidade, podemos afirmar que os veículos de transporte de carga, com peso bruto entre os 2.500 e os 3.500 kg e com maior cilindrada são os que apresentam maior sinistralidade. Os veículos a gasolina têm menor sinistralidade do que os veículos a gasóleo, realidade essa que pode ser observada na maior parte das Seguradoras portuguesas, e que reflecte a menor exposição ao risco em termos de quilometragem efectuada. Voltamos a lembrar que a coluna que indica a “% sinistros em função do total de veículos por classe” corresponde ao rácio entre o número de sinistros ocorridos e o número total de veículos por frota.

A distribuição dos veículos e sinistros da amostra é apresentada nas figuras a seguir indicadas, de acordo com a variável específica dos veículos.



Figura 4.5.

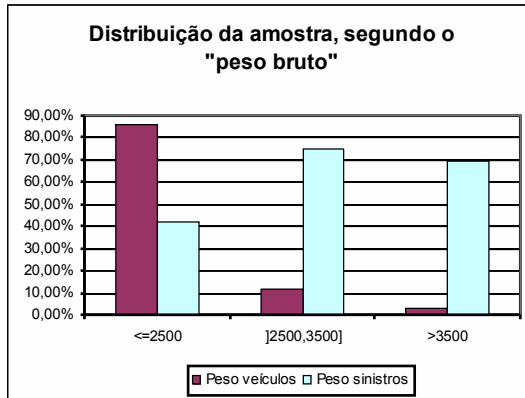


Figura 4.6.

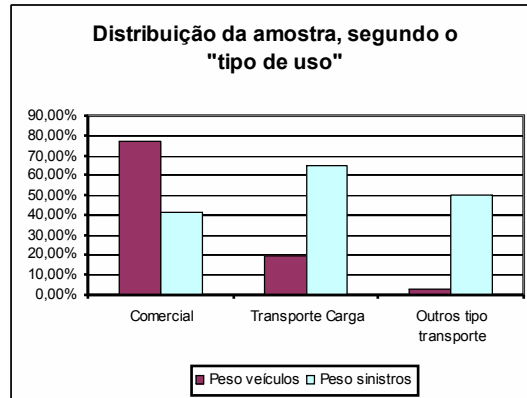


Figura 4.7.

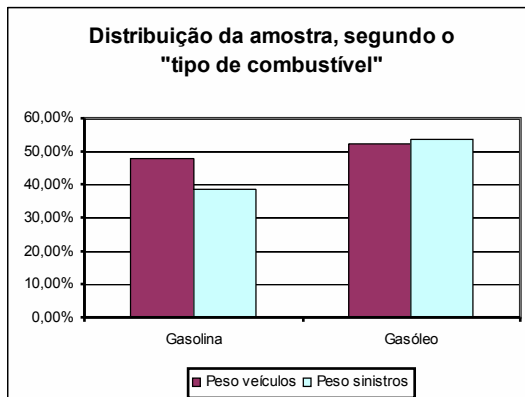
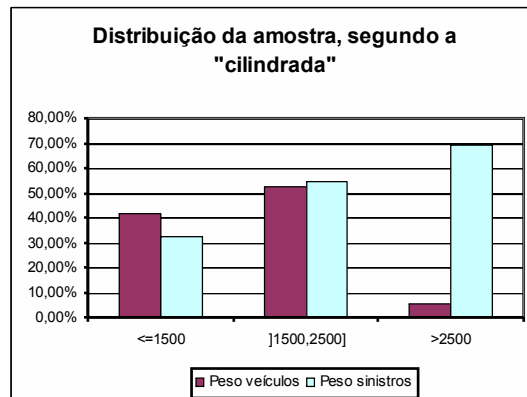


Figura 4.8.



## CAPÍTULO 5

### APLICAÇÃO A UMA CARTEIRA PORTUGUESA

Neste Capítulo iremos mostrar os resultados práticos de todo o modelo que apresentámos nos Capítulos anteriores, relativamente a seguros de frotas. Além disso, apresentamos, para cada sector de actividade, Sistemas Óptimos Bonus-Malus, de acordo com o modelo sugerido por *Bühlmann (1967)*.

#### 5.1. Parâmetros relacionados com a frota e o veículo

Para aplicarmos o modelo de Poisson indicado, necessitamos inicialmente de encontrar o parâmetro  $\lambda_{f_i} = d_{f_i} \exp(x_f \gamma + z_{f_i} \delta)$  para cada veículo, onde  $\hat{\gamma}$  e  $\hat{\delta}$  são estimadores lineares.

Para obtermos estes dois conjuntos de estimadores, iremos utilizar as duas técnicas apresentadas anteriormente. Primeiramente obtemos o conjunto de estimadores através do método de Pseudo-Máxima Verosimilhança, utilizando como função objectivo a Poisson e a Normal. Além da distribuição Poisson, a escolha recaiu na distribuição Normal porque, como já referimos na secção 2.3.2., o estimador de Pseudo-Máxima

Verosimilhança, obtido através da função objectivo Normal coincide com o estimador calculado através do Método dos Mínimos Quadrados Generalizados.

De seguida aplicamos o método de estimação proposto em *Mexia/Corte Real*, considerando como vectores iniciais, o conjunto de vectores nulos e o conjunto de vectores que se considerou duas vezes o valor obtido pelo método de Pseudo-Máxima Verosimilhança, utilizando a Poisson, pela simples razão de obtermos com esta função o maior valor para a função de verosimilhança.

Será importante ressaltar que as condições requeridas pelo método *Mexia/Corte Real*, como as propostas na secção 2.3.1. são verificadas pelas distribuições da família exponencial linear, portanto, o método é perfeitamente aplicável. Os estimadores assim obtidos por este método convergem quase certamente para os parâmetros relacionados com a frota e o veículo, o que implica que convergem também em probabilidade.

Todas as tabelas que são indicadas nesta dissertação, apresentam os resultados segundo estas duas técnicas e relativamente aos dois modelos propostos.

Os resultados destas duas técnicas são apresentados na Tabela 5.1. O vector  $\hat{\gamma}$  diz respeito às componentes específicas da frota, que resulta num vector de dimensão 11, e o vector  $\hat{\delta}$  às do veículo de dimensão 7, segundo a divisão por classes efectuada aos factores apresentados no capítulo anterior.

A partir deste momento, quando falarmos em método *Mexia/Corte Real 1* é o que inicia o método, segundo os vectores iniciais **1.** e o *Mexia/Corte Real 2* corresponde a considerar os vectores de **2.**

**Tabela 5.1.: Estimação dos parâmetros através do Método de Pseudo-Máxima Verosimilhança e do Método *Mexia/Corte Real***

	<b>Classes dos factores</b>	<b>Poisson</b>	<b>Normal</b>	<b><i>Mexia / Corte Real</i><sup>1</sup></b>	<b><i>Mexia / Corte Real</i><sup>2</sup></b>
<b>t.i.</b>	Termo independente	-2,0770	-2,0769	-1,6412	-2,7022
$\hat{\gamma}_1$	<b>[1,2]</b> Anos veículos	-0,2445	-0,6007	-0,4830	-0,0154
$\hat{\gamma}_2$	<b>[2,3]</b> Anos veículos	-0,1500	-0,3823	-0,2205	-0,0493
$\hat{\gamma}_3$	<b>[3,9]</b> Anos veículos	-0,0918	-0,2581	-0,3819	0,1731
$\hat{\gamma}_4$	<b>[9,20]</b> Anos veículos	-0,0263	-0,1722	-0,2474	0,2904
$\hat{\gamma}_5$	<b>&gt;20</b> Anos veículos	-0,0303	-0,0514	-0,2417	0,2721
$\hat{\gamma}_6$	<b>[1,2]</b> Anos empresa	0,2994	0,5239	0,2691	0,3307
$\hat{\gamma}_7$	<b>[2,3]</b> Anos empresa	0,0964	0,0847	0,0632	0,1412
$\hat{\gamma}_8$	<b>&gt;3</b> Anos empresa	0,0232	-0,0863	-0,0347	0,0069
$\hat{\gamma}_9$	<b>Transporte de carga</b> (Sect. Act.)	0,2867	0,3873	0,1364	0,3624
$\hat{\gamma}_{10}$	<b>Aluguer de curta duração</b>	1,0721	1,1730	0,9229	1,4077
$\hat{\gamma}_{11}$	<b>Transportador independente</b>	0,4162	0,3306	0,0465	0,7317
$\hat{\delta}_1$	<b>[2500,3500]</b> Peso bruto	0,5619	0,5659	0,4701	0,7221
$\hat{\delta}_2$	<b>&gt;3500</b> Peso bruto	1,1117	1,0059	0,7842	1,6271
$\hat{\delta}_3$	<b>Transporte de carga</b> (Tipo uso)	-0,0480	-0,0662	0,0181	-0,2192
$\hat{\delta}_4$	<b>Outros tipos transporte</b>	-0,0872	0,0061	0,1016	-0,5070
$\hat{\delta}_5$	<b>Gasóleo</b>	0,1702	0,1843	0,1674	0,1474
$\hat{\delta}_6$	<b>[1500,2500]</b> Cilindrada	0,1459	0,1234	0,1225	0,1732
$\hat{\delta}_7$	<b>&gt;2500</b> Cilindrada	-0,0813	-0,0795	0,0868	-0,1050

**Nota:** Considerámos como parâmetros iniciais:

1. Vectors nulos;
2. o dobro dos valores obtidos com a função Poisson.

Como podemos observar os valores não diferem muito, aplicando um método ou outro, sendo as diferenças mais significativas nas últimas classes dos “Anos veículos”, “Anos empresa” e “Tipo Uso”. Podemos assim afirmar que os parâmetros obtidos se encontram na mesma vizinhança. Além disso, e como mostrou *Gouriéroux, Monfort &*

Trognon (1984), em *Pseudo Maximum Likelihood Methods: Theory*, são estimadores consistentes e assintoticamente Normais, como vimos no ponto 2.3.

No entanto, os estimadores obtidos com a Poisson são os que permitem maximizar a função de verosimilhança, embora os valores obtidos nos restantes modelos resultem em diferenças pouco significativas, quer nos seus valores em si, quer nos resultados após a aplicação do método de Bonus-Malus, à excepção da Normal que reduz bastante o valor da função de verosimilhança, dado ser o único caso em que se aplica a Normal.

Analisando a soma dos quadrados dos resíduos chegamos à conclusão que os valores estão muito próximos, como podemos constatar pela Tabela 5.2., mas é o modelo da Normal que minimiza a soma dos quadrados dos resíduos, mesmo que através da log-verosimilhança não seja considerado o melhor método.

**Tabela 5.2.: Função de Log-Verosimilhança e Soma dos Quadrados dos Resíduos**

	Poisson	Normal	Mexia / Corte Real 1	Mexia / Corte Real 2
<b>Função de Log - Verosimilhança</b>	-19.166,3	-30.519,2	-19.211,2	-19.229,9
<b>Soma dos Quadrados dos Resíduos</b>	16.976,8	16.759,3	16.993,9	17.005,3

Estes parâmetros, e todos os valores apresentados em tabelas futuras, foram obtidos através do software *Mathematica 5.0*. (encontra-se em anexo o layout do Programa de cálculo dos coeficientes de bonus-malus, seguindo o método de Pseudo-Máxima Verosimilhança, utilizando a distribuição Poisson como a função objectivo). Este programa apresenta alguma complexidade, mas nada que não se consiga ultrapassar para alguém que já tenha algumas noções de programação noutra tipo de software.

O *Mathematica 5.0.* tem a vantagem, como o próprio nome indica, de permitir realizar as mais diversas operações matemáticas, sendo a maior dificuldade, com que nos deparámos, a sua morosidade. Ao aplicarmos o método da Pseudo-Máxima Verosimilhança, o programa demora poucos minutos a obter os valores dos parâmetros, mas seguindo o método *Mexia/Corte Real* demora de 4 a 8 horas a correr, consoante os vectores iniciais escolhidos **1.** ou **2.**, respectivamente (num computador Pentium II com 320 MB de memória RAM).

O método proposto por *Mexia/Corte Real* permite-nos encontrar uma região de confiança para os parâmetros, podendo existir vários conjuntos de estimadores que maximem a função de log-verosimilhança. Esses parâmetros são obtidos através de médias e em processamentos sucessivos vai-se aumentando o número de pontos aleatórios.

Este último método foi também programado no *Mathematica 5.0.* Como já referimos na secção 2.3.1., o método proposto inicializa o seu processo através de um conjunto de estimadores e, a partir daí, simula vários pontos até obter o conjunto de estimadores final, em que a pseudo verosimilhança exceda  $M_n + 8/(n^{0,48})$ .

Na prática partimos dos conjuntos de estimadores indicados na Tabela 5.1. Através dos vectores **1**, simulámos 16.250 pontos aleatórios, enquanto que partindo dos vectores **2** foi necessário simular 16.750 pontos. É preciso salientar que o segundo conjunto foi escolhido por ser duas vezes superior ao conjunto de estimadores que resultou da maximização da função Poisson, seguindo o método de Pseudo-Máxima Verosimilhança.

Comparando então os dois métodos adoptados, podemos concluir que o método proposto por *Mexia/Corte Real* é bastante mais lento na determinação dos estimadores, de acordo com os vectores iniciais escolhidos, mas seria útil testar este método noutra base de dados. Tentámos também começar o processo com vectores unitários, mas só ao fim de 33.500 pontos simulados é que conseguimos obter o conjunto de estimadores. No entanto, também para este conjunto de vectores iniciais chegámos a valores de verosimilhança muito próximos aos apresentados na Tabela 5.2. O valor obtido foi de  $-19.236.6$ , o que corresponde a um acréscimo de 0,4% em relação ao valor obtido para a Poisson.

Na eventualidade de não existirem soluções explícitas, o método de *Mexia/Corte Real* permite obter estimadores que são fortemente consistentes, quando verificadas as condições de regularidade.

Obtidos os valores dos parâmetros, já estamos em condições de poder calcular a frequência de sinistralidade esperada para cada veículo, utilizando o modelo de Poisson apresentado no Capítulo 2.

## 5.2. Sinistralidade

O número de sinistros de uma frota é igual à soma dos prémios de risco para cada veículo correspondente a essa mesma frota, assumindo uma indemnização unitária por sinistro. Na Tabela 5.3., podemos comparar, para cada variável, a sinistralidade passada com o número de sinistros esperados, durante todo o período de observação.

**Tabela 5.3.: Comparação entre o n.º de sinistros observados e os esperados pelo Método de Pseudo-Máxima Verosimilhança e Método *Mexia/Corte Real***

	Nº sinistros	Nº sinistros Normal	Coef. ajustam Normal	Nº sinistros <i>Mexia / Corte Real 1</i>	Coef. ajustam <i>Mexia / Corte Real 1</i>	N.º sinistros <i>Mexia / Corte Real 2</i>	Coef. ajustam <i>Mexia / Corte Real 2</i>
<b>Sector de Actividade</b>							
Transporte de mercadorias	743	724	-0,3%	882	1,7%	582	-2,5%
Transporte de carga	215	235	0,3%	223	0,1%	177	-0,8%
Aluguer de curta duração	9.993	10.332	2,7%	10.284	2,4%	10.000	0,1%
Transportador Indep.	492	494	0,0%	415	-0,6%	515	0,2%
<b>Total</b>	<b>11.443</b>	<b>11.785</b>		<b>11.803</b>		<b>11.274</b>	
<b>Anos veículos</b>							
[0,1]	96	105	0,0%	126	0,1%	71	-0,1%
]1,2]	161	136	-0,1%	165	0,0%	152	0,0%
]2,3]	201	182	-0,1%	243	0,2%	168	-0,1%
]3,9]	1.012	948	-0,3%	974	-0,2%	984	-0,1%
]9,20]	1.138	1.090	-0,2%	1.175	0,1%	1.164	0,1%
>20	8.835	9.324	1,9%	9.119	1,1%	8.735	-0,4%
<b>Total</b>	<b>11.443</b>	<b>11.785</b>		<b>11.803</b>		<b>11.274</b>	
<b>Anos empresa</b>							
[0,1]	2.508	2.516	0,0%	2.676	0,7%	2.431	-0,3%
]1,2]	2.206	2.775	2,0%	2.235	0,1%	2.230	0,1%
]2,3]	2.542	2.561	0,1%	2.676	0,5%	2.539	0,0%
>3	4.187	3.933	-1,1%	4.217	0,1%	4.074	-0,5%
<b>Total</b>	<b>11.443</b>	<b>11.785</b>		<b>11.803</b>		<b>11.274</b>	
<b>Peso bruto</b>							
<=2500	8.812	8.982	1,6%	9.127	3,0%	8.643	-1,7%
]2500,3500]	2.137	2.299	0,8%	2.198	0,3%	2.114	-0,1%
>3500	494	504	0,1%	477	-0,1%	517	0,1%
<b>Total</b>	<b>11.443</b>	<b>11.785</b>		<b>11.803</b>		<b>11.274</b>	
<b>Tipo Uso</b>							
Comercial	7.921	8.079	1,5%	8.145	2,2%	7.908	-0,1%
Transporte Carga	3.187	3.338	0,9%	3.326	0,8%	3.055	-0,8%
Outros tipos transporte	335	368	0,3%	332	0,0%	311	-0,2%
<b>Total</b>	<b>11.443</b>	<b>11.785</b>		<b>11.803</b>		<b>11.274</b>	
<b>Tipo Combustível</b>							
Gasolina	4.534	4.698	1,7%	4.701	1,7%	4.530	0,0%
Gasóleo	6.909	7.087	1,3%	7.102	1,4%	6.744	-1,3%
<b>Total</b>	<b>11.443</b>	<b>11.785</b>		<b>11.803</b>		<b>11.274</b>	
<b>Cilindrada</b>							
<=1500	3.366	3.556	2,3%	3.533	2,0%	3.314	-0,7%
]1500,2500]	7.119	7.246	0,9%	7.231	0,8%	7.010	-0,8%
>2500	958	983	0,1%	1.039	0,5%	950	0,0%
<b>Total</b>	<b>11.443</b>	<b>11.785</b>		<b>11.803</b>		<b>11.274</b>	

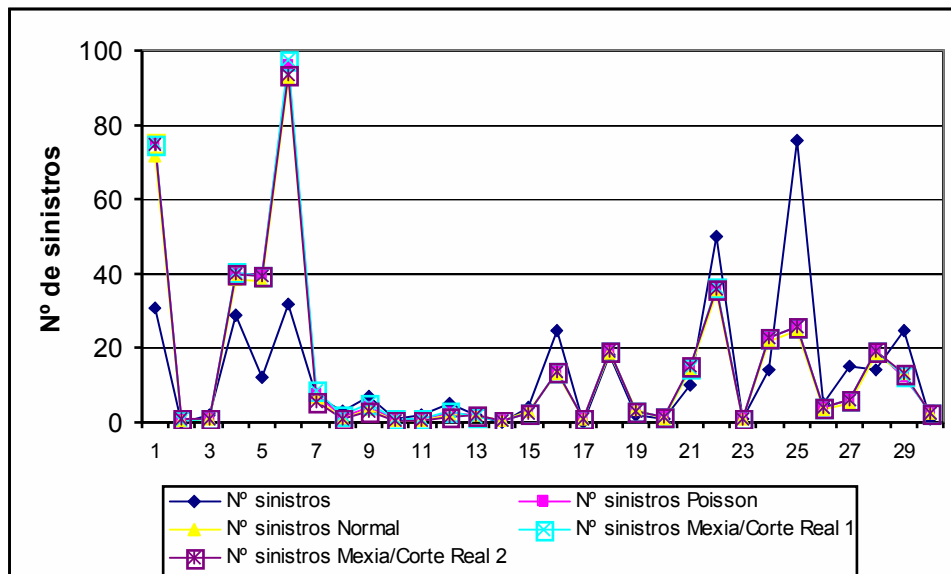
Analisando a Tabela 5.3., vemos que o número total esperado de sinistros é superior ao observado em cerca de 3%, seguindo o método dos Mínimos Quadrados Generalizados



e o método *Mexia/Corte Real 1*. Maximizando o conjunto de estimadores através do método *Mexia/Corte Real 2* obtemos um número esperado de sinistros inferior ao real em 1,5%. Na tabela 5.3. não fazemos qualquer referência ao número de sinistros esperados maximizados segundo a função Poisson, dado que os valores correspondem exactamente aos observados para as diferentes classes.

Por outro lado, analisando os coeficientes de ajustamento dos sinistros (o somatório da diferença entre o número de sinistros esperados e os observados a dividir pela sua média, ponderada pelo número de veículos), vimos que existem classes, nos diferentes factores de tarificação *a priori*, em que o valor do coeficiente é negativo, o que significa que a sinistralidade esperada pelo modelo é inferior à real.

**Figura 5.1.: Comparação entre o n.º de sinistros observados e o n.º de sinistros esperados**



Através da observação do gráfico da Figura 5.1., onde apresentamos a comparação do número de sinistros observados com os obtidos através das diversas técnicas através

indicadas, podemos comprovar que existem casos em que a sinistralidade esperada é inferior à real. Este gráfico resume-se às primeiras trinta frotas da Carteira, apenas por uma questão de facilidade na interpretação do gráfico.

Podemos também verificar que existem frotas em que o número de sinistros observados é superior ao número de sinistros esperados, qualquer que seja a técnica utilizada na estimação. Além disso, embora o número total de sinistros obtidos seja diferente de método para método de estimação, segundo a Figura 5.1., os valores são bastante idênticos nestas frotas, principalmente quando a sinistralidade não é elevada.

### 5.3. Estimadores das Variâncias

Obtidos os valores das frequências para cada veículo, segundo os parâmetros estimados, estamos em condições de calcular os estimadores das variâncias  $V(U)$  e  $V(R)$ , e através destes  $V(S)$  (ver Tabela 5.4.).

**Tabela 5.4.: Estimadores das variâncias**

	Poisson	Normal	<i>Mexia / Corte Real 1</i>	<i>Mexia / Corte Real 2</i>
$\hat{V}_{RR}$	0,274924	0,232285	0,269793	0,272486
$\hat{V}_{UU}$	0,533587	0,475355	0,516568	0,532928
$\hat{V}_{SS}$	0,202885	0,197251	0,194343	0,204672

Utilizando o método de Pseudo-Máxima Verosimilhança com a Poisson ou o método *Mexia/Corte Real 2* chegamos a valores praticamente idênticos para as variâncias. O mesmo não acontece quando tomamos como função objectivo a Normal, pois este

conjunto de estimadores obtém valores para as variâncias inferiores aos obtidos pelos outros estimadores.

Na prática esta diminuição das variâncias traduz-se numa diminuição dos coeficientes de bonus-malus. Assim sendo, se não forem declarados sinistros, utilizando estes estimadores, chegamos a reduções nos prémios inferiores às concedidas com os outros conjuntos de estimadores.

De acordo com a variância estimada para os factores específicos da frota,  $\hat{V}_{RR}$ , um sinistro declarado numa frota iria impor um malus perto dos 27% para um novo veículo (se tomarmos em consideração o conjunto dos estimadores da Tabela 5.4., à excepção dos obtidos pelo método dos Mínimos Quadrados Generalizados). Este valor da variância representa a frequência global de sinistralidade esperada para toda a Carteira, daí ser o agravamento para um veículo de que não se tem conhecimento da sinistralidade passada.

A análise da variância estimada  $\hat{V}_{SS}$  do factor aleatório específico do veículo é muito importante. A história de um veículo irá ter muito mais capacidade para prever o nível de risco desse veículo do que de outros veículos da frota. O factor de credibilidade só pode ser calculado se  $\hat{V}_{SS}$  for maior que zero, como já referimos anteriormente.

## 5.4. Coeficientes de Bonus-Malus

Com os dados da nossa amostra chegámos a estes resultados, ou seja,  $\hat{V}_{SS}$  é maior que zero, logo, estamos em condições para aplicar este modelo de Poisson à nossa Carteira de frotas e calcular o Sistema de Bonus-Malus.

**Tabela 5.5.: Factor de credibilidade médio para frotas e veículos de acordo com as variáveis específicas das frotas**

	$\bar{\alpha}$ 100% "turnover"	$\bar{\alpha} + \bar{\beta}$ 0% "turnover"	$\bar{\alpha}$ 100% "turnover"	$\bar{\alpha} + \bar{\beta}$ 0% "turnover"	$\bar{\alpha}$ 100% "turnover"	$\bar{\alpha} + \bar{\beta}$ 0% "turnover"	$\bar{\alpha}$ 100% "turnover"	$\bar{\alpha} + \bar{\beta}$ 0% "turnover"
	Poisson		Normal		Mexia/Corte Real 1		Mexia/Corte Real 2	
<b>Sector de Actividade da Empresa</b>								
Transporte de mercadorias geral	0,204	0,223	0,186	0,204	0,214	0,234	0,184	0,200
Transporte de carga	0,218	0,247	0,209	0,237	0,220	0,249	0,202	0,227
Aluguer de curta duração	0,157	0,202	0,142	0,184	0,158	0,202	0,154	0,198
Transportador independente	0,216	0,243	0,200	0,224	0,204	0,227	0,218	0,249
<b>Anos veículos</b>								
[0,1]	0,013	0,025	0,012	0,024	0,017	0,030	0,010	0,019
]1,2]	0,041	0,074	0,032	0,062	0,041	0,074	0,039	0,071
]2,3]	0,069	0,123	0,056	0,104	0,078	0,137	0,060	0,108
]3,9]	0,129	0,196	0,109	0,171	0,125	0,188	0,126	0,193
]9,20]	0,275	0,326	0,246	0,295	0,277	0,326	0,276	0,327
>20	0,439	0,465	0,424	0,451	0,442	0,467	0,435	0,461
<b>Anos empresa</b>								
[0,1]	0,048	0,062	0,041	0,055	0,049	0,064	0,045	0,059
]1,2]	0,217	0,284	0,210	0,276	0,218	0,283	0,213	0,278
]2,3]	0,523	0,642	0,482	0,595	0,527	0,647	0,518	0,635
>3	0,570	0,730	0,510	0,657	0,564	0,714	0,559	0,717

Os factores de credibilidade foram determinados frota a frota, nos casos em que o veículo não é observado no primeiro período, e em caso contrário, foram obtidos os  $\beta_i$ , também veículo a veículo para serem somados ao factor específico da frota. Para termos noção dos valores que os factores de credibilidade podem assumir, calculámo-los ao nível da frota, como apresentado na Tabela 5.5., supondo o "turnover" igual a 100% e

0% para cada nível das variáveis específicas da frota. As médias indicadas na Tabela 5.5. são ponderadas pela frequência de sinistralidade das frotas.

Como podemos observar, os factores de credibilidade médios dão valores bastantes diferentes, consoante a classe da variável específica da frota que se escolher.

Ao aplicarmos 0% de “turnover”, a credibilidade assume valores mais elevados do que quando consideramos 100%, exactamente pela expressão da credibilidade com “turnover”,  $\alpha + ((1 - \rho)\bar{\beta})$ . A diferença entre os valores com ou sem “turnover” é então o resultado da média dos  $\beta_i$ . Logo, através deste quadro, facilmente chegamos aos factores de credibilidade médios, considerando outras percentagens de “turnover”.

Verificamos ainda um maior aumento da credibilidade sem “turnover” quando estamos perante veículos de aluguer de curta duração (a Carteira é constituída essencialmente por veículos deste tipo) e com frotas de pequena e média dimensão. Nas variáveis “dimensão da frota” e “idade da empresa”, quanto maior é o número de anos, maior são os factores de credibilidade médios.

Dentro da mesma classe, os factores de credibilidade tomam valores muito próximos uns dos outros, quando consideramos “turnover” ou não. Os factores que são obtidos através do conjunto de estimadores da Poisson estão muito próximos dos obtidos através dos vectores nulos iniciais do método *Mexia/Corte Real*, enquanto que o conjunto de estimadores da Normal se aproxima mais do método *Mexia/Corte Real 2*.

De acordo com a fórmula de credibilidade, se não existirem sinistros o bónus concedido é igual ao factor de credibilidade, logo, neste caso, será o conjunto de estimadores provenientes de *Mexia/Corte Real 1* o que origina menor prémio, em média, para a

anuidade seguinte, pelo que poderá provocar uma diminuição na declaração de sinistros por motivo de “*sede de bónus*”. No entanto, se analisarmos a fórmula de credibilidade, seguindo estes estimadores de *Mexia/Corte Real 1*, e no caso de ocorrerem sinistros, o agravamento do prémio será superior ao dos outros estimadores.

Como podemos ver, os valores resultantes da dispersão dos coeficientes de bonus-malus (ver Tabela 5.6.), quando aplicamos o “turnover”, comportam-se da mesma forma dos factores de credibilidade médios da Tabela 5.4., ou seja, com a retirada do “turnover” a dispersão aumenta, sendo o aumento mais significativo quando estamos perante frotas de aluguer de curta duração e de pequena e média dimensão. O aumento no caso da variável “Anos empresa” apresenta valores muito idênticos qualquer que seja a classe observada.

**Tabela 5.6.: Desvio padrão dos coeficientes de bonus-malus de acordo com as variáveis específicas das frotas**

“Turnover”	100%	0%	100%	0%	100%	0%	100%	0%
	Poisson		Normal		<i>Mexia / Corte Real 1</i>		<i>Mexia / Corte Real 2</i>	
<b>Sector de Actividade</b>								
Transp. de mercadorias	0,390	0,419	0,388	0,419	0,609	0,657	0,489	0,520
Transporte de carga	0,382	0,416	0,349	0,386	0,485	0,529	0,428	0,466
Aluguer de curta duração	0,238	0,319	0,222	0,302	0,258	0,360	0,238	0,322
Transportador indep.	0,277	0,312	0,296	0,334	0,263	0,289	0,281	0,316
<b>Anos veículos</b>								
[0,1]	0,122	0,222	0,104	0,197	0,213	0,381	0,127	0,232
]1,2]	0,166	0,282	0,147	0,260	0,183	0,308	0,167	0,285
]2,3]	0,186	0,314	0,166	0,295	0,253	0,425	0,191	0,327
]3,9]	0,226	0,327	0,206	0,309	0,229	0,327	0,227	0,330
]9,20]	0,297	0,349	0,287	0,341	0,303	0,355	0,295	0,348
>20	0,391	0,413	0,378	0,401	0,457	0,482	0,421	0,444
<b>Anos empresa</b>								
[0,1]	0,212	0,286	0,191	0,262	0,248	0,346	0,216	0,292
]1,2]	0,286	0,365	0,260	0,337	0,322	0,409	0,302	0,382
]2,3]	0,312	0,402	0,291	0,385	0,339	0,445	0,318	0,413
>3	0,341	0,429	0,344	0,435	0,393	0,476	0,367	0,456

Dentro da mesma classe, a dispersão pode tomar valores um pouco diferentes uns dos outros, de acordo com o método escolhido ou do uso ou não de “turnover”, sendo o seu comportamento diferente do obtido pelos factores médios de credibilidade. Neste caso é geralmente o método *Mexia/Corte Real* o que obtém os valores mais elevados para a dispersão dos coeficientes de bonus-malus. Além disso, o desvio padrão também aumenta de acordo com a dimensão da frota e os anos da empresa.

Para melhor interpretarmos os estimadores de credibilidade calculados, iremos dar o exemplo do prémio, para a anuidade seguinte, de dois veículos que poderiam entrar para duas frotas retiradas ao acaso da Carteira, uma sem sinistros e outra com sinistralidade superior à esperada na última anuidade.

Vamos supor para tal que o prémio é calculado para veículos novos, isto é, considerando 100% “turnover”. Neste caso, e segundo o nosso modelo, como o veículo não foi observado durante o primeiro período, o factor de credibilidade  $\alpha + ((1 - \rho)\bar{\beta})$  será igual a  $\alpha$ . Além disso, por hipótese, o prémio inicial da frota considerado é igual a 100 u.m.

**Exemplo 5.1.:** Consideremos um veículo que irá entrar para uma frota, retirada ao acaso da Carteira, sem sinistros de veículos de aluguer de curta duração, para uma empresa com mais de 3 anos e em que os anos da empresa pertencem ao intervalo entre 3 a 9 anos. Utilizando os parâmetros obtidos através da função objectivo Poisson, chegamos ao factor de credibilidade:

$$cred_{i_0} = \alpha = 0,2046$$

Como este factor é o bónus cedido à empresa, se não forem declarados sinistros pelos seus veículos, iremos ter à partida um bónus de 20,46% aplicado ao prémio do ano

anterior para os novos veículos. Então se considerarmos que o prémio inicial da frota foi igual a 100 u.m., segundo a expressão (3.4.), no ano seguinte o prémio será:

$$\text{Prémio} = 100 \times [(1 - 0,2046) + 0,2046 \times 0] = 79,54 \text{ u.m.}$$

**Exemplo 5.2.:** Consideremos agora um veículo que irá entrar para uma frota, com as mesmas características do exemplo anterior, à excepção do número de anos da empresa que está entre um e dois anos e onde foram declarados 4 sinistros e que através do nosso modelo apenas eram esperados 3 sinistros. O factor de credibilidade obtido, através do mesmo conjunto de estimadores do exemplo anterior, será

$$\text{cred}_{i_0} = \alpha = 0,3855$$

Deste modo, considerando o prémio inicial igual a 100 u.m., e como existe sinistralidade, o valor do prémio é calculado da seguinte forma:

$$\text{Prémio} = 100 \times [(1 - 0,3855) + 0,3855 \times 4 / 3] = 112,85 \text{ u.m.}$$

Logo chegamos à conclusão que nesta frota iremos ter um agravamento (malus) do prémio na ordem dos 13%.

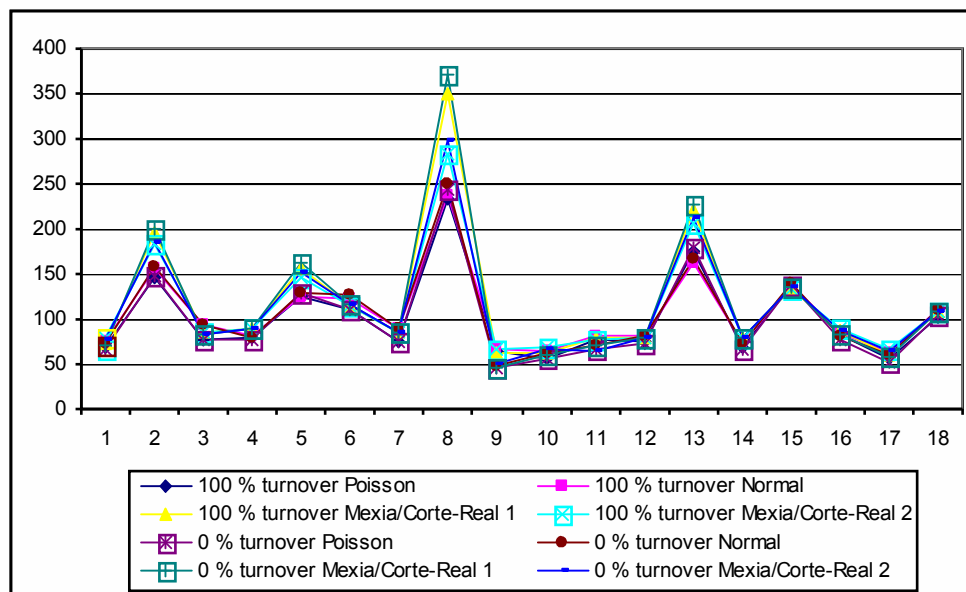
Como podemos ver através do Exemplo 5.2., no caso das frotas com sinistros declarados, o estimador de credibilidade depende tanto do número de sinistros declarados como dos esperados. Não fazia sentido criar um Sistema de Bonus-Malus que dependesse apenas do número de acidentes, pois numa frota de pequena dimensão dois ou três sinistros originam uma frequência de sinistralidade muito elevada.

Para podermos ilustrar a oscilação que os prémios podem sofrer, de acordo com a sinistralidade do ano, retirámos 18 frotas ao acaso da nossa amostra. Considerando



como prémio inicial 100 u.m., podemos verificar, na Figura 5.2., que utilizando o método da Pseudo-Máxima Verosimilhança ou o método *Mexia/Corte Real*, para a obtenção do conjunto de estimadores, e aplicando 100% “turnover” ou não, os valores dos prémios de credibilidade não sofrem alterações muito significativas, se a sinistralidade esperada não estiver muito longe da observada, caso contrário as diferenças entre prémios podem ultrapassar os 50%.

**Figura 5.2.: Prémio de credibilidade, segundo a sinistralidade de cada frota**



Se analisarmos os prémios frota a frota, chegamos à conclusão que os valores dos prémios podem subir até 4 vezes mais ou beneficiar de um desconto de 50%, dependendo da sinistralidade esperada. Além disso, podemos observar que as frotas com direito a bonificação apresentam prémios idênticos qualquer que seja o método de estimação utilizado, mas as frotas com sinistralidade elevada relativamente à observada apresentam um maior agravamento seguindo o método *Mexia/Corte Real*.

De acordo com a maior parte das frotas indicadas na Figura 5.2., podemos retirar algumas ilações sobre as duas técnicas utilizadas para a obtenção dos parâmetros que nos levariam até ao valor da frequência de sinistralidade de cada veículo.

As conclusões a que chegamos, como não poderia deixar de ser, vão ao encontro das apresentadas aquando da análise dos factores médios de credibilidade (Tabela 5.5.). Assim, podemos concluir que, em caso de bónus, as técnicas aplicadas dão origem a prémios muito próximos uns outros, embora seja o método proposto por *Mexia/Corte Real* o que apresenta factores de credibilidade com maior amplitude, tanto os mais baixos como os mais elevados, dado que o método é bastante sensível aos vectores de partida que escolhemos. No caso de agravamento dos prémios, o método de *Mexia/Corte Real* é o mais penalizador quando verificamos uma sinistralidade superior à esperada.

Se comparamos, dentro do mesmo método, a aplicação de “turnover” ou não, chegamos à conclusão que o mesmo é praticamente irrelevante, ou seja, a parte da credibilidade que depende apenas dos factores do veículo não vai trazer grande desconto ou agravamento ao prémio.

Se analisarmos todos os prémios da Carteira, e não nos basearmos apenas nesta pequena amostra, podemos acrescentar que o prémio médio, para a anuidade seguinte, sofrerá um agravamento de 3%, no máximo, dependendo da técnica utilizada, à excepção do método *Mexia/Corte Real 1*, onde obtemos um bónus de 1%.

## 5.5. Sistemas Óptimos Bonus-Malus para veículos, segundo *Bühlmann*

Já demos vários exemplos de como se aplicam os factores de credibilidade e quais os resultados que se podem obter através dos mesmos. Mas qual o bónus ou agravamento que uma empresa irá sofrer, consoante o número de indemnizações/ano em que as mesmas ocorrem? Será que compensa declarar um sinistro quando a indemnização a que o segurado terá direito é muito pequena?

Para responder a estas e outras questões, as Companhias de Seguros criaram então as tabelas de bonus-malus, tabelas essas de dupla entrada, reflectindo-se no eixo das abcissas o número de sinistros participados na anuidade e no eixo das ordenadas os “níveis” de bonus-malus. Pelo conhecimento do número de sinistros declarados e do “nível” em que se enquadra, podemos ter noção da alteração do bonus-malus e, conseqüentemente, do prémio que terá direito na próxima anuidade.

Dado serem as frotas de “aluguer de curta duração” as que predominam na nossa Carteira, vamos começar por desenvolver um Sistema de Bonus-Malus para veículos desse sector de actividade. O Sistema Óptimo Bonus-Malus será obtido de acordo com o exemplo apresentado em *Lemaire (1995)*. Os pressupostos deste modelo assentam na teoria da credibilidade, modelo proposto por *Bühlmann*, onde a distribuição *a posteriori* é obtida através do teorema de Bayes. Podem ser encontrados outros exemplos de distribuições *a posteriori* em *Egídio dos Reis (2002)*, além do já ilustrado no Capítulo três.

Seguindo o nosso modelo de Poisson com parâmetro  $\lambda$ , obtemos o prémio de credibilidade para o período  $t+I$ , substituindo  $k$  na expressão do estimador pelas suas estimativas, ou seja,

$$\hat{p}_T = \omega_T \bar{N}_{.j} + (1 - \omega_T) E(N)$$

$$\text{com } \omega_T = \frac{t}{t+k} \text{ e } k = \frac{E[\hat{\sigma}^2(\lambda)]}{V[\hat{\mu}(\lambda)]}, \text{ onde } \hat{\mu}(\lambda) = \hat{\sigma}^2(\lambda) = \lambda.$$

Consideremos como estimador do número esperado de sinistros,

$$E[N] = E[\lambda] = \hat{\lambda} = \mathbf{0,4921}$$

ou seja, a sinistralidade média esperada para as frotas deste sector de actividade.

Segundo a fórmula obtida para o estimador  $V[\lambda]$  através do nosso modelo, temos que

$$\hat{V}[\lambda] = \hat{\lambda} + \hat{\lambda}^2 \hat{V}_{UU} = \mathbf{0,4921} + \mathbf{0,4921}^2 \times \mathbf{0,533587} = \mathbf{0,6213}$$

aplicando o estimador da variância, calculado através do conjunto de estimadores obtido seguindo a função objectivo Poisson, no Método da Pseudo-Máxima Verosimilhança.

De modo a podermos comparar os valores obtidos, segundo os dois métodos de estimação, iremos, paralelamente, determinar o Sistema de Bonus-Malus seguindo o método *Mexia/Corte Real 1*, dado que, de acordo com estes vectores iniciais, obtemos o valor da função de log-verosimilhança mais próximo da Poisson, que é o que maximiza esta função. Neste caso, teremos:

$$E[N] = \mathbf{0,5064} \text{ e } V[\lambda] = \mathbf{0,5064} + \mathbf{0,5064}^2 \times \mathbf{0,516568} = \mathbf{0,6389}$$

Deste modo os estimadores de credibilidade, para os dois métodos, resumem-se às seguintes expressões:

$$\hat{p}_T = \frac{\sum_{i=1}^t n_i + 0,4921^2 / 0,6213}{t + 0,4921 / 0,6213} \qquad \hat{p}_T = \frac{\sum_{i=1}^t n_i + 0,5064^2 / 0,6389}{t + 0,5064 / 0,6389}$$

Consideremos, assim, que o prémio a atribuir no primeiro período a um novo veículo, corresponde ao prémio do colectivo. Supondo que a unidade monetária corresponde ao custo médio de uma indemnização, facilmente se obtém o prémio puro do colectivo através da frequência de sinistralidade.

Dado não existir interesse em chegarmos aos valores absolutos dos prémios, mas sim às diferenças existentes de classe para classe, consideremos que o valor do prémio inicial corresponde a 100 u.m. Deste modo o prémio para anuidade seguinte será o quociente entre o prémio puro de risco (obtido através do prémio empírico de credibilidade) e o prémio puro do colectivo, ou seja:

$$P'_{t+1} = 100 \times \frac{\sum_{i=1}^t N_i + 0,3898}{0,4921 + 0,3898}$$

ou, seguindo o método de *Mexia/Corte Real 1*, o prémio para o período seguinte vem:

$$P'_{t+1} = 100 \times \frac{\sum_{i=1}^t N_i + 0,4014}{0,5064 + 0,4014}$$

Através destas expressões chegamos facilmente ao valor do prémio a pagar pelo segurado, considerando que a frota recebeu  $\sum_{i=1}^t N_i$  indemnizações em  $t$  anos, como podemos observar na Tabela 5.7.

**Tabela 5.7.: Sistema Ótimo Bonus-Malus para veículos de frotas de “aluguer de curta duração” – Modelo de *Bühlmann***

Método de Pseudo-Máxima Verosimilhança (Poisson)						Método <i>Mexia/Corte Real 1</i>					
Número de indemnizações						Número de indemnizações					
Anos	0	1	2	3	4	Anos	0	1	2	3	4
0	100					0	100				
1	44,20	157,60	270,99	384,39	497,79	1	44,22	154,37	264,53	374,68	484,83
2	28,37	101,15	173,93	246,72	319,50	2	28,38	99,09	169,80	240,51	311,22
3	20,89	74,48	128,07	181,65	235,24	3	20,90	72,97	125,03	177,10	229,16
4	16,53	58,93	101,34	143,75	186,15	4	16,54	57,74	98,94	140,15	181,35
5	13,67	48,76	83,84	118,93	154,01	5	13,68	47,77	81,86	115,95	150,04
6	11,66	41,58	71,50	101,42	131,34	6	11,67	40,74	69,81	98,88	127,95
7	10,16	36,24	62,32	88,40	114,48	7	10,17	35,51	60,85	86,19	111,53
8	9,01	32,12	55,23	78,35	101,46	8	9,01	31,47	53,93	76,39	98,85
9	8,09	28,84	49,59	70,35	91,10	9	8,09	28,26	48,42	68,59	88,75
10	7,34	26,17	45,00	63,83	82,66	10	7,34	25,64	43,94	62,23	80,53

De acordo com os valores apresentados na Tabela 5.7., podemos constatar que ambos os sistemas ótimos que se construíram são demasiado benévolos quando não existe sinistralidade, dado que as frotas que não declarem sinistros ao longo dos anos irão beneficiar de bónus muito significativos, mas temos que ter em atenção que é inverosímil os veículos pertencentes a frotas não sofrerem quaisquer sinistros ao fim de 10 anos. Por outro lado, é demasiado severo, pois à medida que a sinistralidade vai aumentando o prémio pode crescer até cinco vezes o seu valor inicial, se ocorrem 4 sinistros na primeira anuidade.

Se compararmos os valores dos dois sistemas da Tabela 5.7., podemos verificar que não existem diferenças relativamente aos descontos nos prémios concedidos por um ou outro sistema. No entanto, é o sistema construído através do conjunto de estimadores resultante do método de Pseudo-Máxima Verosimilhança que penaliza mais as frotas que declarem sinistros. Estes resultados vêm comprovar que quanto maior o valor dos estimadores da média e variância, menor o malus concedido pela Seguradora.

O que não nos podemos esquecer é que estes sistemas iriam permitir o equilíbrio financeiro ao longo do tempo, supondo uma Carteira fechada, ou seja, não existindo nem entradas nem saídas das apólices com elevada sinistralidade.

Resumindo, por cada ano sem sinistros obtemos os bónus apresentados na Tabela 5.8.

**Tabela 5.8.: Bónus aplicado por veículo a frotas de “aluguer de curta duração”, por cada ano sem sinistros**

Método de Pseudo-Máxima Verosimilhança (Poisson)									
Número de Anos sem sinistros									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
56%	36%	26%	21%	17%	15%	13%	11%	10%	9%

Método <i>Mexia/Corte Real 1</i>									
Número de Anos sem sinistros									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
56%	36%	26%	21%	17%	15%	13%	11%	10%	9%

Como podemos observar, os dois métodos apresentam bónus iguais, o que não nos surpreende, dado que os prémios são praticamente iguais como vimos na Tabela 5.7. O bónus aplicado no primeiro ano ultrapassa os 50%, o que na prática significa uma redução no prémio muito elevada, que poderá ser insustentável por parte da Seguradora, se existirem muitos veículos sem sinistralidade, já que a parte dos prémios que suportam os custos fixos pode tornar-se insuficiente.

Na Tabela 5.9., temos indicação do agravamento que o prémio pode sofrer consoante o número de sinistros declarados pela frota .

**Tabela 5.9.: Agravamento aplicado por veículo a frotas de “aluguer de curta duração”, consoante a sinistralidade declarada**

Método de Pseudo-Máxima Verosimilhança (Poisson)			
Número de sinistros			
1	2	3	4
58%	171%	284%	398%

Método <i>Mexia/Corte Real 1</i>			
Número de sinistros			
1	2	3	4
54%	165%	275%	385%

Comprovamos assim, que o primeiro método agrava mais os prémios do que o segundo método, à medida que o número de sinistros aumenta durante o mesmo período. Mais uma vez chamamos a atenção para os elevados agravamentos que as frotas com elevada sinistralidade podem sofrer. Estes métodos seriam muito vantajosos para a Seguradora em termos de prémios anuais recebidos, mas dificilmente os segurados conseguiriam manter custos tão elevados, o que resultaria no abandono da Seguradora, por parte destes, em busca de melhores prémios na concorrência.

Para melhor interpretarmos estes valores para uma dada frota, sugerimos o seguinte exemplo, de modo a perceber como deve ser feita a leitura destas tabelas para frotas:

**Exemplo 5.3.:** Consideremos uma frota com 100 veículos, deste sector de actividade, que entra para a Carteira de frotas da Seguradora. No primeiro ano, o prémio cobrado será igual ao prémio do colectivo, que vamos supor ser igual a 100 u.m. por veículo, logo o prémio da frota será 10.000 u.m. Consideremos uma possível distribuição para o número de sinistros observados para o ano seguinte, como indica a Tabela 5.10.



**Tabela 5.10.: Exemplo de uma distribuição para o número de sinistros observados**

<b>N.º Sinistros</b>	<b>N.º veículos</b>
0	50
1	20
2	15
3	10
4	5
<b>Total</b>	<b>100</b>

Neste caso, o prémio que a frota teria que pagar na anuidade seguinte seria:

$$\text{Prémio} = 50 \times 44,20 + 20 \times 157,60 + 15 \times 270,99 + 10 \times 384,39 + 5 \times 497,79 = 15.759,70$$

o que resulta num agravamento de 57,6% do prémio cobrado no ano anterior. Se seguirmos o mesmo exemplo para o método *Mexia/Corte Real 1*, o valor do prémio seria 15.437,30 u.m., ou seja, um agravamento de 54,4%, um pouco inferior ao método anterior já que este agrava um pouco menos os veículos com sinistralidade

Através deste exemplo, podemos verificar que o prémio total da frota depende do número de sinistros de cada veículo. Quando observamos as tabelas, verificamos que, se não existirem sinistros, o bónus é bastante elevado, mas temos que pensar sempre que estamos perante um seguro de frotas, e basta que 50% dos veículos da frota apresentem sinistralidade (como ilustra este exemplo) para que o prémio agrave. Fica também ilustrado que o primeiro método, Pseudo-Máxima Verosimilhança (Poisson), agrava mais os prémios.

Do mesmo modo que calculámos os Sistemas Óptimos Bonus-Malus para veículos de frotas de “aluguer de curta duração”, facilmente obtemos outros sistemas para outros sectores de actividade, como demonstramos nas tabelas a seguir indicadas.

**Tabela 5.11.: Sistema Ótimo Bonus-Malus para veículos de frotas de “transporte de mercadorias” – Modelo de *Bühlmann***

Método de Pseudo-Máxima Verosimilhança (Poisson)						Método <i>Mexia/Corte Real 1</i>					
Número de indemnizações						Número de indemnizações					
Anos	0	1	2	3	4	Anos	0	1	2	3	4
0	100					0	100				
1	46,33	227,27	408,20	589,14	770,07	1	45,83	199,76	353,68	507,60	661,52
2	30,15	147,90	265,64	383,39	501,13	2	29,73	129,57	229,41	329,26	429,10
3	22,35	109,62	196,88	284,15	371,42	3	22,00	95,88	169,77	243,65	317,53
4	17,75	87,08	156,40	225,72	295,05	4	17,46	76,10	134,74	193,37	252,01
5	14,72	72,23	129,73	187,23	244,73	5	14,47	63,08	111,69	160,30	208,90
6	12,58	61,70	110,82	159,95	209,07	6	12,36	53,87	95,37	136,88	178,39
7	10,98	53,86	96,73	139,61	182,48	7	10,78	47,00	83,22	119,44	155,65
8	9,74	47,78	85,82	123,86	161,89	8	9,57	41,69	73,81	105,94	138,06
9	8,75	42,93	77,12	111,30	145,48	9	8,59	37,45	66,32	95,18	124,04
10	7,95	38,98	70,02	101,05	132,09	10	7,80	34,00	60,20	86,40	112,60

**Tabela 5.12.: Sistema Ótimo Bonus-Malus para veículos de frotas de “transporte de carga” – Modelo de *Bühlmann***

Método de Pseudo-Máxima Verosimilhança (Poisson)						Método <i>Mexia/Corte Real 1</i>					
Número de indemnizações						Número de indemnizações					
Anos	0	1	2	3	4	Anos	0	1	2	3	4
0	100					0	100				
1	47,24	287,98	528,72	769,46	1010,21	1	47,23	279,33	511,44	743,54	975,65
2	30,92	188,52	346,11	503,70	661,29	2	30,91	182,84	334,77	486,70	638,62
3	22,98	140,12	257,26	374,39	491,53	3	22,98	135,90	248,82	361,74	474,66
4	18,29	111,50	204,70	297,91	391,12	4	18,28	108,13	197,99	287,84	377,69
5	15,19	92,58	169,98	247,38	324,78	5	15,18	89,79	164,40	239,01	313,62
6	12,98	79,16	145,33	211,50	277,67	6	12,98	76,77	140,56	204,34	268,13
7	11,34	69,13	126,92	184,71	242,50	7	11,34	67,04	122,75	178,46	234,17
8	10,06	61,36	112,65	163,95	215,24	8	10,06	59,51	108,95	158,40	207,84
9	9,05	55,16	101,27	147,38	193,49	9	9,04	53,49	97,94	142,39	186,84
10	8,22	50,10	91,97	133,85	175,73	10	8,21	48,58	88,95	129,32	169,69

**Tabela 5.13.: Sistema Ótimo Bonus-Malus para veículos de frotas de “transportador independente (outros)” – Modelo de Bühlmann**

Método de Pseudo-Máxima Verosimilhança (Poisson)						Método Mexia/Corte Real 2					
Número de indemnizações						Número de indemnizações					
Anos	0	1	2	3	4	Anos	0	1	2	3	4
0	100					0	100				
1	43,66	147,18	250,70	354,22	457,73	1	44,70	165,25	285,79	406,33	526,88
2	27,93	94,14	160,35	226,57	292,78	2	28,79	106,41	184,03	261,65	339,27
3	20,53	69,20	117,88	166,55	215,22	3	21,23	78,47	135,71	192,95	250,19
4	16,23	54,71	93,19	131,67	170,15	4	16,81	62,15	107,48	152,82	198,16
5	13,42	45,24	77,05	108,87	140,69	5	13,92	51,45	88,98	126,51	164,04
6	11,44	38,56	65,68	92,80	119,92	6	11,87	43,89	75,91	107,93	139,95
7	9,97	33,60	57,23	80,86	104,50	7	10,35	38,27	66,19	94,11	122,03
8	8,83	29,77	50,71	71,65	92,59	8	9,18	33,93	58,67	83,42	108,17
9	7,93	26,72	45,52	64,32	83,12	9	8,24	30,47	52,69	74,92	97,14
10	7,19	24,24	41,30	58,35	75,40	10	7,48	27,65	47,82	67,99	88,16

Se compararmos os 4 Sistemas Ótimos Bonus-Malus obtidos, consoante o sector de actividade da empresa, podemos observar que, seguindo o mesmo método de estimação dos parâmetros, os valores não diferem muito uns dos outros, quando estamos perante veículos sem sinistros, mas em caso de sinistralidade, os agravamentos podem ser muito penalizantes dependendo do sector de actividade das frotas. Efectivamente, podemos concluir que as reduções ou agravamentos aplicados aos prémios são praticamente constantes, consoante o número de anos sem sinistros e o número de indemnizações por ano, respectivamente, excepto quando estamos perante apenas um sinistro na anuidade.

Analisando os sistemas obtidos, através do método da Pseudo-Máxima Verosimilhança, temos que o sector com maior agravamento no primeiro ano é o “transporte de carga” com 188% e o menor é o “transportador independente (outros)” com um agravamento no prémio de apenas 47%.

Se compararmos os valores resultantes dos dois métodos, verificamos que o bónus concedido às empresas de frotas estão bastante próximos, existindo casos em que são mesmo iguais, e que os agravamentos são sempre superiores seguindo o método de Pseudo-Máxima Verosimilhança, à excepção do sector de actividade “transportador independente (outros)”, em que é o método *Mexia / Corte Real* que é mais penalizador.

Estas tabelas de bonus-malus são uma possível proposta para aplicar na nossa Carteira de frotas, de acordo com o sector de actividade, mas com o livre mercado em que nos encontramos dificilmente conseguiríamos praticá-las, pois embora os descontos concedidos sejam muito mais elevados do que o mercado em geral, quando existem sinistros os agravamentos são muito significativos, o que iria provocar o abandono da Carteira por parte do segurado, como já referimos anteriormente.

Infelizmente não nos é possível fazer um confronto entre os prémios que estimamos para a anuidade seguinte e os que serão realmente praticados, pois, como já mencionámos, a Seguradora em causa não aplica qualquer Sistema de Bonus-Malus.

## 5.6. Prémios Puros versus Indemnizações

Por fim, fomos verificar se os prémios puros obtidos eram suficientes para fazer face às indemnizações, dado ser esta uma das principais preocupações da actividade Seguradora.

Os prémios foram determinados com base no custo médio das indemnizações, por sector de actividade. Estes valores dos prémios foram obtidos em função dos dois

métodos mencionados anteriormente na determinação dos parâmetros relacionados com as frotas e os veículos.

Como podemos observar pela Tabela 5.14., qualquer que seja a técnica utilizada para a estimação dos parâmetros acima mencionados, o valor estimado para o total de prémios puros permite suportar as despesas com indemnizações, à excepção do método *Mexia / Corte Real 2*, justificado pelo facto de que o número esperado de sinistros obtido por esta técnica ser inferior à sinistralidade observada.

O total de prémios estimado pela Poisson corresponde ao valor real dos custos de indemnização, visto que o número de sinistros esperado por classe pela Poisson é igual ao número observado.

**Tabela 5.14.: Comparação entre montante de indemnizações pagas e prémios puros estimados**

Sector de Actividade	Custos Totais Reais	Prémios Puros Totais			
		Poisson	Normal	<i>Mexia/Corte Real 1</i>	<i>Mexia/Corte Real 2</i>
Transp. mercadorias	1.053.789	1.053.789	1.027.416	1.250.253	825.785
Transp. carga	391.487	391.487	427.013	406.142	321.821
Aluguer de curta duração	9.967.090	9.967.090	10.305.234	10.257.046	9.974.322
Transportador indep	721.037	721.037	724.389	607.734	754.646
<b>Total</b>	<b>12.133.402</b>	<b>12.133.402</b>	<b>12.484.052</b>	<b>12.521.175</b>	<b>11.876.574</b>

Mas para além de cobrir as despesas (indemnizações, resseguro e despesas gerais), as Seguradoras devem também gerar lucros. Por outro lado, não podem sobrecarregar o valor do prémio senão a Seguradora não se torna competitiva. Deste modo, devemos pôr de parte o método *Mexia / Corte Real 2*, pois pode-nos conduzir à ruína, e escolhermos qualquer um dos outros modelo de estimação, de acordo com a política seguida neste momento pela Seguradora.

## CONCLUSÕES

O objectivo subjacente a este trabalho foi o da construção de um Sistema de Bonus-Malus para frotas de veículos. Em Portugal existem vários trabalhos na área de Bonus-Malus (já mencionámos alguns estudos), mas nenhum se focalizou para as frotas.

A filosofia seguida no nosso modelo foi a proposta por *Desjardins, Dionne & Pinquet (2001)*, onde estes autores propõem um Sistema de Bonus-Malus para frotas de veículos pesados (com peso bruto superior a 3.000 kg). Como em Portugal as Carteiras de frotas são ainda de pequena dimensão e grande parte dos veículos são ligeiros (na nossa amostra 86% dos veículos têm peso bruto inferior a 2.500 kg), considerámos todos os veículos existentes na Carteira.

Recorremos a dois métodos distintos para chegarmos aos conjuntos de estimadores que caracterizam os parâmetros relacionados com a frota e com os veículos. Um dos métodos é o de Pseudo-Máxima Verosimilhança, onde utilizámos a distribuição Poisson e a Normal na estimação. Segundo este método os valores não podem diferir muito, já que ambos os estimadores obtidos são consistentes e assintoticamente normais, mas a utilização da distribuição deve-se ao facto de coincidir com o método dos Mínimos Quadrados Generalizados.

Recorremos também à teoria dos Estimadores Extremais para obtermos mais dois conjuntos de estimativas, inicializando o processo através de dois vectores diferentes,

para podermos comparar valores. Podemos concluir que, consoante o ponto de partida escolhido, o modelo apresenta valores bastantes diferentes, pelo que seria necessário testar outras Carteiras e outros valores para o limite da pseudo verosimilhança, para além dos propostos para a estimação.

Os resultados obtidos, para os parâmetros relacionados com as frotas e os veículos, estão em perfeita concordância uns com os outros, mas a nossa preocupação, neste trabalho, não é concluir qual o melhor modelo de estimação, mas sim dar uma alternativa ao método de Pseudo-Máxima Verosimilhança, de forma a tentar encontrar outro conjunto de estimadores que maximize a função de log-verosimilhança.

O método de *Mexia/Corte Real* pode ser usado quando não existe uma solução explícita das equações envolvidas no modelo e ao mesmo tempo coloca em evidência a existência de fenómenos não raros a outros problemas práticos que é o da existência de zonas do espaço do parâmetro onde é possível obter valores iguais para a função de verosimilhança, recorrendo a diferentes vectores de parâmetros, escolhidos convenientemente dentro dessas zonas.

Chegamos à conclusão que o método que maximiza a função de log-verosimilhança é o de Pseudo-Máxima Verosimilhança com a Poisson, embora as outras técnicas estejam muito próximas dado que o menor valor corresponde apenas a 0,3% do valor obtido pela Poisson.

O número de sinistros estimados pela Poisson corresponde exactamente ao observado por classes, não veículo a veículo, sendo o método *Mexia / Corte Real* o que apresenta a

maior e menor sinistralidade, chamando a atenção que a segunda hipótese deste método resulta num total de sinistralidade inferior à real.

Segundo os factores de credibilidade obtidos podemos concluir que em caso de bónus qualquer que seja a técnica aplicada os prémios não sofrem grandes alterações, mas quando estamos perante uma sinistralidade observada superior à estimada é o método *Mexia / Corte Real* o que apresenta um maior agravamento nos prémios.

No entanto, e dado que o prémio final da frota depende da sinistralidade de cada veículo, qualquer que seja a técnica de estimação utilizada, os valores dos prémios não sofrem alterações significativas.

As escalas de bonus-malus são apresentadas para uma variável específica das frotas, o sector de actividade. A escolha recaiu nesta variável apenas por ser a que apresenta a maior subclasse da Carteira que são as frotas de “aluguer de curta duração” (com cerca de 94% dos veículos), não querendo dizer que seja esta variável a que melhor define as frotas. Seria interessante, num trabalho futuro, tentar encontrar a variável que melhor caracteriza as frotas. No entanto, apresentamos também Sistemas Óptimos Bonus-Malus para os outros sectores de actividade.

Das tabelas de Bonus-Malus obtidas segundo Bühlmann, podemos concluir que, de sector para sector de actividade, os bónus não diferem muito uns dos outros, mas quando reparamos nos agravamentos dos prémios vemos que estes podem tomar valores bastantes diferentes consoante a classe a que pertencem no sector de actividade e o número de sinistros declarados. Dentro do mesmo método de estimação são os estimadores para a técnica desenvolvida por *Mexia/Corte Real* a que apresenta menores



agravamentos, à excepção da classe “transportador independente (outros)” do sector de actividade, sendo os bónus muito idênticos e existindo mesmo casos em que são iguais.

Por fim, tivemos a preocupação de verificar se os prémios obtidos eram suficientes para fazer face às indemnizações pagas. Verificámos que qualquer que seja o método utilizado, os prémios são suficientes para cobrir as despesas, à excepção do método *Mexia / Corte Real 2*, apesar dos valores da função de log-verosimilhança estarem muitos próximos dos obtidos para a Poisson. Deste modo, excluindo este método, o que devemos escolher depende da estratégica que a Seguradora pretende assumir com despesas de aquisição e administração, competitividade do mercado, entre muitos outros.

Assim sendo, terminamos o nosso trabalho indicando Sistemas Óptimos de Bonus-Malus, seguindo apenas o modelo de *Bühlmann*. Supondo a difícil implementação informática destes sistemas, o que podemos sugerir é tentar encontrar tabelas de bonificação e agravamento para simplificar o sistema apresentado, consoante as regras de transição.

Não apresentamos outros modelos de determinação de escalas óptimas, pois dependem do Sistema de Bonus-Malus actual da empresa Seguradora e esta aplica a tarifa do seguro automóvel individual. No entanto, existem vários estudos que já foram desenvolvidos na área da construção de Sistema de Bonus-Malus e que poderão ser consultados, como por exemplo, a tese de dissertação de *Oliveira (2000)* e *Guerreiro (2002)*. De qualquer forma não nos podemos esquecer que o modelo que for escolhido está sempre dependente das estratégias comerciais e concorrenciais que a Seguradora pretende assumir.

## BIBLIOGRAFIA

- 1) Andrade e Silva, J. (1991), *Estruturas Tarifárias nos Ramos Reais da Indústria Seguradora – Uma Aplicação ao Sector Automóvel em Portugal*, ISEG - UTL.
- 2) Andrade e Silva, J. & Centeno, L. (1999), *Bonus Systems in an Open Portfolio*, ISEG - UTL.
- 3) Barata, J. C. (2000), *Construção de uma Tarifa de Seguro de Responsabilidade Automóvel*, Tese de Mestrado em Ciências Actuarias, ISEG - UTL.
- 4) Borgan, O., Hoem, J. & Norberg, R. (1981), *A Non Asymptotic Criterion for the Evaluation of Automobile Bonus System*, Scandinavian Actuarial Journal, pp. 165-178.
- 5) Bühlmann, H. (1967), *Experience Rating and Credibility*, ASTIN Bulletin, Nº 4, pp. 199-207.
- 6) Centeno, L. (2002), *Teoria do Risco*, CEMAPRE, ISEG – UTL.
- 7) Desjardins, D., Dionne, G. & Pinquet, J. (2001), *Experience Rating Schemes for Fleets of Vehicles*, ASTIN Bulletin **31**, No. 1, pp. 81-105.
- 8) Egídio dos Reis, A.D. (2002), *Teoria da Credibilidade*, CEMAPRE, ISEG – UTL.
- 9) Esteves, R.A.S. (2002), *A Estimação de Tarifas na Presença de Franquias e Limites de Indemnização – Uma Aplicação à Cobertura de Choque, Colisão ou Capotamento do Seguro Automóvel*, Tese de Mestrado em Ciências Actuarias, ISEG - UTL.
- 10) Gilde, V. & Sundt, B. (1989), *On Bonus Systems with Credibility Scales*, Scandinavian Actuarial Journal, pp. 13-22.

- 11) Gouriéroux, C., Monfort, A. & Trognon, A. (1984), *Pseudo Maximum Likelihood Methods: Theory*, *Econometrica* **52**, No. 3.
- 12) Gouriéroux, C., Monfort, A. & Trognon, A. (1984), *Pseudo Maximum Likelihood Methods: Applications to Poisson Models*, *Econometrica* **52**, No. 3, pp. 701-720.
- 13) Guerreiro, G.R.D. (2002), *Uma Abordagem Alternativa para Bonus Malus*, Tese de Mestrado em Ciências Actuarias, ISEG - UTL.
- 14) Holtan, J. (1994), *Workshop: Bonus made easy*, *ASTIN Bulletin* **24**, No. 1.
- 15) L'Argus, *Journal International des Assurances* N° 42 (2000), *Les Cahiers Pratiques – L'Assurance des Flottes Automobiles*, Supplément au N° 6680, pp. 1-34.
- 16) Lemaire, J. (1995), *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- 17) Lemaire, J. & Zi, H. (1994), *High Deductibles Instead of Bonus-Malus Can It Work?*, *ASTIN Bulletin* **24**, No. 1 .
- 18) Lemaire, J. & Zi, H. (1994), *Workshop: A Comparative Analysis of 30 Bonus-Malus Systems*, *ASTIN Bulletin* **24**, No. 2, pp. 287-309.
- 19) Marie-Jeanne, P. (1994), *Problèmes Spécifiques des Flottes Automobiles*, ISUP Conference: “Cours Avancé sur l'Assurance Automobile”.
- 20) Mexia, J.T. & Corte Real, P. (2003), *Compact Hypothesis and Extremal Set Estimators*, *Discussiones Mathematicae – Probability and Statistics* **23**, pp. 103-121
- 21) Murteira, B.J.F. (1990), *Probabilidades e Estatística – Vol. 1*, 2ª Edição, Lisboa: McGraw-Hill.
- 22) Norberg, R. (1976), *A Credibility Theory for Automobile Bonus System*, *Scandinavian Actuarial Journal*, pp. 92-107.

- 
- 23) Oliveira, J. (2000), *Construção de um Sistema de Bonus-Malus*, Tese de Mestrado em Ciências Actuarias, ISEG - UTL.
  - 24) Picard, M. & Besson A. (1982), *Les Assurances Terrestres – Le Contract D’Assurance*, 5<sup>a</sup> Édition, Librairie Générale de Droit et de Jurisprudence, Paris
  - 25) Pinquet, J. (1997), *Allowance for Cost of Claims in Bonus-Malus System*, ASTIN Bulletin **27**, No. 1, pp. 33-57.
  - 26) Pinquet, J. (1998), *Designing Optimal Bonus-Malus System from Different Types of Claims*, ASTIN Bulletin **28**, No. 2, pp. 205-220.
  - 27) Pinquet, J. (2000), *Experience Rating through Heterogeneous Models*, Handbook of Insurance, Chapter 14 (Editor: Georges Dionne), Kluwer Academic Publishers. Huebner International Series on Risk, Insurance and Economic Security, pp. 459-500.
  - 28) Santarém, P. (1971), *Tractatus de Assecurationibus et Sponsonibus*, 2<sup>a</sup> Edição, Grémio dos Seguradores, Lisboa.
  - 29) Sundt, B. (1989), *Bonus Hunger and Credibility Estimators with Geometric Weights*, Insurance Mathematics and Economics 8, pp. 119-126.
  - 30) Walhin, J.F. & Paris, J. (2000), *The True Claim Amount and Frequency Distributions within a Bonus-Malus System*, ASTIN Bulletin **30**, No. 2, pp. 391-403.
  - 31) Teugels, J.L. & Sundt, B. (1991), *A Stop-Loss Experience Rating Scheme for Fleets of Cars*, Insurance: Mathematics and Economics, North-Holland, pp. 173-179.

## **ANEXO:**

- Programa de cálculo dos coeficientes de bonus-malus, seguindo o método de Pseudo-Máxima Verosimilhança, utilizando a distribuição Poisson como a função objectivo