

UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

MESTRADO EM: CIÊNCIAS ACTUARIAIS

**Desenho Estocástico de Planos de
Contribuição Definida**

João Carlos Marques Ferreira

Orientação: Dr. Jorge Manuel Afonso Garcia

Júri:

Presidente: Doutor João Carlos Henriques da Costa Nicolau

Vogais: Doutor Manuel Leote Tavares Inglês Esquível
Doutor Jorge Manuel Afonso Garcia

Abril / 2004

UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

MESTRADO EM: CIÊNCIAS ACTUARIAIS

**Desenho Estocástico de Planos de
Contribuição Definida**

João Carlos Marques Ferreira

Orientação: Dr. Jorge Manuel Afonso Garcia

Júri:

Presidente: Doutor João Carlos Henriques da Costa Nicolau

Vogais: Doutor Manuel Leote Tavares Inglês Esquível
Doutor Jorge Manuel Afonso Garcia

Abril / 2004

Resumo

O objectivo da presente dissertação consiste em obter formas de compreender e medir o risco associado ao benefício final concedido por planos de contribuição definida, de modo a poder tomar, atempadamente, as decisões correctas no sentido de garantir aos beneficiários do plano um benefício condigno no período pós-reforma.

Na sua essência, esta dissertação estabelece uma metodologia prática e relativamente simples de análise do risco inerente ao desenho de um plano de contribuição definida. Para planos de contribuição definida, o risco é definido pela probabilidade de o benefício concedido pelo plano – medido através da taxa de substituição – ser inferior ao pretendido (aquando do desenho do plano). Neste sentido, utiliza-se uma abordagem de *Value-at-Risk* (VaR), como métrica do risco, que permite estabelecer quais os valores da taxa de substituição que podem ser garantidos para um dado nível de confiança.

O modelo global de desenho estocástico de planos de contribuição definida é composto por alguns submodelos (salários, retorno dos investimentos, mortalidade) e por diversos parâmetros (taxa de contribuição, período de contribuição, estratégia de alocação de activos). Em relação ao submodelo de retorno dos investimentos (núcleo do modelo global), foram utilizados dois modelos estocásticos de simulação dos retornos dos activos financeiros de longo prazo: o modelo de Wilkie e o modelo de Hibbert. São tiradas importantes conclusões relativamente à forma como a arquitectura de construção de cada um dos submodelos influi (principalmente ao nível da dispersão das taxas de substituição) nos resultados.

A riqueza que uma abordagem estocástica confere a um estudo desta natureza, quando comparada com uma abordagem determinística do problema (que manifestamente falha em conceder uma dimensão do risco associado a um plano de contribuição definida), é uma das conclusões mais importantes que se pode tirar desta dissertação.

Palavras chave: planos de contribuição definida, taxa de substituição, modelos estocásticos de activos financeiros, estratégias de alocação de activos

Abstract

The purpose of this dissertation is to understand and measure the risk associated with the final benefit provided by a defined contribution (DC) pension plan. The idea is to use this risk analysis as a support to take, opportunely, the right decisions in order to provide an adequate pension to the plan beneficiaries in the post retirement period.

This dissertation establishes a simple and methodological approach to analyse the risk of stochastic pension plan design (for defined contribution plans). For this type of pension plans, the risk is defined by the probability of the benefits provided (by the DC plan) – measured through the replacement rate – being below the level initially stipulated. Therefore, the Value-at-Risk (VaR) methodology is used as the risk measure, since it allows to determine the replacement rate values that can be guaranteed for a specified confidence level.

The stochastic pension plan design model consists of some submodels (for salaries, asset returns, mortality) and several parameters – such as the contribution rate, the accumulation period, the asset-allocation strategies. Concerning the asset returns models (which is, in fact, the core of the stochastic pension plan design model), it was used two stochastic asset models – the Wilkie model and the Hibbert Model. Important conclusions are drawn from the structure beneath both models and their influence on the final results (mainly on the replacement rates volatility).

Another important conclusion drawn from this dissertation is related to the comparison between a deterministic approach and a stochastic approach and how the first one fails to give a proper measure of the risk involved in defined contribution plans.

Keywords: defined contribution plans, replacement rate, stochastic asset models, asset-allocation strategies

Índice

| | |
|--|-----------|
| LISTA DE FIGURAS | 7 |
| LISTA DE QUADROS | 7 |
| LISTA DE GRÁFICOS | 8 |
| AGRADECIMENTOS..... | 10 |
| INTRODUÇÃO | 11 |
| PARTE I – CONCEITOS..... | 13 |
| 1. PLANOS DE PENSÕES | 13 |
| 1.1 Planos de Benefício Definido..... | 13 |
| 1.2 Planos de Contribuição Definida..... | 14 |
| 2. TAXAS DE JURO | 14 |
| 3. PROCESSOS ESTOCÁSTICOS..... | 17 |
| 3.1 Modelos Autoregressivos | 17 |
| 3.2 Movimentos <i>Brownianos</i> e respectivas Equações Diferenciais | 18 |
| 3.3 Modelos de Estrutura a Termo da Taxa de Juro | 19 |
| PARTE II – MODELO DE DESENHO ESTOCÁSTICO DE PLANOS DE CONTRIBUIÇÃO DEFINIDA | 22 |
| 4. ENQUADRAMENTO DO MODELO | 22 |
| 5. DESENHO ESTOCÁSTICO DE PLANOS DE CONTRIBUIÇÃO DEFINIDA..... | 26 |
| 5.1 Metodologia de Desenho de um Plano CD | 26 |
| 5.2 Variáveis e Submodelos do Modelo Global | 27 |
| 5.2.1 Parâmetros..... | 29 |
| 5.2.2 Submodelos..... | 33 |
| PARTE III – SUBMODELOS DOS SALÁRIOS E DE RETORNO DOS INVESTIMENTOS | 34 |
| 6. ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE MODELOS | 34 |
| 6.1 Propriedades dos Bons Modelos | 35 |
| 6.2 Calibração e Estimação dos Parâmetros dos Modelos | 37 |
| 6.2.1 Dados Empíricos | 38 |

| | | |
|-------|---|----|
| 6.2.2 | Dados de Mercado | 38 |
| 6.2.3 | Opinião dos Peritos | 39 |
| 7. | SUBMODELOS DE RETORNO DOS INVESTIMENTOS | 39 |
| 7.1 | SubModelo de Wilkie..... | 42 |
| 7.1.1 | Inflação..... | 43 |
| 7.1.2 | Salários..... | 45 |
| 7.1.3 | Acções..... | 46 |
| 7.1.4 | Obrigações de Taxa Fixa..... | 51 |
| 7.1.5 | Numerário | 54 |
| 7.1.6 | Obrigações de Taxa Indexada | 55 |
| 7.1.7 | Imobiliário..... | 57 |
| 7.1.8 | Parametrização e Resultados..... | 61 |
| 7.2 | SubModelo de Hibbert | 65 |
| 7.2.1 | Estrutura a Termo da Taxa de Juro Real..... | 67 |
| 7.2.2 | Estrutura a Termo da Taxa de Inflação | 73 |
| 7.2.3 | Estrutura a Termo da Taxa de Juro Nominal | 76 |
| 7.2.4 | Numerário | 77 |
| 7.2.5 | Obrigações de Taxa Fixa..... | 77 |
| 7.2.6 | Obrigações de Taxa Indexada | 81 |
| 7.2.7 | Acções..... | 83 |
| 7.2.8 | Parametrização e Resultados..... | 86 |
| 7.3 | Comparação dos Dois Modelos..... | 90 |
| 8. | SUBMODELOS DOS SALÁRIOS..... | 93 |

PARTE IV – SIMULAÇÃO ESTOCÁSTICA DE UM PLANO DE CONTRIBUIÇÃO

| | | |
|-----------------------|---|-----|
| DEFINIDA | 97 | |
| 9. | CENÁRIO BASE..... | 97 |
| 9.1 | Análise do Quadro de Resultados..... | 99 |
| 9.2 | Análise Gráfica..... | 102 |
| 9.3 | Análise do Binómio Risco / Taxa de Contribuição | 106 |
| 9.4 | Análise dos Resultados do Processo de Acumulação..... | 108 |
| 10. | ANÁLISE DE SENSIBILIDADE | 110 |
| 10.1 | Anuidade | 110 |
| 10.2 | Salários | 111 |
| 10.3 | Anos de Contribuição | 113 |
| 10.4 | Taxa de Contribuição | 114 |

| | |
|--|------------|
| 11. COMPARAÇÃO COM MODELO DETERMINÍSTICO | 115 |
| CONCLUSÃO | 118 |
| BIBLIOGRAFIA | 121 |
| ANEXO A – GRÁFICOS ANÁLISE DE SENSIBILIDADE | 124 |

Lista de Figuras

| | |
|--|----|
| Figura 1 – Esquema do Modelo Global | 28 |
| Figura 2 – Dinâmica de um modelo de taxa de juro de dois factores | 70 |
| Figura 3 – Modelo de transição de estado aplicado ao retorno das acções | 85 |
| Figura 4 – Volatilidade anualizada das acções nos dois submodelos analisados | 92 |

Lista de Quadros

| | |
|--|----|
| Quadro 1 – Exemplo do processo de determinação da taxa de inflação | 44 |
| Quadro 2 – Exemplo do processo de determinação da taxa de crescimento salário | 46 |
| Quadro 3 – Exemplo do processo de determinação do retorno total das acções | 50 |
| Quadro 4 – Exemplo do processo de determinação do retorno de uma obrigação de taxa fixa de longo prazo | 53 |
| Quadro 5 – Exemplo do processo de determinação da taxa de rendimento do activo numerário | 55 |
| Quadro 6 – Exemplo do processo de determinação da taxa de rendimento de uma obrigação de taxa indexada | 57 |
| Quadro 7 – Exemplo do processo de determinação do retorno total imobiliário | 60 |
| Quadro 8 – Parametrização do submodelo de Wilkie | 62 |
| Quadro 9 – Resultados do submodelo de Wilkie | 62 |
| Quadro 10 – Processo de determinação da taxa de juro real | 72 |
| Quadro 11 – Processo de determinação da taxa de inflação | 75 |
| Quadro 12 – Exemplo do processo de determinação do preço de uma obrigação nominal de taxa fixa de cupão 20 | 79 |
| Quadro 13 – Exemplo do processo de determinação dos retornos totais das obrigações de taxa fixa | 80 |
| Quadro 14 – Exemplo do processo de determinação da taxa de rendimento das obrigações de taxa fixa | 81 |

| | |
|--|-----|
| Quadro 15 – Exemplo do processo de determinação do retorno total das obrigações de taxa indexada | 83 |
| Quadro 16 – Exemplo do processo de determinação do retorno total das acções..... | 86 |
| Quadro 17 – Parametrização do submodelo de Hibbert..... | 87 |
| Quadro 18 – Resultados do submodelo de Hibbert..... | 87 |
| Quadro 19 – Evolução salarial – as três situações estudadas | 96 |
| Quadro 20 – Estatísticas das simulações do cenário base | 100 |
| Quadro 21 – Análise risco / taxa de contribuição | 107 |
| Quadro 22 – Comparação entre análise determinística e estocástica | 116 |

Lista de Gráficos

| | |
|--|-----|
| Gráfico 1 – Estratégia do ciclo de vida | 31 |
| Gráfico 2 – Estratégia nível de benefício | 33 |
| Gráfico 3 – Dispersão das rendibilidades dos activos e variáveis do submodelo de Wilkie..... | 63 |
| Gráfico 4 – Dispersão das rendibilidades das obrigações de taxa fixa do submodelo de Wilkie, para os 10 primeiros anos..... | 64 |
| Gráfico 5 – Trajectórias da taxa de inflação – submodelo de Wilkie | 64 |
| Gráfico 6 – Trajectórias do activo numerário – submodelo de Wilkie | 65 |
| Gráfico 7 – Dispersão das rendibilidades dos activos e variáveis do submodelo de Hibbert | 88 |
| Gráfico 8 – Dispersão das rendibilidades das obrigações de taxa fixa do submodelo de Hibbert, para os 10 primeiros anos..... | 89 |
| Gráfico 9 – Trajectórias da taxa de inflação – submodelo de Hibbert | 89 |
| Gráfico 10 – Trajectórias do activo numerário – submodelo de Hibbert | 90 |
| Gráfico 11 – Índice salarial para as três linhas salariais analisadas | 95 |
| Gráfico 12 – Distribuição das taxas técnicas utilizadas nas anuidades | 100 |
| Gráfico 13 – Função de distribuição empírica das taxas de substituição para o submodelo Wilkie | 103 |
| Gráfico 14 – Função de distribuição empírica das taxas de substituição para o submodelo Hibbert..... | 103 |
| Gráfico 15 – Risco de modelo..... | 106 |
| Gráfico 16 – Comparação dos processos de acumulação dos submodelos de Wilkie e Hibbert | 109 |
| Gráfico 17 – Análise sensibilidade anuidades – submodelo Wilkie | 111 |

| | |
|---|-----|
| Gráfico 18 – Análise sensibilidade salários – submodelo Wilkie | 113 |
| Gráfico 19 – Análise sensibilidade anos de contribuição – submodelo Wilkie | 114 |
| Gráfico 20 – Análise sensibilidade taxa de contribuição – submodelo Wilkie | 115 |
| Gráfico 21 – Comparação com análise determinística | 117 |
| Gráfico 22 – Análise sensibilidade anuidades – submodelo Hibbert | 124 |
| Gráfico 23 – Análise sensibilidade salários – submodelo Hibbert | 124 |
| Gráfico 24 – Análise sensibilidade anos de contribuição – submodelo Hibbert | 125 |
| Gráfico 25 – Análise sensibilidade taxa de contribuição – submodelo Hibbert | 125 |

Agradecimentos

Nesta longa, árdua mas também enriquecedora experiência, muitas foram as pessoas que me ajudaram (directa ou indirectamente), incentivaram e tornaram-na possível. Esta página é dedicada a todos eles!

Em primeiro lugar quero agradecer aos meus pais e ao meu irmão, não só pelo apoio incondicional que me deram mas principalmente por tudo aquilo que fizeram por mim ao longo da minha existência, pois, grande parte do que hoje sou a eles o devo.

A todos os meus colegas da Mercer HR Consulting o meu obrigado pelo apoio e incentivo com que sempre me brindaram. Fica ainda um agradecimento aos dirigentes da Mercer, especialmente à Dra. Maria João Louro, por terem tornado possível a realização deste Mestrado.

Agradeço também ao Prof. Dr. Jorge Garcia pela orientação concedida, pelos comentários pertinentes e também pela partilha de ideias que foram sempre um tónico das nossas reuniões.

Por fim, a todos os meus grandes e especiais amigo(a)s o meu muito obrigado pelo incentivo e por me terem ajudado a atingir esta meta.

Introdução

Os tempos que correm são particularmente férteis em mudança. A sociedade global, da qual fazemos parte, está continuamente sujeita a mutações e mudanças que abalam os mais diversos quadrantes da sociedade e da economia. Para não fugir à regra, os sistemas públicos de Segurança Social têm sido constantemente abordados nas capas dos jornais e das revistas assim como nas notícias de abertura dos jornais televisivos.

No ano em que o relatório da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico (OCDE) volta a denunciar a já muito anunciada, insustentabilidade do sistema de financiamento por repartição (sistema *Pay As You Go* – como é conhecido na literatura anglo-saxónica) e aconselha os diversos países a tomarem medidas para diminuir a fragilidade do sistema (aumento do período contributivo, fórmulas de cálculo dos benefícios considerando toda a carreira contributiva, etc) o reequilíbrio do conhecido sistema dos três pilares ganha preponderância. Os sistemas complementares de pensões (segundo e terceiro pilares) adquirem, portanto, maior protagonismo e o seu estudo, em forma de trabalho científico, torna-se apetecível e actualizado.

Entrando agora na temática dos planos de pensões, e dando continuidade ao que foi referido anteriormente, constata-se que a mudança também se estendeu até este domínio. A pressão sobre os planos de benefício definido (BD), mais precisamente sobre o controlo dos seus custos, tem sido maior do que nunca, fruto de um longo período de resultados negativos no mercado financeiro. Em virtude desta pressão e da necessidade que as empresas sentem em controlar os custos com o seu plano de pensões, tem-se acentuado a tendência pela adopção de planos de contribuição definida (CD). Contudo, este tipo de plano de pensões transfere grande parte dos riscos para o colaborador, levantando assim a seguinte questão: será o benefício final atribuído pelos planos de contribuição definida suficiente para garantir um rendimento condigno e de acordo com as expectativas de cada colaborador?

É evidente que esta questão só tem uma resposta definitiva no momento do recebimento da primeira pensão, momento esse em que será demasiado tarde para que se possam fazer correcções! Embora a resposta só possa ser conhecida no final, muito se pode

fazer para diminuir a incerteza do benefício final. É precisamente este o objectivo da presente dissertação: obter formas de compreender e medir o risco associado ao benefício final, concedido por estes planos de contribuição definida, de modo a poder tomar, atempadamente, as decisões correctas no sentido de garantir o tal rendimento condigno. Para o efeito, é utilizada uma metodologia de desenho estocástico de planos de contribuição definida que consiste na utilização da simulação estocástica das pensões, medidas através da taxa de substituição, para daí retirar conclusões sobre o nível de benefício gerado e o risco associado.

A dissertação está dividida em quatro partes. Na primeira parte são introduzidos, de uma forma muito sucinta, alguns conceitos (essencialmente matemáticos) que fundamentam os modelos matemáticos explicados nas partes seguintes. A segunda parte da dissertação diz respeito à metodologia de análise dos benefícios gerados e que consiste num modelo global de desenho estocástico de planos de contribuição definida. Aqui são explicadas as variáveis e os parâmetros que compõem este modelo. A principal fundamentação teórica que subjaz nesta dissertação é feita na terceira parte, onde são abordados os modelos de retorno dos investimentos – modelos que permitem a modelização dos retornos de alguns activos financeiros (acções, obrigações...) – e os modelos de crescimento salarial que constituem submodelos do modelo global. Por fim, na quarta e última parte a metodologia definida é posta em prática e analisam-se os resultados de onde se retiram as conclusões.

Parte I – Conceitos

Atendendo ao facto do tema em estudo ser bastante específico, considerou-se por bem abordar alguns conceitos fundamentais à compreensão desta dissertação. Assim, os leitores mais familiarizados com estas temáticas podem passar à Parte II da presente dissertação.

No primeiro capítulo faz-se referência à temática dos planos e fundos de pensões, enquanto no segundo abordam-se alguns conceitos relativos à taxa de juro e por fim, no último capítulo desta Parte, alude-se a matérias do foro matemático com a menção aos processos estocásticos em que assentam os modelos estudados ao longo da dissertação. Neste último capítulo aflora-se ainda, embora muito ao de leve, os modelos de estrutura a termo da taxa de juro, fazendo apenas referência ao trabalho pioneiro de Vasicek (1977). Esta referência, como mais tarde se verá, é o ponto de partida para modelo apresentado no Capítulo 7.2.

1. PLANOS DE PENSÕES

1.1 PLANOS DE BENEFÍCIO DEFINIDO

Num plano de benefício definido as regras que permitem calcular o benefício, que o indivíduo terá direito quando passar à reforma, encontram-se previamente definidas pelo que é possível conhecer antecipadamente o montante de reforma (normalmente em percentagem do último salário). As contribuições para o fundo de pensões, a cargo da empresa, são calculadas de forma a garantir o pagamento daqueles benefícios.

Como nestes planos a forma de cálculo do benefício a conceder aos indivíduos está estabelecida, o custo anual (montante que a empresa disponibiliza para o fundo) para garantir os benefícios vai ser variável, pois depende de uma série de factores tais como a taxa de rendimento real do fundo, a taxa de crescimento salarial efectiva, a taxa de mortalidade, invalidez e turnover efectivas entre outros.

1.2 PLANOS DE CONTRIBUIÇÃO DEFINIDA

Um plano de contribuição definida caracteriza-se pela definição de uma taxa de contribuição para o fundo de pensões, isto é, as contribuições efectuadas pela empresa para o fundo são previamente definidas, enquanto os benefícios são determinados em função do montante das contribuições entregues e dos respectivos rendimentos acumulados. Trata-se de uma simples conta de poupança individual investida num fundo ou, eventualmente, num seguro.

Ao invés do plano de benefício definido onde as contribuições (custos) são variáveis e os benefícios fixos, neste tipo de plano o benefício é variável enquanto a contribuição é definida *a priori*. O custo deste tipo de planos está perfeitamente determinado à partida enquanto o benefício gerado é apenas conhecido no momento de reforma.

2. TAXAS DE JURO

O mercado da taxa de juro é o mercado onde se estabelece o preço do dinheiro. O preço do dinheiro durante um período de tempo depende não só do horizonte temporal considerado mas também das flutuações de curto prazo do mercado da taxa de juro.

O contrato mais simples que existe no mercado de taxa de juro é aquele no qual se estabelece pagar um montante hoje em troca de uma promessa de receber um montante (normalmente superior) num momento posterior. Este contrato requer apenas dois valores, o termo do contrato (também designado por **maturidade** do contrato) que define o momento de tempo em que ocorre o recebimento do segundo montante e o valor do primeiro pagamento, que representa uma proporção face ao segundo pagamento. Em termos formais, a maturidade representa-se por \mathbf{T} , e a fracção do primeiro pagamento em função do segundo é representada por $P(0, T)$. Por outras palavras, uma unidade monetária (u.m.) no momento \mathbf{T} pode ser comprada, no momento 0, por $P(0, T)$.

O contrato que representa a promessa de receber uma u.m. no momento \mathbf{T} (por entrega de $P(0, T)$ hoje) é designado por **obrigação de cupão zero** e $P(0, T)$ é o preço dessa obrigação no momento 0. No entanto, esta obrigação pode ter um preço diferente no momento \mathbf{t} , anterior a \mathbf{T} ($\mathbf{t} < \mathbf{T}$). O preço $P(\mathbf{t}, T)$ indica o valor, no momento \mathbf{t} , de uma u.m. no momento \mathbf{T} . O preço das obrigações é, portanto, uma função de dois parâmetros temporais (\mathbf{t} e \mathbf{T}) que determinam o início e o fim do contrato.

Antes de se prosseguir é conveniente introduzir o conceito do valor temporal do dinheiro. Assim, assume-se que para um dado momento \mathbf{T} , o valor hoje de uma u.m. em \mathbf{T} é dado por e^{-rT} , para uma constante $r > 0$. A taxa r é designada de taxa de juro continuamente composta para o período \mathbf{T} .

A mais importante medida de informação sobre o mercado da taxa de juro é a indicação da taxa média de juro implícita numa obrigação. Se a taxa de juro fosse constante à taxa r , o preço de uma obrigação, no momento \mathbf{t} , que paga uma unidade no momento \mathbf{T} será dado por $e^{-r(T-t)}$. A taxa r pode ser obtida através do preço da obrigação e da fórmula

$$r = -\frac{\ln P(\mathbf{t}, T)}{(T - t)}.$$

Se à taxa r se indexar os dois parâmetros temporais \mathbf{t} e \mathbf{T} obtém-se $R(\mathbf{t}, T)$, à qual se atribui o termo anglo-saxónico *yield*, que em Português se traduz por taxa de rendimento. Fazendo variar a maturidade \mathbf{T} e retendo os valores para a taxa de rendimento obtém-se a **curva da taxa de rendimento** (mais conhecida pelo seu termo anglo-saxónico – *yield curve*) que define a **estrutura a termo da taxa de juro**. Em suma, a estrutura a termo da taxa de juro representa a relação entre o tempo (\mathbf{t}) e a taxa de rendimento (*yield*).

A *yield curve* permite ter uma ideia da taxa a que se pode pedir empréstimo para cada um dos termos. Para se saber qual é a taxa subjacente a um empréstimo de termo muito reduzido é necessário calcular qual a taxa para o período $(\mathbf{t}, \mathbf{t} + \Delta t)$. À medida que se estreita o intervalo, isto é, $\Delta t \rightarrow 0$, o valor da taxa vai aproximando-se de $R(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = r_t$ – a **taxa de juro instantânea** ou **taxa de juro de curto prazo**. Esta taxa é extremamente

importante para os modelos de taxa de juro, pois, ela é suficiente para determinar o preço das obrigações.

O custo hoje de um empréstimo instantâneo no momento t é dado por $r_t = f(t, t)$ – a taxa de juro **forward**. Ou seja, $f(t, T)$ é a taxa de juro (**forward**) subjacente a um empréstimo que paga $P(t, T)$ no momento t para receber uma u.m. no momento T . Tendo as taxas $f(t, T)$ é possível recuperar os preços $P(t, T)$ e determinar as taxas de rendimento $R(t, T)$ e vice-versa, ou seja, tendo a expressão para uma destas quantidades facilmente se obtém as restantes. Por exemplo, $f(t, T)$ pode ser obtido de $R(t, T)$ através da expressão: $f(t, T) = R(t, T) + (T - t) \frac{\partial R}{\partial T}(t, T)$.

A partir das taxa de juro **forward** ($f(t, T)$), pode determinar-se as taxas de juro **spot** – taxas que representam a taxa de rendimento (*yield*) subjacente a uma obrigação de cupão zero. Fixando o momento t , a taxa de juro **spot** é a taxa de rendimento ($R(t, T)$) intrínseca a uma obrigação de cupão zero cujo preço é $P(t, T)$.

Desta forma, conhecendo o valor da taxa de juro **forward** ($f(t, T)$) é, então, possível obter a taxa de juro **spot**. Para o caso discreto tem-se

$$R(0, T) = \left[\prod_{j=1}^T (1 + f(j-1, j)) \right]^{\frac{1}{T}} - 1.$$

Vejamos um exemplo. Sendo conhecidas as taxas de juro **forward** $f(0,1)$, $f(1,2)$ e $f(2,3)$, facilmente se obtém as taxas de juro **spot**:

$$R(0,1) = f(0,1)$$

$$R(0,2) = \left[\prod_{j=1}^2 (1 + f(j-1, j)) \right]^{\frac{1}{2}} - 1 = [(1 + f(0,1)) \times (1 + f(1,2))]^{\frac{1}{2}} - 1$$

$$R(0,3) = \left[\prod_{j=1}^3 (1 + f(j-1, j)) \right]^{\frac{1}{3}} - 1 = [(1 + f(0,1)) \times (1 + f(1,2)) \times (1 + f(2,3))]^{\frac{1}{3}} - 1$$

3. PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Processo Estocástico – Um processo estocástico é um modelo matemático que permite descrever, para cada momento, um fenómeno aleatório, depois de fixado o instante inicial.

Assim, um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias Y_t , onde t é um parâmetro tomando valores sobre um conjunto \mathbf{T} , designado por conjunto de índices do processo. O processo representa-se por $\{Y_t; t \in T\}$ ou $\{Y_t\}_{t \in T}$, no qual t , na maioria das aplicações, representa o tempo.

3.1 MODELOS AUTOREGRESSIVOS

Um modelo de séries temporais permite descrever estatisticamente o comportamento de uma sucessão de valores. A sucessão de valores é normalmente designada por \mathbf{X} e consiste num conjunto de observações x_t observados em determinados momentos do tempo $t = 1, 2, \dots, n$. As séries temporais estão divididas entre as que são estacionárias e as que não o são. A estacionariedade das séries é caracterizada pelo facto de o valor esperado e variância da série serem constantes (isto é, não mudam ao longo do tempo).

Um modelo autoregressivo de ordem p , linear e estacionário, para a série \mathbf{X} pode ser escrito da seguinte forma,

$$x_t = \mu + \sum_{j=1}^p a_j (x_{t-j} - \mu) + e_t.$$

O valor de x_t depende dos p valores anteriores de x (isto é, depende dos valores de $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-p}$) e de um resíduo aleatório e_t , sendo este último responsável pela introdução dos factores aleatórios no processo. Assume-se, normalmente, que cada e_t segue uma distribuição Normal de média nula e variância σ^2 e que os sucessivos e_t são independentes.

Fazendo uso da notação própria da análise de séries temporais, o exemplo mais simples deste tipo de modelos é o modelo autoregressivo de ordem 1 – AR(1) – que pode ser

descrito como $x_t \sim \text{AR1}(\mu, a, \sigma)$, ou seja, $x_t = \mu + a(x_{t-1} - \mu) + e_t$. Neste caso o desvio de x_t em relação à média μ é proporcional (a é a constante de proporcionalidade) ao desvio em relação à média do período anterior acrescida de um factor aleatório, que tem média nula e desvio padrão σ . A série é estacionária se e só se $-1 < a < 1$.

3.2 MOVIMENTOS *BROWNIANOS* E RESPECTIVAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Movimento *Browniano* (MB) (ou Processo de Wiener) – Um qualquer fenómeno, não determinístico, que evolua continuamente no tempo está sujeito a uma infinidade de perturbações aleatórias ao longo do tempo. Parte dessas perturbações não são explicáveis e devem-se inteiramente ao acaso. Podemos admitir que estas perturbações não explicáveis têm média zero (as perturbações de sinal contrário compensam-se, em média), são numerosas e aproximadamente independentes. Então, pelo teorema do limite central, o efeito acumulado de todas estas perturbações deve ser aproximadamente Gaussiano de média zero e variância proporcional ao intervalo decorrido.

Um movimento *Browniano* com coeficiente de difusão σ^2 é um processo estocástico $\{W_t\}_{t>0}$ com as seguintes propriedades:

- Cada incremento $(W_{t+s} - W_t)$ tem distribuição normal de média nula e desvio padrão $\sigma^2 s$ (a variância é proporcional à amplitude do intervalo);
- Para cada conjunto de intervalos de tempo disjuntos $(t_1; t_2)$ e $(t_3; t_4)$ os incrementos $(W_{t_4} - W_{t_3})$ e $(W_{t_2} - W_{t_1})$ são variáveis aleatórias independentes;
- $W_0 = 0$, e W_t é uma função contínua, $W_t \sim N(0, t)$

Movimento *Browniano Standard* (MBS) – Um processo estocástico $\{Z_t\}_{t>0}$ é um movimento *Browniano Standard* com coeficiente de difusão unitário, média nula e variância igual a t , quando se tem $Z_t = W_t / \sigma$.

O processo Z_t pode ser escrito como um integral estocástico $\int_0^t dZ_s$, no qual dZ_s é o incremento de Z_t num pequeno intervalo $(s; s + ds)$, cuja distribuição é Normal de média nula e variância ds , independente de Z_s .

Movimento Browniano com deriva (MBD) – Um processo estocástico $\{X_t\}_{t>0}$ é um movimento *Browniano* com deriva se $X_t = \mu.t + \sigma.Z_t$. X_t é um movimento *Browniano* com deriva que tem uma distribuição Normal de média μ e variância σ^2 , enquanto Z_t é um movimento *Browniano Standard*.

Movimento Browniano Geométrico (MBG) – Um processo estocástico $\{S_t\}_{t>0}$ é um movimento *Browniano* geométrico com deriva α se $Z_t = \log(S_t)$ é um movimento *Browniano* com deriva $\mu = \alpha - \sigma^2 / 2$ e parâmetro da variância σ^2 .

Assim, $S_t = S_0 e^{X_t} = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma Z_t}$, em que Z_t é um movimento *Browniano Standard*.

O movimento *Browniano* geométrico pode ser escrito de diferentes formas. As duas expressões seguintes representam, respectivamente, o MBG na forma diferenciável e em forma de integral:

$$dS_t = \mu.S_t dt + \sigma.S_t dZ_t$$

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu.S_u du + \int_0^t \sigma.S_u dZ_u$$

3.3 MODELOS DE ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JURO

Neste capítulo, vai-se apenas fazer referência a um dos modelos pioneiros de estrutura a termo da taxa de juro, elaborado por Vasicek (1977). O objectivo de apenas focar este modelo prende-se com o facto de a maioria dos modelos de estrutura a termo da taxa de juro terem sido desenvolvidos a partir deste, incluindo o modelo de Hibbert (2001) apresentado no Capítulo 7.2.

Estes modelos de estrutura a termo da taxa de juro assentam em conceitos de alguma complexidade (como, por exemplo, o integral de Itô, martingalas e outros) no âmbito das matemáticas actuariais e financeiras, especialmente ao nível das equações diferenciais estocásticas. Devido à complexidade dos conceitos subjacentes a este tipo de modelo, e dado que é necessário cingir-nos ao objecto de estudo desta dissertação, a fundamentação teórica destes modelos é remetida para as seguintes referências bibliográficas: Karatzas (1991), Nicolau (2001) ou Baxter (1996).

Segundo Vasicek (1977), o modelo para a taxa de juro de curto prazo segue o processo estocástico

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dZ_t,$$

no qual dZ_t é um movimento *Browniano Standard*, r_t é o nível actual da taxa de juro, b representa a taxa de juro de longo prazo e a é o parâmetro que regula a velocidade de ajustamento da taxa de juro em relação ao seu valor de longo prazo. O modelo pressupõe reversão em relação à média, pois, quando a taxa de juro r_t está acima do valor da taxa de juro de longo prazo (b) o coeficiente a ($a > 0$) faz com que a deriva se torne negativa e o valor da taxa de juro seja puxado para baixo em direcção ao seu parâmetro de longo prazo. Da mesma forma, quando $r_t < b$, isto é, quando a taxa de juro instantânea está abaixo do seu valor de longo prazo, a deriva é positiva e a taxa de juro é puxada na direcção do parâmetro b . Este tipo particular de processo estocástico recebe a designação de *Ornstein-Uhlenbeck process*.

No modelo de Vasicek a taxa de juro r_t segue uma distribuição Normal, em que o correspondente valor esperado e variância do processo da taxa de juro futura em T são dados por

$$E[r_T | r_t] = r_t \cdot e^{-a(T-t)} + b \cdot (1 - e^{-a(T-t)})$$

$$V[r_T | r_t] = \frac{\sigma^2 \cdot (1 - e^{-2a(T-t)})}{2a}$$

Para este processo o preço de uma obrigação de cupão zero, no momento t , que paga uma unidade no momento T , é dado pela expressão:

$$P(t, T) = A(t, T) \cdot \exp[-B(t, T) \cdot r_t],$$

no qual

$$B(t, T) = \left[\frac{(1 - e^{-a(T-t)})}{b} \right]$$

$$A(t, T) = \exp \left[\frac{(B(t, T) - (T-t) \cdot (a^2 b - \sigma^2 / 2)) - \frac{\sigma^2 \cdot B(t, T)^2}{4a}}{a^2} \right].$$

A expressão para o preço da obrigação de cupão zero, fazendo uso da notação sobre as taxas de juro introduzida no Capítulo 2, é determinada a partir da relação:

$$P(t, T) = \exp[-(T-t) \cdot R(t, T)] \text{ ou, em alternativa: } P(t, T) = \exp \left[- \int_t^T f(t, u) du \right].$$

Parte II – Modelo de Desenho Estocástico de Planos de Contribuição Definida

4. ENQUADRAMENTO DO MODELO

Da análise da realidade do mundo em que vivemos, relativamente aos rendimentos financeiros pós-reforma de qualquer trabalhador, podem retirar-se algumas tendências.

A tendência mais marcante a nível europeu no sistema de pensões é a diminuição dos benefícios concedidos pelos órgãos estatais (pensões da Segurança Social) e a transição de um sistema de repartição para um sistema de capitalização, que se prende com a falta de sustentabilidade dos sistemas financeiros de protecção social. De facto, os sistemas públicos de Segurança Social na Europa assentam no chamado sistema de repartição baseado na solidariedade inter-geracional, no qual as contribuições dos actuais activos servem para pagar as pensões dos actuais pensionistas. Estes sistemas foram desenhados e implementados (no pós Segunda Guerra Mundial) tendo em conta uma realidade demográfica e sócio-económica que se tem vindo a alterar profundamente desde então, com impactos significativos ao nível da sustentabilidade do sistema.

Em termos demográficos constatou-se uma diminuição da natalidade que conjuntamente com um aumento da esperança média de vida (que resulta essencialmente dos avanços da medicina) fizeram inverter a pirâmide etária. Por outro lado, à medida que o nível de educação e de escolarização se estende, a entrada no mercado de trabalho ocorre cada vez mais tarde o que provoca uma diminuição dos períodos contributivos. Com a junção destas duas alterações, torna-se evidente a pressão financeira exercida no sistema público de Segurança Social, pois são cada vez menos os activos a contribuírem para o sistema (com a agravante de que entram mais tarde para o mercado de trabalho e saem mais cedo – reformas antecipadas) e cada vez mais os que beneficiam do sistema (com a agravante do aumento do número de anos em que beneficiam do sistema).

Com a sustentabilidade financeira do sistema de protecção social em causa, os Estados têm necessidade de diminuir o nível de benefícios que concedem, transferindo responsabilidades para as empresas e para os próprios indivíduos (segundo e terceiro pilar respectivamente do que é normalmente designado por Sistema dos Três Pilares da protecção social).

É dentro deste Segundo Pilar que se pode encontrar os Planos de Pensões, porquanto as empresas tomam a responsabilidade de garantir aos seus trabalhadores, na reforma, um rendimento adicional que deverá acrescer ao que estes receberão do Primeiro Pilar (Segurança Social). No que concerne aos Planos de Pensões, e aqui reside a segunda tendência nos rendimentos de pós-reforma, assiste-se a uma mudança do tipo de plano de benefício definido para contribuição definida.

Esta tendência assenta, acima de tudo, na necessidade das empresas controlarem os riscos e, conseqüentemente, os custos, associado ao seu plano de pensões. De entre os motivos que estão na origem da transição para planos de contribuição definida, destacam-se os seguintes:

- ✦ **Risco de investimento** – De entre os vários riscos, este é um dos que origina maior preocupação junto das administrações das empresas, principalmente no contexto actual dos últimos três anos, pois as rendibilidades dos fundos de pensões foram seriamente abaladas pela desvalorização dos mercados accionistas. Nestas circunstâncias, as perdas financeiras ocorridas no fundo de pensões obrigam as empresas a injectarem capital no mesmo, fazendo aumentar os custos com o plano;
- ✦ **Nível de financiamento** – Este factor está intimamente relacionado com o anterior, porquanto a autoridade que supervisiona os fundos de pensões (Instituto de Seguros de Portugal – ISP) exige mínimos de financiamento que têm de ser respeitados. Desta forma, num contexto económico de baixas rendibilidades dos fundos de pensões o nível de financiamento deteriora-se obrigando as empresas a fazerem contribuições adicionais para o fundo;

- ✦ **Contabilização dos custos** – As normas de contabilização dos custos com planos de pensões também influenciam os custos com os planos de benefício definido visto que as recentes alterações às normas (FRS-17 no Reino Unido e IAS-19 a nível Europeu) indicam que quaisquer ganhos e perdas actuariais e financeiros terão que ser integralmente levados a custo do ano. A possibilidade de suavizar os ganhos e as perdas (quer actuariais quer financeiros), que não consta das recentes normas, vem, mais uma vez, aumentar a incerteza dos custos e acentuar a pressão relativamente aos planos de benefício definido;

- ✦ **Complementaridade com a Segurança Social** – Sendo muitos dos planos de pensões (em Portugal) complementares à Segurança Social, existe o risco das empresas terem de suportar os encargos com a diminuição dos benefícios concedidos pelo sistema estatal de protecção social.

A transição de planos de benefício definido para planos de contribuição definida transfere a maior parte dos riscos do plano de pensões para o indivíduo. Como neste tipo de planos o que é definido é a contribuição (percentagem da massa salarial) que o empregador faz para a conta individual de cada trabalhador, a pensão (à data da reforma) que este vai auferir é desconhecida. De entre os riscos que influenciam o valor final da pensão destacam-se os seguintes:

- ✦ **Insuficiência de contribuições** – O indivíduo detém o risco de a taxa de contribuição do empregador ser insuficiente para gerar, na reforma, um rendimento condigno;

- ✦ **Risco de investimento** – As contribuições feitas para a conta individual são investidas nos mercados financeiros (obrigações, acções, imobiliário...) e o montante disponível antes da reforma vai ser maior ou menor consoante os rendimentos financeiros que foram obtidos. Se bem que no caso de investimentos favoráveis o indivíduo é o grande beneficiado a principal

preocupação reside nas situações em que o rendimento gerado seja baixo ou insuficiente, especialmente no período que antecede o momento da reforma;

- ✦ **Risco de compra da anuidade** – No momento da reforma, a pensão que o indivíduo vai receber é determinada pela divisão entre o montante disponível na sua conta individual e uma anuidade. Portanto, o indivíduo está sujeito ao risco associado à compra da anuidade. Este risco deriva, essencialmente, do risco de uma taxa de juro baixa a que corresponde uma anuidade alta e consequentemente uma pensão mais baixa.

É precisamente neste cenário de mudança para planos de contribuição definida e da incerteza que rodeia o montante da pensão final que se enquadra esta dissertação. À medida que os planos de contribuição definida se vão tornando mais comuns, o desenho e a respectiva análise dos previsíveis benefícios revelam-se de primordial importância.

O objectivo da dissertação consiste em utilizar a avaliação dos benefícios concedidos por planos de contribuição definida como ferramenta de desenho do plano. Como medida de avaliação da adequação (ou não) das pensões geradas por este tipo de planos irá utilizar-se a taxa de substituição. A taxa de substituição resulta da divisão do valor da pensão, calculada no momento da reforma, pelo último salário auferido antes da reforma:

$$\text{Taxa de Substituição} = \frac{\text{Pensão}}{\text{Último Salário}}$$

e pretende medir a relação entre o rendimento antes da reforma (salário) e depois da reforma (pensão). Ou seja, a taxa de substituição permite analisar a adequação da pensão que o indivíduo vai receber e, consequentemente, concluir da qualidade do plano de contribuição definida desenhado, através da medição do valor relativo da pensão face ao último salário.

Utilizando a taxa de substituição como medida de análise permite também fazer comparações em relação à pensão atribuída por planos de benefício definido. Como a maioria dos planos de benefício definido são do tipo salário final, no qual as fórmulas

de determinação da pensão estão estabelecidas em função do último salário, é relativamente simples determinar *a priori* qual a taxa de substituição. Assim, o modelo permite medir de que forma é que um plano de contribuição definida consegue providenciar um nível de pensões semelhante ao de um plano de benefício definido.

5. DESENHO ESTOCÁSTICO DE PLANOS DE CONTRIBUIÇÃO DEFINIDA

5.1 METODOLOGIA DE DESENHO DE UM PLANO CD

A forma mais adequada para o desenho e análise de casos extremos (o que na literatura anglo-saxónica se traduz no termo *stress testing*) é a simulação estocástica. Esta metodologia consiste na geração de um grande número de resultados do valor final da pensão (e consequentemente das taxas de substituição) condicionada pelas hipóteses assumidas relativamente à taxa de contribuição, ao retorno dos investimentos, à mortalidade e a outros factores.

A metodologia de desenho de um plano de contribuição definida, através da simulação estocástica, envolve os seguintes passos:

- 1) **Definição dos parâmetros** que definem o plano de contribuição definida (a taxa de contribuição – que pode ser constante, indexada à idade ou indexada ao valor do fundo acumulado) e definição dos processos estocásticos que modelizam o retorno dos investimentos (acções, obrigações...), os salários, a taxa de juro, a mortalidade, etc.
- 2) **Escolha da estratégia de investimento** para o horizonte temporal estabelecido (desde a data em que o indivíduo entra para a empresa e esta começa as contribuições para a conta individual até à data de reforma do mesmo). A estratégia de alocação dos activos pode ser estática (permanece constante durante todo o período) ou dinâmica (pressupõe uma avaliação e realocação periódica dos activos).

- 3) **Geração da distribuição empírica dos valores das taxas de substituição**, à data da reforma, de acordo com as hipóteses assumidas nos dois passos anteriores e fazendo uso da simulação estocástica. Uma vez obtida a distribuição empírica dos resultados é possível obter os valores estimados do *VaR* para os graus de confiança pré-definidos.
- 4) **Análise dos valores do *VaR*** e conclusão se são ou não satisfatórios e em caso negativo alterar uma das variáveis do modelo (taxa de contribuição ou estratégia de alocação dos activos) até que se tornem satisfatórios.
- 5) Se os valores forem satisfatórios, então, o desenho do plano de contribuição definida está finalizado e determinaram-se, para os graus de confiança pré-definidos, os níveis de benefício que o plano providencia.

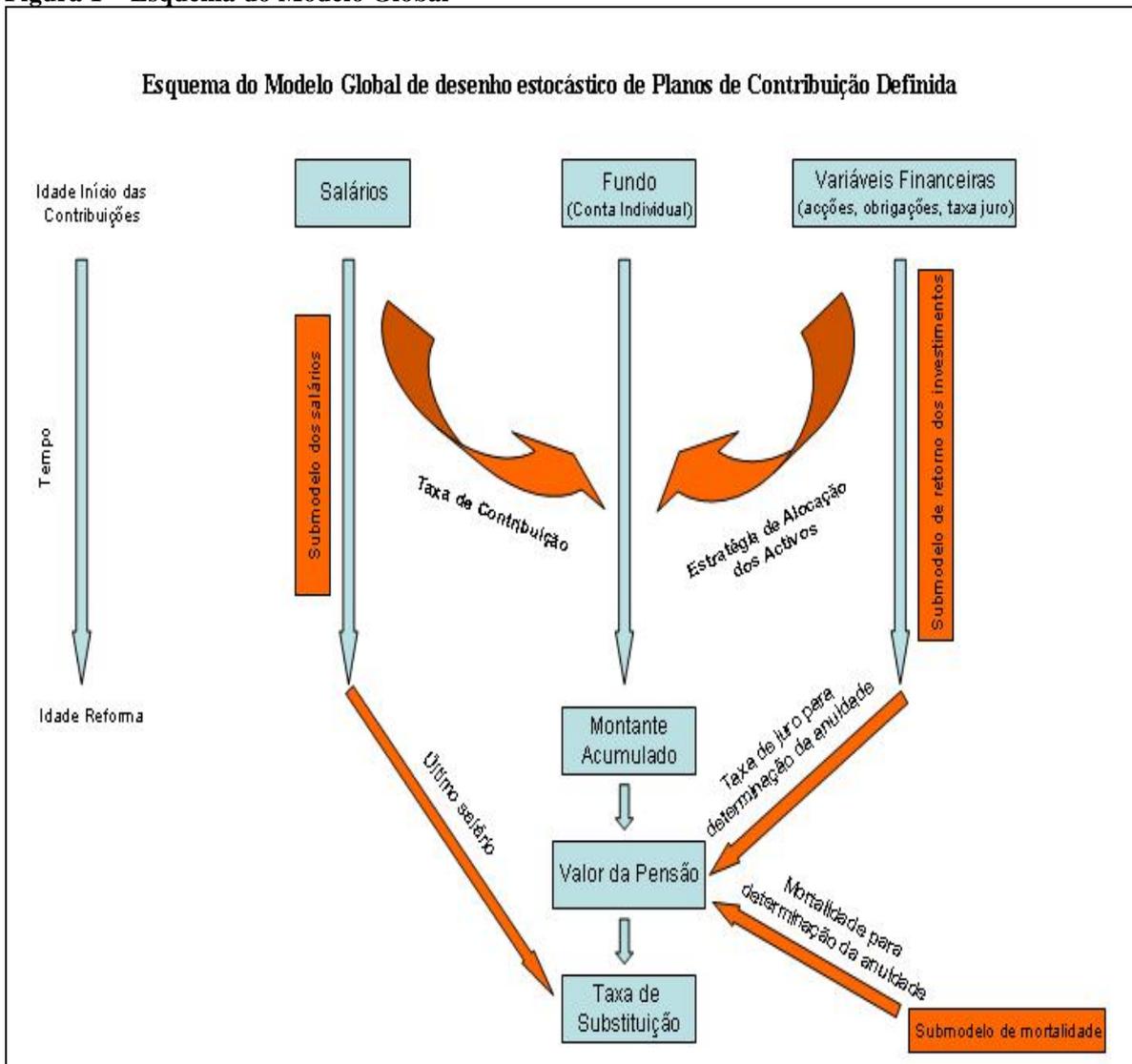
5.2 VARIÁVEIS E SUBMODELOS DO MODELO GLOBAL

O modelo de desenho estocástico de planos de contribuição definida é, na sua essência, bastante simples. A figura seguinte (Figura 1) é uma representação esquemática do modelo global que ajuda a identificar quer a dinâmica do modelo quer as variáveis e os submodelos.

Como o objectivo final a atingir é a simulação das possíveis taxas de substituição que um indivíduo poderá vir a ter se usufruir do plano de pensões desenhado. Assim o primeiro passo consiste na definição da idade inicial, isto é, o momento em que o empregador começa a fazer as contribuições para o fundo.

As contribuições para o fundo dependem, por um lado, do parâmetro **taxa de contribuição** (que representa a percentagem do salário do indivíduo que o empregador se comprometeu a contribuir para o fundo) e, por outro, da evolução dos salários ao longo dos anos até à reforma – **submodelo dos salários**.

Figura 1 – Esquema do Modelo Global



Em paralelo com o submodelo que modeliza os salários existe o **submodelo retorno dos investimentos** que é responsável pela modelização das variáveis dos mercados financeiros (preço das acções, preço das obrigações...). Normalmente, este submodelo possibilita igualmente a modelização das taxas de juro (através das curvas da taxa de rendimento – *yield curve* – das obrigações de longo prazo) que é utilizada para determinar a anuidade com que se calcula a taxa de substituição.

O montante acumulado no momento da reforma é o resultado das contribuições feitas para o fundo, que por sua vez depende do **parâmetro taxa de contribuição** e do **submodelo dos salários**, e dos retornos anuais dos investimentos, que resulta da

conjugação do **submodelo de retorno dos investimentos** com o **parâmetro estratégia de alocação dos activos**.

Tendo o montante acumulado no momento da reforma, calcula-se o valor final da pensão dividindo o montante acumulado por uma anuidade. A anuidade depende do valor da taxa de juro no momento da compra, que pode ser obtida no submodelo de retorno dos investimentos, e depende do submodelo de mortalidade, responsável pela modelização da mortalidade¹.

Por fim, dividindo o valor final da pensão pelo último salário, determina-se o valor da taxa de substituição.

Cada simulação prevê todos estes passos, desde o início das contribuições, passando pela modelização dos salários e das variáveis dos mercados financeiros (incluindo a modelização da taxa de juro) até à determinação da pensão e da respectiva taxa de substituição. Repetindo este processo tantas vezes quanto o número de simulações previsto obtém-se a distribuição empírica das taxas de substituição que permitirá concluir, com o grau de confiança pré-estabelecido, da qualidade dos benefícios providenciados pelo plano de pensões em análise.

5.2.1 PARÂMETROS

Em termos concretos, os parâmetros do desenho estocástico de planos de contribuição definida resumem-se à **taxa de contribuição**, à **idade de reforma** e à **estratégia de alocação de activos**.

Taxa de Contribuição

Existem diversas formas de definir a taxa de contribuição e que vão ser objecto de estudo nesta dissertação: pode ser fixa durante todo o período, pode ser indexada à idade do indivíduo ou, em alternativa, pode variar em consonância com o montante

¹ O submodelo da mortalidade, embora presente no esquema global por desempenhar um papel importante no valor da anuidade, não vai ser objecto de estudo nesta dissertação por ser um tema demasiado vasto e que sairia um pouco fora do âmbito da mesma.

acumulado e a respectiva taxa de substituição em diversos momentos. Pretende-se, com esta flexibilidade relativamente à taxa de contribuição, fazer uma análise de sensibilidade e verificar até que ponto é que um desenho mais complexo em termos da taxa de substituição pode providenciar um nível de benefícios mais elevado.

Idade de reforma

Apesar de não ser tão importante como os outros dois parâmetros, continua a ser um parâmetro relevante no desenho do plano, pois a antecipação da idade da reforma pode revelar-se como um factor inibidor da qualidade dos benefícios atribuídos pelo plano de contribuição definida.

Estratégia de Alocação de Activos

O outro parâmetro – estratégia de alocação de activos – diz respeito à escolha da composição da carteira de activos do fundo de pensões e representa, neste modelo, a variável de controlo mais importante.

As contribuições do empregador são responsáveis pela alimentação do fundo de pensões, no entanto, a forma como o valor do fundo evolui vai depender da selecção da proporção a investir em cada um dos activos disponibilizados pelo mercado financeiro.

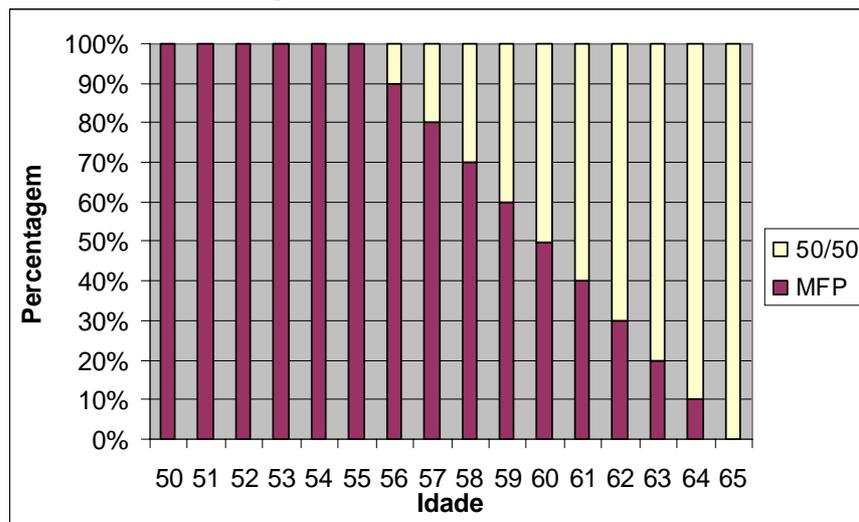
Da gestão dos fundos de pensões, mais de 90% da boa performance do fundo depende da estratégia de alocação – por exemplo, 30% em acções, 20% em obrigações de curto prazo e 50% em obrigações de longo prazo – enquanto a tática de alocação – por exemplo, dos 30% em acções 15% é feito na acção A, 35% na acção B e 50% na acção C – é responsável pela restante parte. Assim se justifica a importância da selecção deste parâmetro em detrimento de outros.

As estratégias de alocação de activos que vão ser estudadas são:

- a) **50/50** – Estratégia de baixo risco (mais conservadora) que consiste em investir 50% do fundo em obrigações de curto prazo (Numerário) e os restantes 50% em obrigações de longo prazo. É, portanto, uma estratégia estática (porque se mantém fixa ao longo do período de acumulação) de baixo risco porque os activos considerados possuem um rendimento médio que não está sujeito a grande variabilidade.

- b) **Média Fundo de Pensões (MFP)** – Estratégia associada a um perfil de risco mais elevado que se baseia na alocação média dos fundos de pensões no Reino Unido.² A característica fundamental inerente a esta estratégia reside no elevado peso atribuído a activos financeiros que apresentam uma rendibilidade média superior, à qual está associada uma maior variabilidade (leia-se maior risco).
- c) **Ciclo de Vida** – Estratégia que consiste em escolher a estratégia **MFP** durante os primeiros anos de acumulação e, à medida que se aproxima a idade de reforma, fazer uma transição de 5 ou 10% por ano para a estratégia **50/50**. O Gráfico 1 evidencia a composição da estratégia do ciclo de vida em cada uma das estratégias estáticas **50/50** e **MFP**, para o caso em que a transição é feita por um período de 10 anos.

Gráfico 1 – Estratégia do ciclo de vida



Esta estratégia é designada como estratégia de ciclo de vida, pois tem em consideração o perfil de risco em cada um dos momentos do ciclo de vida. Assim, à medida que a idade vai avançando e o momento de reforma se vai

² A utilização da estratégia de alocação média do Reino Unido em detrimento da alocação média em Portugal deve-se ao facto de este país possuir um peso médio em acções bem superior - que vai ao encontro ao perfil de risco (elevado) pretendido. Assim, por uma questão de concordância com o artigo que serviu de base a esta parte da dissertação - Blake, D., Cairns, A. e Dowd, K., (2001) - decidiu-se manter a designação original aí utilizada.

aproximando os indivíduos tendem a escolher uma estratégia com menor risco, daí a suave transição para a estratégia **50/50**.

d) Nível de Benefício – Estratégia que consiste em verificar qual o nível de financiamento relativamente a um patamar superior (P_S) e a um patamar inferior (P_I) e, consoante este nível, fazer a respectiva proporção nas duas estratégias estáticas **50/50 e MFP**. Neste contexto, o nível de financiamento traduz-se por taxa de substituição.

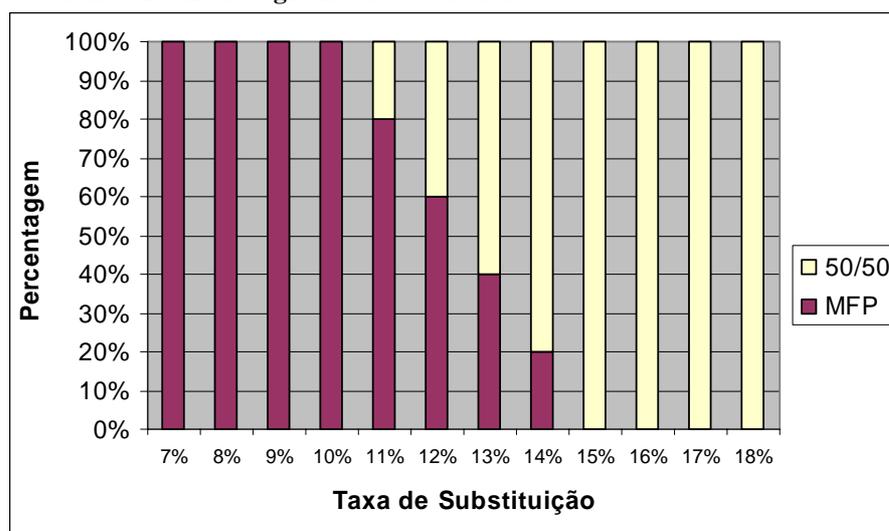
Na prática, a definição do patamar superior e inferior depende do desenho do plano que se está a elaborar e, acima de tudo, vai depender de qual é o objectivo (*target*) do plano em termos de benefício que deverá providenciar. Por exemplo, se o objectivo final é conseguir uma taxa de substituição à volta dos 15% e a taxa de contribuição é de 3%, então, como valores possíveis para P_S e P_I temos 0,15 e 0,1. O patamar superior representa o objectivo a atingir enquanto o patamar inferior representa o benefício mínimo que o plano deve conceder, a partir do qual o grau de aversão ao risco torna-se maior no sentido de preservar os benefícios entretanto adquiridos.

Para melhor compreender esta estratégia, coloquemos a questão de uma outra forma. A estratégia consiste em:

- Investir 100% na carteira **MFP** se a taxa de substituição for inferior a P_I .
- Investir 100% na carteira **50/50** se a taxa de substituição for superior a P_S .
- Aumentos lineares na carteira **50/50** à medida que a taxa de substituição aumenta de P_I para P_S .

Um exemplo ajudará certamente a clarificar a questão. Tome-se o exemplo acima descrito para P_I e P_S e considere-se um aumento linear de 20% para a carteira **50/50** por cada 1% de aumento da taxa de substituição. O Gráfico 2 sintetiza toda esta informação.

Gráfico 2 – Estratégia nível de benefício



Em resumo, as estratégias de alocação **a)** e **b)** são estáticas porquanto permanecem constantes ao longo do período de análise, enquanto que as estratégias **c)** e **d)** são dinâmicas porque o peso atribuído às estratégias **a)** e **b)** varia nesse mesmo período. No que respeita às últimas estratégias, estas subdividem-se ainda em dois tipos – as que dependem da evolução do valor do fundo (estratégia **d)**) e as que não dependem (estratégia **c)**).

5.2.2 SUBMODELOS

O modelo geral do desenho estocástico de planos de contribuição definida, como de resto já foi referido acima, é composto por dois submodelos – o dos **salários** e o de **retorno dos investimentos**. Atendendo a que estes submodelos, com especial referência ao submodelo de retorno dos investimentos, são de alguma complexidade e dado o tratamento mais cuidado que requerem, entendeu-se por bem desenvolver estes temas numa outra Parte. A discussão destes submodelos numa Parte própria faz todo o sentido, visto que eles são o núcleo / motor de funcionamento do modelo global. Desta forma, remetemos o leitor para a Parte III onde estes submodelos são apresentados e discutidos.

Parte III – Submodelos dos Salários e de Retorno dos Investimentos

Nesta Parte abordar-se-ão questões mais técnicas uma vez que serão analisados em detalhe os submodelos que permitem a geração de variáveis fundamentais ao modelo global, como sejam os salários, os vários activos financeiros (acções, obrigações de taxa fixa e indexada, numerário...) a inflação e as taxas de juro.

Contudo, e ainda antes de passar à descrição dos submodelos, considerou-se importante fazer uma breve alocação a estes modelos, à sua origem, ao seu objectivo e às suas propriedades fundamentais.

6. ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE MODELOS

A maioria dos modelos que os actuários e os analistas financeiros têm à sua disposição surgiram da necessidade que estes sentiram de compreender, analisar e resolver os problemas intrínsecos à sua actividade. O elemento central e fundamental de todos estes problemas é o **risco**, dado que a gestão do risco é o *core business* dos actuários e dos analistas financeiros.

A utilização de modelos como forma de analisar determinadas realidades encontra-se em plena ascensão e é o fruto de duas tendências importantes: a constante inovação tecnológica dos computadores, que permitiu um aumento exponencial da capacidade de cálculo, e o aumento da investigação (estudos académicos) relacionados com estas temáticas. Note-se que esta produção de conhecimentos foi motivada por diferentes necessidades, ou seja, os *traders* por procurarem novas técnicas de determinação de preços, troca e cobertura (*hedging*) de uma panóplia de novos instrumentos financeiros, os economistas que procuram formas de fazer previsão e os actuários que tentam conjugar diferentes focos de incerteza para fazer planeamento a longo prazo.

Na maioria dos casos, estes estudos tendem a debruçar-se sobre problemas específicos, ou seja, apenas sobre uma parte de um problema mais genérico. É por isso comum verem-se estudos sobre o movimento do preço das acções, sobre as estruturas de termo

das taxas de juro ou sobre modelização da taxa de inflação, no entanto, são menos frequentes os estudos sobre a conjugação destas várias componentes num único modelo de forma consistente.

É precisamente nestes modelos, em que é necessário compreender o comportamento conjunto das variáveis relevantes, que se concentrarão os esforços na presente dissertação.

6.1 PROPRIEDADES DOS BONS MODELOS

Um modelo é uma versão simplificada da realidade que deve capturar as características fundamentais do problema de modo a permitir o seu entendimento ajudando à sua solução. Mas como não é possível obter um modelo que consiga satisfazer os requisitos para modelizar todos os problemas com que os analistas financeiros e actuários se deparam, estes construíram diversos modelos para responder a cada tipo de problema em que se concentram.

Por conseguinte, a questão que se coloca é: se existem vários modelos quais os factores / critérios que devem estar na origem da selecção de um modelo em detrimento de outro? De seguida, são referidos alguns dos atributos que os bons modelos devem possuir.

a) Representatividade – Um bom modelo deve providenciar, o mais fiel possível, uma representação dos activos financeiros que modeliza. A ideia subjacente é que o modelo deve replicar o comportamento real (nos mercados) do activo financeiro, através da captura das suas características mais importantes.

O objectivo é poder olhar para as simulações produzidas e verificar se estas são plausíveis e se as frequências imputadas a determinados resultados são razoáveis ou não. Para tal, é necessário analisar a forma das distribuições em diferentes horizontes temporais e verificar as relações entre as variáveis.

b) Interpretação Económica – O comportamento dos activos financeiros definidos no modelo devem ser consistentes com os princípios económicos genericamente aceites. Uma das principais características que um modelo desta

natureza possui é ser livre de arbitragem (*arbitrage-free*), o que em termos económicos se traduz no célebre princípio de que não existem almoços grátis na economia. Por outro lado, o comportamento conjunto das variáveis modeladas deve ser consistente com os princípios económicos fundamentais. Porém, é conveniente salientar que não existe consenso em algum destes princípios.

- c) **Parcimónia** – Os modelos devem ser o mais simples possível mas retendo as características fundamentais do problema. A complexidade a considerar nos modelos deve ser analisada, uma vez que não faz sentido criar um modelo que seja o mais detalhado possível numa determinada área e depois se assumir hipóteses muito simplistas noutras. A qualidade do modelo vai ser avaliada pela sua área mais fraca. Por vezes a modelização de uma determinada realidade torna-se tão complexa e com base em tantos parâmetros que o modelo acaba por dar mais importância aos pequenos aspectos e perder a coerência global e as suas características fundamentais.
- d) **Transparência** – Se não se conseguir explicar o modelo em poucos minutos torna-se difícil ganhar a confiança de todos aqueles que não são peritos na matéria. Portanto, o bom modelo é aquele que permite disponibilizar os resultados e as conclusões de forma simples e clara.
- e) **Flexibilidade** – Como a realidade é difícil de modelizar de uma só vez, é necessário que o modelo seja suficientemente flexível para que se possa ir ajustando, ao longo do tempo, de modo a introduzir novas características que permitam melhorar a modelização da realidade.
- f) **Formas de implementação** – Os modelos podem ser implementados de diversas formas, cada qual com as suas vantagens e desvantagens. O facto de o modelo pode ser implementado de diversas formas vai enriquecer as opções, aumentando a flexibilidade, daquele que pretende implementar um modelo. Na prática, os modelos são implementados recorrendo a mais do que uma forma de implementação. Vejamos algumas destas formas de implementação:

- i) – Através de cálculos analíticos onde é possível obter funções matemáticas que descrevam as variáveis de interesse. Esta solução é apenas possível para um número pequeno de problemas.
- ii) – Através de testes (para tal utilizando a estrutura do modelo) aos dados passados das variáveis que se pretende modelizar e intrinsecamente assumindo que o futuro se vai comportar à semelhança do que aconteceu no passado.
- iii) – Através da análise determinística de cenários, ou análise de sensibilidade, na qual são verificados, caso a caso, uma série de cenários relevantes.
- iv) – Através de técnicas de construção de árvores binárias onde os cenários são criados na forma de uma árvore. Esta técnica é aplicável se e só se o modelo tiver um número reduzido de factores estocásticos.
- v) – Através da simulação estocástica de Monte-Carlo, na qual são gerados, por um computador, um grande número de cenários possíveis. Nesta situação já é possível trabalhar com um grande número de factores estocásticos.

6.2 CALIBRAÇÃO E ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DOS MODELOS

A incerteza subjacente à implementação de um modelo como forma de descrição de uma realidade advém de duas fontes: do próprio modelo e dos seus parâmetros. A incerteza relativamente ao modelo pode ser descrita como a incerteza que deriva da adequabilidade do modelo em descrever uma determinada realidade. No entanto, mesmo que o modelo seja o adequado ainda existe outra fonte de incerteza que resulta da estimação dos parâmetros desse modelo.

Os cenários gerados por um modelo estocástico dependem da estrutura do modelo e dos parâmetros desse modelo. A calibração de um modelo é o processo pelo qual o modelizador determina o valor dos parâmetros do modelo que pretende implementar. A calibração / estimação dos parâmetros é uma das etapas mais difíceis na construção de um modelo e é considerada por muitos como uma arte.

Vejamos, de seguida, algumas formas distintas de calibração do modelo.

6.2.1 DADOS EMPÍRICOS

A mais comum das formas de calibração deste tipo de modelos consiste em olhar para as séries temporais, analisar o comportamento passado das variáveis e fazer com que os resultados gerados pelo modelo repliquem o seu comportamento.

A calibração de modelos, segundo esta metodologia, pressupõe que se tomem determinados caminhos, isto é, que se façam escolhas nos horizontes temporais a considerar nas séries (se a partir de 1925, se a partir de 1945...), na selecção do tipo de valores (se tomam os valores das taxas de juro ou se analisam a distribuição de frequências da taxa de juro). O estudo destas séries passa igualmente pela análise da variação (volatilidade) das diversas variáveis durante diversos períodos.

6.2.2 DADOS DE MERCADO

Uma alternativa à calibração de modelos utilizando dados históricos baseia-se na observação dos dados de mercado e no uso desta informação para determinar os parâmetros apropriados. O princípio subjacente a esta metodologia reside no facto de se considerar que os activos disponíveis no mercado e os preços dos derivados contêm informação que pode ser usada na calibração do modelo.

Para um melhor entendimento desta questão tome-se o exemplo das estruturas de termo da taxa de juro. É possível analisar as curvas da taxa de rendimento (*yield curves*) das obrigações de curto e/ou longo prazo e à luz das diversas teorias sobre a *yield curve*³ (*expectations theory*, *liquidity premium* e *preferred habit theory*) obter informações para a determinação dos parâmetros do modelo. Outro dos exemplos desta metodologia consiste na utilização da volatilidade implícita nas opções para, ao fazer variar o preço de exercício (*strike price*), obter a distribuição de probabilidade do activo em estudo.

³ Disponível em qualquer livro sobre teoria financeira. Veja-se, por exemplo, Elton, E., Gruber, M. (1991).

6.2.3 OPINIÃO DOS PERITOS

Finalmente, e esta não é tanto uma forma de calibração mas antes uma forma de verificação da mesma, existe ainda uma fonte de informações que pode ser utilizada para julgar a razoabilidade das distribuições geradas pelo modelo.

Em termos práticos é possível recolher informações sobre estimativas de previsão fornecidas por entidades independentes, como, por exemplo, os intervalos de confiança da inflação futura publicados por alguns dos bancos centrais (Banco de Inglaterra por exemplo).

Embora não exista uma regra clara de como incorporar a opinião de peritos na calibração dos processos (a aproximação Bayesiana pode ser uma das soluções) é fácil compreender o potencial valor que estas informações podem transpor para os modelos. Para situações onde se utilize parâmetros estimados com base em dados históricos, estas opiniões são úteis como forma de verificação do risco de utilizar essas estimativas.

As três referências acima apresentadas relativamente à forma de calibração / estimação dos parâmetros dos modelos são apenas uma breve introdução a este problema.

De facto, o problema da estimação destes parâmetros, independentemente da abordagem escolhida, é matéria suficiente para outra dissertação. Portanto, uma vez que o objectivo desta dissertação não é inferir única e exclusivamente sobre a calibração / estimação dos parâmetros, e dado que é necessário limitar o âmbito do estudo, optou-se por não se proceder à calibração dos modelos, que serão apresentados nos capítulos seguintes, pelo que se utilizarão os parâmetros sugeridos pelos autores dos respectivos modelos, fazendo apenas algumas modificações em alguns dos parâmetros.

7. SUBMODELOS DE RETORNO DOS INVESTIMENTOS

Como referenciado no capítulo anterior, o actuário tem hoje uma razoável amplitude de modelos financeiros de longo prazo ao seu dispor. Em termos europeus (e também em

termos mundiais) o país que se encontra na vanguarda, no que toca a estes modelos de retorno de investimentos a longo prazo, é o Reino Unido.

Uma pesquisa mais cuidada em relação a este tema revela uma série de modelos disponíveis sobre os quais se vai fazer uma breve indicação⁴. De seguida, apresenta-se alguns modelos:

- a) *Wilkie Model*⁵(versão original);
- b) Variação do *Wilkie Model*, que utiliza modelos ARCH;
- c) *Random Walk Model*, descrito por Smith;
- d) *Smith's jump diffusion Model*;
- e) *TY Model* de Yakoubov, Teeger & Duval⁶;
- f) *Cairn's Model*;
- g) *Whitten and Thomas Model*;
- h) *Hibbert Model*⁷.

Como seria de esperar existe uma série de características que são comuns a uns modelos e diferentes noutros. Analisem-se algumas dessas características:

- ✎ Um factor comum a todos os modelos acima apresentados consiste no facto de todos eles terem sido desenhados para funcionar através de simulação de *Monte-Carlo*. São raras, excepto para alguns modelos e em condições muito específicas, as situações em que é possível tratar analiticamente os problemas.
- ✎ Os incrementos de tempo utilizados na maioria dos modelos são definidos em termos anuais, daí que estes modelos não sejam apropriados para a determinação de preços de derivados, uma vez que foram desenhados como modelos financeiros de longo prazo. As excepções são os modelos d), f) e h) que são modelos em tempo contínuo e como tal podem ter incrementos de qualquer tipo (mensal, bimensal...).

⁴ Para uma análise mais detalhada destes modelos veja-se Lee (2000).

⁵ Para uma análise mais detalhada deste modelo veja-se Wilkie (1995)

⁶ Para uma análise mais detalhada deste modelo veja-se Yakoubov (1999)

⁷ Para uma análise mais detalhada deste modelo veja-se Hibbert (2001)

- ✦ Em relação às variáveis dos modelos, estas distinguem-se entre aquelas que são modelizadas de forma directa pelas equações fundamentais do modelo e aquelas que são modelizadas indirectamente. Outro dos factores que também permite distinguir os modelos é o número de inovações⁸ de cada modelo. Na prática, as características acima apresentadas permitem analisar a estrutura de cada um dos modelos e aferir da sua complexidade, assim como avaliar a qualidade dos modelos à luz do número de activos financeiros modelizados.

Tendo em conta o que foi acima descrito (no Capítulo 6.2), em relação à incerteza dos modelos é, portanto, natural que se considere (nesta dissertação) mais do que um modelo, pois só assim é possível comparar a adequação de cada um dos modelos à realidade.

A escolha do primeiro modelo incidiu sobre o **Modelo de Wilkie**, sendo esta decisão fundamentada na popularidade que o modelo conseguiu reunir entre os actuários e pela consistência que apresenta nas relações entre as diversas variáveis modelizadas. Saliente-se que este modelo funciona, na prática, como modelo de referência (*benchmark*) sobre o qual são feitas comparações para todos os novos modelos que surgem.

Relativamente ao segundo modelo, ao seleccionar-se o **Modelo de Hibbert** pretendeu-se investigar um modelo com uma estrutura e uma dinâmica de construção diferente. Como os dois modelos assentam em fundamentações matemáticas distintas, o primeiro é um modelo em tempo discreto que faz uso da análise de séries temporais para determinação dos parâmetros das equações dos vários activos modelizados enquanto o segundo é um modelo em tempo contínuo que assenta em equações diferenciais estocásticas como forma de modelizar os diversos activos. Assim, o estudo é enriquecido pois pode-se verificar como os dois modelos respondem a uma mesma

⁸ Entende-se por inovações (*innovations*) os valores aleatórios gerados (assume-se a hipótese de que são independentes e identicamente distribuídos e, normalmente, tem uma distribuição Normal de média 0 e desvio padrão 1) que permitem definir os incrementos nas diversas variáveis.

realidade e como os resultados finais são afectados pela escolha de um modelo em detrimento de outro.

7.1 SUBMODELO DE WILKIE

O Modelo de Wilkie apresenta já alguma maturidade, pois os primeiros artigos deste autor remontam à década de 80 onde foi apresentada uma primeira versão do modelo. Esta primeira versão modelizava variáveis como a inflação, os dividendos das acções, a taxa de rendimento das acções e taxas de juro de longo prazo.

Contudo, o que viria a ser conhecido como “*The Wilkie Investment Model*” (tal como o conhecemos hoje) foi apresentado em 1995 no *British Actuarial Journal*. Face à versão anterior, os parâmetros foram reestimados com base em novas séries temporais actualizadas até 1994, foram introduzidos modelos para os salários, taxas de juro de curto prazo, imobiliário, obrigações de taxa indexada (*index-linked bonds*) e ainda um modelo para as taxas de câmbio.

Desde 1995 a estrutura dos modelos dos diversos activos mantiveram-se mais ou menos constantes (algumas das equações sofreram pequenas alterações) embora tivessem existido diversas parametrizações, feitas com base na incorporação dos dados mais recentes nas séries temporais.

De seguida, apresentam-se as equações que permitem modelizar os retornos dos diversos activos financeiros, necessários para o modelo global, tal como descrito no Capítulo 5.2.2. De todos os modelos, de activos financeiros, apresentados por Wilkie apenas um vai ser excluído – o modelo das taxas de câmbio – por sair um pouco fora do âmbito desta dissertação. Assim, num contexto de União Económica e Monetária (UEM) em que existe uma moeda única – o Euro – e mesmo tendo em conta a exclusão do Reino Unido da UEM, a modelização de taxas de câmbio não se considera justificável. No final deste capítulo (subcapítulo 7.1.8), após a apresentação de todas as equações, vai ser mostrada a parametrização do modelo – e os resultados que o modelo produz para as suas variáveis.

Para cada uma das variáveis fundamentais do modelo, que se apresentam de seguida, a metodologia de apresentação consiste na enunciação da(s) equação(s) que descreve o seu comportamento (bem como de uma descrição sintética das variáveis que a compõem), da explicação da racionalidade subjacente ao modelo e por fim a descrição das condições iniciais necessárias para a simulação de valores futuros. Com o intuito de tornar simples a compreensão da dinâmica das equações foram ainda adicionados exemplos de determinação das projecções das variáveis (10 anos).

Relativamente às condições iniciais, convém salientar que para determinados modelos, como, por exemplo, os AR(1), o valor inicial pode ter um impacto na evolução dos valores simulados, principalmente nos primeiros anos. Existem duas formas distintas de atribuir valores iniciais: ou se escolhem os valores efectivos das variáveis à data da simulação (que no fundo espelha as condições de mercado) ou se atribuem às variáveis o valor da sua média incondicional (normalmente designadas por condições iniciais neutras). Na presente dissertação, optou-se por considerar condições iniciais neutras.

Antes de prosseguir é conveniente chamar a atenção para o facto de o modelo de Wilkie possuir uma notação um pouco complexa.

7.1.1 INFLAÇÃO

Seja $Q(t)$ o valor do índice de preços do consumidor (IPC – variável que descreve a variação de preços de uma economia, ou seja, a inflação) no momento t , então, a equação que descreve o seu comportamento é dada por:

$$Q(t) = Q(t-1) \cdot \exp\{I(t)\}$$

onde $I(t) = \ln Q(t) - \ln Q(t-1)$ é taxa de inflação durante o ano $t-1$. $I(t)$ por sua vez é dado por:

$$(1) \quad I(t) = QMU + QA[I(t-1) - QMU] + QSD \cdot QZ(t)$$

em que:

QMU – Taxa de inflação média;

QA – Parâmetro autoregressivo para a inflação;

QSD – Desvio padrão da inflação;

$QZ(t) \sim \text{iid } N(0,1)$ – Sucessão de valores de uma variável aleatória independente e identicamente distribuída segundo uma Normal estandardizada;

$QE(t) = QSD.QZ(t)$ – Resíduo aleatório.

O modelo para a variação dos preços descrito pela equação (1) estabelece que a variação, em logaritmo, do IPC pode ser modelizada como um modelo autoregressivo de primeira ordem, isto é, a série temporal dos logaritmos do IPC tem média e variância constantes no longo prazo. Fazendo uso da notação da análise de séries temporais (Capítulo 3.1) o modelo pode ser descrito como $I(t) \sim \text{AR1}(QMU, QA, QSD)$.

Wilkie estabeleceu que a inflação esperada para um dado ano é o resultado do seu valor médio (taxa de inflação esperada de longo prazo – QMU) conjugado com o efeito do desvio em relação à média do período anterior ($QA.[I(t-1) - QMU]$). Contudo, a variação da inflação incorpora ainda um factor de incerteza, razão pela qual se adiciona $QE(t)$ (factor aleatório de média zero e desvio padrão QSD).

Quadro 1 – Exemplo do processo de determinação da taxa de inflação

| (1) $I(t) = QMU + QA.[I(t-1) - QMU] + QE(t)$ | | | | | | |
|--|---------|-----------|----------|----------|-------------------|----------|
| | | Termo (t) | QZ(t) | QE(t) | QA.[I(t-1) - QMU] | I(t) |
| Parâmetros | | 0 | | | | 0,02469 |
| QMU | 0,02469 | 1 | 0,90851 | 0,01635 | 0,00000 | 0,04105 |
| QA | 0,58 | 2 | -0,22209 | -0,00400 | 0,00948 | 0,03018 |
| QSD | 0,018 | 3 | -0,37424 | -0,00674 | 0,00318 | 0,02114 |
| I(0) | 0,02469 | 4 | 0,96356 | 0,01734 | -0,00206 | 0,03998 |
| | | 5 | -0,67334 | -0,01212 | 0,00886 | 0,02144 |
| | | 6 | -1,58720 | -0,02857 | -0,00189 | -0,00577 |
| | | 7 | 1,39394 | 0,02509 | -0,01767 | 0,03212 |
| | | 8 | -0,28371 | -0,00511 | 0,00431 | 0,02389 |
| | | 9 | 0,25404 | 0,00457 | -0,00046 | 0,02880 |
| | | 10 | -0,61084 | -0,01100 | 0,00238 | 0,01608 |

Em termos práticos, para estimar o vector futuro das variações anuais dos preços é necessário estabelecer uma condição inicial, $I(t)$ para $t = 0$, e gerar os valores $QZ(t)$ de acordo com a variável aleatória Normal de média zero e desvio padrão unitário.

O Quadro 1, que apresenta o processo de determinação da taxa de inflação, permite ganhar alguma sensibilidade quantitativa relativamente ao modelo apresentado.

7.1.2 SALÁRIOS

Para fazer a estimação dos valores futuros das variações salariais anuais vai recorrer-se, tal como no caso da inflação, à utilização de um índice para os salários. O valor do índice dos salários no momento t é dado pela variável $W(t)$ enquanto $J(t) = \ln W(t) - \ln W(t-1)$ representa a taxa de crescimento salarial do ano $t-1$ para o ano t .

No entanto, a equação que modeliza a variação salarial é um pouco mais complexa que a sua congénere da inflação dado que o modelo utilizado por Wilkie incorpora uma função de transferência. Isto significa que o comportamento dos salários vai depender do comportamento da inflação, porém, essa transferência é feita apenas num sentido (inflação \rightarrow salários), pois, como vimos no subcapítulo anterior os salários não exercem qualquer influência na determinação dos valores da inflação. Note-se que o modelo apresentado para os salários estabelece apenas uma relação de curto prazo entre inflação e salários, pois admitiu-se que não existia cointegração entre salários e inflação (relação de longo prazo).

Assim, como modelo para a variação salarial anual tem-se:

$$(2) \quad J(t) = WW1.I(t) + WW2.I(t-1) + WMU + WSD.WZ(t)$$

onde:

$WW1$ – Factor para a inflação do ano t ;

$WW2$ – Factor para a inflação do ano $t-1$;

WMU – Taxa de crescimento salarial real média;

WSD – Desvio padrão da média da taxa de crescimento salarial real;

$WZ(t) \sim \text{iid } N(0,1)$ – Sucessão de valores de uma variável aleatória independente e identicamente distribuída segundo uma Normal estandardizada;

$WE(t) = WSD.WZ(t)$ – Resíduo aleatório.

A equação pode ser descrita da seguinte forma: o crescimento salarial no período t é determinado por $WW1$ do valor da inflação do período t , por $WW2$ do valor da inflação do período $t-1$, ao qual se adiciona o valor médio do crescimento salarial real (WMU) e

ainda um resíduo aleatório com distribuição Normal de média zero e desvio padrão WSD . O crescimento salarial anual, em termos nominais, resulta da soma de dois factores: um crescimento real dos salários que incorpora a progressão na carreira e os ganhos de produtividade, baseado numa taxa de crescimento de longo prazo (WMU) ao qual é adicionado um factor de incerteza dado por $WE(t)$; e uma influência da inflação que representa o crescimento do salário por ajustamento da inflação.

O vector das variações anuais futuras dos salários é obtido a partir dos valores de $I(t)$ e $I(t-1)$, sendo necessário para o primeiro período fazer uso da condição inicial $I(t)$ para $t=0$, e da geração sucessiva de valores para a variável aleatória $WZ(t)$ que seguem uma distribuição Normal de média zero e desvio padrão unitário. O Quadro 2 exemplifica o processo de determinação do salário subjacente à equação (2).

Quadro 2 – Exemplo do processo de determinação da taxa de crescimento salário

| | | Termo (t) | WZ(t) | WE(t) | WW1.I(t) | WW2.I(t-1) | J(t) |
|--|---------|--------------|----------|----------|----------|------------|---------|
| (2) $J(t) = WW1.I(t) + WW2.I(t-1) + WMU + WE(t)$ | | 0 | | | | | |
| Parâmetros | | | | | | | |
| WW1 | 0,6 | 1 | 1,48343 | 0,02596 | 0,02463 | 0,00667 | 0,07781 |
| WW2 | 0,27 | 2 | 0,53685 | 0,00939 | 0,01811 | 0,01108 | 0,05914 |
| WMU | 0,02056 | 3 | -0,21202 | -0,00371 | 0,01268 | 0,00815 | 0,03768 |
| WSD | 0,0175 | 4 | 0,08420 | 0,00147 | 0,02399 | 0,00571 | 0,05173 |
| | | 5 | -0,82222 | -0,01439 | 0,01286 | 0,01079 | 0,02983 |
| | | 6 | 1,76572 | 0,03090 | -0,00346 | 0,00579 | 0,05379 |
| | | 7 | -1,18217 | -0,02069 | 0,01927 | -0,00156 | 0,01758 |
| | | 8 | 0,68681 | 0,01202 | 0,01434 | 0,00867 | 0,05559 |
| | | 9 | 0,19497 | 0,00341 | 0,01728 | 0,00645 | 0,04770 |
| | | 10 | -0,41246 | -0,00722 | 0,00965 | 0,00778 | 0,03077 |

7.1.3 ACCÇÕES

No submodelo de retorno do investimento de Wilkie, o retorno total das acções durante o ano t é dado pela variação conjunta do índice de preços das acções $P(t)$ e do índice dos dividendos das acções (*share dividend index*) $D(t)$, expressos na equação seguinte

$$(3) \quad RT P(t) = [P(t) + D(t)] / P(t-1) - 1$$

Por sua vez, $P(t)$ é dada pelo rácio entre o índice de dividendos das acções e a taxa de rendimento das acções $Y(t)$ (*share yields*):

$$(4) \quad P(t) = D(t) / Y(t)$$

A taxa de rendimento das acções é determinada a partir do rácio entre os dividendos e o preço da acção, isto é, $Y(t) = D(t) / P(t)$. A racionalidade económica subjacente a esta equação baseia-se na constatação que a taxa de rendimento de uma acção é dada pelo rácio entre os rendimentos (dividendos) que ela possa gerar sobre o que ela custa (preço). A utilização da equação (4) em vez desta, uma vez que são equivalentes, prende-se com o facto de ser mais simples estimar os dividendos das acções e a taxa de rendimento das mesmas e a partir daí estabelecer o preço em função dessas variáveis.

Por sua vez, os rendimentos totais das acções são dados pela variação do preço das acções entre t e $(t-1)$. No entanto, como a detenção das acções gera um rendimento (os dividendos que são pagos), estes rendimentos terão igualmente de ser considerados – daí a expressão da equação (3).

Como estas duas variáveis ($D(t)$ e $Y(t)$) têm comportamentos diferentes, as equações que as modelizam são, como não podia deixar de ser, distintas. De seguida, são apresentados os respectivos modelos.

A consistência do modelo para o retorno total das acções assenta na relação estacionária entre os preços e os dividendos das acções. A argumentação desta relação deve-se à não existência de cointegração (com base em testes que o autor do modelo realizou) entre a série dos logaritmos dos preços das acções e dos dividendos das acções.

Taxa de Rendimento das Acções

O modelo para a taxa de rendimento das acções é sintetizado na seguinte equação:

$$Y(t) = \exp\{YW.I(t) + \ln YMU + YN(t)\}$$

ou em termos equivalentes:

$$(5) \quad \ln Y(t) = YW.I(t) + \ln YMU + YN(t)$$

no qual:

YW – Factor para a inflação do ano t ;

YMU – Média da taxa de rendimento das acções, excluída do efeito da inflação;

$$YN(t) = YA.YN(t-1) + YSD.YZ(t)$$

YA – Parâmetro autoregressivo para o desvio em relação à média do logaritmo da taxa de rendimento das acções do ano $t-1$;

YSD – Desvio padrão do resíduo aleatório;

$YZ(t) \sim \text{iid } N(0,1)$ – Sucessão de valores de uma variável aleatória independente e identicamente distribuída segundo uma Normal estandardizada;

$YE(t) = YSD.YZ(t)$ – Resíduo aleatório.

A explicação desta equação reside no argumento de que o logaritmo da taxa de rendimento das acções é igual à sua média (em logaritmo), mais uma influência adicional da inflação do respectivo período, acrescida de YA do seu desvio em relação à média relativo ao período anterior ($YN(t-1)$) e ainda de um resíduo aleatório de média zero e desvio padrão YSD . Deste modo, o modelo para a taxa de rendimento das acções é relativamente simples, pois considera que a taxa de rendimento das acções resulta de uma influência da inflação, da variação da taxa de rendimento das acções face à média para o período anterior e de uma componente aleatória com elevado grau de incerteza (o parâmetro YSD é geralmente elevado). A variação da taxa de rendimento do período anterior pode ser interpretada como a influência da conjuntura económica (com um desfaseamento de um ano). A influência da inflação é apropriada, pois permite garantir que em caso de inflação elevada os preços das acções baixam e consequentemente a taxa de rendimento sobe.

Na prática, para obter os valores projectados desta variável é necessário estipular uma condição inicial para $YN(t-1)$. Assim, assumindo que $Y(0) = \exp\{YW.QMU\}.YMU$ resolve-se a equação (5) em ordem a $YN(0)$ (uma vez que todas as outras variáveis têm valores já conhecidos) e obtém-se a condição inicial pretendida. Para calcular as restantes projecções da taxa de rendimento das acções é apenas necessário determinar o

desvio do ano anterior ($YN(t-1)$) e gerar os valores da variável aleatória independente e identicamente distribuída (com distribuição $N(0, YSD^2)$) $YZ(t)$.

Dividendos das Acções

A seguinte equação modeliza o comportamento do índice dos dividendos das acções:

$$D(t) = D(t-1).exp\{K(t)\}$$

onde $K(t) = \ln D(t) - \ln D(t-1)$ é a variação anual, em logaritmo, dos dividendos das acções. $K(t)$ é dado por:

$$(6) \quad K(t) = DW.DM(t) + (1 - DW).I(t) + DMU + DY.YSD.YZ(t-1) + \\ + DB.DSD.DZ(t-1) + DSD.DZ(t)$$

em que:

DW – Factor para a inflação do ano t ;

$$DM(t) = DD.I(t) + (1 - DD).DM(t-1)$$

DD – Factor de desfasamento da inflação;

DMU – Média do crescimento real dos dividendos das acções;

DY – Factor para a taxa de rendimento das acções;

DB – Factor de desfasamento para o resíduo dos dividendos das acções do ano $t-1$;

DSD – Desvio padrão do resíduo aleatório;

$DZ(t) \sim iid N(0,1)$ – Sucessão de valores de uma variável aleatória independente e identicamente distribuída segundo uma Normal estandardizada;

$DE(t) = DSD.DZ(t)$ – Resíduo aleatório.

Wilkie explica o modelo de dividendos das acções através da inflação, do crescimento real dos dividendos das acções, da taxa de rendimento, do resíduo dos dividendos das acções do período anterior e ainda de um factor aleatório.

Quadro 3 – Exemplo do processo de determinação do retorno total das acções

| | | | | | | | |
|-------------------|---------|---|--------------|----------------|----------------|--------------|-------------|
| (5) | | $\ln Y(t) = YW.I(t) + \ln YMU + YN(t)$ | | | | | |
| | | $YN(t) = YA.YN(t-1) + YE(t)$ | | | | | |
| | | Termo (t) | YZ(t) | YE(t) | YW.I(t) | YN(t) | Y(t) |
| Parâmetros | | 0 | | 0,00000 | | 0,00000 | 0,02630 |
| YW | 1,8 | 1 | -0,05704 | -0,00884 | 0,07388 | -0,00884 | 0,02685 |
| YA | 0,55 | 2 | 0,08988 | 0,01393 | 0,05432 | 0,00907 | 0,02680 |
| YMU | 0,02516 | 3 | 0,79753 | 0,12362 | 0,03805 | 0,12861 | 0,02972 |
| YSD | 0,155 | 4 | 0,95668 | 0,14828 | 0,07196 | 0,21902 | 0,03365 |
| YN(0) | 0,00000 | 5 | -1,07627 | -0,16682 | 0,03859 | -0,04636 | 0,02496 |
| Y(0) | 0,02630 | 6 | 0,32018 | 0,04963 | -0,01038 | 0,02413 | 0,02550 |
| YE(0) | 0 | 7 | 0,30080 | 0,04662 | 0,05781 | 0,05990 | 0,02830 |
| | | 8 | 0,93153 | 0,14439 | 0,04301 | 0,17733 | 0,03136 |
| | | 9 | 1,19878 | 0,18581 | 0,05184 | 0,28334 | 0,03517 |
| | | 10 | -0,14522 | -0,02251 | 0,02894 | 0,13333 | 0,02959 |
| (6) | | $K(t) = DW.DM(t) + (1-DW).I(t) + DMU + DY.YSD.YZ(t-1) + DB.DSD.DZ(t-1) + DSD.DZ(t)$ | | | | | |
| | | $DM(t) = DD.I(t) + (1-DD).DM(t-1)$ | | | | | |
| | | Termo (t) | DZ(t) | DE(t) | DM(t) | K(t) | D(t) |
| Parâmetros | | 0 | | 0,00000 | 0,02469 | | 1,00 |
| DW | 0,58 | 1 | 1,28679 | 0,06434 | 0,02682 | 0,1200 | 1,1275 |
| DD | 0,13 | 2 | 1,33740 | 0,06687 | 0,02726 | 0,1564 | 1,3183 |
| DMU | 0,02283 | 3 | 0,17389 | 0,00869 | 0,02646 | 0,0914 | 1,4445 |
| DY | -0,175 | 4 | -2,75249 | -0,13762 | 0,02822 | -0,0983 | 1,3093 |
| DB | 0,57 | 5 | 0,34443 | 0,01722 | 0,02734 | -0,0395 | 1,2586 |
| DSD | 0,05 | 6 | -1,32153 | -0,06608 | 0,02303 | 0,0067 | 1,2671 |
| DM(0) | 0,02469 | 7 | 0,57862 | 0,02893 | 0,02421 | 0,0329 | 1,3095 |
| D(0) | 1 | 8 | -0,11317 | -0,00566 | 0,02417 | 0,0496 | 1,3760 |
| DE(0) | 0 | 9 | 0,65491 | 0,03275 | 0,02477 | 0,0535 | 1,4517 |
| | | 10 | 0,85668 | 0,04283 | 0,02364 | 0,0723 | 1,5605 |
| (4) | | Termo (t) | P(t) | RT P(t) | | | |
| | | | | | | | |
| | | 0 | 38,02281 | | | | |
| (3) | | 1 | 41,99519 | 0,13413 | | | |
| | | 2 | 49,18594 | 0,20262 | | | |
| | | 3 | 48,60731 | 0,01760 | | | |
| | | 4 | 38,90566 | -0,17266 | | | |
| | | 5 | 50,42076 | 0,32832 | | | |
| | | 6 | 49,67872 | 0,01041 | | | |
| | | 7 | 46,27336 | -0,04219 | | | |
| | | 8 | 43,88159 | -0,02195 | | | |
| | | 9 | 41,27242 | -0,02638 | | | |
| | | 10 | 52,74054 | 0,31567 | | | |

O raciocínio subjacente à equação (6) consiste em considerar que a variação do índice dos dividendos das acções, em logaritmo, é explicada através duma função da inflação passada e actual ($DM(t)$) adicionada da média do crescimento real (DMU), de uma

influência do resíduo aleatório do ano anterior referente à taxa de rendimento das acções (DY) e também referente ao dividendo das acções (DB), e ainda de um resíduo aleatório. O termo $DY.YSD.YZ(t-1)$ relativo à influência da variação aleatória da taxa de rendimento das acções do ano anterior, é devido, segundo o autor, ao facto dos investidores conseguirem prever alterações nos dividendos das acções e, portanto, incorporam essas expectativas nos preços das acções. Em compensação, o autor justifica o termo $DB.DSD.DZ(t-1)$ na equação (6) pela razão de que os dividendos do ano são, muitas vezes, divididos pelo ano em que foram gerados e pelo ano seguinte.

Para simular o valor do índice dos dividendos das acções para o primeiro ano é necessário estabelecer que os efeitos desfasados dos dividendos das acções e da taxa de rendimento das acções são nulos ($YZ(0) = DZ(0) = 0$) e que o factor de desfasamento da inflação é igual à média da inflação ($DM(0) = QMU$).

Relativamente às condições iniciais para a equação (3), $P(0)$ é obtido como o rácio entre $D(0)$ e $Y(0)$, onde $D(0)$ é um valor arbitrário que marca o valor inicial do índice (pode ser 1, 100 ou 1000) e $Y(0)$ é, como indicado acima, $Y(0) = \exp\{YW.QMU\}.YMU$.

O Quadro 3 apresenta um exemplo numérico de determinação do retorno total das acções, dado pela equação (3), a partir da simulação dos valores da taxa de rendimento das acções e dos dividendos das acções.

7.1.4 OBRIGAÇÕES DE TAXA FIXA

O modelo para as obrigações de taxa fixa, onde $C(t)$ representa a taxa de rendimento das obrigações de longo prazo emitidas pelo Estado, é dado pela equação seguinte:

$$(7) \quad C(t) = \text{Max}[CW.CM(t) + CMU.\exp\{CN(t)\}; CMIN]$$

onde:

CW – Factor para a inflação;

$$CM(t) = CD.I(t) + (1 - CD).CM(t-1)$$

- CD – Factor de desfasamento da inflação;
- CMU – Média do crescimento da taxa de juro real;
- $CN(t) = CA.CN(t-1) + CY.YSD.YZ(t) + CSD.CZ(t)$
- CA – Parâmetro autoregressivo da taxa de rendimento das obrigações;
- CY – Factor de ligação à taxa de rendimento das acções;
- CSD – Desvio padrão do resíduo aleatório;
- $CZ(t) \sim iid N(0,1)$ – Sucessão de valores de uma variável aleatória independente e identicamente distribuída segundo uma Normal estandardizada;
- $CE(t) = CSD.CZ(t)$ – Resíduo aleatório;
- $CMIN$ – Valor mínimo para a taxa de juro de longo prazo;

A equação (7), que descreve o comportamento da taxa de juro de longo prazo, pode ser dividida em duas partes, uma primeira que tem em conta a inflação futura esperada e uma segunda parte que diz respeito à taxa de juro real. A inflação futura esperada é baseada numa média móvel ponderada ($CM(t)$) enquanto o logaritmo da taxa de juro real depende do seu valor médio ($\ln(CMU)$) mais CA do seu desvio em relação à média do período anterior ($CN(t-1)$), adicionada de uma influência adicional do resíduo aleatório do modelo dos dividendos das acções ($CY.YSD.YZ(t)$) e, finalmente, de um resíduo aleatório de distribuição normal com média zero e desvio padrão CSD . Em termos práticos, a taxa de juro real é um processo autoregressivo, neste caso AR(1), que sofre ainda uma influência adicional da taxa de rendimento das acções. O facto de a taxa de juro seguir um processo autoregressivo significa que a taxa de juro é modelizada de acordo com uma propriedade estatística retirada a partir da análise da série cronológica das taxas de juro reais.

Convém salientar que os valores gerados por este modelo estão condicionados (de forma a garantirem que o seu valor nunca seja negativo), isto é, se o valor da simulação for negativo substitui-se o valor por $CMIN$.

Para iniciar as projecções futuras desta variável, tal como acontece com as outras variáveis fundamentais deste modelo, é preciso estabelecer algumas condições iniciais.

Relativamente ao factor para a inflação estabelece-se que a inflação passada é igual à média da inflação, ou seja, $CM(0) = QMU$. Semelhante pressuposto, no qual se estabelece o valor inicial igual ao valor esperado da variável, é assumido em relação à taxa de rendimento das obrigações de longo prazo, ou seja, $C(0) = QMU + CMU$. Como na equação (7) já se conhecem os valores de $CM(0)$ e $C(0)$, então, basta resolver a equação em ordem a $CN(0)$ para determinar o seu valor inicial: $CN(0) = \ln[(C(0) - CW \cdot CM(0)) / CMU]$.

Apesar da equação (7) descrever o comportamento da taxa de rendimento das obrigações de longo prazo, um dos objectivos com a modelização desta variável é obter o retorno total destas obrigações. A equação seguinte sintetiza a variação anual da taxa de rendimento das obrigações de taxa fixa,

$$(8) \quad RT C(t) = \{1 + 1/C(t)\} \cdot C(t-1) - 1.$$

Tal como para os modelos dos outros activos financeiros, o Quadro 4 apresenta um exemplo numérico de como são determinados os retornos totais com obrigações de taxa fixa de longo prazo.

Quadro 4 – Exemplo do processo de determinação do retorno de uma obrigação de taxa fixa de longo prazo

| (7) | | $C(t) = \text{Max}[CMIN ; CW \cdot CM(t) + CMU \cdot \exp\{CN(t)\}]$ | | | | | | |
|-------------------|---------|---|----------|----------|---------|----------|---------|----------|
| | | $CM(t) = CD \cdot I(t) + (1-CD) \cdot CM(t-1)$ | | | | | | |
| | | $CN(t) = CA \cdot CN(t-1) + CY \cdot YSD \cdot YZ(t) + CSD \cdot CZ(t)$ | | | | | | |
| (8) | | $RT C(t) = [1 + 1/C(t)] \cdot C(t-1) - 1$ | | | | | | |
| | | Termo (t) | CZ(t) | CE(t) | CM(t) | CN(t) | C(t) | RT C(t) |
| Parâmetros | | 0 | | | 0,02469 | 0,00000 | 0,05040 | |
| CW | 1 | 1 | 0,10110 | 0,01719 | 0,02543 | 0,01418 | 0,05150 | 0,02898 |
| CD | 0,045 | 2 | -1,41458 | -0,24048 | 0,02564 | -0,22298 | 0,04621 | 0,16601 |
| CMU | 0,02571 | 3 | 0,43208 | 0,07345 | 0,02544 | -0,08520 | 0,04905 | -0,01161 |
| CA | 0,9 | 4 | -0,32250 | -0,05482 | 0,02609 | -0,08108 | 0,04980 | 0,03396 |
| CY | 0,34 | 5 | 0,09750 | 0,01657 | 0,02588 | -0,11312 | 0,04884 | 0,06939 |
| CSD | 0,17 | 6 | -0,09798 | -0,01666 | 0,02446 | -0,10159 | 0,04768 | 0,07313 |
| CMIN | 0,005 | 7 | -1,37864 | -0,23437 | 0,02480 | -0,30995 | 0,04366 | 0,13984 |
| CM(0) | 0,02469 | 8 | 0,82990 | 0,14108 | 0,02476 | -0,08878 | 0,04829 | -0,05215 |
| CN(0) | 0,00000 | 9 | -0,60969 | -0,10365 | 0,02495 | -0,12037 | 0,04774 | 0,05981 |
| C(0) | 0,05040 | 10 | 0,52778 | 0,08972 | 0,02455 | -0,02626 | 0,04959 | 0,01043 |

Este modelo, para além de ser utilizado para modelizar a variação dos preços das obrigações, que permite simular os retornos totais com esta classe de activos, tem ainda

um papel primordial no modelo global de desenho estocástico de planos de contribuição definida. Esta preponderância advém da utilização da taxa de rendimento das obrigações (variável $C(t)$) como taxa técnica das anuidades que permite o cálculo das pensões e, conseqüentemente, da taxa de substituição.

7.1.5 NUMERÁRIO

A equação seguinte descreve o comportamento do logaritmo da taxa de juro de curto prazo $B(t)$ (taxa base bancária ou numerário),

$$(9) \quad \ln B(t) = \ln C(t) - BMU + BN(t)$$

onde:

BMU – Média do logaritmo do rácio das taxas de juro (longo prazo / curto prazo);

$$BN(t) = BA \cdot BN(t-1) + BSD \cdot BZ(t)$$

BA – Parâmetro autoregressivo da taxa de juro de curto prazo;

BSD – Desvio padrão do resíduo aleatório;

$BZ(t) \sim \text{iid } N(0,1)$ – Sucessão de valores de uma variável aleatória independente e identicamente distribuída segundo uma Normal estandardizada;

$$BE(t) = BSD \cdot BZ(t) \text{ – Resíduo aleatório.}$$

A taxa de juro de curto prazo é, neste submodelo de Wilkie, modelizada através do logaritmo do rácio entre a taxa de curto prazo e a taxa de longo prazo, ou seja, $-\ln[B(t)/C(t)] = \ln B(t) - \ln C(t)$. Isto significa que se assume que o *spread* (diferença entre a taxa de curto prazo e a taxa de longo prazo) é proporcionalmente constante em vez de simplesmente constante ao longo do tempo. Portanto, o princípio subjacente à equação (9) é o de que este *spread* é igual ao seu valor médio BMU , mais BA do seu desvio em relação à média referente ao período anterior ($t-1$), adicionado ainda do habitual resíduo aleatório de distribuição Normal $(0, BSD^2)$.

As taxas de juro de curto prazo são determinadas através de um processo autoregressivo, onde a taxa de juro de curto prazo depende do desvio em relação à

onde:

RMU – Valor médio da taxa de rendimento real das obrigações de taxa indexada;

RA – Parâmetro autoregressivo da taxa de rendimento real das obrigações de taxa indexada;

RSD – Desvio padrão do resíduo aleatório;

RBC – Factor de ligação às obrigações de taxa fixa;

$RZ(t) \sim \text{iid } N(0,1)$ – Sucessão de valores de uma variável aleatória independente e identicamente distribuída segundo uma Normal estandardizada;

$RE(t) = RSD.RZ(t)$ – Resíduo aleatório.

O modelo para a taxa de rendimento real das obrigações de taxa indexada sintetizado na equação (10) estabelece que o logaritmo da taxa de rendimento desta obrigação é igual ao seu valor médio ($\ln RMU$), mais RA do seu desvio (em logaritmo) em relação à média do período anterior ($t-1$) acrescido de um factor aleatório ($RE(t)$) de média zero e desvio padrão RSD . Tal como na generalidade dos modelos apresentados anteriormente, a variável aleatória $\ln R(t)$ segue um processo auto regressivo de primeira ordem. Fazendo uso da notação da análise de séries temporais o modelo pode ser descrito como $\ln R(t) \sim \text{AR1}(\ln RMU, RA, RSD)$. Contudo, ao modelo autoregressivo é necessário adicionar ainda um modelo de transferência do resíduo das obrigações de taxa fixa ($CE(t)$).

A única condição inicial para se definir uma trajectória futura para esta variável é assumir que $R(0) = RMU$, ou seja, que no ano 0 a taxa de rendimento das obrigações indexadas à inflação é igual ao seu valor médio.

Quadro 6 – Exemplo do processo de determinação da taxa de rendimento de uma obrigação de taxa indexada

| | | | | | | | |
|-------------------|-------|--|--------------|--------------|--------------------------------|-------------|----------------|
| (10) | | $\ln R(t) = \ln RMU + RA.[\ln R(t-1) - \ln RMU] + RBC.CE(t) + RSD.RZ(t)$ | | | | | |
| (11) | | $RT R(t) = [\{1 + 1/R(t)\}.R(t-1)] / [Q(t)/Q(t-1)] - 1$ | | | | | |
| | | Termo (t) | RZ(t) | RE(t) | RA.[ln R(t-1) - ln RMU] | R(t) | RT R(t) |
| Parâmetros | | 0 | | | | 0,02300 | |
| RMU | 0,023 | 1 | 0,86470 | 0,06053 | 0,00000 | 0,02453 | 0,00097 |
| RA | 0,55 | 2 | 1,95647 | 0,13695 | 0,03537 | 0,02592 | 0,00066 |
| RBC | 0,22 | 3 | -0,01717 | -0,00120 | 0,06568 | 0,02493 | 0,08822 |
| RSD | 0,07 | 4 | 1,28498 | 0,08995 | 0,04435 | 0,02599 | 0,02432 |
| R(0) | 0,023 | 5 | -0,20628 | -0,01444 | 0,06723 | 0,02434 | 0,11771 |
| | | 6 | 1,34718 | 0,09430 | 0,03104 | 0,02598 | -0,04435 |
| | | 7 | 1,03096 | 0,07217 | 0,06692 | 0,02510 | 0,09534 |
| | | 8 | -0,01037 | -0,00073 | 0,04814 | 0,02488 | 0,05923 |
| | | 9 | -0,22962 | -0,01607 | 0,04315 | 0,02310 | 0,13407 |
| | | 10 | -0,42029 | -0,02942 | 0,00235 | 0,02283 | 0,05154 |

A equação (10) acima apresentada sintetiza o comportamento da taxa de rendimento real das obrigações de taxa indexada, contudo, o verdadeiro objectivo da modelização desta variável é a obtenção do retorno total da obrigação de taxa indexada. Estes são dados pela equação seguinte:

$$(11) \quad RT R(t) = [\{1 + 1/R(t)\}.R(t-1)] . [Q(t)/Q(t-1)] - 1$$

Assim, facilmente se depreende que a lógica subjacente à determinação do retorno total assenta na conjugação da variação da taxa de rendimento real das obrigações indexadas com a variação dos preços.

Um exemplo numérico do processo de determinação da taxa de rendimento associada a uma obrigação de taxa indexada pode ser encontrado no Quadro 6.

7.1.7 IMOBILIÁRIO

O modelo para o retorno total dos investimentos em imobiliário tem uma estrutura idêntica à do retorno total das acções. Desta forma, o retorno total dos rendimentos gerados pelos investimentos em imobiliário durante o ano t é dado pela variação conjunta do índice de preços de imobiliário $A(t)$ e do índice de rendimento imobiliário (*property income index*) $E(t)$, expressos na equação seguinte:

$$(12) \quad RT Z(t) = [A(t) + E(t)] / A(t-1) - 1$$

Por sua vez, $A(t)$ é dada pelo rácio entre o índice de rendimento imobiliário e a taxa de rendimento de imobiliário $Z(t)$ (*property yields*):

$$(13) \quad A(t) = E(t) / Z(t)$$

A equação (13) na sua forma original, $Z(t) = E(t) / A(t)$, estipula que a taxa de rendimento do imobiliário é definida através do rácio entre os dividendos recebidos e o custo (preços) do investimento imobiliário. A utilização da equação (13) deriva do facto de ser mais acessível determinar os dividendos e a taxa de rendimento do investimento imobiliário e, em seguida, definir os preços a partir deles.

O rendimento total com o investimento imobiliário é obtido a partir da variação anual dos preços, ao qual tem de ser ainda adicionado os rendimentos anuais gerados pelos imóveis (índice de rendimento imobiliário). Como o modelo se está a aplicar à globalidade da economia (leia-se globalidade dos investimentos imobiliários) e não a um investimento imobiliário específico, então, utilizam-se índices, quer de preços quer de dividendos.

Desta forma, e um pouco à semelhança do modelo de retorno total das acções, apresentam-se, de seguida, os modelos que permitem a determinação do retorno total dos investimentos imobiliários.

Taxa de Rendimento de Imobiliário

O modelo para a taxa de rendimento de imobiliário é sintetizado na equação seguinte:

$$(14) \quad \ln Z(t) = \ln ZMU + ZA.[\ln Z(t-1) - \ln ZMU] + ZSD.ZZ(t)$$

no qual:

ZMU – Taxa média de rendimento de imobiliário;

ZA – Parâmetro autoregressivo da taxa de rendimento de imobiliário;

ZSD – Desvio padrão do resíduo aleatório;

$ZZ(t) \sim \text{iid } N(0,1)$ – Sucessão de valores de uma variável aleatória independente e identicamente distribuída segundo uma Normal estandardizada;

$ZE(t) = ZSD.ZZ(t)$ – Resíduo aleatório.

Analisando a equação (14) conclui-se que a variável $\ln Z(t)$ segue um processo autoregressivo de primeira ordem e que pode ser descrito como $\ln Z(t) \sim \text{AR1}(\ln ZMU, ZA, ZSD)$.

Assim, o logaritmo da taxa de rendimento de imobiliário é explicado pelo seu valor médio ($\ln ZMU$), por uma proporção (ZA) do seu desvio (em logaritmo) em relação à média do período anterior ($t-1$) e ainda por um factor aleatório ($ZE(t)$) de média zero e desvio padrão ZSD .

A única condição inicial necessária para obter as trajectórias futuras para esta variável, consiste em definir $Z(0) = ZMU$, ou seja, para o primeiro valor projectado ($t=1$) o desvio em relação à média do ano anterior ($t=0$) é nulo.

Índice de Rendimento Imobiliário

A equação seguinte modeliza o comportamento do índice de rendimento imobiliário:

$$(15) \quad E(t) = E(t-1) \cdot \exp\{EM(t) + EMU + EBZ \cdot ZSD \cdot ZZ(t) + ESD \cdot EZ(t)\}$$

em que:

$$EM(t) = ED \cdot I(t) + (1 - ED) \cdot EM(t-1)$$

ED – Factor de média móvel da inflação;

EMU – Média do rendimento real face à inflação;

EBZ – Factor de ligação ao resíduo da taxa de rendimento de imobiliário;

ESD – Desvio padrão do resíduo aleatório;

$EZ(t) \sim \text{iid } N(0,1)$ – Sucessão de valores de uma variável aleatória independente e identicamente distribuída segundo uma Normal estandardizada;

$EE(t) = ESD \cdot EZ(t)$ – Resíduo aleatório.

No Quadro 7 é apresentado o processo de determinação do retorno anual de imobiliário, a partir das variáveis da taxa de rendimento imobiliário e do índice de rendimento imobiliário.

Quadro 7 – Exemplo do processo de determinação do retorno total imobiliário

(14) $\ln Z(t) = \ln ZMU + ZA.[\ln Z(t-1) - \ln ZMU] + ZSD.ZZ(t)$

| | | Termo (t) | ZZ(t) | ZE(t) | ZA.[ln Z(t-1) - ln ZMU] | Z(t) |
|-------------------|------|-----------|----------|----------|-------------------------|---------|
| Parâmetros | | 0 | | | | 0,06000 |
| ZMU | 0,06 | 1 | 1,39975 | 0,16797 | 0,00000 | 0,07097 |
| ZA | 0,91 | 2 | -0,29277 | -0,03513 | 0,15285 | 0,06750 |
| ZSD | 0,12 | 3 | -0,04162 | -0,00499 | 0,10712 | 0,06645 |
| Z(0) | 0,06 | 4 | -0,67509 | -0,08101 | 0,09294 | 0,06072 |
| | | 5 | 0,59154 | 0,07099 | 0,01085 | 0,06512 |
| | | 6 | 0,69984 | 0,08398 | 0,07447 | 0,07030 |
| | | 7 | -0,71627 | -0,08595 | 0,14419 | 0,06360 |
| | | 8 | 0,26203 | 0,03144 | 0,05300 | 0,06529 |
| | | 9 | -0,90916 | -0,10910 | 0,07684 | 0,05810 |
| | | 10 | -0,60536 | -0,07264 | -0,02935 | 0,05418 |

(15) $E(t) = E(t-1).exp\{EM(t)+EMU+EBZ.ZE(t) + ESD.EZ(t)\}$
 $EM(t) = ED.I(t) + (1-ED).EM(t-1)$

| | | Termo (t) | EZ(t) | EE(t) | EM(t) | E(t) |
|-------------------|----------|-----------|----------|----------|---------|--------|
| Parâmetros | | 0 | | | 0,02469 | 1,000 |
| ED | 0,13 | 1 | -0,12434 | -0,00870 | 0,02682 | 1,0452 |
| EMU | -0,01425 | 2 | 0,56613 | 0,03963 | 0,02726 | 1,0924 |
| EBZ | 0,24 | 3 | 0,05181 | 0,00363 | 0,02646 | 1,1085 |
| ESD | 0,07 | 4 | -0,00560 | -0,00039 | 0,02822 | 1,1020 |
| EM(0) | 0,02469 | 5 | 0,47119 | 0,03298 | 0,02734 | 1,1738 |
| E(0) | 1 | 6 | -0,47252 | -0,03308 | 0,02303 | 1,1690 |
| | | 7 | -0,55039 | -0,03853 | 0,02421 | 1,1128 |
| | | 8 | -0,73301 | -0,05131 | 0,02417 | 1,0758 |
| | | 9 | -1,53770 | -0,10764 | 0,02477 | 0,9510 |
| | | 10 | 0,01064 | 0,00074 | 0,02364 | 0,9441 |

(13) $A(T) = E(t)/Z(t)$

(12) $RT Z(t) = [A(t) + E(t)] / A(t-1) - 1$

| Termo (t) | A(t) | RT P(t) |
|-----------|----------|----------|
| 0 | 16,66667 | |
| 1 | 14,72603 | -0,05373 |
| 2 | 16,18471 | 0,17324 |
| 3 | 16,68138 | 0,09918 |
| 4 | 18,14919 | 0,15405 |
| 5 | 18,02604 | 0,05789 |
| 6 | 16,62756 | -0,01273 |
| 7 | 17,49790 | 0,11927 |
| 8 | 16,47814 | 0,00320 |
| 9 | 16,36972 | 0,05113 |
| 10 | 17,42447 | 0,12211 |

O rendimento anual do investimento imobiliário deriva do seu valor médio *EMU* (em termos reais, ou seja líquido do efeito da inflação), de uma média móvel da inflação

passada ($EM(t)$), de uma influência do resíduo da taxa de rendimento imobiliário (EBZ) e ainda de um resíduo aleatório de média zero e desvio padrão ESD . Em termos concretos, os rendimentos dos imóveis são determinados em função da inflação e de um factor para o rendimento real, sendo este último dependente de um valor médio para o rendimento, de uma influência da taxa de rendimento imobiliário e ainda de um factor aleatório.

A condição inicial necessária para criar trajectórias para este índice passa por estabelecer $EM(0) = QMU$, o que consiste em assumir que o factor da inflação para o momento inicial ($t=0$) é igual ao seu valor médio (QMU).

7.1.8 PARAMETRIZAÇÃO E RESULTADOS

Depois de se ter apresentado, nos subcapítulos antecedentes, as equações que modelizam o comportamento das diversas variáveis do modelo chegou agora o momento indicado de mostrar a parametrização escolhida e apresentar alguns quadros e gráficos dos resultados obtidos com este submodelo.

Dada a diversidade de parametrizações disponíveis para o sub modelo de Wilkie, quer a nível de país ou região económica (em que existem três opções – Reino Unido, Estados Unidos e zona Euro) quer a nível de datas da parametrização, a escolha incidu sobre uma parametrização que tem em conta a situação do mercado a 31-12-2001 para o Reino Unido. A razão desta escolha prende-se exclusivamente com o facto de esta ser a parametrização mais próxima da que é apresentada por *Hibbert* (2001), o que permite um termo de comparação entre os dois modelos mais fiável. Contudo, foi necessário proceder a alterações nos parâmetros da volatilidade (QSD, DSD, CSD...) em algumas das equações do modelo no sentido de obter dispersões das rendibilidades dos activos mais verosímeis.

Quadro 8 – Parametrização do submodelo de Wilkie

| Inflação | | Obrigações de Taxa Fixa | |
|-----------|--------------|-----------------------------|--------------|
| Parâmetro | Valor | Parâmetro | Valor |
| QMU | 0,0246926 | CW | 1 |
| QA | 0,58 | CD | 0,045 |
| QSD | 0,018 | CMU | 0,0257068874 |
| | | CA | 0,9 |
| | | CY | 0,34 |
| Salários | | CSD | 0,17 |
| Parâmetro | Valor | CMIN | 0,005 |
| WW1 | 0,6 | Numerário | |
| WW2 | 0,27 | Parâmetro | Valor |
| WMU | 0,020558678 | BMU | 0,1022689284 |
| WSD | 0,0175 | BA | 0,74 |
| Acções | | BSD | 0,15 |
| Parâmetro | Valor | Obrigações de Taxa Indexada | |
| YW | 1,8 | Parâmetro | Valor |
| YA | 0,55 | RMU | 0,023 |
| YMU | 0,0251566490 | RA | 0,55 |
| YSD | 0,155 | RBC | 0,22 |
| DW | 0,58 | RSD | 0,07 |
| DD | 0,13 | Imobiliário | |
| DMU | 0,0228300625 | Parâmetro | Valor |
| DY | -0,175 | ZMU | 0,06 |
| DB | 0,57 | ZA | 0,91 |
| DSD | 0,05 | ZSD | 0,12 |
| | | ED | 0,13 |
| | | EMU | -0,014252023 |
| | | EBZ | 0,24 |
| | | ESD | 0,07 |

O Quadro 9 evidencia os resultados do submodelo de retorno dos investimentos de Wilkie, com base em 1000 simulações e na parametrização apresentada no Quadro 8. Os resultados dizem respeito a valores nominais e foram obtidos tendo em consideração um horizonte temporal de simulação de 30 anos.

Quadro 9 – Resultados do submodelo de Wilkie

| Variável Base / Activo Financeiro | Média | Desvio Padrão |
|-----------------------------------|-------|---------------|
| Inflação | 2,50% | 2,26% |
| Salários | 4,29% | 2,57% |
| Acções | 9,40% | 19,57% |
| Obrigações Taxa Fixa | 5,65% | 10,11% |
| Numerário | 4,81% | 1,53% |
| Obrigações Taxa Indexada | 5,28% | 9,63% |
| Imobiliário | 8,04% | 12,58% |

No Gráfico 3 é possível observar a dispersão das rendibilidades dos activos (acções, obrigações, numerário e imobiliário) modelizados pelo submodelo de Wilkie assim como de algumas das variáveis (inflação e salários) produzidas por aquele submodelo. As cores identificam os percentis 10, 25, 50, 75 e 90. Os dois tons mais claros de azul indicam o intervalo interquartil (percentil 25 e 75). A informação que se pode abstrair do Gráfico 3 complementa a informação disponível no Quadro 9.

As dispersões das rendibilidades evidenciadas no Gráfico 3 são determinadas fazendo uma média das dispersões para cada um dos 30 anos. Contudo, de ano para ano, a distribuição das rendibilidades apresentam variações, daí que se tenha incluído o Gráfico 4 que pretende dar ao leitor uma percepção da variação da distribuição (para as 1000 simulações) da rendibilidade. Neste caso a escolha incide sobre obrigações de taxa fixa, durante os primeiros 10 anos de simulação.

Gráfico 3 – Dispersão das rendibilidades dos activos e variáveis do submodelo de Wilkie

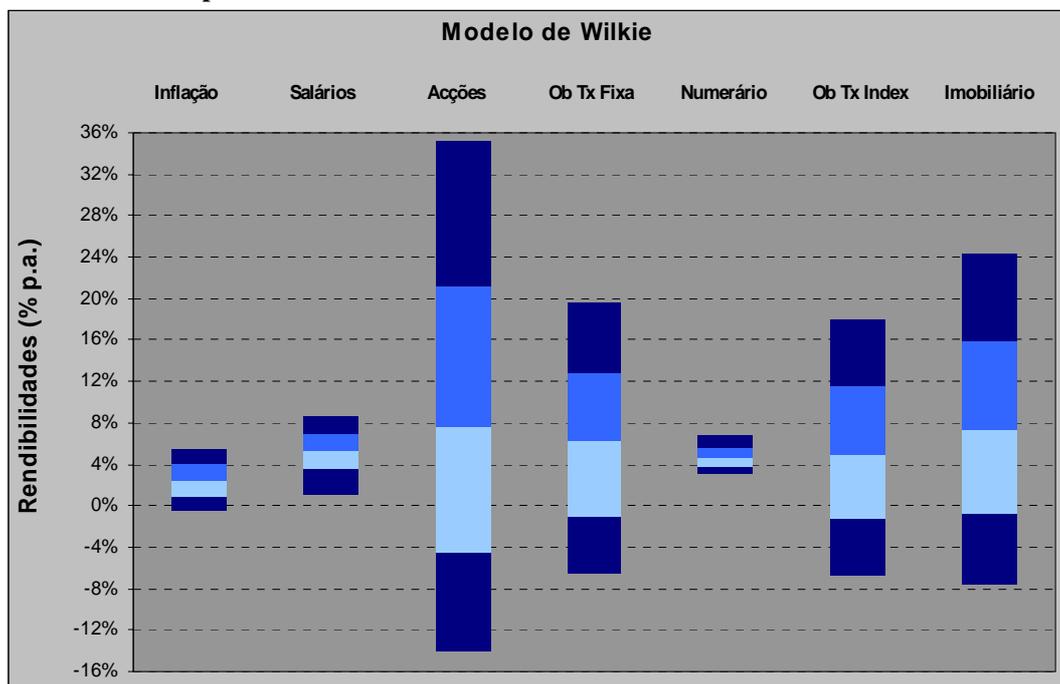
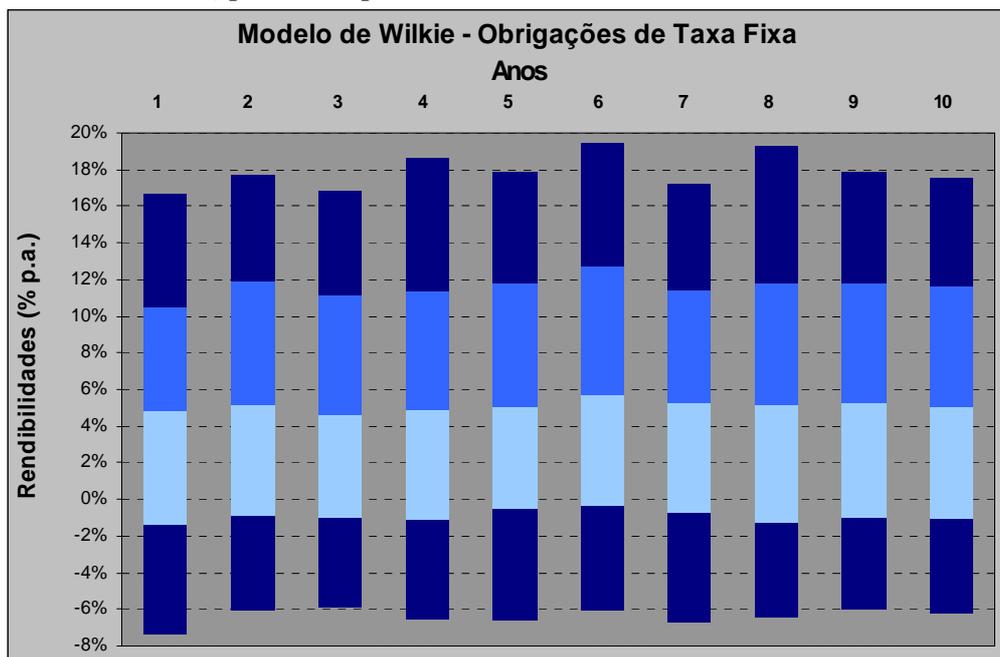
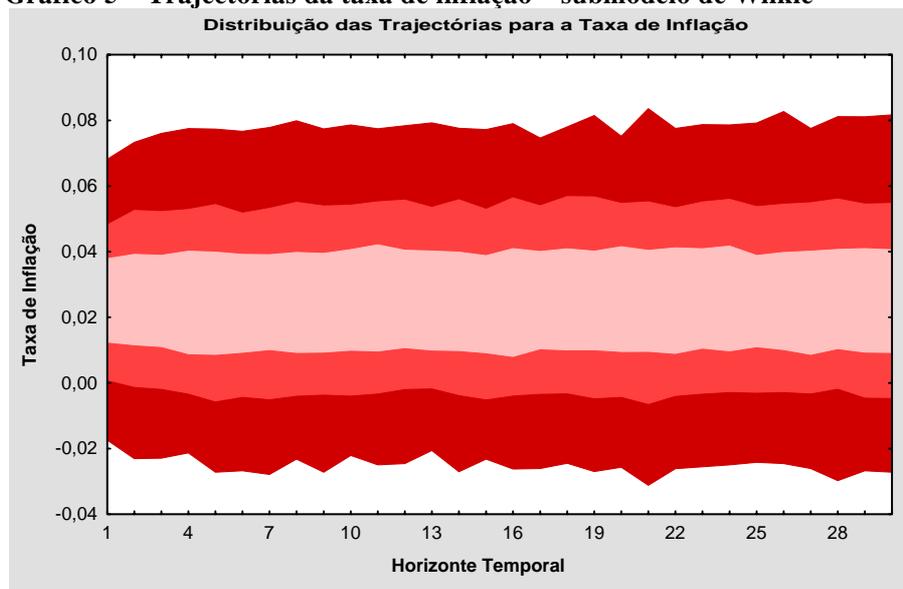


Gráfico 4 – Dispersão das rendibilidades das obrigações de taxa fixa do submodelo de Wilkie, para os 10 primeiros anos

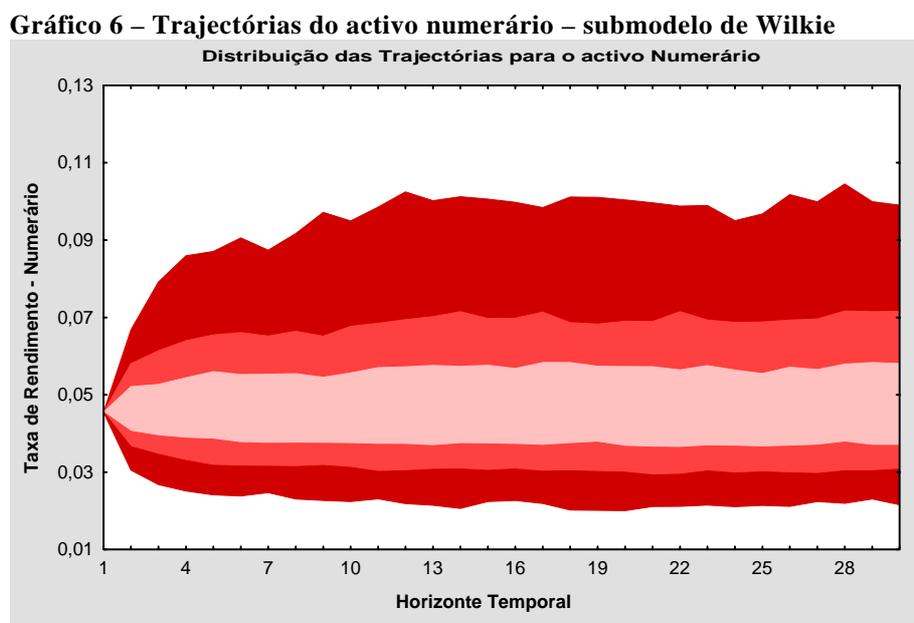


Os gráficos seguintes (Gráfico 5 e 6) mostram, para o horizonte temporal analisado, a distribuição das trajetórias para a taxa de inflação e para a taxa de rendimento do activo numerário. Os percentis analisados são, de baixo para cima, 1, 10, 25, 75, 90 e 99. Desta forma, a cor mais clara representa a densidade probabilística das trajetórias das taxas compreendidas entre o percentil 25 e 75, ou seja, o intervalo interquartil.

Gráfico 5 – Trajetórias da taxa de inflação – submodelo de Wilkie



Para o Gráfico 6, referente às trajetórias das taxas de rendimento do activo numerário, observa-se que em metade das situações a trajetória se encontra entre 1% e 4%, enquanto os casos positivos mais extremos se situam entre 5% e 8% e os casos negativos entre 0% e -3%.



Ainda no que respeita ao Gráfico 6, sobre as trajetórias das taxas de rendimento do activo numerário, destaca-se a elevada amplitude do intervalo entre os percentis 90 e 99, o que indica que o modelo tem tendência para gerar valores extremos positivos.

7.2 SUBMODELO DE HIBBERT

Este modelo é mais recente (2001) que o de Wilkie e, portanto, falta-lhe experiência e também notoriedade que são, no entanto, compensadas pelas suas mais valias técnicas.

Recuperando o que foi mencionado no Capítulo 6, constata-se que nestes últimos anos houve um desenvolvimento destes modelos financeiros de longo prazo, fruto de um aumento da pesquisa e da publicação de artigos científicos nesta área. Uma grande parte destes modelos apresenta-se sobre a forma de modelos em tempo contínuo que fazem uso da poderosa matemática actuarial e financeira das equações diferenciais estocásticas, e que teve a sua origem nos modelos de estrutura a termo da taxa de juro.

Na prática, estes modelos de estrutura a termo da taxa de juro, de que são exemplo Vasicek (1977), Cox, Ingersoll and Ross (CIR Model – 1985), Heath, Jarrow and Morton (HJM Model – 1992) e Hull and White (1994), constituem as pedras basilares de alguns dos modelos de tempo contínuo enumerados no Capítulo 7 – *Smith's jump diffusion Model, Cairn's Model, Hibbert Model*. Tendo em conta o contributo que um modelo desta natureza tem para a riqueza de uma dissertação, a escolha recaiu sobre o Modelo de Hibbert.

O modelo seleccionado apresenta um número de propriedades interessantes:

- ✦ O modelo baseia-se em relações económicas fundamentais entre a inflação, expectativas de inflação, taxa de juro nominal e taxa de juro real;
- ✦ Produz estruturas a termo completas e consistentes para a taxa de juro real e nominal, que permite modelizar um grande variedade de curvas de taxa de rendimento (*yield curves*);
- ✦ O modelo para o rendimento das acções permite gerar assimetria negativa (*negative skewness*) e achatamento (*kurtosis*) que são características das distribuições reais dos rendimentos das acções;
- ✦ É relativamente simples de modelizar e é passível de ser melhorado através da adição de outras componentes.

No que respeita aos activos financeiros e às variáveis geradas, este modelo é um pouco incompleto quando comparado com o Modelo de Wilkie, visto que não modeliza o activo financeiro **Imobiliário** nem apresenta um modelo para os salários. Dado o reduzido peso que a classe de activos Imobiliário representa em termos da carteira global de activos não se vai considerar este activo para as simulações da Parte IV (parte prática), de forma a garantir que a base de comparação entre os dois modelos seja a mesma. Como mais tarde se verá (no Capítulo 8), os salários utilizados nas simulações serão modelizados de forma distinta da apresentada por Wilkie.

A estrutura deste capítulo (7.2) está dividida em duas partes: numa primeira são apresentados os modelos de estrutura a termo da taxa de juro real e das expectativas de inflação bem como do modelo da taxa de rendimento das acções, seguidas das expressões para determinação da taxa de rendimento anual para os activos numerário, obrigações de taxa fixa, obrigações de taxa indexada e acções; e na segunda parte serão apresentados os valores dos parâmetros das equações (parametrização do modelo) e os resultados do modelo.

Ainda no que respeita à primeira parte serão apresentadas as duas variáveis base deste modelo de investimento de longo prazo – a inflação e a taxa de juro real (Subcapítulo 7.2.1 e 7.2.2) – bem como a variável taxa de juro nominal, que resulta da conjugação das duas variáveis base (Subcapítulo 7.2.3) e só depois se evidenciam as equações que definem o comportamento dos diversos activos (Subcapítulos 7.2.4 a 7.2.7).

7.2.1 ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JURO REAL

O modelo de estrutura a termo da taxa de juro, utilizado quer para a taxa de juro real quer para as expectativas de inflação, é um caso particular do modelo de dois factores descrito por Hull & White (1994). Este, por sua vez, é baseado num dos primeiros modelos de estrutura a termo da taxa de juro, elaborado por Vasicek (1977), em que a taxa de juro de curto prazo segue um processo estocástico de retorno à média (*mean reverting*), em tempo contínuo. A partir desta taxa de juro de curto prazo e da sua trajectória futura esperada, é possível inferir sobre as taxas de juro *forward* e *spot*, de onde se retira o preço das obrigações de cupão zero.

Em termos concretos, o modelo aqui apresentado para a estrutura a termo da taxa de juro é o equivalente em tempo contínuo a um processo autoregressivo em que o factor de reversão em relação à média é, também ele, um processo autoregressivo (daí o segundo factor do modelo) que é adicionado ao único factor do modelo apresentado por Vasicek).

As equações seguintes são responsáveis pela modelização da taxa de juro real de curto prazo:

$$(16) \quad \begin{cases} dr_1(t) = \alpha_{r1} [r_2(t) - r_1(t)] dt + \sigma_{r1} dZ_{r1}(t) \\ dr_2(t) = \alpha_{r2} [u_r - r_2(t)] dt + \sigma_{r2} dZ_{r2}(t) \end{cases}$$

onde

- $r_1(t)$ – Taxa de juro real de curto prazo no momento t ;
- $r_2(t)$ – Processo de reversão em relação à média para a taxa de juro de curto prazo no momento t ;
- α_{r1} – Parâmetro autoregressivo para o processo da taxa de juro de curto prazo;
- α_{r2} – Parâmetro autoregressivo para o processo de reversão em relação à média da taxa de juro de curto prazo;
- σ_{r1} – Desvio padrão (volatilidade anualizada) da taxa de juro real;
- σ_{r2} – Desvio padrão (volatilidade anualizada) do processo de reversão em relação à média da taxa de juro real;
- u_r – Parâmetro de reversão em relação à média para $r_2(t)$;
- g_r – Parâmetro de controlo do prémio de risco de longo prazo;
- $dZ_{r1}(t)$ – Incremento aleatório do processo da taxa de juro de curto prazo, que segue uma distribuição $N(g_r dt, dt)$;
- $dZ_{r2}(t)$ – Incremento aleatório do processo de reversão em relação à média da taxa de juro de curto prazo, que segue uma distribuição $N(g_r dt, dt)$;
- b_{r1} – Limite mínimo para a taxa de juro de curto prazo;
- b_{r2} – Limite mínimo para o processo de reversão em relação à média da taxa de juro de curto prazo;

Apesar de estas equações parecerem difíceis de interpretar elas não são mais do que o equivalente a dois processos auto regressivos de primeira ordem. O sistema de equações diferenciais estocásticas (16) define a dinâmica do comportamento da taxa de juro real de curto prazo $r_1(t)$. Esta dinâmica estabelece que a variação infinitesimal da taxa de juro real de curto prazo $dr_1(t)$ é igual a uma proporção (α_{r1}) da diferença entre a taxa de juro real de longo prazo ($r_2(t)$) e o actual valor da taxa de curto prazo, multiplicada

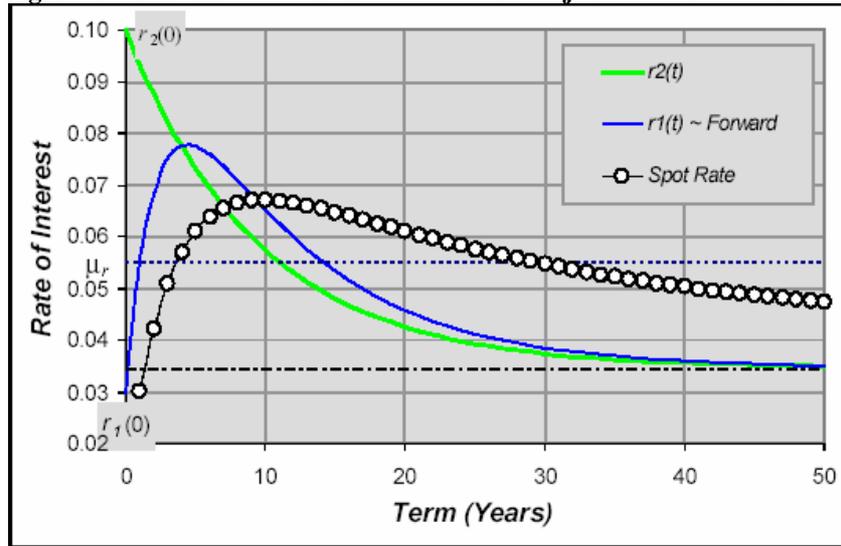
pela variação infinitesimal do tempo, à qual se soma um incremento aleatório ($dZ_{r_1}(t)$) de distribuição Normal. Tal como apresentado no Capítulo 3.3, a propósito do modelo de Vasicek (1977), o processo da taxa de juro real pressupõe reversão em relação à média (leia-se reversão em relação ao valor da taxa de juro real de longo prazo). Porém, o valor da taxa de juro real de longo prazo não é um parâmetro, como no modelo de Vasicek (1977), mas sim um outro processo estocástico cuja dinâmica de comportamento é muito semelhante à da taxa de juro de curto prazo.

O princípio subjacente a estas equações consiste em considerar que a taxa de juro real segue uma distribuição normal, o que permite a existência de valores negativos para o valor da taxa de juro. Estas equações permitem definir toda a estrutura a termo da taxa de juro bem como as suas trajectórias futuras esperadas.

A Figura 2 permite compreender o funcionamento de um modelo de estrutura a termo da taxa de juro com dois factores. Na figura, o processo da taxa de juro real de longo prazo (ou processo de reversão em relação à média - linha a verde $r_2(t)$) começa em 10% e vai diminuindo, ao longo do tempo, até atingir o seu valor médio (u_r). Por sua vez a taxa de juro real de curto prazo é projectada de encontro ao processo de reversão em relação à média. A trajectória $r_1(t)$ (linha a azul) pode ser interpretada como o conjunto das taxas de juro *forward* instantâneas – taxas *forward* disponíveis num breve momento de tempo. Através da combinação apropriada das taxas de juro *forward* consegue-se obter a taxa de juro *spot* que representam a taxa de juro intrínsecas a uma obrigação de cupão zero para qualquer maturidade.

A figura permite ter uma ideia de como as variações de $r_1(t)$ e $r_2(t)$ podem afectar a forma da curva da taxa de rendimento (*yield curve*). Os parâmetros σ_{r_1} e σ_{r_2} vão influenciar a variabilidade das taxas enquanto os parâmetros autoregressivos podem ser vistos como influenciadores da curvatura da curva da taxa de rendimento.

Figura 2 – Dinâmica de um modelo de taxa de juro de dois factores



Fonte – Hibbert (2001)

As equações seguintes, (17) e (18), permitem determinar os processos da taxa de juro real de curto prazo $r_1(T)$ e do seu factor de reversão em relação à média $r_2(T)$, a partir dos valores passados de $r_1(t)$ e $r_2(t)$, para $t < T$. Note-se que o incremento da estrutura a termo da taxa de juro real é feito somando ao valor esperado de cada um dos processos o desvio padrão multiplicado pelo incremento aleatório, ao qual é ainda adicionado o prémio de risco de longo prazo. Apesar de conceptualmente simples, a fundamentação teórica subjacente ao modelo é bastante complexa.

$$(17) \quad r_2(T) = E(r_2(T) | r_2(t)) + \sqrt{\text{Var}(r_2(T) | r_2(t))} \cdot (Zr_2(T) + g_r \sqrt{T-t})$$

$$(18) \quad r_1(T) = E(r_1(T) | r_1(t), r_2(t)) + \sqrt{\text{Var}(r_1(T) | r_1(t), r_2(t))} \cdot (Zr_1(T) + g_r \sqrt{T-t})$$

no qual:

$$E(r_2(T) | r_2(t)) = u_r + e^{-\alpha_{r_2}(T-t)} \cdot (r_2(t) - u_r)$$

$$\text{Var}(r_2(T) | r_2(t)) = \frac{\sigma_{r_2}^2}{2\alpha_{r_2}} \cdot (1 - e^{-2\alpha_{r_2}(T-t)})$$

$$E(r_1(T) | r_1(t), r_2(t)) = u_r + e^{-\alpha_{r_1}(T-t)} \cdot (r_1(t) - u_r) + \frac{\alpha_{r_1}}{\alpha_{r_1} + \alpha_{r_2}} \cdot (e^{-\alpha_{r_2}(T-t)} - e^{-\alpha_{r_1}(T-t)}) \cdot (r_2(t) - u_r)$$

$$Var(r_1(T) | r_1(t), r_2(t)) = \frac{\sigma_{r_1}^2}{2\alpha_{r_1}} \cdot (1 - e^{-2\alpha_{r_1}(T-t)}) + \sigma_{r_2}^2 \cdot \left(\frac{\alpha_{r_1}}{\alpha_{r_1} - \alpha_{r_2}} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2\alpha_{r_1}} \cdot (1 - e^{-2\alpha_{r_1}(T-t)}) + \frac{1}{2\alpha_{r_2}} \cdot (1 - e^{-2\alpha_{r_2}(T-t)}) - \frac{2}{\alpha_{r_1} + \alpha_{r_2}} \cdot (1 - e^{-(\alpha_{r_1} + \alpha_{r_2})(T-t)}) \right)$$

Na prática, para gerar as trajetórias da taxa de juro real de curto prazo e do seu processo de reversão em relação à média é apenas necessário ter as condições iniciais $r_1(0)$ e $r_2(0)$ e gerar, para cada termo, os incrementos aleatórios $dZ_{r_1}(t)$ e $dZ_{r_2}(t)$. O Quadro 10 evidencia o processo de determinação da taxa de juro real a partir das equações (17) e (18).

O parâmetro g_r determina o grau com que a taxa de rendimento das obrigações de longo prazo (em termos reais) excede a taxa de juro de curto prazo, ou seja, g_r é o prémio de risco. Assim, se o investidor requer um rendimento adicional para investir em obrigações de longo prazo, g_r tem de ser negativo de modo a que o valor esperado de um investimento numa conta bancária (numerário) seja menor que o valor esperado de um investimento numa obrigação de uma maturidade superior (por exemplo, maior que 2 anos).

Tendo por base as equações (17) e (18) e os conceitos introduzidos no Capítulo 2, o preço de uma obrigação de cupão zero, no momento t , que paga uma unidade em termos reais (isto é, protegida de inflação) no momento T , é dado pela equação seguinte:

$$(19) \quad P_{\text{real}}(t, T) = \exp[A(T-t) - B_1(T-t) \cdot r_1(t) - B_2(T-t) \cdot r_2(t)]$$

no qual:

$$B_1(s) = \left[\frac{(1 - e^{-\alpha_{r_1}s})}{\alpha_{r_1}} \right]$$

$$B_2(s) = \frac{\alpha_{r_1}}{\alpha_{r_1} - \alpha_{r_2}} \cdot \left[\frac{(1 - e^{-\alpha_{r_2}s})}{\alpha_{r_2}} - \frac{(1 - e^{-\alpha_{r_1}s})}{\alpha_{r_1}} \right]$$

$$A(s) = (B_1(s) - s) \cdot \left(u_r - \frac{\sigma_{r_1}^2}{2\alpha_{r_1}^2} \right) + B_2(s) \cdot u_r - \frac{\sigma_{r_1}^2 \cdot B_1(s)^2}{4\alpha_{r_1}} + \frac{\sigma_{r_2}^2}{2} \cdot \left[\frac{s}{\alpha_{r_2}^2} - \right]$$

$$-2 \cdot \frac{(B_2(s) + B_1(s))}{\alpha_{r_2}^2} + \frac{1}{(\alpha_{r_1} - \alpha_{r_2})^2} \left(\frac{(1 - e^{-2\alpha_{r_1}s})}{2\alpha_{r_1}} \right) - \frac{2\alpha_{r_1}}{\alpha_{r_2}(\alpha_{r_1} - \alpha_{r_2})^2} \cdot \left[\frac{(1 - e^{-(\alpha_{r_1} + \alpha_{r_2})s})}{(\alpha_{r_1} + \alpha_{r_2})} + \frac{\alpha_{r_1}^2}{\alpha_{r_2}^2(\alpha_{r_1} - \alpha_{r_2})^2} \left(\frac{(1 - e^{-2\alpha_{r_2}s})}{2\alpha_{r_2}} \right) \right]$$

Quadro 10 – Processo de determinação da taxa de juro real⁹

(17) $r_2(T) = E(r_2(T) | r_2(t)) + \sqrt{\text{Var}(r_2(T) | r_2(t))} \cdot (Zr_2(T) + g_r\sqrt{T-t})$

| | | Termo (t) | $Zr_2(T)$ | $E(r_2(T) r_2(t))$ | $\sqrt{\text{Var}(r_2(T) r_2(t))}$ | $Zr_2(T) + g_r\sqrt{T-t}$ | $r_2(T)$ |
|-------------------|--------|-----------|-----------|----------------------|--------------------------------------|---------------------------|----------|
| Parâmetros | | 0 | | | | | 0,02750 |
| α_{r_2} | 0,05 | 1/12 | -0,72995 | 0,02760 | 0,00288 | -0,76603 | 0,02540 |
| σ_{r_2} | 0,01 | 2/12 | 1,01259 | 0,02551 | 0,00288 | 0,97651 | 0,02832 |
| u_r | 0,0525 | 3/12 | 0,14629 | 0,02842 | 0,00288 | 0,11021 | 0,02874 |
| g_r | -0,125 | 4/12 | 1,57134 | 0,02884 | 0,00288 | 1,53525 | 0,03326 |
| b_{r_2} | 0 | 5/12 | 0,03897 | 0,03334 | 0,00288 | 0,00288 | 0,03335 |
| $r_2(0)$ | 0,0275 | 6/12 | 0,21243 | 0,03343 | 0,00288 | 0,17635 | 0,03394 |
| | | 7/12 | -0,11088 | 0,03402 | 0,00288 | -0,14697 | 0,03359 |
| | | 8/12 | 0,24991 | 0,03367 | 0,00288 | 0,21382 | 0,03429 |
| | | 9/12 | 0,55116 | 0,03436 | 0,00288 | 0,51507 | 0,03585 |
| | | 10/12 | -1,21025 | 0,03592 | 0,00288 | -1,24633 | 0,03233 |
| | | 11/12 | 1,43836 | 0,03241 | 0,00288 | 1,40228 | 0,03645 |
| | | 12/12 | 1,39359 | 0,03652 | 0,00288 | 1,35751 | 0,04043 |
| | | 13/12 | 1,10863 | 0,04048 | 0,00288 | 1,07255 | 0,04357 |

(18) $r_1(T) = E(r_1(T) | r_1(t), r_2(t)) + \sqrt{\text{Var}(r_1(T) | r_1(t), r_2(t))} \cdot (Zr_1(T) + g_r\sqrt{T-t})$

| | | Termo (t) | $Zr_1(T)$ | $E(r_1(T) r_1(t), r_2(t))$ | $\sqrt{\text{Var}(r_1(T) r_1(t), r_2(t))}$ | $Zr_1(T) + g_r\sqrt{T-t}$ | $r_1(T)$ |
|-------------------|--------|-----------|-----------|------------------------------|--|---------------------------|----------|
| Parâmetros | | 0 | | | | | 0,02500 |
| α_{r_1} | 0,025 | 1/12 | 0,631801 | 0,02505 | 0,00143 | 0,59572 | 0,02590 |
| σ_{r_1} | 0,005 | 2/12 | -1,67199 | 0,02589 | 0,00143 | -1,70808 | 0,02345 |
| u_r | 0,0525 | 3/12 | 0,478864 | 0,02356 | 0,00143 | 0,44278 | 0,02419 |
| g_r | -0,125 | 4/12 | -0,14485 | 0,02428 | 0,00143 | -0,18093 | 0,02402 |
| b_{r_1} | -0,05 | 5/12 | 0,396625 | 0,02422 | 0,00143 | 0,36054 | 0,02473 |
| $r_1(0)$ | 0,025 | 6/12 | 0,390372 | 0,02491 | 0,00143 | 0,35429 | 0,02542 |
| | | 7/12 | -1,50112 | 0,02559 | 0,00143 | -1,53720 | 0,02340 |
| | | 8/12 | -0,86725 | 0,02361 | 0,00143 | -0,90333 | 0,02232 |
| | | 9/12 | 1,198662 | 0,02256 | 0,00143 | 1,16258 | 0,02422 |
| | | 10/12 | -0,97927 | 0,02447 | 0,00143 | -1,01535 | 0,02301 |
| | | 11/12 | -0,22621 | 0,02321 | 0,00143 | -0,26229 | 0,02283 |
| | | 12/12 | 0,451026 | 0,02311 | 0,00143 | 0,41494 | 0,02371 |
| | | 13/12 | 2,032562 | 0,02405 | 0,00143 | 1,99648 | 0,02690 |

⁹ O parâmetro u_r utilizado para efeitos deste exemplo difere do utilizado na parametrização (Subcapítulo 7.2.8).

Uma vez obtido o preço da obrigação de cupão zero é possível obter a sua taxa de rendimento até à maturidade (*yield to maturity*). Assim, no momento t , a taxa de rendimento até à maturidade T , continuamente composta, é a expressão $R_1(t, T)$ que satisfaz a seguinte condição: $P_{real}(t, T) \cdot \exp\{(T - t) \cdot R_1(t, T)\} = 1$, ou seja, resolvendo a equação em ordem a $R_1(t, T)$ tem-se:

$$(20) \quad R_1(t, T) = \frac{-\log\{P_{real}(t, T)\}}{(T - t)}.$$

7.2.2 ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE INFLAÇÃO

Relativamente à inflação a ideia é usar um modelo para o comportamento da taxa de inflação que gere uma estrutura a termo para as expectativas inflacionistas, que conjugadas com a estrutura a termo da taxa de juro real permite determinar a estrutura a termo da taxa de juro nominal.

Desta forma, o modelo utilizado para as expectativas inflacionistas é precisamente igual ao modelo da taxa de juro de curto prazo, sendo apenas necessário converter o raciocínio para a taxa de inflação em vez da taxa de juro. Seguidamente são apresentadas as equações que definem a dinâmica de comportamento da taxa de inflação e do seu processo de reversão em relação à média:

$$(21) \quad \begin{cases} dq_1(t) = \alpha_{q1} [q_2(t) - q_1(t)] dt + \sigma_{q1} dZ_{q1}(t) \\ dq_2(t) = \alpha_{q2} [u_q - q_2(t)] dt + \sigma_{q2} dZ_{q2}(t) \end{cases}$$

em que

$q_1(t)$ – Taxa de inflação instantânea no momento t ;

$q_2(t)$ – Processo de reversão em relação à média para a taxa de inflação instantânea no momento t ;

α_{q1} – Parâmetro autoregressivo para o processo da taxa de inflação instantânea;

α_{q2} – Parâmetro autoregressivo para o processo de reversão em relação à média da taxa de inflação instantânea;

σ_{q1} – Desvio padrão (volatilidade anualizada) da taxa de inflação;

- σ_{q_2} – Desvio padrão (volatilidade anualizada) do processo de reversão em relação à média da taxa de inflação;
- u_q – Parâmetro de reversão em relação à média para $q_2(t)$;
- g_q – Parâmetro de controlo do prémio de risco da inflação das obrigações em termos nominais relativamente às obrigações indexadas à inflação;
- $dZ_{q_1}(t)$ – Incremento aleatório do processo da taxa de inflação, que segue uma distribuição $N(g_q, dt, dt)$;
- $dZ_{q_2}(t)$ – Incremento aleatório do processo de reversão em relação à média da taxa de inflação, que segue uma distribuição $N(g_q, dt, dt)$;
- b_{q_1} – Limite mínimo para a taxa de inflação instantânea;
- b_{q_2} – Limite mínimo para as expectativas inflacionistas de longo prazo – processo de reversão em relação à média da taxa de inflação;

Tal como no modelo para a taxa de juro real, assume-se que a taxa de inflação é um processo com reversão para o processo da taxa de inflação de longo prazo. A utilização de um modelo de dois factores permite que haja diferenciação das expectativas da inflação consoante o horizonte temporal, isto é, pode-se assumir diferentes expectativas para o curto e o longo prazo. Este facto assume-se de maior relevância para o controlo da volatilidade, pois, num modelo de um só termo, não é possível obter uma distribuição de longo prazo aceitável com uma volatilidade razoável de curto prazo e vice-versa.

A estrutura a termo das expectativas da inflação é determinada a partir de equações equivalentes às equações (17) e (18) com a excepção de que as variáveis e os parâmetros são os que constam da equação (21). Neste modelo o parâmetro g_q representa o rendimento adicional necessário para que os investidores invistam em obrigações em termos nominais (obrigações de taxa fixa) face a obrigações indexadas. Este parâmetro é muitas vezes designado por prémio de risco da inflação. O Quadro 11, tal como o Quadro 10 para o processo da taxa de juro real, evidencia o processo de simulação da taxa de inflação $q_1(t)$.

Quadro 11 – Processo de determinação da taxa de inflação¹⁰

$$q_2(T) = E(q_2(T) | q_2(t)) + \sqrt{\text{Var}(q_2(T) | q_2(t))} \cdot (Zq_2(T) + gq\sqrt{T-t})$$

| | | Termo (t) | $Zq_2(T)$ | $E(q_2(T) q_2(t))$ | $\sqrt{\text{Var}(q_2(T) q_2(t))}$ | $Zq_2(T) + gq\sqrt{T-t}$ | $q_2(T)$ |
|-------------------|--------|-----------|-----------|----------------------|--------------------------------------|--------------------------|----------|
| Parâmetros | | 0 | | | | | 0,02830 |
| α_{q_2} | 0,1 | 1/12 | -0,70786 | 0,02842 | 0,00345 | -0,74394 | 0,02586 |
| σ_{q_2} | 0,012 | 2/12 | 0,14522 | 0,02600 | 0,00345 | 0,10913 | 0,02638 |
| u_q | 0,0433 | 3/12 | -0,24586 | 0,02652 | 0,00345 | -0,28194 | 0,02555 |
| g_q | -0,125 | 4/12 | -1,43309 | 0,02569 | 0,00345 | -1,46917 | 0,02063 |
| b_{q_2} | 0 | 5/12 | -1,55381 | 0,02081 | 0,00345 | -1,58989 | 0,01533 |
| $q_2^{(0)}$ | 0,0283 | 6/12 | 0,25831 | 0,01556 | 0,00345 | 0,22223 | 0,01633 |
| | | 7/12 | -0,51232 | 0,01655 | 0,00345 | -0,54841 | 0,01466 |
| | | 8/12 | -0,68281 | 0,01490 | 0,00345 | -0,71890 | 0,01242 |
| | | 9/12 | -0,66481 | 0,01267 | 0,00345 | -0,70089 | 0,01026 |
| | | 10/12 | -0,37357 | 0,01053 | 0,00345 | -0,40965 | 0,00912 |
| | | 11/12 | 0,89923 | 0,00940 | 0,00345 | 0,86314 | 0,01238 |
| | | 12/12 | 2,09158 | 0,01264 | 0,00345 | 2,05550 | 0,01973 |
| | | 13/12 | -0,32531 | 0,01992 | 0,00345 | -0,36140 | 0,01868 |

$$q_1(T) = E(q_1(T) | q_1(t), q_2(t)) + \sqrt{\text{Var}(q_1(T) | q_1(t), q_2(t))} \cdot (Zq_1(T) + gq\sqrt{T-t})$$

| | | Termo (t) | $Zq_1(T)$ | $E(q_1(T) q_1(t), q_2(t))$ | $\sqrt{\text{Var}(q_1(T) q_1(t), q_2(t))}$ | $Zq_1(T) + gq\sqrt{T-t}$ | $q_1(T)$ |
|-------------------|--------|-----------|-----------|------------------------------|--|--------------------------|----------|
| Parâmetros | | 0 | | | | | 0,02500 |
| α_{q_1} | 0,03 | 1/12 | 1,009359 | 0,02508 | 0,00228 | 0,97327 | 0,02730 |
| σ_{q_1} | 0,008 | 2/12 | 0,163538 | 0,02727 | 0,00228 | 0,12745 | 0,02756 |
| u_q | 0,0433 | 3/12 | -0,46073 | 0,02753 | 0,00228 | -0,49682 | 0,02640 |
| g_q | -0,125 | 4/12 | 0,084326 | 0,02638 | 0,00228 | 0,04824 | 0,02649 |
| b_{q_1} | -0,05 | 5/12 | 0,281745 | 0,02635 | 0,00228 | 0,24566 | 0,02691 |
| $q_1^{(0)}$ | 0,025 | 6/12 | -0,02864 | 0,02663 | 0,00228 | -0,06472 | 0,02648 |
| | | 7/12 | -0,09204 | 0,02623 | 0,00228 | -0,12812 | 0,02594 |
| | | 8/12 | -0,26625 | 0,02566 | 0,00228 | -0,30234 | 0,02497 |
| | | 9/12 | -0,94073 | 0,02467 | 0,00228 | -0,97682 | 0,02244 |
| | | 10/12 | 0,089425 | 0,02214 | 0,00228 | 0,05334 | 0,02226 |
| | | 11/12 | -0,20784 | 0,02194 | 0,00228 | -0,24393 | 0,02138 |
| | | 12/12 | -0,75024 | 0,02116 | 0,00228 | -0,78632 | 0,01937 |
| | | 13/12 | -1,17556 | 0,01938 | 0,00228 | -1,21164 | 0,01662 |

O preço de uma obrigação de cupão zero, no momento t , que paga uma unidade no momento T , tendo apenas em conta o desconto relativo às expectativas da inflação é dado pela equação:

$$(22) \quad P_{\text{inf}}(t, T) = \exp[A(T-t) - B_1(T-t) \cdot q_1(t) - B_2(T-t) \cdot q_2(t)]$$

em que as expressões $B_1(T-t)$, $B_2(T-t)$ e $A(T-t)$ são idênticas às enunciadas para a variável da taxa de juro real com a devida substituição dos parâmetros pelos que constam da equação (21).

¹⁰ O parâmetro u_q utilizado para efeitos deste exemplo difere do utilizado na parametrização (Subcapítulo 7.2.8).

À semelhança do que foi estabelecido para a taxa de rendimento das obrigações para o modelo da taxa de juro, a taxa de rendimento (*yield*) das obrigações de cupão zero para as expectativas inflacionistas é dado por:

$$(23) \quad R_q(t, T) = \frac{-\log\{P_{\text{inf}}(t, T)\}}{(T - t)}.$$

7.2.3 ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JURO NOMINAL

A estrutura a termo da taxa de juro nominal não é mais do que a conjugação das estruturas a termo da taxa de juro real e da taxa de inflação. Pressupondo a independência entre os dois processos – taxa de juro real instantânea e taxa de inflação instantânea – a taxa de juro nominal é o resultado da soma entre a taxa de juro real $r_1(t)$ e a taxa de inflação $q_1(t)$. Consequentemente o preço de uma obrigação nominal de cupão zero é dado pela expressão:

$$(24) \quad P_{\text{nom}}(t, T) = P_{\text{real}}(t, T) \cdot P_{\text{inf}}(t, T)$$

No entanto, o pressuposto de independência assumido pode ser considerado de demasiado forte com o argumento de que subidas da taxa de inflação podem estar associadas a subidas da taxa de juro real. Assim, com base neste novo pressuposto, à equação (24) é adicionado um termo de covariância:

$$(25) \quad P_{\text{nom}}(t, T) = P_{\text{real}}(t, T) \cdot P_{\text{inf}}(t, T) + \rho \cdot \sqrt{\text{Var}[\exp\{-R_1(t, T)\}]} \sqrt{\text{Var}[\exp\{-R_q(t, T)\}]}$$

no qual

ρ – é o coeficiente de correlação entre o incremento aleatório do processo da taxa de juro real de curto prazo $dZ_{r_1}(t)$ e o incremento aleatório da taxa instantânea de inflação $dZ_{q_1}(t)$;

$$R_1(t, T) = \int_t^T r_1(s) ds \quad \text{e} \quad R_q(t, T) = \int_t^T q_1(s) ds.$$

A expressão analítica para o termo de covariância, mais precisamente para a expressão da variância da equação (25) pode ser encontradas em Hibbert (2001).

Por uma questão de simplificação, e atendendo a que os resultados obtidos incluindo o termo de covariância não têm diferenças significativas face aos resultados sem esse termo, vai partir-se do pressuposto que os processos da taxa de juro real e da taxa de inflação são independentes.

7.2.4 NUMERÁRIO

O rendimento nominal gerado pelo activo financeiro **numerário** é, neste modelo, determinado através da taxa continuamente composta aplicada a uma obrigação nominal de cupão zero a um ano. Considerando que o incremento de tempo utilizado para gerar as variáveis base $r_1(t)$ e $q_1(t)$ são mensais, isto é, $dt = 1/12$, então, o retorno anual (no momento t) para este activo financeiro é dado pela equação seguinte:

$$(26) \quad RT N(t) = -\log\{P_{nom}(t, t+1)\}.$$

Esta equação resulta das equações (20) e (24), fazendo $T = t + 12/12$ de onde resulta $T - t = 1$.

7.2.5 OBRIGAÇÕES DE TAXA FIXA

Neste subcapítulo pretende-se analisar os retornos totais gerados por obrigações nominais de taxa fixa de longo prazo. Os retornos totais podem ser obtidos de duas formas distintas, calculando a variação do preço de uma obrigação de um ano para o seguinte, tendo em atenção que há lugar ao pagamento de cupões em cada ano ou, em alternativa, considerando uma aproximação à variação do preço através da variação da taxa de rendimento anual da obrigação multiplicada pela duração¹¹ da obrigação. No decurso da presente dissertação vai utilizar-se a primeira das duas hipóteses.

¹¹ Duração de uma obrigação – é uma medida de sensibilidade do preço da obrigação a alterações da taxa de juro. Elton, E. e Gruber, M., (1991)

A metodologia escolhida para a determinação dos rendimentos totais assenta no pressuposto que se compra uma obrigação no início do período e se mantém essa obrigação até à sua maturidade, finda a qual se volta a comprar uma nova obrigação de maturidade semelhante. Considerando uma maturidade de 20 anos para as obrigações, o número de cupões da obrigação vai diminuindo, de 20 no momento 0 até 1 no momento 19, momento este em que se volta a comprar uma nova obrigação a 20 anos.

O preço de uma obrigação nominal de cupão vai ser determinado a partir do preço de uma série de obrigações nominais de cupão zero (tantas quantos os cupões da obrigação) dadas pela equação (24).

O preço de uma obrigação nominal de cupão é determinado pelo valor actual do fluxo de pagamentos individuais – respeitantes ao pagamento de cada um dos cupões no momento de vencimento do cupão – e que resulta da multiplicação do valor da obrigação nominal de cupão zero pela taxa de cupão. Considerando obrigações de longo prazo a j anos tem-se:

$$(27) \quad POC_{nom}(t, t + j) = \sum_{k=1}^j P_{nom}(t, t + k) \times P_k$$

no qual:

$POC_{nom}(t, t + j)$ – Preço da obrigação nominal de cupão, a j anos, no momento t ;

P_k – Taxa de cupão para cada um dos termos da obrigação nominal.

Considerou-se para este efeito que a taxa nominal do cupão é de 5%, ou seja, no final de cada ano é pago 5% do valor facial da obrigação. Assim,

$P_k = 0.05$ para $k = 1..j - 1$ e $P_k = 1.05$ para $k = j$.

O Quadro 12 ajuda a compreender o processo de determinação do preço de uma obrigação de cupão através de uma sucessão de obrigações de cupão zero.

Quadro 12 – Exemplo do processo de determinação do preço de uma obrigação nominal de taxa fixa de cupão 20

| Termo (k) | $P_{nom}(t,t+k)$ | P_k | $P_{nom}(t,t+k) * P_k$ |
|---------------------|------------------|-------|------------------------|
| 0 | | | |
| 1 | 0,9558 | 0,05 | 0,048 |
| 2 | 0,9100 | 0,05 | 0,045 |
| 3 | 0,8632 | 0,05 | 0,043 |
| 4 | 0,8161 | 0,05 | 0,041 |
| 5 | 0,7693 | 0,05 | 0,038 |
| 6 | 0,7233 | 0,05 | 0,036 |
| 7 | 0,6785 | 0,05 | 0,034 |
| 8 | 0,6352 | 0,05 | 0,032 |
| 9 | 0,5937 | 0,05 | 0,030 |
| 10 | 0,5541 | 0,05 | 0,028 |
| 11 | 0,5166 | 0,05 | 0,026 |
| 12 | 0,4811 | 0,05 | 0,024 |
| 13 | 0,4477 | 0,05 | 0,022 |
| 14 | 0,4164 | 0,05 | 0,021 |
| 15 | 0,3870 | 0,05 | 0,019 |
| 16 | 0,3596 | 0,05 | 0,018 |
| 17 | 0,3340 | 0,05 | 0,017 |
| 18 | 0,3101 | 0,05 | 0,016 |
| 19 | 0,2879 | 0,05 | 0,014 |
| 20 | 0,2673 | 1,05 | 0,281 |
| $POC_{nom}(t,t+20)$ | | | ← 0,833 |

Para determinar o retorno total subjacente às obrigações nominais, no momento t , é necessário obter o preço da obrigação no momento $t-1$, ao qual estão associados $k+1$ cupões (se considerar $t < 20$, então, $k = 20 - t$, sendo 20 o prazo da obrigação), e o preço da obrigação no momento t , composto por k cupões. A equação que permite o cálculo do retorno total, no momento t , é a seguinte:

$$(28) \quad RT_{OTF}(t) = \frac{POC_{nom}(t, t+k) + cn}{POC_{nom}(t-1, t-1+(k+1))}$$

onde:

$RT_{OTF}(t)$ é o retorno total para as obrigações nominais de taxa fixa no momento t ;

cn é a taxa de cupão nominal (5%);

k é o número de cupões que falta pagar até ao vencimento da obrigação, ou numa outra perspectiva, é o número de anos que falta até à maturidade da obrigação.

O exemplo do Quadro 13 torna mais fácil a compreensão do processo de determinação dos retornos totais das obrigações nominais de taxa fixa.

Quadro 13 – Exemplo do processo de determinação dos retornos totais das obrigações de taxa fixa

| Termo (t) | Cupões (k) | POC _{nom} (t,t+k) | cn | RT OTF(t) |
|-----------|------------|----------------------------|------|-----------|
| 0 | 20 | 0,8483 | | |
| 1 | 19 | 0,8399 | 0,05 | 0,049 |
| 2 | 18 | 1,0010 | 0,05 | 0,251 |
| 3 | 17 | 0,9822 | 0,05 | 0,031 |
| 4 | 16 | 1,1121 | 0,05 | 0,183 |
| 5 | 15 | 1,0736 | 0,05 | 0,010 |
| 6 | 14 | 1,1405 | 0,05 | 0,109 |
| 7 | 13 | 1,1530 | 0,05 | 0,055 |
| 8 | 12 | 1,0551 | 0,05 | -0,042 |
| 9 | 11 | 0,9679 | 0,05 | -0,035 |
| 10 | 10 | 1,0651 | 0,05 | 0,152 |
| 11 | 9 | 0,9972 | 0,05 | -0,017 |
| 12 | 8 | 0,9455 | 0,05 | -0,002 |
| 13 | 7 | 0,9647 | 0,05 | 0,073 |
| 14 | 6 | 0,9515 | 0,05 | 0,038 |
| 15 | 5 | 0,9182 | 0,05 | 0,018 |

As obrigações de taxa fixa, para além de serem um activo financeiro ao dispor dos investidores, são também importantes para a determinação da taxa de juro a aplicar nas anuidades. A taxa de rendimento (*yield*), intrínseca às obrigações de cupão de taxa fixa, congregam numa taxa a estrutura a termo da taxa de juro de 20 anos, daí o fundamento em utilizá-las como taxa técnica nas anuidades.

Para determinar a taxa de rendimento, continuamente composta, subjacente à obrigação nominal de taxa fixa a 20 anos é necessário determinar primeiro a taxa interna de rentabilidade (TIR) do fluxo de pagamentos e depois converter essa taxa discreta numa taxa continuamente composta ($\log[1 + TIR]$). O fluxo de pagamentos nominais é composto pelos cupões pagos em cada um dos termos mais o reembolso do valor da obrigação no último termo e ainda pelo valor do preço da obrigação no momento t (com sinal negativo). Portanto, a taxa de rendimento das obrigações é dada pela expressão:

$$\text{Tx Rend Obrig} = \log[1 + TIR(\text{Cash Flows Nominais})]$$

onde:

$TIR(\text{Cash Flows Nominais})$ é a taxa i que soluciona a seguinte equação

$$-POC_{nom}(t, t + 20) + \sum_{k=1}^{20} \frac{P_k}{(1 + i)^k} = 0.$$

O exemplo presente no Quadro 14, que é uma continuidade do exemplo expresso no Quadro 12, ajuda a compreensão do processo de determinação da taxa de rendimento das obrigações nominais de taxa fixa.

Quadro 14 – Exemplo do processo de determinação da taxa de rendimento das obrigações de taxa fixa

| Termo (k) | $P_{nom}(t,t+k)$ | P_k | $P_{nom}(t,t+k) * P_k$ | Cash Flows Nominais |
|-----------|------------------|-------|------------------------|---------------------|
| 0 | | | | -0,83 |
| 1 | 0,9558 | 0,05 | 0,048 | 0,05 |
| 2 | 0,9100 | 0,05 | 0,045 | 0,05 |
| 3 | 0,8632 | 0,05 | 0,043 | 0,05 |
| 4 | 0,8161 | 0,05 | 0,041 | 0,05 |
| 5 | 0,7693 | 0,05 | 0,038 | 0,05 |
| 6 | 0,7233 | 0,05 | 0,036 | 0,05 |
| 7 | 0,6785 | 0,05 | 0,034 | 0,05 |
| 8 | 0,6352 | 0,05 | 0,032 | 0,05 |
| 9 | 0,5937 | 0,05 | 0,030 | 0,05 |
| 10 | 0,5541 | 0,05 | 0,028 | 0,05 |
| 11 | 0,5166 | 0,05 | 0,026 | 0,05 |
| 12 | 0,4811 | 0,05 | 0,024 | 0,05 |
| 13 | 0,4477 | 0,05 | 0,022 | 0,05 |
| 14 | 0,4164 | 0,05 | 0,021 | 0,05 |
| 15 | 0,3870 | 0,05 | 0,019 | 0,05 |
| 16 | 0,3596 | 0,05 | 0,018 | 0,05 |
| 17 | 0,3340 | 0,05 | 0,017 | 0,05 |
| 18 | 0,3101 | 0,05 | 0,016 | 0,05 |
| 19 | 0,2879 | 0,05 | 0,014 | 0,05 |
| 20 | 0,2673 | 1,05 | 0,281 | 1,05 |

| | | |
|---------------------|------------------|---------------|
| 0,833 | 6,52% | 6,32% |
| ↓ | ↓ | ↓ |
| $POC_{nom}(t,t+20)$ | TIR(CF Nominais) | Tx Rend Obrig |

7.2.6 OBRIGAÇÕES DE TAXA INDEXADA

A diferença de uma obrigação de taxa indexada face a uma obrigação de taxa fixa é a de que nesta última a taxa nominal do cupão é fixada num determinado valor (no subcapítulo anterior estabeleceu-se esta taxa a 5%) e o cupão anual – montante que o investidor recebe em cada um dos anos – resulta da multiplicação dessa taxa pelo valor facial da obrigação. Em oposição, numa obrigação de taxa indexada o valor facial da obrigação não é constante mas sim variável (dado que está indexado ao valor da inflação) e, em contrapartida, fixa-se a taxa real do cupão. Por conseguinte, o rendimento gerado por obrigações de taxa indexada de longo prazo (20 anos) é

determinado pela soma da taxa de rendimento continuamente composta de uma obrigação real das expectativas da inflação, a 20 anos, com o valor da inflação.

Tal como no caso de uma obrigação de cupão de taxa fixa, o preço de uma obrigação de cupão de taxa indexada é determinado pelo valor actual do fluxo de pagamentos individuais – respeitantes ao pagamento de cada um dos cupões no momento de vencimento do cupão e ainda ao retorno do valor facial da obrigação – e que resulta da multiplicação do valor da obrigação (real) de expectativas de inflação de cupão zero pela taxa real de cupão. Considerando obrigações de longo prazo a 20 anos tem-se:

$$(29) \quad POC_{\text{inf}}(t, t + j) = \sum_{k=1}^j P_{\text{inf}}(t, t + k) \times P_k$$

onde:

$POC_{\text{inf}}(t, t + j)$ – Preço da obrigação real de cupão em relação às expectativas da inflação, a j anos, no momento t ;

P_k – Taxa de cupão para cada um dos termos da obrigação real. Considerou-se para este efeito que a taxa real do cupão é de 2,5%, ou seja, no final de cada ano é pago 2,5% do valor facial da obrigação (valor nominal da obrigação corrigido com a inflação). Assim, $P_k = 0.025$ para $k = 1..j - 1$ e $P_k = 1.025$ para $k = j$.

Para determinar o retorno total subjacente às obrigações de taxa indexada, no momento t , é necessário ter o preço da obrigação real no momento $t-1$, ao qual estão associados $k+1$ cupões (se considerar $t < 20$, então, $k = 20-t$, sendo 20 o prazo da obrigação), e o preço da obrigação real no momento t , composto por k cupões. Ao retorno total em termos reais é ainda necessário somar a taxa de inflação para se obter o retorno total nominal. A equação seguinte permite calcular o retorno total das obrigações de taxa indexada:

$$(30) \quad RT_{OTI}(t) = q_1(t) + \frac{POC_{\text{inf}}(t, t + k) + cr}{POC_{\text{inf}}(t - 1, t - 1 + (k + 1))}$$

no qual:

$RT_{OTI}(t)$ é o retorno total para as obrigações de taxa indexada, no momento t ;

$q_1(t)$ é a taxa de inflação no momento t ;

cr é a taxa de cupão real (2,5%);

k é o número de cupões que falta pagar até ao vencimento da obrigação, ou numa outra perspectiva, é o número de anos que falta até à maturidade da obrigação.

Quadro 15 – Exemplo do processo de determinação do retorno total das obrigações de taxa indexada

| Termo (t) | Cupões (k) | $POC_{inf}(t,t+k)$ | cr | $q_1(t)$ | RT OTI(t) |
|-----------|------------|--------------------|-------|----------|-----------|
| 0 | 20 | 0,8946 | | | |
| 1 | 19 | 0,9669 | 0,025 | 0,0194 | 0,128 |
| 2 | 18 | 1,0874 | 0,025 | 0,0095 | 0,160 |
| 3 | 17 | 1,0318 | 0,025 | 0,0118 | -0,016 |
| 4 | 16 | 1,0775 | 0,025 | 0,0079 | 0,076 |
| 5 | 15 | 1,0361 | 0,025 | 0,0062 | -0,009 |
| 6 | 14 | 1,0691 | 0,025 | 0,0073 | 0,063 |
| 7 | 13 | 1,1228 | 0,025 | 0,0120 | 0,086 |
| 8 | 12 | 1,0304 | 0,025 | 0,0198 | -0,040 |
| 9 | 11 | 0,9955 | 0,025 | 0,0190 | 0,009 |
| 10 | 10 | 1,0817 | 0,025 | 0,0219 | 0,134 |
| 11 | 9 | 1,0810 | 0,025 | 0,0192 | 0,042 |
| 12 | 8 | 1,0682 | 0,025 | 0,0149 | 0,026 |
| 13 | 7 | 1,0727 | 0,025 | 0,0132 | 0,041 |
| 14 | 6 | 1,0609 | 0,025 | 0,0060 | 0,018 |
| 15 | 5 | 1,0138 | 0,025 | 0,0139 | -0,007 |

Para melhor compreender o processo de determinação da taxa de rendimento de obrigações de taxa indexada analise-se o Quadro 15.

7.2.7 ACÇÕES

Para modelizar o comportamento dos índices accionistas existem uma imensa panóplia de modelos, com diferentes graus de complexidade, sendo que a forma mais usual de o modelizar é assumir que segue uma distribuição *Lognormal*. Como estas variáveis financeiras apresentam uma cauda da distribuição bastante larga (onde se encontram os eventos extremos, que neste caso se traduzem nas valorizações/desvalorizações extremas do índice de bolsista) a adequação deste tipo de modelo estará dependente do objectivo da modelização. Assim, como o objectivo não é estudar a ocorrência de

eventos extremos mas sim modelizar o comportamento do índice, então, justifica-se a utilização de um modelo baseado na distribuição *Lognormal*.

No sentido de replicar o comportamento real dos retornos das acções vai utilizar-se um modelo de transição de estados de *Markov* (*Markov regime switching model*) de modo a que a distribuição dos retornos, produzida pelo modelo, seja consistente com os dados empíricos. A essência do modelo de transição de estados de *Markov* baseia-se no facto de se ter disponível dois estados da natureza ao qual correspondem duas distribuições para os retornos das acções. A distribuição final dos retornos das acções é um processo que salta de um estado para outro de acordo com uma matriz de probabilidades de transição.

Este modelo de transição de estados vai ser utilizado para modelizar o logaritmo do excesso de rendibilidade das acções face ao activo sem risco. Como referência para activo sem risco considerou-se uma obrigação nominal de taxa fixa de curto prazo (com o termo da obrigação igual a um ano), ou seja, o activo numerário tal como definido no Subcapítulo 7.2.4.

Em suma, o retorno total em acções para um dado período de tempo – $E(t)$ – resulta da soma do retorno da obrigação nominal de curto prazo com o excesso de rendibilidade das acções face a esse activo sem risco:

$$(31) \quad E(t) = \ln \left\{ \frac{1}{P_{nom}(t, t+12)} \right\} + X(t)$$

em que:

$P_{nom}(t, t+12)$ – Preço de uma obrigação nominal de cupão zero – equação (24);

$X(t)$ – Excesso de rendibilidade das acções face ao activo sem risco. $X(t)$

tem uma distribuição normal:

- de média $\mu_{E,1}$ e variância $\sigma_{E,1}^2$ se o modelo está no Estado 1;

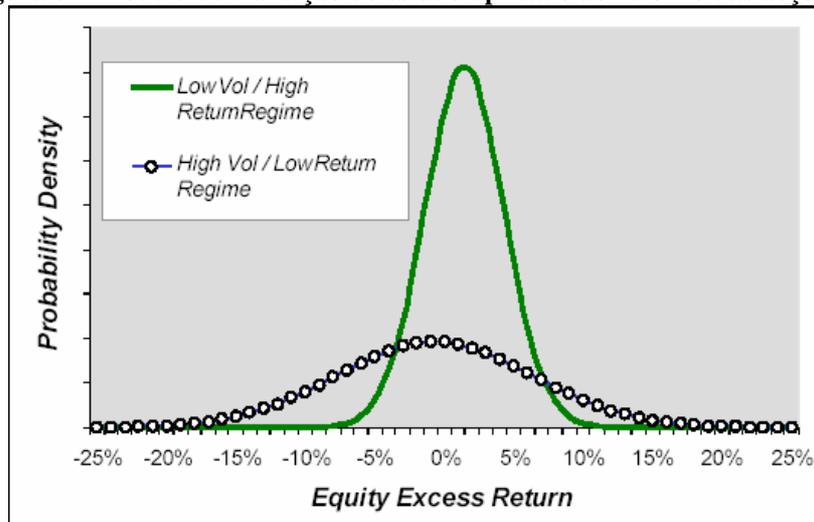
- de média $\mu_{E,2}$ e variância $\sigma_{E,2}^2$ se o modelo está no Estado 2.

A matriz de probabilidades de transição que determina a forma como o modelo de retorno das acções transita de um estado para outro é dado por:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & 1 - P_{11} \\ 1 - P_{22} & P_{22} \end{bmatrix}$$

no qual P_{11} é a probabilidade de, sabendo que no momento t o modelo se encontra no Estado 1, o modelo manter-se no mesmo estado (1) no momento seguinte ($t+1$). P_{22} tem uma interpretação análoga mas para o Estado 2.

Figura 3 – Modelo de transição de estado aplicado ao retorno das acções



Fonte – Hibbert (2001)

Os dois estados do modelo permitem distinguir entre uma situação de retorno das acções de média positiva e uma variabilidade reduzida (Estado 1 – situação económica favorável) e uma situação de retorno das acções em que a média é negativa mas apresenta uma maior variabilidade (Estado 2 – situação económica desfavorável). Os retornos das acções são gerados, na maioria das vezes, pelo estado favorável mas existem períodos de grande variabilidade dos retornos quando o modelo passa pelo estado desfavorável. As probabilidades P_{11} e P_{22} permitem determinar a probabilidade de permanência em cada um dos estados e qual a frequência com que muda de um estado para o outro.

A Figura 3 permite evidenciar o modelo de transição de estados aplicado ao retorno das acções, mostrando as distribuições subjacentes a cada um dos estados. Portanto, a linha verde e azul mostram a densidade de probabilidade associada à distribuição do excesso

de rendibilidade das acções (face ao activo sem risco) subjacente, respectivamente, ao Estado 1 e ao Estado 2. O quadro 16 exemplifica o processo de determinação do retorno total das acções.

Quadro 16 – Exemplo do processo de determinação do retorno total das acções

| Termo (t) | Estado | $P_{nom}(t,t+12)$ | $Zx(t)$ | $X(t)$ | $E(t)$ |
|--------------|--------|-------------------|---------|---------|--------|
| 0 | | | | | |
| 1 | 1 | 0,9668 | -0,5875 | 0,0604 | 0,094 |
| 2 | 1 | 0,9638 | -1,1460 | 0,0057 | 0,043 |
| 3 | 2 | 0,9663 | 0,5970 | 0,0097 | 0,044 |
| 4 | 2 | 0,9716 | 0,9919 | 0,1060 | 0,135 |
| 5 | 2 | 0,9756 | 0,8975 | 0,0830 | 0,108 |
| 6 | 2 | 0,9739 | 0,7924 | 0,0573 | 0,084 |
| 7 | 2 | 0,9670 | 0,8583 | 0,0734 | 0,107 |
| 8 | 2 | 0,9684 | 1,7646 | 0,2946 | 0,327 |
| 9 | 2 | 0,9648 | 0,8458 | 0,0704 | 0,106 |
| 10 | 2 | 0,9643 | -0,7648 | -0,3226 | -0,286 |
| 11 | 2 | 0,9571 | 0,1430 | -0,1011 | -0,057 |
| 12 | 1 | 0,9553 | 1,5928 | 0,2741 | 0,320 |
| 13 | 1 | 0,9532 | -2,0514 | -0,0830 | -0,035 |
| 14 | 1 | 0,9429 | -2,8617 | -0,1624 | -0,104 |
| 15 | 1 | 0,9453 | -3,7505 | -0,2495 | -0,193 |

7.2.8 PARAMETRIZAÇÃO E RESULTADOS

Depois de se ter apresentado, nos subcapítulos anteriores, as equações que modelizam o comportamento das diversas variáveis base do modelo e dos respectivos activos financeiros chegou o momento de mostrar a parametrização escolhida e apresentar alguns quadros e gráficos dos resultados obtidos com este modelo.

A parametrização apresentada diz respeito aos parâmetros estimados no estudo original (e que podem ser consultados em Hibbert (2001)), à excepção de três parâmetros (u_q , u_r , $\mu_{E,2}$) que foram alterados de forma a obter maiores diferenças entre as obrigações e as acções. No artigo de Hibbert são apresentadas duas parametrizações do modelo, uma primeira de análise de consistência do modelo e uma segunda que se aproxima mais da

realidade económica. Para a presente dissertação, a escolha recaiu sobre a segunda das alternativas.

Quadro 17 – Parametrização do submodelo de Hibbert

| Taxa Real de Juro | | Taxa de Inflação | |
|-------------------|--------|------------------|--------|
| Parâmetro | Valor | Parâmetro | Valor |
| α_{r1} | 0,025 | α_{q1} | 0,3 |
| α_{r2} | 0,05 | α_{q2} | 0,1 |
| σ_{r1} | 0,005 | σ_{q1} | 0,008 |
| σ_{r2} | 0,01 | σ_{q2} | 0,012 |
| u_r | 0,0425 | u_q | 0,034 |
| g_r | -0,125 | g_q | -0,125 |
| $r_{1(0)}$ | 0,025 | $q_{1(0)}$ | 0,025 |
| $r_{2(0)}$ | 0,0275 | $q_{2(0)}$ | 0,0283 |
| b_{r1} | -0,05 | b_{q1} | -0,05 |
| b_{r2} | 0 | b_{q2} | 0 |
| Acções | | | |
| Parâmetro | Valor | | |
| $\mu_{E,1}$ | 0,118 | | |
| $\sigma_{E,1}$ | 0,098 | | |
| $\mu_{E,2}$ | -0,104 | | |
| $\sigma_{E,2}$ | 0,244 | | |
| P_{11} | 0,929 | | |
| P_{22} | 0,879 | | |

O Quadro 18 evidencia os resultados do submodelo de retorno dos investimentos de Hibbert, com base em 1000 simulações e na parametrização apresentada no Quadro 17. Os resultados dizem respeito a valores nominais e foram obtidos tendo em consideração um horizonte temporal de simulação de 30 anos. Em comparação com o Quadro 9 (de apresentação de resultados do submodelo de Wilkie) não foi considerada a variável base salários nem o activo financeiro imobiliário porque o modelo de Hibbert não os contempla.

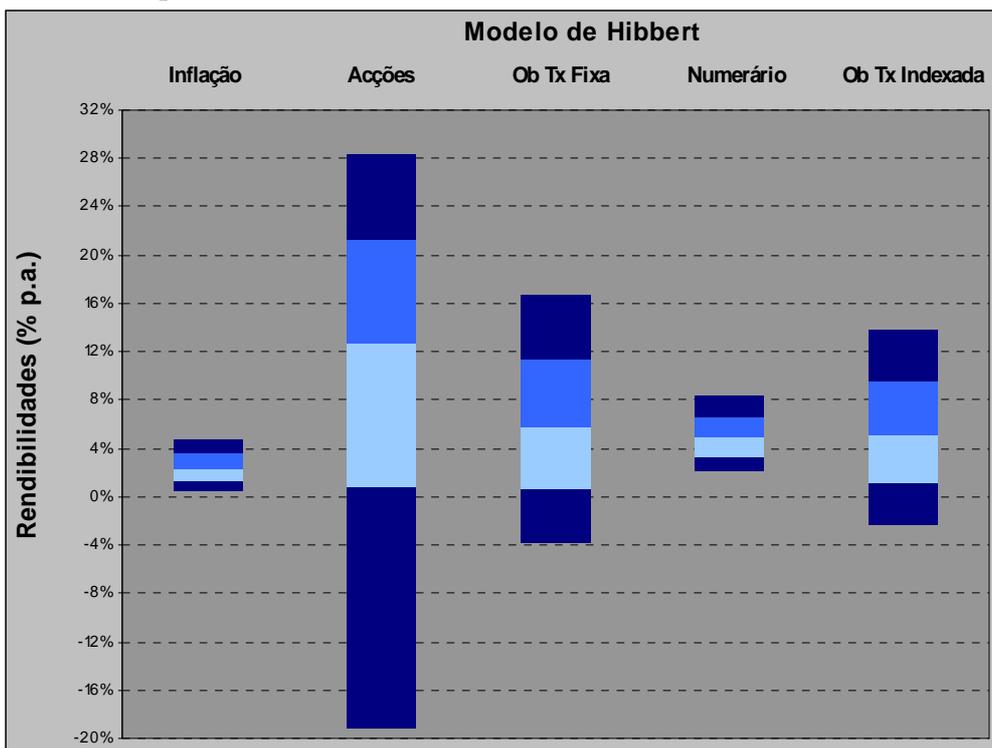
Quadro 18 – Resultados do submodelo de Hibbert

| Variável Base / Activo Financeiro | Média | Desvio Padrão |
|-----------------------------------|-------|---------------|
| Inflação | 2,5% | 1,7% |
| Acções | 8,8% | 19,6% |
| Obrigações Taxa Fixa | 6,1% | 8,3% |
| Numerário | 5,1% | 2,5% |
| Obrigações Taxa Indexada | 5,5% | 6,5% |

Seguidamente, e à semelhança do que foi feito no outro submodelo, são ainda apresentados os gráficos de: dispersão das rendibilidades dos diversos activos e variáveis modelizados (Gráfico 7); de dispersão das rendibilidades das obrigações de taxa fixa durante os primeiros 10 anos de simulação (Gráfico 8); da distribuição das trajectórias da taxa de inflação (Gráfico 9) e da taxa de rendimento do activo numerário (Gráfico 9).

Quando se compara este Gráfico (7) com o homólogo do submodelo de Wilkie verifica-se que as diferenças não são, de facto, muito significativas, apenas há a destacar uma maior dispersão das acções e do numerário face aos respectivos do submodelo de Wilkie.

Gráfico 7– Dispersão das rendibilidades dos activos e variáveis do submodelo de Hibbert



Já em relação ao Gráfico 8 – sobre a dispersão das rendibilidades das obrigações de taxa fixa nos primeiros 10 anos – as diferenças são um pouco mais significativas. A principal diferença reside no facto de a dispersão ser decrescente com o tempo, dado que para a determinação da taxa de rendimento das obrigações se faz variar o número de cupões

em cada um dos anos de simulação (começa com 20 anos e diminui até uma obrigação de cupão zero a partir do qual volta novamente a considerar 20 cupões).

Gráfico 8 – Dispersão das rendibilidades das obrigações de taxa fixa do submodelo de Hibbert, para os 10 primeiros anos

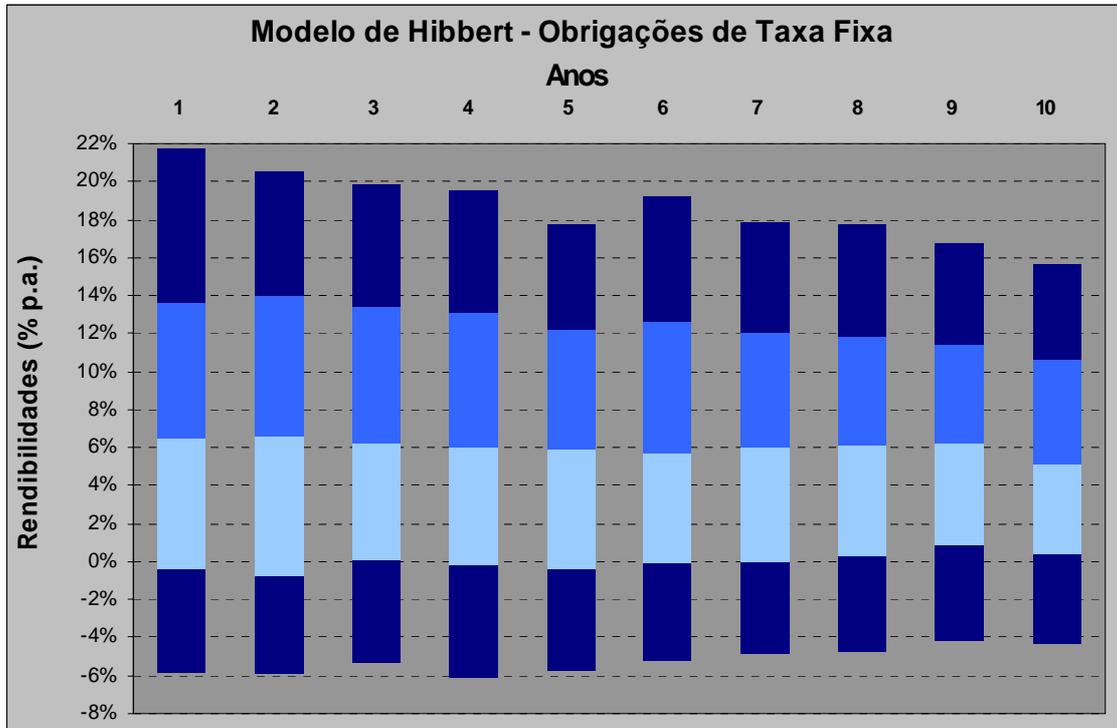
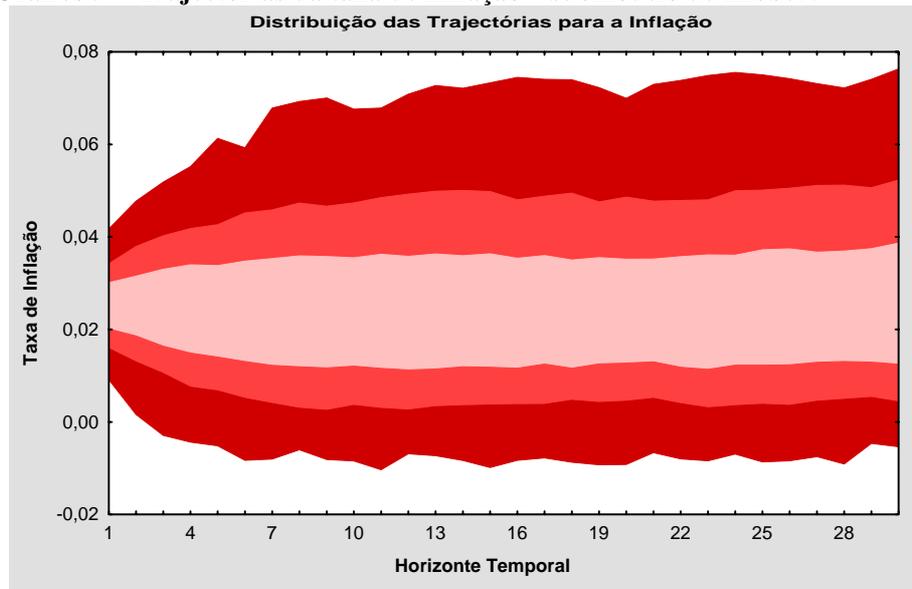


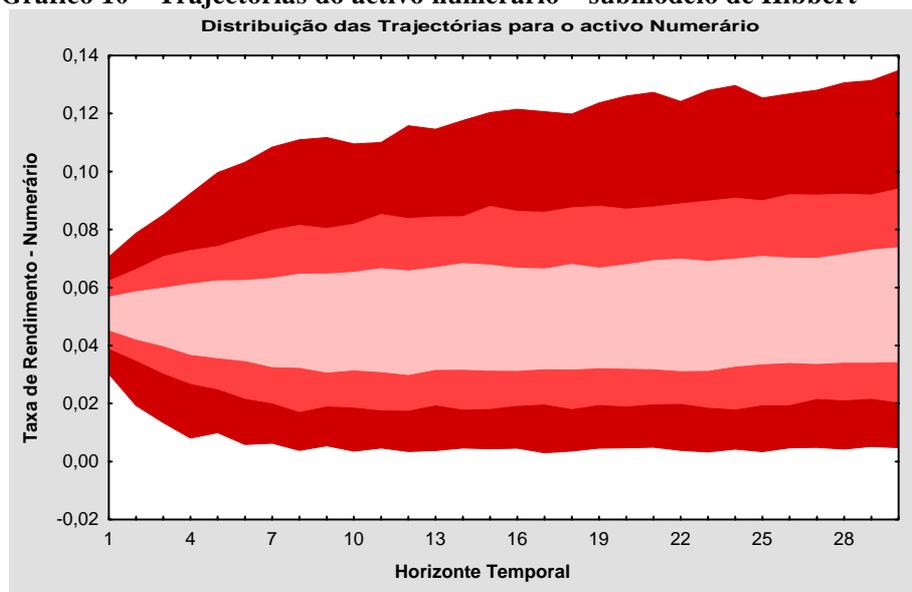
Gráfico 9 – Trajectórias da taxa de inflação – submodelo de Hibbert



Relativamente aos gráficos das trajectórias e fazendo a comparação com os respectivos gráficos do outro submodelo, é visível a diferença de comportamento das distribuições

nos primeiros anos de simulação. Nos gráficos do submodelo de Hibbert a dispersão das trajetórias tende a crescer até um determinado momento, a partir do qual estabiliza por via do efeito de reversão em relação à média. Por outro lado, devido à calibração do modelo de Hibbert que impede a existência de valores negativos existe uma maior probabilidade associada a eventos extremos positivos (acima do percentil 90).

Gráfico 10 – Trajetórias do activo numerário – submodelo de Hibbert



7.3 COMPARAÇÃO DOS DOIS MODELOS

Os modelos descritos nos capítulos antecedentes (7.1– Modelo de Wilkie e 7.2 – Modelo de Hibbert) têm aproximações bastante distintas quanto à modelização do comportamento de longo prazo das variáveis financeiras.

No submodelo de Wilkie são analisadas estatisticamente as séries temporais de algumas variáveis: inflação, taxa de juro de curto prazo, obrigações de taxa fixa e indexada, retornos dos dividendos e taxa de rendimento dos dividendos das acções. A partir destas variáveis determinam-se os preços, tal como acontece para o caso das acções que é o resultado do rácio entre o índice de dividendos das acções e a taxa de rendimento das acções. No caso do modelo de Hibbert o retorno total das acções é determinado de forma independente da taxa de rendimento dos dividendos das acções, tornando o processo de determinação do preço das acções mais simples e transparente.

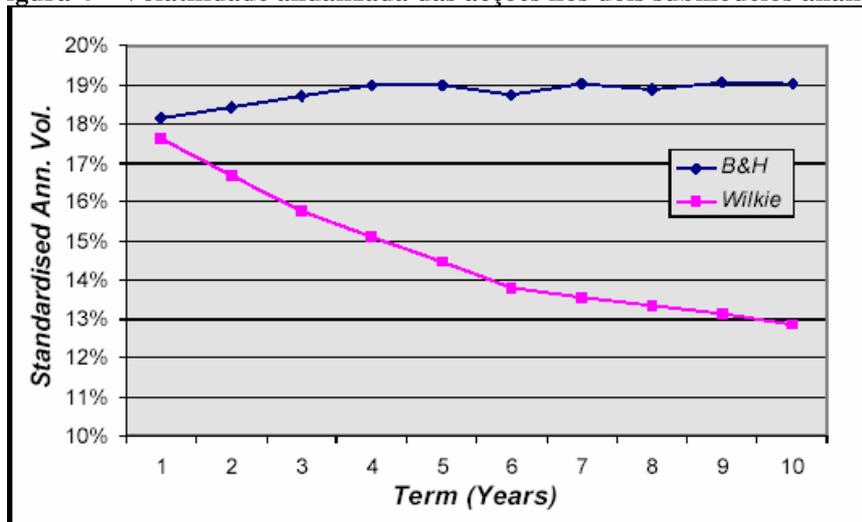
Embora a estrutura do modelo de Wilkie possa ser considerada mais simples em termos matemáticos, ela apresenta algumas inconsistências. Assim, há quem considere que o modelo não é transparente, que está sobre-parametrizado e que a complexa estrutura do modelo foi construída com base na observação de dados passados em vez de ser construída com base em relações consistentes entre as variáveis económicas. Em contrapartida, o modelo de Hibbert é economicamente mais lógico, pois constroem-se modelos para a taxa de juro real, taxa de inflação e excesso de rendibilidade das acções face à taxa de juro nominal que asseguram uma consistência económica entre as diversas variáveis.

De seguida, apresentam-se algumas das inconsistências económicas inerentes ao modelo de Wilkie, no qual se chama a atenção para a dificuldade deste modelo em capturar algumas das essências da realidade económica.

- ✦ A relação entre a inflação e o retorno das obrigações de longo prazo de taxa fixa não são, por vezes, consistentes. O modelo de Wilkie gera por vezes cenários de inflação baixa a que correspondem elevados retornos das obrigações, daí a crítica que o modelo não captura a ligação fundamental entre a inflação e os retornos nominais das obrigações.
- ✦ O modelo gera uma volatilidade plausível em horizontes temporais curtos mas a diminuição dessa mesma volatilidade à medida que o horizonte temporal se alarga deixa de ser tão credível. O princípio que está em causa é o de que a probabilidade aplicada a choques negativos no mercado accionista (no longo prazo) é implausivelmente baixo tendo em conta que um dos objectivos é analisar o impacto de eventos de baixa probabilidade (como sejam estes declínios do mercado accionista). É possível, no entanto, aumentar a volatilidade das acções no longo prazo, porém, para que isso aconteça os aumentos da volatilidade no curto prazo tornam-se demasiado implausíveis.

A Figura 4 evidencia a maior das diferenças entre os modelos – a forma distinta como a volatilidade anualizada se comporta nos dois modelos à medida que o horizonte temporal se alonga. A queda acentuada na volatilidade ao fim de 10 anos implica que o modelo de Wilkie atribui uma probabilidade muito pequena a retornos negativos no final dos 10 anos.

Figura 4 – Volatilidade anualizada das ações nos dois submodelos analisados



Fonte – Hibbert (2001)

Nota: esta crítica ao modelo de Wilkie tem por base a volatilidade anualizada acumulada ao fim dos 10 anos, de acordo com a fórmula de cálculo apresentada pelo seu autor. Como na presente dissertação se consideram os retornos anuais (e não os acumulados) não se verifica a diminuição da volatilidade apresentada na Figura 4. Não obstante, a crítica permanece válida para o modelo original.

- ✦ No modelo de Wilkie, não existe uma interligação económica forte entre a taxa de juro de curto e de longo prazo como existe no modelo de Hibbert. Isto decorre do facto de o modelo de Wilkie não gerar uma estrutura a termo completa para a taxa de juro, tal como é feito no outro modelo e que permite estabelecer uma taxa de juro *spot* de longo prazo como a trajectória esperada da taxa de juro de curto prazo adicionada de um prémio de risco adicional.

- ✦ Os modelos para a inflação são relativamente semelhantes nos dois modelos, dado que ambos têm distribuição Normal e são modelizados como processos de reversão à média, embora um seja apresentado em tempo discreto e o outro em tempo contínuo. Apesar destas semelhanças há uma diferença significativa: no modelo de Hibbert a inflação é modelizada através de duas variáveis estocásticas (a taxa de inflação e a taxa com que esta regressa para o seu valor médio) que permite uma maior variedade das curvas das expectativas de inflação futuras. A implicação deste segundo factor sente-se na forma como permite que o modelo tenha uma volatilidade elevada no longo prazo sem que implique necessariamente uma volatilidade elevada no curto prazo, tal como acontece no modelo de Wilkie.

8. SUBMODELOS DOS SALÁRIOS

Na apresentação do modelo global de desenho estocástico de planos de contribuição definida, feita na Parte II, o submodelo dos salários representa o último dos dois submodelos definidos.

Não obstante o inferior grau de complexidade do submodelo dos salários quando comparado com o de retorno dos investimentos, esta variável desempenha um importante papel na determinação da taxa de substituição.

Existem diversas formas de definir funções que repliquem o comportamento dos salários. De seguida, são apresentadas algumas.

- ✦ **Modelo de Wilkie** – A metodologia do modelo de Wilkie para os salários representa uma das formas de definir o crescimento salarial. Neste modelo os salários são modelizados através da inflação, de uma média de crescimento real (líquida do efeito da inflação) e ainda de um resíduo aleatório de distribuição Normal. Ver Subcapítulo 7.1.2.

- ✦ **Funções estritamente decrescentes** – Uma outra forma de definir o comportamento dos salários é a defendida por *Carriere e Shand* (1997), que definem uma função salarial do tipo:

$$S_x = \exp\left\{\xi \times x + \int_0^x \psi_z dz\right\} \text{ em que } \psi_z = \beta \cdot e^{-\lambda z}, \beta > 0, \lambda > 0.$$

Esta é uma função constituída por uma componente de inflação ($\xi \times x$) e uma componente de mérito (ψ_z), sendo esta última estritamente decrescente com a idade, ou seja, os indivíduos apresentam maiores crescimentos salariais no início da carreira, pelo que à medida que os anos vão passando a sua componente de mérito vai diminuindo.

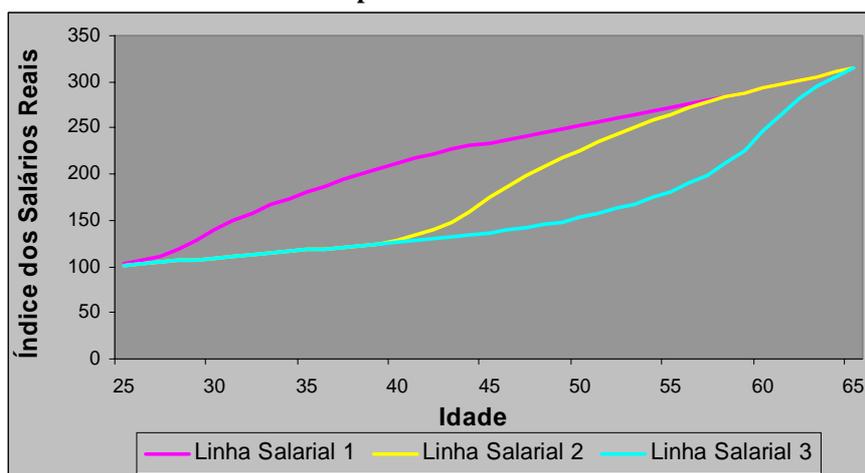
- ✦ **Equação Diferencial Estocástica** – Se assumir-se que o crescimento real dos salários (ao qual se adiciona depois o valor da inflação) pode ser descrito por um processo de difusão (Movimento *Browniano*), então, tem-se uma forma adicional de modelizar os salários. Nesta situação ter-se-ia uma equação que define a dinâmica do comportamento dos salários cuja equação diferencial teria de ser resolvida para poder obter as trajectórias dos salários ou, em alternativa, obter-se-iam essas trajectórias através de métodos de discretização das equações diferenciais estocásticas.

- ✦ **Linha Salarial** – Esta forma de modelizar o comportamento dos salários consiste em definir *a priori* a evolução do crescimento real dos salários, à qual se adicionaria o valor da inflação para obtenção do valor nominal do crescimento salarial. Neste caso, não existe uma função que define o comportamento aleatório dos salários, porque os crescimentos salariais passam a estar previamente definidos. Assim, os salários deixam de ser uma variável aleatória e uma fonte de incerteza para o modelo global de desenho estocástico de planos de contribuição definida. No fundo, esta linha salarial reflecte ou um estudo estatístico sobre os salários de uma determinada empresa ou então a opinião pessoal (credibilidade) do modelizador.

De entre opções apresentadas, e outras existem que não foram aqui consideradas, a selecção recaiu sobre a última. O objectivo desta dissertação, sobre o desenho estocástico de planos de contribuição definida, é analisar os resultados das simulações para um determinado plano e compreender quais os factores que influenciam a qualidade do benefício atribuído. Assim, a forma mais simples de analisar o desenho dos planos relativamente aos salários e ao seu impacto na qualidade do benefício atribuído pelo plano é através da utilização de linhas salariais.

Ao utilizarem-se linhas salarias em detrimento de outras formas de modelizar os salários reduz-se a incerteza dos resultados obtidos quanto à taxa de substituição, pois o salário real deixa de ser modelizado através de um processo estocástico (ao qual está associado uma incerteza) mas passa a ser pré-estabelecido e constante para todas as simulações.

Gráfico 11 – Índice salarial para as três linhas salariais analisadas



Como o objectivo é analisar e compreender o impacto das evoluções salariais na taxa de substituição vão ser utilizadas três linhas salariais, que reflectem três situações distintas de evolução salarial. Tendo os resultados para estas três situações consegue-se abranger um leque aceitável de situações possíveis de evolução salarial.

As três situações correspondem a: uma situação em que o pico do crescimento real dos salários acontece no início da carreira (30 anos); a uma situação em que esse pico ocorre sensivelmente a meio da carreira (45 anos) e finalmente a uma situação em que o pico ocorre no final da carreira (60 anos). O Quadro 19 sintetiza esta informação e o Gráfico

11 apresenta a evolução do índice dos salários, que evidencia as diferenças entre as três situações analisadas.

Quadro 19 – Evolução salarial – as três situações estudadas

| Idade | Linha Salarial 1 | Linha Salarial 2 | Linha Salarial 3 |
|--------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 25 | 3,00% | 1,50% | 1,50% |
| 26 | 3,50% | 1,50% | 1,50% |
| 27 | 4,75% | 1,50% | 1,50% |
| 28 | 6,50% | 1,50% | 1,50% |
| 29 | 7,75% | 1,50% | 1,50% |
| 30 | 9,00% | 1,50% | 1,50% |
| 31 | 7,00% | 1,50% | 1,50% |
| 32 | 6,00% | 1,50% | 1,50% |
| 33 | 5,00% | 1,50% | 1,50% |
| 34 | 4,50% | 1,50% | 1,50% |
| 35 | 4,00% | 1,50% | 1,50% |
| 36 | 3,75% | 1,50% | 1,50% |
| 37 | 3,50% | 1,50% | 1,50% |
| 38 | 3,25% | 1,50% | 1,50% |
| 39 | 3,00% | 1,50% | 1,50% |
| 40 | 2,75% | 3,00% | 1,50% |
| 41 | 2,50% | 3,50% | 1,50% |
| 42 | 2,25% | 4,75% | 1,50% |
| 43 | 2,00% | 6,50% | 1,50% |
| 44 | 1,75% | 7,75% | 1,50% |
| 45 | 1,50% | 9,00% | 1,50% |
| 46 | 1,50% | 7,00% | 1,75% |
| 47 | 1,50% | 6,00% | 2,00% |
| 48 | 1,50% | 5,00% | 2,25% |
| 49 | 1,50% | 4,50% | 2,50% |
| 50 | 1,50% | 4,00% | 2,75% |
| 51 | 1,50% | 3,75% | 3,00% |
| 52 | 1,50% | 3,50% | 3,25% |
| 53 | 1,50% | 3,25% | 3,50% |
| 54 | 1,50% | 3,00% | 3,75% |
| 55 | 1,50% | 2,75% | 4,00% |
| 56 | 1,50% | 2,50% | 4,50% |
| 57 | 1,50% | 2,25% | 5,00% |
| 58 | 1,50% | 2,00% | 6,00% |
| 59 | 1,50% | 1,75% | 7,00% |
| 60 | 1,50% | 1,50% | 9,00% |
| 61 | 1,50% | 1,50% | 7,75% |
| 62 | 1,50% | 1,50% | 6,50% |
| 63 | 1,50% | 1,50% | 4,75% |
| 64 | 1,50% | 1,50% | 3,50% |
| 65 | 1,50% | 1,50% | 3,00% |

Parte IV – Simulação Estocástica de um Plano de Contribuição Definida

As simulações apresentadas nesta última Parte são o resultado final da congregação de toda a informação (conceitos, modelos e submodelos) veiculada nos capítulos anteriores. Esta Parte está subdividida em três capítulos, um primeiro onde se mostram e explicam os resultados da simulação base, um segundo onde é feita uma análise de sensibilidade a alguns dos parâmetros do modelo global e, finalmente, um terceiro onde se compara os resultados da simulação estocástica com os resultados de um modelo determinístico.

9. CENÁRIO BASE

Para o cenário base considerou-se um indivíduo de 35 anos que permanecerá numa empresa, detentora do plano de contribuição definida que se pretende estudar, até à idade normal de reforma – 65 anos. A taxa de contribuição (um dos parâmetros do modelo) é estabelecida em 5% do salário (nominal) do indivíduo. O salário real do indivíduo vai crescer de acordo com a linha salarial 2.

A contribuição para a conta individual do fundo de pensões é feita de uma só vez (contribuição anual), no início do ano, e é somada ao montante acumulado na conta. O montante total do fundo, no início de cada período, é investido no mercado financeiro e o seu retorno anual resulta da estratégia escolhida e do modelo de retorno dos investimentos utilizado.

Tal como descrito no Subcapítulo 5.2.1., existe um leque de quatro opções no que respeita às estratégias de alocação dos activos:

- ✦ **Estratégia a) – 50/50** – consiste em investir **50% no activo numerário e 50% em obrigações de taxa fixa**. É uma estratégia extremamente conservadora cujo principal objectivo é garantir o montante já acumulado, daí o investimento em activos de baixo risco mesmo que essa escolha signifique um baixo nível de pensão (a que corresponde uma taxa de substituição baixa);

- ✦ **Estratégia b) – MFP** – a carteira de activos é composta por **75% em acções, 15% em obrigações de taxa fixa, 5% em numerário** e os restantes **5% em obrigações de taxa indexada**. A opção (talvez um pouco extrema) tomada relativamente à composição dos activos desta carteira tem como objectivo analisar a situação extrema (à da carteira **50/50**) de uma estratégia de investimento arrojada, ou seja, com um perfil de risco elevado;
- ✦ **Estratégia c) – Ciclo de Vida** – estratégia que consiste em seleccionar a estratégia **b)** durante os primeiros anos e, à medida que se aproxima da idade de reforma, ir progressivamente alterando a composição da carteira de modo a coincidir com a estratégia **a)**. Considerou-se um período de transição de 10 anos;
- ✦ **Estratégia d) – Nível de Benefício** – são definidos dois níveis de benefício (medidos em taxa de substituição) – um patamar superior (P_S) e um patamar inferior (P_I) – tal que a estratégia consiste em investir 100% na carteira MFP se a taxa de substituição for inferior a P_I ou investir 100% na carteira 50/50 se a taxa de substituição for superior a P_S . Atendendo à taxa de contribuição de 5% e ao horizonte temporal de 30 anos estabeleceu-se os respectivos patamares em 10% para P_I e 15% para P_S .

No final do período de contribuição, ou seja, findos os 30 anos de acumulação, o valor do fundo é transformado numa pensão vitalícia sem reversibilidade de acordo com uma anuidade determinada com base na tábua de mortalidade francesa TV 73-77, com 2% de crescimento anual das pensões e uma taxa técnica dada por 60% da taxa de rendimento (*yield*) das obrigações de taxa fixa de longo prazo. A aplicação de 60% sobre a taxa de rendimento das obrigações foi a forma encontrada (é apenas uma aproximação de entre muitas outras possíveis) para aproximar estas taxas das utilizadas no mercado pelas seguradoras. A ideia subjacente a esta aproximação é a de que o fundo capitalizado é posteriormente utilizado para comprar uma anuidade no mercado segurador, daí a taxa técnica mais baixa. Uma alternativa menos provável (e também mais difícil de justificar) seria a de considerar que as pensões seriam pagas pelo fundo de pensões, situação onde já se poderia considerar uma taxa técnica dada pela *yield* das obrigações.

É conveniente, no entanto, salientar que a modelização da taxa técnica de juro a utilizar na determinação do valor da anuidade é relativamente distinta nos dois submodelos considerados. Enquanto no submodelo de Wilkie utiliza-se a variável $C(t)$ (taxa de rendimento das obrigações a longo prazo emitidas pelo Estado) referida no Subcapítulo 7.1.4, no submodelo de Hibbert utiliza-se a taxa de rendimento das obrigações de cupão (20 anos) mencionada no Subcapítulo 7.2.5.

Em resumo, os pressupostos utilizados nas simulações do cenário base são:

| Pressupostos | | Pressupostos | |
|----------------------|---------|-------------------|----------|
| Horizonte Temporal | 30 anos | Tábua Mortalidade | TV 73-77 |
| Taxa de Contribuição | 5% | Reversibilidade | 0% |
| Linha Salarial | 2 | Encargos Administ | 0% |

Para cada cenário foram geradas 1000 simulações e registado o valor da taxa de substituição. Com base nestes valores obtém-se a distribuição empírica das taxas de substituição assim como outras estatísticas relevantes.

9.1 ANÁLISE DO QUADRO DE RESULTADOS

O Quadro 20 mostra as principais estatísticas das simulações feitas para o cenário base. Como seria de esperar, tendo em conta a definição de cada uma das estratégias, a estratégia **a)** é a que atribui um benefício médio inferior enquanto a estratégia **b)** é a que confere uma nível médio de benefício mais elevado. Por outro lado, a dispersão da taxa de substituição é maior na estratégia **b)** do que na estratégia **a)**, porque o risco associado aos activos que compõem a carteira da estratégia **b)** é bem superior ao risco dos activos que compõe a carteira da estratégia **a)**. Como as estratégias **c)** e **d)** não são mais do que uma combinação linear das duas primeiras, os resultados obtidos encontram-se, naturalmente, limitados pelos das estratégias **a)** e **b)**. Estes raciocínios são válidos para qualquer um dos submodelos.

Ao analisarmos os resultados de cada um dos submodelo (Subcapítulo 7.1.8. para o submodelo de Wilkie e 7.2.8. para o submodelo de Hibbert), em termos das rendibilidades médias e das volatilidades dos activos modelizados, não encontramos

diferenças significativas, então, porque razão as taxas de substituição apresentam uma média e uma dispersão superior no submodelo de Hibbert?

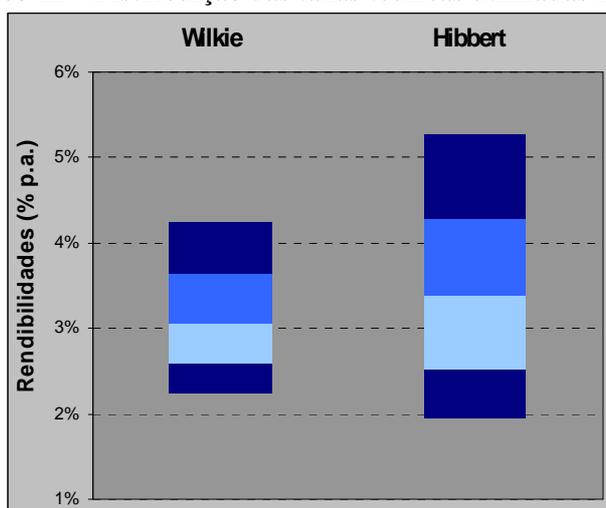
Quadro 20 – Estatísticas das simulações do cenário base

| Modelo Wilkie | | | | | |
|----------------------|--------------|-----------|----------------|----------------|----------------|
| Estratégia | Média | DP | 95% VaR | 80% VaR | 50% VaR |
| a) 50/50 | 11,67% | 2,41% | 8,67% | 9,84% | 11,22% |
| b) MFP | 16,60% | 4,52% | 10,49% | 12,83% | 16,05% |
| c) Ciclo Vida | 14,92% | 3,22% | 10,39% | 12,29% | 14,42% |
| d) Nível Benefício | 16,35% | 3,41% | 10,87% | 13,76% | 16,26% |

| Modelo Hibbert | | | | | |
|-----------------------|--------------|-----------|----------------|----------------|----------------|
| Estratégia | Média | DP | 95% VaR | 80% VaR | 50% VaR |
| a) 50/50 | 13,82% | 5,86% | 7,92% | 9,51% | 12,39% |
| b) MFP | 19,85% | 14,15% | 6,35% | 10,11% | 15,83% |
| c) Ciclo Vida | 17,80% | 11,13% | 7,34% | 9,85% | 15,02% |
| d) Nível Benefício | 17,83% | 9,08% | 6,37% | 10,42% | 16,99% |

Um dos factores responsáveis pela maior dispersão dos resultados do submodelo de Hibbert é a taxa de juro utilizada na determinação da anuidade. A distribuição das taxas de juro simuladas, para cada um dos modelos, patente no Gráfico 12 permite compreender a amplitude do impacto que a anuidade tem na determinação da taxa de substituição.

Gráfico 12 – Distribuição das taxas técnicas utilizadas nas anuidades



Como se pode verificar, a variável $C(t)$ utilizada como taxa técnica de juro nas anuidades do submodelo de Wilkie, tem uma média e volatilidade inferior à homóloga do submodelo de Hibbert – a taxa de rendimento das obrigações de cupão. Como a

média da taxa técnica, para o submodelo de Wilkie, é 3,1%, então, a correspondente anuidade é mais cara, o que implica um menor valor da pensão e, consequentemente, uma taxa de substituição inferior. Analogamente, a dispersão da taxa de juro técnica do submodelo de Hibbert influi na maior dispersão das taxas de substituição neste modelo. Porém, existem características intrínsecas aos submodelos que são responsáveis pela diferente dispersão dos resultados por eles gerados. A influência das taxas de juro apenas vem reforçar a dispersão subjacente a cada um dos submodelo. Este facto será discutido num capítulo posterior (Capítulo 9.4. desta Parte).

Embora se tenham analisado as estatísticas normais (média e desvio padrão) estas não são as mais indicadas para medir os resultados em termos de risco. De facto, é necessário ir um pouco mais longe e analisar os níveis de confiança com que são obtidos determinados valores da taxa de substituição. Especificando um ou mais percentis (P_i) da distribuição empírica das taxas de substituição obtém-se o VaR (*Value-at-Risk*) a um nível de confiança de $(100-i)\%$. A vantagem em utilizar estatísticas VaR em vez das normais (média e desvio padrão) prende-se com a robustez das mesmas, uma vez que estas não variam quando se considera um conjunto de 1000 simulações diferentes, dado que não dependem dos valores extremos. O VaR, na sua definição mais simples, representa o valor em risco (passível de se tornar numa perda) ao qual está normalmente associado um nível de confiança. Na presente dissertação, a utilização que se vai fazer desta medida de risco é um pouco mais restrita, já que representa o valor da taxa de substituição que pode ser garantido, para o nível de confiança especificado. Em função do que agora foi dito que informações adicionais se podem tirar do Quadro 20?

Foram considerados os percentis 5, 20 e 50, a que correspondem os valores de VaR a um nível de confiança de 95%, 80% e 50%. Assim, e relativamente ao submodelo de Wilkie, garante-se uma taxa de substituição superior a 8,7% para a estratégia **a**), 10,5% para **b**), 10,4% para **c**) e 10,9% para a estratégia **d**), tendo em consideração um nível de 95% de confiança. Uma importante conclusão, relativamente à comparação dos submodelos, que se tira do quadro em análise é a de que à medida que se diminui o nível de confiança os valores das taxas de substituição do submodelo de Hibbert vão se

aproximando dos obtidos pelo submodelo de Wilkie. Apesar de apresentar uma média de benefício superior, o submodelo de Hibbert garante, em virtude da sua maior dispersão, uma menor taxa de substituição para níveis mais elevados de confiança.

9.2 ANÁLISE GRÁFICA

O Gráfico 13 e o Gráfico 14 mostram a função de distribuição (cumulativa) empírica das taxas de substituição para o submodelo de retorno dos investimentos de Wilkie e de Hibbert. Em cada um dos gráficos existem quatro curvas, uma para cada uma das estratégias consideradas.

Interpretação dos Gráficos

O eixo horizontal (das abcissas) diz respeito aos valores da taxa de substituição enquanto o eixo vertical (das ordenadas) regista o valor da função de distribuição cumulativa $F(x)$ que retorna a probabilidade do benefício ser inferior a um determinado valor da taxa de substituição (x). Cada ponto da curva indica a probabilidade (eixo vertical) de a taxa de substituição ser inferior a um determinado nível (eixo horizontal). Na prática, estes gráficos permitem mostrar, para cada nível de confiança ($1-P_i$), em que P_i é o valor da probabilidade no eixo das ordenadas, qual é o VaR da taxa de substituição. Assim, o ponto branco no Gráfico 13 indica que a probabilidade da taxa de substituição ser inferior a 10% é de aproximadamente 25%. Em alternativa, pode afirmar-se que a um nível de 75% de confiança a taxa de substituição excede os 10%.

Se a curva da distribuição (cumulativa) empírica de uma dada estratégia se situa mais à direita que outra, então, essa estratégia tende a atribuir valores de taxa de substituição mais elevados. Por outro lado se uma curva cresce mais acentuadamente (tem maior inclinação) que outra significa que é menos variável, de onde se conclui que a taxa de substituição é mais previsível.

Gráfico 13 – Função de distribuição empírica das taxas de substituição para o submodelo Wilkie

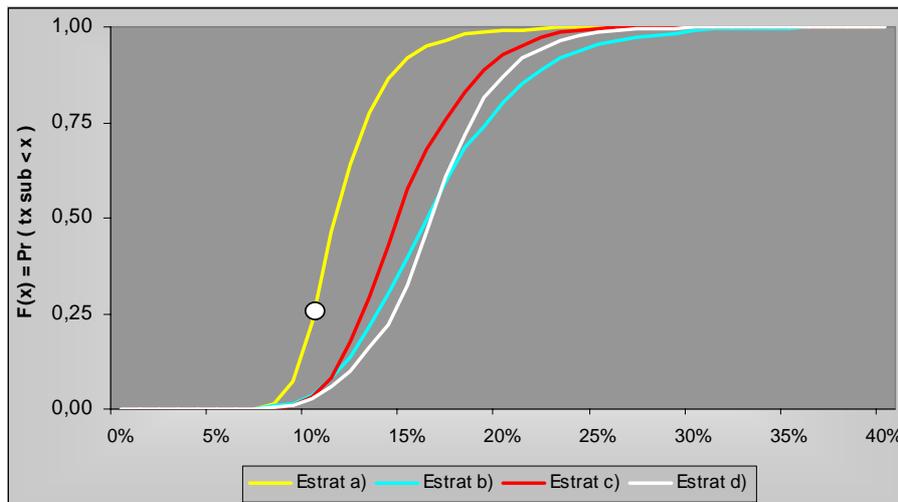
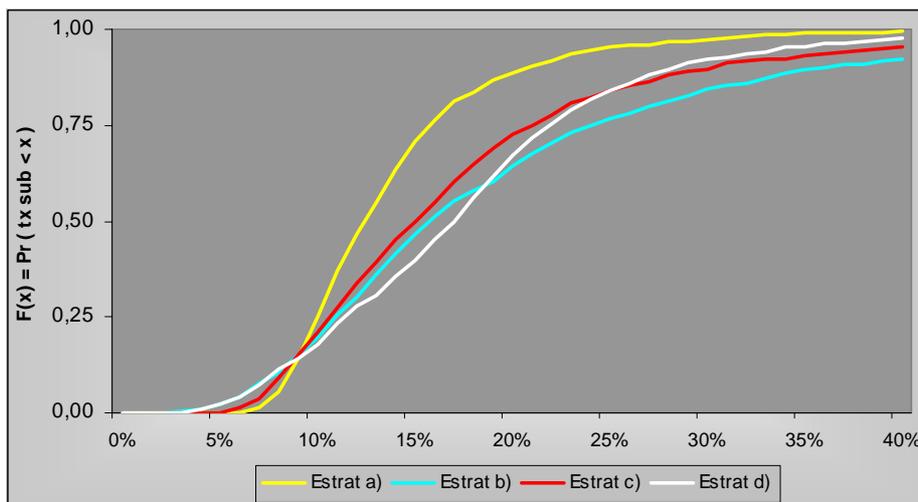


Gráfico 14 – Função de distribuição empírica das taxas de substituição para o submodelo Hibbert



Traçando uma linha horizontal no Gráfico 13, correspondente ao nível de confiança de 75% (ou à probabilidade de 0,25), que informações se podem tirar? Pode verificar-se que com uma probabilidade de 0,25 a estratégia **a)** pode gerar taxas de substituição inferiores a 10% enquanto para as restantes estratégias a probabilidade de gerar taxas de substituição inferiores a 13,5% (estratégia **b)**), 12,5% (estratégia **c)**) e 14,5% (estratégia **d)**) é igualmente de 0,25.

Se em vez de uma linha horizontal se traçar um linha vertical a análise do gráfico é ainda mais informativa. Pegando no mesmo gráfico e traçando uma linha vertical nos 15% de taxa de substituição verifica-se que o nível de confiança necessário para garantir

aquele valor de benefício é de 10% para a estratégia **a)**, 60% para a estratégia **b)**, 42% para a estratégia **c)** e 68% para a estratégia **d)**.

Análise dos Gráficos

Analisando agora os resultados do cenário base para o submodelo de Wilkie (Gráfico 13), tendo em atenção as quatro estratégias consideradas, constata-se que a estratégia **a)** é a estratégia que apresenta menor variabilidade (das 1000 taxas de substituição geradas) porque a curva é a mais inclinada enquanto a estratégia **b)** apresentam uma maior dispersão dos resultados dada a menor acentuação da curva. A maior ou menor dispersão dos resultados está intimamente ligada ao desvio padrão (risco) dos activos que compõem cada uma das carteiras, daí que a estratégia **a)** apresente uma menor dispersão que a estratégia **b)**. Como as curvas das estratégias base – **a)** e **b)** – se encontram em dois extremos e atendendo a que as estratégias **c)** e **d)** consistem numa combinação linear das primeiras, então, as curvas das estratégias **c)** e **d)** encontram-se limitadas pelas curvas das estratégias limite.

Considerando agora o cenário base para o submodelo de Hibbert (Gráfico 14), verifica-se que muito do que foi dito para o submodelo de Wilkie pode ser extrapolado para este submodelo.

No entanto, este submodelo tem uma característica peculiar que provoca uma alteração do valor das taxas de substituição, cujo resultado é bastante visível no gráfico. Uma análise mais atenta ao Gráfico 14, em relação a níveis de probabilidade e da taxa de substituição mais baixos (canto inferior esquerdo), revela que a curva respeitante à estratégia **b)** apresenta uma probabilidade mais alta para taxas de substituição muito baixas do que a sua congénere da estratégia **a)**.

Se na maioria dos casos a estratégia **a)** gera uma taxa de substituição mais baixa (porque os activos têm uma rendibilidade média inferior) do que a estratégia **b)**, então, porque razão esta última gera valores extremos mais elevados? Uma análise às simulações que geram estas taxas de substituição muito baixas indica que a resposta se deve ao facto de no submodelo de Hibbert a modelização do retorno das acções ser feita através de um modelo de transição dos estados de *Markov* e o impacto que isso provoca ao nível da

volatilidade anualizada – tal como referenciado no Subcapítulo 7.3. Este modelo de transição dos estados de Markov pressupõe a existência de duas distribuições (uma de média positiva para um estado favorável da economia e outra de média negativa para um estado desfavorável) para o excesso de rendibilidade face ao activo sem risco. Desta forma, o modelo permite que haja uma sucessão longa de resultados negativos (relativamente aos retornos accionistas) e como a estratégia **b**) tem uma composição de 75% em acções, então, a taxa de rendimento média do fundo (para o horizonte temporal considerado) é muito baixa (por exemplo entre 0,5%-1,5%). Com uma capitalização do fundo desta dimensão, e não descurando a influência da taxa de juro (a aplicar na determinação da anuidade), a taxa de substituição tem de ser, necessariamente, baixa.

O facto de as curvas referentes às estratégias **c**) e **d**) estarem à direita da curva da estratégia **b**) pode ser considerado um comportamento normal, pois, apenas significa que para um mesmo nível de confiança (p.e. 75%) o VaR da taxa de substituição é superior, o que pode ser explicado pela maior variabilidade da taxa de substituição inerente à estratégia **b**). Portanto, este comportamento das estratégias **c**) e **d**), quando comparado com os correspondentes do submodelo de Wilkie, resulta de um maior nível de dispersão dos resultados produzido por este modelo.

Risco de Modelo

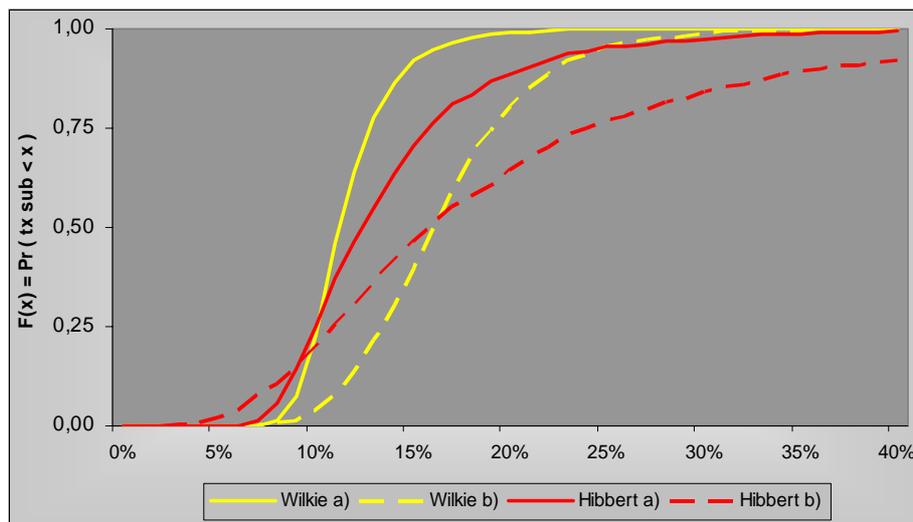
O risco do modelo designa a dificuldade de, na modelização de uma determinada realidade, captar toda a sua essência. Por outras palavras, a utilização de um modelo para prever uma determinada realidade conduz a diferenças quando comparada com a realidade efectiva. O risco de modelo mede a maior ou menor aderência do modelo à realidade.

No Gráfico 15 são mostradas as funções distribuição (cumulativas) empíricas referentes à estratégia **a**) e **b**) para os dois submodelos de retorno de investimento analisados. Aqui, o objectivo é comparar os resultados da mesma estratégia nos dois submodelos.

Da análise do gráfico conclui-se que o submodelo de Wilkie para a estratégia **a**) tende a gerar, para níveis de confiança mais elevados (até 75%), valores de taxa de substituição superiores ao do submodelo de Hibbert, uma vez que a curva se encontra mais à direita.

A partir do referido nível de confiança é o submodelo de Hibbert que gera VaR das taxas de substituição superiores. A mesma análise pode ser efectuada para a estratégia **b)**, de onde se destaca ainda mais o efeito da variabilidade dos resultados no submodelo de Hibbert.

Gráfico 15 – Risco de modelo



9.3 ANÁLISE DO BINÓMIO RISCO / TAXA DE CONTRIBUIÇÃO

Uma análise extremamente interessante que se pode fazer com estas simulações consiste em registar o VaR da taxa de substituição, para uma dada estratégia e para um determinado nível de confiança, e calcular, para as restantes estratégias, qual seria a taxa de contribuição necessária para atingirem, com o nível de confiança estipulado, aquele valor de benefício. O Quadro 21 sintetiza os valores de uma análise desta natureza.

Pegando no submodelo de Wilkie, registaram-se, para a estratégia **b)**, os valores VaR da taxa de substituição para os níveis de confiança de 95%, 80% e 50%. A um nível de 95% de confiança, a taxa de contribuição necessária para obter a mesma taxa de substituição (10,49%) é de 6,05% para a estratégia **a)**, 5,05% para a **c)** e 4,83% para a estratégia **d)**. Comparando com os 5% de taxa de contribuição que foram utilizados para obter os 11,49%, conclui-se que tanto a estratégia **a)** como a **c)** necessitam de uma

maior contribuição por parte da empresa para garantir o mesmo benefício que a estratégia **b)** enquanto para a estratégia **d)** o esforço da empresa será menor.

Quadro 21 – Análise risco / taxa de contribuição

| Modelo Wilkie | | | |
|--|----------------|----------------|----------------|
| | 95% VaR | 80% VaR | 50% VaR |
| Nível de VaR | | | |
| b) MFP | 10,49% | 12,83% | 16,05% |
| Taxa de Contribuição necessária | | | |
| a) 50/50 | 6,05% | 6,52% | 7,15% |
| c) Ciclo Vida | 5,05% | 5,22% | 5,57% |
| d) Nível Benefício | 4,83% | 4,66% | 4,94% |
| Modelo Hibbert | | | |
| | 95% VaR | 80% VaR | 50% VaR |
| Nível de VaR | | | |
| b) MFP | 6,35% | 10,11% | 15,83% |
| Taxa de Contribuição necessária | | | |
| a) 50/50 | 4,01% | 5,32% | 6,39% |
| c) Ciclo Vida | 4,33% | 5,14% | 5,27% |
| d) Nível Benefício | 4,99% | 4,85% | 4,66% |

Esta análise pode ser simplificada se recorremos ao Gráfico 13. Fixando o nível de confiança em 80% (que corresponde à ordenada 0,2 no gráfico) e traçando uma linha horizontal nessa ordenada verifica-se que quanto maior é a distância entre as curvas que se encontram à esquerda da curva azul (estratégia **b)**, à qual corresponde uma taxa de contribuição de 5%) maior é a taxa de contribuição. Ao invés, se a curva se encontra mais à direita (caso da estratégia **d)**) menor é a taxa de contribuição necessária para garantir os mesmos benefícios que a estratégia de referência (estratégia **b)**).

A análise do binómio risco / taxa de contribuição permite dar uma noção do impacto nos custos da empresa (taxa de contribuição) de se garantir um benefício (VaR) com uma dada certeza (nível de confiança).

Analise-se uma hipotética situação em que a análise deste binómio pode ser útil. Um dos problemas com os planos de contribuição definida é que a aversão ao risco dos colaboradores é, normalmente, superior à da empresa, logo existe um risco de capitalização insuficiente por via do não investimento em activos que tenham um prémio de risco superior. Assim, (com base no submodelo de Wilkie e com um nível de confiança de 95%) se a empresa quisesse garantir uma capitalização idêntica ao seu

perfil de risco (opção pela estratégia **b**)) teria que aumentar a taxa de contribuição de 5% para 6,05% assumindo que os colaboradores teriam uma elevada aversão ao risco (opção pela estratégia **a**)).

9.4 ANÁLISE DOS RESULTADOS DO PROCESSO DE ACUMULAÇÃO

Até ao momento, os resultados foram analisados numa perspectiva da taxa de substituição da pensão, ou seja, quanto é que a pensão final representa (em percentagem) do último salário. No entanto, para estabelecer uma comparação (entre os dois submodelos) do processo de acumulação é necessário retirar o efeito da anuidade dos resultados obtidos. Desta forma, neste capítulo, vai considerar-se a taxa de substituição do capital gerado pelo processo de acumulação (isto é, durante os 30 anos de acumulação) sobre o último salário.

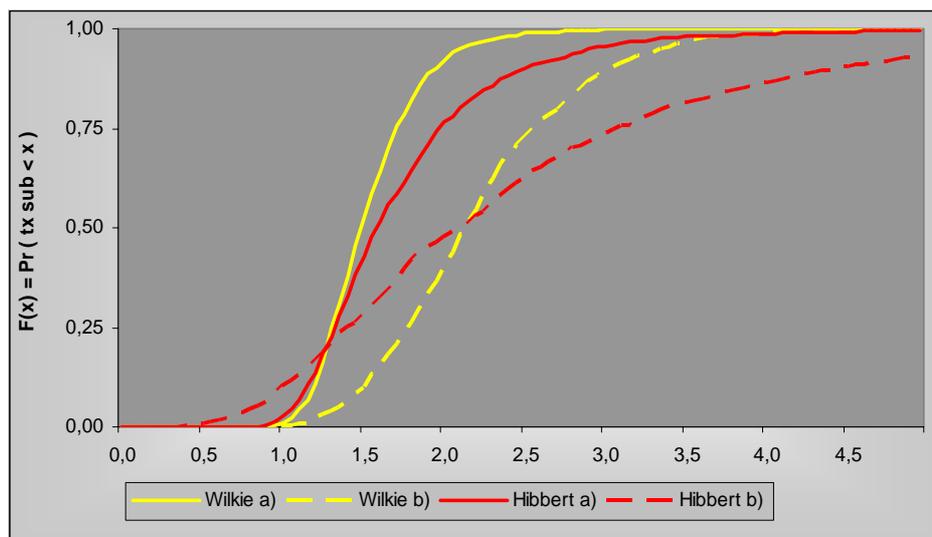
O Gráfico 16 evidencia as distribuições empíricas (acumuladas) da taxa de substituição do capital para os dois submodelos, considerando as estratégias **a**) e **b**). Relativamente aos gráficos apresentados anteriormente apenas existe uma alteração ao nível do eixo das abcissas, que passa a ser a taxa de substituição do capital em vez da taxa de substituição da pensão. A leitura do gráfico passa a ser ligeiramente diferente, isto é, existe uma probabilidade de 0,25 de o capital acumulado ao longo dos 30 anos ser inferior a 1,4 vezes o último salário, considerando a estratégia **a**),.

Este gráfico permite concluir que o processo de acumulação no submodelo de Wilkie apresenta menor dispersão (para ambas as estratégias) que o submodelo de Hibbert. No que respeita à estratégia **b**), a origem das diferenças entre os submodelos foi já alvo de explicação no Capítulo 9.2 – deve-se à utilização, no submodelo de Hibbert, de um modelo de transição de estados de Markov.

Pela análise do gráfico constata-se que, relativamente à estratégia **a**), a dispersão advém, essencialmente, dos resultados extremos positivos, uma vez que a probabilidade de eventos extremos negativos é semelhante nos dois submodelos. A existência de

resultados extremos superiores no submodelo de Hibbert deve-se ao efeito composto de um retorno médio superior (5,9% contra 5,3% do submodelo de Wilkie) mas também, e principalmente, à própria estrutura do modelo que permite sucessões longas de retornos anuais negativos (ou positivos), mesmo não tendo um modelo de transições de estados de Markov. De facto, uma análise pormenorizada aos resultados dos dois submodelos revela que a forma como os retornos anuais são produzidos é bastante distinta. No submodelo de Wilkie a sucessão dos retornos é relativamente aleatória enquanto no submodelo de Hibbert (cujos activos apresentam uma volatilidade inferior, principalmente nas obrigações de taxa fixa) existe uma maior ligação entre os sucessivos retornos que ocasionalmente origina um valor acumulado do fundo muito elevado ou muito baixo.

Gráfico 16 – Comparação dos processos de acumulação dos submodelos de Wilkie e Hibbert



A conclusão que se retira desta análise, tendo em conta o que foi dito acerca do efeito da taxa de juro utilizada na anuidade, é que a maior volatilidade das taxas de substituição no submodelo de Hibbert deve-se à própria estrutura do modelo e à sua parametrização. A volatilidade da taxa de juro técnica faz aumentar ainda mais esta diferença na dispersão entre os dois submodelos quando se analisa a taxa de substituição da pensão.

10. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

No sentido de compreender os resultados obtidos no cenário base, à luz das hipóteses assumidas, vão ser efectuadas algumas alterações nos pressupostos e parâmetros do modelo e registados os respectivos resultados.

Como os resultados das análises de sensibilidade são, de certa forma, semelhantes para os dois submodelos de retorno dos investimentos e no intuito de não tornar a dissertação demasiado extensa remeteteu-se para anexo os gráficos relativos ao submodelo de Hibbert.

10.1 ANUIDADE

Na análise de sensibilidade às anuidade utilizadas na determinação da taxa de substituição, os parâmetros assumidos vão ser alterados de forma a aproximá-los mais da realidade. A anuidade passará a ser calculada com base na tábua de mortalidade TV 88-90 e passará a incluir reversibilidade de 60% a favor do cônjuge. Sobre o valor da anuidade incidirão ainda encargos administrativos de 1%.

A anuidade calculada com base nestes pressupostos assume valores mais próximos dos das anuidades que são praticadas actualmente no mercado.

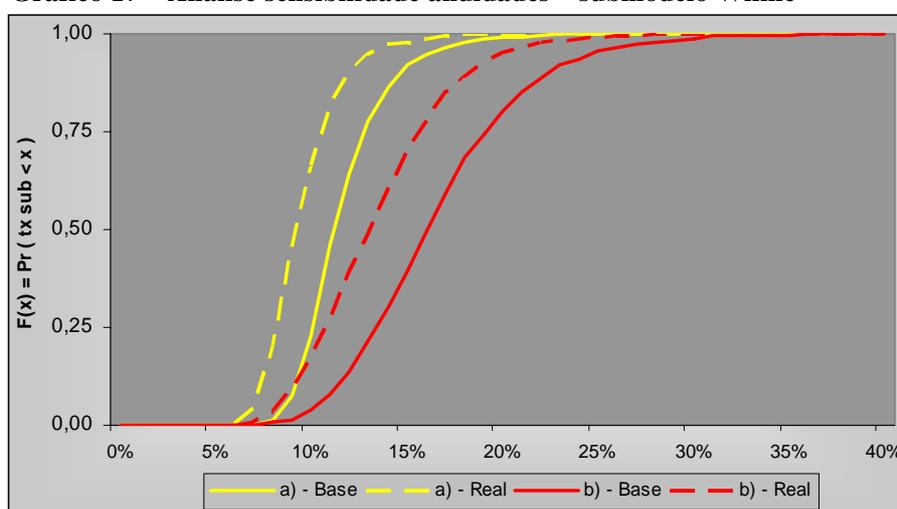
Em resumo, os pressupostos utilizados nas simulações deste cenário base são:

| Pressupostos | | | Pressupostos | |
|----------------------|---------|--|-------------------|----------|
| Horizonte Temporal | 30 anos | | Tábua Mortalidade | TV 88-90 |
| Taxa de Contribuição | 5% | | Reversibilidade | 60% |
| Linha Salarial | 2 | | Encargos Administ | 1% |

Os gráficos 17 e 22 (Anexo A) evidenciam as diferenças entre os resultados desta análise de sensibilidade e do cenário base, respectivamente para o submodelo de Wilkie e de Hibbert. As curvas a tracejado indicam os resultados com os novos pressupostos enquanto as outras correspondem aos valores do cenário base. As curvas a amarelo dizem respeito à estratégia **a)** enquanto as curvas a vermelho estão relacionadas com a estratégia **b)**.

Com a introdução na anuidade de hipóteses mais realistas, o seu custo torna-se superior e, conseqüentemente, a pensão mensal torna-se mais baixa, assim como a taxa de substituição. Com base neste raciocínio, não é de estranhar que as curvas da distribuição empírica relativas a esta análise de sensibilidade sofram uma translação para a esquerda em relação às curvas originais. Fixando o nível de confiança a 75%, o que equivale a traçar uma recta horizontal na ordenada 0,25, verifica-se que existe uma diminuição do VaR da taxa de substituição de 10,5% para 8,2% no caso da estratégia **a)** e de 13,5% para 11% no caso da estratégia **b)**.

Gráfico 17 – Análise sensibilidade anuidades – submodelo Wilkie



A conclusão a retirar desta análise de sensibilidade é a de que é necessário ter muita atenção na escolha dos pressupostos com que se transforma o capital acumulado numa pensão, pois o impacto dessa escolha na taxa de substituição é significativo.

10.2 SALÁRIOS

Neste fase embrionária de compreensão deste tipo de modelos, o objectivo primordial consiste em conhecer o comportamento do modelo, por isso optou-se por um submodelo salarial através de linhas salariais (cujas hipóteses foram definidas no Capítulo 8) que permitissem analisar o impacto de diferentes evoluções salariais nas taxas de substituição.

Para o cenário base foi utilizada a linha salarial 2, a que corresponde um pico do crescimento real dos salários aos 45 anos. A análise de sensibilidade levada a cabo neste subcapítulo consiste em comparar os resultados do cenário base com os resultados da utilização de diferentes evoluções salariais – uma com crescimentos reais maiores no início da carreira e outra em que o maior crescimento ocorre no final da carreira.

Em suma, os pressupostos utilizados nas simulações desta análise de sensibilidade são:

| Pressupostos | | Pressupostos | |
|----------------------|---------|-------------------|----------|
| Horizonte Temporal | 30 anos | Tábua Mortalidade | TV 73-77 |
| Taxa de Contribuição | 5% | Reversibilidade | 0% |
| Linha Salarial | 1 e 3 | Encargos Administ | 0% |

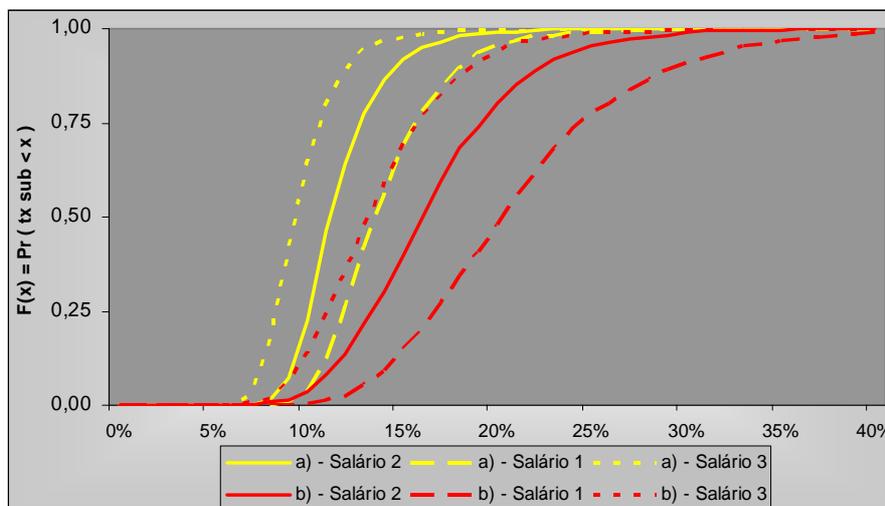
Os resultados da análise de sensibilidade para o submodelo de Wilkie são mostrados no Gráfico 18 da mesma forma que os resultados relativos ao submodelo de Hibbert estão evidenciados no Gráfico 23 (Anexo A)

Quanto à divisão entre estratégia **a)** e **b)**, seguiu-se a mesma metodologia (da análise de sensibilidade do subcapítulo anterior) de utilizar o amarelo para a primeira e o vermelho para a segunda. A curva contínua diz respeito à linha salarial 2 (a que foi utilizada no cenário base) da mesma forma que a curva a tracejado corresponde à linha salarial 1 e a curva pontilhada à linha salarial 3. Os resultados com base na linha salarial 1 são aqueles que atribuem um benefício superior (curva mais à direita) e os com base na linha salarial 3 os que atribuem menor benefício (curva mais à esquerda). Portanto, quanto mais cedo se der a evolução acentuada dos salários (linha salarial 1) – ver Gráfico 11 – maior é o benefício que se retira de um plano de contribuição definida. A explicação desta conclusão é deveras simples se atendermos ao facto de que quanto maior for o crescimento salarial maiores são as contribuições iniciais para o fundo, que vão ser capitalizadas durante mais anos. Se as contribuições mais altas ocorrerem no final da carreira, então, estarão sujeitas a poucos anos de capitalização.

Pela análise do gráfico, verifica-se ainda que o impacto é superior na estratégia **b)**.

Como se pode constatar, as distâncias entre as diversas curvas referentes a uma mesma estratégia são relevantes, o que traduz o impacto significativo que a evolução salarial tem na taxa de substituição.

Gráfico 18 – Análise sensibilidade salários – submodelo Wilkie



10.3 ANOS DE CONTRIBUIÇÃO

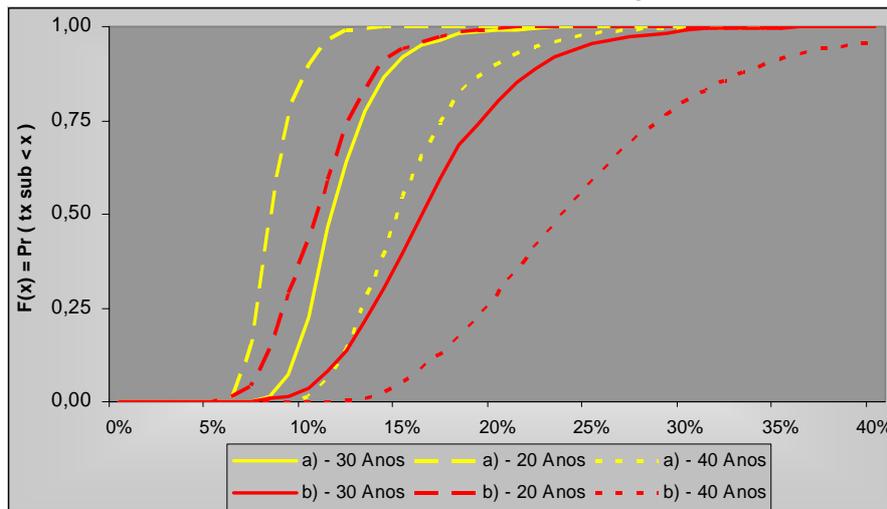
Para o cenário base foi assumido que um indivíduo entraria para uma dada empresa com 35 anos e por lá ficaria até à idade normal de reforma, o que equivale, portanto, a um período de contribuições de 30 anos. No entanto, quais serão os resultados se em vez de um período contributivo de 30 anos se tiver 20 anos? E 40 anos? Procurar-se-á responder a estas questões nesta análise de sensibilidade.

Os pressupostos utilizados nas simulações desta análise de sensibilidade são os seguintes:

| Pressupostos | | Pressupostos | |
|----------------------|--------------|-------------------|----------|
| Horizonte Temporal | 20 e 40 anos | Tábua Mortalidade | TV 73-77 |
| Taxa de Contribuição | 5% | Reversibilidade | 0% |
| Linha Salarial | 2 | Encargos Administ | 0% |

Adoptou-se a mesma filosofia da análise de sensibilidade anterior relativamente às cores e formas das curvas do Gráfico 18. Para períodos de contribuição de 20, 30 e 40 anos temos, respectivamente, as curvas tracejada, contínua e pontilhada.

Gráfico 19 – Análise sensibilidade anos de contribuição – submodelo Wilkie



Tal como seria de esperar *a priori*, o impacto no benefício (gerado por estes planos de contribuição definida) do número de anos de contribuição é deveras significativo. Traçando uma recta horizontal (no Gráfico 19) ao nível de confiança de 75% verifica-se que o valor de benefício garantido (VaR) é de 9%, 13,5% e 19,5% para, respectivamente, 20, 30 e 40 anos, quando considerando a estratégia **b**).

10.4 TAXA DE CONTRIBUIÇÃO

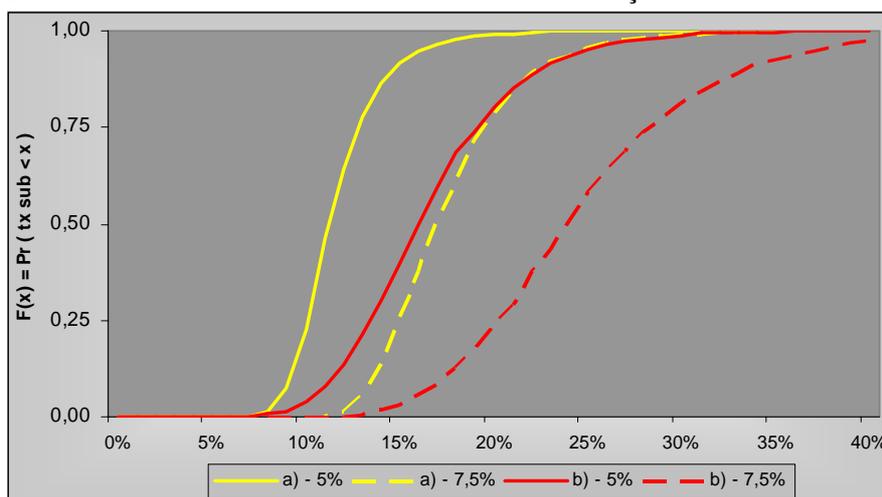
Por fim, a última análise de sensibilidade remete-nos para o impacto que as taxas de contribuição tem no nível de benefícios final. Convém, no entanto, salientar que no Capítulo 9.3. foi já efectuada uma aproximação a esta análise de sensibilidade mas com um âmbito de análise um pouco diferente.

Para o efeito, foi considerada uma taxa alternativa de contribuição de 7,5%. O quadro seguinte resume os pressupostos utilizados nas simulações desta análise de sensibilidade:

| Pressupostos | | Pressupostos | |
|----------------------|---------|-------------------|----------|
| Horizonte Temporal | 30 anos | Tábua Mortalidade | TV 73-77 |
| Taxa de Contribuição | 7,5% | Reversibilidade | 0% |
| Linha Salarial | 2 | Encargos Administ | 0% |

O Gráfico 20 regista as diferenças entre o cenário base e a presente análise de sensibilidade da taxa de contribuição, para o submodelo de Wilkie (os resultados para o submodelo de Hibbert encontram-se no Anexo A – Gráfico 25).

Gráfico 20 – Análise sensibilidade taxa de contribuição – submodelo Wilkie



A subida da taxa de contribuição de 5% para 7,5%, considerando a estratégia **a)**, permite garantir, com um nível de confiança de 95% uma taxa de substituição de 13% contra os anteriores 8,5%. Relativamente à estratégia **b)**, a variação derivada da subida da taxa de contribuição é um pouco superior, passando de 10,5% para 16%.

11. COMPARAÇÃO COM MODELO DETERMINÍSTICO

Desde o início da presente dissertação que se abordam os temas de simulação estocástica, modelos estocásticos, mas em que contexto é que estas surgem e quais as vantagens de utilizar modelos estocásticos em relação aos modelos determinísticos?

Para melhor responder à questão colocada procedeu-se à construção de um modelo determinístico idêntico ao que tem sido estudado para posterior comparação de resultados.

O modelo determinístico pressupõe uma taxa de inflação constante a 2%, uma taxa fixa de rendimento do fundo de 6% e ainda 3% de taxa técnica nas anuidades (também fixa). A determinação da taxa de substituição é feita fazendo crescer os salários reais segundo a linha salarial 2 (à qual é adicionada a taxa de inflação) que determinam as

contribuições para o fundo por aplicação da taxa de contribuição de 5%. O fundo cresce a uma taxa fixa de 6% e no final o valor acumulado é transformado numa pensão após a divisão pela anuidade (utilizando uma taxa técnica de 3% e de indexação das pensões de 1%). Dividindo a pensão pelo salário obtém-se uma taxa de substituição de 11,14%, que é fixa tal como os pressupostos com que foi calculada.

O Quadro 22 faz uma síntese das principais estatísticas obtidas na simulação determinística e na simulação estocástica enquanto o Gráfico 20 fundamenta graficamente os resultados obtidos. Para a comparação, foram considerados os resultados da estratégia a) do cenário base.

Quadro 22 – Comparação entre análise determinística e estocástica

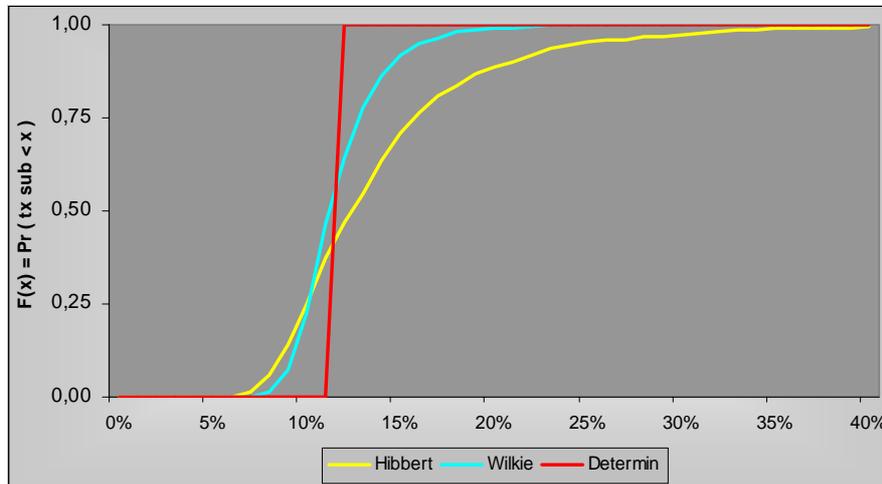
| Modelo | Média | DP | 95% VaR | 80% VaR | 50% VaR |
|----------------|--------------|-----------|----------------|----------------|----------------|
| Wilkie | 11,67% | 2,41% | 8,67% | 9,84% | 11,22% |
| Hibbert | 13,82% | 5,86% | 7,92% | 9,51% | 12,39% |
| Determinístico | 11,14% | 0,00% | 11,14% | 11,14% | 11,14% |

Em termos conceptuais, a principal diferença entre o modelo determinístico e o estocástico reside na utilização de processos estocásticos (abordagem estocástica) para modelizar uma determinada variável em vez da utilização de um valor fixo (abordagem determinística). A utilização de variáveis aleatórias traz incerteza ao modelo e como são normalmente utilizados um grande número de simulações (neste caso concreto 1000) os resultados obtidos em cada uma delas serão, naturalmente, distintos. Ou seja, a utilização de modelos estocásticos induz variabilidade nos resultados finais, o que não é necessariamente prejudicial (antes pelo contrário). Assim, a riqueza de resultados, assumindo que se compreenderam bem as hipóteses dos processos estocásticos, permite tirar conclusões importantes que ajudam a compreender o fenómeno em estudo, isto é, como se comportam os resultados quando acontecimentos extremos acontecem, quais os impactos nos resultados que advém da alteração de pressupostos, etc.

A análise quer do Quadro 22 quer do Gráfico 21 vêm ao encontro do que foi dito no parágrafo anterior sobre a variabilidade dos resultados. No modelo determinístico existe apenas um único resultado, daí a não existência de dispersão nos resultados (desvio

padrão nulo), o que em termos gráficos se traduz na recta vertical da curva da distribuição empírica do modelo determinístico.

Gráfico 21 – Comparação com análise determinística



Ao invés, os modelos estocásticos são muito mais ricos em informação. Mais do que indicarem qual a volatilidade dos resultados finais (p.e. 2,41% para o modelo de Wilkie e 5,86% para o de Hibbert) permitem determinar, para diferentes níveis de confiança, qual é o VaR da taxa de substituição, ou seja, qual o benefício que é possível garantir para o nível de confiança estabelecido. Do ponto de vista gráfico a abordagem estocástica é ainda mais interessante, pois permite observar a distribuição estatística das taxas de substituição simuladas e compreender quais os eventos extremos que podem ocorrer e com que probabilidade. Cada ponto do gráfico mostra o nível de confiança (ordenadas) associado a cada valor de benefício (abscissas).

Conclusão

Depois de introduzidos alguns conceitos teóricos, explicado o modelo global do desenho estocástico e os respectivos submodelos que o constituem, e estudado um caso prático, que ilações se podem tirar desta dissertação?

Na sua essência, esta dissertação estabelece uma metodologia prática e relativamente simples de análise do risco inerente ao desenho de um plano de contribuição definida. Para este tipo de planos de pensões, o risco é definido pela probabilidade de o benefício concedido pelo plano – medido através da taxa de substituição – ser inferior ao pretendido (aquando do desenho do plano). Neste sentido, utiliza-se uma abordagem de *Value-at-Risk* (VaR), como métrica do risco, que permite estabelecer quais os valores da taxa de substituição que podem ser garantidos para um dado nível de confiança.

Que fique claro, em relação a esta abordagem, que o objectivo pretendido não é fazer a selecção da estratégia de alocação de activos que um maior nível de benefício (valor da pensão à idade de reforma) pode conceder a um indivíduo; até porque existe uma grande distância entre simular o valor do retorno anual dos diversos activos que definem uma dada estratégia e os retornos efectivos que se venham a verificar na prática, ao fim de 20-30 anos.

De facto, existem factores que são difíceis de contemplar em modelos desta natureza, tais como: a tática de alocação dos activos, a arbitragem, o reinvestimento das mais valias, a utilização de instrumentos derivados, a verdadeira forma como são efectuados os investimentos (que não a realização anual dos activos para reinvestimento no ano seguinte).

Portanto, reforça-se a ideia de que o objectivo da presente dissertação é compreender o impacto e a influência que os diversos factores, que compõem o modelo (salários, anuidades, número de anos de acumulação, taxa de contribuição, estratégia de alocação de activos), têm no valor da taxa de substituição e qual o risco subjacente.

A riqueza que uma abordagem estocástica confere a um estudo desta natureza, quando comparada com uma abordagem determinística do problema (que manifestamente falha em conceder uma dimensão do risco associado a um plano de contribuição definida), é uma das conclusões mais importantes que se pode retirar desta dissertação. Saliente-se, ainda, o facto de este tipo de simulação permitir analisar a ocorrência de resultados extremos e de saber com que probabilidades eles podem ocorrer. Uma vez feita a simulação estocástica, estão abertas as portas para uma variedade de prismas com que se pode analisar a informação gerada – ponto de vista do benefício final do plano, das taxas de contribuição necessárias para garantir com um dado nível de confiança um determinado nível de benefício.

A relação entre a estrutura (i.e., a arquitectura de construção) de cada um dos dois submodelos de retorno dos investimentos utilizados (submodelo de Wilkie e de Hibbert) e os resultados obtidos merece igualmente uma nota de destaque nesta conclusão. Assim, a maior dispersão das taxas de substituição, quando se utiliza o submodelo de Hibbert, tem as suas raízes na lógica de funcionamento do modelo, que se reveste de maior coerência quando comparado com o submodelo de Wilkie; embora este último apresente algumas dificuldades na geração de valores de curto prazo, pois foi construído numa óptica de longo prazo.

Retiradas as principais ilações, resta salientar que o estudo efectuado é, de certa forma, introdutório e que existe ainda um longo caminho a percorrer no sentido de o complementar. Assim, espera-se que tenha sido despertada a consciência da importância desta temática e motivada a vontade de aprofundar a sua investigação e, embora a panóplia de futuros desenvolvimentos seja extensa, destacam-se as seguintes:

- estimação dos parâmetros de cada um dos submodelos, que faz parte do processo de calibração do modelo face à realidade vigente;
- inclusão de novos submodelos, quer em relação ao submodelo do retorno dos investimentos quer em relação ao submodelo dos salários, que permita reduzir o risco de modelo;
- inclusão de novos activos financeiros, nomeadamente imobiliário e *hedge funds*, possibilitando o enriquecimento das estratégias de alocação de activos utilizada;

- extensão do modelo da fase de acumulação – até à idade de reforma – para a fase de distribuição – após a idade de reforma.

Bibliografia

- Arnold, L., (1974), *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*, John Wiley & Sons.
- Baxter, M. e Rennie, A., (1996), *Financial Calculus – An Introduction to Derivative Pricing*, Cambridge University Press.
- Blake, D., Cairns, A. e Dowd, K., (2000), “Optimal Dynamic Asset Allocation for Defined-Contribution Pension Plans”, Internet: <http://www.ma.hw.ac.uk/~andrewc/>.
- Blake, D., Cairns, A. e Dowd, K., (2001), “Pensionmetrics: Stochastic Pension Plan Design and Value-at-Risk During the Accumulation Phase”, *Insurance: Mathematics and Economics*, 29, pp. 187-215.
- Cairns, A., Dickson, D.C., Macdonald, A.S., Waters, H.R., Willder, M., (1998), “Stochastic Processes: Learning the Language”, Internet: <http://www.ma.hw.ac.uk/~andrewc/>.
- Cairns, A., (2000), “A Discussion of Parameter and Model Uncertainty in Insurance”, *Insurance: Mathematics and Economics*, 27, pp. 313-330.
- Cairns, A., (2003), “Interest Rate Models”, Internet: <http://www.ma.hw.ac.uk/~andrewc/>.
- Cairns, A., (2000), “A multifactor model for the term structure and inflation for long-term risk management with an extension to the equities market”, Internet: <http://www.ma.hw.ac.uk/~andrewc/>.
- Cairns, A., (2003), “A Family of Term-Structure Models for Long-Term Risk Management and Derivative Pricing”, Internet: <http://www.ma.hw.ac.uk/~andrewc/>.
- Carriere, J. F., Shand, K. J., (1997), “New Salary Functions for Pension Valuations”, in *32nd Actuarial Research Conference*, Calgary Alberta, Canada.
- Carvalho, Pedro. S., (1993), *Planos e Fundos de Pensões*, Texto Editora.
- Casela, G. e Berger, R., (1990), *Statistical Inference*, Statistics/Probability Series, Wadsworth & Brooks/Cole.
- Clark, G. L., (2003), *European Pensions & Global Finance*, Oxford University Press.

- Centeno, M. L., (2001), *Teoria do Risco*, Textos de Apoio, CEMAPRE-ISEG.
- Durrett, R., (1996), *Stochastic Calculus*, Probability and Stochastics Series, CRC Press LLC.
- Elton, E. e Gruber, M., (1991), *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, John Wiley & Sons.
- Hibbert, J., Mowbray, P., Turnbull, C., (2001), “A Stochastic Asset Model & Calibration for Long Term Financial Planning Purposes”, Internet: <http://www.barrhibb.com>.
- “HIG In Brief: Inflation-Linked Bonds”, (1998), Hewitt Investment Group, Internet: <http://www.HewittInvest.com>.
- Hull, J., White, A., (1994), “Numerical Procedures For Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models.”, *Journal of Derivatives*, Vol 2, pp. 37-48.
- Jackson, M. e Staunton, M., (2001), *Advanced modelling in Finance Using Excel and VBA*, Wiley Finance Series, John Wiley & Sons.
- Karatzas, I., Shreve, S., (1991), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag.
- Law, A. e Kelton, W., (1991), *Simulation Modelling & Analysis*, Industrial Engineering Series, McGraw-Hill.
- Lee, P. J., Wilkie, A. D., (2000), “A Comparison of Stochastic Asset Models”, in *Proceedings of the tenth International AFIR Colloquium*, Tromsø, Norway, pp. 407–445.
- Morrison, S., (2001), “Calculating Nominal Bond Prices & Yields in the 2-Factor Vasicek Model for Real Interest Rates & Inflation”, B&H Technical Note 2000/024, Internet: <http://www.barrhibb.com>.
- Nicolau, J., (2001), “Modelação e Estimação de Séries Financeiras através de Equações Diferenciais Estocásticas”, Tese de Doutoramento em Matemática Aplicada à Economia e Gestão, ISEG.
- Perold, A., Sharpe, W., (1988). “Dynamic Strategies for Asset Allocation”, *Financial Analysts Journal*, January/February, pp. 16–27.
- Ripley, B., (1987), *Stochastic Simulation*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, John Wiley & Sons.

- Taylor, S. e Karlin, M., (1998), *An Introduction to Stochastic Modeling*, Academic Press.
- Turnbull, C., (2000), “2F Vasicek as a Special Case of Hull & White (1994)”, B&H Technical Note 2000/024, Internet: <http://www.barrhibb.com>.
- Vasicek, O. E., (1977), “An Equilibrium Characterisation of the Term Stucture”, *Journal of Financial Economics*, 5, pp. 177–188.
- Wilkie, A. D., (1995), “More on a Stochastic Asset Model for Actuarial Use”, *British Actuarial Journal*, 1, pp. 777–964.
- Wrase, J. M., (1997), “Inflation-Indexed Bonds: How Do They Work?”, *Business Review*, , Internet: <http://www.phil.frb.org/econ/br/brja97jw.pdf>.
- Yakoubov, Y., Teeger, M., Dubal, D., (1999), “A Stochastic Investment Model for Asset and Liability Management”, in *Proceedings of the nineth International AFIR Colloquium*, Tokyo, Japan, pp. 237-266.

Anexo A – Gráficos Análise de Sensibilidade

Gráfico 22 – Análise sensibilidade anuidades – submodelo Hibbert

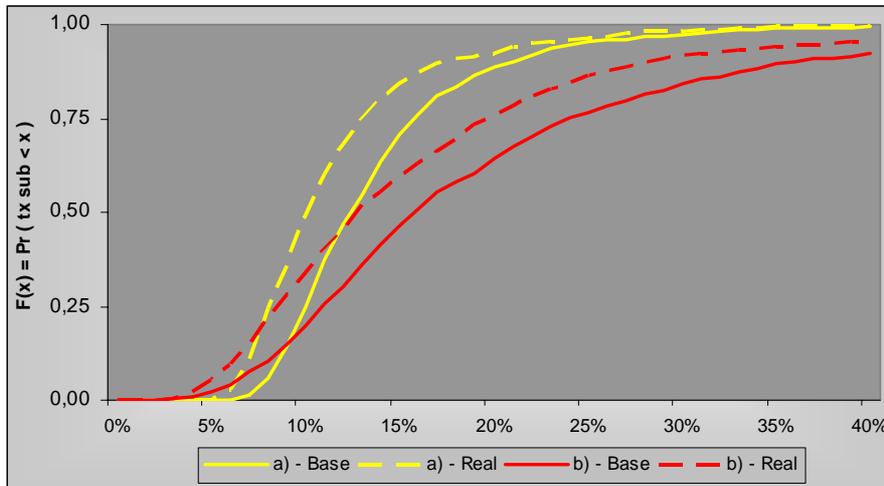


Gráfico 23 – Análise sensibilidade salários – submodelo Hibbert

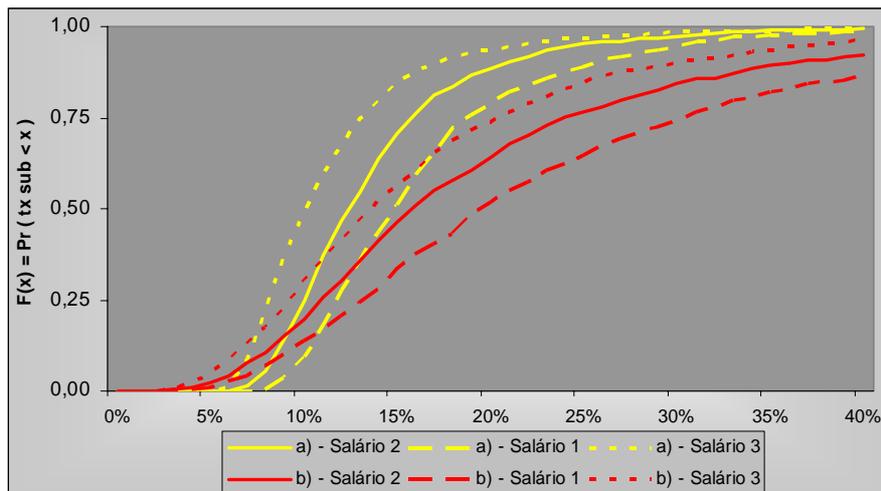


Gráfico 24 – Análise sensibilidade anos de contribuição – submodelo Hibbert

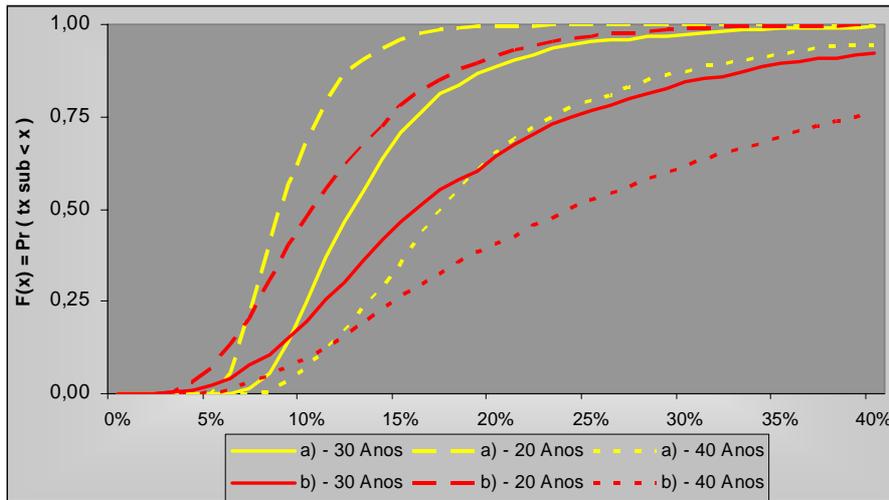


Gráfico 25 – Análise sensibilidade taxa de contribuição – submodelo Hibbert

