Da Resolução de Problemas à Explicitação do Raciocínio Matemático: Uma Experiência em Contexto de Estágio

From Problem Solving to Mathematical Reasoning: An Experience in Teaching Training Context

JOSÉ MANUEL CASCALHO[1]
RICARDO TEIXEIRA[2]
RUI FILIPE MEIRELES[3]

Resumo

A resolução de problemas é um processo fundamental na aprendizagem da Matemática. Neste artigo, apresenta-se uma reflexão sobre a importância deste processo matemático e de como ele pode ser conduzido de forma a estimular o raciocínio matemático através da promoção da comunicação, em contexto de sala de aula. O trabalho foi realizado na etapa final de formação de educadores e professores no contexto da educação infantil e dos primeiros anos do ensino fundamental, no Arquipélago dos Açores (Portugal). Em resultado das atividades realizadas, discute-se o papel da utilização de uma heurística ao longo da resolução de problemas, a importância na escolha das estratégias para a interação com os alunos, bem como o desenho intencional de materiais didáticos. O trabalho desenvolvido enquadra-se numa abordagem qualitativa de design de experiência de ensino.

Palavras-chave: *resolução de problemas; raciocínio; formação de professores.*

Abstract

Problem solving is a pivotal process to mathematical learning at school. In this paper, it is discussed the importance of this process and how to apply it in a classroom to promote mathematical reasoning. In a preservice teaching training context, two experiences were implemented in two different classes, one in preschool and other in a first grade class, in the Archipelago of the Azores (Portugal). It was studied the role of apllying a step-by-step heuristic to help students to solve problems and the importance of using strategies which promote interaction and communication within students and students/professor to enhance the learning of the students. Finally, it is suggested how the selection of materials explicitly produced to a set predefined targets can contribute to a successful learning strategy. This is a qualitative research and it encompasses an experimental design.

Keywords: *problem solving; reasoning; pre-service teacher context.*

1 Departamento de Ciências da Educação, Universidade dos Açores – e-mail: jmc@uac.pt
2 Departamento de Matemática, Universidade dos Açores – e-mail: rteixeira@uac.pt
3 Departamento de Ciências da Educação, Universidade dos Açores – e-mail: ruifilipemeireles@hotmail.com

Introdução

A Matemática, como qualquer outra área/domínio de formação, é fundamental para o desenvolvimento social e pessoal das crianças; daí que esta disciplina não possa ser ensinada com o objetivo de proporcionar aos alunos uma mera aquisição de conhecimentos isolados ou o domínio simples de técnicas e de regras. Ela terá de ser entendida como uma disciplina que incentiva os alunos a resolver problemas e a explicitar os seus processos de raciocínio, numa articulação clara com a vida do dia a dia. Pode-se, então, perceber que, ao ensinar Matemática, o professor terá, obrigatoriamente, de encarar o aluno como um sujeito ativo, implicado na sua aprendizagem, a quem terá de ser dada a possibilidade de explicar e justificar as suas ideias e resoluções a propósito de experiências diversificadas de aprendizagem propostas pelo professor. A Matemática caracteriza-se não só por lidar com certos tipos de objetos e relações entre objetos, mas também por envolver determinados processos matemáticos, como sejam o raciocínio e a comunicação, cuja abordagem implica diferentes estratégias de trabalho.

O papel do professor no contexto de sala de aula é fundamental, ao estabelecer objetivos de aprendizagem e reconhecer a importância desses objetivos no espaço de aprendizagem da Matemática (BALL et al., 2005). Assim, ao se estabelecer um objetivo que procure privilegiar, na aula de Matemática, uma metodologia de trabalho assente na resolução de problemas, está-se a preparar os alunos para que estes consigam adquirir capacidade de resolução e autonomia nessa resolução quando deparados com problemas, não só relativos aos diferentes domínios do saber mas também resultantes da sua vida quotidiana, estabelecendo estratégias que privilegiem os processos matemáticos de comunicação, representação, reflexão, entre outros.

É inegável que, desde há muito, mas com maior incidência nos últimos tempos, se tem vindo a reconhecer que *"a resolução de problemas é afinal o motor do desenvolvimento da Matemática e da actividade matemática"* (ABRANTES, 1989), já que *"proporcionar oportunidades aos alunos para resolverem, explorarem, investigarem e discutirem problemas, numa larga variedade de situações, é uma ideia-chave para que a aprendizagem da Matemática constitua uma experiência positiva significativa"* (idem).

Tendo por base a relevância em se apostar na resolução de problemas, estabeleceu-se, no contexto de um estágio final do curso de formação de educadores de infância e de professores do 1.º ciclo do ensino básico[4], o objetivo de perceber como pode um educador/professor dinamizar a resolução de problemas, promovendo a explicitação do raciocínio através da comunicação. Pretendeu-se, com isso, desmistificar a ideia, que muitas vezes surge associada ao ensino da Matemática, de que esta disciplina se baseia num conjunto de regras, técnicas e procedimentos que devem ser aplicados tal e qual como são aprendidos em contextos de aprendizagem mais tradicionais (SANTOS, 1997) (OLIVEIRA, 1998). É neste âmbito que decorre a experiência de estágio descrita neste artigo, cujas práticas ocorreram em pequenos períodos ao longo do ano de 2013. Elas parecem transparecer o potencial didático resultante do entrecruzar das tarefas de resolução de problemas com a comunicação e o raciocínio matemáticos, e do papel do educador/professor na organização e no estabelecimento de objetivos de aprendizagem.

O artigo é organizado da seguinte forma. Na próxima secção far-se-á uma pequena abordagem do papel do profissional em contexto de estágio, identificando os pressupostos que se traduzem no método de trabalho que radica num percurso de investigação identificado com o design de experiência de ensino. Em seguida, apresenta-se o estado de arte da investigação que envolve a introdução da resolução de problemas na sala de aula e as suas implicações na prática do professor. Depois abordam-se as questões metodológicas, onde se apresentam as linhas orientadoras do trabalho desenvolvido, seguindo-se uma descrição/reflexão das práticas. O artigo termina com algumas considerações finais.

1. O profissional em contexto de Estágio

Sendo a escola um lugar de formação, os professores que dela fazem parte devem estar envolvidos num processo de constante formação de modo a que esta possa fornecer instrumentos capazes de os ajudar não só nas tomadas de decisão mas sobretudo na dinamização do grupo de alunos que têm a seu cargo, pois, e de acordo com Carvalho e Ramoa (2001), a formação *"deverá possibilitar aos professores, enquanto actores, uma apropriação de saberes que, não se restringindo a saberes localizados no âmbito científico, possam ser transferíveis do individual para o colectivo e deste para o individual"* (p. 7). É seguindo esta linha de pensamento que se espera que o professor (re)intérprete e adeque à realidade da sua escola e dos seus alunos os

[4] O que no Brasil corresponde ao período compreendido entre a educação infantil e a terceira série do ensino fundamental.

instrumentos fornecidos pela formação inicial, pois cada instituição escolar possui uma cultura própria com características específicas resultantes dos membros que a constituem. Pode-se, então, afirmar que:

> A ação formativa deverá ser entendida como um espaço de experimentação e reavaliação das acções investigativas empreendidas por cada indivíduo singular e devolvidas ao grupo de forma a permitir uma reapropriação dos saberes, mas também uma nova perspectiva exploratória do estudo realizado (CARVALHO & RAMOA, 2001, p. 8).

Tendo em conta o que já foi dito anteriormente, e de acordo com Font (2007), o trabalho do educador/professor é exigente, pois se este pretende que a criança *aprenda a aprender*, tem de interagir com ela, devendo, para isso, fornecer-lhe modelos, exemplos ou explicações de forma a que a criança consiga uma "transposição de controlo dos procedimentos". A intensidade e a qualidade com que o educador/professor realiza essa transposição do controlo dos procedimentos de aprendizagem para a criança terá repercussões na sua capacidade de interiorização e de representação da realidade cultural (matemática) e, consequentemente, a sua integração na mesma. O educador/professor deve proporcionar aos seus alunos vivências concretas, promovendo o raciocínio e comunicação de modo a explorar o significado dos conceitos trabalhados na sala de aula.

Constata-se, portanto, no âmbito do desempenho do educador/professor, que a intencionalidade educativa e a sistematização metodológica, que caracterizam a prática profissional, têm de estar muito presentes, a fim de que o aluno possa, de facto, ter as condições para construir conhecimento. Reforça-se a ideia de que ensinar não é apenas explicar como se faz nem explicar como nos foi ensinado; é necessário que o professor reflita sobre o modo e o processo de ensino e nessa reflexão tenha em conta as características de cada indivíduo, sendo, para isso, necessário recorrer a estratégias que possibilitem uma aprendizagem ativa e integradora.

Estas caraterísticas conduzem-nos a um traço que definimos como professor *estratega*[5]. Ela enquadra-se no papel que o professor deve assumir no âmbito de uma investigação de design de experiência de ensino (COBB et. al., 2003).

A experimentação de diferentes situações didáticas deve ser planeada de acordo com um conjunto de conjeturas, cuja elaboração obedece às etapas de planeamento, da condução

[5] A expressão "professor estratega" engloba a ideia de um professor que reflete e investiga (SERRAZINA & OLIVEIRA, 2001), com aquele que "no lugar de transmitir os conteúdos para os seus alunos, o professor deve dotá-los de procedimentos de investigação que os ajudem a construir e mobilizar o seu próprio conhecimento" (FERREIRA, 2014).

da experiência e de uma consequente análise retrospetiva, aprofundando as questões que orientam a investigação enquanto decorre a experimentação. Como já se referiu, uma das características que define o uso estratégico dos procedimentos de aprendizagem é a intencionalidade. Quando o professor decide utilizar um determinado procedimento para realizar uma certa tarefa não o faz de forma aleatória, mas com um objetivo bem definido. Por outro lado, se, enquanto professor estratega, dotar os seus alunos de procedimentos que os ajudem a construir e mobilizar o seu próprio conhecimento, este está a permitir a reflexão em torno do que é ensinado e aprendido, possibilitando uma postura de investigação no contexto de sala de aula, estabelecendo como alvo da investigação *"o raciocínio dos alunos como atos de participação em comunidades de prática que eles e o professor estabelecem ao longo das interações que vão estabelecendo na sala de aula"* (COBB et al., 2001, p. 158).

2. A resolução de problemas como instrumento de aprendizagem

A Matemática caracteriza-se não só por lidar com determinados objetos e com as relações que os caracterizam, mas também por envolver processos matemáticos específicos, como a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação matemática.

Em Portugal, nas últimas décadas, a resolução de problemas tem sido considerada no *curricula* do ensino básico como uma capacidade fundamental, como refere Silva (2010):

> É muito importante sublinhar, que este documento, Currículo Nacional do Ensino Básico [de 1990], refere algumas questões centrais (…). Nomeadamente questões que se prendem com a matemática escolar e com a importância da educação matemática na vida. Esta matemática escolar deve assentar numa matemática que permita a resolução de problemas, desenvolva o raciocínio e a comunicação, ao mesmo tempo que estimula a confiança e a motivação pessoal. Ou seja, a tónica da matemática escolar não pode estar apenas na aquisição de conhecimentos estanques e no domínio de regras e técnicas. (p. 55)

Um dos objetivos é, pois, preparar os alunos para que estes consigam adquirir capacidade de resolução e autonomia nessa resolução quando deparados com problemas não só relativos aos diferentes domínios do saber, mas também enquadrados em experiências da sua vida quotidiana. É inegável que, desde há muito, mas com maior incidência nos últimos tempos, se tem vindo a reconhecer que *"a resolução de problemas é afinal o motor do desenvolvimento da Matemática e da atividade matemática"*, como refere Abrantes (1989), e acrescenta que *"proporcionar oportunidades aos alunos para resolverem, explorarem, investigarem e discutirem problemas, numa larga variedade de situações, é uma ideia-chave para que a* *aprendizagem da Matemática constitua uma experiência positiva significativa"* (s. p.) .

Uma das primeiras questões, debatidas no contexto da investigação matemática, foi a clarificação do que era, afinal, um problema. Baroody (1993) diz- nos que *"o que é um problema para uma determinada criança pode ser apenas um exercício para outra criança, e um enigma para uma terceira"* (p. 13). Kantowski (1981, apud ABRANTES, 1989), estabelece a diferença entre problema e exercício, entendendo este último como algo que levará certamente o aluno a uma solução por via do recurso a um procedimento ou algoritmo, o que levanta a questão: Quando é que uma tarefa constitui um problema genuíno?

Baroody (1993) esclarece que o facto de uma tarefa constituir um problema genuíno depende de dois fatores: *"(a) o ritmo de desenvolvimento e aprendizagem da criança (a criança estar em condições para), (b) a tarefa poder ou não ser atractiva para a criança"* (p. 13). Para além disso, com o decorrer do tempo e com a aquisição de novos conhecimentos, aquilo que a criança considerava como um problema pode passar a ser visto pela mesma como um mero exercício, concluindo-se que um problema genuíno é aquele *"em que não existe um processo óbvio para determinar a solução"* (BAROODY, 1993, p. 14). Quando o professor entender a diferença entre os três conceitos referidos anteriormente estará apto a desenvolver tarefas que constituam "problemas genuínos", cabendo-lhe, então, orientar os seus alunos de modo a que estes se tornem capazes de resolver problemas.

Mas como proceder na aplicação dos problemas no contexto da sala de aula? Para Schoenfeld (1996), o professor, ao desenvolver a resolução de problemas com os seus alunos, deve pretender "ajudá-los a aprender a pensar matematicamente" (p. 68). Na perspetiva deste autor, pensar matematicamente significa: *"(a) ver o mundo de um ponto de vista matemático (tendo predilecção por matematizar: modelar, simbolizar, abstrair, e aplicar ideias matemáticas a uma larga gama de situações), e (b) ter as ferramentas do ofício para matematizar com sucesso"* (p. 68).

Por outro lado, a Educação Matemática Realista (RME – *Realistic Mathematical Education*) aponta também para uma abordagem que valoriza a experiência da Matemática na resolução de problemas do dia a dia e do papel da modelação, num processo que garante, por etapas, que o processo de abstração se desenvolva gradualmente, seguindo a ideia de heurística de modelos emergentes e a reinvenção guiada (GRAVEMEIJER, 2005). Partindo da resolução de problemas em contextos do quotidiano, a abordagem procura a “invenção” de estratégias de resolução, o que se traduz no que se designa por reinvenção guiada, a par da utilização de modelos. Cada um destes modelos surge associado, inicialmente, a contextos específicos que, com a sua utilização em problemas diferentes, se vai tornando

> mais importante como base para o raciocínio matemático do que como uma forma de representar um problema contextualizado. Assim, o modelo começa a tornar-se uma base referencial para o nível da Matemática formal. Ou resumidamente: um modelo de actividades matemáticas informais desenvolve-se num modelo para um raciocínio matemático mais formal. (idem, p. 16)

Esta abordagem é particularmente interessante, pois vai ao encontro da necessidade de promover os processos matemáticos e uma aprendizagem da Matemática de forma significativa. De facto, a proposta do RME traduz-se em algumas das seguintes opções metodológicas no ensino da Matemática (DICKINSON & HOUGH, 2012):

- A utilização de situações realistas (do contexto do dia a dia) que permitam aos alunos desenvolver a sua própria Matemática e, ocasionalmente, como cenários de referência para introduzir novos tópicos antes de abordar a teoria;
- A mitigação da importância dada aos algoritmos apostando na Matemática com compreensão, por meio de um gradual refinamento de procedimentos informais;
- A aposta num planeamento de sessões que, ao invés de serem orientadas para a aquisição de conteúdos, apostam num percurso mais gradual de aprendizagem, discutindo um tópico num tempo mais prolongado;
- A aposta da discussão e reflexão como elementos fundamentais para a aprendizagem.

A investigação que vem sendo desenvolvida relacionada com a o ensino através da resolução de problemas (*“teaching through problem solving”*) é bem documentada por Cai (2003). Esta autora refere que os alunos, à medida que resolvem problemas, utilizam estratégias próprias e diferenciadas, baseiam-se em conhecimentos adquiridos e justificam as suas ideias de forma a que, para eles, elas façam sentido. Acrescenta ainda que:

> O ambiente de aprendizagem através da resolução de problemas fornece um suporte natural para os alunos apresentarem soluções diferentes no contexto do grupo de trabalho ou da turma através das interações sociais que estabelecem, negociações com significado que encetam e partilha dos resultados das suas aprendizagens (idem, p.16).

Numa investigação em que se procura identificar as dificuldades dos alunos na resolução de problemas, a gestão dos erros dos alunos é de extrema importância. De facto,

> através da análise dos erros dos alunos, parece que eles beneficiariam de uma orientação através da definição de uma heurística desde que ela pudesse ilustrar

> como é que os procedimentos “funcionam”, dando espaço amplo para a discussão, para a prática e para a reflexão, encorajando assim os esforços de aprendizagem dos alunos” (KILPATRICK, 1978, apud SUYDAM, 1980, p. 45).

A abordagem do conceito de heurística torna-se pois um elemento de orientação para professores e alunos na tarefa de melhorar a proficiência na resolução de problemas. Finalmente, as abordagens à comunicação e reflexão matemáticas são usualmente referidas no contexto da resolução de problemas. Em particular Beswik e Muir (2004) referem a importância de verbalizar e registar as suas estratégias, sobretudo para aqueles que se encontram na média no que respeita à capacidade de comunicação verbal ou escrita e/ou que apresentam algumas dificuldades.

Convém referir, por último, que na procura de uma estratégia que permita a abordagem da resolução de problemas na sala de aula, as etapas ou fases definidas por Pólya (1973) são, habitualmente, consideradas pelos professores. Pólya destaca as seguintes fases: Compreender o problema; Delinear um plano, selecionar uma (ou mais) estratégia(s); Desenvolver esse plano e avaliar os resultados. Pólya acrescenta também uma série de heurísticas que apoiam o processo de resolução, fornecendo orientação para as estratégias de resolução a adotar.

3. Metodologia de investigação

Neste estudo seguiu-se uma investigação de natureza qualitativa (BOGDAN & BIKLEN, 1994), com design de experiência de ensino (COBB et al., 2003).

A recolha de dados foi feita em situação, através da tomada de notas de campo, recorrendo-se também a equipamento vídeo e/ou áudio, complementada por informações resultantes de um contacto direto; tal como é referido por Bogdan e Bliken (1994), os resultados da investigação realizada *“contêm citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação”* (p. 48), fazendo parte fotografias, notas de campo e documentos pessoais. Houve a constante preocupação, durante a investigação, de compreender a forma como os diferentes intervenientes no processo davam sentido àquilo que faziam. No dizer de Bogdan e Biklen (1994), que também se socorrem das palavras de Psathas (1973), *“os investigadores qualitativos em educação estão continuamente a questionar os sujeitos de investigação, com o objectivo de perceber aquilo que eles experimentam, o modo como eles interpretam as suas experiências e o modo como eles próprios estruturam o mundo social em que vivem”* (p. 51). Esta é também uma das características da metodologia de design de experiência de ensino, na qual uma reflexão diária resultante da coleta de dados acerca das conceções dos alunos, da sua análise e do seu uso para determinar a tarefa a realizar em seguida (STEPHAN et al., 2010).

Este trabalho foi desenvolvido com dois grupos de crianças. O primeiro referente a um grupo de dezasseis crianças em idade pré-escolar, com idades compreendidas entre os cinco e os seis anos, pertencente à EB1/JI de São Roque, em S. Miguel, Açores, no período compreendido entre fevereiro e junho de 2013. O outro grupo, uma turma do terceiro ano constituída por vinte alunos do ensino fundamental, doze do sexo feminino e nove do sexo masculino, com idades compreendidas entre os sete e os nove anos, pertencentes à EB1/JI de São Pedro, em S. Miguel, Açores, no período compreendido entre setembro e dezembro de 2014.

No contexto deste estudo, partimos de um conjunto de questões de partida das quais aquela que se enquadra na discussão realizada neste artigo é a seguinte[6]:

> *De que forma a resolução de problemas, a par da comunicação e do raciocínio matemáticos, promovem as diferentes vertentes da aprendizagem da Matemática?*

Entenda-se como vertentes de aprendizagem as que traduzem o conhecimento do conteúdo ("subject-matter") bem como o do saber-fazer ou procedimental, para além daquele que está subjacente aos diferentes processos matemáticos. Esta estratégia está ilustrada na figura 1 e que corresponde ao cenário hipotético que será, em parte, ilustrado pelos diversos exemplos de prática realizada em contexto de sala de aula.

FIGURA 1: Esquema conceptual para a elaboração das estratégias no contexto da investigação.

As atividades desenvolvidas envolveram sempre a resolução de problemas,

6 Outra questão trabalhada, mormente, a importância do cálculo mental na aprendizagem da Matemática é discutida em (FERREIRA, 2014).

estabelecendo como vértices de suporte para a sua resolução, a valorização de diferentes estratégias de resolução e a utilização da heurística de Pólya (1973) que, na expetativa dos autores iria abrir espaço para a comunicação e raciocínio matemáticos. No eixo que estabelece a ligação entre a comunicação matemática e o raciocínio, colocámos a promoção da "autonomia intelectual" (KAMII, 1984), como elemento a monitorizar e avaliar, prevendo que a comunicação e o registo escrito do raciocínio fossem instigadores desta capacidade.

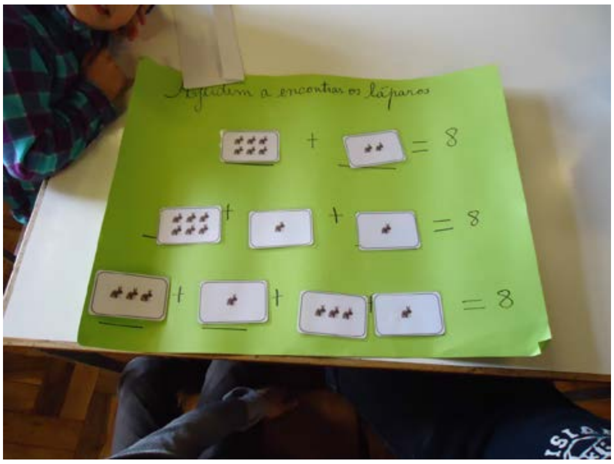
4. As tarefas de resolução de problemas

Nesta secção faz-se descrição acompanhada por uma análise crítica de algumas tarefas realizadas pelos alunos, pretendendo-se retirar conclusões pertinentes para práticas futuras. Cada tarefa no momento da sua realização prática foi alvo de um olhar crítico, a fim de perceber o modo como os alunos interagiam e respondiam perante o que lhes era solicitado e as aprendizagens que, a partir daí, construíam. As tarefas implementadas procuravam promover nos alunos um leque de aprendizagens que foram sendo destrinçadas, a fim de se averiguar a sua riqueza em termos formativos, procurando responder à questão de partida no âmbito do cenário hipotético traçado.

«Ajudem a encontrar os láparos»

Esta tarefa, realizada com o grupo de crianças da pré-escola, surgiu numa altura em que o tema abordado na área do conhecimento do mundo se relacionava com os «Animais Domésticos». Assim, as crianças foram confrontadas com um problema que resultara da exploração de uma história, na qual os láparos tinham desaparecido da quinta. Para a resolução do problema (encontrar os oito láparos desaparecidos), foram entregues às crianças cartões com a imagem de diferentes números de láparos e uma

FIGURA 2: «Ajudem a encontrar os láparos»



cartolina com várias adições com parcelas por preencher e cujo número de parcelas variava, devendo, todavia, cada sequência de operações ter como resultado o número oito. As crianças tinham, portanto, de tomar várias decisões relativamente aos cartões a escolher, de modo a que pudessem utilizar todos os cartões disponíveis, como está exemplificado na figura 2. A figura ilustra como este grupo de crianças resolveu o problema, estabelecendo uma relação entre os números, baseando-se no número de parcelas disponíveis para efetuar cada sequência de operações de adição e no total que era preciso encontrar (a soma deveria ser oito).

A comunicação que promovemos com os grupos permitiu-nos identificar o raciocínio matemático das diferentes crianças. Um dos grupos explicou, da seguinte forma, como tinha conseguido resolver o problema dos láparos:

> Aluno A – Aqui só tinha dois espaços, por isso não podíamos pôr um número pequenino, porque o aluno J já tinha posto 3+3 e não deu; por isso, fui procurar um número maior e encontrei o 6, que é maior.

Ao analisar estas palavras, percebe-se que a criança revela ter a noção de como se estabelecem as partições de um número, tendo aplicado as noções de maior e menor. Naturalmente que este raciocínio surgiu no contexto da tarefa apresentada, a qual, por permitir a exploração num espaço de soluções, conjugou a versatilidade de situações à necessidade de as comunicar, justificando-as.

Optámos, no contexto da tarefa desenvolvida, por garantir que as crianças dispusessem dos números de que necessitavam, sem haver números intrusos que viessem a dificultar a tarefa, por considerarmos importante criar em cada criança autoconfiança nas estratégias implementadas pelo grupo. Com efeito, se, neste caso, houvesse um outro «número maior», mas que invalidasse a soma, isto poderia, nesta fase em que se pretendia incutir o gosto por este tipo de desafios, levar as crianças a desistir, perdendo-se a oportunidade de estimular o gosto por situações problemáticas.

Verificou-se também que aquela tarefa obrigou as crianças a mobilizarem os conhecimentos que já tinham e a aplicá-los ao serviço de uma nova situação problemática. Tornou-se para nós claro que as características do material que o professor decidiu usar foram fundamentais para promover o raciocínio das crianças.

Deste mesmo grupo, uma outra criança continuou a verbalizar o seu raciocínio, afirmando:

> Aluno R – Depois teve de ser o 2, porque era o único que dava 8, mas já vi o grupo do aluno F e eles fizeram foi 4+4, que também deu 8. Este aqui [última etapa da imagem] foi mais difícil, mas o aluno R disse para irmos procurar os cartões com

> menos láparos.
>
> Professor – Por que foram buscar os números mais pequenos?
>
> Aluno R – Porque aqui tem mais espaços e se formos procurar números grandes vai passar do 8.

E o aluno A referiu o seguinte:

> Aluno A – Neste outro aqui [desafio localizado sensivelmente a meio do cartaz apresentado na figura 2], fizemos 6+1+1 e deu 8. Se juntássemos os cartões num só dava 6+2 que também dá 8.

As afirmações dos alunos *R* e *A* permitem-nos confirmar que estes alunos ao mobilizarem o conceito de partição de um número, estabeleciam a relação de grandeza entre os números, deduzindo a propriedade que associava um maior número de parcelas ao valor numérico de cada parcela tendencialmente mais pequeno. Além disso, as crianças encontraram uma estratégia para resolver a situação: procurar os cartões com um menor número de láparos.

Este exemplo veio valorizar a aposta em atividades problemáticas que possibilitam a escolha de diferentes estratégias de resolução. Ela configura-se como um exemplo da ligação entre a resolução de problemas e o espaço de comunicação matemática através das múltiplas formas de resolução, estimulados por um material didático apropriado. Esta experiência foi decisiva para o "design experimental" realizado em intervenções subsequentes.

«O problema dos balões»

Em relação ao trabalho desenvolvido no ensino fundamental com alunos da segunda série, criámos situações problemáticas relacionadas com locais históricos da cidade de Ponta Delgada, por uma necessidade de ligação com a área de Estudo do Meio, na qual se abordava o tema "A sua Naturalidade e Nacionalidade", inserido no Programa de Estudo do Meio, no "Bloco 1 – À Descoberta de Si Mesmo", do 3.º ano de escolaridade do currículo de Portugal.

No momento da realização dos problemas, cuja análise apresentaremos de seguida, os alunos já estavam familiarizados com as fases do método de Pólya (1973), que tinha sido introduzido como forma de lhes fornecer algumas ferramentas que os ajudassem a desenvolver uma certa autonomia na resolução de problemas. Para a resolução destes problemas, os alunos perguntaram-nos se podiam resolvê-los utilizando um cartaz do método de Pólya previamente elaborado e discutido, mas sem escrever, passo a passo, as diferentes fases, pois demoraria mais tempo. A proposta foi aceite com a curiosidade de perceber como estariam eles a pensar fazer.

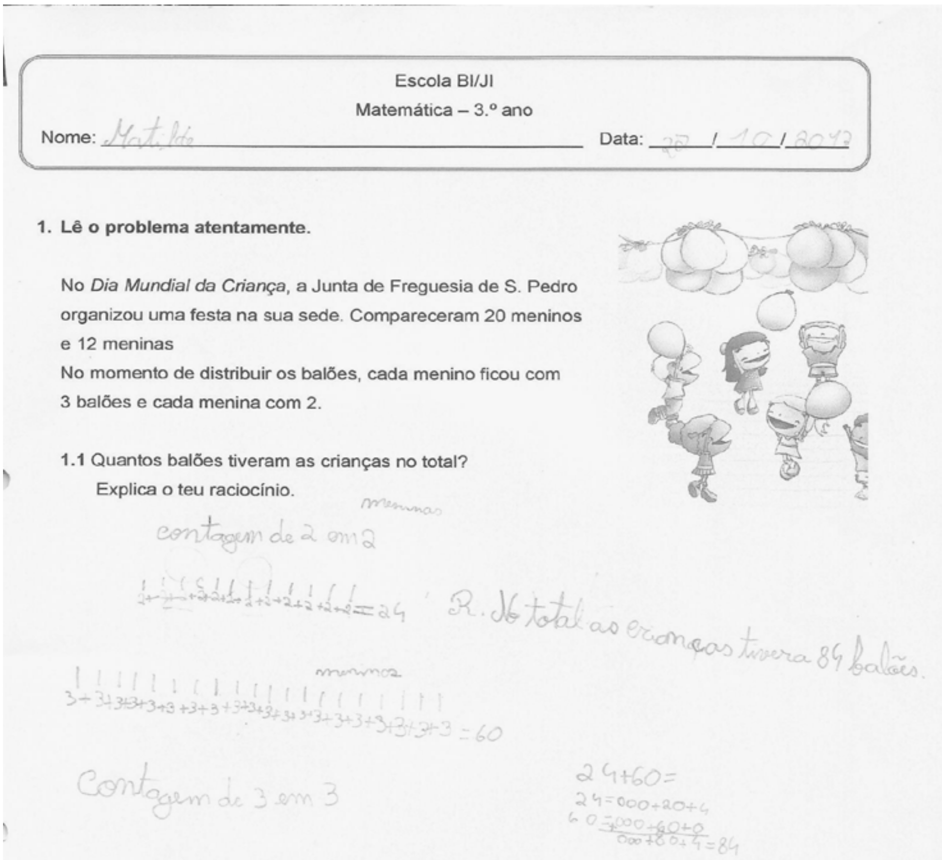
No entanto, e tendo em conta as estratégias e os passos utilizados pelos alunos, verificámos que o método de Pólya tinha sido, de facto, utilizado, demonstrando a sua apropriação pelo método em causa de tal modo que já conseguiam "acelerar" o processo de resolução de problemas. Na resolução do primeiro problema que se colocava, duas das alunas optaram por estratégias diferentes para chegar ao mesmo resultado. A Aluna M resolveu do modo que se pode observar na figura 3 enquanto a resolução da Aluna C é apresentada na figura 4.

A primeira aluna, para resolver o problema, optou por, inicialmente, fazer uma contagem de dois em dois, de modo a determinar quantos balões tinham sido distribuídos. Como é importante que o professor dê atenção aos raciocínios dos alunos e procure que eles os explicitem com clareza, solicitámos à aluna que o fizesse, tendo ela explicado o seu raciocínio da seguinte forma:

> Aluna M – Cada traço representa uma menina, por isso desenhei 12, porque no problema diz que são 12 meninas. Depois, fiz uma contagem de 2 em 2 por cada traço, porque cada uma delas teve 2 balões. Somando tudo, deu 24 balões para as meninas. Para os meninos fiz igual, só que, em vez de contar de dois em dois, contei de três em três, porque cada menino teve três balões. Para saber o total de balões, somei os balões dos meninos com os das meninas e deu 84.

A descrição exaustiva dos passos dados, utilizando discurso matemático rigoroso que a aluna apresenta, revela o raciocínio por ela elaborado, no qual recorre a representações esquemáticas dos dados do problema como forma de encontrar um caminho para a sua resolução, mostrando que ao raciocínio matemático "*estão associadas diversas formas de pensamento igualmente importantes para todos aqueles que fazem Matemática, como seja: prever resultados, muitas vezes essencial para a formulação de conjecturas; questionar soluções, mesmo as correctas; procurar padrões; fazer recurso a representações alternativas; analisar; sintetizar.*" (SEMANA & SANTOS, s. d., s. p.).

FIGURA 3: «O problema dos balões»: estratégias de resolução I.


Escola BI/JI

Matemática – 3.º ano

Nome: Matilde Data: 27 / 10 / 2012

1. Lê o problema atentamente.

No *Dia Mundial da Criança*, a Junta de Freguesia de S. Pedro organizou uma festa na sua sede. Compareceram 20 meninos e 12 meninas

No momento de distribuir os balões, cada menino ficou com 3 balões e cada menina com 2.

1.1 Quantos balões tiveram as crianças no total?

Explica o teu raciocínio.

meninas

contagem de 2 em 2

= 24

R. No total as crianças tivera 84 balões.

meninos

= 60

Contagem de 3 em 3

24+60=

24=000+20+4

60=000+60+0

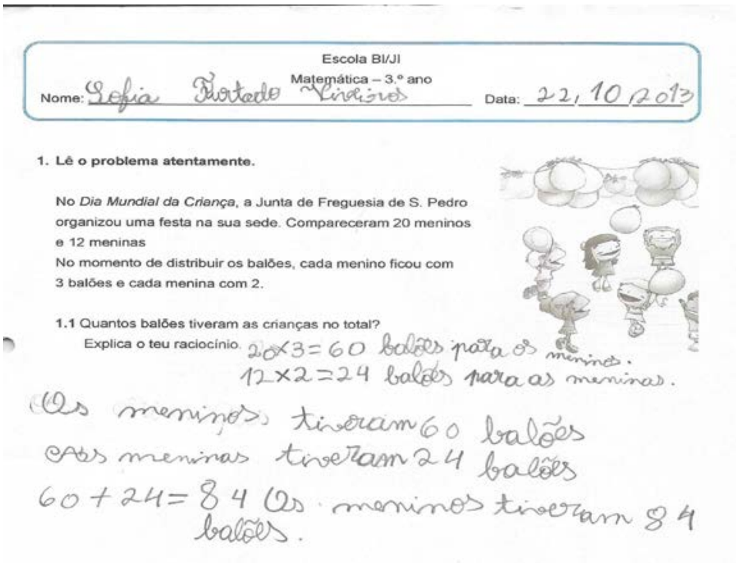
000+80+4=84

A riqueza subjacente à resolução de problemas associada à comunicação e raciocínio matemáticos pode ser confirmada com outra forma de resolução do mesmo problema apresentada pela segunda aluna (figura 4).

Esta aluna seguiu um raciocínio mostrando compreender que as adições sucessivas podem ser representadas através da multiplicação, revelando uma aproximação ao nível formal do raciocínio multiplicativo. Na resolução do problema não explica o seu raciocínio, talvez por não sentir necessidade de o fazer, apesar de lhe ter sido solicitado por escrito.

Os alunos desta turma revelavam grande dificuldade a este nível, possivelmente por não haver uma prática neste sentido. Daí que se traçou como objetivo encorajar, de forma sistemática, a explicitação do raciocínio oralmente. Esta relação entre a oralidade e o registo escrito vem ao encontro das preocupações observadas por Beswick e Muir (2004).

FIGURA 4: «O problema dos balões»: estratégia de resolução II.


Escola BI/JI
Matemática – 3.º ano
Nome:
Data: 22/10/2013

1. Lê o problema atentamente.

No *Dia Mundial da Criança*, a Junta de Freguesia de S. Pedro organizou uma festa na sua sede. Compareceram 20 meninos e 12 meninas.
No momento de distribuir os balões, cada menino ficou com 3 balões e cada menina com 2.

1.1 Quantos balões tiveram as crianças no total?
Explica o teu raciocínio. 20x3=60 balões para os meninos.
12x2=24 balões para as meninas.
Os meninos tiveram 60 balões
As meninas tiveram 24 balões
60+24=84 Os meninos tiveram 84 balões.

Esta estratégia apresentou várias vantagens. Por um lado, conseguíamos, em menos tempo, que um maior número de alunos praticasse a comunicação matemática, por outro, íamos familiarizando cada um deles com uma forma de "falar de Matemática", transpondo o seu pensamento para palavras, consolidando-o. Além disso, os colegas de turma também aprendiam com a partilha oral das estratégias utilizadas, levando-os a modificar ideias menos corretas que tinham (PONTE & SERRAZINA, 2000). Foi bastante reveladora da importância desta partilha, a atitude observada dos alunos face ao colega que estava no quadro a apresentar o seu raciocínio e a explicá-lo: ouviam-no com atenção, acompanhando as explicações com interesse e, por vezes, tirando conclusões, referindo que, daquela forma, era muito mais fácil.

Na linha de investigação, os aspetos da autonomia mostravam estar entrelaçados com a capacidade adquirida de comunicar. Kamii (1984) refere precisamente esse aspeto, quando salienta a importância do confronto entre ideias diferentes: *"As crianças corrigem-se a elas próprias de forma autónoma à medida que vão explicando o seu raciocínio umas às outras"* (p. 4).

Retomando a descrição da tarefa de exploração da situação problemática, solicitámos à aluna C que nos dissesse "como tinha feito" para chegar àqueles dados (figura 4). A aluna predispôs-se de imediato a explicar o seu raciocínio:

> Aluna C - Como cada menino recebeu 3 balões, eu fiz 20x3 para saber com quantos balões tinham ficado todos os meninos, e como cada menina só recebeu 2, eu fiz 12x2 para saber com quantos balões tinham ficado as meninas. No final, eu fiz 60+24 e fiquei a saber o número de balões que todos tiveram.

Observe-se que a propósito de um mesmo problema, houve a utilização de estratégias diferentes na sua resolução, partilhadas na turma. Este momento enquadra-se nos objetivos estabelecidos no documento do NCTM (1998, apud por PONTE & SERRAZINA, 2000):

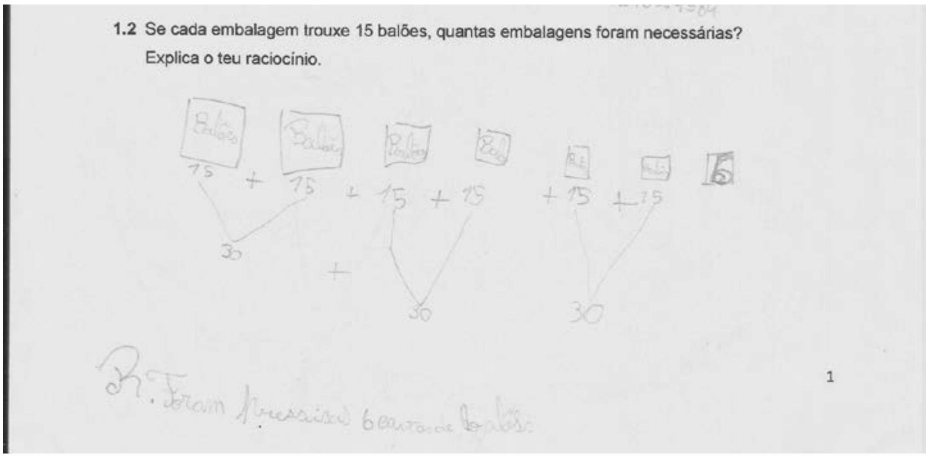
> O programa de Matemática deve usar a comunicação para promover a compreensão da Matemática, de modo que todos os alunos:
>
> - Organizem e consolidem o seu pensamento matemático para comunicar com outros;
> - Expressem as suas ideias matemáticas de modo coerente e claro para os colegas, os professores e outras pessoas;
> - Alarguem o seu conhecimento matemático, considerando o pensamento e as estratégias dos outros;
> - Usem a linguagem matemática como um meio de expressão matemática precisa. (p. 60)

O problema anterior tinha uma outra etapa que também foi resolvida de diferentes formas pelos alunos, destacando-se, aqui, dois exemplos. Começando pelo da figura 5, verifica-se que o aluno fez a compreensão do problema, estabelecendo a ligação com os dados obtidos anteriormente, tendo, depois, recorrido ao desenho e às adições sucessivas como estratégia. Partindo do que tinha feito, encetou-se o seguinte diálogo:

> Aluno S – Como eu já sei que foram utilizados 84 balões, desenhei as embalagens dos balões e, como sabia que cada uma tinha 15, fui sempre somando até dar 84, mas nunca dava, porque, se formos sempre contando de 15 em 15, nunca dá 84. Então, eu fui somando até dar mais do que 84 e deu 90. Quando deu 90, parei e contei as embalagens e deu 6.
> Professor – Mas por que paraste quando deu mais do que 84?
> Aluno S – Porque não precisava de mais balões. Já tinha os que queria.
> Professor – O que pensas da forma como o S resolveu o problema?
> Aluno M – Foi muito boa. Não me tinha lembrado de fazer assim, mas para a próxima vejo se também dá certo fazer desta maneira.

As explicações com esta simplicidade de linguagem, no seio de um grupo de trabalho, proporcionam a oportunidade de uma melhor compreensão das etapas seguidas no decurso da resolução de um determinado problema e estimulam a (re)construção da aprendizagem dos participantes, de forma integradora. Destacamos aqui o papel do professor, que promove a socialização da “descoberta”, que resulta num juízo de valor acerca da estratégia utilizada pelo aluno S.

FIGURA 5: Estratégia de resolução por contagem sucessiva.


1.2 Se cada embalagem trouxe 15 balões, quantas embalagens foram necessárias?
Explica o teu raciocínio.

15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15

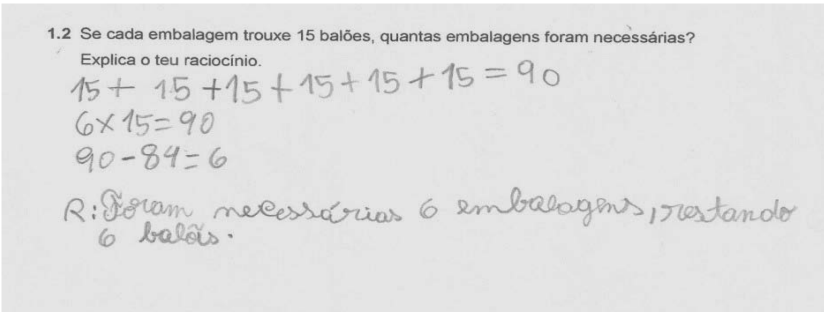
30 + 30 30

R: Foram necessárias 6 caixas de balões.

1

Na mesma tarefa, aproveitámos o trabalho de um outro aluno convidando-o a partilhar a sua resolução, pelo facto de este ter chegado a conclusões a que mais nenhum aluno na turma havia conseguido, embora utilizando uma estratégia muito semelhante à

FIGURA 6: «O problema dos balões»: estratégia de resolução pela descoberta.


1.2 Se cada embalagem trouxe 15 balões, quantas embalagens foram necessárias?
Explica o teu raciocínio.

15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 = 90
6 × 15 = 90
90 − 84 = 6

R: Foram necessárias 6 embalagens, restando 6 balões.

anteriormente analisada (figura 6). O aluno fez a seguinte descrição:

> Aluno T – Como diz no problema que cada embalagem tem 15 balões, eu fui sempre somando até dar 84, mas nunca deu. Por isso, parei quando deu 90, porque já era mais que 84. Quando olhei, vi que 15+15+15+15+15+15 era o mesmo que 15x6, por isso também quis pôr aqui, e também reparei que restaram 6 balões por que os meninos só tiveram 84, mas compraram 90, por isso, se fizermos 90-84 ficamos a saber que restaram 6 balões.

Este aluno compreende que as adições sucessivas podem ser transformadas em multiplicações, e revela gosto por explicar a conclusão a que chegou. Este é ainda um bom exemplo de como, através de uma situação problemática, o aluno aprofunda o raciocínio e retira as suas próprias conclusões utilizando os conhecimentos que detém, sem que nenhuma estratégia específica tenha sido pedida, indo ao encontro de uma linguagem mais formal.

A partir deste exemplo, percebe-se que a resolução de problemas potencia o envolvimento do aluno matematicamente. Ele olha para o problema não apenas como quem está preocupado em saber a solução, mas como quem vê nele outros aspetos desafiantes que lhe dão prazer solucionar. Com efeito, quando um aluno está intrinsecamente motivado para realizar uma tarefa e as normas sócio-matemáticas estabelecidas no contexto de sala aula o favorecem (YACKEL & COBB, 1996), parece que mais facilmente aceita correr riscos para melhorar o seu trabalho e, certamente, mais se envolverá na exploração aprofundada da situação e na compreensão daquilo que ela envolve. Este exemplo parece vir ao encontro do que é entendido pelos investigadores Engle e Conant como um ambiente de aprendizagem produtivo (ENGLE & CONANT, 2002 apud SCHOENFELD, 2006), onde são disponibilizados recursos para a realização da tarefa (“resources”), há um desafio “intelectual” proposto no contexto de um problema (“problematizing”), é atribuída autoridade ao aluno para o realizar (“authority”) e, finalmente, este é partilhado com os outros colegas (“accountability”).

Uma outra conclusão que se retira destas situações problemáticas é o facto de não bastar colocar na ficha de trabalho uma frase pedindo ao aluno que explicite o seu raciocínio, pois, durante o registo escrito, e como se pôde verificar, o raciocínio não é explicitado, apesar de estar implícito. Torna-se, assim, necessário pedir aos alunos que expliquem verbalmente, estimulando, dessa forma, a partilha com todos os colegas de como pensaram e de como resolveram o problema. Assim, a oralidade parece ser um bom meio para estimular e familiarizar o aluno com as particularidades dos “mecanismos” associados ao registo escrito do raciocínio.

Esta experiência veio valorizar a estratégia adotada, de dar oportunidade aos alunos de pensar no problema, de serem eles próprios a encontrar estratégias para os resolver e de divulgar estas mesmas estratégias. Pareceu existir uma relação entre o grau de motivação e a necessidade de “explorar o problema ao máximo”, retirando, como neste caso em concreto, conclusões que não lhes eram explicitamente pedidas.

«O prédio da Avenida Infante D. Henrique»

O problema que se apresenta, de seguida, provocou algum espanto na turma e a grande maioria não o conseguiu resolver, com a exceção de uma aluna que apresentou a resolução ilustrada na figura 7.

Nessa resolução, a aluna mostra que o soube interpretar, pois, para além de perceber o que se pretendia, conseguiu distinguir a informação essencial da acessória, o que a grande maioria da turma não foi capaz de fazer. Este problema exemplifica, de facto, a importância que a compreensão da leitura tem na resolução de um problema, mas também revela que é fundamental que os alunos estejam familiarizados com situações problemáticas diferentes para perceberem, num determinado contexto, quais os dados relevantes para se elaborar uma estratégia.

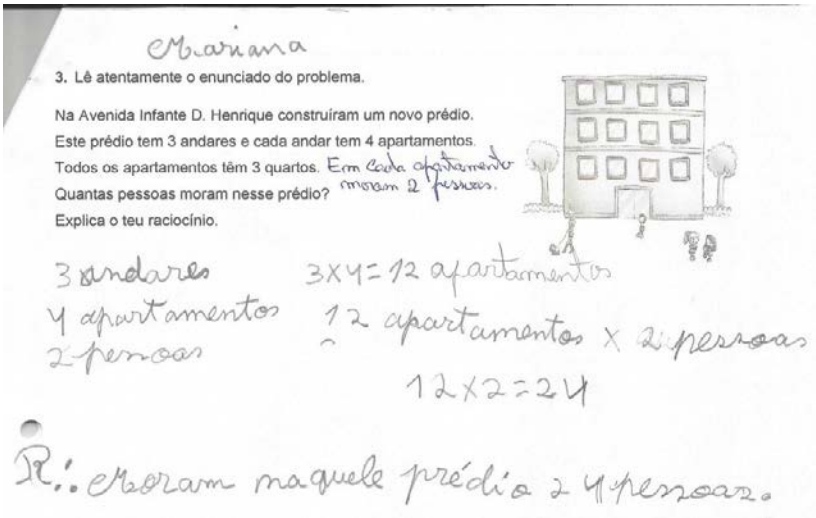
Na verdade, quando os alunos estão habituados a resolver problemas que contêm sempre e só os dados que interessam para a sua resolução, eles criam a ideia de que toda a informação dada tem de integrar a(s) estratégia(s) de resolução. Uma vez mais, torna-se evidente a necessidade de o professor ter um papel de promotor de situações diversificadas de aprendizagem e de facilitador da clarificação dos raciocínios dos alunos, para que eles se tornem cada vez mais competentes em situações que envolvam a aplicação de ferramentas matemáticas.

Solicitámos, então, à aluna que se dirigisse ao quadro e explicasse à turma como tinha pensado, ao que ela disse:

> Aluna C – O problema é fácil! Tem é uma rasteira, mas eu não vou dizer ainda, para vocês descobrirem! Eu, primeiro, copiei as palavras mais importantes do problema, que foram: 3 andares, 4 apartamentos e 2 pessoas. O problema diz que o prédio tem 3 andares e cada andar tem 4 apartamentos, por isso fiz 4x3 e fiquei a saber que tem 12 apartamentos. E, como cada apartamento tem duas pessoas, fiz 12x2 e deu 24, por isso moram 24 pessoas no prédio! Aquela parte que todos os apartamentos têm 3 quartos foi uma rasteira do professor, não foi?

Pela explicação da aluna, percebe-se que, para resolver o problema, esta seguiu deliberadamente algumas das indicações discutidas previamente baseadas no método de Pólya (1973), tendo começado pela importante fase da compreensão daquilo que era, de facto, o problema. A segurança com que a aluna apresenta o seu raciocínio é também revelador da autonomia intelectual que se revela à medida que uma prática de comunicação e partilha se vai enraizando nas “normas” implícitas na sala de aula. Por outro lado, o facto de se apropriar de uma heurística na resolução, parece ter contribuído para o processo metacognitivo de categorização do problema como um “problema com rasteira”.

FIGURA 7: «O prédio da Avenida Infante D. Henrique»: estratégia de resolução.



«Pedras e aquários»

Numa das intervenções que se seguiram, foi sugerido abordar o algoritmo da divisão. Contudo, e para que os alunos pudessem compreender os diferentes sentidos da divisão, optámos por utilizar a seguinte estratégia: organizámos a turma em pares e dissemos que queríamos comprar alguns aquários, obedecendo a um critério específico. Concretamente, precisaríamos de um determinado número de aquários de forma a ter o mesmo número de pedrinhas em cada aquário, sendo que existiam apenas doze pedrinhas para dividir pelos aquários.

Lançado este desafio, distribuímos doze pedrinhas por cada par e perguntámos se tivéssemos um aquário quantas pedrinhas poderíamos colocar e todos responderam que deveríamos pôr as 12 pedras. De seguida, perguntámos se tivéssemos dois aquários como se poderia proceder. Cada par de alunos foi dividindo as pedras pelos dois aquários, tendo chegado à conclusão de que cada aquário ficaria com 6 pedrinhas. Estas perguntas foram feitas até se alcançar os 12 aquários e os alunos concluíram que, se quiséssemos comprar aquários e colocar o mesmo número de pedras em cada um, poderíamos comprar 1, 2, 3, 4, 6 ou 12 aquários, porque eram os únicos valores que nos permitiam ter o mesmo número de pedras em cada. Note-se que, com esta situação problemática, explorou-se o conceito de divisor de um número, concretamente exploraram-se os divisores de 12.

A conclusão pretendida foi alcançada mediante uma discussão na turma que permitiu que os alunos experimentassem a divisão ao mesmo tempo que percebiam os divisores de um número. Damas et al. (2010) referem que *“antes da fase de abstracção as* *crianças devem passar por situações concretas que lhes permitam, não só a construção de certos conceitos como, também, uma melhor estruturação dos mesmos”* (p. 5).

Durante a discussão, um aluno avançou com a seguinte possibilidade:

> Aluno H – Se o professor comprar 5, 7, 8, 9, 10, ou 11 aquários não vai conseguir ter o mesmo número de pedras; só se partirmos em pedaços mais pequenos.
> Professor – Então o que é que isto significa?
> Aluno H – Significa que 5, 7, 8, 9, 10, e 11 não são divisores de 12.

Uma vez mais constata-se que a resolução de problemas leva a que sejam os alunos a desenvolver as suas próprias estratégias, tornando-se capazes de obter a solução e chegando ao conceito de divisor, a partir de uma situação problemática que mobilizou uma estratégia envolvendo a manipulação de objetos. A comunicação que o professor fomenta na exploração de conceitos matemáticos permite o acompanhamento do raciocínio do aluno e funciona como um incentivo à formulação de conclusões.

«Múltiplos de 2, 5 e 10»

Na mesma semana de intervenção, planeou-se trabalhar os múltiplos do 2, do 5 e do 10. Optámos por elaborar uma tabela com os números de 1 a 50, fazendo algumas solicitações aos alunos.

Na figura 8, apresenta-se o trabalho que uma aluna desenvolveu e as conclusões a que chegou. Terminada a resolução da questão número um, a aluna exclamou:

> Aluna X – Oh… Eu pintei o mesmo número de várias cores!

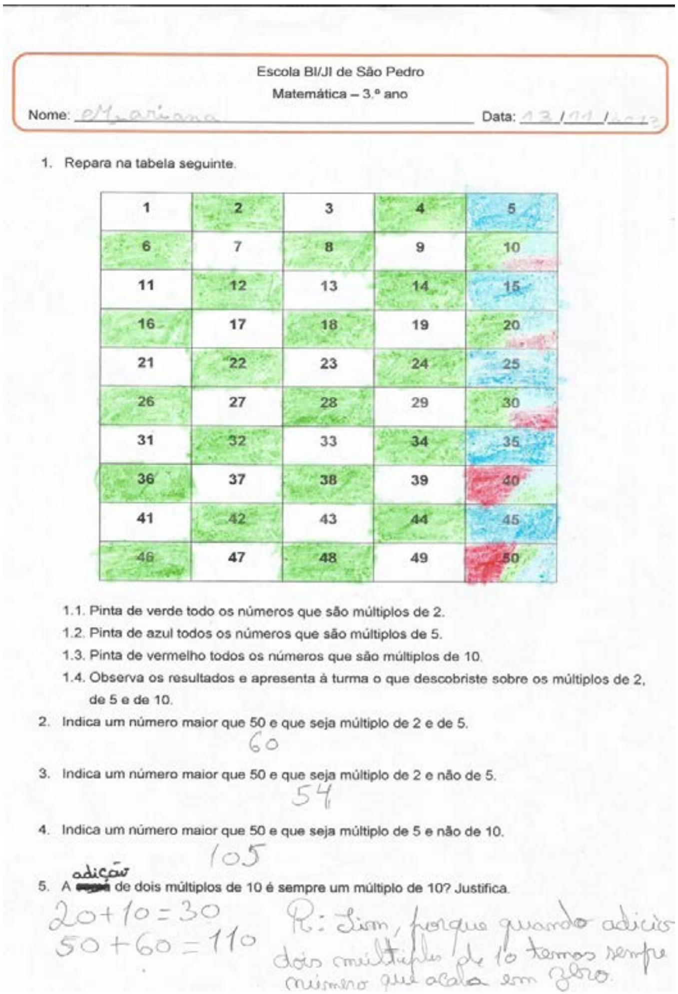
Os restantes colegas concordaram com a menina. Aproveitámos, de imediato, esta observação da turma:

> Professor – E está certo. Sabes o que isso significa?
> Aluna X – Que existem números que são múltiplos de 2, de 5 e de 10 ao mesmo tempo!

Nesta altura, outro aluno interrompeu e disse:

> Aluno M – Eu também descobri uma coisa! Professor – O quê?
> Aluno M – Os múltiplos de 2 são números pares, os múltiplos de 5 acabam em zero e cinco e os múltiplos de 10 acabam sempre em 0!

FIGURA 8: «Múltiplos de 2, 5 e 10».


Escola BI/JI de São Pedro
Matemática – 3.º ano
Nome: _______________ Data: 13 / 11 / ____

1. Repara na tabela seguinte.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
36	37	38	39	40
41	42	43	44	45
46	47	48	49	50

1.1. Pinta de verde todo os números que são múltiplos de 2.
1.2. Pinta de azul todos os números que são múltiplos de 5.
1.3. Pinta de vermelho todos os números que são múltiplos de 10.
1.4. Observa os resultados e apresenta à turma o que descobriste sobre os múltiplos de 2, de 5 e de 10.

2. Indica um número maior que 50 e que seja múltiplo de 2 e de 5.
60

3. Indica um número maior que 50 e que seja múltiplo de 2 e não de 5.
54

4. Indica um número maior que 50 e que seja múltiplo de 5 e não de 10.
105

5. A ~~soma~~ adição de dois múltiplos de 10 é sempre um múltiplo de 10? Justifica.
20+10=30
50+60=110
R: Sim, porque quando adiciono dois múltiplos de 10 temos sempre número que acaba em zero.

Aproveitando a descoberta de alguns padrões numéricos feita por esse aluno, escrevemos no quadro as principais conclusões e todos os alunos copiaram para os seus cadernos. Após esta descoberta, as questões apresentadas na ficha foram resolvidas com grande sucesso. Contudo, algumas respostas divergiram. A propósito da última questão, a aluna da ficha ilustrada na figura 8 explicou o seguinte:

> Aluna D – Eu experimentei somar dois múltiplos de 10 (20+30) que estavam na tabela e deu 40 que também é um múltiplo de 10 e depois experimentei somar dois números maiores (50+60) e deu 110 que também é um múltiplo de 10. A Y também experimentou mas com outros números e também deu sempre múltiplos de 10, porque acabam sempre em zero.

As afirmações destes alunos levam-nos a concluir que esta tarefa permitiu que se estabelecessem relações entre os diferentes números, que conduziram à identificação e compreensão do conceito de múltiplo de um número natural; possibilitou que eles inferissem regras que resultaram da observação e análise de regularidades, e fizeram-no por iniciativa própria, sem receio de as divulgar a toda a turma. Novamente, o material didático utilizado contribui decisivamente para a exploração encetada pelos alunos. A tabela parece “enquadrar” a heurística que permite a resolução das questões, convidando a uma exploração para lá dos seus limites (neste caso ultrapassando o espaço confinado aos números de 1 a 100). A comunicação desses resultados parece ser já uma prática natural e, acreditamos, potenciadora das descobertas “originais” realizadas.

Considerações finais

Ao implementar nas aulas de Matemática uma metodologia baseada na resolução de problemas, pretendeu-se que os alunos desenvolvessem o seu raciocínio juntamente com a comunicação matemática. O design de experiência de ensino permitiu-nos orientar as atividades valorizando os três pilares estabelecidos como elementos para procurar responder à questão de partida. A descrição das atividades práticas parece mostrar que o educador/professor pode planificar as suas aulas no sentido de desenvolver estas três capacidades em simultâneo (resolução de problemas, raciocínio e comunicação matemática), o que enriquece não só a aula de Matemática mas, fundamentalmente, a aprendizagem das crianças.

Por outro lado, mostra que o papel do professor na sala de aula pode ser o de promotor da comunicação matemática e de encetar uma procura sistemática da justificação nas opções tomadas na resolução de problemas. O estímulo à utilização de uma heurística para a resolução de problemas, partilhada no contexto de sala de aula, parece contribuir para que se desenvolva uma prática refletida sobre o que se aprende e que, ao mesmo tempo, se identifique fragilidades na aprendizagem que devem ser ultrapassadas. Finalmente, a interação entre os três processos matemáticos, resolução de problemas, raciocínio e comunicação matemática, conduz a uma participação ativa e efetiva dos alunos, aumentando a sua motivação e auto-estima, bem como promovendo a autonomia no trabalho da sala de aula.

Torna-se, portanto, fundamental que o educador/professor crie um ambiente propício a esta prática, conseguindo-o não só pela natureza das atividades implementadas, mas também pela predisposição em integrar a resolução de problemas nas suas práticas. E isso permite promover junto dos alunos o entendimento da Matemática, não como uma prática orientada para a procura de resultados, mas como uma prática que se preocupa em compreender as estratégias e os raciocínios que estão por detrás de tais resultados.

Referências

ABRANTES, P. Um (bom) problema (não) é (só).... *Educação e Matemática*: Revista da

Associação de Professores de Matemática., n. 8, p. 7-10, 35, 1989.

BALL, D.; HEATHER, H.; BASS, H. Knowing Mathematics for teaching. *American Educator*, v. 29, n. 1, p. 14-17, 20-22, 43-46, 2005.

BAROODY, A. J.; Coslick, R. T. *Problem Solving, Reasoning, and Comunicating*. Helping Children to Think Mathematically (K-8). Merril, 1993.

BESWICK, K.; MUIR, T. Talking and Writing About the Problem Solving Process. In: I. Putt, R. Faragher & M. McLean (Eds.), *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010*. Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, p. 95-102. Townsville: MERGA, 2004.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto: Porto Editora, 1994.

CAI, J. What research tells us about teaching mathematics through problem solving. In: F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Research and issues in teaching mathematics through problem solving*, p. 241-254. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2003.

COBB, P. et al. Participating in Classroom Mathematical Practices. *The Journal of the Learning Sciences*, v. 10, n. 1&2, p. 113-163, 2001.

COBB, P. et al. Design Experiments in Educational Research. *Educational Research*, v. 32, n. 1, p. 9-13, 2003.

CARVALHO, A.; RAMOA, M. *Dinâmicas da Formação: recentrar nos sujeitos, transformar os contextos*. Porto: Edições ASA, 2001.

DAMAS, E. et al. *Alicerces da Matemática: guia prático para pais e educadores*. Porto: Areal Editores, 2010.

DICKINSON, P.; HOUGH, S. *Using Realistic Mathematics Education in UK Classrooms' Mathematics in Education*: Realistic Mathematics Education, 2012. Disponível em http://www.mei.org.uk. Acesso em: 24 de junho de 2014.

FERREIRA, R. F. M. *A resolução de problemas e o cálculo mental na educação pré-escolar e no ensino do 1.º ciclo do ensino básico: uma reflexão em contexto de estágio*. Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico. Ponta Delgada: Universidade dos Açores, 2014.

FONT, C. M. *Estratégias de Ensino e Aprendizagem*. Porto: Edições ASA, 2007.

GRAVEMEIJER, K. What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In: L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas*, p. 83-101, Lisboa: APM, 2005.

KAMII, C. Autonomy: The Aim of Education Envisioned by Piaget. The Phi Delta Kappan, v. 65, n. 6, p. 410-415, 1984.

OLIVEIRA, H. M., SEGURADO, M. I., PONTE, J. P. *Tarefas de Investigação em Matemática: Histórias da Sala de Aula*. Actas do VI Encontro de Investigação em Educação Matemática, Portalegre: SPCE-SEM, p. 107-125, 1998.

PSATHAS, G. (ed.) *Phenomenological sociology*. New York: Wiley, 1973.

PÓLYA, G. *How to Solve It*. Princeton: Princeton University Press, 1973.

PONTE, J. P; SERRAZINA, M. L. *Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

SANTOS, B. P. *Paulo Freire e Ubiratan D'Ambrosio: Contribuições para a formação do professor de matemática no brasil*. Tese de doutoramento em Educação, Universidade de São Paulo, 1997.

SEMANA, S.; SANTOS, L. *A Avaliação e o Raciocínio Matemático*. Projeto AREA, s.d.

SERRAZINA, L.; OLIVEIRA, I. *O professor como investigador: Leitura crítica de investigações em educação matemática*. Actas do XII Seminário de Investigação em Educação Matemática, Vila Real, p. 29-55, 2001.

SCHOENFELD, A. Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas?. In: P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática*, pp. 61-72, Lisboa: APM e Projecto MPT, 1996. Disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/textos/schoenfeld%2091.pdf Acesso em: 3 de abril de 2014.

SCHOENFELD, A. Mathematics teaching and learning. In: P. A. Alexander & P. H. Winne (Eds.), *Handbook of Educational Psychology* (2nd edition), pp. 479-510. Mahwah, NJ: Erlbaum, 2006.

SILVA, A. *Programas de Matemática do 1º ciclo: Uma pesquisa histórica desde 25 de Abril de 1974 até 1990*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática na Educação Pré-Escolar e nos 1.º e 2.º Ciclos, Departamento de Educação do Ensino Básico, Escola Superior de Educação de Lisboa, Instituto Politécnico de Lisboa, 2010.

STEPHAN, M., AKYUZ, D., MCMANUS, G., SMITH, J., DICKEY, A., CHILES. *Conducting Design Research with Teachers: Artifacts and Practices that Support Teacher Engagement*. Educational Design Research: Local Change & Global Impact, Georgia: University of Georgia, 2010.

YACKEL, E.; COBB, P. Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 27, n. 4, p. 458-477, 1996.

Recebido em jul. /2014; aprovado em set. /2015