www.sapientia.uji.es | 97

UNIVERSITAT JAUME•I

Los números enteros y racionales, las magnitudes y la medida en el aula de primaria

Inmaculada Pérez Serrano
Manuel Alcalde Esteban
Gil Lorenzo Valentín

Los números enteros y racionales, las magnitudes y la medida en el aula de primaria

Inmaculada Pérez Serrano
Manuel Alcalde Esteban
Gil Lorenzo Valentín

UNIVERSITAT JAUME·I

DEPARTAMENT D'EDUCACIÓ

■ Codi d'assignatura MP1019

Edita: Publicacions de la Universitat Jaume I. Servei de Comunicació i Publicacions
Campus del Riu Sec. Edifici Rectorat i Serveis Centrals. 12071 Castelló de la Plana
http://www.tenda.uji.es e-mail: publicacions@uji.es

Col·lecció Sapientia 96. Els nombres enters i racionals, les magnituds i la mesura a l'aula de primària
http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia96
Col·lecció Sapientia 97. Los números enteros y racionales, las magnitudes y la medida en el aula de primaria
http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia97

www.sapientia.uji.es
Primera edició, 2014

ISBN: 978-84-697-1443-0

Publicacions de la Universitat Jaume I és una editorial membre de l'UNE, cosa que en garanteix la difusió de les obres en els àmbits nacional i internacional. www.une.es

ÍNDICE

Introducción

Presentamos en este documento un material para la formación inicial y permanente del profesorado de educación primaria, donde se muestran propuestas didácticas para trabajar los contenidos referentes a los Números Enteros y Racionales, y a las Magnitudes y la Medida en esta Etapa Educativa, como continuación de la publicación referida a los Números Naturales (colección Sapientia, números 89 y 90, en valenciano y castellano, respectivamente), que es necesario conocer para una comprensión fundamentada de los contenidos que se desarrollan en el presente texto.

Aunque los mencionados contenidos están trabajados en publicaciones de otros autores, pretendemos en esta ofrecerlos de manera unificada a nuestros lectores en un texto estructurado alrededor de las capacidades matemáticas que se deben trabajar con el alumnado de educación primaria. El orden en que aparecen los conjuntos numéricos en el texto respeta el orden matemático lógico de los mismos, aunque este no se sigue cuando se desarrollan los aspectos didácticos correspondientes en el aula de primaria, donde se trabajan los números racionales antes que los enteros.

Cada uno de los temas cuenta con una introducción que nos permite reflexionar respecto de dos cuestiones que consideramos importantes. Una es la evolución histórica de los contenidos que estudiamos: los Números Enteros y Racionales, sus usos y significados diferentes, así como las operaciones que se pueden realizar con estos números y las relaciones que se dan entre ellos; los conceptos de Magnitud y Medida, los pasos que la humanidad ha tenido que dar hasta llegar al universal sistema actual de unidades. Creemos que, cuando el estudiante de Grado conoce el momento en el que han aparecido los diferentes conceptos en la historia y también cómo se han desarrollado hasta nuestros días, les añade entidad y les dota de una perspectiva que va más allá del trabajo que se hace en el aula. La otra es el aspecto teórico de estos conceptos, que se expone en un resumen para fundamentarlos matemáticamente y que parte de la Teoría de Conjuntos de G. Cantor, con el fin de acercar el lector a los conceptos estudiados.

A continuación, como parte más importante del texto y como núcleo que justifica esta publicación, se incluye en cada tema un extenso apartado referente al tratamiento didáctico de los diferentes contenidos para trabajarlos en el aula de primaria y conseguir, de esta manera, el desarrollo de la competencia matemática del alumnado.

En el mencionado apartado didáctico se presentan los contenidos matemáticos a partir de la realidad y para ser aplicados en ella. Como consecuencia y otorgándole la importancia máxima a esta cuestión, todas las situaciones que se enuncian acompañando el contenido didáctico del texto forman parte de otras situaciones más complejas que se trabajan en el aula, en las cuales los conceptos matemáticos son esenciales para su interpretación y resolución. Unas veces las actividades matemáticas surgirán del desarrollo de algunos proyectos de trabajo globalizados, en otras ocasiones se plantearán a partir de las necesidades que generen otras materias del currículum. Solo cuando se contemplen algunos contenidos que no hayan aparecido en ninguna actividad como las mencionadas antes, el docente favorecerá de manera intencionada la aparición de situaciones que provoquen las incógnitas que los llevarán al descubrimiento de los mencionados contenidos.

En todos los casos, partiremos de las ideas previas del alumnado sobre cada uno de los conceptos a trabajar y, en particular, de sus propuestas personales y emergentes de resolución de las diferentes situaciones que se planteen. Seguiremos con la búsqueda de los procedimientos generales de representación numérica y de cálculo con números enteros y racionales, como forma de ofrecerles las herramientas matemáticas que socialmente se utilizan para representar estos números y las diferentes actividades en las que intervienen. Así mismo, encontraremos las unidades del Sistema Internacional como las herramientas que nos permiten resolver las dificultades que la relatividad de la medida provoca y, a la vez, entendernos con cualquier otra persona.

Atendiendo a las recomendaciones del Parlamento Europeo y del Consejo de Europa sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente, entendemos que la competencia matemática solo se concreta y cobra sentido en la medida en que los elementos y razonamientos matemáticos que se estudian son utilizados para enfrentarse a aquellas situaciones cotidianas que los necesitan. Por ello, su desarrollo en la escuela se conseguirá partiendo de una amplia variedad de actividades reales, derivadas de otros campos del conocimiento, de las situaciones habituales que se dan en el aula y de las propias experiencias y vivencias del alumnado. Se trata, en definitiva, de conseguir que los niños y las niñas sepan aplicar las destrezas y actitudes que les permitan razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático para dar una mejor respuesta a las situaciones de la vida de diferente nivel de complejidad.

El objetivo del material es proporcionar una herramienta para los profesionales de la docencia y para el estudiantado del Grado en Maestro, que les ayude a reflexionar sobre los fenómenos educativos que ocurren en el aula escolar y les permita enfrentarse a ellos desde un planteamiento que considera la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas como una tarea interdisciplinar y globalizadora que parte de una concepción sociocultural de la educación en general y de la educación matemática en particular. En concreto y de cara al estudiantado del Grado en Maestro de Educación Primaria de la Universitat Jaume I, este documento representa un material complementario de las clases presenciales, en las que se profundiza en el texto relacionando la fundamentación matemática de los conceptos y la didáctica de los mismos, por medio de la realización de diferentes actividades que se realizan a lo largo del curso académico

Presuponemos que en las aulas de primaria donde se trabajan los contenidos de este documento, se encuentran los materiales estructurados que describiremos más adelante u otros similares ideados y fabricados por los docentes y/o el alumnado, que deberán compartir en esencia lo que es fundamental para la construcción de los contenidos matemáticos que se tratan en esta publicación. Estos materiales constituyen un apoyo imprescindible para el trabajo en el aula de los conceptos estudiados en este libro.

El presente documento no agota la actividad que el maestro debe realizar en el aula. La gran variedad de dispositivos didácticos que puede ofrecer a sus alumnos es imposible reflejarla en cualquier publicación. Nuestro interés es poner la atención en lo que debe trabajar para fundamentar matemáticamente los procedimientos empleados por el alumnado y dar indicaciones de cómo debe hacerlo. Nunca agotaremos la creatividad didáctica que un docente debe tener en su tarea diaria.

Finalizados los temas comentados, se incluye un Anexo que cierra esta publicación, en el que se recogen algunos conceptos básicos de la Teoría de Conjuntos, que fundamentan los contenidos referentes a los Números Enteros y Racionales y a las Magnitudes y la Medida, trabajados en este libro. Se ofrece este Anexo como una guía consultiva para que al lector interesado le permita ampliar sus conocimientos, entendiendo que no son objeto de estudio obligatorio en las aulas de formación inicial de los maestros.

TEMA 1

Números enteros

En este tema se trabaja la construcción del concepto de número entero a partir del producto cartesiano **N** × **N**. Comienza el tema con una referencia histórica sobre el mencionado concepto, continúa con una formalización de la estructura del conjunto de los Números Enteros y finaliza con un tratamiento didáctico de estos contenidos en el aula de primaria.

1. Introducción

1.1. Histórica

Históricamente, la matemática surge con la finalidad de hacer los cálculos en el comercio, y también con la de medir la Tierra y predecir los acontecimientos astronómicos. Estas tres necesidades pueden ser relacionadas, en cierto modo, con la subdivisión amplia de la matemática en el estudio de los números, el espacio y el cambio.

El estudio de los números comienza con los naturales y los enteros y nos lleva finalmente a las estructuras algebraicas.

En cuanto a los números negativos, a pesar de que se conocían en Europa a través de textos árabes, la mayoría de los matemáticos de los siglos XVI y XVII no los aceptaban como números. La introducción conceptual ha sido un proceso de una lentitud sorprendente. Durante mucho tiempo, los números negativos fueron un útil de cálculo que facilitaba aspectos financieros como ganancias y pérdidas y, al mismo tiempo, también facilitaba la resolución de ecuaciones.

Los números negativos se empezaron a utilizar siglos antes de Cristo, para representar cosas o datos que faltaban, pero poco a poco dejaron de emplearse. Hay que esperar hasta el Renacimiento para volver a encontrarlos y con este nombre: «negativos». Per este motivo, se consideraron números del demonio y se perseguía su utilización, pero por necesidades de expresar cantidades de cualquier índole, se volvieron a utilizar en el siglo XIX (Ifrah, 2001).

Hasta finales de este siglo y principios del XX, no se formalizó la Teoría de Conjuntos de Georg Cantor y, por tanto, no se produjo tampoco la formalización del conjunto de los Números Enteros basada en ella. Será esta la que se utilizará en el presente tema.

1.2. Al tema

Los números enteros son una extensión de los números naturales, formada por los propios números naturales no nulos (1, 2, 3...), sus correspondientes negativos (-1, -2, -3...) y cero (0). El conjunto de todos los enteros se denota per la letra Z, por ser la primera de la palabra «número», en alemán *zahl*, y se representa por:

$$\mathbb{Z}\textbf{: ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...}$$

Los enteros engloban a los números naturales y, al mismo tiempo, son un subconjunto de los números racionales. En la figura 1 se puede ver una representación de estas relaciones de inclusión.

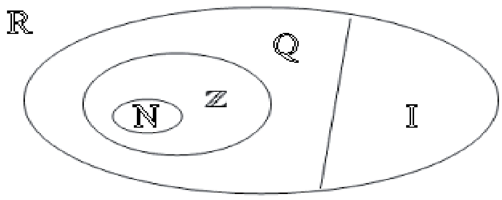

Figura 1. Representación de conjuntos numéricos

Donde $\mathbb{Q}$ representa los números racionales, $\mathbb{I}$ los irracionales y la unión de los racionales y los irracionales forma el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$.

2. Formalización del conjunto de números enteros

2.1. Construcción de los números enteros

Para construir los números enteros, se ha de partir de los que ya conocemos, que son los naturales. No hay ningún conjunto numérico más que podamos utilizar y solo con las propiedades que de los números naturales se pueden derivar, se ha de construir un conjunto en el que estos mismos estén incluidos.

Por tanto, hay que partir de *N*: 0,1,2,... y, teniendo en cuenta una serie de consideraciones, llegar al conjunto de los números enteros.

Para empezar la construcción de este conjunto, es conveniente recordar que llamamos producto cartesiano de dos conjuntos ***A***, ***B*** y lo simbolizamos por ***A***x***B***, a todos los pares ordenados de elementos que se pueden formar tomando como primer elemento, uno del conjunto ***A*** y como segundo, uno de ***B***, es decir, $\mathbf{A \times B = \{(a, b) / a \in A \wedge b \in B\}}$.

Así pues, primero hay que considerar el conjunto definido por el producto cartesiano **N** × **N** donde **N** es el conjunto de los números naturales:

$$\mathbf{N}\times\mathbf{N}=\{(\mathbf{a},\mathbf{b})/\,\mathbf{a}\in\mathbf{N}\wedge\mathbf{b}\in\mathbf{N}\}$$

Gráficamente este conjunto sería una red de puntos graduada, que comenzaría en **(0,0)** y tendería a infinito, como se muestra en la figura 2.

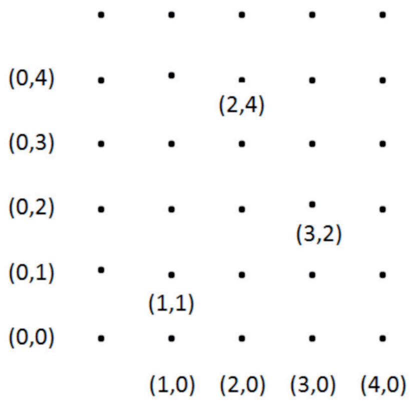

Figura 2. Representación parcial de **N** × **N**

De la misma manera que en el plano cartesiano, la primera coordenada corresponde al eje **X** y la segunda al eje **Y**, por tanto, es fácil observar que todos los pares de naturales situados en la misma columna comparten la primera coordenada y, si se encuentran en la misma fila, comparten la segunda.

Pero hay una tercera manera de observarlos, no tan evidente, que nos permitirá la construcción de los números enteros: es la que considera los pares situados en la diagonal con origen en (0,0) o en cualquiera de las direcciones paralelas a ella (Colectivo Periódica Pura, 1982). Consideramos dicha diagonal, cuyos elementos serían de la forma **(0,0), (1,1), (2,2)**... y sus paralelas (figura 3).

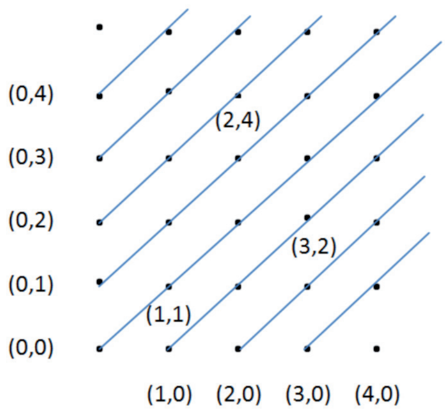

Figura 3. Representación de algunos pares de **N** × **N**

Si tomamos dos puntos cualesquiera, ***(a,b)*** y ***(c,d)***, de una de estas semirrectas se puede comprobar que ***a + d = b + c***. Por ejemplo, al tomar de dicha diagonal ***(0,0) y (1,1),*** se cumple que ***0 + 1 = 0 + 1***; si cogemos ***(1,1)*** y ***(5,5),*** se cumple que ***1 + 5 = 1 + 5***...

Como en esta dirección los dos valores de cada par ordenado son iguales, no queda suficientemente claro que la igualdad se verifique para cualquier par de puntos de otras semirrectas. Para comprobarlo en algún caso más se puede tomar la semirrecta inmediatamente a la derecha de la diagonal principal, es decir, aquella cuyos elementos son de la forma: ***(1,0), (2,1), (3,2)***... , y proceder de manera semejante al caso anterior. Si cogemos ***(1,0)*** y ***(2,1)*** se cumple ***1 + 1 = 0 + 2*** ; si cogemos ***(2,1)*** y ***(3,2)*** se cumple ***2 + 2 = 1 + 3***...

Se podría comprobar reiteradamente con cualquiera de las paralelas a la diagonal Este hecho se utiliza para definir la siguiente relación **R**:

$$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}: \ (a,b)\mathbf{R}(c,d) \leftrightarrow a + d = b + c$$

que es una **relación binaria de equivalencia**, porque verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Las clases de equivalencia que de ella se derivan forman una partición del conjunto **N** × **N**, porque cualquiera de sus elementos pertenece siempre a una de las clases y no hay ningún elemento que forme parte de dos clases de equivalencia a la vez. La representación gráfica de cada una de estas clases es un conjunto de puntos situados sobre una de las semirrectas de la figura anterior.

Formalmente, esta partición del conjunto **N** × **N** es un conjunto cociente, cuya expresión es:

$$\mathbf{N}\times\mathbf{N}/_{\mathbf{R}} = \{ [(x,y)] \ / \ (x,y) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N} \}$$

donde $[(x,y)] = \{ (a,b) \in N \times N \ / \ (x,y) \ \mathrm{R} \ (a,b) \}$ es una clase de equivalencia genérica, que recibe el nombre de **número entero**.

Este nuevo conjunto será el de los números enteros y se denotará por $\mathbb{Z} = \mathbf{N}\times\mathbf{N}/_{\mathbf{R}}$ Pero todavía los números enteros no tienen la forma que habitualmente presentan y como todos y todas los conocemos: **..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...** hará falta, pues, un paso más.

El paso consistirá en convertir una simbología formada por un par de números entre corchetes, en un único número con un signo (bien positivo, bien negativo) o sin signo, en el caso del cero. Para conseguirlo hacemos el siguiente cálculo: $\forall (a,b) \in N \times N$, el número entero ***m*** correspondiente a la clase de equivalencia de (a,b) se define como:

- **m** = **0**, si **a** = **b**
- $\mathbf{m} = +(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ si **a** > **b,** es decir, un entero positivo
- $\mathbf{m} = -(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ si **b** > **a**, es decir, un entero negativo

Por ejemplo, si tomamos de nuevo puntos de la diagonal con origen en (0,0) : **(0,0), (1,1), (2,2),...**, en todos ellos la primera componente es igual a la segunda (**a = b**), por tanto, el número entero que corresponde a esta clase de equivalencia es el **0**.

Si cogemos puntos de la paralela inmediata a la derecha de la anterior: **(1,0), (2,1), (3,2),...**, en todos ellos la primera componente es mayor que la segunda (**a > b**), por tanto, el número entero correspondiente a esta clase es positivo. ¿Cuál será? En todos los pares de esta clase de equivalencia **a - b = 1**, entonces, el número entero que se obtiene es el **+1**. De manera análoga, cogiendo las semirrectas que tienen su origen en el eje horizontal, se obtienen los otros enteros positivos.

Cogiendo nuevamente puntos de otra paralela, en este caso, la inmediata a la izquierda: **(0,1), (1,2), (2,3)...** en todos ellos la segunda componente es mayor que la primera (**b > a**), por tanto, el número entero correspondiente a esta clase es negativo. ¿Cuál será ahora? En todos los pares de esta clase de equivalencia **b – a = 1**, entonces, el número entero que se obtiene es el **-1**. De manera análoga, si consideramos las semirrectas que tienen su origen en el eje vertical, se obtienen los otros enteros negativos (figura 4).

Gráficamente tendríamos:

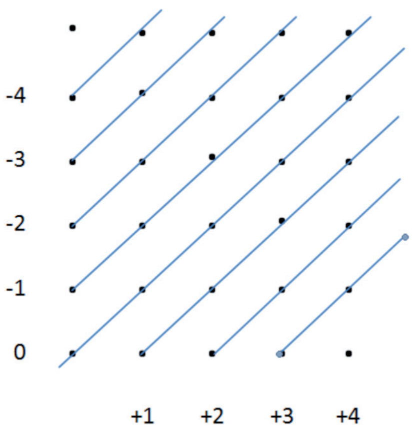

Figura 4. Representación de algunos números enteros a partir de sus clases de equivalencia

Si en esta tabla cartesiana abatimos del eje de ordenadas hacia la izquierda obtenemos la representación de algunos números enteros en la recta numérica (figura 5).

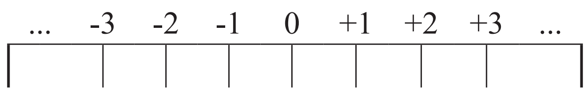

Figura 5. Representación de algunos números enteros en la recta numérica

Hemos de señalar que, según lo que acabamos de ver, cualquier número entero puede tener un representante con el cero en una de las dos componentes, llamado representante canónico de la clase. Es decir, si tenemos el **-2**, podemos representarlo por muchos pares (2,4), (8,10), (5,7), (1.000,1.002)... Entre estos, encontraremos el (0,2), que es su representante canónico. De manera análoga, **+3** tiene como representante canónico (3,0), aunque hay otros representantes de la misma clase de equivalencia, como por ejemplo (5,2). En general, los representantes canónicos de los enteros positivos tienen un número natural no nulo en la primera componente y un cero en la segunda, y los de los negativos, un cero en la primera componente y un número natural no nulo en la segunda.

Como consecuencia de lo anterior, tenemos el conjunto **Z** descompuesto en tres subconjuntos: $\boldsymbol{Z}^{-}, \{0\}$ *i* $\boldsymbol{Z}^{+}$, es decir: $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}^{-} \cup \{0\} \cup \boldsymbol{Z}^{+}$

2.2. Operaciones con números enteros

Adición

Si se establece la aplicación $\left| \begin{array}{lcc} (+): \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} & \rightarrow & \mathbf{Z} \\ \quad (\mathbf{j}, \mathbf{k}) & \rightarrow & \mathbf{j} + \mathbf{k} \end{array} \right.$ para definir la adición de números enteros de manera muy genérica, no se concretan todas las posibles combinaciones de signos que nos podemos encontrar, por ejemplo:

- (+3) + (+2)
- (+3) + (-2)
- (-3) + (+2)
- (-3) + (-2)

Deberíamos recurrir a la representación de cada número entero por un par de su clase de equivalencia, para determinar de una manera más clara la definición de la adición de números enteros.

Si representamos +3 por el par (3,0), -3 por (0,3), +2 por (2,0), -2 por (0,2), las adiciones anteriores se pueden expresar como:

- (+3) + (+2) = [(3,0)] + [(2,0)]
- (+3) + (-2) = [(3,0)] + [(0,2)]
- (-3) + (+2) = [(0,3)] + [(2,0)]
- (-3) + (-2) = [(0,3)] + [(0,2)]

Y el resultado se calculará sumando las primeras componentes de los dos pares, por un lado, y las segundas por otro, es decir:

- [(3,0)] + [(2,0)] = [(3+2, 0)] = [(5,0)], por tanto (+3) + (+2)=+5
- [(3,0)] + [(0,2)] = [(3,2)] = [(1,0)], entonces (+3) + (-2)=+1
- [(0,3)] + [(2,0)] = [(2,3)] = [(0,1)], luego (-3) + (+2)=-1
- [(0,3)] + [(0,2)] = [(0, 3+2)] = [(0,5)], o sea (-3) + (-2)=-5

Así, la aplicación que realmente define la adición de números enteros es:

$$\begin{array}{rccc} (+): & Z\times Z & \to & Z \\ & ([(a,b)],[(c,d)]) & \to & [(a+c,b+d)] \end{array}$$

Esta operación cumple las propiedades:

- Asociativa.
- Conmutativa.
- Elemento neutro **[(0,0)]**.
- Elemento simétrico de **[(a,b)]** será **[(b,a)]**, porque **(a+b , b+a)** es un elemento de la clase del **(0,0)**. Al elemento simétrico por la adición de cualquier entero se le llama opuesto. Está claro que el opuesto de **+a** es **–a y** al revés y que el elemento neutro **[(0,0)]** es el simétrico de sí mismo.

Por tanto, el conjunto ***Z*** con la operación que se acaba de definir, (***Z,***+), tiene estructura de **grupo abeliano** (ver anexo).

Definimos la ***sustracción*** de dos números enteros z y k como el número entero $p = z - k$, de manera que $p + k = z$. A nivel práctico $z - k = z + (-k)$. Es decir, restar un número entero es lo mismo que sumar el opuesto de este.

Hay que tener en cuenta que $\forall z,k \in Z$:

- $-(-z) = z$
- $-(z+k) = -z-k$
- $-(z-k) = -z+k$

Multiplicación

En la multiplicación, llegar a deducir la aplicación con los pares de números que representan los enteros es más complicado que en el caso de la adición. La primera aplicación que podemos considerar es:

$$\begin{array}{rccc} (\cdot): & Z\times Z & \to & Z \\ & (j,k) & \to & j\cdot k \end{array}$$

Esta aplicación define la multiplicación de números enteros, como sabemos, de manera muy genérica, pero tampoco concreta todas las posibles combinaciones de signos que nos podemos encontrar. Con ejemplos análogos a los de la adición tendríamos:

- $(+3) \cdot (+2)$
- $(+3) \cdot (-2)$
- $(-3) \cdot (+2)$
- $(-3) \cdot (-2)$

En este caso, no es tan sencillo como en la adición ver cómo funciona la operación. Ello nos obliga a definirla de manera formal desde el primer momento:

$$\begin{array}{rccc} (\cdot): & \mathbf{Z}\times\mathbf{Z} & \rightarrow & \mathbf{Z} \\ & \left([(a,b)],[(c,d)]\right) & \rightarrow & [(a\cdot c+b\cdot d, a\cdot d+b\cdot c)] \end{array}$$

Así, representando +3 por el par (3,0), -3 por (0,3), +2 por (2,0), -2 por (0,2), las multiplicaciones anteriores se pueden expresar como:

- $(+3) \cdot (+2) = [(3,0)] \cdot [(2,0)] = [(3\cdot 2 + 0\cdot 0, 3\cdot 0 + 0\cdot 2)] = [(6,0)] = +6$
- $(+3) \cdot (-2) = [(3,0)] \cdot [(0,2)] = [(3\cdot 0 + 0\cdot 2, 3\cdot 2 + 0\cdot 0)] = [(0,6)] = -6$
- $(-3) \cdot (+2) = [(0,3)] \cdot [(2,0)] = [(0\cdot 2 + 3\cdot 0, 0\cdot 0 + 3\cdot 2)] = [(0,6)] = -6$
- $(-3) \cdot (-2) = [(0,3] \cdot [(0,2)] = [(0\cdot 0 + 3\cdot 2, 0\cdot 2 + 3\cdot 0)] = [(6,0)] = +6$

Observando los signos de los factores y de los productos, nos damos cuenta que cuando los factores tienen el mismo signo, el resultado es positivo, pero si estos son diferentes, el producto es negativo:

- $(+) \cdot (+) = +$
- $(+) \cdot (-) = -$
- $(-) \cdot (+) = -$
- $(-) \cdot (-) = +$

Esta regla se cumple para todos los casos, como se puede comprobar en las siguientes expresiones con representantes canónicos:

- $(+a) \cdot (+b) = [(a,0)] \cdot [(b,0)] = [(a\cdot b, 0)] = +(a\cdot b) \in \mathbf{Z}^+$
- $(+a) \cdot (-b) = [(a,0)] \cdot [(0,b)] = [(0, a\cdot b)] = -(a\cdot b) \in \mathbf{Z}^-$
- $(-a) \cdot (+b) = [(0,a)] \cdot [(b,0)] = [(0, a\cdot b)] = -(a\cdot b) \in \mathbf{Z}^-$
- $(-a) \cdot (-b) = [(0,a)] \cdot [(0,b)] = [(a\cdot b, 0)] = +(a\cdot b) \in \mathbf{Z}^+$

Nota: La anterior demostración de la regla de signos es la que corresponde a la formalización de los conjuntos numéricos por G. Cantor a finales del siglo XIX. Ello no quiere decir que antes de este momento no se hubiera trabajado esta cuestión por otros métodos. Un par de ejemplos son:

Mac Laurin (1748):
Para todos los valores «a, n» naturales, y partiendo de (+a) + (-a) = 0, tenemos que:

Caso 1, entero negativo por entero positivo es un entero negativo:

Multiplicando la igualdad por (+n): [(+a)+(-a)] · (+n) = 0 y aplicando la propiedad distributiva, obtenemos: (+a) · (+n)+(-a) · (+n) = 0. Entonces, está claro que el opuesto de (+a) · (+n) es (-a) · (+n), es decir, –[(+a) · (+n)] = (-a)·(+n), y por tanto, «menos por más es menos». Análogamente, y aplicando la propiedad conmutativa, «más por menos es menos».

Caso 2, entero negativo por entero negativo es un entero positivo:

Si multiplicamos la igualdad por (-n): [(+a)+(-a)] · (-n) = 0 y aplicamos la propiedad distributiva, obtenemos: (+a) · (-n)+(-a) · (-n) = 0. Por tanto, el opuesto de (+a) · (-n) es (-a) · (-n), es decir, –[(+a) · (-n)] = (-a) · (-n) y, por consiguiente, «menos por menos es más».

Hankel (1867)

Para todos los valores «a, b» naturales, se ha de partir de dos posibilidades y extraer conclusiones:

0 = (+a) · 0 = (+a) · [(+b)+(-b)] = (+a) · (+b) + (+a) · (-b)
0 = 0 · (-b) = [(+a) + (-a)] · (-b) = (+a) · (-b) + (-a) · (-b)

De la primera igualdad, como el opuesto del positivo (+a) · (+b) es (+a) · (-b), se deduce que –[(+a) · (+b)] = (+a) · (-b) y, por tanto, «más por menos es menos». Aplicando la propiedad conmutativa, es evidente que «menos por más es menos».

De la segunda igualdad, como el opuesto de (+a) · (-b) (que por el párrafo anterior sabemos que es negativo) es (-a) · (-b), entonces este valor ha de ser positivo. Es decir, «menos por menos es más».

Con las propiedades asociativa, conmutativa y con la existencia de elemento neutro **+1=[(1,0)]**, **(Z, ·**) es un semigrupo abeliano y unitario. Como además se cumple la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición, **(Z,+,·)** es un anillo conmutativo y unitario (ver Anexo).

2.3. Inmersión de los naturales en los enteros

El conjunto de los números naturales es un subconjunto de los números enteros. Para formalizar esta inclusión, definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{lcl} f: N & \rightarrow & Z \\ n & \rightarrow & f(n) = [(n,0)] \end{array}$$

, es decir, consideramos cada natural como un entero no negativo. Esta aplicación cumple las siguientes propiedades:

- $\mathbf{f}$ es inyectiva (las imágenes de dos elementos originales diferentes son diferentes).
- $\forall \mathbf{m,n} \in \mathbf{N} : \mathbf{f}(\mathbf{m}+\mathbf{n}) = \mathbf{f}(\mathbf{m}) + \mathbf{f}(\mathbf{n})$
- $\forall \mathbf{m,n} \in \mathbf{N} : \mathbf{f}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{f}(\mathbf{m}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{n})$
- $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = [(\mathbf{0},\mathbf{0})]$ que es el elemento neutro de la adición.
- $\mathbf{f}(\mathbf{1}) = [(\mathbf{1},\mathbf{0})]$ que es el elemento neutro de la multiplicación.

Así pues, como la aplicación que acabamos de definir es inyectiva y conserva las operaciones de los números naturales, se puede identificar cada número natural con su imagen y considerar que el conjunto de los naturales es parte de los enteros.

2.4. Orden en $\mathbb{Z}$

Nos hacemos ahora la pregunta: «¿hay orden en el conjunto de números enteros?». Si observamos la representación gráfica de la figura 4 de las clases de equivalencia en sentido de arriba a abajo y de izquierda a derecha, contestaríamos, «sí y el orden es ... ≤ -3 ≤ -2 ≤ -1 ≤ 0 ≤ +1 ≤ +2 ≤ +3 ≤ ... », que es precisamente lo que podemos ver si nos desplazamos por la recta numérica en el mismo sentido (Figura 5).

La formalización de este orden con las clases de equivalencia de pares de números naturales seria: **[(a,b)] ≤ [(c,d)]** si y solo si (en adelante sii) **a+d ≤ b+c**

Esta relación binaria verifica las propiedades reflexiva, antisimétrica, transitiva y conexa. Es, por tanto, una relación de orden total y hace que los números enteros estén totalmente ordenados. Además, el orden definido conserva su sentido con la adición y con la multiplicación por enteros no negativos:

- $\forall \mathbf{x,y,z} \in \mathbf{Z}$ **amb** $\mathbf{x} \geq \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x}+\mathbf{z} \geq \mathbf{y}+\mathbf{z}$
- $\forall \mathbf{x,y,z} \in \mathbf{Z}$ **amb** $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} \geq \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$

En el caso de la multiplicación por enteros negativos, se invierte el sentido de la ordenación:

- $\forall \mathbf{x,y,z} \in \mathbf{Z}$ **amb** $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}, \mathbf{z} < \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} \leq \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$

Si expresamos esta relación de orden con números enteros cualesquiera z_1 y z_2, y no con pares de números naturales, tendremos que: $\mathbf{z_1} \leq \mathbf{z_2}$ sii $\mathbf{z_1} - \mathbf{z_2} \leq \mathbf{0}$.

Como resumen de todas las propiedades expresadas para el conjunto de los números enteros diremos que (Z,+, · ,≤) es un anillo conmutativo y unitario totalmente ordenado (ver anexo)

3. Los números enteros en el aula de primaria

3.1. Situaciones en las que pueden aparecer

A nuestro alrededor hay contextos donde los números enteros se utilizan en situaciones cotidianas en las que es necesario representar un estado o una variación:

- *Termómetros*. Para diferenciar temperaturas por encima y por debajo de 0 ºC (números positivos y negativos, respectivamente) y expresar cambios (aumentos o disminuciones) de temperatura.
- *Ascensores*. Para indicar pisos por arriba y por abajo del nivel de la calle (números positivos y negativos, respectivamente) o subidas y bajadas desde un nivel cualquiera.
- *Cuentas bancarias*. Para indicar si hay déficit o superávit de dinero (números negativos y positivos, respectivamente) o aumento y disminución de capital.
- *Aviones* y *submarinos*. En este caso, el nivel del mar sería el 0 y se podrían representar las posiciones de estos móviles o las variaciones de los mismos.
- *Líneas temporales*. Para diferenciar tiempo anterior o posterior a un momento determinado (números negativos y positivos, respectivamente) o la evolución temporal de algunos hechos históricos.

Estas situaciones y otras conviven con los niños y niñas fuera de la escuela. Pueden aparecer en cualquier momento dentro del aula desde 1.º hasta 4.º de primaria y se hará referencia al signo para indicar el problema que resuelve, pero no se trabajarán los números enteros como conjunto numérico hasta 6.º de primaria. La justificación formal será la imposibilidad de calcular sustracciones en el conjunto de los números naturales cuando el sustraendo sea mayor que el minuendo. Es necesario ampliar el horizonte numérico en el que han trabajado para poder resolver este problema.

3.2. Introducción de los números enteros en el aula

En el aula de primaria, se introducirán los números enteros a partir de las situaciones antes mencionadas que necesitan, para su correcta representación, el uso de los signos y la diferenciación entre los números positivos y negativos, que se han de representar con los signos + y – respectivamente, +3 ºC, -9 ºC, subteráneo 2 (-2), perder 1.000 € (-1.000 €)...

Una manera de ayudar a los alumnos a comprender el funcionamiento y significado del signo y de los números negativos, es la utilización del método de la escalera (figura 6). Consiste en considerar dos tramos de escalera separados por un rellano, que representa el 0, de manera que siempre se ha de pasar por este cuando el movimiento sea de positivos a negativos o al revés.

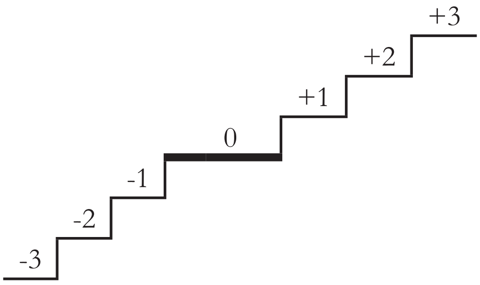

Figura 6. Representación del modelo didáctico de la escalera para números enteros

De las dos posibilidades de dibujar la escalera, ascendente o descendente de izquierda a derecha, creemos más conveniente la primera, porque cuando procedemos a trasladar los números enteros desde la escalera hasta la recta horizontal aparecerán representados como en la recta numérica anterior (figura 5).

La disposición de los números enteros sobre la escalera nos sirve para ordenarlos y decir que el entero de un escalón es menor que el correspondiente del escalón superior y que cada número situado en un escalón será mayor que todos los correspondientes a los escalones inferiores. Esto, que para los números naturales es intuitivo e inmediato, nos permite ordenar, sin ningún problema, los enteros no negativos y se convierte en una ayuda cuando nos referimos a los que sí lo son. Por ejemplo -4 y -1. ¿Cuál es mayor? La intuición nos hace decir que el -4, porque 4 es mayor que 1, pero situándolos sobre la escalera, observamos que el número -1 está por encima de -4 y, por tanto, es mayor.

3.3. Las operaciones con números enteros en el aula

Después de resolver algunas situaciones como las del punto 3.1 de manera intuitiva, a partir de las acciones reales, el diálogo y la reflexión con el alumnado, y para ayudarles a automatizar la operatividad con los números enteros (si es que se trabaja en el último curso de primaria), usaremos de nuevo el método de la escalera, que nos permite explicar las **adiciones** de números enteros. Consistirá en situar el primer sumando en la escalera y subir o bajar tantos escalones como indique el segundo número, según sea positivo o negativo, respectivamente.

Por ejemplo, para encontrar la solución a la situación problemática que se crea si nos preguntan: «Vamos de compras a un gran centro comercial. Si estamos en el sótano cuarto del aparcamiento y subimos tres pisos, ¿a qué piso llegaremos?», necesitamos resolver la adición (-4) + (+3).

Nos situamos en el -4:

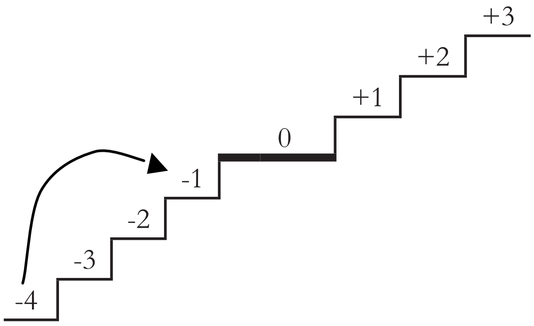

Figura 7. Representación de la adición (-4) + (+3) con la ayuda de la escalera

...y + 3, significa subir 3 escalones, así llegaremos al primer sótano (Figura 7). La operación que nos ha permitido obtener el resultado numérico es, por tanto, (-4) + (+3) = -1.

En un primer momento, para distinguir el signo del número del de la operación podemos escribir +(+3). Después, una vez los niños y niñas hayan logrado la identificación de los naturales con los enteros no negativos, favoreceremos que pasen a expresar +3 como 3 y entonces (-4) + (+3) como (-4)+3.

Si la adición que se ha de hacer es (+2)+(-3), la situación problemática sería «Si estamos en el 2.º piso de un gran centro comercial y bajamos tres pisos para coger el coche, ¿a qué piso llegaremos?», la solución gráfica sería:

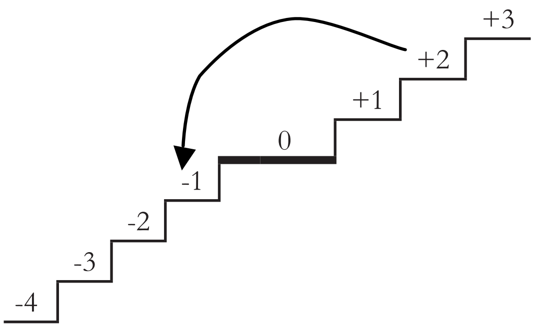

Figura 8. Representación de la adición (+2) + (-3) con la ayuda de la escalera

... y, por tanto, (+2) + (-3) = -1. Ahora, llegaremos también al 1.er subterráneo (figura 8).

Se harán más ejemplos de adiciones reflexionando con el alumnado sobre los sumandos y la suma, ayudándoles a que mediante las situaciones problemáticas trabajadas llegen a resolver las operaciones numéricamente, sin utilizar el modelo de la escalera.

Recordemos que al operar con números naturales la **sustracción** es la operación contraria a la adición, esta misma idea se mantiene al operar con números enteros.

Por lo cual, si el signo de la adición de números enteros implicaba subir o bajar escalones según el signo positivo o negativo del segundo sumando, ahora el signo de la sustracción implicará hacer lo contrario de lo que indica el segundo término, el sustraendo; es decir, si éste es positivo, habrá que bajar, y si es negativo, habrá que subir.

Podemos practicar esta operación utilizando situaciones como por ejemplo: «En un día de invierno, en la población de Morella se registran 5 ºC sobre cero como temperatura máxima y 8 ºC bajo cero como mínima. *¿Cuál ha sido* la diferencia de temperatura a lo largo de este día?».

Por la idea que tienen de sustracción de números naturales, asociarán esta operación con la respuesta que deben dar. Por tanto, habrá que restar: (+5) - (-8) y siguiendo las indicaciones anteriores del modelo de la escalera, subir 8 peldaños. Es decir, (+5) - (-8) = (+5) + (+8) = +13. La diferencia de temperatura ha sido de 13 grados.

Si observamos esta operación podremos darnos cuenta de que para restar -8, hemos sumado +8. Se harán más ejemplos de sustracciones reflexionando con el alumnado sobre el cambio de signo que se aplica al sustraendo de cualquier sustracción de números enteros (ver punto 2.2), llegando así a la idea de que restar un número entero es lo mismo que sumar su opuesto, es decir $(\pm \mathbf{a}) - (\pm \mathbf{b}) = (\pm \mathbf{a}) + (\mp \mathbf{b})$.

Respecto de la multiplicación, si se planteara el caso de trabajarla en el aula, buscaremos situaciones que puedan reflejar las cuatro posibles combinaciones de signos comentadas en el punto 2.2.

En primer lugar y para trabajar multiplicaciones de dos enteros positivos, podemos utilizar una situación como la siguiente, relacionada con la asignatura Conocimiento del Medio: «El montacargas de una bodega de Requena se encuentra en la planta baja. Si sube 4 pisos por minuto, ¿en qué piso se encontrará dentro de 2 minutos?».

Como el alumnado ya sabe –por la multiplicación de números naturales–, los dos términos de esta operación tienen significados distintos. Ahora el multiplicando corresponderá a «la velocidad del ascensor» (si sube, la velocidad será positiva, si baja, será negativa) y el multiplicador corresponderá al «tiempo de desplazamiento del ascensor» (positivo si es en el futuro y negativo si fuera en el pasado).

Para resolver la situación nos situamos en la planta baja (el 0), que sería el punto de partida. En el primer minuto del ascensor subirá 4 pisos, llegando al +4, y en el minuto siguiente otros 4 pisos, llegando ahora al +8. Se encontrará, por tanto, en el piso 8.º. La operación que nos ha permitido obtener el resultado numérico es (+4) · (+2) = +8 (nótese que se ha sustituido el signo de la multiplicación x por · entre los factores para evitar la abundancia de signos en estas expresiones).

De la resolución de más situaciones parecidas los niños y las niñas llegarán a concluir que el producto de dos números positivos es también positivo.

Para trabajar multiplicaciones de un número negativo por uno positivo podemos relacionar este contenido con las extracciones de minerales en las minas y los desplazamientos que los mineros hacen para bajar a su lugar de trabajo: «El montacargas de la mina se encuentra a nivel de la calle. Si baja 4 pisos por minuto, ¿en qué piso se encontrará dentro de 2 minutos?».

Nos situamos en la planta 0, que sería el punto de partida del montacargas. En el primer minuto bajaría 4 pisos, llegando al -4, y en el minuto siguiente bajaría otros 4 pisos, llegando al -8. La operación será ahora: (-4) · (+2) = -8 y el montacargas se encontrará en el 8.º sótano.

De manera similar al caso anterior, y para multiplicar un número positivo por uno negativo, podemos imaginar una situación en un gran centro comercial como la siguiente: «Un ascensor se encuentra en la planta baja. Si sube 4 pisos por minuto, en qué piso se encontraba hace 2 minutos?».

Después de los dos minutos el ascensor se encuentra en la planta baja. Como la velocidad de subida es de 4 pisos por minuto, si en el último minuto de desplazamiento paró en la planta baja, debió de ser porque en ese último minuto subió del piso -4 al piso 0. Siguiendo en el razonamiento, en el primer minuto de movimiento tuvo que desplazarse del piso -8 al -4.

Para representar numéricamente la operación que responde a esta pregunta, los minutos deben escribirse con signo negativo para indicar que nos referimos a un tiempo anterior al momento presente y el resultado será negativo porque indica que el ascensor estaba, al principio, por debajo de la planta baja, es decir, en el 8.º sótano. Tendremos entonces: (+4) · (-2) = -8.

En el último caso, para multiplicar dos enteros negativos seguiremos en el centro comercial anterior y plantearemos una situación como la siguiente: «Un ascensor se encuentra en la planta cero. Si baja 4 pisos por minuto, en qué piso se encontraba hace 2 minutos?».

Después de los dos minutos el ascensor se encuentra en la planta baja. Como la velocidad de descenso es de 4 pisos por minuto, si en el último minuto de desplazamiento paró en la planta baja, debió de ser porque en ese último minuto bajó del piso +4 al piso 0. Razonando de manera análoga, en el primer minuto de movimiento tuvo que desplazarse del piso +8 al +4.

En este caso, tanto los pisos como los minutos se escribirán con signo negativo para indicar que nos referimos a bajar y a un tiempo anterior al momento presente. La operación será ahora: (-4) · (-2) = +8 y la respuesta es que el ascensor se encontraba en el 8.º piso.

Como se puede comprobar en las cuatro situaciones anteriores, las diferentes combinaciones de signos dan los mismos resultados que se habían visto al tratar la operación de manera formal:

- (+) · (+) = +
- (+) · (-) = -
- (-) · (+) = -
- (-) · (-) = +

Se harán más ejemplos de multiplicaciones reflexionando con el alumnado sobre los signos de los factores y del producto, ayudándoles a que mediante las situaciones problemáticas trabajadas lleguen a descubrir y asimilar la regla de los signos para ser aplicada de manera automática en situaciones similares.

Además del modelo de la escalera para trabajar las operaciones con números enteros en el aula de primaria, también podemos ayudarnos de la recta numérica mostrada en la figura 5.

3.4. Dificultades más frecuentes con los números enteros

Hay preconceptos de situaciones en la vida real que hacen que los números enteros tengan muchas dificultades a la hora de integrarlos en la cotidianidad. Por ejemplo, existe la costumbre de decir: «Tengo 50 €» o «debo 50 €», pero nunca diremos en el lenguaje coloquial: «Tengo +50 €» o «tengo -50 €».

Algunas veces, considerar la adición como una operación que aumenta una cantidad, es un obstáculo para encontrar el número que sumado a +9 dé como resultado +4. De la misma manera, encontrar un número que restado a +4 resulte +9 es otro obstáculo.

Otra dificultad es el orden en el conjunto de los números enteros. Se ha comentado ya, pero hay que ser conscientes de la diferencia entre el orden de los números naturales y de los enteros negativos.

Hay autores que consideran que el conocimiento del número entero exige la ruptura con la idea del número como expresión de una cantidad existente, de la adición y la multiplicación como aumento de esta cantidad, de la sustracción como disminución, y del orden numérico como el establecido para los números naturales. Todas estas dificultades se continúan trabajando con el alumnado a lo largo de la etapa de educación secundaria obligatoria.

TEMA 2

Números racionales

En este tema se trabaja la construcción del concepto de número racional a partir del producto cartesiano $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$. Comienza el tema con una referencia histórica sobre este concepto, seguida de una reflexión sobre la utilización de las fracciones y las expresiones decimales para representar estos números. Continúa con una formalización de la estructura del conjunto de los números racionales y finaliza con un extenso tratamiento didáctico de los correspondientes contenidos en el aula de primaria.

1. Introducción

1.1. Histórica

Los egipcios, con su sistema de numeración jeroglífica (que consiste en denominar cada uno de los números clave –1, 10, 100, 1000...– con un símbolo y el resto por modificaciones de este símbolo), desarrollaron las fracciones, pero solo las que tienen 1 como numerador, 1/n. El resto se expresaban como combinaciones de estas (Mankiewicz, 2005).

La civilización mesopotámica, con su sistema de numeración posicional sexagesimal, desarrolló de manera eficaz un sistema de notación fraccionaria, con el que se establecían aproximaciones decimales verdaderamente sorprendentes.

La antigua civilización china, con un sistema de numeración decimal jeroglífica, establece que para la adición de fracciones es indispensable la previa reducción a común denominador.

La cultura helénica, creadora de un imperio invisible y que perdura hasta nuestros días, llamado *matemáticas*, descubrió, de manera taxativa, los números irracionales, demostrando, por ejemplo, la irracionalidad de la raíz cuadrada de 2 por reducción al absurdo. Se elaboró la teoría de la divisibilidad, preludio de los números racionales (Ifrah, 2001).

Los árabes, a partir del siglo VIII, comenzaron el proceso de traducción de las obras griegas conocidas, en un momento de silencio científico en el resto del mundo y profundizaron en lo que, posteriormente, se conoció como álgebra.

Hasta finales del siglo XIX, y principios del XX, no se formalizó la Teoría de Conjuntos de Georg Cantor y, por tanto, no se produjo tampoco la formalización del conjunto de los números racionales basada en ella.

1.2. Al tema

Los números racionales aparecen como consecuencia de la insuficiencia de los números enteros para representar muchas situaciones de la vida diaria y matemáticamente, con el ánimo de resolver la igualdad $a \cdot x = b$ siempre que $a \neq 0$ y b no sea múltiplo de a. El objetivo del tema será identificar las situaciones reales en las cuales necesitamos los números racionales y las dificultades del manejo de los mismos, para descubrir la necesidad de formalizar este conjunto y cómo y cuándo lo trasladaremos al aula de primaria.

2. Preliminares

Uno de los objetivos de las matemáticas es describir la realidad y expresarla. La visión matemática del entorno está sometida a un lenguaje propio, una manera de expresar lo que pasa a nuestro alrededor. Este lenguaje tenderá a ser práctico, conciso, exacto, pero global y general al mismo tiempo, de tal manera que las situaciones parecidas estén representadas bajo un modelo único y, cuando aparezcan diferencias notables, éstas también estén contempladas y el modelo cambie.

Se debe tener en cuenta el tiempo en esta reflexión, dado que es una variable cualitativa importante en cualquier proceso matemático. El tiempo hace que un determinado concepto aparezca en la historia con una concreción o forma y en otro momento, con otra diferente. El tiempo hará también que estas concreciones se mantengan o se generalicen en una manifestación única.

En el caso de los números racionales ha pasado esto. Ahora los denominamos así y en ellos, se han generalizado los números fraccionarios y parte de las expresiones numéricas decimales, pero a lo largo de la historia, esta comunión no ha existido siempre. Ni en el momento de aparecer, ni con los usos que a estas manifestaciones de situaciones reales se les ha dado. Las diferencias a la hora de operar y tratar los números fraccionarios y los decimales son tantas, que se suele llamar al conjunto de los números racionales como «números decimales y fraccionarios» en el aula de primaria, con el riesgo, esto sí, de introducir la idea de que se está hablando de cosas diferentes, cuando no es cierto.

Y claro, parecen cosas diferentes; ya en la vida diaria lo parecen y hay que asumir que en el bagaje cultural que el niño o la niña lleva a la escuela también están los números fraccionarios y decimales, colocados en situaciones y contextos diferentes. Algunos ejemplos:

- Cuando se habla de la altura, el peso o la edad. Son situaciones bastante habituales en las conversaciones de los mayores hacia los niños o niñas. En esta época es muy común cuantificar estas variables y ellos y ellas lo incluyen como un hecho natural: «Ya mides ochenta y cinco coma cinco centímetros» o «Pesas veinte kilos y medio» o «Es más alto tu amiguito porque tiene medio año más que tú» son algunas situaciones.

- Cuando se habla de capacidades. No hablaremos en este tema de unidades de medida, pero sí pueden encontrar muchas veces inscripciones en botellas de cantidades en forma de fracción ¾ l o de decimal 0,75 l. Es muy común , a la hora de hablar de algunas situaciones, utilizar los conceptos de «la mitad de...» o «un tercio de...» de manera intuitiva y sin que sea necesario saber de fracciones ni decimales para comprenderlo.

- Con motivo de nuestro sistema monetario, los decimales ocupan un lugar importante en la vida cotidiana, con todas sus expresiones: «medio euro», «20 céntimos de euro» o si el precio está escrito «0,20 €» y todas las variantes de colocar la marca que indica decimal, sea coma o punto: «0,20 €» y «0.20 €». El alumnado no está excluido del atractivo del dinero y convive habitualmente con estas expresiones.

- Un poco más lejano, pero tal vez por ser del mundo de los adultos es observado por ellos y ellas con mayor interés, pueden encontrar en periódicos o informativos porcentajes, fracciones, decimales...

Entonces, habrá que recoger y utilizar esta información previa y desvelar las conexiones entre el mundo fraccionario y el mundo de las expresiones decimales.

Concretando...

La pregunta que nos podemos hacer es: «¿Realmente, qué elementos componen el conjunto de los números racionales?».

Atendiendo al concepto de número racional, estos serán los números que se relacionan con las ideas de razón, fracción o cociente de dos números enteros. Pero hay que concretar un poco más, al menos puntualizar, ya que en la construcción del conjunto no aparece ninguna referencia a las expresiones decimales.

Sabemos que un número irracional no se puede obtener como resultado de la división de dos enteros cualesquiera. De acuerdo con ello, si consideramos la fracción como la representación de la división de dos números enteros y observamos los resultados obtenidos de una de estas divisiones, podemos encontrar los siguientes tipos de expresiones:

- Una expresión decimal exacta o finita. Se produce cuando llega un momento en que el resto es cero, y finaliza la cantidad de cifras decimales: $\frac{3}{5} = 0{,}6$. Habitualmente a estas expresiones se las llama números decimales.

- Una expresión decimal infinita, que será de uno de los dos tipos siguientes:

  – Expresión decimal periódica pura. Se obtiene cuando, inmediatamente después de la coma, aparece una cifra o un conjunto de cifras decimales que se repiten constantemente. Esta cifra o conjunto de cifras denominada período se representa con un arco encima de las cifras que se repiten: $\frac{1}{3} = 0{,}33333... = 0{,}\overset{\frown}{3}$

  – Expresión decimal periódica mixta. Se produce cuando el período no aparece inmediatamente después de la coma, sino que hay cifras decimales antes del período, que no se repiten (la cantidad de cifras entre la parte entera y el período se denomina anteperíodo):

$$\frac{1}{6} = 0{,}16666... = 0{,}1\overset{\frown}{6}$$

La conclusión que podemos extraer es que estas expresiones decimales y las fracciones son diferentes manifestaciones de la misma cosa y como las fracciones representan de manera más exacta el valor de los números racionales (las expresiones decimales infinitas, no pueden escribirse nunca en su totalidad), serán éstas las encargadas de representarlos.

Y automáticamente debemos pensar en las equivalencias, es decir: ¿cómo pasar de un modo de expresar la misma cosa a otro? Se debe diferenciar:

- Si queremos pasar de fracción a expresión decimal, hay que hacer la división.

- Si lo que queremos es pasar de expresión decimal a fracción, se debe obtener la fracción generatriz, es decir, aquella fracción irreducible que genera la expresión decimal. Habrá que distinguir los casos de expresión decimal exacta, expresión decimal periódica pura o periódica mixta.

Estas cuestiones se trabajarán con detalle en el presente tema cuando se desarrollen las capacidades para la educación primaria.

Contextualizando...

La siguiente pregunta que nos hacemos es «¿Cuáles serán las situaciones en las que se necesiten estos números?».

Para responderla, hay que hacer un recorrido por las diferentes interpretaciones que podemos dar a una fracción, según el contexto donde se esté trabajando (Llinares y Sánchez, 1988). Así, utilizaremos fracciones:

1. Cuando haya que representar partes de una unidad (relación entre las partes y el todo) y las medidas de ésta. Hay que distinguir, según los casos, cómo es esa unidad, es decir, cómo es lo que queremos partir:

a) Si la unidad es continua, por ejemplo una tarta, podemos hacer todas las partes que queramos (teóricamente). Un caso particular de unidad continua, lo encontramos al representar fracciones o decimales en la recta numérica.

b) Si la unidad es discreta, por ejemplo un paquete de galletas, se pueden hacer todas las partes que se quiera, si no exigimos que los elementos que componen la unidad se mantengan enteros. En caso contrario, por ejemplo con huevos, solo se podrá hacer un número determinado de partes.

2. Cuando se quiera expresar el cociente de una división.

3. Cuando se necesite representar razones numéricas en alguna de las siguientes situaciones:

   a) Proporcionalidades
   b) Probabilidades
   c) Porcentajes

4. Cuando alguna de ellas actúe como operador sobre un número modificándolo.

Para trabajar en todas estas situaciones se utilizan las expresiones fraccionarias o decimales, en función de la idoneidad, familiaridad o comodidad de cada una de ellas. Además, será necesario dominar la operatividad asociada a ambas.

3. Formalización del conjunto de números racionales

3.1. Construcción de los números racionales

Una vez presentados los números racionales y las conexiones con las maneras de expresarlos (fracciones y decimales), es el momento de conocer la construcción que Georg Cantor dio de estos números a principios del siglo XX. Es similar a la de los números enteros. Hay que partir de los conjuntos numéricos conocidos, en particular del último que hemos trabajado y elaborar una estrategia para poder ampliarlo.

Se debe llegar a poder expresar el conjunto de los números racionales, $\mathbb{Q}$ (la inicial viene de *quotient*) como:

$$\mathbf{Q} = \left\{ \left[\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \right] / \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{Z} \wedge \mathbf{b} \neq \mathbf{0} \right\}$$

Consideremos el conjunto $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z} - \{0\}$ y, a partir de este, el producto cartesiano definido por $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^* = \{(a, b) / a \in \mathbf{Z} \wedge b \in \mathbf{Z}^*\}$. Los pares de números serán las fracciones y con la eliminación del cero en el segundo conjunto, se observa que nunca tendremos **0** en la segunda componente. La representación gráfica de este nuevo conjunto sería del tipo de la red siguiente, donde en el eje horizontal se situarían los pares de puntos que no pertenecen al conjunto $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$, porque tendrían 0 en la segunda componente (figura 9).

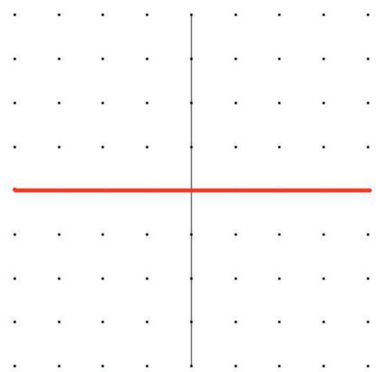

Figura 9. Representación parcial de $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$

Construido el conjunto $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$, hay que relacionar puntos del mismo. Para ello se establece la relación **R**:

$$\forall (a,b),(c,d) \in Z \times Z^* : (a,b) R (c,d) \leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Esta es una **relación binaria de equivalencia**, que nos dice qué elementos de ese conjunto son equivalentes (estamos hablando de lo que serán las fracciones equivalentes).

La relación definida crea las clases de equivalencia:

$$[(a,b)] = \{(x,y) \in Z \times Z^* \,/\, (x,y) \, R \, (a,b)\}$$

El conjunto cociente, cuyos elementos son las clases de equivalencia, es el conjunto de los números Racionales:

$$Q = Z \times Z^* /_{R} = \{[(a,b)] \,/\, (a,b) \in Z \times Z^*\}$$

Cada par $(a,b) \in Z \times Z^*$ se puede representar también como $\frac{a}{b}$, que se denomina fracción. En esta representación, el número que se escribe en la parte de arriba se llama numerador y el de la parte de abajo, denominador. Podemos decir, por tanto, que el conjunto de los números racionales está formado por clases de equivalencia de fracciones, definidas por la relación binaria que hemos establecido anteriormente.

Es decir, el conjunto de los números Racionales se puede expresar como en un principio se ha hecho:

$$Q = \left\{ \left[\frac{a}{b}\right] / \, a, b \in Z \wedge b \neq 0 \right\}$$

¿Cómo podríamos representar gráficamente estas clases de equivalencia o conjuntos de fracciones equivalentes? Lo veremos con una familia de fracciones equivalentes, por ejemplo:

$$\ldots \frac{-10}{-15}, \frac{-8}{-12}, \frac{-6}{-9}, \frac{-4}{-6}, \frac{-2}{-3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15} \ldots$$

que, representada por los pares correspondientes será:

$$\ldots(-10,-15),\ (-8,-12),\ (-6,-9),\ (-4,-6),\ (-2,-3),\ (2,3),\ (4,6),\ (6,9),\ (8,12),\ (10,15)\ldots$$

y situándolos en la red antes construida de $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$ nos permite obtener la recta que se representa en la figura 10.

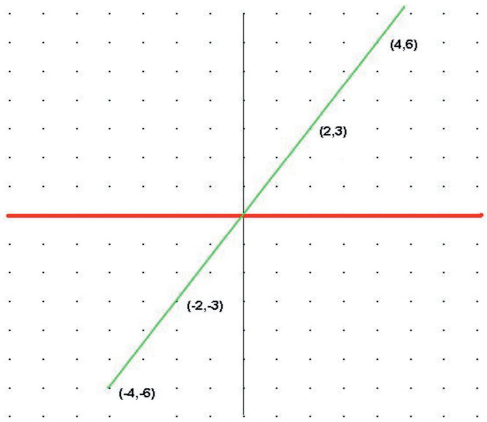

Figura10. Representación de algunos pares de la clase de equivalencia de (2,3)

Gráficamente, estas clases de equivalencia son los puntos que están alineados y que se encuentran sobre rectas que pasarían por **(0,0)**.

Si repitiéramos el ejercicio con otra familias de fracciones equivalentes, se obtendrían puntos alineados sobre rectas de diferente inclinación, pero que también pasarían por **(0,0)** (figura 11).

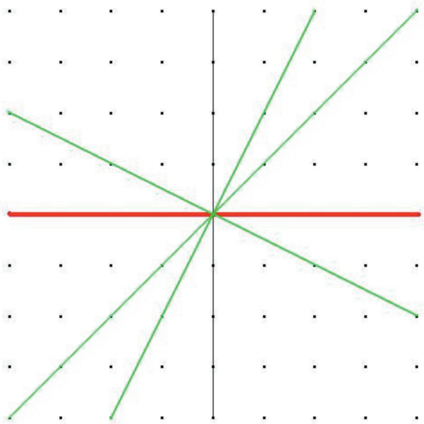

Figura 11. Representación de algunas clases de equivalencia de $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$

I. Pérez / M. Alcalde / G. Lorenzo - ISBN: 978-84-697-1443-0

Los números enteros y racionales, las magnitudes y la medida en el aula de primaria - UJI - DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia97

Se deja al lector el trabajo de identificar las fracciones que componen las clases de equivalencia correspondientes a cada una de las rectas representadas.

De hecho, estas rectas tienen como expresión general $\mathbf{b \cdot x - a \cdot y = 0}$ donde **(a,b)** es la representación como par de la fracción $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$, y pueden representarse de forma explícita como: $\mathbf{y = \frac{b}{a} \cdot x}$. Esta última expresión nos permite afirmar que estas rectas son de las llamadas de proporcionalidad directa.

> *Nota:* La única condición que se le impone a una fracción es que no tenga cero en el denominador. Analicemos numéricamente qué pasaría si el 0 se situara en el denominador. Por ejemplo, si se quisiera conocer el valor del número racional representado por la fracción $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{0}}$, nada más habría que igualar a ***x*** y operar: $\mathbf{\frac{3}{0} = x \rightarrow 3 = 0 \cdot x}$. ¿Qué valor por cero daría tres? Ninguno. Por tanto $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{0}}$ no representa ningún número racional.

Este mismo planteamiento nos lleva a saber por qué **(0,0)** tampoco es un valor posible para representar ningún número racional. Si se opera: $\mathbf{\frac{0}{0} = x \rightarrow 0 = 0 \cdot x}$. ¿Qué valor por cero daría cero? Todos, cualquier valor. Es por ello que a pesar de pertenecer el (0,0) a todas las rectas sobre las cuales se sitúan las fracciones equivalentes, no pertenece a ninguna clase. Si no fuera así, el (0,0) estaría en todas las clases y de la definición de relación de equivalencia se deduce que un elemento solo puede pertenecer a una de las clases, no puede formar parte de más.

En el aula de primaria, se puede explicar muy sencillamente que no hay fracciones con denominador 0. Si se entiende el denominador de la fracción como las partes que se hacen en una unidad, y el numerador como las partes que se cogen, no podemos construir ninguna fracción si no se ha hecho ninguna parte.

Si se interpreta la fracción como una división, la explicación podría ser:

- $\mathbf{\frac{60}{0} = \ldots}$ «Si hoy yo he traído 60 caramelos para repartirlos, pero resulta que no habéis venido nadie porque estabais todos enfermos, ¿puedo repartirlos?». Como no se puede hacer el reparto, esta división no tiene sentido.
- $\mathbf{\frac{0}{0} = \ldots}$ Es más extraño que se hagan la pregunta de esta situación, pero si se da, habría que buscar un ejemplo del tipo anterior para contestar: «No he traído caramelos, pero tampoco ha venido nadie a clase, ¿puedo repartirlos?». Entonces, el resultado de esta división tampoco tiene sentido.

De hecho, lo que ocurre en las dos situaciones es que no se puede aplicar el concepto de división.

Consecuencias inmediatas de la definición de número racional:

1) Cualquier fracción $\frac{a}{b}$ és equivalent a $\frac{a \cdot z}{b \cdot z}$, $\forall z \in Z^*$

2) $\forall a \in Z^*$*:* $\frac{0}{a} = 0$, $\frac{a}{a} = 1$

3) En algunas ocasiones, se representará un número racional por cualquier fracción de la clase de equivalencia que lo define. *En cualquier clase de fracciones equivalentes, se puede encontrar una cuyos términos son primos entre sí. Esta fracción se denomina fracción irreducible*. La manera más adecuada de calcularla es dividiendo los dos términos de cualquier fracción de la clase, por su máximo común divisor.

4) Dadas diferentes fracciones, siempre podemos conseguir otras equivalentes a cada una de ellas con el mismo denominador. *La manera más adecuada de obtenerlas es utilizar como denominador de las nuevas fracciones el mínimo común múltiplo de los denominadores iniciales y modificar los anteriores numeradores para conseguir fracciones equivalentes a las primeras.*

3.2. Operaciones con números racionales

Adición

Se establece la aplicación
$$\begin{array}{rccc} (+): & Q \times Q & \rightarrow & Q \\ & \left(\left[\frac{a}{b}\right], \left[\frac{c}{d}\right]\right) & \rightarrow & \left[\frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}\right] \end{array}$$
que, independientemente de los representantes elegidos para cada número racional, cumple las propiedades:

- Asociativa.
- Conmutativa.
- Elemento neutro $\left[\frac{0}{b}\right]$, $\forall b \in Z^*$
- Elemento simétrico de $\left[\frac{a}{b}\right]$ será $\left[-\frac{a}{b}\right]$, porque $\frac{a \cdot b + b \cdot (-a)}{b \cdot b}$ es un elemento de la clase de $\frac{0}{b}$. Al elemento simétrico por la adición de cualquier racional se le llama opuesto.

Per tanto, el conjunto **Q** con la operación que se acaba de definir, **(Q,+)**, tiene estructura de **grupo abeliano** (ver anexo).

Sustracción

Definimos la ***sustracción*** de dos números racionales ***m*** y ***s*** como el número racional **r = m – s**, de manera que ***s* + *r* = *m***. A nivel práctico ***m* – *s* = *m* + *(–s)***. Es decir, restar un número racional es lo mismo que sumar el opuesto.

Hay que tener en cuenta que $\forall \mathbf{z,k} \in \mathbf{Z}$:

- $-(-z) = z$
- $-(z + k) = -z - k$
- $-(z - k) = -z + k$

Multiplicación

Se define la aplicación $\begin{array}{l} (\cdot): \quad \mathbf{Q \times Q} \to \mathbf{Q} \\ \left(\left[\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right], \left[\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}\right]\right) \to \left[\frac{\mathbf{a \cdot c}}{\mathbf{b \cdot d}}\right] \end{array}$ que, con independencia de los representantes elegidos para cada número racional, cumple las propiedades:

- Asociativa.
- Conmutativa.
- Elemento neutro $\left[\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n}}\right], \forall \mathbf{n} \in \mathbf{Z}^*$
- Elemento simétrico de $\left[\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right]$, con $\mathbf{a \neq 0}$, será $\left[\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\right]$, porque $\frac{\mathbf{a \cdot b}}{\mathbf{b \cdot a}}$ es un elemento de la clase de $\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n}}$. Al elemento simétrico para la multiplicación de cualquier racional se le llama inverso. En general, las fracciones $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ y $\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$ se llaman inversas.

Por tanto, el conjunto **Q** con la operación que se acaba de definir, **(Q , ·**), tiene estructura de **semigrupo abeliano con elemento neutro** (no es un grupo abeliano porque $\left[\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{b}}\right]$ no tiene simétrico). En cambio, $(\mathbf{Q} - \{0\}, \cdot)$ sí que tiene estructura de **grupo abeliano** (ver anexo).

Con la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición, **(Q,+,·)** es un *cuerpo conmutativo* (ver anexo).

División

Definimos la ***división*** de dos números racionales $\mathbf{D}$ y $\mathbf{d}$ $(\mathbf{d} \neq \mathbf{0})$ como el número racional $\mathbf{q} = \mathbf{D} : \mathbf{d}$, de manera que $\mathbf{d} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{D}$. A nivel práctico $\mathbf{D} : \mathbf{d} = \mathbf{D} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{d}}$. Es decir, dividir un números racional por otro distinto de cero es lo mismo que multiplicar el primero por el inverso del segundo.

3.3. Signo en $\mathbb{Q}$

Para asignar signo a un número racional, dada una fracción $\frac{a}{b}$, esta será positiva si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in \mathbf{Z}^+$ (es decir, el producto del numerador por el denominador es un entero positivo) y será negativa si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in \mathbf{Z}^-$(el producto del numerador por el denominador es un entero negativo). De esta manera, tenemos divididos los números Racionales no nulos en $Q^+ = \left\{ \left[\frac{a}{b}\right] / a \cdot b \in Z^+ \right\}$ i $Q^- = \left\{ \left[\frac{a}{b}\right] / a \cdot b \in Z^- \right\}$. Por tanto, tenemos el conjunto $\boldsymbol{Q}$ descompuesto en tres subconjuntos: Q^-, Q^+ i $\{0\}$, luego: $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbf{Q}^+$

De acuerdo con la definición de $\mathbf{Q}^+$ i $\mathbf{Q}^-$, es evidente que, por ejemplo:

- $\left[\frac{-3}{2}\right] = \left[\frac{3}{-2}\right] = \left[-\frac{3}{2}\right]$, y entonces: $\frac{-3}{2} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$
- $\left[\frac{-3}{-2}\right] = \left[\frac{3}{2}\right]$, y por ello: $\frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$

3.4. Inmersión de los enteros en los racionales

El conjunto de los números enteros es un subconjunto de los números racionales. Para formalizar esta inclusión definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{|llll} \mathbf{f}: & \mathbf{Z} & \rightarrow & \mathbf{Q} \\ & \mathbf{z} & \rightarrow & \mathbf{f(z)} = \left[\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{1}}\right] \end{array}$$

es decir, consideramos cada entero como un racional representado per una fracción que tiene el entero como numerador y la unidad positiva como denominador. Esta aplicación cumple las siguientes propiedades:

- $\mathbf{f}$ es inyectiva (las imágenes de dos elementos originales diferentes son diferentes).
- $\forall x, y \in Z : f(x+y) = f(x) + f(y)$
- $\forall x, y \in Z : f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$

- $\mathbf{f(0)=\left[\frac{0}{1}\right]}$ que es el elemento neutro de la adición.
- $\mathbf{f(1)=\left[\frac{1}{1}\right]}$ que es el elemento neutro de la multiplicación.

Así pues, como la aplicación que acabamos de definir es inyectiva y conserva las operaciones de los números enteros, se puede identificar cada número entero con la imagen de este y considerar que el conjunto de los enteros es parte de los racionales.

3.5. Orden en $\mathbb{Q}$

El conjunto de los números racionales es un conjunto totalmente ordenado y eso quiere decir que no existe ninguna duda a la hora de saber si un número racional es mayor o menor que otro. La formalización con fracciones sería:

$$\left[\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right] \leq \left[\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}\right] \qquad \text{sii} \qquad \mathbf{a \cdot d \leq b \cdot c}$$

Esta relación, así definida, verifica las propiedades reflexiva, antisimétrica, transitiva y conexa. Es, por tanto, una relación de orden total y hace que los números racionales estén totalmente ordenados. Además, esta ordenación conserva su sentido con la adición y con la multiplicación por racionales no negativos:

- $\mathbf{\forall x, y, z \in Q \text{ amb } x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z}$
- $\mathbf{\forall x, y, z \in Q \text{ amb } x \leq y, z \geq 0 \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z}$

En el caso de la multiplicación por racionales negativos, se invierte el sentido de la ordenación:

- $\mathbf{\forall x, y, z \in Q \text{ amb } x \leq y, z < 0 \Rightarrow x \cdot z \geq y \cdot z}$

Si expresamos esta relación de orden con números racionales cualesquiera $\mathbf{q_1}$ y $\mathbf{q_2}$, y no con pares de números enteros (fracciones), tendremos que: $\mathbf{q_1 \leq q_2}$ sii $\mathbf{q_1 - q_2 \leq 0}$.

La anterior relación de orden de los números racionales definida mediante clases de equivalencia da lugar a otra relación de orden total entre fracciones, es decir, en $\mathbf{Z \times Z^*}$, que se define de manera análoga:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \leq \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} \qquad \text{sii} \qquad \mathbf{a \cdot d \leq b \cdot c}$$

A nivel operativo, ordenaremos fracciones –por tanto, números racionales– de acuerdo con alguno de los siguientes casos:

- Fracciones con el mismo denominador. Para ordenarlas tendremos en cuenta los numeradores, que son números enteros.

- Fracciones con el mismo numerador. Las ordenaremos atendiendo a los denominadores, que también son números enteros.

- Fracciones con diferentes numerador y denominador. Habitualmente las transformaremos en fracciones equivalentes a las iniciales con el mismo denominador y para conocer su orden, aplicaremos el primero de los casos anteriores.

Como resumen de todas las propiedades expresadas para el conjunto de los números Racionales, diremos que **$(\mathbf{Q}, +, \cdot, \leq)$** es un cuerpo conmutativo totalmente ordenado (ver anexo).

4. Los números racionales en el aula de primaria

4.1. Algunas consideraciones

La idea de fracción tiene sentido en cantidad de situaciones a priori diferentes (comentadas en el punto 2), Pero no podemos pensar que la relación automática de estas con las fracciones se dará sin revisar muchas de aquellas. Es decir, si identificamos una situación concreta en la que el concepto de fracción tiene sentido y a partir de esta se estudia todo lo relacionado con el concepto de fracción (las relaciones de equivalencia y orden, operaciones y algoritmos...), ¿podemos pensar que en otras situaciones susceptibles de ser tratadas con fracciones, el niño o la niña tendrán claro que todo este mecanismo se puede aplicar? Pues no siempre. Por lo tanto, se debe insistir en presentar diversas situaciones hasta que las conexiones de equivalencia entre los diferentes contextos y la concreción simbólica de fracción esté clara (Llinares y Sánchez, 1988).

Será, pues, un nuevo reto para el docente del aula de primaria, plantear procesos de enseñanza y aprendizaje de las fracciones, desde diferentes perspectivas y posibles interpretaciones, para ayudar a conseguir una comprensión conceptual y operativa de la idea de fracción, sin crear compartimentos separados o lagunas inconexas.

Muchos autores han estudiado la estructura cognitiva que permitirá a los niños y las niñas de la escuela alcanzar las habilidades necesarias para poder comprender las relaciones *parte-todo*. Estas habilidades, que el alumnado debería incorporar, se concretan en las que les permitirán entender:

1. Que un todo siempre se puede dividir en partes.
2. Que una unidad se podrá dividir en el número de partes pedido.
3. Que las subdivisiones que hacemos deben cubrir totalmente la unidad.
4. Que el número de partes que queremos hacer puede no coincidir con el número de cortes necesarios.
5. Que las partes deben ser iguales (no confundir esta igualdad con la identidad de forma, color o textura...).
6. Que una parte separada puede volver a considerarse como una nueva unidad y volver a ser dividida.
7. Que la unidad se conserva aunque se divida.
8. El control simbólico de las fracciones.
9. Las relaciones parte-todo, en contextos continuos y discretos.
10. Que existen fracciones menores que la unidad, iguales a la unidad y mayores que ésta.

Trabajar algebraicamente las fracciones antes de tener la idea mental clara de lo que significan y de lo que se quiere conseguir con la relación parte-todo o hacerlo muy rápidamente, se constata como una gran dificultad añadida al proceso de aprendizaje de las fracciones. Esta dificultad es vital tenerla presente, para intentar establecer puentes entre la realidad y la operatividad de las fracciones, muchas veces convertida en algo sin sentido para el alumnado.

4.2. Cuadro de capacidades

El trabajo en educación primaria referente al tema de números racionales tiene como objetivo contribuir a que el alumnado adquiera las ***capacidades*** que se expresan en el siguiente cuadro resumen, cuya finalidad se concreta en el desarrollo de su ***competencia matemática*** y representar una ayuda para el resto de competencias de la educación primaria.

El orden de estas capacidades se secuencial, es decir, progresivo, y de intensidad de dificultad creciente, excepto la capacidad que se refiere a la resolución e invención de problemas que está presente en todo el trabajo que desarrollan las restantes capacidades:

<table>
<tr><th>Respecto de fracciones</th><th>Respecto de decimales</th></tr>
<tr><td>1. Conocer las diferentes interpretaciones de las fracciones, utilizando métodos manipulativos, gráficos y numéricos.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Comprobar y reconocer que una décima, una centésima, una milésima..., se obtienen dividiendo respectivamente la unidad en 10, 100, 1.000..., partes iguales. Fracciones decimales y números decimales.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Escribir y leer fracciones decimales en forma de expresiones decimales exactas y viceversa.</td></tr>
</table>

	4. Comprobar la conservación del valor de un número decimal, independientemente de los ceros añadidos a la derecha de su expresión decimal.
5. Ordenar fracciones y números decimales.	
6. Sumar y restar fracciones con igual denominador.	**7.** Sumar y restar números decimales.
8. Comprobar que se obtiene el mismo resultado sumando o restando cantidades expresadas en forma de fracción decimal que representadas como número decimal.	
	9. Multiplicar y dividir números decimales por naturales.
10. Reconocer la equivalencia de fracciones en situaciones reales y analíticamente. Obtener la fracción irreducible de una familia de fracciones equivalentes.	
11. Sumar y restar fracciones con diferente denominador. Multiplicar y dividir fracciones.	**12.** Multiplicar y dividir números decimales.
13. Introducir la proporcionalidad directa. Regla de tres simple.	
14. Obtener la fracción generatriz que corresponde a cualquier expresión decimal y viceversa.	
15. Aplicar los conocimientos sobre fracciones y expresiones decimales para resolver e inventar problemas.	

4.3. Desarrollo de las capacidades

1. Conocer las diferentes interpretaciones de las fracciones, utilizando métodos manipulativos, gráficos y numéricos

Las situaciones que les permitirán conocer las diferentes interpretaciones de las fracciones son las presentadas al principio del tema como los contextos donde es usual la utilización de fracciones (punto 2).

Como los números enteros no se introducen hasta el final de la etapa, no habrá números negativos prácticamente en toda la Educación primaria. Los que se utilizan son positivos y es innecesario el signo. La definición formal de las fracciones es con números enteros para el numerador y denominador, pero cuando se introducen en la escuela, siempre se hace con números naturales.

El primer concepto que se debe trabajar es el de unidad. Consideraremos como unidad lo que queremos partir en partes iguales que la recubrirán. También se denomina «todo», por contraposición a «partes».

Dado que en 3.º de primaria se comienza a dividir, los niños y niñas ya conocen las situaciones de la vida cotidiana mencionadas al principio del tema y en el aula ya se ha hablado de medio litro, el doble, el triple... se introducirá en 4.º curso el concepto de fracción.

Se comenzará por situaciones reales y cotidianas donde la unidad es continua (manipulando con papel, cartulina, cuerdas, pizzas, pasteles...). Por ejemplo, a partir de una situación como: «Para hacer una merienda por el cumpleaños de María, queremos comprar en el supermercado pizzas para calentarlas en el microondas y sacarlas a la mesa cortadas en tres porciones iguales. Necesitamos saber cuánta pizza quiere cada uno para calcular la cantidad de pizzas que debemos comprar». Para trabajar con el alumnado podemos representar cada pizza con un cartón (de los que sirven como base de las pizzas) cortado en tres partes iguales y utilizarlo como si fuera la pizza de verdad (figura 12).

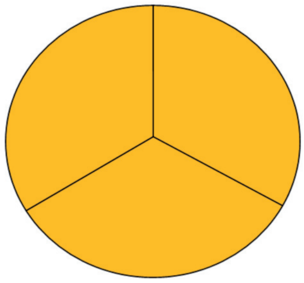

Figura 12. Representación de una pizza dividida en tres partes iguales

A partir de este planteamiento pueden aparecer diferentes posibilidades según la cantidad de pizza que quiere comer cada uno:

1. Quién merendará menos de una pizza.
2. Quién tomará una pizza entera.
3. Quién comerá más de una pizza.

En todos los casos el alumnado ha de verbalizar cuánta pizza quiere tomar y escribirlo en un papel para dárselo al docente. El proceso para llegar a la representación numérica de las fracciones puede ser en cada caso como sigue:

1. Quién merendará menos de una pizza: «De una pizza cortada en tres partes iguales, Joana quiere dos partes».

Hay que incidir en que la unidad, el todo, está partida en tres porciones iguales. Pedimos a Joana que verbalice y escriba cuánta pizza merendará. Al hacer este trabajo podemos encontrar expresiones del tipo: «quiero dos trozos de los tres que tiene la pizza», «dos partes de tres que tiene la pizza», «dos porciones de tres», «dos de tres». No es necesario pasar, en el primer momento, a la representación simbólica de la fracción. Es bueno que el alumnado escriba, hable sobre sus expresiones, tratando de reducirlas, hasta que parezca normal ahorrar tiempo y espacio escribiendo en la pizarra, en el cuaderno (una frase por cada uno es mucho) y se piense en hacer un cambio. Entonces, espontáneamente o por sugerencia del maestro o la maestra, debe surgir la petición de escribir menos. Ese es el momento a aprovechar para introducir la representación numérica de la fracción. Será como un simbolismo para ahorrar.

Frente a la búsqueda de una expresión numérica el alumnado se encuentra con una duda: los números que conoce, los naturales, no le sirven para representar estas cantidades. Hemos de introducir un nuevo tipo de números y una nueva manera de representar que Joana quiere dos trozos de una pizza que está partida en tres partes iguales. Si no hay ningún niño o niña que ya lo sepa y que lo diga, trasladaremos a números cualquiera de las expresiones verbales anteriores y escribiremos $\mathbf{\frac{2}{3}}$ comentando que esta expresión se denomina fracción, que arriba se coloca el número de partes que tomamos y abajo el número de partes iguales que se hacen en la unidad, en la pizza en este caso. Hay que decir también que el número de arriba se llama numerador y el de abajo denominador.

Ya está introducida la nueva simbología. Es necesario aprender a leer estas nuevas expresiones de la manera más clara y rápida posible. A partir de algunos ejemplos de fracciones y de las propuestas de los niños se debe llegar a la lectura más común: se nombra el numerador como cardinal y el denominador como ordinal (tres cuartos, dos quintos, un sexto..., tres décimos, un onceavo, dos doceavos), con las excepciones de los denominadores 2 y 3, que se leen como medios y tercios. En este caso: dos tercios.

2. Quién tomará una pizza entera: «De una pizza cortada en tres partes iguales, Pere quiere las tres partes».

Cuando pedimos a Pere que verbalice cuánta pizza tomará, obtendremos las expresiones: «quiero tres trozos de los tres que tiene una pizza» o también «quiero una pizza entera».

Para la representación numérica de la fracción que expresa cuánta pizza comerá Pere, utilizará la notación introducida en el caso anterior: «Tres tercios de pizza $\mathbf{\frac{3}{3}}$», pero también hay que recordar «pizza entera = **1**», porque será la conexión entre la unidad y la pizza troceada. Debe quedar clara la idea de que comerse tres trozos, es comerse toda la pizza, y que una unidad completa, se representa por $\mathbf{\frac{3}{3}}$ o por **1**. Luego $\mathbf{\frac{3}{3}} = \mathbf{1}$.

En general, las situaciones de este tipo se representan por fracciones en las cuales el numerador y el denominador son iguales, $\mathbf{\frac{a}{a}}$, y que se denominan fracciones unidad.

3. Quién comerá más de una pizza: «De una pizza cortada en tres partes iguales, Pau se quiere comer cuatro trozos».

Solicitamos a Pau que verbalice cuánta pizza comerá: «quiero comerme cuatro trozos como los que salen cuando se parte la pizza en tres partes iguales» o, de

 I. Pérez / M. Alcalde / G. Lorenzo - ISBN: 978-84-697-1443-0

Los números enteros y racionales, las magnitudes y la medida en el aula de primaria - UJI - DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia97

otra manera, «quiero comerme una pizza entera y un trozo de otra que tiene tres» (Figura 13).

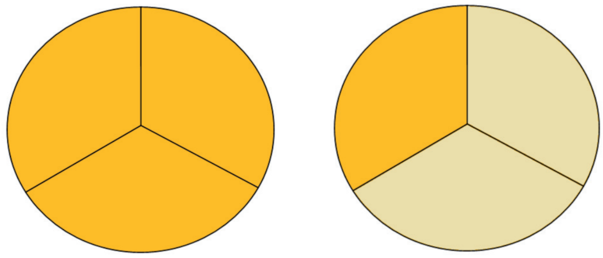

Figura 13. Representación de la selección de una pizza entera y una parte de otra

De manera análoga a los casos anteriores, procedemos a continuación a buscar la representación numérica de la fracción que expresa cuánta pizza quiere comerse Pau.

Como para comerse cuatro trozos hacen falta dos pizzas, un error muy común es poner en el denominador las partes de las dos unidades, y por tanto, expresar la situación anterior por $\frac{4}{6}$. Si entre las dos pizzas hay ahora seis porciones, parece lógico; pero, claro, esta fracción no corresponde a la situación original; de partida, corresponde a una situación en la que la pizza estuviera troceada en seis partes:

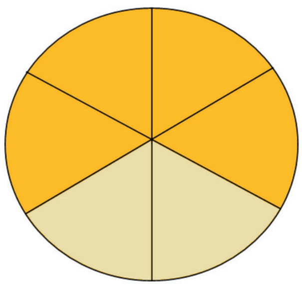

Figura 14. Representación de una pizza dividida en 6 partes y destacadas 4

Ellos y ellas deberían intentar resolver la duda, para no escribir la fracción anterior. Pueden salir muchas respuestas, rescataremos las válidas:

- Poner **1** y $\frac{1}{3}$, que es correcta y que analíticamente se representa por $1 + \frac{1}{3}$. Podemos aprovechar esta respuesta para introducir la notación siguiente: $1\frac{1}{3}$ que recibe el nombre de número mixto y se lee uno y un tercio, un entero y un tercio o una unidad y un tercio.

- Escribir $\frac{4}{3}$, que es la representación numérica asociada al concepto general de fracción y al significado de los términos de esta. Hay que resaltar que las partes de la unidad se mantienen (tres), pero que para comer más de una pizza cogemos más de una unidad. Entonces, siempre que pongamos una fracción con un numerador que sea mayor que el denominador, tomaremos más de una unidad, «más de una pizza».

Después de ver estas dos maneras de representar la situación, se decidirá utilizar la segunda por el parecido que tiene con las otras fracciones, sabiendo que en algunas ocasiones nos podemos encontrar con expresiones de números mixtos.

En este momento, y por el hecho de haber encontrado dos tipos de fracciones no unitarias cualitativamente diferentes ($\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{3}$), tenemos que distinguirlas denominándolas de manera distinta. Así, se llamarán fracciones propias aquellas cuyo numerador sea un entero menor que el denominador (siempre son menores que la unidad: «Juana quiere comer menos de una pizza»), y fracciones impropias cuando el numerador sea mayor que el denominador (siempre son mayores que la unidad: «Pau se quiere comer más de una pizza»).

Una vez presentado el concepto de fracción como relación entre las partes y el todo mediante situaciones de tipo manipulativo con objetos concretos para cada ejemplo (bien sea la pizza, bien sea el pastel...), hay que abandonar la presencia física de la unidad y concentrar la atención en las representaciones gráficas de la misma. El trabajo, a partir de los dibujos, tendrá como objetivo encontrar una forma de expresión más esquemática que dé respuesta a todas las situaciones reales: la recta numérica.

Como que estamos trabajando solo con fracciones no negativas, la recta numérica será realmente una semirrecta con origen en el 0 y crecerá hacia la derecha (figura 15).

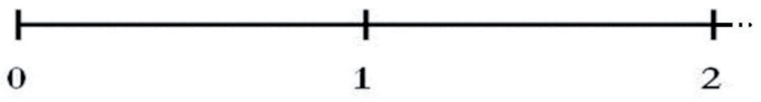

Figura 15. Representación de la semirrecta numérica positiva

Así, representando las fracciones de los ejemplos anteriores obtenemos lo que se muestra en la figura 16.

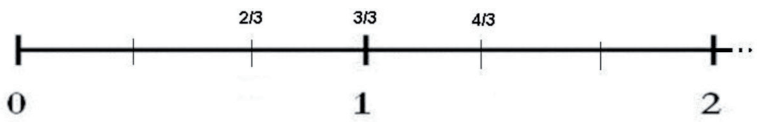

Figura 16. Representación de algunas fracciones en la semirrecta numérica

Mediante este ejemplo y otros, debe quedar claro que una fracción propia siempre se situará en esta semirrecta a la izquierda del 1, una fracción unidad en el 1 y una fracción impropia a la derecha del 1.

Una vez introducidas las fracciones con unidades de tipo continuo, hay que trabajarlas también con las de tipo discreto, en las cuales la unidad está compuesta por diferentes elementos separados. Probablemente no serán una novedad en su vida, porque ya las han utilizado algunas veces, quizá sin ser demasiado conscientes, más bien lo trabajaremos para analizar las diferencias con situaciones de las modalidades anteriores. Cuando las unidades son discretas encontraremos ocasiones en las cuales el número de partes coincide con el número de elementos que componen la unidad y casos en los que el número de partes lo divide exactamente.

La situación de partida puede ser similar a las propuestas para las unidades continuas. En el primer caso, por ejemplo, a partir de una situación como: «Para preparar una merienda por el cumpleaños de Quim queremos comprar en el supermercado unos cuantos paquetes de ocho galletas de chocolate». Necesitamos saber qué parte del paquete de galletas quiere cada miembro del alumnado para poder calcular la cantidad de paquetes a comprar (el número de elementos de la unidad es 8, como se ve en la figura 17).

Figura 17. Representación de un paquete de 8 galletas

A partir de este planteamiento pueden aparecer diferentes posibilidades de comer galletas:

1. Quién merendará menos de un paquete
2. Quién tomará un paquete entero
3. Quién comerá más de un paquete

En todos los casos el alumnado ha de verbalizar qué parte del paquete de galletas quiere tomar y escribirlo en un papel para darlo al docente. El proceso para llegar a la representación numérica de las fracciones puede ser en cada caso como sigue:

1. Quién merendará menos de un paquete: «Carla quiere merendar cinco galletas. ¿Qué parte del paquete quiere comerse Carla?».

Habrá que incidir en que la unidad, el todo, está compuesta por ocho elementos. Pedimos a Carla que nos verbalice cuánto quiere del paquete: «quiero comer cinco galletas de un paquete que tiene ocho». La representación gráfica sería:

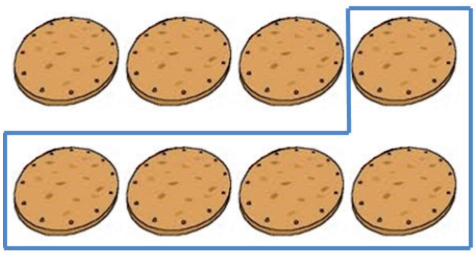

Figura 18. Representación de la selección de 5 galletas de un paquete de 8

Como se habrá hecho un trabajo previo en un contexto continuo, se les pedirá la representación numérica de una fracción que indique qué parte del paquete de galletas se quiere comer Carla. Recordaremos el significado de los términos de la fracción y, entonces, deben escribir $\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{8}}$. Es conveniente repasar la lectura de las fracciones.

2. Quién tomará un paquete entero: «Antoni quiere tomarse las ocho galletas. ¿Qué parte del paquete se quiere comer Antoni?».

Pedimos a Antoni que verbalice cuánto quiere tomar del paquete: «quiero comerme ocho galletas de un paquete que tiene ocho» o también «quiero comer un paquete completo».

Para la representación numérica de la fracción que expresa cuantas galletas se ha comido Antoni, se hará memoria de las fracciones unidad y utilizaremos $\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{8}}$, para representar esta situación, pero también debemos recordar que «paquete entero = **1**», por tanto $\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{8}} = \mathbf{1}$.

3. Quién comerá más de un paquete: Por ejemplo «Laia se quiere comer diez galletas. ¿Qué parte del paquete quiere comerse Laia?».

Pedimos a Laia que verbalice cuánto se quiere comer del paquete: «quiero comerme diez galletas como las de un paquete de ocho» o «quiero comerme un paquete completo y dos galletas de otro paquete» (figura 19).

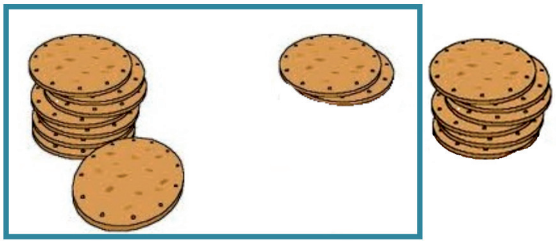

Figura 19. Representación de la selección de un paquete entero y dos galletas de otro

Se plantea la duda de cómo expresarlo en forma de fracción. De la misma manera que en el caso continuo, un error muy común es poner en el denominador las partes de las dos unidades y, por tanto, expresar la situación anterior por $\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{16}}$. Si entre los dos paquetes hay **16** galletas, parece lógico; pero claro, esta fracción no corresponde a la situación de partida, correspondería a una situación donde el paquete tuviera 16 galletas.

El alumnado deberá intentar resolver la duda, para no poner la fracción anterior y tomando como base el trabajo hecho con unidades continuas, llegar a las expresiones $\mathbf{1}$ **y** $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{8}}$ o $\mathbf{1}\,\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{8}}$ o finalmente $\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{8}}$

De manera análoga, se trabajan los casos en los que el número de partes divide al número de elementos que componen la unidad. Por ejemplo, a partir de una situación como: «Para una merienda por el cumpleaños de Lledó queremos comprar en el supermercado paquetes de ocho galletas que están envasadas en bolsas de 2 galletas», necesitamos saber cuántos paquetes tenemos que comprar.

Figura 20. Representación de un paquete de 8 galletas, envasadas de 2 en 2

Ahora la unidad está organizada en 4 partes iguales. Entonces podremos tener las siguientes posibilidades de comer galletas:

1. Quién merendará menos de un paquete
2. Quién tomará un paquete entero
3. Quién comerá más de un paquete

De nuevo aprovecharemos estas situaciones para reconducir la actividad hasta llegar a la representación numérica de las fracciones:

1. Quién merendará menos de un paquete: «Andreu quiere merendar tres bolsas de galletas. ¿Qué parte del paquete se quiere comer Andreu?».

Habrá que incidir en que la unidad, el todo, está partida en 4 partes iguales. Pedimos a Andreu que nos verbalice cuánto quiere comerse el paquete: «quiero comerme tres bolsas de las cuatro que tiene un paquete». La representación gráfica de esta situación se ve en la figura 21.

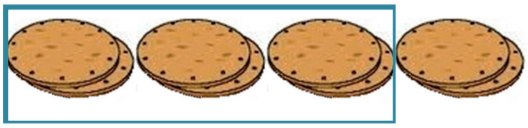

Figura 21. Representación de la selección de 3 bolsas de un paquete de 4

Como se habrá hecho un trabajo previo en contexto continuo y discreto de la primera de las posibilidades, se les pedirá directamente la representación de una fracción que indique qué parte del paquete de galletas quiere comerse Andreu. De acuerdo con el significado de los términos de la fracción, deben escribir $\frac{3}{4}$

2. Quién tomará un paquete entero: «Roser quiere las cuatro bolsas. ¿Cuánto se come Roser del paquete?».

Pedimos a Roser que verbalice cuánto se quiere comer del paquete: «quiero comerme las galletas de las cuatro bolsas de un paquete» o también «quiero un paquete entero».

Para la representación numérica de la fracción que expresa cuánto se quiere comer Roser, se hará memoria de las fracciones unidad, y utilizarán una de estas, $\frac{4}{4}$, para representar la situación, pero también hay que recordar que «paquete entero = **1**», por tanto $\frac{4}{4} = \mathbf{1}$.

3. Quién comerá más de un paquete: «Quim quiere comerse 5 bolsas de galletas. ¿Qué parte del paquete de galletas se quiere comer Quim?».

Pedimos a Quim que verbalice cuánto quiere comer del paquete: «quiero comerme cinco bolsas» o «quiero comerme un paquete completo y una bolsita de otro paquete». La representación gráfica de esta situación se encuentra en la figura 22.

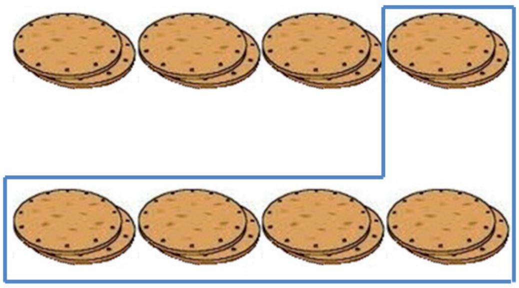

Figura 22. Representación de la selección de un paquete entero y una bolsa de otro

De la misma manera que en los anteriores casos de fracciones impropias, un error muy común es poner el denominador las partes de las dos unidades y, por tanto, expresar la situación anterior por $\frac{5}{8}$. Como entre los dos paquetes hay **8** bolsitas, parece lógico; pero claro, esta fracción no corresponde a la situación original, de partida, correspondería a una situación donde el paquete tuviera **8** bolsitas.

Tomando como base el trabajo anterior, llegarán a las expresiones $\mathbf{1}$ **y** $\frac{1}{4}$ o $\mathbf{1}\,\frac{1}{4}$ o finalmente $\frac{5}{4}$.

En los dos tipos de situaciones anteriores, galletas sueltas en el paquete o en bolsas de dos, se ha trabajado igual que en el caso continuo: fracciones propias, unidad e impropias.

Siguiendo con las interpretaciones de las fracciones presentadas en el punto 2 de este tema y situándonos en 5.º y 6.º cursos de primaria, trabajaremos el resto de situaciones en las que necesitaremos también las fracciones.

Las utilizaremos para representar el cociente de una división, es decir, una fracción será una otra manera de expresar el resultado de una división. Por ejemplo, «una maestra tiene tres litros de zumo de naranja para hacer una merienda y quiere repartirlos equitativamente entre las 7 mesas en las que ha organizado al alumnado. ¿Cuánto zumo le corresponderá a cada mesa?». Para responder a esta pregunta, deberán hacer la división $\mathbf{3}\,\big|\underline{\mathbf{7}}$ o bien utilizar la fracción $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}}$ para expresar el cociente de esta operación.

También utilizaremos las fracciones cuando haya que representar razones entre dos números. En este caso, podemos encontrar situaciones de proporcionalidades, probabilidades y porcentajes. En cualesquiera de los casos, las fracciones serán las representaciones de las relaciones numéricas que se establecen entre los números que aparecen en las situaciones.

Así, en el caso de la proporcionalidad, utilizaremos las fracciones para representar la relación entre dos cantidades, que algunas veces se referirán a un total y a una de sus partes y, en otras ocasiones, a dos partes del todo. Por ejemplo, se debe representar por $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}}$ la relación entre el número de niños, **4**, y el número total de personas, **10**, que acuden a una comida familiar de Navidad, y por $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{6}}$ la relación entre el número de niños y de adultos en el mismo almuerzo.

En el caso de una probabilidad de sucesos equiprobables, usaremos las fracciones para representar la relación entre el número de casos favorables y el de casos posibles de que ocurra un suceso cualquiera. Por ejemplo, se representará por $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}}$ la probabilidad de que sea niño una persona elegida al azar de las **10** que acuden a la comida familiar o por $\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{10}}$ la de que sea adulto.

Cuando haya que representar porcentajes, utilizaremos también fracciones que, en este caso, siempre tendrán un 100 en su denominador. Se trata ahora de expresar relaciones entre un número determinado de partes de un todo y el 100, que es el número total de partes iguales que se consideran en ese todo. Por ejemplo, y siguiendo con la comida familiar de Navidad, representaremos por $\frac{\mathbf{40}}{\mathbf{100}}$ el porcentaje que supone la cantidad de niños que acuden a la comida. Esta última fracción se puede sustituir por la expresión, **40 %**, que cotidianamente se usa para expresar los porcentajes.

Finalmente, utilizaremos las fracciones como operadores cuando éstas actúan sobre un número y lo modifican. Por ejemplo, si queremos calcular cuántos kilómetros se han recorrido cuando se han hecho los $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$ de un camino de **60 km**, habrá que averiguar cuánto es una quinta parte de **60 km** y multiplicar este número por **2**, obteniendo como resultado **24 km**. En general, cuando una fracción actúa como operador sobre un número lo transforma en otro que es el resultado de calcular el valor de la parte del número que indica la fracción.

Resulta evidente que calcular el valor de un porcentaje de una determinada cantidad consiste en hacer actuar como operador a la fracción que representa dicho porcentaje sobre la cantidad elegida. Así, para calcular el **40 %** de las 10 personas que acuden a la comida de Navidad, tenemos que hacer actuar a la fracción $\frac{40}{100}$ como operador sobre 10, que es la cantidad total de personas. Tendremos que averiguar cuánto es la centésima parte de 10 y multiplicar este número por 40, obteniendo como resultado 4 niños.

Los cursos propuestos para trabajar estas últimas interpretaciones de las fracciones son los dos últimos de primaria, porque la noción de fracción como parte-todo ya debe estar casi totalmente adquirida y porque ahora las utilizamos como una herramienta para resolver otras situaciones problemáticas.

2. Comprobar y reconocer que una décima, una centésima, una milésima... se obtienen dividiendo respectivamente la unidad en 10, 100, 1.000... partes iguales. Fracciones decimales y números decimales

En esta capacidad prestaremos una especial atención a las fracciones que tienen como denominadores diferentes potencias de 10. Serán las llamadas fracciones decimales, que nos servirán para representar los números racionales conocidos como números decimales.

Iniciaremos este trabajo en 4.º de primaria (con la décima y la centésima) y lo continuaremos en 5.º y 6.º (con la milésima, y el resto de unidades decimales en su caso).

Si dividimos en diez partes iguales una unidad, representada por ejemplo por un papel que tenemos que recortar en tiras, cada una de las partes será una décima (figura 23). La transcripción simbólica de esta forma fraccionaria, $\frac{1}{10}$, no ofrecerá ningún problema al alumnado por lo que ya se ha trabajado en la capacidad 1.

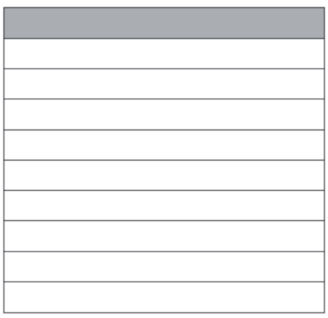

Figura 23. Representación gráfica de una décima

Si ahora necesitamos trozos de papel más pequeños y dividimos cada décima en diez partes iguales, obtendremos cien partes iguales en la unidad, cada una de las cuales será una centésima (figura 24). La forma fraccionaria de la transcripción simbólica de ésta, $\frac{1}{100}$, tampoco ofrecerá ningún problema al alumnado por la misma razón anterior.

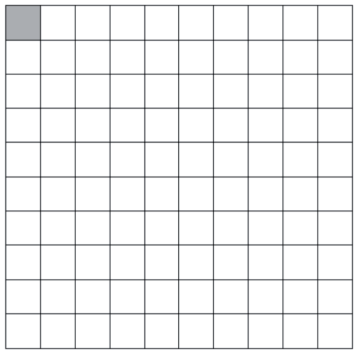

Figura 24. Representación gráfica de una centésima

Análogamente si dividimos cada centésima en diez partes iguales, obtendremos mil pedazos iguales en la unidad, cada uno de los cuales será una milésima. La escritura de la fracción que la representa, $\frac{1}{1.000}$, de nuevo no presentará ningún problema para el alumnado por lo que han aprendido en la primera capacidad.

De manera similar a los casos anteriores, se podrían construir los siguientes órdenes de unidades decimales (diezmilésima, cienmilésima,...) que corresponden a las fracciones $\frac{1}{10.000}$, $\frac{1}{100.000}$,...

A partir de estas unidades decimales se trabajarán también las fracciones con numeradores diferentes del uno, manteniendo en los denominadores la unidad seguida de ceros. Por ejemplo $\frac{5}{10}$, $\frac{23}{100}$, $\frac{453}{100}$, representarán, respectivamente, cinco décimas, veintitrés centésimas y cuatrocientas cincuenta y tres centésimas.

Pueden aparecer en el trabajo de esta capacidad cuestiones sobre la equivalencia de $\frac{10}{100}$ y $\frac{1}{10}$, por ejemplo. Si se da el caso, se explicaría ésta con representaciones adecuadas. Si no se da, esperaremos a trabajarlo en la capacidad 10.

En general, todas las fracciones que tienen en el denominador una potencia de **10** se denominan fracciones decimales. El subconjunto de $\mathbb{Q}$, generado por estas fracciones, es el conjunto de números racionales decimales, o simplemente números decimales, y se representa por $\mathbb{D}$. Formalmente, este conjunto es:

$$\mathbf{D} = \left\{ \left[\frac{a}{10^n} \right] / \, a \in \mathbf{Z} \wedge n \in \mathbf{N} \right\}$$

3. Escribir y leer fracciones decimales en forma de expresiones decimales exactas y viceversa

En esta capacidad trabajaremos por primera vez la conexión entre la manera de expresar una cantidad con una fracción y con una expresión decimal.

A partir de la representación material (pastel, cuerda, cinta, regletas...) o gráfica de una décima, una centésima, una milésima parte... y sus transcripciones simbólicas, cabe plantearse si éstas podrían escribirse también utilizando el sistema de numeración decimal que ya conocen para aprovechar sus ventajas representativas y operatorias. Se trata de pensar cómo se pueden representar partes menores que la unidad, sabiendo que las unidades de orden superior se escriben hacia la izquierda de ésta.

En la introducción de $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1.000}$, hemos visto cómo dividiendo sucesivamente cada unidad decimal en diez partes iguales obtenemos la unidad del siguiente orden de unidades decimales. En este momento se hace necesario distinguir los órdenes de unidades que están conociendo ahora de los que conocían ya por los naturales. En estos números, las unidades de 1.er orden se denominan unidades; las de 2.º orden, decenas; las de 3.er orden, centenas; las de 4.º orden, unidades de millar... y crecen en grupos de diez hacia la izquierda. En el caso de los decimales, las unidades de 1.er orden se llaman décimas; las de 2.º orden, centésimas; las de 3.er orden, milésimas... y decrecen de diez en diez hacia a la derecha.

La transición de unas expresiones a otras se puede realizar con la ayuda de los ábacos, situando un nuevo ábaco a la derecha del que representa los números naturales para indicar, de izquierda a derecha, las cifras decimales y señalar de alguna manera en qué punto se separan los dos tipos de cifras (con una goma elástica, un trozo de cinta adhesiva, un lazo...). A diferencia de lo que ocurre en la parte entera del número, hay que tener en cuenta que, como se ha mencionado anteriormente, las posiciones de las unidades decimales están ordenadas en sentido inverso al crecimiento de su valor; así, las décimas, que son unidades decimales de primer orden, tienen un valor superior a las centésimas, que son de segundo orden. Por ejemplo, en el número 315’286, el 2 representa unidades decimales de primer orden y tiene un valor superior al 8 que representa unidades decimales de segundo orden, mientras que no ocurre lo mismo para el 5 y el 1 de la parte entera.

Veamos ahora cómo se obtiene la expresión decimal de una décima parte de la unidad, $\frac{1}{10}$, que es la unidad decimal de primer orden. Para obtener la nueva representación de la décima observarán que no hay ninguna unidad entera; así, hay que empezar la expresión numérica con un 0 en el lugar de las unidades. Al intentar escribir la cantidad de décimas, surgirá la duda de dónde se coloca el 1. No podemos ponerlo a la izquierda del 0, porque esto representaría una decena, habrá pues que ponerlo a la derecha: 01. Esta expresión representa la cantidad de una unidad entera y no lo que realmente se quiere representar. Para resolver este problema se debe incorporar el uso de la coma entre el 0 y el 1, con el significado mencionado anteriormente. Así, la expresión a la que llegaremos es 0,1 y se leerá de la misma manera que se lee la fracción de la que proviene, una décima, o también: cero coma uno.

Veamos cómo escribir mediante el SND una centésima parte, la unidad decimal de segundo orden, que hasta ahora representábamos por la fracción $\frac{1}{100}$. Obtendremos las cifras que forman la expresión decimal de la centésima reflexionando sobre el hecho de que no tenemos ninguna unidad entera y por lo tanto pondremos 0 en el lugar de las unidades. Como tampoco tenemos ninguna décima completa, tendremos que poner otro 0 en su sitio. Por lo que ya saben escribirán: 0,0. Al observar que tienen 1 centésima, se preguntarán, «¿dónde se coloca el 1?». De acuerdo con el criterio de escritura de las expresiones numéricas de los órdenes de unidades decimales, que se ha mencionado anteriormente, habrá que poner este 1 a la derecha del cero de las décimas: 0,01.

Ya tenemos la nueva expresión decimal. Se leerá de la misma manera que se lee la fracción de la que proviene, una centésima, o también: cero coma cero uno.

De manera similar llegaremos a escribir mediante el SND la milésima, que es la unidad decimal de tercer orden. Es decir, lo que representa $\frac{1}{1.000}$ se expresará también como 0,001 y se leerá como una milésima, o también: cero coma cero, cero, uno.

Hay que asumir que las fracciones donde aparezca el 1 al numerador y la unidad seguida de ceros en el denominador, se traducen por 0,000...1, según los ceros del denominador, y siempre se obtendrá un número finito de cifras decimales.

Después de haber introducido cada una de las fracciones anteriores y siguiendo un procedimiento análogo, se trabajará en todos los casos con fracciones del mismo tipo pero con numeradores diferentes de la unidad, por ejemplo, $\frac{2}{10}$, $\frac{5}{100}$, $\frac{13}{100}$, con la conclusión de que todas las fracciones que tienen denominadores de este estilo producen expresiones con un número finito de cifras decimales: 0,2; 0,05; 0,13, respectivamente.

Análogamente se procede cuando se trata de fracciones impropias, por ejemplo $\frac{23}{10}$, $\frac{135}{100}$... En estas fracciones observarán que hay unidades enteras y partes menores que la unidad; así, siguiendo el procedimiento anterior, deben obtener las siguientes expresiones decimales: 2,3 y 1,35.

Desarrollamos el caso de $\frac{23}{10}$. Si trabajamos con los ábacos, tenemos veintitrés bolas en la varilla de las décimas. De acuerdo con la manera de trabajar con este material, si transformamos cada grupo de diez de estas bolas en una bola de la varilla siguiente hacia la izquierda, obtendremos 2 bolas en la varilla de las unidades y quedarán 3 en la de las décimas.

Para tener la expresión decimal que representa esta cantidad solo tienen que escribir el número de bolas que corresponde a cada varilla, teniendo en cuenta lo que ya saben sobre cómo se forman las expresiones decimales. Así, escribirán: 2,3.

Se leerá de la misma manera que se lee el número mixto $\mathbf{2\ \frac{3}{10}}$ correspondiente a la fracción impropia de la que proviene, dos unidades y tres décimos o décimas, o también: dos coma tres.

Análogamente se trabajarán las otras fracciones decimales y la manera de encontrar sus expresiones decimales.

Cuando esté alcanzada la estructura de estas expresiones decimales, se puede trabajar la manera rápida de encontrarlas, que consistirá en escribir el numerador de la fracción, con una coma situada en la posición necesaria para que haya tantas cifras decimales como ceros acompañan a la unidad en el denominador (si es necesario, se añaden ceros a la izquierda de las cifras que componían el numerador). A lo largo de esta capacidad se ha comprobado que todas las expresiones decimales que hemos trabajado en ella y que corresponden a fracciones decimales, tienen un número finito de cifras decimales. Por esta razón se llaman expresiones decimales exactas y son las que se asocian con los números decimales.

Una cuestión muy importante para completar la adquisición de esta capacidad es verbalizar correctamente las diferentes representaciones numéricas que se trabajan y que se desarrollan a continuación:

1. Fracciones propias, por ejemplo $\mathbf{\frac{7}{10}}$. Podemos leer la fracción de varias maneras: «7 partes de 10», «siete décimas partes», «siete décimos»... Y la expresión decimal correspondiente 0,7 como: «cero coma siete», «cero unidades, siete décimas», o «siete décimas».
2. Fracciones impropias, por ejemplo $\mathbf{\frac{73}{10}}$. De manera análoga al caso anterior leeremos: «73 partes de 10», etc. La expresión decimal 7,3 se puede leer: «siete coma tres», «siete unidades y tres décimas» o «setenta y tres décimas».

Para finalizar, hay que insistir en leer correctamente expresiones como 6,98 (seis unidades noventa y ocho centésimas) y 6,098 (seis unidades noventa y ocho milésimas), para evitar la confusión. Para profundizar en estas cuestiones se pueden aprovechar situaciones que se plantean relacionadas con los sistemas de unidades de medida y con el sistema monetario.

Completaremos el trabajo de esta capacidad estudiando la manera de obtener fracciones decimales a partir de las expresiones decimales exactas correspondientes.

Podemos utilizar cualquiera de los ejemplos anteriores para encontrar el procedimiento que convierte una expresión decimal exacta en una fracción decimal, el numerador de la cual estará compuesto por las cifras del número sin la coma y el denominador será la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales existan en la expresión decimal exacta. La posición de la última cifra decimal de la derecha nos informa de su orden y, por tanto, de la cantidad de partes que tendremos que hacer en la unidad para escribir la expresión decimal exacta en forma de fracción. Por ejemplo:

$$\mathbf{0{,}05 = \frac{5}{100} \qquad 3{,}27 = \frac{327}{100} \qquad 2{,}3 = \frac{23}{10}}$$

Todo este trabajo de conversión de fracciones en expresiones decimales y viceversa, se justifica para poder operar con números decimales, utilizando indistintamente fracciones decimales o expresiones decimales exactas según convenga.

4. Comprobar la conservación del valor de un número decimal, independientemente de los ceros añadidos a la derecha de su expresión decimal

Trabajaremos esta capacidad a partir de 4.º curso de primaria. Comenzaremos con números decimales que derivan de fracciones propias.

Una situación cotidiana para ellos y ellas, que pone de manifiesto la necesidad de adquirir esta capacidad podría estar relacionada con una actividad de medida. Por ejemplo, dos grupos diferentes de niños y niñas miden la misma cuerda utilizando como unidad el decímetro en un grupo y el centímetro en el otro, y deben expresar el resultado en metros para sumar a la longitud de otra cuerda que está expresada en esta unidad. Si los resultados de las medidas son 7 decímetros y 70 centímetros, respectivamente, se obtienen así las expresiones 0,7 m y 0,70 m. Como se ha medido el mismo objeto, la igualdad del valor de las expresiones es inmediata: 0,7 = 0,70.

Este hecho que acabamos de comprobar, debería generalizarse para cualesquiera expresiones decimales exactas trabajando con otros materiales, por ejemplo: les proporcionamos dos cartulinas cuadradas de la misma superficie. Dentro de la actividad que se esté realizando en el aula, el alumnado necesita dividir una cartulina en 10 partes iguales y la otra en 100 partes iguales, de las cuales han de coger 7 y 70, respectivamente. La representación gráfica de esta situación sería:

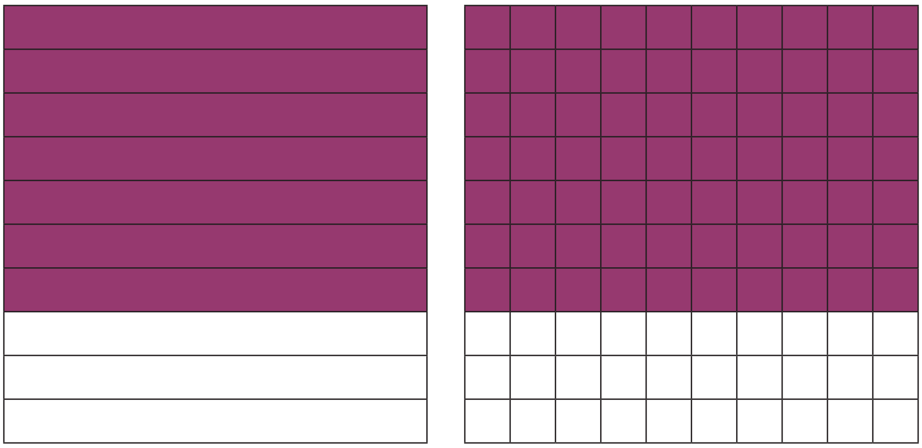

Figura 25. Representación gráfica de 7 décimas y 70 centésimas

Inmediatamente, se observa que los dos grupos han tomado la misma cantidad de cartulina. Si expresamos las fracciones asociadas a estas cantidades obtendremos: $\mathbf{\frac{7}{10}}$ y $\mathbf{\frac{70}{100}}$. Que se representan por 0,7 y 0,70 con números decimales, por lo tanto: 0,7 = 0,70.

La conclusión debe ser que son expresiones decimales diferentes de la misma cantidad, entonces tienen el mismo valor y, por tanto, podríamos quitar los ceros de la derecha.

En estas situaciones se observan también equivalencias entre dos fracciones, sin haber trabajado específicamente este concepto. Se tendrá que retomar luego toda esta información para utilizarla en el momento adecuado.

Se puede hacer también el trabajo con los ábacos, donde el hecho de añadir ceros a la derecha en la expresión decimal supone ampliar columnas a la derecha de ellos para referirse a los órdenes de unidades que corresponden a los ceros, pero ello no implica situar ninguna bola en aquellas; por tanto, la representación del número inicial y del que obtenemos añadiendo ceros a su derecha es la misma, es decir, «los ábacos quedan igual» y consecuentemente tienen el mismo valor.

Con fracciones impropias, la situación es muy similar, pero con parte entera no nula en el número decimal. Se reanudará lo que se vio en 4.º y se ampliará a 5.º de primaria. Si es necesario, se utilizará material real o representaciones gráficas como ayuda.

Se tendrá que automatizar y trabajar con lápiz y papel esta capacidad, con ejercicios del tipo siguiente que piden relacionar una expresión de cada columna con otras que representan la misma cantidad:

$\frac{523}{100}$	**52,3**	**0,5230**
$\frac{523}{10}$	**5,23**	**0,052300**
$\frac{523}{10000}$	**0,523**	**52,30**
$\frac{5230}{100000}$	**0,0523**	**5,2300**

Sin embargo, conviene realizar ejercicios de lectura de estos números decimales para comprobar las diferentes maneras de leer la misma cantidad.

I. Pérez / M. Alcalde / G. Lorenzo - ISBN: 978-84-697-1443-0
Los números enteros y racionales, las magnitudes y la medida en el aula de primaria - UJI - DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia97

Una aplicación inmediata de la conservación del valor de los números decimales, independientemente de los ceros que se añadan a la derecha, se utiliza para facilitar la operatividad con estos números.

5. Ordenar fracciones y números decimales

El conjunto de los números racionales, como se vio en el punto 3.5 de este tema, es un conjunto totalmente ordenado y eso quiere decir que no existe ninguna duda a la hora de saber si un número racional es mayor o menor que otro.

Como estos números racionales pueden estar expresados con fracciones o con expresiones decimales, distinguiremos las dos posibilidades:

1. Si son ***fracciones*** las que se quieren ordenar, hay que considerar tres casos que se trabajarán secuencialmente a partir de 4.º curso:

   - *Fracciones con el mismo denominador*. Por ejemplo, con la ayuda de dos cuerdas iguales, se quiere comparar las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$. Para hacerlo se señalan en ambas cuerdas marcas que las dividen en quintas partes y se corta de cada una de ellas uno de los trozos correspondientes a las fracciones que se quiere ordenar. Esta situación es muy intuitiva y la contestación será acertada a partir de la comparación directa del material. En el caso del ejemplo, se comprueba que la fracción con numerador más pequeño es menor que la otra.

     Para generalizar este hecho, sin el apoyo directo de material o de una situación real, podemos utilizar como ayuda la representación de las fracciones en la recta numérica. Para representar las fracciones, dividimos el segmento entre el 0 y el 1 en cinco partes iguales y escribimos las fracciones donde corresponda:

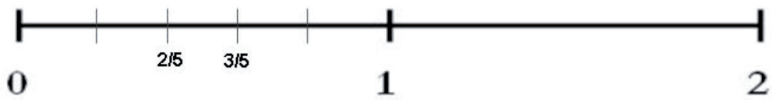

Figura 26. Representación de $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$ en la recta numérica

     Como la ordenación en la recta numérica se ha aprendido ya con los números naturales, es claro que la fracción situada a la izquierda es la menor.

     Posteriormente al trabajo con materiales o representaciones gráficas y la correspondiente verbalización, hay que hacer el siguiente paso en la abstracción, que es la representación simbólica de esta relación de orden, utilizando los signos conocidos para los números naturales: $\frac{2}{5} < \frac{3}{5}$.

Una vez se han comprobado situaciones parecidas en diferentes casos, hay que dar la norma general: «Cuando dos fracciones tienen el mismo denominador, es menor la que tiene el numerador más pequeño».

- *Fracciones con el mismo numerador*. Análogamente al caso anterior y a partir de una situación problemática real, tomar de dos cuerdas iguales dos trozos, de longitudes $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ de cada una, se quiere saber si la fracción $\frac{1}{2}$ es menor que $\frac{1}{3}$ o no lo es. A partir de la comparación directa de los trozos de cuerda, llegan a la conclusión de que $\frac{1}{3}$ es menor que $\frac{1}{2}$. En este caso concreto se comprueba que la fracción con denominador mayor es menor que la otra. Para generalizar este hecho, sin el apoyo directo de material o situación real, utilizaremos como ayuda la recta numérica. Para representar las fracciones, dividimos el segmento entre el 0 y el 1 en tres y en dos partes iguales y escribimos las fracciones donde corresponda. La dificultad añadida es que el número de partes que hay que hacer no es igual para las dos fracciones. Habrá que indicar las divisiones con marcas diferentes:

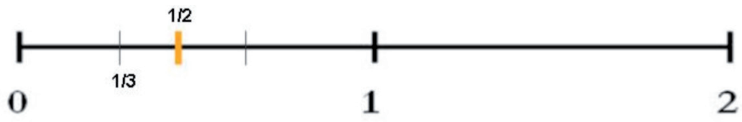

Figura 27. Representación de $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ en la recta numérica

Nuevamente, como la ordenación en la recta numérica se ha aprendido ya con los números naturales, la fracción situada a la izquierda es la menor.

Finalmente hay que llegar a la representación simbólica de esta relación de orden, utilizando los signos conocidos: $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$.

Una vez se han comprobado situaciones parecidas en diferentes casos, hay que dar la norma general: «Cuando dos fracciones tienen el mismo numerador, es menor la que tiene el denominador más grande».

- *Fracciones con diferente numerador y denominador*. Del mismo modo, habrá que partir de una situación problemática real, tomar de dos cuerdas iguales dos trozos de longitudes $\frac{3}{5}$ y $\frac{1}{2}$ de cada una, se quiere saber si la fracción $\frac{1}{2}$ es menor o no que $\frac{3}{5}$. A partir de la comparación directa de los trozos de cuerda, llegan a la conclusión que $\frac{1}{2}$ es menor que $\frac{3}{5}$.

Tras analizar más ejemplos, no se encuentra una norma general para ordenar este tipo de fracciones. Para encontrarla nos ayudamos de la recta numérica y representamos las fracciones anteriores:

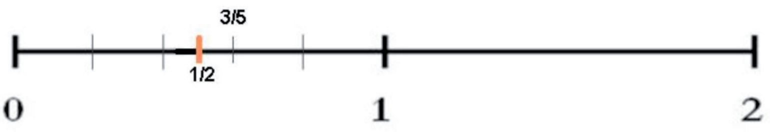

Figura 28. Representación de $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$ en la recta numérica

Se observa, en todos los casos, que la recta numérica tampoco nos ayuda a encontrar una norma general, por no haber una relación directa entre el orden de los numeradores y denominadores y el orden de las fracciones.

Para resolver este problema, se les preguntará si podemos usar alguna de las normas que ya sabemos. Les ayudaremos a que lleguen a concluir que deben utilizar la más simple e intuitiva, que es la que ordena las fracciones con denominadores iguales.

Como se trabajará la ordenación de fracciones con distinto numerador y denominador, después de haber visto la reducción de fracciones a otras equivalentes a ellas con igual denominador para sumarlas o restarlas, utilizarán la misma técnica para convertir las fracciones iniciales en fracciones equivalentes a éstas con el mismo denominador. Solo será necesario ordenar por los nuevos numeradores las fracciones obtenidas y, a partir de ellas, ordenar las fracciones iniciales, es decir, como $\frac{1}{2}=\frac{5}{10}$ y $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$, y se cumple que $\frac{5}{10}<\frac{6}{10}$ entonces $\frac{1}{2}<\frac{3}{5}$

2. Si son **números decimales** representados por sus expresiones decimales exactas, el trabajo comenzaría en 5.º curso de primaria. Se debe relacionar la ordenación de estas expresiones con la de los números naturales que, intuitivamente, no es de la misma manera.

   Por ejemplo, en los naturales queda claro que 7 es menor que 66, y hay que ser consciente de que, para el alumnado, pasar de esta situación elemental a que 0’66 es menor que 0’7 no es evidente. Este trabajo de ordenación de expresiones decimales necesita de una fase manipulativa (por ejemplo, medir 7 dm de una cuerda y 66 cm de la misma y expresar los resultados en metros) y de representación gráfica (con cuadrados iguales), porque al ver la situación siguiente no hay ninguna duda (figura 29).

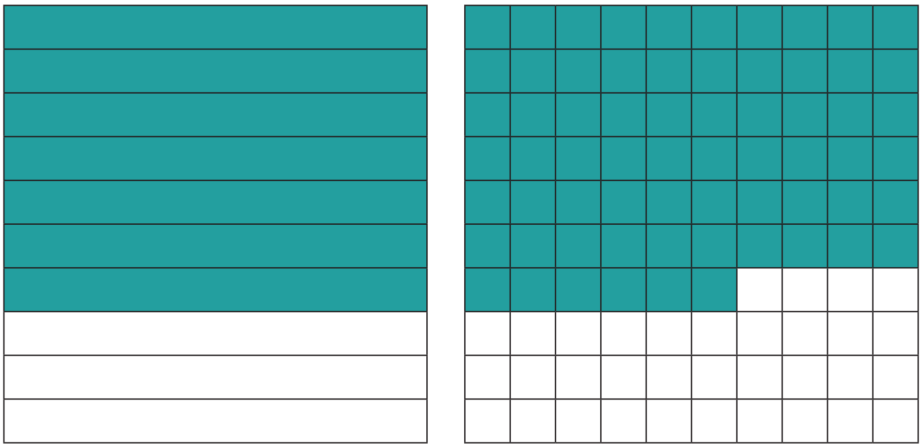

Figura 29. Representación de 7 décimas y 66 centésimas

Nuevamente, después del trabajo con materiales o representaciones gráficas y la correspondiente verbalización, hay que hacer el paso a la representación simbólica de esta relación de orden: **0,66 < 0,7**.

Las dudas en la ordenación de expresiones decimales aparecen cuando se las quiere ordenar sin la ayuda de materiales o representaciones gráficas.

Para resolver estas dudas las expresiones decimales se ordenarán por pasos, utilizando las normas de ordenación conocidas para los números naturales. Primero se ordenan por la parte entera; es decir, la parte anterior a la coma. Si esta es diferente, ya tenemos la justificación para ordenar las expresiones.

Si las partes enteras son iguales, hay que ordenarlas según las cifras decimales, empezando por las décimas. Si estas son diferentes ya tendremos criterio para ordenar las expresiones decimales. En caso contrario, se pasaría a comparar las centésimas, milésimas,...

Se ha de observar que hay un error muy común en los alumnos, y es pensar que si hay más cifras decimales el número es mayor: por ejemplo, pensar que el número 136’652312 es mayor que 136’65232, equivocación que se soluciona correctamente aplicando el criterio anterior.

Nota: Para ordenar expresiones decimales no exactas de números racionales, se utiliza el mismo criterio expuesto en la última capacidad.

6. Sumar y restar fracciones con igual denominador

En 5.º de primaria, será cuando se empezará a sumar fracciones. En el mercado, en casa, con comidas... hay muchas situaciones que pueden implicar una adición de partes. En el nivel gráfico o manipulativo se presentan pocas dificultades; será en el momento de pasar a la fase simbólica cuando podemos encontrar más.

Distinguiremos los siguientes casos:

1. *Fracción propia más fracción propia, con otra fracción propia como resultado*. Por ejemplo: «Un niño se come 3 porciones y otro 2 de una pastilla de chocolate dividida en 8 porciones iguales. ¿Qué parte de la pastilla se ha comido cada uno y cuánta se han comido entre los dos?». Lo que se busca es la suma de las fracciones $\frac{3}{8}$ y $\frac{2}{8}$ que son las que expresan la parte de pastilla que se ha comido cada niño.

   En la situación real no hay ningún problema para comprobar que se han comido 5 porciones de las 8 que había, es decir $\frac{5}{8}$. Simplemente, lo que han hecho es sumar las porciones que se han comido cada uno y expresarlo respecto de la unidad.

   En la representación gráfica, hay que tener cuidado de representar siempre la unidad, y sobre ésta las porciones de cada niño (figura 30).

   

   Figura 30. Representación de la adición de $\frac{3}{8}$ y $\frac{2}{8}$

   Queda claro que se han comido 5 de las 8 porciones, es decir, la fracción que se ha obtenido como resultado es $\frac{5}{8}$

   Tanto en la situación real como en la representación gráfica se comprueba que el numerador de la fracción resultante es la suma de los numeradores de las fracciones iniciales y que el denominador es el mismo de éstas.

   De manera simultánea al trabajo con materiales o representaciones gráficas y la correspondiente verbalización, haremos la representación simbólica de la adición:

   $$\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{3+2}{8}=\frac{5}{8}$$

   Es necesario insistir con más ejemplos asociados a la resolución de situaciones problemáticas para identificar claramente lo que significa sumar fracciones con el mismo denominador y para evitar que, en el trabajo posterior de adición en la fase simbólica, nos encontremos como resultado: $\frac{5}{16}$

2. *Fracción propia más fracción propia, con una fracción impropia como resultado*. Por ejemplo, «Una niña se come 3 porciones y otra 6 de unas pastillas de chocolate divididas cada una en 8 porciones iguales. ¿Qué parte de

pastilla se ha comido cada una y cuánta se han comido entre las dos?». Lo que se busca es la suma de las fracciones $\frac{3}{8}$ y $\frac{6}{8}$ que, como en el ejemplo anterior, son las que expresan la parte de pastilla que se ha comido cada niña.

En la situación real no hay ningún problema para comprobar que se han comido 9 porciones de chocolate como cada una de las 8 que hay en una pastilla. La expresión de este resultado como $\frac{9}{8}$ no significará ningún problema, teniendo en cuenta que se ha trabajado antes las fracciones impropias. Simplemente, lo que han hecho es sumar las porciones que se han comido cada una y expresarlo respecto de la unidad.

En la representación gráfica se debe tener cuidado de representar siempre la unidad y, sobre esta, las porciones de cada niña. Les pedimos que representan las fracciones iniciales y el resultado y, claro, hay una dificultad, que no basta con una unidad solo:

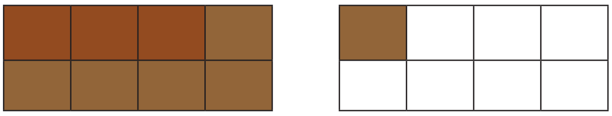

Figura 31. Representación de la adición de $\frac{3}{8}$ y $\frac{6}{8}$

Queda claro que se han comido 9 de las 8 partes, es decir, la fracción que se ha obtenido como resultado es $\frac{9}{8}$, que también se puede expresar como $1\,\frac{1}{8}$, si utilizamos números mixtos como hemos visto en la capacidad 1.

Análogamente al caso anterior, se comprueba que el numerador de la fracción resultante es la suma de los numeradores de las fracciones iniciales y que el denominador es el mismo de éstas.

De manera simultánea al trabajo con materiales o representaciones gráficas y la correspondiente verbalización, debemos hacer la representación simbólica de la adición:

$$\frac{3}{8}+\frac{6}{8}=\frac{3+6}{8}=\frac{9}{8}=1\,\frac{1}{8}$$

Es necesario insistir con más ejemplos asociados a la resolución de situaciones problemáticas para identificar claramente lo que significa sumar fracciones con el mismo denominador, obteniendo una fracción impropia como resultado y para evitar que, en el trabajo posterior de adición en la fase simbólica, nos encontremos que expresan como solución: $\frac{9}{16}$

Con situaciones parecidas, trabajaremos todas las posibilidades de la adición de fracciones con el mismo denominador, utilizando, para expresar los resultados, tanto fracciones propias como impropias o números mixtos.

Como regla general, *la suma de dos fracciones con el mismo denominador es otra fracción que tiene como numerador la suma de los numeradores de las fracciones iniciales y como denominador el mismo que tenían estas fracciones*.

También en 5.º de primaria se empezará con la sustracción de fracciones. Como las fracciones que se trabajan en primaria son siempre positivas, todas las sustracciones de fracciones que se plantean tendrán el minuendo mayor o igual que el sustraendo.

Consistirá, en una primera fase, en buscar una situación cotidiana que conecte la vida real con el trabajo que queremos realizar. Por ejemplo, «Un niño coge seis porciones de una pastilla de chocolate dividida en 8 partes iguales. Si se come cuatro de estas porciones, ¿qué parte de pastilla le queda?». Lo que se busca es la diferencia entre las fracciones $\frac{6}{8}$ y $\frac{4}{8}$ que son las que representan los datos de la situación.

En la situación real no hay ningún problema para comprobar que le quedan 2 porciones de las 8 que había, es decir $\frac{2}{8}$. Simplemente, lo que han hecho es restar las porciones que coge y que se come y expresarlo respecto de la unidad.

En la representación gráfica, se debe tener cuidado de representar siempre la unidad y, encima de ésta, las porciones cogidas (figura 32).

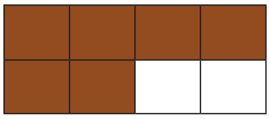

Figura 32. Representación de $\frac{6}{8}$

quitando, a continuación, las partes comidas (figura 33).

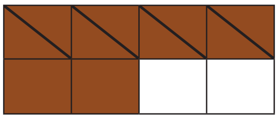

Figura 33. Representación de la sustracción $\frac{6}{8}$ menos $\frac{4}{8}$

Está claro que le quedan 2 de las 8 porciones de la unidad, es decir, la fracción que se ha obtenido como resultado es $\frac{2}{8}$

Tanto en la situación real como en la representación gráfica se comprueba que el numerador de la fracción resultante es la diferencia entre los numeradores de las fracciones iniciales y que el denominador es el mismo de éstas.

De manera simultánea al trabajo con representaciones materiales o gráficas y la correspondiente verbalización, debemos hacer la representación simbólica de la sustracción:

$$\frac{6}{8}-\frac{4}{8}=\frac{6-4}{8}=\frac{2}{8}$$

Es necesario insistir con más ejemplos, asociados a la resolución de situaciones problemáticas, para identificar claramente lo que significa restar fracciones con el mismo denominador y para evitar que, en el trabajo posterior de sustracción en la fase simbólica, nos encontramos como resultado: $\frac{2}{0}$

En general, tanto en fracciones propias como impropias, el procedimiento es similar a la adición y, por tanto, la regla general es: *la diferencia entre dos fracciones con el mismo denominador es otra fracción que tiene como numerador la diferencia entre los numeradores anteriores y como denominador el mismo que tenían las fracciones iniciales*.

7. Sumar y restar números decimales

A partir de 5.º curso de primaria y de manera progresiva, se trabajará la adición y sustracción de números decimales. En un principio, estas operaciones no tienen ninguna dificultad, por parecerse mucho a la adición y sustracción de números naturales. Utilizaremos situaciones reales que podrían estar relacionadas con actividades de medida y del sistema monetario y distinguir los siguientes casos:

1. *Sumandos con la misma cantidad de cifras decimales. Sumar sin llevar en estas cifras*. Por ejemplo: «Para preparar una fiesta en clase hemos gastado 35,24 € en una tienda y 9,32 € en otra. ¿Cuánto dinero hemos gastado en total?».

   Para responder a esta pregunta hay que hacer una adición de números decimales. Se debe tener cuidado con situar en columna los dos números decimales, de manera que se hagan coincidir verticalmente las comas. Esta cuestión resulta sencilla si recuerdan la posición donde se situaban los números naturales para sumar. Una vez dispuestos de esta manera, se procede a sumar empezando por la derecha y siguiendo los mismos pasos que utilizaban para sumar los números naturales, es decir:

$$\begin{array}{r} 35{,}24 \\ +9{,}32 \\ \hline 44{,}56 \end{array}$$

   sin olvidar situar la coma en el lugar correspondiente del resultado.

2. *Sumandos con la misma cantidad de cifras decimales. Sumar llevando en estas cifras de manera progresiva*. Por ejemplo: «Para preparar una fiesta en clase hemos gastado 35,24 € en una tienda y 9,92 € en otra. ¿Cuánto dinero hemos gastado en total?».

En este caso pueden surgir dificultades para comprender la operación:

$$\begin{array}{r} \mathbf{35{,}24} \\ \mathbf{+9{,}92} \\ \hline \mathbf{45{,}16} \end{array}$$

Entonces, habría que sacar ábacos y representar con estos los sumandos y comprobar que, al igual que ocurre con los números naturales, cada vez que se juntan 10 unidades de un orden se forma una unidad de orden inmediato superior; es decir, las 11 décimas que obtenemos al sumar 9 y 2 décimas de los sumandos generan 1 unidad natural de primer orden, que llevamos, y una décima que dejamos en el lugar que le corresponde.

De manera análoga, trabajaremos adiciones llevando en otros órdenes de unidades en las cifras decimales.

3. *Sumandos con diferentes cantidades de cifras decimales*. Por ejemplo: «Necesitamos comprar cuerda para cubrir ambos lados del patio del colegio. Si un lado mide 35,24 m y otro 9,9 m, ¿cuánta cuerda debemos comprar?».

   En este caso la adición será:

$$\begin{array}{l} \mathbf{35{,}24} \\ \mathbf{+9{,}9} \\ \hline \mathbf{45{,}14} \end{array}$$

   y la automatización en la resolución vendrá cuando, aplicando lo que ya saben, tengan claro que se deben hacer coincidir en columna las comas de los sumandos y que deben sumar por columnas empezando por la derecha. Si hay algún problema, pueden rellenar con ceros los huecos de las cifras decimales de los sumandos que tengan menos, según han visto en la capacidad 4.

En todos los casos, es necesario insistir con más ejemplos asociados a la resolución de situaciones problemáticas para identificar claramente lo que significa sumar números decimales y conseguir la automatización de esta operación.

Respecto de la sustracción, repetiremos los pasos anteriores. En primer lugar, restaremos números, con la misma cantidad de cifras decimales, sin llevar. En segundo lugar, llevando de manera progresiva en las cifras decimales y, por último, restaremos términos con diferentes cantidades de cifras decimales. En todos los casos, la referencia debe ser la sustracción de números naturales y, cuando restan llevando, utilizarán el algoritmo estándar de esta operación.

En 6.º de primaria, deberían resolver estas dos operaciones sin la necesidad de rellenar con ceros los huecos en las expresiones decimales.

Habrá que comprobar, con ejemplos, que la adición de números decimales cumple las propiedades conmutativa y asociativa.

8. Comprobar que se obtiene el mismo resultado sumando o restando cantidades expresadas en forma de fracción decimal que representadas como número decimal

También en 5.º y 6.º de primaria debemos utilizar lo que han aprendido en relación a obtener la fracción decimal correspondiente a un número decimal a fin de comprobar, y en su caso rectificar, las operaciones realizadas con números decimales. Por ejemplo, si estamos calculando 53,37 + 22,51, pueden hacerlo sumando los números decimales o convirtiéndolos en fracciones decimales y sumándolas:

$$\begin{array}{r} 53{,}37 \\ +\,22{,}51 \\ \hline 75{,}88 \end{array} \qquad\qquad 53{,}37+22{,}51=\frac{5337}{100}+\frac{2251}{100}=\frac{7588}{100}=75{,}88$$

Si la relación de equivalencia entre las fracciones aún no la han trabajado, haremos la comprobación siempre que las fracciones tengan el mismo denominador, es decir, siempre que los números decimales tengan la misma cantidad de cifras decimales. Una vez se trabajan las capacidades 10 y 11, podremos retomar este punto y hacer las comprobaciones para sumandos con cualquier cantidad de cifras decimales.

Se procede análogamente en el caso de la sustracción.

9. Multiplicar y dividir números decimales por naturales

A partir de 5.º curso de primaria, se empieza a multiplicar y dividir números decimales por naturales.

Multiplicación

Comenzaremos con esta operación y, como en los casos anteriores, partiremos de una situación real, por ejemplo: «Si para hacer un juego debemos dar 1,25 m de cinta a cada niño y tenemos la clase organizada en grupos de 3 niños y niñas, ¿cuántos metros de cinta necesitamos comprar para cada grupo?».

Deben relacionar esta situación con los conocimientos que tienen sobre la multiplicación de naturales para llegar a plantear como solución del problema la siguiente operación:

$$\begin{array}{r} 1{,}25 \\ \times\quad 3 \\ \hline \end{array}$$

A partir de esta y con lo que saben intentarán resolverla. Debe estar claro: se multiplica igual que si los dos factores fueran números naturales y una vez multiplicamos por las décimas lo anotamos en el resultado, situando la coma en el lugar correspondiente del producto.

$$\begin{array}{r} 1{,}25 \\ \times\quad 3 \\ \hline 3{,}75 \end{array}$$

Se comprueba con más situaciones de este tipo y pasamos luego a la multiplicación de un número decimal (en un primer momento solo de una cifra decimal) por un número natural de dos cifras, por ejemplo: «El alumnado de nuestra clase está agrupado en 13 parejas para organizar una fiesta en el colegio. Si cada pareja puede llevar 2,5 l de zumo de naranja, ¿cuántos litros tendremos en total?». Trabajaremos con el algoritmo de lápiz y papel explorando posibilidades:

$$\begin{array}{r} 2{,}5 \\ \times 13 \\ \hline \end{array}$$

Inicialmente y por la semejanza que hay con los números naturales, parece lógico que se multiplique por 3 y, por lo que sabemos de la multiplicación anterior, obtendremos el resultado de forma sencilla:

$$\begin{array}{r} 2{,}5 \\ \times\ 13 \\ \hline 7{,}5 \end{array}$$

Para dar el siguiente paso hay que recordar que no multiplicamos por 1, en realidad lo estamos haciendo por 10. Es decir, no multiplicaremos 1 por 5 décimas, sino 10 por 5 décimas y 10 por 2 unidades. Como ya saben que 10 décimas hacen una unidad y que 10 unidades hacen una decena, obtendrán 5 unidades y 2 décimas como resultado parcial. Entonces, como después han de sumar, al igual que en la multiplicación de números naturales, hay que poner este resultado en su sitio y, por ello, lo desplazan hacia la izquierda para alinear los órdenes de unidades correspondientes de los productos parciales:

$$\begin{array}{r} 2{,}5 \\ \times\ 13 \\ \hline 7{,}5 \\ 25 \\ \hline 32{,}5 \end{array}$$

Se resuelven más situaciones de este tipo y se aumenta la dificultad de las operaciones con más cifras decimales en el multiplicando, por ejemplo, «Si cada una de las 13 parejas aporta 3,76 € para comprar lo que hace falta para la fiesta, ¿cuántos euros tenemos en total?». En este caso, la multiplicación será:

$$
\begin{array}{r}
3{,}76 \\
\times \quad 13 \\
\hline
11{,}28 \\
37{,}6 \\
\hline
48{,}88
\end{array}
$$

Es importante recordar la operación anterior y el funcionamiento del sistema de numeración para los números decimales, para tener claro que el resultado de multiplicar el 1 de las decenas por 6 centésimas dará 6 décimas como resultado y que tendremos que escribirlas en el lugar adecuado. Análogamente, pasará con el 7 de las décimas y el 3 de las unidades.

Hay que notar que no desaparecen las comas de los productos parciales del algoritmo y es bueno que no desaparezcan hasta que no esté automatizada la operación. Podrá estarlo cuando se den cuenta de que la cantidad de cifras decimales del producto coincide con el número de cifras decimales del multiplicando. A partir de este momento aplicaremos, como regla general, *resolver la operación sin escribir las comas de los productos parciales y situando la coma en el producto final separando tantas cifras decimales como hay en el multiplicando*.

Aumentamos la dificultad de las multiplicaciones considerando números decimales y naturales con más cifras hasta que esté aprendida completamente esta operación y se utilice de manera automática la regla general descrita antes.

División

De acuerdo con el enunciado de esta capacidad, se trabajará la división solo cuando el divisor sea un número natural. Por ejemplo, «Debemos repartir, en partes iguales, una cuerda de 42,56 m entre 5 grupos de niños, ¿cuántos metros le corresponden a cada grupo?». La división que resuelve este problema sigue un procedimiento similar a la que se hace con números naturales, por ejemplo:

$$
\begin{array}{r|l}
42,\ 5\ 6 & 5 \\
\cline{2-2}
02\ \ 5 & 8
\end{array}
$$

Cuando se llega a la coma del dividendo, es decir, cuando se baja la cifra de las décimas, indica que ya se ha terminado de dividir la parte entera. Debe quedar claro que también ha finalizado la parte entera del cociente y, por ello, debemos poner la coma en el lugar correspondiente y continuar la división:

$$
\begin{array}{r|l}
42,\ 5\ 6 & 5 \\
\cline{2-2}
02\ \ 5 & 8{,}51 \\
0\ 6 & \\
1 &
\end{array}
$$

Hay que notar también que, cuando dividimos con decimales, no se detiene el proceso hasta que llegamos a obtener de residuo cero, o hasta que la persona que opere lo desee. Por lo tanto, no vamos a esperar a poner la coma al cociente al final del algoritmo, porque no sabremos exactamente el lugar de colocación ya que el cociente puede tener más cifras decimales que el dividendo:

$$
\begin{array}{r|l}
\mathbf{42,\ 5\ 6} & \mathbf{5} \\ \cline{2-2}
\mathbf{02\ 5} & \mathbf{8{,}512} \\
\mathbf{0\ 6} & \\
\mathbf{1\ 0} & \\
\underline{\underline{\mathbf{0}}} &
\end{array}
$$

Aumentamos la dificultad de las divisiones considerando números decimales y naturales con más cifras hasta que esté aprendida completamente esta operación y se utilice de manera automática la regla general de *anotar la coma en el cociente cuando se opera la cifra de las décimas del dividendo*.

10. Reconocer la equivalencia de fracciones en situaciones reales y analíticamente. Obtener la fracción irreducible de una familia de fracciones equivalentes

La idea de equivalencia es un concepto amplio, general y fundamental en los diferentes campos científicos y en la vida diaria. Muy a menudo, relacionamos situaciones, sonidos, conceptos genéricos, por equivalencias. Cuando algo equivale a otra cosa, tiene el mismo valor para alguna característica, aunque no se manifieste igual para las otras.

Se trabajará el concepto de equivalencia aplicada a las fracciones a partir de 4.º de primaria. Debe trabajarse de manera manipulativa. Por ejemplo, a partir de una situación de aula en la que «se reparten cartulinas iguales con los fraccionamientos que se muestran en la figura 34 para que los niños y niñas recorten la parte sombreada con motivo de hacer un mural. Se hacen las siguientes preguntas: ¿Qué parte de cartulina ha utilizado cada grupo? ¿Cuál de los tres grupos ha utilizado más cartulina?».

Figura 34. Representación de $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$ y $\frac{4}{12}$

I. Pérez / M. Alcalde / G. Lorenzo - ISBN: 978-84-697-1443-0

Los números enteros y racionales, las magnitudes y la medida en el aula de primaria - UJI - DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia97

Para responder a la primera pregunta, los niños expresan numéricamente las fracciones $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$ y $\frac{4}{12}$ y al comparar los trozos de cartulina que ha utilizado cada grupo, se dan cuenta de que son iguales y, por tanto, los tres grupos han utilizado la misma cantidad de cartulina.

Habrá que reflexionar en torno al hecho de que hay tres expresiones fraccionarias para indicar la misma cantidad y, como consecuencia de esta reflexión, expresarán:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12}$$

Donde las igualdades no quieren decir que las fracciones sean iguales, sino que representan la misma porción de la unidad. Se continúa trabajando el concepto de equivalencia con esta u otras situaciones (en contextos discretos y continuos) que generan conjuntos de fracciones que representan la misma cantidad. El siguiente paso será introducir el nombre de la relación que existe entre estas fracciones, denominándolas fracciones equivalentes.

Continuando con el trabajo, les podemos plantear las siguientes preguntas: «¿Siempre será necesario disponer de un material con el que se puedan construir fracciones equivalentes o comprobar si lo son fracciones dadas? ¿Podemos encontrar ningún tipo de relación numérica entre los términos de las fracciones equivalentes?». A partir de la comparación entre los numeradores y los denominadores de las diferentes fracciones de cada familia de fracciones equivalentes estudiadas en los ejemplos anteriores, los ayudaremos a deducir que podemos encontrar una fracción equivalente a otra multiplicando los dos términos de esta por un mismo número (es decir, multiplicando por una fracción unidad), lo que se llama amplificar fracciones o dividiéndolos y entonces se le llamará simplificar fracciones.

Por ejemplo: $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{2}{6}$ y $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{4}{4} = \frac{4}{12}$

Una vez esté claro este procedimiento, se utilizan para encontrar fracciones equivalentes a una dada.

Cuando en el proceso de simplificación de una fracción obtengamos otra equivalente a ésta que no se puede simplificar más (porque sus términos son primos entre sí), la llamaremos fracción irreductible de la familia de fracciones equivalentes a la primera. Una manera rápida de encontrar esta fracción se trabajará junto con la divisibilidad de números naturales, con el fin de que el alumnado descubra que dividiendo los dos términos de la fracción inicial por el máximo común divisor de estos se obtiene dicha fracción irreductible. En el ejemplo que se está trabajando, esta es $\frac{1}{3}$

Cuando lo que se quiere hacer es comprobar si dos fracciones son equivalentes, podemos utilizar diferentes procedimientos:

1. Buscar un número tal que al multiplicar o dividir por él los dos términos de una fracción dé como resultado respectivamente, los términos de la otra.
2. Convertir las fracciones en otras equivalentes a ellas con el mismo denominador y compararlas, comprobando si son o no iguales.
3. Hallar la fracción irreducible de cada una de ellas. Cuando estas irreducibles coincidan, las fracciones de las que provienen serán equivalentes. En caso de llegar a fracciones irreductibles que no sean iguales, las fracciones iniciales no serán equivalentes.

Podemos relacionar el concepto y el cálculo intuitivo de fracciones equivalentes trabajados hasta ahora con la definición formal de la relación de equivalencia (véase 3.1) que nos permite construir el conjunto de los números racionales. De acuerdo con esta relación, dos fracciones $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ y $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ son equivalentes sii $\mathbf{a \cdot d = b \cdot c}$. Se puede comprobar con los alumnos de 6.º de primaria este hecho, como complemento de lo trabajado referente a las fracciones equivalentes.

La importancia de esta capacidad radica en la necesidad de encontrar fracciones con el mismo denominador equivalentes a otras dadas, para ordenar y sumar o restar las fracciones originales. Sin embargo, usaremos la simplificación de fracciones para expresar los resultados de situaciones problemáticas de la manera más sencilla posible.

Nota: Cuando al dividir el numerador entre el denominador de una fracción se obtenga una expresión decimal exacta o una expresión periódica con pocas cifras en el anteperíodo y en el período, se pueden usar estos resultados para saber si dos o más fracciones son o no equivalentes. Así, cuando las expresiones decimales coincidan, las fracciones serán equivalentes.

11. Sumar y restar fracciones con distinto denominador. Multiplicar y dividir fracciones

Estas operaciones se trabajan en 6.º de primaria, cuando ya se tiene un dominio de lo que significa el concepto de fracción, de la equivalencia de fracciones y de la adición y sustracción de fracciones con el mismo denominador.

Adición

Partiendo de una situación real, por ejemplo: «El alumnado de un aula está organizado en 2 grupos que disponen de cartulinas iguales para hacer un mural. Uno de los grupos parte la cartulina en tres partes iguales y utiliza una de estas, otro grupo necesita partirla en cuatro partes iguales, de las cuales utilizará tres. Necesitan saber qué parte de cartulina les ha sobrado conjuntamente a los dos grupos para poder utilizarla en otra parte de mural».

La representación gráfica de esta situación se encuentra en la figura 35.

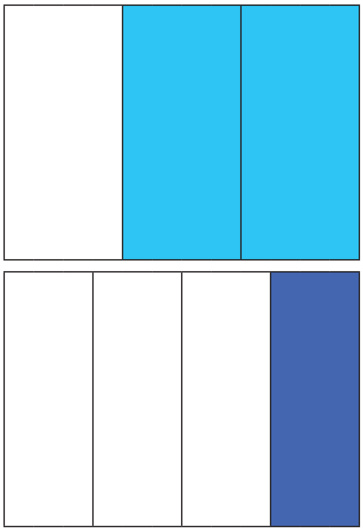

Figura 35. Representación de $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{4}$

Los niños y niñas expresan numéricamente las fracciones que representan lo que les ha sobrado en cada grupo: $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{4}$, e identifican la adición como la operación que resuelve su duda. Por tanto, hay que sumar estas dos fracciones: $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$.

Se encuentran con el problema de que el denominador de las fracciones sumandos no coinciden y, por tanto, no saben cómo hacer la operación.

Les sugerimos que, antes de resolver la operación numérica, utilicen los trozos de cartulina. Los unen y los comparan con una cartulina entera (cartulina unidad). Pero se encuentran con el problema de no saber expresar numéricamente lo que tienen delante, porque no saben en cuántas partes deberían dividir esta unidad para poder hacerlo.

Después de comentar entre ellos la situación en la que se encuentran, piensan que es conveniente disponer de una unidad fraccionada. Marcan las divisiones sobre una cartulina para fraccionarla en tercios, o en cuartos (al ser los denominadores de las fracciones a sumar). Los trozos de cartulina que les habían sobrado los superponen unidos sobre las cartulinas marcadas, sin poder expresar el resultado, en cualquiera de los dos casos, por no coincidir con ninguna división marcada (figura 36).

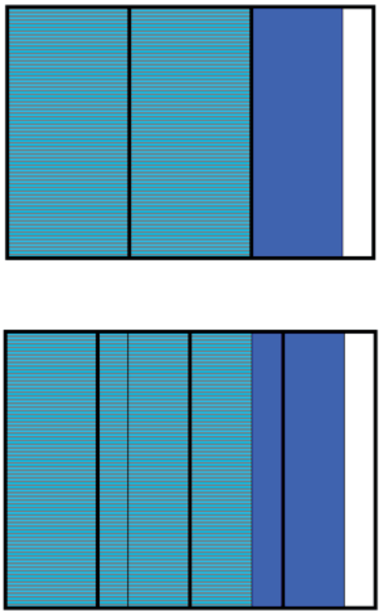

Figura 36. Representación de $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{4}$ sobre dos cartulinas, una dividida en tercios y la otra en cuartos

Continúan pensando en diferentes maneras de fraccionar la cartulina unidad, por ejemplo sextas partes, octavas partes, ..., hasta que llegan a la división en 12 partes iguales, que es la que les permite expresar numéricamente el resultado por haber encontrado una marca en la unidad que coincide con uno de los extremos de los dos trozos unidos (figura 37).

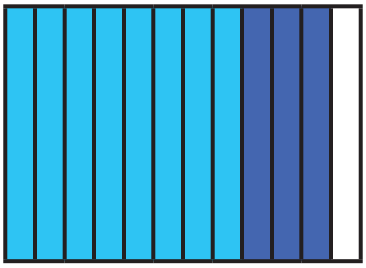

Figura 37. Representación de $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{4}$ sobre una cartulina dividida en doceavas partes

La marca es la que hace 11, es decir el resultado es $\frac{11}{12}$. Por tanto el resultado ya lo saben $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{11}{12}$

Les podemos preguntar si el procedimiento para sumar fracciones con diferente denominador siempre debe hacerse manipulativamente o podemos buscar un algoritmo que nos proporcione la solución numérica.

En la búsqueda de este algoritmo y a partir de la superposición de los trozos sobre la cartulina dividida en 12 partes, observan que las fracciones originales $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{4}$ pueden expresarse como $\frac{8}{12}$ y $\frac{3}{12}$, y descubren la relación de equivalencia que existe entre ellas, porque expresan, respectivamente, la misma porción de cartulina.

Entonces hay que descubrir la relación numérica entre las fracciones originales y equivalentes, y encuentran que: $\frac{2}{3} \times \frac{4}{4} = \frac{8}{12}$ y $\frac{1}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{3}{12}$

Como han conseguido fracciones con el mismo denominador y estas sí que saben sumarlas, llegan numéricamente al resultado que ya conocían: $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$
Es necesario insistir con más ejemplos asociados a la resolución de situaciones problemáticas para identificar claramente lo que significa sumar fracciones con diferente denominador y, por tanto, llegar a la conclusión de que *el algoritmo que les permite sumar las fracciones originales consiste en convertirlas en otras equivalentes a éstas con el mismo denominador para poder aplicar la adición de fracciones que ya conocen*.

Únicamente quedará cómo encontrar estas fracciones equivalentes para que no sea una dificultad en cada ocasión.

En un primer momento, y trabajando con denominadores pequeños, el procedimiento para encontrar las fracciones equivalentes se resuelve multiplicando los dos términos de cada fracción por el denominador de la otra. Por ejemplo $\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3 \times 6}{4 \times 6} + \frac{1 \times 4}{6 \times 4} = \frac{18}{24} + \frac{4}{24} = \frac{22}{24}$

Cuando hay más de dos fracciones o los denominadores son muy grandes –y como entre 5.º y 6.º curso de primaria es cuando se trabaja la divisibilidad de los números naturales– habrá que descubrir que el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores será el denominador de las nuevas fracciones equivalentes, por ser el menor valor que a la vez es múltiplo de todos los denominadores. Podemos coger el ejemplo anterior y utilizar el mcm (4, 6) = 12 como denominador común: $\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \frac{11}{12}$, y observar que los términos de las fracciones son menores que los del procedimiento anterior. Como caso particular de este método, cuando uno de los denominadores es múltiplo del otro u otros, será éste el que se usará como denominador común. Por ejemplo, en el caso de $\frac{2}{3}$ *y* $\frac{1}{6}$ será 6 el denominador común a las dos fracciones, así $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Habrá que comprobar con ejemplos numéricos que la adición de fracciones cumple las propiedades conmutativa y asociativa.

Sustracción

Respecto de la sustracción de fracciones con diferente denominador, se parte del trabajo previo de la adición y, por tanto, todo lo que se ha hecho en relación a los denominadores, se hereda de manera natural. Entonces, una vez tendremos las fracciones equivalentes con el mismo denominador, se procederá de acuerdo con la capacidad 6.

Multiplicación

Comenzaremos multiplicando una fracción por un número natural. Partiendo de una situación real, por ejemplo: «En clase se dispone de varias cuerdas de igual longitud para atar unos paquetes. Necesitamos $\frac{3}{5}$ de una cuerda para cada paquete. Si hemos de atar 4 paquetes, ¿cuánta cuerda utilizaremos?».

Se volverá a la base de lo que supone una multiplicación por números naturales, adición de sumandos iguales. Hay que retomar esta idea desde el principio, con el fin de utilizar el mismo mecanismo con las fracciones.

En este caso, la operación que deben realizar es $\frac{3}{5}\times 4$ y, a partir de la idea de multiplicación como una adición repetida, hacen la siguiente operación:

$$\frac{3}{5}\times 4 = \frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5} =$$

Como saben sumar fracciones con igual denominador, llegamos al resultado:

$$= \frac{3+3+3+3}{5} = \frac{3\times 4}{5} = \frac{12}{5}$$

Y enlazando el primero y los últimos términos de la cadena de igualdades se obtiene:

$$\frac{3}{5}\times 4 = \frac{3\times 4}{5} = \frac{12}{5}$$

Es decir, para ligar los 4 paquetes, se necesitan $\frac{12}{5}$ de cuerda.

La regla parece que puede estar clara rápidamente (si fuera necesario se comprobaría con más ejemplos), *para multiplicar una fracción por un número natural, hay que multiplicar el numerador de la fracción por este número y dejar el mismo denominador*.

Cuando se trate de multiplicar dos fracciones, partiremos también de una situación real, por ejemplo: «Para hacer una merienda, hemos comprado en una pastelería $\frac{3}{4}$ de un bizcocho dividido en cuartos. Como las raciones son demasiado grandes dividimos el que hemos comprado en quintas partes. Al terminar la merienda, observamos que solo han comido $\frac{2}{5}$ partes del bizcocho que teníamos. ¿Qué parte del bizcocho entero hemos gastado en la merienda?».

Para ayudar al alumnado a entender el procedimiento de la multiplicación de fracciones se utilizará la interpretación geométrica, a partir del área de un rectángulo cuyos lados tienen como longitud las dos fracciones que debemos multiplicar.

Como no conocen la operación que resuelve esta situación, nos ayudaremos de la representación gráfica de los datos para llegar a encontrarla. Así, al principio dibujaremos el bizcocho entero dividido en cuatro partes iguales, sombreando los $\frac{3}{4}$ que hemos comprado, las dividiremos en quintas partes y señalaremos los $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{4}$ que nos hemos comido (figura 38).

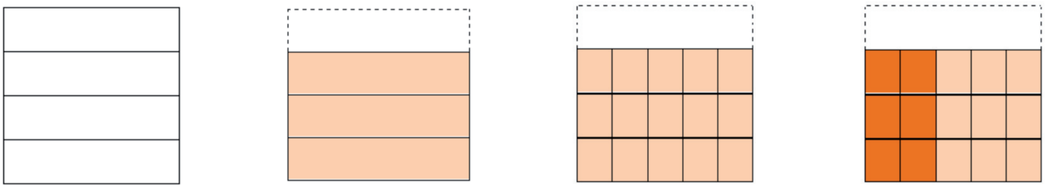

Figura 38. Representación de las sucesivas divisiones del bizcocho hasta llegar a $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{4}$

Para contestar a la pregunta planteada en la situación problemática habrá que expresar numéricamente las partes del bizcocho que se han comido en la merienda como partes del bizcocho entero. Para conseguirlo dividiremos en quintas partes la unidad que previamente habían dividida en cuartos y señalaremos en oscuro las partes que han comido (figura 39).

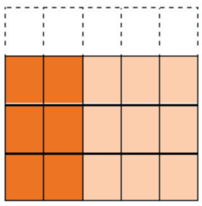

Figura 39. Representación como fracción de la unidad, del bizcocho que se ha comido

Como se observa en el dibujo, el bizcocho comido en la merienda representa los $\frac{6}{20}$ del bizcocho entero. Este valor es el área del rectángulo que tiene como longitudes de los lados $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{4}$, que, como saben, se calcula multiplicándolas: $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$
Entonces ya se pueden igualar las dos expresiones: $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$

El paso siguiente es darse cuenta de qué ha pasado numéricamente, que es donde se quería llegar. Observando la igualdad anterior el alumnado descubre que la multiplicación de fracciones, en este caso, se puede resolver de la siguiente manera:

$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{2 \times 3}{5 \times 4}$$

Es necesario insistir con más ejemplos asociados a la resolución de situaciones problemáticas para identificar claramente lo que significa multiplicar fracciones y, por tanto, llegar a la conclusión de que *el producto de fracciones es otra fracción cuyo numerador y denominador se calculan multiplicando, respectivamente, los numeradores y denominadores de las fracciones iniciales*.

El trabajo se completará estudiando la relación de la multiplicación de fracciones con expresiones que aparezca una fracción «de» cualquier otro número, interpretándola como una multiplicación de la fracción por el número correspondiente. En este caso la fracción está actuando como operador sobre el número, como se puede ver en los siguientes ejemplos:

- «Hemos recorrido los $\mathbf{\frac{2}{5}}$ de un camino que tiene **60** km. ¿Cuántos km hemos recorrido?» En este caso, $\mathbf{\frac{2}{5}}$ **de 60** se deberá calcular averiguando cuánto es una quinta parte de 60, para posteriormente coger dos de estas. Más adelante se darán cuenta de que estos cálculos son los que corresponden a la operación $\mathbf{\frac{2}{5} \times 60}$

- «Un pueblo ha producido las $\mathbf{\frac{2}{7}}$ partes de todo el vino de la comarca que son 3000 l. A lo largo del año se venden, en este pueblo, las $\frac{3}{5}$ partes de su producción. ¿Cuántos litros de vino se han vendido en el pueblo?». En este caso, aplicando lo que se ha trabajado en el ejemplo anterior, calcularán $\mathbf{\frac{2}{7}}$ **de 3000**, realizando la operación $\mathbf{\frac{2}{7} \times 3000}$. Posteriormente para calcular $\frac{3}{5}$ de $\mathbf{\frac{2}{7} \times 3000}$ aplicaran de nuevo el mismo procedimiento, obteniendo $\mathbf{\frac{3}{5} \times \frac{2}{7} \times 3000}$

Un caso particular de situaciones con expresiones en que aparezca una fracción «de» cualquier otro número, serán aquellas en las que se ha de calcular el porcentaje de una cantidad (simbolizado por % y representado por una fracción que tiene el porcentaje en el numerador y un 100 en el denominador).

Por ejemplo: «En una prenda que vale 50 €, nos hacen un descuento del 15 %.

¿Cuánto nos descuentan». En este caso «el 15% de 50» se traduce por «$\mathbf{\frac{15}{100}}$ de **50**» y, por tanto, a partir de los casos anteriormente estudiados, el cálculo será $\mathbf{\frac{15}{100} \times 50}$.

Otro caso particular será relacionar las partes que se hacen de un total con el porcentaje que suponen esas partes del total. Por ejemplo: «Se han vendido los $\frac{3}{5}$ de las entradas de un campo de fútbol. ¿Qué porcentaje de entradas se ha vendido?»

En este caso se trata de encontrar una fracción equivalente a $\frac{3}{5}$ que tenga como denominador 100, es decir $\frac{\mathbf{60}}{\mathbf{100}}$ y expresarla como porcentaje: 60 %.

Hay que notar que el número decimal correspondiente a $\frac{3}{5}$ es **0,6** y que también se puede calcular el porcentaje multiplicándolo por **100**: **0,6** x **100=60**, entonces el porcentaje es **60 %**.

Comprobaremos con ejemplos que la multiplicación de fracciones cumple las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva, respecto de la adición.

División

Antes de comenzar con el trabajo de la división, el alumnado debe saber qué son las fracciones inversas. A partir de una fracción dada, por ejemplo $\frac{5}{7}$, que entendemos como 5 partes de una unidad dividida en 7 partes, la inversa de esta será la fracción con los términos cambiados de posición, es decir: $\frac{7}{5}$, en la que se representa que hemos tomado 7 partes de una unidad dividida en 5.

A partir de la observación de algunos ejemplos de fracciones inversas, deben ser conscientes de que la inversa de una fracción propia es impropia y viceversa y también que al multiplicar una fracción por su inversa, se obtiene como resultado una fracción unidad. En este caso: $\frac{5}{7}\times\frac{7}{5}=\frac{5\times 7}{7\times 5}=\frac{35}{35}=1$

Aunque las situaciones donde pueden aparecer las divisiones de fracciones, no son muy habituales, hay que hacer el esfuerzo para encontrar y presentar esta operación a partir de una de ellas, para justificarla. Por ejemplo: «En un juego que queremos organizar en el patio, que mide $\frac{3}{10}$ de km de largo, hay que colocar un cono cada $\frac{2}{45}$ de km. ¿Cuántos conos debemos poner si ya hemos colocado el primero al principio del patio?». Por los conocimientos que tienen de las operaciones con números naturales en situaciones parecidas a ésta, llegarían a decidir que deben calcular la división $\frac{3}{10}:\frac{2}{45}$.

Hay que recuperar, en este momento, todo lo que han aprendido de la división de números naturales. Y deben recordar que resolver la división es encontrar el factor que le falta a una multiplicación de la que se conoce el otro factor y el resultado. La cuestión es buscar ese factor, es decir, el cociente. Numéricamente la situación es esta:

$$\frac{3}{10}:\frac{2}{45}=q \iff \frac{3}{10}=\frac{2}{45}\times q$$

Ellos y ellas no saben resolver una ecuación, no saben aislar la incógnita que en este momento sería el cociente, pero podemos guiar el razonamiento para que piensen qué pueden hacer, para lograr que quede solo el cociente a un lado de la igualdad, teniendo en cuenta que todo lo que se le haga al término de la derecha se le deberá hacer al de la izquierda, para garantizar que se mantenga la igualdad. El alumnado sabe que si se multiplican dos fracciones inversas, se obtiene como resultado 1. Entonces, para aislar el cociente, se les pregunta cuál sería la fracción que multiplicada por $\frac{2}{45}$ daría 1, encontrando como respuesta que la fracción sería $\frac{45}{2}$

La situación entonces es:

$$\frac{3}{10}\times\frac{45}{2}=\frac{2}{45}\times\frac{45}{2}\times q \Longrightarrow \frac{3}{10}\times\frac{45}{2}=1\times q=q$$

Por tanto, se ha transformado la división de fracciones que no se sabía calcular en una multiplicación que sí se sabe calcular:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{3}{10}:\frac{2}{45}=q\\[2em]\frac{3}{10}\times\frac{45}{2}=q\end{array}\right\}\Longrightarrow \frac{3}{10}:\frac{2}{45}=\frac{3}{10}\times\frac{45}{2}=\frac{3\times 45}{10\times 2}=\frac{135}{20}=6{,}7$$

Podemos finalmente concluir que se pondrán 6 conos (quedando un trozo de patio).

Se insistirá con más ejemplos asociados a la división de fracciones, para llegar a la conclusión de que *el resultado de dividir dos fracciones se obtiene multiplicando la primera fracción por la inversa de la segunda*.

A la hora de operar y para evitar que tengan que escribir de nuevo las fracciones invirtiendo la segunda, se puede introducir la multiplicación en cruz de los términos de las fracciones como la manera más usual de resolver la división. Así $\frac{3}{10}:\frac{2}{45}=\frac{3\times 45}{10\times 2}$

12. Multiplicar y dividir números decimales

En el último curso de primaria completaremos el cálculo con números decimales, trabajando la multiplicación y la división de estos números entre sí.

Multiplicación

Buscamos una situación donde sea necesario multiplicar dos números decimales, por ejemplo: «Para forrar un mueble del aula, queremos averiguar cuánta superficie de tela hay en una pieza de 3,7 m de largo, por 0,75 m de anchura». Por lo que ya han estudiado en 5.º y 6.º curso de primaria relacionado con la medida y la geometría, saben que la operación que hay que hacer es:

$$\begin{array}{r} 3{,}7 \\ \times\, 0{,}75 \\ \hline \end{array}$$

pero todavía no conocen el procedimiento para calcularla. Saben multiplicar un decimal por un número natural, pero no dos números decimales, entonces hay que recurrir a lo que han aprendido en la capacidad 3, que consiste en pasar las expresiones decimales a las correspondientes fracciones decimales y operar con estas:

$$\left.\begin{array}{l} 3{,}7 = \dfrac{37}{10} \\ 0{,}75 = \dfrac{75}{100} \end{array}\right\} \; 3{,}7 \times 0{,}75 = \frac{37}{10} \times \frac{75}{100} = \frac{37 \times 75}{10 \times 100} = \frac{2775}{1000} = 2{,}775$$

Hemos obtenido un número con tres cifras decimales, 2’775, como respuesta a cuánta superficie de tela disponemos para forrar el mueble. La justificación del número de cifras decimales del resultado, que es la suma de las cantidades de estas cifras que tienen los factores, viene dada por el denominador de la fracción resultado, 1000 en este caso. Siguiendo la cadena de igualdades hacia la izquierda, se ve que este 1000 es el resultado de la multiplicación de 10 x 100, que son respectivamente los denominadores asociados a una y dos cifras decimales de los factores.

Si queremos resolver la multiplicación sin recurrir a la transformación de los factores en fracciones, pediremos a los alumnos que en este tipo de ejercicios observen cómo se obtiene el numerador de la fracción resultado, en este caso multiplicando 37 y 75, que son los números naturales correspondiente a las expresiones decimales que debemos multiplicar.

Entonces de acuerdo con lo que acabamos de ver en los dos párrafos anteriores, haremos la operación de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} 3{,}7 \\ \times\ 0{,}75 \\ \hline 185 \\ 259 \\ \hline 2{,}775 \end{array}$$

Se insistirá con más ejemplos asociados a la multiplicación de números decimales para llegar a la conclusión que: «la multiplicación de dos números decimales se resuelve multiplicándolos sin tener en cuenta las comas y colocando la coma en el resultado obtenido separando tantas cifras decimales como tienen entre los dos factores juntos».

Nuevamente, hay que comprobar con ejemplos que la multiplicación de números decimales cumple las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva respecto de la adición.

División

Para dividir números decimales, se recurre al mismo procedimiento que en el inicio de la multiplicación. Hay que observar qué pasa con las fracciones y, entonces, sacar la conclusión para los números decimales, analizando diferentes casos, según la cantidad de cifras decimales que tengan los términos de la división.

La situación inicial puede ser similar a la utilizada para dividir fracciones. Por ejemplo: «El alumnado de 6.º de primaria tiene que preparar para Carnaval unos disfraces de brujas que necesitan cada uno 2,5 m de tela negra para su confección. La madre de una niña ha llevado al aula una pieza de tela comprada en un mercado ambulante, que mide 12,7 m. ¿Cuántos disfraces se podrán elaborar con ella?». Después de comentar con el alumnado los diferentes procedimientos que propongan para obtener la solución, deberán tener claro que es necesario hacer la división:

$$12{,}7 \;\underline{\big|\; 2{,}5\;}$$

Como no saben hacerla, expresaremos los números con fracciones y tendremos:

$$\left.\begin{array}{r} 12{,}7 = \dfrac{127}{10} \\ 2{,}5 = \dfrac{25}{10} \end{array}\right\} \; 12{,}7 : 2{,}5 = \frac{127}{10} : \frac{25}{10} = \frac{127 \times 10}{10 \times 25} = \frac{1270}{250} = \frac{127}{25} = 5{,}08$$

Se observa que se ha pasado de una división de números decimales a una de números naturales, $12{,}7 \;\underline{\big|\; 2{,}5 \quad} \Rightarrow 127 \;\underline{\big|\; 25 \quad}$, multiplicando los números iniciales por la unidad seguida de tantos ceros como han sido necesarios para transformarlos.

Con situaciones problemáticas análogas, se trabajaría el caso en el que el dividendo tenga menos cifras decimales que el divisor, por ejemplo:

$$\mathbf{325{,}7} \;\underline{\big|\; \mathbf{2{,}83} \quad}$$

Para resolver esta división pasamos a fracciones:

$$\left.\begin{array}{r} 325{,}7 = \dfrac{3.257}{10} \\[2ex] 2{,}83 = \dfrac{283}{100} \end{array}\right\} 325{,}7 : 2{,}83 = \frac{3.257}{10} : \frac{283}{100} = \frac{3.257 \times 100}{10 \times 283} = \frac{325.700}{2.830} = \frac{32.570}{283} = 115{,}08833\ldots$$

Entonces, la transformación de la división, en este caso, es:

$\mathbf{325{,}7} \;\underline{\big|\; \mathbf{2{,}83} \quad} \Rightarrow \mathbf{32570} \;\underline{\big|\; \mathbf{283} \quad}$ donde también se ha obtenido una división de números naturales.

Cuando el dividendo tenga más cifras decimales que el divisor, podemos encontrar, por ejemplo, la siguiente división:

$$\mathbf{325{,}75} \;\underline{\big|\; \mathbf{2{,}8} \quad}$$

Nuevamente, pasamos a fracciones:

$$\left.\begin{array}{r} 325{,}75 = \dfrac{32.575}{100} \\[2ex] 2{,}8 = \dfrac{28}{10} \end{array}\right\} 325{,}75 : 2{,}8 = \frac{32.575}{100} : \frac{28}{10} = \frac{32.575 \times 10}{100 \times 28} = \frac{325.750}{2.800} = \frac{32.575}{280} = 116{,}3392\ldots$$

Al igual que en los casos anteriores, la división de números decimales se transformaría en una de números naturales: $\mathbf{325{,}75} \;\underline{\big|\; \mathbf{2{,}8} \quad} \Rightarrow \mathbf{32575} \;\underline{\big|\; \mathbf{280} \quad}$. Hay que notar que la presencia de un cero en las unidades del divisor, puede alargar los cálculos. Si se quiere evitar esto, se puede multiplicar solo por 10 y no por 100 los dos números decimales, y así quedaría la división $\mathbf{3257{,}5} \;\underline{\big|\; \mathbf{28} \quad}$ donde se han eliminado las cifras decimales del divisor, pero no todas las del dividendo, obteniendo una división que saben calcular.

Se insistirá con más ejemplos asociados a la división de números decimales en todos los casos de esta para llegar a la conclusión de que, como norma general, «la división de dos números decimales se resuelve multiplicándolos por el mismo número, que será la unidad seguida de tantos ceros como sea necesario, a fin de convertir ambos en números naturales y efectuando la división de estos».

13. Introducir la proporcionalidad directa. Regla de tres simple

Como se comentó en el punto 2 del presente tema, se pueden encontrar fracciones en diferentes situaciones cotidianas. Nos interesan ahora aquellas donde las fracciones se interpretan como una razón entre dos cantidades y, en particular, las que se refieren al trabajo con proporcionalidades. Las relacionadas con la probabilidad no son objeto de esta publicación.

El alumnado de 6.º curso de primaria podrá entrar en contacto con esta interpretación de las fracciones cuando se encuentran en una situación en la que las cantidades crecen o decrecen manteniendo una relación constante entre ellas, llamada razón de proporcionalidad. Por ejemplo, si entre los ingredientes de una receta de cocina sabemos que hacen falta 50 g de miel para hacer un pastel para 4 personas, se quiere saber cuánta se necesita para 8 o 16 personas. Se comenta con los alumnos cómo averiguarlo y para visualizar las relaciones numéricas habría que llegar a usar una tabla como la siguiente:

Número de personas	4	8	16
Cantidad de miel	50	?	?

Al observar que el número de personas de cada columna duplica el de la columna anterior, pensarán que el cálculo necesario para obtener las cantidades de miel de las casillas vacías es también duplicar el anterior para conseguir así que se mantenga la dulzura del pastel. Una vez hechos los cálculos, la tabla quedará:

Número de personas	4	8	16
Cantidad de miel	50	100	200

En la que se puede comprobar que las relaciones entre el par de números de cada columna se representan por las fracciones $\frac{4}{50}, \frac{8}{100}, \frac{16}{200}$, que son equivalentes entre sí y que tienen como fracción irreductible $\frac{2}{25}$. A esta expresión se la llama constante de proporcionalidad entre las cantidades anteriores y podemos decir que el número de personas y la cantidad de miel se encuentran en relación de proporcionalidad directa o, lo que es lo mismo, son directamente proporcionales.

Si se diera el caso de que fueran 12 las personas por las que tenemos que hacer el pastel, al pedirles que averigüen la cantidad de miel necesaria con ayuda de la tabla, podrían insertar una nueva columna entre el 8 y el 16:

Número de personas	4	8	**12**	16
Cantidad de miel	50	100	**?**	200

Parece lógico pensar que si el 12 se obtiene sumando los valores anteriores 4 + 8, para obtener la cantidad de miel deberá seguirse el mismo procedimiento: 50 + 100. Es decir:

Número de personas	4	8	**12**	16
Cantidad de miel	50	100	**150**	200

Para saber si el resultado obtenido es correcto, expresarán la razón entre el número de personas (12) y la cantidad de miel (150), es decir $\frac{12}{150}$ y comprobarán que es una fracción equivalente a $\frac{2}{25}$, que es la constante de proporcionalidad de esta situación problemática.

Si en esta misma situación tuvimos que hacer el pastel para 5 personas, el alumnado debería averiguar cuánta miel haría falta en este caso. Ahora no pueden sacar la cantidad de manera tan intuitiva como en los casos de la tabla. Después de reflexionar la manera de obtenerla les ayudaremos a descubrir la necesidad de conocer la cantidad de miel por persona y multiplicarla después por las 5 personas, en este caso. Así, los cálculos deberían ser 50 : 4 = 12,5 gramos de miel por persona y 12,5 x 5 = 62,5 gramos de miel para las 5 personas.

Estas y otras situaciones similares se pueden resolver utilizando lo que habitualmente se llama «Regla de tres simple», que no es más que otra manera de presentar el uso de la proporcionalidad. Así, por ejemplo, en la situación anterior si se quiere averiguar cuánta miel hace falta para hacer el pastel para 12 personas, ayudaremos a los alumnos a hacer el siguiente razonamiento: si por 4 personas necesitan 50 g de miel, por 12 personas hará falta una cantidad desconocida que hay que encontrar y que llamaremos «x». Como ya se ha mencionado, la relación entre 4 y 50 se mantendrá entre 12 y **x**, para que el pastel mantenga la dulzura. Esta proporcionalidad se puede representar con el formato:

4 personas ⟶ 50 gramos de miel
12 personas ⟶ **x** gramos de miel

Para calcular **x** el alumnado necesita los conceptos de proporcionalidad y de equivalencia de fracciones. Por el primero saben que: $\mathbf{\frac{4}{50} = \frac{12}{x}}$ y para el segundo: $\mathbf{4 \cdot x = 12 \cdot 50}$. En este momento podemos preguntar cómo obtener el valor de **x** y si no se les ocurre, les sugeriremos la utilización de la idea de división exacta para identificar 12 · 50 como un dividendo, 4 como un divisor y **x** como un cociente.

Entonces $\mathbf{x = \frac{12 \cdot 50}{4}}$. Resolviendo esta operación, obtendrán que $\mathbf{x = 150}$ gramos, que es la cantidad de miel que se necesita para hacer el pastel para 12 personas.

Como estos dos procedimientos son equivalentes para encontrar la solución en situaciones de este tipo, podrán utilizar cualquiera de los dos indistintamente.

14. Obtener la fracción generatriz que corresponde a cualquier expresión decimal y viceversa

La correspondencia entre fracciones decimales y números decimales se ha trabajado anteriormente en el desarrollo de la capacidad 3. Para completar las relaciones que existen entre fracciones y expresiones decimales en general, nos quedaría trabajar en el último curso de la etapa la relación entre expresiones decimales periódicas y fracciones no decimales. Habrá que encontrar la fracción generatriz de una expresión decimal periódica y viceversa.

Obtendremos, pues, las fracciones generatrices de expresiones decimales periódicas puras o mixtas, que no son más que las fracciones irreducibles que generan dichas expresiones decimales. Estos cálculos son necesarios para eliminar la gran dificultad de operatividad que rodea las expresiones decimales periódicas, pero algunas veces el proceso de encontrar estas fracciones les ha parecido a los alumnos una serie de pasos oscuros, sin mucha utilidad, que sirve solo para eso, para obtenerlas y no para utilizarlas con posterioridad.

Hay que insistir en que las expresiones decimales periódicas pueden aparecer a veces en situaciones de la vida cotidiana (adaptaciones de las cantidades de ingredientes de recetas de cocina para diferentes números de comensales, variaciones en la bolsa, valores estadísticos de variables continuas en sucesos aleatorios...). Como no podemos expresar las infinitas cifras decimales de estas cantidades, para operar con ellas las convertimos en expresiones decimales exactas bien por truncamiento o por redondeo. Esto provoca siempre una pérdida de información y para evitarlo necesitamos saber cuáles son las fracciones que generan las expresiones decimales periódicas. Así, al operar con las fracciones, estaremos realizando los cálculos con las cantidades exactas. En cualquier caso, en el último curso de primaria, los niños ya deberían tener el suficiente grado de abstracción como para entender estas cuestiones y la justificación de las mismas, por lo que conviene dar herramientas para calcularlas con lo que saben, pero de una manera sencilla.

Partiremos, en primer lugar, de una expresión periódica pura, $1,\widehat{53}$ por ejemplo, y queremos saber la fracción generatriz de ésta, que llamaremos **x** hasta que la encontremos. Es decir $\mathbf{x = 1,\widehat{53}}$. La mayor dificultad para encontrar la fracción que se busca está en el período de la expresión.

Debemos intentar encontrar un procedimiento que nos garantice la eliminación del período. Para ello, buscaremos otra expresión y una operación, cuyo resultado no sea ya periódico. Observaremos, con ejemplos numéricos, que si una expresión periódica se opera con otro número con la adición, multiplicación o división, no desaparece el período. La única operación que lo hace desaparecer es una sustracción en la que el otro término tiene el mismo período que éste.

Para conseguir una sustracción de este tipo, convertiremos nuestra igualdad en otra que conserve el período y que actuará como minuendo. La manera de obtenerla será multiplicar la igualdad por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga el período. Es decir, $100 \cdot x = 153,\widehat{53}$. El sustraendo será la igualdad inicial y la sustracción será:

$$\begin{array}{r} 100 \cdot x = 153,\widehat{53} \\ - \quad x = \quad 1,\widehat{53} \\ \hline 99 \cdot x = 152 \quad \end{array}$$

Como la **x** es un factor se puede expresar también como el resultado de una división: $x = \dfrac{152}{99}$

De esta manera ya hemos encontrado la fracción generatriz que buscábamos: $1,\widehat{53} = \dfrac{152}{99}$.

Puede que esta obtención de la fracción generatriz no resulte intuitiva para los niños y niñas. En este caso podemos proponerles una actividad con la calculadora que consiste en obtener las fracciones que han generado las siguientes expresiones decimales, sin dar ninguna información más:

0,111111111111111...
0,222222222222222...
0,333333333333333...
...
0,888888888888888...

Es decir, tienen que hacer pruebas de divisiones para conseguir que los resultados sean estos con infinitas cifras decimales periódicas. Al final de la sesión, seguro que la mayoría habrá conseguido encontrar las fracciones que las han producido, $\dfrac{1}{9}, \dfrac{2}{9}, \dfrac{3}{9} \dots \dfrac{8}{9}$, o bien, fracciones equivalentes a éstas que tendremos que simplificar, para obtenerlas.

Se repite el experimento, pero ahora con varias cifras al período:

0,454545454...
0,678678678...

Y los resultados, encontrados de manera similar a los casos anteriores, serán:

$$\frac{45}{99}, \frac{678}{999} \dots$$

Es muy importante haber conseguido esto (será una fracción con tantos nueves en el denominador como cifras estén en el numerador, es decir, como cifras tenga el período), porque el trabajo difícil ya está hecho, saben pasar a fracción cualquier expresión decimal periódica pura, pero con parte entera nula. Si la pregunta ahora es encontrar la fracción generatriz de **1,53535353**... del ejemplo inicial, o de cualquier otra expresión decimal periódica pura pero con parte entera no nula, solo tendrán que separar las dos partes de la expresión y aplicar lo que ya saben:

$$\mathbf{1+0{,}5353535353...=1+\frac{53}{99}=\frac{152}{99}}$$

Una vez se ha trabajado suficientemente, se puede sintetizar con una regla que, más bien, oscurece el procedimiento y hace olvidar, en muchas ocasiones, la lógica de lo que está haciendo y, por tanto, condenada al olvido o a la confusión: *la fracción generatriz de una expresión decimal periódica pura, tiene como numerador el resultado de restar el número natural formado por la parte entera seguido del período, menos el número natural formado solo por la parte entera, y como denominador un número formado por tantos nueves como cifras tenga el período*. Que no es más que un atajo para obtener el resultado anterior, sin saber qué se está haciendo.

Si el número es periódico mixto, por ejemplo $1{,}32\widehat{5}$, se continuará llamando **x** a la fracción que se busca: $\mathbf{x=1{,}32\widehat{5}}$ y el procedimiento ahora constará de dos pasos, el primero convertirá la expresión periódica mixta en una periódica pura multiplicando la igualdad por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga el anteperíodo $\mathbf{100\cdot x=132{,}\widehat{5}}$ y el segundo paso será aplicar a esta nueva igualdad el procedimiento visto antes para las expresiones periódicas puras, es decir $\mathbf{1.000\cdot x=1.325'\widehat{5}}$. Los términos de la sustracción serán ahora estas dos últimas igualdades:

$$\begin{array}{rl} \mathbf{1.000\cdot x} & \mathbf{=1325{,}\widehat{5}} \\ \mathbf{-100\cdot x} & \mathbf{=\ \ 132{,}\widehat{5}} \\ \hline \mathbf{900\cdot x} & \mathbf{=\ \ 1193} \end{array} \Rightarrow \mathbf{x=\frac{1193}{900}}$$

La fracción generatriz que buscábamos es: $\mathbf{1{,}32\widehat{5}=\frac{1193}{900}}$

En un intento de encontrar una manera más intuitiva de hacer estos cálculos, podemos introducir una reflexión sobre otro procedimiento para obtener la fracción generatriz de una expresión decimal periódica mixta.

Por un lado, ya saben obtener la fracción generatriz de una expresión decimal periódica pura y, por otro, una expresión periódica mixta se diferencia de la pura en que hay un número finito de cifras decimales que no se repiten y que siempre están entre la coma y el período, es decir, el anteperíodo. Pues bien, lo que podemos hacer es descomponer la expresión decimal periódica mixta como suma de una expresión decimal exacta y de una periódica mixta más sencilla y hacer los cálculos con estas.

Si partimos del ejemplo anterior: $\mathbf{1{,}32\widehat{5} = 1{,}32 + 0{,}00\widehat{5}}$. Del primer sumando, no hay que preocuparse, ya se sabe convertir fracción decimal: $\mathbf{1{,}32 = \frac{132}{100}}$

Para encontrar la expresión generatriz del segundo sumando, hay que multiplicarlo por la unidad seguida de tantos ceros como ceros tenga la anteperíodo, en este caso **100**, por tanto: $\mathbf{100 \times 0{,}00\widehat{5} = 0{,}\widehat{5}}$. Ahora ya saben obtener la fracción generatriz: $\mathbf{0{,}\widehat{5} = \frac{5}{9}}$. Finalmente hay que deshacer el cambio inicial, si habíamos multiplicado por **100**, dividiremos por **100**:

$$\mathbf{\frac{0{,}\widehat{5}}{100} = \frac{\frac{5}{9}}{100} \rightarrow 0{,}00\widehat{5} = \frac{5}{900}}$$

Para encontrar la fracción generatriz definitiva, solo faltará sumar las dos fracciones obtenidas: $\mathbf{1{,}32\widehat{5} = 1{,}32 + 0{,}00\widehat{5} = \frac{132}{100} + \frac{5}{900} = \frac{1.188}{900} + \frac{5}{900} = \frac{1.193}{900}}$

De manera análoga al caso de las expresiones decimales periódicas puras y con las mismas reticencias de antes, se puede sintetizar este cálculo con la siguiente regla: *La fracción generatriz de una expresión decimal periódica mixta, tiene como numerador el resultado de restar el número natural formado por la parte entera seguida de la anteperíodo y del período, menos el número natural formado por la parte entera seguida de la anteperíodo, y como denominador un número formado por tantos nueves como cifras tenga el período y tantos ceros como cifras tenga el anteperíodo*.

En cualquiera de los casos trabajados hasta aquí, si la fracción que se obtiene por los procedimientos descritos no fuera irreductible, habrá que simplificarla hasta que lo sea para llegar así a la fracción generatriz buscada.

Como complemento del cálculo de la fracción generatriz de cualquier expresión decimal podemos trabajar también con los niños el cálculo de la expresión decimal que corresponde a cualquier fracción. Sabemos que el procedimiento para encontrar esta expresión es resolver la división indicada en la fracción.

Esto lo saben hacer, pero como podría ocurrir que la división se hiciera muy larga, para saber con exactitud si la parte decimal es exacta, periódica pura o mixta, se hace necesario, antes de realizar la división, saber cómo será la expresión decimal. Este conocimiento a priori nos evitará errores o cálculos innecesarios.

Para dar respuesta a esta duda propondremos a los niños que calculan diferentes expresiones decimales a partir de algunas fracciones irreducibles dadas por nosotros, con el fin de observar luego los resultados y sacar conclusiones.

Así, calcularán las expresiones decimales de: 3/2, 2/5, 3/7, 4/11, 5/6, 28/15, obteniendo 1,5; 0,4; 0,428571428571...; 0,3636...; 0,8333...; 1,8666... respectivamente.

Trabajaremos más ejemplos similares con otras fracciones irreducibles; también utilizaremos la calculadora además del cálculo con lápiz y papel, a fin de comprobar que, a veces, el resultado que proporciona la máquina no corresponde al mismo tipo de expresión decimal (cuando el número de cifras decimales es muy grande).

Les pediremos que reflexionen sobre las fracciones y que se fijen en los denominadores para intentar sacar las primeras conclusiones alrededor de las relaciones que pueden existir entre éstos y las diferentes expresiones decimales que obtenemos.

Nuestra intención es llegar, con las ayudas que necesiten, al descubrimiento de la necesidad de conocer las fracciones irreducibles de las dadas y, observando los factores primos del denominador de éstas, saber qué tipo de expresión decimal obtendremos de acuerdo con los siguientes casos:

- Si los factores primos son solo 2 y/o 5, las expresiones decimales correspondientes serán exactas.
- Si los factores primos son diferentes de 2 y 5, las expresiones decimales correspondientes serán periódicas puras.
- Si los factores primos combinan 2 y/o 5, con otros factores primos las expresiones decimales correspondientes serán periódicas mixtas.

Una vez está construido el puente entre expresiones decimales y fracciones, los datos de los problemas se pueden expresar numéricamente según convenga. Toda la equivalencia de operatividad entre fracciones y expresiones decimales queda, por tanto, conectada.

15. Aplicar los conocimientos sobre fracciones y expresiones decimales para resolver e inventar problemas

Es en situaciones reales donde cobra especial sentido el trabajo hecho con fracciones y decimales, porque realmente es la realidad la que origina interrogantes cuya respuesta pasará por saber, en este caso, trabajar con estos números.

Aunque la resolución e invención de problemas aparece a veces como la última parte del trabajo con números, estamos practicándolas desde el principio, porque presentamos los conceptos correspondientes de manera contextualizada, a partir de situaciones reales que deben resolverse.

Ejercitaremos la resolución de problemas tomando como orientación las cuatro fases de Polya (comprender el problema, elaborar un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida) y reflexionando con el alumnado sobre la importancia, desarrollo y utilidad de cada una de ellas.

Cuando se encuentran resolviendo los problemas, debemos aprovechar los errores que puedan surgir para reflexionar con los niños sobre ellos y, como consecuencia, potenciar nuevas situaciones de aprendizaje a partir de la reflexión. Es muy importante diferenciar entre los errores de cálculo y los errores de razonamiento, dado que exigen métodos diferentes para su tratamiento.

Desarrollaremos el trabajo correspondiente a esta capacidad en los tres últimos cursos de primaria, respetando en cada uno de ellos los niveles cognitivos de los alumnos respecto de fracciones y decimales.

El alumnado debe trabajar también la invención de problemas relacionados con estos conceptos. Lo que se pretende es comprobar si son capaces de generar situaciones que se resuelvan con ellos. El trabajo de inventar problemas será posterior al de resolverlos. No les pediremos nunca que inventen un problema de un tipo que aún no se haya resuelto.

Cada vez que les propongamos la invención de un tipo nuevo de problemas recorreremos los pasos siguientes, que se presentan secuenciados por su dificultad, independientemente del curso en que nos encontremos:

- Con ayudas:
  - Les daremos los números, el contexto y/o las operaciones que intervienen en la situación.
  - Les daremos los números y/o las operaciones, pero no el contexto.

- Sin ayudas: les daremos solo los tipos de números y/o las operaciones que han de aparecer en la situación problemática.

Después de inventar las situaciones problemáticas, las intercambian con los compañeros para que ningún niño o niña resuelva las que ha inventado, con el fin de potenciar su capacidad tanto de redacción como de expresión matemática, que implicará la exigencia de claridad y de totalidad en datos e incógnitas.

TEMA 3

Magnitudes y medida

En este tema se trabaja la construcción de los conceptos de Magnitud y Medida. El primero, a partir del conjunto cociente obtenido por medio de una relación de equivalencia definida en el conjunto de todos los elementos que tienen una determinada característica o propiedad. El segundo, a partir de una aplicación entre el conjunto cociente anterior y el de los números reales no negativos. Empieza el tema con una referencia histórica sobre estos conceptos, continúa con su formalización y finaliza con un extenso tratamiento didáctico de los correspondientes contenidos en el aula de primaria.

1. Introducción

1.1. Histórica

En física, *magnitud* es algo susceptible de ser cuantificado, es decir, de ser medido, de ser ponderado. Algunas magnitudes pueden ser directamente apreciables por nuestros sentidos, como la longitud, la masa, la superficie. Otras no lo son y necesitan métodos indirectos para ser medidas (aceleración, energía...).

La noción de magnitud está inevitablemente relacionada con la de medida. Se llaman *magnitudes* ciertas propiedades o aspectos observables de un sistema físico que pueden ser expresadas en forma numérica, entonces se llaman magnitudes escalares, o por medio de un vector, y en este caso se llaman magnitudes vectoriales. El gusto por el arte, por ejemplo, no es una magnitud, porque no se puede elaborar una escala ni mucho menos un aparato que determine cuántas veces un ser humano tiene más gusto por el arte que otro.

Medir es relacionar una cantidad de una magnitud con otra u otras cantidades de la misma que se consideran patrones universalmente aceptados. El hecho de medir exige, pues, tener en cuenta cuatro variables: una magnitud, una cantidad de esta, una unidad relacionada con ellas y un número, que es el resultado de la comparación de la cantidad con la unidad escogida al efecto.

Antiguamente se elegían muchas unidades de referencia para medir un mismo tipo de magnitudes. Una unidad pequeña para cantidades pequeñas de la magnitud, y una grande para las grandes, tratando de que los números que resultaban de comparar las cantidades de magnitud a medir con la unidad de esta, fueran sencillos, de dos o tres cifras enteras y quizá una decimal o dos. Así, la masa de piedras preciosas se medía en quilates (llamados también quilates métricos), unidad derivada de la masa de las semillas de un árbol árabe que se ha normalizado como 0,2 g y, por ejemplo, cantidades grandes como las cosechas se medían en toneladas. No se debe confundir este significado de la palabra quilate con otro muy utilizado en joyería y que se refiere a la fracción másica de oro en una aleación multiplicada por 24.

Esta primera manera de medir, está claro que no es útil, porque cada zona puede elegir su manera particular de hacerlo. Concretamente, en nuestro país, la hanegada es una unidad de superficie de los campos de cultivo, que en la actualidad aún se usa. Equivale a 833,3 m^2. Es la extensión de tierra estimada que se puede sembrar con una fanega de grano; contiene cuatro cuartones (unidad agrícola de medida de la tierra en Mallorca) y equivale a la doceava parte de una hectárea (unidad de medida de superficies en el SI).

Una segunda opción es adoptar una única unidad y usarla con sus múltiplos y submúltiplos, por ejemplo, el metro, el kilómetro, el milímetro, intentando así que el número que resulta de la medida sea cómodo.

La tercera de las opciones es elegir solo una unidad y aceptar que los números que resulten de medir la magnitud no sea sencillo. Por ejemplo, el diámetro de una aguja es $8{,}5 \times 10^{-5}$ m y el de la Tierra es $1{,}27 \times 10^{7}$ m.

A lo largo de la historia, este tema ha evolucionado notablemente. Por diversas razones, la primera y más importante, porque la necesidad de medir está en nuestras vidas de manera cotidiana y habitual. No se puede huir de este hecho.

El Sistema Internacional de unidades

El primer conjunto de unidades concebido como un sistema estable fue el Sistema Métrico Decimal, creado en Francia con la Revolución Francesa a finales del siglo XVIII. Antoine de Lavoisier dijo de este:

> [...] nada más grande ni más sublime ha salido de las manos del hombre que el sistema métrico decimal.

En 1881, se adoptó en el Congreso Internacional de los Electricistas, celebrado en París, el Sistema Cegesimal (CGS, iniciales de centímetro, gramo, segundo), propuesto por el matemático alemán Karl Gauss.

Basado en el primero, en el año 1901, el físico e ingeniero italiano Giovanni Giorgi propuso el sistema MKS (iniciales de metro, kilogramo, segundo), adoptado oficialmente en 1935, que dio lugar después de ser ampliado, al Sistema Internacional (1960).

Actualmente, en todo el mundo, la norma es utilizar el Sistema Internacional (SI) de unidades, aunque en los Estados Unidos de América se continúa en proceso de transición, desde que en 1875 se adoptó formalmente el Sistema Métrico Decimal. El SI es el resultado del trabajo de diversas organizaciones internacionales durante más de un siglo, gracias al cual se ha conseguido un sistema de unidades de medida común para todas las áreas de la ciencia y la tecnología.

Cada estado establece adopciones y exclusiones legales de carácter formativo o industrial. En España, la Ley de Pesos y Medidas, de 8 de julio de 1892; la Ley 88/1976, de 8 de noviembre; el Real decreto 1317/1989, de 27 de octubre y la corrección de errores de este, y la Norma UNE 82100: 1996 son las normativas que se consideran. Pero, como es raro que se penalice por no cumplirlas, es común ver aparatos destinados a medir la presión graduados en *kg/cm²* en lugar de *bares* y, por ejemplo, características de calderas y refrigeradores con medidas en *calorías* y *frigorías*, respectivamente.

Además de homogeneizar las transacciones científicas, técnicas y comerciales, una de las mayores ventajas de un sistema coherente de unidades, como el SI, es que facilita la comparación de valores dispares de una misma magnitud (por ejemplo distancias microscópicas y astronómicas) y las relaciones entre las diferentes magnitudes.

En la nomenclatura científica, los símbolos usados para las unidades no son abreviatura ortográficas, son solo símbolos. En general, están formados por letras simples o, excepcionalmente, parejas o tríadas.

Las normas para la correcta utilización de magnitudes, unidades y símbolos científicos, las proponen las asociaciones científicas internacionales[1] (en este caso la Oficina Internacional de Pesos y Medidas) y las adoptan las administraciones de cada Estado, con la finalidad de facilitar los intercambios de información y las transacciones materiales (particularmente entre organismos y empresas multinacionales).

El SI está constituido por dos clases de unidades: fundamentales y derivadas. A una magnitud particular solo le corresponde un conjunto de unidades de este sistema. La Conferencia General de Pesos y Medidas,[1] además, ha admitido el uso de otras unidades que, sin pertenecer al SI, son importantes y ampliamente utilizadas en todo el mundo.

Algunos ejemplos de estos tipos de unidades son los que figuran en los cuadros siguientes:

UNIDADES FUNDAMENTALES

MAGNITUD	NOMBRE	SÍMBOLO
longitud	metro	m
masa	kilogramo	kg
tiempo	segundo	s
intensidad de corriente eléctrica	amperio	A
temperatura termodinámica	kelvin	K
cantidad de sustancia	mol	mol
intensidad luminosa	candela	cd

1. La información actualizada respecto de las unidades, sus relaciones y las normas de uso se puede encontrar en la página web del Bureau International des Poids et Mesures, http://www.bipm.org/.

ALGUNAS UNIDADES DERIVADAS

Sin nombre especial		
MAGNITUD	NOMBRE	SÍMBOLO
superficie	metro cuadrado	m^2
volumen	metro cúbico	m^3
velocidad	metro por segundo	m/s
aceleración	metro por segundo al cuadrado	m/s^2
Con nombre o símbolo especial		
ángulo plano	radián	rad
ángulo sólido	estereorradián	sr
frecuencia	hertz o hercio	Hz
fuerza	newton	N
potencia	vatio	W
resistencia eléctrica	ohmio	Ω

UNIDADES ACEPTADAS QUE NO PERTENECEN AL SI

MAGNITUD	NOMBRE	SÍMBOLO
masa	tonelada	t
tiempo	minuto, hora	min, h
temperatura	grado Celsius	ºC
volumen	litro	L ó l

Prefijos en el SI

Para no tener que utilizar números muy grandes ni muy pequeños, el SI admite el uso de múltiplos y submúltiplos de las unidades, que se indican por medio de unos prefijos que se anteponen al nombre de la unidad y a su símbolo. Para nombrar un múltiplo o submúltiplo de una unidad compuesta se recomienda utilizar solo un prefijo; si la unidad compuesta es un cociente, el prefijo nunca debe acompañar a la unidad que se encuentre en el denominador. En las tablas siguientes se muestran los más usuales:

MÚLTIPLOS		
Factor	Prefijo	Símbolo
10^{18}	exa	E
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	quilo	k
10^{2}	hecto	h
10^{1}	deca	da

SUBMÚTIPLOS		
Factor	Prefijo	Símbolo
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	µ
10^{-9}	nano	n
10^{-18}	atto	a

Normas del SI

Cualquier lenguaje contiene reglas para escribirlo que evitan confusiones y facilitan la comunicación. El SI tiene sus propias reglas de escritura que permiten una comunicación correcta.

- Referentes a los símbolos:
  - Se escriben con caracteres romanos rectos.
  - Se utiliza letra minúscula excepto para los derivados de nombres propios (N, Hz).
  - No van seguidos de punto ni toman *s* para el plural (17 m).
  - No se debe dejar espacio entre el prefijo y la unidad (nanómetro: nm).
  - El producto de dos símbolos se indica mediante un punto.

- Referentes a las unidades:
  - Si el valor se expresa con letras, la unidad también (diecisiete metros).
  - Si el valor se expresa con números, la unidad puede expresarse con nombre o con símbolo (17 metros o 17 m).
  - Las unidades derivadas de nombres propios se escriben igual que el nombre propio pero con minúsculas (dos newtons).
  - Los nombres de las unidades toman una s en el plural, salvo si acaban en s, x, z o ç.

1.2. Al tema

El objetivo del tema es aproximar al alumnado de primaria a las magnitudes longitud, capacidad, masa, tiempo, sistema monetario, medida de ángulos, superficie y volumen, así como poner de manifiesto la clara diferencia entre los tipos de magnitudes y las unidades correspondiente. En el capítulo 2 de este tema se formalizarán los conceptos de magnitud y medida. Los aspectos básicos referentes a cada magnitud a estudiar, las unidades centrales, sus múltiplos y submúltiplos, y las orientaciones didácticas para el desarrollo de estos contenidos con los niños y niñas se presentan en el capítulo 3 del mismo.

2. Formalitzación de los conceptos de magnitud y medida

El esquema matemático que se necesita para abordar la definición formal de magnitud y medida es el siguiente: una magnitud es un conjunto (cuyos elementos se llaman cantidades de la magnitud) con una determinada estructura algebraica y una medida es una aplicación que a cada una de las cantidades le asigna un número. Este número será la medida de ese elemento.

Será necesario, por tanto, determinar este conjunto y su estructura, las cantidades del mismo y la aplicación llamada medida.

2.1. Magnitud

Definiremos una magnitud a partir de un conjunto ***S***. Determinar este conjunto, en general, puede resultar complicado. Acompañaremos la definición con un ejemplo, la longitud. ***S*** será el conjunto de todos los objetos que tienen longitud. En este conjunto, hay que definir una relación binaria de equivalencia, ***R***, entre sus elementos. En el caso de la longitud, se relacionarán los objetos que tienen la misma longitud. Por medio de esta relación, obtenemos el conjunto ***S/R*** llamado conjunto cociente, cuyos elementos son ahora clases de equivalencia. Cada una de estas clases estará formada por todos los elementos que, por medio de esta relación, son equivalentes. Para el ejemplo elegido, estas clases estarán formadas por todos los objetos con la misma longitud; es decir, el objeto en sí ya no es importante, lo es la longitud que tiene, la característica que interesa. Por tanto, las clases de equivalencia son cantidades de longitud. Una cantidad de longitud la pueden tener muchos objetos, todos los que pertenecen a la misma clase.

Para que el conjunto cociente anterior sea una ***magnitud***, necesitamos definir en él una ley de composición interna (*), una relación de orden ($\leq$) y una ley de composición externa (·), y se han de cumplir las condiciones que se desarrollan a continuación:

- Ley de composición interna: $(*): S/R \times S/R \rightarrow S/R$

  $([a],[b]) \rightarrow [a]*[b]$, que deberá cumplir las propiedades asociativa y conmutativa. Por tanto $(S/R, *)$ será un semigrupo conmutativo.

- Relación de orden: que denotaremos por $\leq$ y que se definirá como $\forall [a],[b] \in S/R,\ [a] \leq [b] \leftrightarrow \exists [c] \in S/R \ / \ [a]*[c]=[b]$. Esta relación ha de ser compatible con la operación del semigrupo, es decir, ha de cumplir $\forall [a],[b],[c] \in S/R,\ [a] \leq [b] \rightarrow [a]*[c] \leq [b]*[c]$

- Ley de composición externa: con lo que se ha definido hasta ahora, solo conocemos las cantidades y el orden de estas (más o menos longitud, más o menos superficie, más o menos masa...). Lo que no sabemos aún es cuántas veces una cantidad es más *grande* que otra. Esto se formaliza a partir del producto de una cantidad de magnitud por un número no negativo, es decir, definiendo la operación externa:

$$(\cdot):\mathbb{R}^+\cup\{0\}\times S/_R\rightarrow S/_R$$

$(\alpha,[a])\rightarrow\alpha\{a]$, que cumple las siguientes propiedades:

– $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}\ \wedge\ \forall\,[a],[b]\in S/_R$
– $(\alpha+\beta)\cdot[a]=(\alpha\cdot[a])*(\beta\cdot[a])$
– $\alpha\cdot([a]*[b])=(\alpha\cdot[a])*(\alpha\cdot[b])$
– $\alpha\cdot(\beta\cdot[a])=(\alpha\times\beta)*[a]$
– Si $[a]\leq[b]\rightarrow\alpha\cdot[a]\leq\alpha\cdot[b]$

Por todo esto, se dice que $(S/_R\,,*\,,\leq\,,\cdot)$ es una magnitud si tiene estructura de semimódulo (ver el anexo) ordenado sobre el semianillo formado por los números reales no negativos. Hay que tener en cuenta que esta definición corresponde a las magnitudes escalares. No trabajaremos las vectoriales.

La definición de ley externa que se ha utilizado se refiere a magnitudes escalares continuas. Si el conjunto numérico que utilizamos es $\mathbb{N}$ en lugar de $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$, habremos definido una magnitud escalar discreta.

2.2. Medida de una magnitud

Medir será el acto por medio del cual se asigna un número a una cantidad de magnitud. Este acto (independientemente del instrumento de medida, contexto y condiciones ambientales), matemáticamente, es una aplicación que relaciona las clases de equivalencia del conjunto cociente anteriormente definido con los números naturales o con los reales no negativos, según el caso.

Formalmente, se llama medida de una magnitud escalar continua $(S/_R\,,*\,,\leq\,,\cdot)$ a cualquier isomorfismo (aplicación biyectiva que conserva las leyes de composición definidas) de semigrupos $m:(S/_R,*)\rightarrow(\mathbb{R}^+\cup\{0\},+)$ que es compatible además con el orden. En el caso de las magnitudes discretas $m:(S/_R,*)\rightarrow(\mathbb{N},+)$.

Por tanto, la medida nos permite relacionar las cantidades de una magnitud escalar con números que, a la vez, se pueden representar por puntos sobre una semirrecta (estos puntos se situarán en el lugar de los números naturales, en el caso de magnitudes discretas, y en todos los puntos de la semirrecta real no negativa, en el caso de continuas).

Las magnitudes llamadas vectoriales, no satisfacen los axiomas de orden que verifican las escalares y, en consecuencia, no se pueden representar por puntos de una recta. Estas magnitudes no se pueden relacionar, por tanto, solo con valores numéricos para poder dar la medida. Además, es necesario tener información sobre la dirección en la que se aplican y sobre su sentido, componentes que no tienen las magnitudes escalares. Ejemplos de este tipo de magnitudes pueden ser la velocidad, aceleración, fuerza...

2.3. Unidad de medida

Dada una magnitud escalar continua $\left(\mathbf{S}/_{\mathbf{R}}, *, \leq, \cdot\right)$ y una medida $\mathbf{m}: \left(\mathbf{S}/_{\mathbf{R}}, *\right) \rightarrow (\mathbb{R}^+ \cup \{\mathbf{0}\}, +)$, se llama ***unidad de medida*** de **m** a la cantidad $[\mathbf{n}] \in \mathbf{S}/_{\mathbf{R}}$ / $\mathbf{m}([\mathbf{n}]) = \mathbf{1}$. Análogamente, se definirá la unidad para las magnitudes discretas.

3. Las magnitudes y la medida en el aula de primaria

3.1. Consideraciones previas

Aunque las cuestiones relacionadas con la medida son consideradas como un conocimiento social, medir una magnitud es un acto que los niños no pueden realizar de una manera sencilla y espontánea y, por eso, es difícil realizar mediciones durante los primeros años de las etapas escolares. Esta dificultad se debe a que la realización del acto de medir lleva aparejadas otras cuestiones, como por ejemplo: estimaciones, clasificaciones, ordenaciones, aplicaciones... Pero esto no impide que los niños y niñas tomen contacto, desde edades tempranas, con situaciones que los lleven a descubrir magnitudes físicas (en la escuela y fuera de ella) y a medirlas.

La medida resulta necesaria para que el alumnado pueda conocer la realidad que le rodea a partir de su cuantificación. Esta les permitirá interpretarla mejor y resolver con mayores garantías de éxito las situaciones problemáticas que encuentren relacionadas con ella.

No se trata de introducir las diferentes unidades con una gran cantidad de nombres y símbolos que solo se trabajan en problemas de lápiz y papel para hacer unos cambios entre ellas sin demasiado sentido. Por el contrario, debemos ofrecer al alumnado situaciones de trabajo en el aula que les permitan descubrir las diferentes magnitudes y las unidades más adecuadas para medirlas, en contextos interesantes que les creen la necesidad de utilizarlas. Además, debemos tener en cuenta las dificultades de los escolares a la hora de conseguir una conservación razonada de las cantidades de diferentes magnitudes y les ayudaremos a construirla progresivamente (Chamorro, 2003).

3.2. Cuadro de capacidades

El trabajo en educación primaria referente al tema de magnitudes y medida, tiene como objetivo contribuir a desarrollar en el alumnado las capacidades que se expresan en el siguiente listado y que tienen como finalidad favorecer el desarrollo de la competencia matemática de los niños y las niñas, además de representar una ayuda para el del resto de competencias de esta etapa.

El orden propuesto para estas capacidades es secuencial, es decir, progresivo y de intensidad de dificultad creciente, excepto la capacidad que se refiere a la resolución e invención de problemas que está presente en todo el trabajo que desarrolla las restantes capacidades:

1. Realizar mediciones de longitud, capacidad y masa, utilizando unidades naturales y arbitrarias, comprobando la relatividad de la medida y descubriendo la necesidad de la existencia de una unidad patrón para realizarlas.
2. Reconocer y utilizar las unidades de longitud, capacidad y masa: metro, decímetro, centímetro, litro y kilogramo.
3. Conocer y utilizar correctamente los múltiplos y submúltiplos del metro, el litro y el kilogramo, estableciendo equivalencias entre ellos.
4. Expresar medidas de longitud, capacidad y masa de forma compleja. Transformar expresiones de medida complejas en incomplejas y viceversa.
5. Identificar el valor de las monedas y billetes de nuestro sistema monetario y utilizarlos para expresar cantidades de dinero concretas.
6. Completar el conocimiento de nuestro sistema monetario, relacionando las monedas y billetes con los números decimales.
7. Comprobar la relatividad de la percepción del tiempo y descubrir la necesidad de una unidad patrón para medirlo.
8. Reconocer y utilizar las unidades de tiempo: horas, medias horas, cuartos de hora, minutos y segundos. Interpretar las horas en el reloj.
9. Expresar medidas de tiempo de forma compleja. Transformar expresiones complejas en incomplejas y viceversa.
10. Reconocer y utilizar las unidades de tiempo: día, semana, mes y año.
11. Realizar mediciones y transportes de ángulos.
12. Introducir la medida de superficies y volúmenes mediante cuadrados y cubos, respectivamente.
13. Introducir el metro cuadrado, el metro cúbico y los respectivos submúltiplos y múltiplos. Utilizarlos para medir superficies planas y volúmenes muy sencillos.
14. Averiguar las unidades adecuadas para medir cantidades de diferentes magnitudes. Realizar estimaciones de algunas cantidades de estas magnitudes.
15. Utilizar con soltura instrumentos de medida.
16. Descubrir las expresiones para calcular las áreas de figuras planas sencillas.
17. Aplicar los conocimientos sobre magnitudes y medida para resolver e inventar problemas.

3.3. Desarrollo de las capacidades

1. Realizar mediciones de longitud, capacidad y masa, utilizando unidades naturales y arbitrarias, comprobando la relatividad de la medida y descubriendo la necesidad de la existencia de una unidad patrón para realizarlas

De forma parecida a la acción de contar, en el alumnado surge la necesidad de medir como solución a situaciones de juego, trabajo, etc. Expresar cantidades de magnitud es una capacidad nueva que van elaborando y que requiere acciones personales de comparación de objetos, de medida, de estimación, de utilización de unidades físicas, hasta llegar a una concreción numérica, a una aplicación inmediata de los números que van aprendiendo.

El conocimiento de diferentes magnitudes, a partir de actividades de comparación de objetos respecto de cada una de ellas, dará paso a la realización de medidas. Las mencionadas actividades se iniciarán de manera experimental en educación infantil, utilizando unidades corporales (palmos, puñados...) y arbitrarias (cuerdas, vasos, piedras...), en un trabajo de discusión y reflexión sobre la validez de las mismas. Posteriormente, se trabajarán las unidades normalizadas o convencionales, y es necesario procurar que surjan como superación de las anteriores.

Para conseguirlo, en 1.º de primaria, se plantearán actividades semejantes a las realizadas en la etapa anterior, que sean susceptibles de provocar el diálogo alrededor de la necesidad de utilizar la misma unidad para cada magnitud. Puede ser que aún no tengan formado el concepto de unidad de medida, ni sepan cómo se utilizan con precisión, se trata solo de un trabajo intuitivo.

Por ejemplo: quieren hacer una merienda y necesitan saber cuánto zumo les hará falta. En un primer momento, se llena una jarra y se cuantifica el contenido con todos los vasos y recipientes que se puedan encontrar por el aula. Si hay de diferentes tipos, algún niño o niña debería decir que, si no se utiliza solo uno y del mismo tipo de los que después se vayan a usar en la merienda, no tendrá sentido este cómputo.

Entonces, en un segundo momento habrá que calcular la medida, pero solo con un vaso.

Esta idea de medida es muy inicial y se trabajará también en los casos de la longitud y la masa, con situaciones semejantes (averiguar la cantidad de cinta que hace falta para marcar las líneas exteriores de un campo de fútbol que están reproduciendo en una cartulina, o la de arena que se necesita para recubrir la superficie de una playa que se está representando en un mural, por ejemplo). En principio, el objetivo que se persigue es solo medir diferentes magnitudes y preparar la mente para el siguiente interrogante:

Si cambiamos la unidad de medida, ¿cambia el resultado?

Es decir, si se cambia el vaso en el que cada persona de la merienda beberá, con una jarra de zumo, ¿tendremos para diferente número de personas? Se tendrá que hacer un trabajo semejante con las otras dos magnitudes mencionadas.

Hemos de intentar llegar a descubrir que, aunque la cantidad de zumo es la misma, el reparto que hacemos de esta cantidad es diferente y los resultados de las medidas que obtenemos no coinciden. Esto ocurría también cuando se hablaba de sistemas de numeración: la cantidad de elementos que agrupábamos era la misma, pero la expresión que se obtenía de esta cantidad era diferente según la base del sistema de numeración utilizada.

Como resultado de toda esta reflexión, la conclusión debe ser que se ha de encontrar una unidad patrón, conocida y aceptada por todo el mundo, para garantizar que el resultado de la medida obtenido sea entendido por otra persona que no se encontraba allí en el momento de hacer la medición y le permita evaluar correctamente la cantidad correspondiente.

2. Reconocer y utilizar las unidades de longitud, capacidad y masa: metro, decímetro, centímetro, litro y kilogramo

Las tres primeras magnitudes a estudiar en el aula de primaria son longitud, capacidad y masa, y este hecho está justificado por la inmersión que existe de las mismas en la vida diaria y por la facilidad de experimentar físicamente con ellas. En casa, en la calle, en su entorno, se habla a menudo de temas relacionados con las mencionadas magnitudes.

Dedicaremos los dos primeros cursos de la etapa a introducir las unidades convencionales fundamentales, metro, litro, kilogramo y el submúltiplo más común de la primera.

Respecto de la *longitud*, al comienzo de la etapa se debe partir de sus conocimientos previos sobre el metro. Seguramente, lo conocerán gracias al entorno familiar y sabrán que se utiliza para medir «cómo es de larga alguna cosa». Esta, pues, será la unidad patrón que se buscaba en la capacidad anterior, e incluso se les debe aclarar que es un consenso, no solo del aula en ese momento, sino de todo el mundo.

Teniendo en cuenta lo anterior, se debe hacer una introducción significativa, con un metro completo que puedan manipular y utilizar. Es necesario presentarlo en soportes físicamente diferentes y comprobar su unicidad. Como ayuda para este trabajo, se pueden utilizar algunos materiales didácticos, como las *reglas flexibles de 1 metro* (figura 40), de diversos colores. Este material ayuda a hacerlos conscientes de la longitud de un metro y les permite utilizarlo para realizar las primeras mediciones. Una característica que tienen las reglas, al ser flexibles, es que permiten medir longitudes que no estén en línea recta.

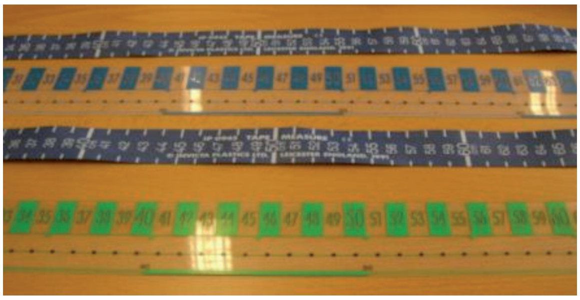

Figura 40. Reglas flexibles de 1 metro (fabricadas por HenBea)

Hay otros materiales que se pueden presentar, como la *regla métrica de pizarra*, la *cinta métrica enrollable*, o el *metro articulado*. Todos representan la idea de unidad a la hora de medir longitudes y han de comprobar que esta no depende de la forma, color, etc., que tenga el instrumento utilizado.

Figura 41. Rueda cuentametros (fabricada por Invicta)

También se puede utilizar la *rueda cuentametros* (figura 41), con la que podremos averiguar longitudes un poco más largas (pasillo, patio, etc.) que resulten complicadas de medir con algunos de los instrumentos mencionados, por la gran cantidad de veces que han de trasladar la unidad de medida y los errores que esto puede ocasionar.

Después, habrá que representar el metro por su símbolo, m, y usarlo para medir diferentes objetos, cuya la longitud sea un múltiplo entero de un metro (la pared del aula, la del pasillo, la pizarra, por ejemplo). Paralelamente a estas actividades de medida, los niños y niñas verbalizarán y representarán con lápiz y papel los resultados obtenidos, expresando de manera correcta los números que indiquen la medida y el símbolo de la unidad utilizada.

Posteriormente, se ha de crear en el aula la necesidad de medir cosas más cortas (longitud de la mesa, de una carpeta, de un libro...), menores que un metro y mayores o iguales que un decímetro y buscarán por el aula algún objeto que les pueda servir como unidad. Si están usando los bloques multibase para trabajar el sistema de numeración y las operaciones, podemos sugerirles que utilicen la longitud de una de las barras de este material como unidad; si no, podemos poner a su alcance palos, cuerdas, etc., que midan un decímetro para que las utilicen como unidad. Para ponerle nombre a esta nueva unidad, les pediremos que la comparen con la que ya conocían, el metro. Al comprobar que se necesitan 10 de estas nuevas unidades para completar un metro, el nombre que se elegirá es decímetro y su símbolo será dm.

Siguiendo en la misma línea, les propondremos que midan objetos más cortos aún (goma de borrar, anchura del lomo de un libro...), y les ofreceremos como unidad la longitud de una de las aristas de los cubos de los bloques multibase o la de otros objetos que midan un centímetro preparados por el docente. De manera análoga al caso del decímetro y para poner nombre a esta nueva unidad, comprobaremos que caben 100 en un metro, y será, por ello centímetro su nombre y cm su símbolo.

Conocidas estas dos nuevas unidades y sus símbolos, las utilizarán por medio de las reglas graduadas usuales para medir diferentes objetos, eligiendo la unidad más adecuada para cada uno de ellos y expresarán, verbalmente y por escrito, los resultados obtenidos.

Para ayudarnos a relacionar el metro con el decímetro y el centímetro, además de los bloques multibase mencionados anteriormente, podemos utilizar la *metrilínea* (figura 42), que es una regla rígida de un metro con un surco central que la recorre, en el que se pueden situar centicubos (cubos de plástico encajables de un centímetro cúbico). Los cubos que se introducen dentro de la regla, sirven para relacionar el metro con el decímetro, si los utilizamos agrupados de diez en diez, y para relacionar el metro con el centímetro, si los consideramos de manera aislada.

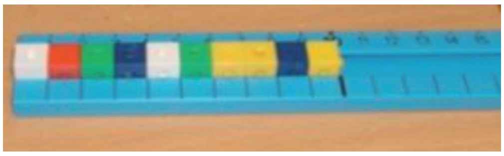

Figura 42. Metrilínea (fabricada por Osmiroid)

En referencia a la *capacidad*, al principio de la etapa, también pueden saber que hay una cosa llamada litro, y de manera análoga al caso del metro, es la unidad consensuada que se usa per a medir ahora otra magnitud, «cuánto cabe en un recipiente».

Se presenta con diversos envases reales que midan un litro y que puedan traer de casa: *brik* de leche, botella de agua, de refresco, de batido..., y se comprueba que todos tienen la misma capacidad. Además de los recipientes reales, podemos utilizar materiales estructurados específicos para este trabajo, como por ejemplo el material *kit de litro* (figura 43) compuesto por recipientes de diversas formas (cilindro, ortoedro, tronco de cono, cubo, prisma triangular), pero que todos miden un litro. Este material cuenta también con un cilindro de medio litro de capacidad, que permite comprobar la igualdad de las capacidades de los otros recipientes y, por tanto, la conservación de la cantidad al transvasar materiales de un recipiente a otro.

Figura 43. Kit de litro (fabricado por Invicta)

También existen diferentes conjuntos de *vasos graduados,* que son recipientes de distintas capacidades, de los que utilizaremos en este momento solo los de un litro, para comprobar que tienen todos la misma capacidad aunque no la misma forma.

Después, habrá que representar el litro por su símbolo, l o L, y usarlo para medir cantidades de líquidos que caben en diferentes recipientes, cuya capacidad sea un múltiplo entero de un litro (botellas de agua de dos litros, garrafas de cinco, de ocho litros, etc.). Acompañando la realización de estas actividades de medida, los niños y niñas verbalizarán y representarán por escrito los resultados de las mismas, expresando de manera correcta los números que indican la medida y el símbolo de la unidad utilizada.

Con respecto a la *masa*, seguiremos el mismo procedimiento. En 1.^{er} curso de primaria saben que hay algo llamado kilogramo que sirve para medir «cuánto pesa una cosa». Análogamente a las magnitudes anteriores, será esta la unidad patrón para la masa.

En un primer momento, se tendrán que llevar al aula objetos que pesen un kilogramo y compararlos (un paquete de azúcar, de macarrones, de arroz...). Para realizar estas comparaciones utilizaremos *balanzas de plástico* (figura 44) fácilmente manipulables e indicadas para infantil o los primeros cursos de primaria, con cubetas profundas que permiten comparar, además de los sólidos, masas de líquidos o áridos.

Figura 44. Balanza de plástico (fabricada por Osmiroid)

Para completar la construcción de la idea de kilogramo, será necesario utilizar balanzas con pesas convencionales. Un ejemplo podría ser la balanza *Vulcano* y sus pesas (figura 45).

Figura 45. Balanza Vulcano de 2 kg (fabricada por Vulcano)

Además de éstas, se pueden utilizar otros conjuntos de pesas como las que se muestran en la figura 46. El alumnado deberá comprobar la igualdad de masa en las diversas pesas de un kilogramo para asegurar la unicidad de esta unidad.

Figura 46. Pesas de hierro (fabricadas por Vulcano)

Después, representaremos el kilogramo por su símbolo, kg, y lo usaremos para medir objetos cuya masa sea un múltiplo entero de un kilogramo (sacos de tierra, de patatas, por ejemplo). Al realizar estas actividades de medida, los niños y niñas verbalizarán y representarán en el papel los resultados obtenidos, expresando de manera correcta los números que indican la medida y el símbolo de la unidad utilizada.

Una vez adquiridas las unidades fundamentales y atendiendo al extendido uso social de sus mitades o cuartas partes, se puede introducir el medio metro, medio litro o medio kilogramo y el cuarto de litro o de kilogramo, si resultan necesarios en alguna situación que se esté trabajando en el aula. En estos casos se dispondrá de objetos, recipientes o paquetes de la vida real (la anchura de algunas mesas escolares, botellas de un cuarto de litro de zumo, paquetes de medio kilogramo de macarrones...) que midan las partes mencionadas y se compararán con las unidades fundamentales. El objetivo será llegar a comprobar que son necesarias dos o cuatro de las nuevas unidades para completar las fundamentales.

A continuación, podemos ofrecerles materiales didácticos que representen las nuevas unidades: reglas de medio metro, recipientes de medio o de cuarto de litro, pesas de medio o de cuarto de kilogramo, para que comprueben otra vez las relaciones mencionadas anteriormente.

A partir de las actividades realizadas, introduciremos los nombres de estas unidades y su simbolización, que utiliza expresiones formalmente desconocidas para los niños y niñas, pero que han podido ver en alguna ocasión, como son las fracciones 1/2 o 1/4. Así, simbolizaremos 1/2 m, 1/2 l, 1/2 kg, 1/4 l, 1/4 kg.

Completaremos el conocimiento del medio metro, relacionándolo con el decímetro y el centímetro, comprobando por medio de la medida que cinco decímetros o cincuenta centímetros son medio metro.

A lo largo de los mencionados dos primeros cursos de la etapa (aunque son experiencias que se pueden alargar a cursos posteriores) y con la finalidad de ayudar al alumnado a llegar a la conservación de la cantidad, se realizarán diferentes actividades referentes a las tres magnitudes en las que se utilizarán las unidades de medida trabajadas y, si es necesario, algunas arbitrarias, para llevar a cabo las comprobaciones pertinentes. Se desarrollarán actividades en las que no se modifique la cantidad, como por ejemplo: plegar una cuerda que estaba estirada, midiendo la longitud en los dos casos y comparando los resultados; cambiar una cantidad de agua de un recipiente a otro, midiéndola en ambos casos y comparando de nuevo; hacer una bola con toda la plastilina de una pastilla y pesar tanto la bola como la pastilla para observar los resultados. Y otras en las que sí se modifique que, respectivamente a las anteriores, pueden ser: medir la longitud de una cuerda, cortarle un trozo y medirla de nuevo, comparando los resultados; medir la cantidad de agua que haya en un recipiente, añadir un poco más y volver a medir; pesar una tableta de plastilina, quitarle un pellizco y pesarla otra vez. La comparación de los resultados de las parejas de actividades propuestas para cada magnitud, permitirá dar los primeros pasos con el alumnado para que, a lo largo de la etapa de primaria, lleguen a concluir que la cantidad de una determinada magnitud solo cambiará si añadimos o quitamos otra cantidad de la misma magnitud, y no cuando aquella se somete a un cambio de disposición espacial, de recipiente, o de forma, por ejemplo.

3. Conocer y utilizar correctamente los múltiplos y submúltiplos del metro, el litro y el kilogramo, estableciendo equivalencias entre ellos

Al inicio del 3.er curso, se repasa la idea de metro, de litro y de kilogramo como unidades fundamentales de longitud, capacidad y masa, respectivamente, con diferentes materiales que además permitan comprobar la unicidad de las mismas. Se repasa también el decímetro y el centímetro como los primeros submúltiplos del metro.

Para completar los conjuntos de unidades de las tres magnitudes y enlazar con el trabajo de los dos cursos anteriores, introduciremos a lo largo de los restantes cursos de la etapa los submúltiplos y los múltiplos en cada una de ellas.

Longitud

Se introduce un nuevo submúltiplo del metro a partir de la necesidad de medir alguna cosa de menor longitud que el centímetro (el grosor de una caja de CD, de una plancha de corcho...), utilizando como unidad la distancia más corta que encuentran entre las marcas de las reglas usuales. De la misma manera que en los submúltiplos conocidos, el nombre de esta unidad surge de su comparación con el metro, al comprobar que hacen falta mil para completar uno. Será, por tanto, milímetro su nombre y mm su símbolo.

Se relacionará también con el decímetro y el centímetro, comprobando al compararlas que:

$$10 \text{ mm} = 1 \text{ cm} \qquad 100 \text{ mm} = 1 \text{ dm}$$

Conocida esta nueva unidad y su símbolo, la usarán para medir diferentes objetos cuya longitud sea un múltiplo entero de un milímetro y expresarán, verbalmente y por escrito, los resultados obtenidos, utilizando de manera correcta los números que indican la medida y el símbolo correspondiente de la unidad.

Cuando, a partir del 4.º curso, los alumnos conozcan las fracciones y los números decimales, podremos expresar los submúltiplos del metro utilizando las expresiones siguientes:

$$1 \text{ dm} = 0{,}1 \text{ m} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}} \text{ m}$$

$$1 \text{ cm} = 0{,}01 \text{ m} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{100}} \text{ m}$$

$$1 \text{ mm} = 0{,}001 \text{ m} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1000}} \text{ m}$$

y entender el decímetro, el centímetro y el milímetro como el resultado de dividir un metro en 10, 100 o 1000 partes iguales, respectivamente, o lo que es lo mismo, como una décima, una centésima o una milésima parte del metro.

Si las longitudes que necesitan expresar son mucho más largas que un metro (la distancia entre dos poblaciones, entre la Tierra y la Luna...), se hace necesario introducir nuevas unidades más grandes. Empezaremos por el kilómetro al ser la que se utiliza socialmente para expresar estas distancias. La introduciremos como una unidad equivalente a mil metros y su símbolo será km.

Como con esta nueva unidad no pueden hacer mediciones de forma experimental, propondremos al alumnado que busque distancias entre diferentes poblaciones, astros, etc., y que observen cómo las expresiones encontradas utilizan los números y el símbolo de la unidad.

Para completar la secuencia de múltiplos del metro, respetar la estructura decimal del sistema métrico y por simetría con los submúltiplos, introduciremos también el decámetro y el hectómetro, como las unidades equivalentes, respectivamente, a diez y cien metros, así como los símbolos dam y hm, y sus relaciones con el metro y el kilómetro.

1 hm = 100 m	1 dam = 10 m
10 hm = 1 km	100 dam = 1 km

Para dar sentido a estas nuevas unidades, les animaremos a encontrar situaciones reales en las que se utilicen (atletismo, natación, mediciones topográficas...).

También ahora, cuando conozcan las fracciones y los decimales, podrán utilizar estas expresiones numéricas para representar las mencionadas relaciones, de manera análoga a lo que hemos comentado para los submúltiplos.

Capacidad

A partir del conocimiento del litro, y de forma semejante al trabajo desarrollado con la longitud, iremos introduciendo los submúltiplos de la unidad fundamental para utilizarlos en la medida de diferentes líquidos. Llevaremos al aula diversos recipientes cuya capacidad esté indicada en centilitros o mililitros (botellas de abono para plantas, jeringuillas, cucharas de jarabe...), fijándonos en el símbolo cl o ml respectivamente. Pondremos al alcance de los niños materiales didácticos, como los vasos graduados de la figura 47, para que puedan hacer comparaciones y mediciones, y para comprobar que hacen falta 100 cl o 1000 ml para llenar 1 l.

Figura 47. Vasos graduados (fabricados por Vit Lab)

Para completar la secuencia de submúltiplos del litro y respetar la estructura decimal del sistema métrico, introduciremos también el decilitro como la unidad que hace falta repetir diez veces para llenar un litro, así como su símbolo, dl, y las relaciones con los submúltiplos conocidos del litro:

10 dl = 1 l	1 dl = 10 cl	1 dl = 100 ml

Usarán estas unidades para medir la capacidad de diferentes recipientes y expresarán verbalmente y por escrito los resultados obtenidos, utilizando los símbolos de las distintas unidades.

De manera análoga al caso de la longitud, cuando conozcan las fracciones y los números decimales, podrán expresar los submúltiplos del litro utilizando las expresiones siguientes:

$$1 \text{ dl} = 0{,}1 \text{ l} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}} \text{ l}$$

$$1 \text{ cl} = 0{,}01 \text{ l} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{100}} \text{ l}$$

$$1 \text{ ml} = 0{,}001 \text{ l} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1000}} \text{ l}$$

y entender el decilitro, el centilitro y el mililitro como el resultado de dividir un litro en 10, 100 o 1000 partes iguales, respectivamente, o lo que es lo mismo, como una décima, una centésima o una milésima parte del litro.

Cuando las capacidades que necesiten expresar sean mucho más grandes que un litro, será necesario introducir nuevas unidades mayores que este (la capacidad de un depósito de agua, de una piscina, de la cisterna de un camión...). Por similitud con lo que se ha trabajado en el caso de la longitud, estas nuevas unidades serán: decalitro, hectolitro y kilolitro, que equivalen respectivamente a diez, cien y mil litros y se simbolizan con dal, hl y kl:

$$1 \text{ dal} = 10 \text{ l} \qquad 1 \text{ hl} = 100 \text{ l} \qquad 1 \text{ kl} = 1000 \text{ l}$$

De manera semejante a la magnitud anterior, los animaremos a encontrar situaciones reales en las que se utilicen estos múltiplos del litro (depósitos de vino, de aceite, garrafas de líquidos...).

De nuevo, cuando conozcan las fracciones y decimales, podrán utilizar estas expresiones numéricas para representar las mencionadas relaciones, de acuerdo con lo que hemos explicado para los submúltiplos.

Masa

Después de repasar el kilogramo y de manera análoga al trabajo desarrollado con la longitud y la capacidad, hay que introducir los submúltiplos de la unidad fundamental para utilizarlos en la medida de diferentes pesos. Llevaremos al aula diversos envases, cuyo peso esté indicado en gramos (macarrones, lentejas, azúcar...), fijándonos en el símbolo g y juntaremos varios de ellos hasta conseguir equilibrar en una balanza una pesa de un kilogramo, comprobando a continuación que hemos necesitado sumar 1000 g para igualarla. De la relación entre estas dos unidades, se deduce fácilmente el nombre gramo para referirse a la más pequeña de ellas.

Completaremos la secuencia de submúltiplos del kilogramo, respetando la estructura decimal del sistema métrico, introduciendo también el decagramo y el hectogramo como las unidades que hemos de repetir cien y diez veces respectivamente para equilibrar un kilogramo, así como sus símbolo, dag y hg, y las relaciones que tienen con el gramo:

$$1 \text{ dag} = 10 \text{ g} \qquad\qquad 1 \text{ hg} = 100 \text{ g}$$

Observaremos que, aunque estas unidades son submúltiplos del kilogramo (unidad fundamental de la masa en el Sistema Internacional), las expresiones que utilizamos para representarlas tienen como referente al gramo, como si este fuese la unidad central de la magnitud (herencia del Sistema Cegesimal).

Análogamente a las magnitudes anteriores, cuando conozcan las fracciones y los números decimales, podremos expresar los submúltiplos del kilogramo utilizando las expresiones siguientes:

$$1 \text{ hg} = 0{,}1 \text{ kg} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}} \text{ kg}$$

$$1 \text{ dag} = 0{,}01 \text{ kg} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{100}} \text{ kg}$$

$$1 \text{ g} = 0{,}001 \text{ kg} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1000}} \text{ kg}$$

y entender el hectogramo, el decagramo y el gramo como el resultado de dividir un kilogramo en 10, 100 o 1000 partes iguales respectivamente, es decir, como una décima, una centésima o una milésima parte del kilogramo.

Como el gramo era la unidad fundamental de la masa en el Sistema Cegesimal, aunque no lo es en el Sistema Internacional, hay también submúltiplos del gramo que el alumnado debe conocer. Empezaremos por el miligramo ya que podemos encontrarlo frecuentemente en contextos reales asociados a medicamentos. A pesar de la gran dificultad para manipular esta unidad en el aula de primaria, la definiremos como la masa que resulta de dividir un gramo en mil partes iguales. Será, por tanto, mg su símbolo y tendremos las expresiones:

$$1 \text{ mg} = 0{,}001 \text{ g} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1000}} \text{ g}$$

Completaremos la secuencia de submúltiplos del gramo, respetando la estructura decimal del sistema de unidades, introduciendo también el decigramo y el centigramo como las masas que resultan de dividir un gramo en diez y cien partes iguales, respectivamente, siendo los símbolos, dg y cg, y cumpliéndose las expresiones:

$$1 \text{ dg} = 0{,}1 \text{ g} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}} \text{ g} \qquad\qquad 1 \text{ cg} = 0{,}01 \text{ g} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{100}} \text{ g}$$

Dada la dificultad para hacer mediciones con estas unidades en el aula de primaria, propondremos al alumnado que busque situaciones reales en las que se usen (informaciones de medicinas, metales valiosos, abonos de bonsáis...).

Un múltiplo del kilogramo muy importante y que también se trabaja por el extendido uso social que tiene es la tonelada. Esta unidad tiene un valor de 1000 kg y se simboliza por t. Pediremos a los niños y niñas que encuentren esta unidad en diferentes contextos: peso de una ballena, de un elefante, de un dinosaurio, carga de un camión, de un barco, de un tren...

Hacia el final del 4.º curso de primaria, se podrían reflejar todas las unidades trabajadas hasta el momento en el siguiente cuadro resumen:

LONGITUD	mm	cm	dm	m	dam	hm	km	
CAPACIDAD	ml	cl	dl	l	dal	hl	kl	
MASA	mg	cg	dg	g	dag	hg	kg	t

Para conseguir de manera definitiva la conservación razonada de las cantidades de longitud, capacidad y masa, y como complemento del trabajo realizado en los dos primeros cursos de la etapa, en 3.º y 4.º pondremos en práctica con los niños y niñas actividades semejantes a las propuestas en la capacidad anterior. Para hacer las comprobaciones pertinentes podremos utilizar todas las unidades de medida que se han trabajado.

También se pueden presentar en clase aquellas unidades autóctonas (hanegada, arroba de masa o de capacidad...) que los alumnos hayan podido oír en su corta vida y relacionarlas con las unidades del Sistema Internacional.

4. Expresar medidas de longitud, capacidad y masa de forma compleja. Transformar expresiones de medida complejas en incomplejas y viceversa

Esta capacidad ese desarrollará a partir de 4.º curso, después de que el alumnado conozca los números decimales.

Cuando realizan experiencias de medida, pueden expresar los resultados de dos maneras bien diferenciadas. De forma compleja, utilizando diferentes unidades, por ejemplo **3** m **8** dm **1** cm y de manera incompleja (también llamada simple), expresándolos solo con una, adecuando el número a la unidad, por ejemplo 3,81 m. Esta última expresión puede variar si se eligen otras unidades para representar el resultado. Así, por ejemplo, podríamos escribir 38,1 dm, 381 cm, 3810 mm, 0,381 hm, 0,00381 km. Se insistirá mucho en el hecho de que no estamos representando diferentes cantidades aunque utilicemos distintas escrituras. La cantidad es la misma y se conserva independientemente de la manera de expresarla.

Es evidente que para poder desarrollar adecuadamente el trabajo que permite transformar unas expresiones en otras, los alumnos han de dominar las diferentes unidades de medida estudiadas y las relaciones decimales entre ellas.

5. Identificar el valor de las monedas y billetes de nuestro sistema monetario y utilizarlos para expresar cantidades de dinero concretas

El sistema monetario que adopta una comunidad de personas no es fruto de una propiedad física de los objetos que tienen a su alrededor, como pasaba en las magnitudes anteriores, aunque se estudia junto a ellas porque se comporta como si lo fuera. Es fruto de un convenio, es un acuerdo que se toma para otorgar valor a los diferentes «elementos».

El sistema monetario actual posee cantidades fraccionarias centesimales y respeta las reglas de funcionamiento del Sistema de Numeración Decimal. Cuando el alumnado tenga conocimientos sobre fracciones y decimales, el trabajo se podrá normalizar, pero en los primeros cursos de primaria, aunque no los conozcan, hay que trabajar el sistema monetario por la necesidad de adaptarse al medio y a la cotidianidad del dinero.

Sin embargo, será necesario considerar ciertos aspectos de manera especial a la hora de trabajar con el alumnado estos contenidos:

- Las unidades: introduciremos el euro como la unidad del sistema monetario y presentaremos el céntimo, no como la centésima parte del euro sino como «aquello que, juntando 100, completa 1 €».
- La coma: es la marca que se debe colocar para delimitar cuál es la parte del número que corresponde a los euros y cuál la que corresponde a los céntimos, es decir, a la izquierda de la coma los euros enteros y a la derecha, los céntimos.
- Las operaciones: cuando se necesite operar con dinero y mientras no se conozcan los números decimales y las operaciones con ellos, se puede proceder, si es necesario, operando por separado los números que representan los euros y los que se refieren a los céntimos, y componiendo después los resultados.

Se empezará en el 1.^er^ curso de la etapa introduciendo las monedas de céntimos (1, 2, 5, 10, 20 y 50) y de euros (1 y 2), incorporando poco a poco los billetes de 5 €, 10 €, 20 € y 50 €. En 2.º curso de primaria se introducirán los de 100 €, 200 € y 500 €.

Para reforzar los cálculos mentales con el valor de las monedas, podemos ayudarnos del *eurodominó* (figura 48), que asocia cantidades numéricas de dinero con la representación del mismo utilizando monedas.

Figura 48. Eurodominó (fabricado por HenBea)

Para trabajar las relaciones entre monedas y billetes, podemos realizar en clase actividades de compraventa u otros cálculos con dinero (que verbalizaremos) utilizando como ayuda el material de plástico que reproduce el sistema monetario con bastante fidelidad y que se muestra en la imagen de la figura 49.

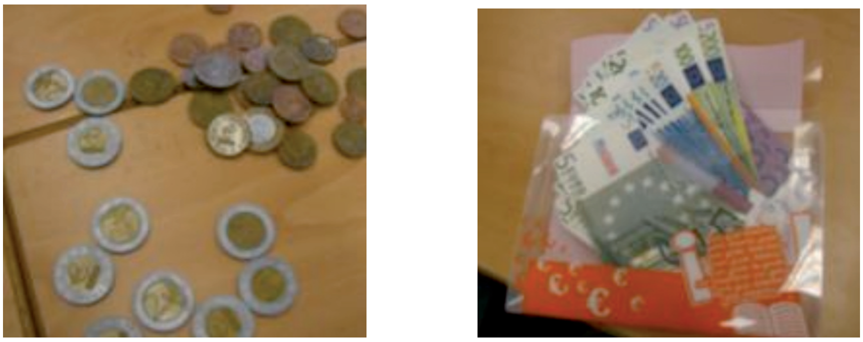

Figura 49. Monedas y billetes (fabricados por Miniland)

Mientras se realizan estas actividades, se trabajará con lápiz y papel para reflejar las operaciones implicadas en ellas (lista de la compra, tique de gastos...). Por ejemplo, si necesitan saber cuánto dinero han de reunir para comprar dos juguetes que han visto en un catálogo, sumarán los precios correspondientes. Cuando la parte decimal del resultado no supere los 100 céntimos, no habrá mucho conflicto para operar como si fuera una adición de números naturales, y en el momento de colocar la coma en el resultado, por imitación de los sumandos, quedaría en el lugar correspondiente. El problema puede aparecer en el caso contrario, si los precios de los juguetes que quiere comprar un niño o una niña son 42,75 € y 12,91 €, como podemos ver en el ejemplo numérico siguiente. Se usará la manera de operar de la derecha, separando los euros de los céntimos cuando el alumnado lo necesite y expresarán el resultado final de manera correcta:

$$\begin{array}{r} \textbf{42,75 €} \\ + \ \textbf{12,91 €} \\ \hline \textbf{55,66 €} \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 42\text{€} & 75 \textit{ céntimos} \\ +\ 12\text{€} & 91 \textit{ céntimos} \\ \hline \end{array}$$

$$\underbrace{54\text{€} \ \underbrace{\underbrace{166 \textit{ céntimos}}_{1\text{€ } 66\textit{céntimos}}}_{\textit{Se reagrupa}}}_{55\text{€ } 66\textit{céntimos} = 55{,}66\text{€}}$$

Para comprobar si el dinero que les devuelven a la hora de comprar es el correcto o si necesitan saber cuánto les quedaría después de haber comprado un juguete con un dinero ahorrado u otras situaciones semejantes, utilizarán sustracciones. Al resolverlas respetaremos los niveles operatorios *sin llevar* y *llevando* propuestos para esta operación con números naturales y, en caso de ser necesario separar los euros de los céntimos, lo haremos análogamente al caso de la adición.

En 3.º de primaria, no hay que introducir nada nuevo, se repasa lo que se ha visto en los dos cursos anteriores respecto de monedas y billetes.

En situaciones cotidianas recreadas en el aula se pueden encontrar con multiplicaciones y divisiones con decimales que se refieren a cantidades de dinero. Por ejemplo, si organizamos un quiosco en clase y hacemos actividades de comprar golosinas, puede resultarles necesario multiplicar el precio que vale una de ellas por la cantidad que hayan elegido comprar. Y todo esto antes de pagar, porque deben saber si llevan suficiente dinero o no. Harán también divisiones, cuando para preparar una actividad de clase, cada grupo de cinco niños y niñas tenga que aportar un dinero determinado y necesiten averiguar la cantidad que deberá traer cada uno, por ejemplo. En todas las situaciones de estos tipos tendrán que separar, si es necesario, el número de euros y el de céntimos para hacer las operaciones y unificar finalmente los resultados obtenidos para expresar de manera correcta la cantidad final.

6. Completar el conocimiento de nuestro sistema monetario, relacionando las monedas y billetes con los números decimales

En 4.º de primaria, y aprovechando que se están trabajando los números decimales, se puede aplicar este conocimiento a las actividades con dinero, para dar contenido matemático a las operaciones intuitivas que se hacían anteriormente.

Ya se puede introducir el céntimo como la centésima parte del euro y algunas monedas se pueden presentar entonces como la décima o la centésima parte de otras.

En los dos últimos cursos de la etapa no se introduce nada nuevo respecto del sistema monetario. Se utiliza cuando es necesario para resolver situaciones problemáticas, que en algunos casos pueden referirse al cambio de moneda de euros a dólares o libras esterlinas y viceversa.

7. Comprobar la relatividad de la percepción del tiempo y descubrir la necesidad de una unidad patrón para medirlo

A diferencia de la longitud, la masa y la capacidad, la magnitud *tiempo* no se puede experimentar físicamente, pero hay que trabajarla porque está siempre presente en la vida diaria. El conocimiento del tiempo por el alumnado avanza más lentamente que el de las otras tres magnitudes mencionadas. En educación infantil se han trabajado diferentes coordenadas temporales, como por ejemplo: mucho tiempo, poco tiempo, de día, de noche, antes, ahora, después, por la mañana, por la tarde, por la noche, ayer, hoy, mañana... Además, se trabaja con secuencias en las que ordenan temporalmente dibujos sencillos.

Con cinco años ya pueden trabajar con aproximaciones a la cuantificación del tiempo usando relojes de arena, de agua, de velas... en los que se ve cómo se puede comparar de manera objetiva la duración de dos o más situaciones diferentes que no sean simultáneas. La ayuda de instrumentos ajenos a nosotros se hace necesaria porque, según el estado de ánimo que tengamos, el tiempo parece que pasa de manera diferente. Pero las actividades con estos instrumentos no nos permiten saber cuánto tiempo ha pasado, solo si una situación o un período ha durado más o menos que otro. Para responder a la pregunta esencial, necesitamos medir el tiempo, y para hacerlo nos hace falta una unidad patrón: la hora.

En 1.er curso de primaria, conviene recordar el trabajo realizado para la magnitud tiempo en educación infantil, reforzando las diferentes nociones de orientación temporal, ordenando secuencias más complicadas (con más escenas que en la etapa anterior, ver figura 50) y retomando el estudio de la hora como unidad de medida del tiempo.

Figura 50. Secuencias lógicas (fabricado por Trusva)

8. Reconocer y utilizar las unidades de tiempo: horas, medias horas, cuartos de hora, minutos y segundos. Interpretar las horas en el reloj

Como consecuencia de la capacidad anterior, tendremos que continuar con el conocimiento de la hora**.** En las aulas de primaria, nos ayudaremos de diferentes tipos de relojes analógicos. La figura 51 corresponde al reloj de engranajes, cuyas manecillas no funcionan independientemente: si la larga de una vuelta completa a la esfera, la corta se desplazará de un número al siguiente.

Figura 51. Reloj de engranajes (fabricado por Kalmarsund)

Hemos de conseguir que identifiquen la duración de una hora con el tiempo que tarda la aguja larga en dar una vuelta completa a la esfera del reloj, o la corta en moverse de un número al siguiente. Representaremos simbólicamente la hora con una h.

Relacionado con las actividades del aula, en diferentes momentos de la jornada escolar, trabajaremos la lectura, la representación gráfica y la escritura literal de horas en punto (son las 10 horas en punto, son las 4 horas de la tarde…). Podemos utilizar, para ayudarnos, materiales como los relojes escolares de madera, que constan de un reloj grande para el docente y veinte más pequeños para el alumnado (figura 52).


Figura 52. Relojes escolares de madera (fabricados por Trusva)

El proceso de conocimiento de la hora va emparejado con el del día como un período de 24 horas. Por este motivo, será necesario matizar algunas de las representaciones horarias trabajadas hasta este momento. Como usualmente en los relojes analógicos solo se utilizan 12 números para indicar las horas, tendremos que expresar de alguna manera si nos encontramos en las primeras doce horas o en las segundas. En un contexto más familiar o coloquial, se expresará la diferencia acompañando la hora de las expresiones «de la mañana, de la tarde o de la noche». En otros contextos (visitas médicas, transportes, espectáculos, electrodomésticos...) necesitarán saber que las horas posteriores a las 12 del mediodía se indican con los números 13, 14... hasta 24. Es importante conocer la existencia de relojes escolares con la doble numeración (figura 53) para ayudarnos a trabajar en el aula las dos posibilidades de nombrar las horas.

Figura 53. Reloj escolar (fabricado por Goula)

A partir de conocer cuánto dura una hora y trabajando la duración del tiempo en situaciones reales (por ejemplo, averiguar cuánto tiempo están en el patio), pueden surgir preguntas del tipo: y si la aguja larga hace solo una parte del recorrido, ¿cuánto tiempo ha pasado? Es el momento de introducir la media hora, que se identificará con el tiempo que tarda la mencionada aguja en recorrer la mitad de la esfera del reloj, representándola como 1/2 h (análogamente a las magnitudes anteriores) y comprobando su relación con una hora.

De manera semejante a lo comentado para la hora, hay que trabajar la lectura de las medias horas en el reloj (son las nueve y media, las dos y media...), y también su representación y su escritura, además de otros tipos de expresiones cotidianas: hora y media, falta media hora, después de media hora...

Posteriormente, y por la necesidad de medir cantidades de tiempo menores que media hora (por ejemplo, el tiempo que se dedica al almuerzo en el patio), en 2.º curso de primaria se introducirá el cuarto de hora, que se asociará con el tiempo que tarda la aguja larga en recorrer una de las cuatro partes iguales de la esfera del reloj. Esta nueva unidad se representará por 1/4 h y se relacionará con la hora y la media hora.

En la línea de trabajo de las unidades anteriores, procederemos a la lectura de los cuartos de hora en el reloj analógico (son las nueve y cuarto), su representación gráfica y su escritura literal. Hemos de tener en cuenta la dificultad especial que para el alumnado presenta esta nueva unidad cuando se trata de expresar que falta un cuarto de hora para la hora en punto siguiente (son las nueve menos cuarto). Otros tipos de expresiones que trabajaremos también son: hora y cuarto, falta un cuarto de hora, después de tres cuartos de hora...

Continuando con el conocimiento de unidades de tiempo menores que las trabajadas hasta ahora, y avanzado el 2.º curso de primaria, se introducirá el minuto (por ejemplo, para medir el tiempo que les puede costar cantar una canción). Necesitaremos un reloj analógico que disponga de manecilla de los segundos e identificaremos el minuto con el tiempo que tarda esta en dar una vuelta completa a la esfera del reloj y lo representaremos simbólicamente por min. Además de utilizar cualquier reloj analógico con aguja de los segundos, nos podemos ayudar del reloj gigante (figura 54) que es fácilmente manipulable por los alumnos y permite la instalación de una batería para funcionar autónomamente.

Figura 54. Reloj gigante (fabricado por HenBea)

También se debe trabajar la lectura, la representación gráfica y la escritura de los minutos en el reloj analógico (son las nueve y cinco minutos, son las nueve menos veinte minutos), y relacionar esta unidad con la hora, comprobando en alguno de los relojes mencionados que hacen falta 60 minutos para completarla, así como con la media hora y el cuarto de hora:

60 min = 1 h   30 min = 1/2 h   15 min = 1/4 h

Hacia el final de 2.º curso o en 3.º de primaria hay que fijar definitivamente la lectura de los minutos en los relojes analógicos e introducir también los relojes digitales, que utilizan solo los números para representar el tiempo. Estos relojes expresan la información horaria mediante dos o tres conjuntos de números separados por dos puntos, a la izquierda de los cuales se sitúa la hora, inmediatamente a la derecha, los minutos y a veces más a la derecha, los segundos.

Es posible que en un primer momento sean más sencillos de utilizar por los niños y niñas, porque solo tienen que leer los números. Lo que no parece tan evidente es que de esta lectura se pueda deducir una comprensión correcta de lo que supone la fracción de hora que ha transcurrido en relación con los minutos leídos. Esta idea la representan mucho más claramente los relojes analógicos y por ello se justifica su introducción en el aula de primaria antes que estos otros.

Es necesario leer las horas en los dos tipos de relojes, comparando las diferentes maneras de representarlas y consiguiendo que el alumnado las comprenda e interprete correctamente, insistiendo especialmente en situaciones del tipo «son las 6 y 20 minutos de la mañana» o «son las 6 menos 20 de la tarde» en el reloj analógico. La interpretación de las horas debe funcionar en un sentido (añadiendo minutos) y en otro (descontando minutos). Si el reloj es digital, entonces la información se traduce en leer únicamente «son las 6:20 h» o «son las 17:40 h». Han de saber las dos maneras de expresar el tiempo y relacionarlas. Podemos ayudarles con el dominó del reloj digital, que se muestra en la figura 55, en el que el alumnado debe asociar expresiones de la misma hora en formato analógico y digital.

Figura 55. Dominó del reloj digital (fabricado por Taskmaster Limited)

A veces, los relojes digitales solo utilizan del 1 al 12 para representar las 24 horas del día. En este caso los números se acompañan de dos letras: a. m. (que se refieren a las palabras latinas *ante meridium*), para representar las primeras 12 horas del día, o p. m. (*post meridium*), para las segundas 12 horas. Como esta explicación puede ser un poco complicada para el aula de primaria, se puede optar por la fórmula siguiente para que puedan comprender y recordar estas expresiones:

- Si es antes del mediodía: a. m.
- Si es posterior al mediodía: p. m.

Siguiendo con las unidades que miden intervalos de tiempo menores que una hora, avanzado el 3.er curso de primaria, se presentará el segundo. Con los relojes analógicos, habrá que utilizar de nuevo uno que disponga de segundero e identificar el segundo con el tiempo que tarda esta manecilla en recorrer el espacio entre dos marcas de los minutos; mientras que en el digital, un segundo será el tiempo que tarda el número de los segundos en cambiar al siguiente. Lo representaremos simbólicamente por s y lo relacionaremos con el minuto y la hora:

$$60 \text{ s} = 1 \text{ min} \qquad 3600 \text{ s} = 60 \text{ min} = 1 \text{ h}$$

Utilizarán esta unidad para medir diferentes intervalos de tiempo y expresarán verbalmente y por escrito los resultados obtenidos y el símbolo.

Insistiremos en que estas primeras unidades funcionan según el Sistema Sexagesimal, aunque en las posteriores las horas ya no se relacionan con los días con el mismo sistema, y mucho menos los días y los meses o los meses y los años.

En 5.º de primaria y por su uso frecuente en el mundo del deporte, tan próximo muchas veces al entorno del alumnado, sería conveniente introducir unas nuevas unidades de medida del tiempo, la décima, la centésima y la milésima de segundo, imperceptibles por los sentidos humanos y que resultan de dividir un segundo en 10, 100 o 1000 partes iguales respectivamente. Esta justificación es la que puede utilizarse para dar pie a otra, de ámbito menos lúdico pero totalmente necesaria, el uso de estas unidades en el mundo científico.

La dificultad más importante a la hora de trabajar estas fracciones de segundo se encuentra en el hecho de que, a partir de los segundos, se abandona el Sistema Sexagesimal y se funciona con el Sistema Decimal. Se representan con cifras decimales de la cantidad de segundos. Así:

1 décima = 1/10 s = 0,1 s
1 centésima = 1/100 s = 0,01 s
1 milésima = 1/1000 s = 0,001 s

9. Expresar medidas de tiempo de forma compleja. Transformar expresiones complejas en incomplejas y viceversa

El procedimiento es semejante al trabajado anteriormente para las magnitudes longitud, capacidad y masa. La dificultad añadida es la combinación de los Sistemas Sexagesimal y Decimal, por eso es un poco más complicado y se introducirá en los últimos cursos de primaria.

A partir de actividades en las que el alumnado necesite medir intervalos de tiempo y expresar la duración total, podemos encontrar diferentes maneras de representar el tiempo. En unos casos utilizaremos una sola unidad y en otros más de una. Será necesario saber convertir un tipo de expresiones en otro, para poder operar con ellas.

Cuando haya que pasar una cantidad de tiempo expresada de manera incompleja a compleja, por ejemplo 3,5832 h, procederemos de la siguiente manera: como la unidad utilizada es la hora, la parte entera del número, es decir 3, será las horas de la expresión compleja. La fracción de hora restante 0,5832 h, se multiplica por 60 para averiguar los minutos y el resultado es 34,992 min. Por tanto, en la expresión compleja nos quedan 34 min y la fracción 0,992 min, se vuelve a multiplicar por 60 para saber los segundos, con un resultado de 59,52 s. Con todo esto, la expresión final en forma compleja es: 3 h 34 min 59,52 s.

Si, por el contrario, disponemos de una cantidad expresada de forma compleja, por ejemplo 3 h 43 min 26,76 s y queremos expresarla como incompleja, procederemos ahora de la siguiente manera: si se elige la hora como unidad de la forma incompleja, lo que haremos es expresar todas las cantidades en horas. Para ello será necesario dividir, de acuerdo con la correspondiente relación entre las diferentes unidades. Así, para calcular cuántos minutos son 26,76 s, los dividiremos entre 60, obteniendo 0,446 min. Al sumar esta cantidad a los minutos que ya había, el resultado es 43,446 min. Al dividir este número entre 60, obtenemos 0,7241 h y, por tanto, la expresión final será 3,7241 h.

En el caso de que la unidad elegida no sea la hora, habrá que adaptar las operaciones a las necesidades de conversión de unas unidades en otras.

A la vez que se realizan todos estos cálculos, se insistirá mucho en que la expresión decimal no se transforma de manera directa en la sexagesimal, y así 2,5 h no significa 2 h y 50 min, sino dos horas y media o 2 h 30 min.

10. Reconocer y utilizar las unidades de tiempo: día, semana, mes y año

Paralelamente al estudio realizado con la hora y las unidades derivadas que acabamos de ver, hay otro que empezando en el día, recorre la semana y el mes, finalizando en el año.

Respecto del día y aunque son difíciles para esta etapa, ya han trabajado en educación infantil los conceptos de ayer, hoy y mañana, que toman como referencia para el cambio de día el momento de levantarse de la cama. Lo que hemos de hacer en el 1.^{er} curso de primaria, es identificar el día con un período de 24 horas y trasladar el punto de referencia del nuevo día a las 0 h, perfeccionando el conocimiento de los mencionados conceptos. Como esta es una hora en la que el alumnado no está en la escuela, se hace necesario solicitar la ayuda de las familias para que algún fin de semana puedan quedarse despiertos hasta ver en un reloj el cambio de hora y de día (podríamos aprovechar para recordar el momento de las campanadas de la Noche de Fin de Año o el de mojarse los pies en el mar la Noche de San Juan).

Las 24 horas de un día corresponden al tiempo aproximado que tarda la Tierra en dar una vuelta sobre sí misma. Se relacionará este período de tiempo con dos vueltas completas de la aguja horaria del reloj analógico y, por tanto, con 24 vueltas del minutero. Para visualizar la representación social de los días utilizaremos los calendarios, en los que cada día tiene asignado un número distinto, que nos da la fecha asociada.

La sucesión de días nos llevará de manera natural a la semana. Tendremos que llegar a la idea de semana como un período de siete días, de lunes a domingo, cinco de los cuales son escolares y dos no escolares, sabiendo que a veces hay algún día festivo entre los escolares. Cada uno de los días de la semana tiene un nombre, que deben aprender y en su orden correcto.

Cuando esté clara la composición de la semana y su duración, es importante también que el alumnado reconozca como una semana cualquier período de siete días seguidos, sin que sea necesario empezar por el lunes.

Continuando con la introducción de las diferentes unidades de medida del tiempo, llegaremos al mes, siendo conscientes de que es una unidad de tiempo no constante. Trabajaremos los nombres, el orden y la duración de los meses, prestando especial atención a febrero que es diferente a todos los demás.

Para finalizar con estas unidades de tiempo en 2.º curso de primaria, estudiaremos el año, identificándolo con un período de 12 meses, que van desde enero hasta diciembre y diferenciaremos los bisiestos de los no bisiestos, según la duración del mes de febrero. Para poder justificar al alumnado la existencia de estos años de duración diferente, tendremos que hacer referencia al hecho de que el año es el tiempo aproximado que tarda la Tierra en recorrer su órbita alrededor del Sol, produciéndose un desajuste en los 365 días que se arregla cada cuatro años con un bisiesto, en el que el mes de febrero tiene 29 días.

De manera análoga al caso de la semana, cuando esté clara la composición y duración de los meses y de los años, es importante también que el alumnado reconozca un mes como cualquier período comprendido entre dos fechas iguales de meses consecutivos y, como un año, cualquier período de 12 meses o 365 días seguidos.

Estas unidades de medida del tiempo resultan bastante fáciles de trabajar, por la costumbre diaria de poner la fecha en el aula al principio de la jornada escolar y por la necesidad habitual de situar en el tiempo la mayoría de los hechos cotidianos: actividades del aula, excursiones, deberes escolares, fiestas, visitas familiares, etc.

Podemos completar el conocimiento del año con el estudio de las estaciones, trabajando las características y hechos sociales importantes de cada una de ellas (Navidad, Las Fallas, La Magdalena, Pascua, vacaciones de verano...), además de su duración y situación a lo largo del mismo.

Como material de ayuda para trabajar las unidades no horarias, podemos utilizar cualquier calendario mensual/anual o el calendario magnético de la figura 56 que recoge información referente a semanas, meses, estaciones, año y en el que se pueden señalar fechas que se consideren importantes.

Figura 56. Calendario magnético (fabricado por HenBea)

11. Realizar mediciones y transportes de ángulos

Desde 3.^{er} curso y dentro del bloque de Geometría se ha trabajado el concepto de ángulo a partir de la manipulación y construcción, de la definición intuitiva, del dibujo y de la clasificación de estos (tomando como referencia el ángulo recto).

En 5.º curso se inicia el trabajo de cuantificación de los ángulos, buscando actividades en las que sea necesario medirlos: dibujos, maquetas, construcciones geométricas... Estas actividades exigen la medida de una nueva magnitud, la amplitud angular y, por tanto, se necesita una nueva unidad, el grado sexagesimal, que se define como la amplitud del ángulo que resulta de dividir un ángulo recto en 90 partes iguales. Se representa por un cero de reducidas dimensiones, situado en posición exponencial a la derecha del número que indica la cantidad de grados.

Para poder medir esta nueva magnitud, se utiliza el transportador de ángulos o goniómetro (figura 57). Es una regla formada, usualmente, por un semicírculo o semicorona circular que se apoya sobre el diámetro mayor, graduada en grados sexagesimales desde 0º hasta 180º. En el mencionado diámetro hay una marca central en la que se coloca el vértice del ángulo a medir, haciendo coincidir el cero con uno de sus lados. El otro lado indicará, en la graduación creciente, la cantidad de grados que mide el ángulo.

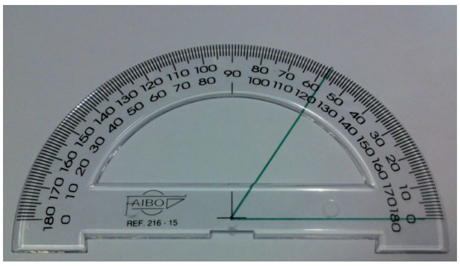

Figura 57. Transportador de ángulos (fabricado por Faibo)

Una vez conocido, simbolizado, utilizado y adquirido el grado, se estudian sus submúltiplos, el minuto y el segundo sexagesimales, que son las unidades que surgen al dividir, respectivamente, el grado o el minuto en 60 partes iguales. Se simbolizan escribiendo una o dos comillas a la derecha del número en posición exponencial.

Es muy complicado encontrar actividades que necesiten minutos y segundos sexagesimales, porque vuelven a ser, de la misma manera que las décimas y las centésimas de segundo, imperceptibles para los sentidos humanos. Debemos comentarles, sin insistirles demasiado, que hay ámbitos de la ciencia que necesitan estas unidades y por eso hemos de conocerlas.

Esta no es la única manera de medir ángulos. También se puede utilizar el Sistema Centesimal (todas las divisiones son en 100 partes) y el Sistema Circular (utiliza el radián) pero no se trabajan en educación primaria.

12. Introducir la medida de superficies y volúmenes por medio de cuadrados y cubos, respectivamente

Las magnitudes estudiadas en las capacidades anteriores son lineales. Esto implica que se tendrá en cuenta solo una dimensión que mediremos con la correspondiente unidad. Para completar el estudio de las magnitudes y la medida en educación primaria introduciremos otras magnitudes que dependan de más de una dimensión: en 4.º curso la superficie y en 6.º, el volumen.

Desde educación infantil y, dentro del bloque de Geometría, en 1.er y 2.º cursos de primaria, ya tienen una idea de superficie y volumen. Han estudiado diferentes tipos de superficies: lisas, rugosas, abiertas, cerradas, planas, curvas... y han diferenciado entre la superficie de un cuerpo y el espacio que este ocupa (idea intuitiva de volumen). Nos interesarán ahora las superficies que son planas y que nos llevarán, de manera sencilla, al concepto de área, y los cuerpos de caras planas y paralelas dos a dos, que nos conducirán al de volumen.

Para poder llegar a la necesidad de medir superficies, en un primer momento, propondremos situaciones problemáticas que impliquen comparaciones. Estas situaciones se pueden resolver de diferentes maneras: directamente (comparando dos o más superficies visualmente o por superposición), por descomposición (fraccionando las superficies y comparándolas) o finalmente midiendo. Nos interesa llegar a este tercer procedimiento para trabajar el concepto de medida de superficie con las unidades de esta.

Partiremos de una situación real, por ejemplo: «Los alumnos de una clase quieren confeccionar un mural en el panel de corcho del aula, que es bastante grande. Como es incómodo trabajar con el panel en la pared, han pensado apoyarlo sobre la mesa del profesor. No saben si cabrá y quieren saberlo antes de descolgarlo». El alumnado se organiza en grupos y cada uno piensa cómo solucionar el problema.

Inicialmente, es probable que se fijen solo en una de las dimensiones de la mesa y del panel, midiéndola y comparándola. Así, pueden llegar a la conclusión de que cabe o no cabe, solo en función de la altura o de la anchura del panel. El hecho de que un grupo de alumnos considere una de las dimensiones y otro grupo la otra, provocará una discusión entre ellos. Se debe orientar este diálogo para ayudarles a llegar a la conclusión de que es necesario considerar las dos dimensiones a la vez. Se les pide que piensen alguna manera de comparar las dos superficies.

Ante esta duda, normalmente intentan hacer un recubrimiento de las dos superficies con algún elemento plano que en aquel momento consideren como unidad (papel, cartulina...), y contabilizar los objetos que han necesitado para cubrir una y la otra.

En situaciones semejantes y a partir de la utilización de unidades de diferentes formas (rectángulos, triángulos, círculos, cuadrados...), tendrán que llegar a concluir que será un elemento cuadrado el que mejor recubre las superficies a medir. Estas actividades pueden costar tiempo, pero es importante dedicarles el necesario para conseguir una construcción mental adecuada del concepto de medida de una superficie y de las unidades de esta. Una vez encontrada la necesidad de que las unidades sean superficies cuadradas, podemos utilizar de diferentes tamaños para medir una misma superficie, comprobando que, en cada caso, el resultado es diferente, de manera análoga a lo que ocurría en la longitud, la capacidad y la masa. Con esto concluiremos que necesitamos una unidad patrón, que trabajaremos en la capacidad siguiente.

Siguiendo un procedimiento semejante, y en situaciones en las que se necesite comparar el volumen de dos objetos (por ejemplo, saber si los paquetes de folios que tenemos en una caja que se está rompiendo, nos cabrán en otra nueva que no tiene la misma forma que la anterior y no sabemos si mantiene el tamaño), llegaremos a las unidades de forma cúbica como las adecuadas para medir volúmenes y a la necesidad de introducir una unidad patrón para esta magnitud.

13. Introducir el metro cuadrado, el metro cúbico y los respectivos submúltiplos y múltiplos. Utilizarlos para medir superficies planas y volúmenes muy sencillos

Como consecuencia de la última capacidad, introduciremos las primeras unidades de medida de superficie hacia el final de 4.º curso y las completaremos durante 5.º y 6.º de primaria. Estas se presentarán como cuadrados, cuyos lados tengan la misma longitud que las diferentes unidades de medida de esta magnitud. Por ejemplo, el centímetro cuadrado será un cuadrado de lado un centímetro. Además del centímetro cuadrado, iniciaremos este trabajo con el metro cuadrado y el decímetro cuadrado.

El orden de aparición de estas tres unidades estará en función de las situaciones reales con las que iniciemos su estudio: medir la superficie del aula, del patio, de un libro, de una mesa... Para cada una de las actividades habrá que construir con papel, cartulina... al menos la cantidad aproximada de cada unidad cuadrada necesaria para recubrir lo que se quiere medir. Hay pocos instrumentos de medida de superficie adecuados en el mercado y, si no se dispone de ellos, es conveniente crearlos en el aula de primaria en este momento inicial, para ayudar a los niños y niñas a hacer las mediciones y a construir la imagen mental de estas unidades. En la figura 58 se muestran las piezas del metro cúbico descomponible que también se puede utilizar para construir metros cuadrados.

Una vez introducida cada unidad y su nombre, presentaremos el símbolo, en estos casos cm^2, m^2 o dm^2. Las utilizaremos para medir diferentes superficies y las compararemos entre sí (principalmente con el metro cuadrado, que es la unidad central de la magnitud superficie) para deducir las siguientes relaciones:

$10.000\ cm^2 = 1\ m^2$ $\qquad$ $100\ dm^2 = 1\ m^2$ $\qquad$ $100\ cm^2 = 1\ dm^2$

Se introduce un nuevo submúltiplo del metro cuadrado con el fin de completar las unidades más pequeñas que este y a partir de la necesidad, en algún campo científico, de medir superficies menores que el centímetro cuadrado. Será esta el milímetro cuadrado y su símbolo es mm^2. Con ayuda del papel milimetrado, por ejemplo, se establecerán sus relaciones con las otras unidades de superficie estudiadas, comprobando que:

$100\ mm^2 = 1\ cm^2$ $\qquad$ $10.000\ mm^2 = 1\ dm^2$ $\qquad$ $1_1000.000\ mm^2 = 1\ m^2$

Análogamente a las magnitudes longitud, capacidad y masa, podremos expresar los submúltiplos del metro cuadrado utilizando las fracciones y los números decimales de la manera siguiente:

$$1\ dm^2 = 0{,}01\ m^2 = \frac{1}{100}\ m^2$$

$$1\ cm^2 = 0{,}0001\ m^2 = \frac{1}{10000}\ m^2$$

$$1\ mm^2 = 0{,}0000001\ m^2 = \frac{1}{1_1000000}\ m^2$$

Y entender el decímetro cuadrado, el centímetro cuadrado y el milímetro cuadrado como el resultado de dividir un metro cuadrado en 100, 10.000 o $1_1000.000$ de partes iguales, respectivamente.

Cuando las superficies que necesitamos medir son mucho más grandes que un metro cuadrado, es necesario introducir nuevas unidades mayores que este (expresar la superficie de un país, de un desierto, de un lago,...). El kilómetro cuadrado es el múltiplo más utilizado en estos casos. Equivale a un cuadrado de un kilómetro de lado y su símbolo es km^2. Para completar la escala de unidades con una estructura semejante a otras magnitudes introduciremos los restantes múltiplos: decámetro cuadrado y hectómetro cuadrado, que se simbolizan con dam^2, hm^2. Las equivalencias con el metro cuadrado son:

$1\ dam^2 = 100\ m^2$ $\qquad$ $1\ hm^2 = 10.000\ m^2$ $\qquad$ $1\ km^2 = 10_1000.000\ m^2$

Para reforzar estas unidades y comprobar su utilización en contextos reales, podemos pedir al alumnado que averigüe la medida de la superficie de su pueblo, comarca, provincia, etc.

La magnitud superficie tiene un sistema propio de unidades de medida, que introduciremos en el aula de primaria por su extendido uso agrario y forestal. La unidad fundamental de este sistema es el área, que equivale a la superficie de un cuadrado de diez metros de lado y, por tanto, a un decámetro cuadrado. Su símbolo esa. Es más conocida la hectárea, único múltiplo de la anterior unidad, que equivale a la superficie de un cuadrado de cien metros de lado, por tanto, a un hectómetro cuadrado y que tiene por símbolo ha. El único submúltiplo del área es la centiárea con símbolo ca, que equivale a la superficie de un cuadrado de un metro de lado, es decir, a un metro cuadrado, con las siguientes relaciones:

1 ca = 1 m^2 = 0,01 a   1 a = 100 m^2 = 1 dam^2 1 ha = 10.000 m^2 = 100 a = 1 hm^2

De las relaciones estudiadas entre las diferentes unidades de superficie se deduce que estas se relacionan de 100 en 100, a diferencia de lo que ocurría la longitud, lo que resulta bastante evidente si tenemos en cuenta el carácter lineal de esta magnitud frente a la consideración bidimensional de la superficie.

En 6.º curso de primaria y en situaciones en las que se necesite medir el volumen de algún objeto, lugar o recipiente (caja, cubo, piscina...) llegaremos a las unidades de esta magnitud con el metro cúbico (m^3) como unidad central, que se define como el volumen de un cubo de un metro de arista. Es importante poder realizar en clase el montaje de la mencionada unidad con palos de un metro de longitud y piezas que actúen como vértices, para que el alumnado vea cómo es de grande y pueda hacerse una idea del metro cúbico, más ajustada a la realidad que la que le proporciona la definición. Podemos ayudarnos de material comercializado como el que se muestra en la figura 58.

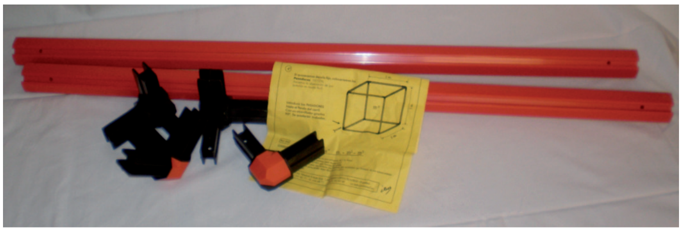

Figura 58. Metro cúbico desmontable (fabricado por Lado)

El resto de unidades de volumen, múltiplos y submúltiplos del metro cúbico, se presentan relacionadas con la necesidad de medir volúmenes mayores o menores que este. Siguiendo el mismo esquema que con las otras magnitudes, estas unidades serán: decímetro cúbico, centímetro cúbico y milímetro cúbico como submúltiplos, y decámetro cúbico, hectómetro cúbico y kilómetro cúbico como múltiplos. Respectivamente, los símbolos serán dm^3, cm^3, mm^3 y dam^3, hm^3, km^3 y se relacionan de 1.000 en 1.000, pudiéndose comprobar de manera experimental con el metro cúbico, el decímetro cúbico y el centímetro cúbico. En la figura 59 se muestra el decímetro cúbico descomponible, que permite visualizar las relaciones entre esta unidad y el centímetro cúbico.

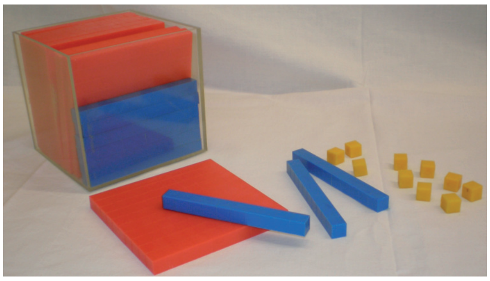

Figura 59. Decímetro cúbico descomponible (fabricado por Nes Arnold)

De todas estas unidades, las que se manipulan más fácilmente son el decímetro cúbico y el centímetro cúbico. La más frecuente en envases que cotidianamente están al alcance del alumnado es el centímetro cúbico que, a veces, aparece simbolizado incorrectamente por cc, en lugar de cm^3. Trabajaremos esta representación con los niños y niñas para poder asociarla correctamente a la unidad correspondiente y evitar confusiones con el centilitro (cl).

Se puede estudiar, además, la relación entre las unidades de capacidad y de volumen, comprobando con diversos recipientes que un decímetro cúbico equivale a un litro, así como que un centímetro cúbico equivale a un mililitro: $1\ dm^3 = 1\ L$ y $1\ cm^3 = 1\ ml$.

14. Averiguar las unidades adecuadas para medir cantidades de diferentes magnitudes. Realizar estimaciones de algunas cantidades de estas magnitudes.

Esta capacidad se debe trabajar a lo largo de toda la etapa como complemento de las anteriores, porque se han de distinguir y clarificar las palabras magnitud, unidad y medida. Y, quizá, no por el nombre, sino por los hechos. Es decir, se debe establecer un protocolo según el cual antes de realizar una medición, será necesario que el alumnado se haga las preguntas siguientes:

1. *¿Qué voy a medir?* Esta pregunta conecta directamente con la idea de magnitud. Es decir, ¿voy a medir longitud, masa, capacidad, superficie, etc.? Es importante que esta distinción esté clara.
2. *Por tanto... ¿con qué unidad?* En cualquier caso, tendré que adecuar la unidad a la cantidad que voy a medir.
3. *¿Cuántas veces?* Es el momento de medir las cantidades y, por tanto, he de indicar el *número de veces que he utilizado la unidad elegida.*

También es importante desarrollar la capacidad de estimación. Antes de calcular la medida exacta de una cantidad sería conveniente que la estimaran aproximadamente, escribiendo todo lo que piensan y que sea útil para poder, después, incidir sobre los errores con el fin de mejorar la estimación y la imagen mental de las diferentes unidades.

15. Utilizar con soltura instrumentos de medida

Se trabaja conjuntamente con todas las capacidades anteriores porque, al tiempo que van comprendiendo y estudiando las unidades, van utilizando instrumentos de medida. Es necesario que tengan cuidado y presten atención a lo que están haciendo.

Se pretende reforzar el uso de los mencionados instrumentos, con los detalles particulares de estos (fiabilidad, facilidad de uso, seguridad...) y con total corrección a la hora de tomar la medida. Hemos de conseguir que sean responsables en el cuidado del material, en la toma de datos correcta, en la coherencia con lo que se está midiendo y en la transcripción correcta al papel.

16. Descubrir las expresiones para calcular las áreas de figuras planas sencillas

En 6.º curso y una vez se ha hecho el estudio de las unidades de superficie, hay que hacer un trabajo un poco más abstracto para descubrir expresiones que nos permitan calcular el área de un cuadrado, de un rectángulo y de un triángulo.

Para el caso del rectángulo podemos ayudarnos de los acetatos centimetrados (figura 60).

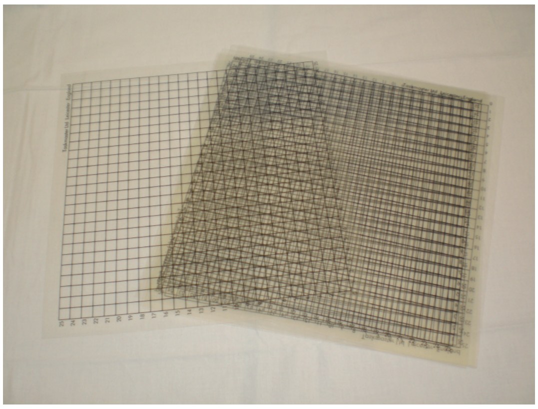

Figura 60. Acetatos centimetrados (fabricados por Taskmaster Ltd.)

Se trata de calcular el área de varias de estas figuras (que habremos preparado y que tendrán números enteros como longitud de los lados), superponiendo la cuadrícula del acetato y contabilizando los centímetros cuadrados que la recubren. En cada ocasión hay que medir también los dos lados diferentes de las figuras y anotarlo todo, formando así una tabla en la que, para cada figura, tendremos el valor del área en una columna y las medidas de los lados en otra. Al final les pediremos que encuentren una relación entre las dos columnas hasta que lleguen a concluir que la multiplicación de las longitudes de los dos lados diferentes da como resultado el valor del área. El enunciado geométrico de esta conclusión será «el área del rectángulo es igual al producto de la longitud de la base por la de la altura».

Como consecuencia inmediata, el valor del área de un cuadrado se calculará multiplicando la longitud de un lado por ella misma.

Como ampliación del estudio del área de un rectángulo podemos trabajar la de un paralelogramo cualquiera, por ejemplo el ABCD de la figura 61.

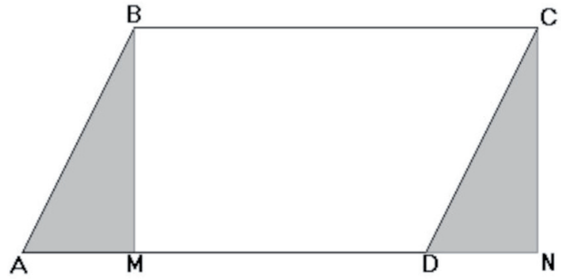

Figura 61. Representación gráfica para calcular el área de un paralelogramo

Para calcular el área de este paralelogramo, lo transformaremos en un rectángulo cortando y trasladando el triángulo ABM a la posición DCN, con lo que obtendremos el rectángulo MBCN, que tiene la misma cantidad de superficie que el paralelogramo inicial, por tanto, tendrá la misma área. Es evidente que el rectángulo y el paralelogramo tienen la misma longitud por base y la misma longitud por altura. Como saben calcular el área del rectángulo, multiplicando la longitud de la base por la de la altura, será la misma expresión la que permitirá calcular, de ahora en adelante, el área de un paralelogramo.

En el caso del área de un triángulo, dividiremos entre dos la del paralelogramo. El motivo es evidente, la diagonal de un paralelogramo genera siempre dos triángulos iguales, cuya área es la mitad de la del paralelogramo (figura 62). Así, para calcular el área de un triángulo habrá que «multiplicar la longitud de la base por la de la altura y dividir el resultado entre dos».

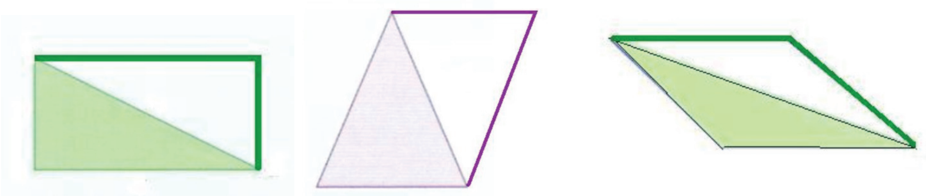

Figura 62. Representaciones gráficas para calcular áreas de triángulos

17. Aplicar los conocimientos sobre magnitudes y medida para resolver e inventar problemas

Esta capacidad no se consigue de manera aislada, ni tampoco solo cuando estén adquiridas todas las anteriores. Se irá trabajando a medida que se estudie cada una de las magnitudes desarrolladas a lo largo del tema, con la finalidad de que sean conscientes de lo que han aprendido, es como un recordatorio. Se entienden también como problemas las actividades iniciales que plantean los primeros interrogantes necesarios para introducir un nuevo concepto, en este caso, de magnitudes y medida, además de todas las enmarcadas en situaciones cotidianas que les generen preguntas relacionadas con estos contenidos.

En cualquier caso, una vez esté introducida cada una de las magnitudes con las unidades y relaciones correspondientes, se debe trabajar la resolución de problemas relacionados con ella, como complemento de las actividades experimentales que se han desarrollado en las capacidades anteriores.

De manera análoga al tema de los números racionales, realizaremos esta tarea en el marco de las cuatro fases de Polya (comprender el problema, elaborar un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida) y reflexionando con el alumnado sobre la importancia, desarrollo y utilidad de cada una de ellas.

Aprovecharemos los errores que puedan surgir para reflexionar con los niños y potenciar nuevas situaciones de aprendizaje. Es muy importante diferenciar entre los errores experimentales en las mediciones, los de cálculo y los errores de razonamiento, dado que exigen métodos diferentes para su tratamiento.

Desarrollaremos este trabajo en todos los cursos de la etapa, respetando en cada uno de ellos los niveles cognitivos del alumnado respecto de los números naturales, racionales y sobre las operaciones entre ellos.

El alumnado debe trabajar también la invención de problemas relacionados con estos conceptos. Lo que se pretende es comprobar si son capaces de generar situaciones que se resuelvan con ellos. La tarea de inventar problemas será posterior a la de resolverlos. No les pediremos nunca que inventen un problema de un tipo que aún no se haya resuelto.

Cada vez que les propongamos la invención de un tipo nuevo de problemas recorreremos los pasos siguientes, que se encuentran secuenciados por nueva dificultad, independientemente del curso en el que nos encontremos:

- Con ayudas:
  - Les daremos los números, las magnitudes, el contexto y/o las operaciones que intervienen en la situación.
  - Les daremos los números, las magnitudes, y/o las operaciones, pero no el contexto.

- Sin ayudas: les daremos solo el tipo de números, las magnitudes y/o las operaciones que han de aparecer en la situación problemática.

Después de inventar las situaciones problemáticas, las intercambian con los compañeros para que ningún niño o niña resuelva la que ha inventado, con la finalidad de potenciar su capacidad tanto de redacción como de expresión matemática, que implicará la exigencia de claridad y de totalidad en datos e incógnitas.

ANEXO

Presentamos a continuación algunos conceptos básicos de la Teoría de Conjuntos, necesarios para fundamentar los contenidos referentes a los Números Naturales que se trabajan en esta publicación. No son objeto de estudio por los futuros maestros, pero tienen la finalidad de facilitar su consulta a los lectores que lo necesiten.

1. Formalización de conceptos de Teoría de Conjuntos

La Teoría de Conjuntos es la encargada de simbolizar el lenguaje matemático. Es por ello que formando conjuntos expresamos algunos conceptos que componen el currículum escolar y favorecemos su aprendizaje.

Presentamos a continuación una breve formalización de los conceptos de Teoría de Conjuntos, necesarios para trabajar los contenidos de esta publicación.

1.1. Introducción

El concepto de *conjunto* es intuitivo y se podría entender como «una agrupación de elementos hecha con cualquier criterio». El criterio puede no ser una propiedad característica común, sino simplemente el deseo o la necesidad de agrupar ciertos elementos. Así, podemos hablar de un conjunto de personas, de ciudades, de bolígrafos, o del conjunto de objetos que hay en un momento determinado encima de una mesa.

Un conjunto está bien determinado si se sabe si un elemento dado pertenece o no al conjunto; así, el conjunto de los bolígrafos azules está bien definido, porque al ver un bolígrafo podemos saber si es azul o no. El conjunto de las personas altas no está bien definido, porque, al ver una persona, no siempre se podrá decir si es alta o no, o puede haber diferentes personas que opinen si esa persona es alta o no lo es.

Los conjuntos se representan, normalmente, con una letra mayúscula: *A, B, ,...*

Llamaremos *elemento* a cada uno de los objetos (físicos o abstractos) que forman parte de un conjunto. Estos elementos tienen carácter individual, cualidades que nos permiten diferenciarlos y cada uno de ellos es único, de manera que no hay elementos duplicados o repetidos. Los representaremos generalmente con una letra minúscula: *a, b, k...*

Se define *cardinal* de un conjunto como «la cantidad de elementos que hay en el conjunto».

Se denomina conjunto universal o referencial, que habitualmente representaremos con la letra *U*, al conjunto de todas las cosas de las cuales se esté tratando; así, si hablamos de números naturales, *U* es el conjunto de los números naturales; si hablamos de ciudades, *U* es el conjunto de todas las ciudades; este conjunto universal puede mencionarse explícitamente o, en la mayoría de los casos, se da por conocido según el contexto en el que se esté trabajando.

Siempre ha sido muy utilizada la idea de conjunto a lo largo de la historia, en cualquier representación o explicación matemática. Pero no será hasta el siglo XIX cuando se le otorgará rigor. En este siglo, Cantor pone las bases para la construcción de la Teoría de Conjuntos: definiciones, introducción a los cardinales, conjunto bien ordenado...

Aparecen fisuras en esta teoría, como la paradoja de Russell, que surge cuando se supone un conjunto $\mathbf{A} = \{\mathbf{C}\ \textbf{conjuntos} / \ \mathbf{C} \notin \mathbf{C}\}$, a partir del cual se hace la pregunta de la pertenencia de A a sí mismo, es decir ¿$\mathbf{A} \in \mathbf{A}$ o $\mathbf{A} \notin \mathbf{A}$? La respuesta nos lleva a la conclusión de que $\mathbf{A} \in \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A} \notin \mathbf{A}$, que constituye la paradoja mencionada.

Para resolver estos problemas de la teoría de conjuntos se crean los sistemas axiomáticos correspondientes (son conjuntos de afirmaciones admitidas como verdaderas sin necesidad de demostración) y así tenemos los de Zermelo-Frenkel, los de Newman...

1.2. Conjuntos

En este apartado se hace un recorrido por algunos conceptos (operaciones, relaciones...) que se pueden definir en relación a los conjuntos.

1.2.1. Definiciones y conceptos básicos

Como se ha dicho en el punto anterior, se admite la idea de conjunto como la agrupación en un todo de determinados objetos bien caracterizados y diferenciados los unos de los otros.

- Conjuntos iguales: *aquellos que, elemento a elemento, son iguales.*

- Determinaciones de un conjunto:
  - Por comprensión: *explicitando la propiedad característica de sus elementos.*
  - Por extensión: *enumerando, uno por uno, todos los elementos que lo componen.*

- Representaciones de un conjunto:
  - Representación gráfica: *diagrama lineal, diagrama de Venn (línea curva cerrada que delimita los elementos del conjunto) o cualquier línea cerrada.*

– Representación simbólica: *como se ha dicho antes, se utilizarán letras en minúscula para representar los elementos de un conjunto y en mayúscula para representar los conjuntos.*

- Subconjuntos: $\mathbf{A \subset C \leftrightarrow \forall a \in A \rightarrow a \in C}$

- Conjunto universal o referencial: se representa con la letra ***U***.

- Conjunto complementario de un subconjunto:

  $\mathbf{A \subset U : A_U{}^c = \{x \in U / x \notin A\}}$

- Conjunto vacío: ϕ, *aquel que no tiene elementos.*

- Conjunto de partes de un conjunto: es un conjunto que está formado por todos los subconjuntos de un conjunto dado, es decir: $P(\mathcal{A}) = \{B \ / \ B \subset \mathcal{A}\}$. Es importante notar que de esta definición se deduce que $\mathcal{A} \in P(\mathcal{A})$ i $\phi \in P(\mathcal{A})$.

Utilizando números combinatorios se puede demostrar que el conjunto ***P(A)*** tiene como cardinal $2^{card\ (\mathcal{A})}$: $card\ [P(\mathcal{A})] = 2^{card\ (\mathcal{A})}$

1.2.2. Operaciones entre conjuntos

- Unión: $\mathbf{A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}}$

- Intersección: $\mathbf{A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}}$. Si la intersección de dos conjuntos es el conjunto vacío, estos se denominan conjuntos disjuntos.

> *Propiedades de la unión y de la intersección:*
>
> 1. *Conmutativa:* $\mathbf{A \cup B = B \cup A}$ y $\mathbf{A \cap B = B \cap A}$
> 2. *Asociativa*: $\mathbf{A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C}$ y $\mathbf{A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C}$
> 3. *Idempotencia*: $\mathbf{A \cup A = A}$ y $\mathbf{A \cap A = A}$
> 4. *Absorción*: $\mathbf{A \cup (A \cap B) = A}$ y $\mathbf{A \cap (A \cup B) = A}$
> 5. *Distributiva*:
>
> $\mathbf{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$ y $\mathbf{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$
> 6. $\mathbf{A \cup A^c = U}$ y $\mathbf{A \cup \phi = A}$
> 7. $\mathbf{A \cap A^c = \phi}$ y $\mathbf{A \cap \phi = \phi}$
>
> NOTA: *Leyes de De Morgan:*
>
> $\mathbf{(A \cup B)^C = A^C \cap B^C}$
>
> $\mathbf{(A \cap B)^C = A^C \cup B^C}$

- Partición de un conjunto: $\{N_1, N_2 \ldots N_n\}$ es una partición de un conjunto A, si y solo si (en adelante sii):

1. $N_i \subset A \wedge N_i \neq \phi, \forall i = 1,\ldots,n$
2. $\bigcup_{i=1}^{n} N_i = A$
3. $N_i \cap N_j = \phi, \forall i \neq j$

- Diferencia de conjuntos: $A - B = \{x \in A / x \notin B\}$

- Producto cartesiano: $A \times B = \{(a,b) / a \in A \wedge b \in B\}$

Propiedades:

1. $\mathbf{card}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{card}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{card}(\mathbf{B})$
2. $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$
3. $\mathbf{A}' \subset \mathbf{A}, \mathbf{B}' \subset \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{A}' \times \mathbf{B}' \subset \mathbf{A} \times \mathbf{B}$
4. $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \phi \Leftrightarrow \mathbf{A} = \phi \ \vee \ \mathbf{B} = \phi$
5. $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \times \mathbf{C})$
6. $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cap (\mathbf{A} \times \mathbf{C})$
7. $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} - \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \times \mathbf{C})$

1.3. Correspondencias

Una correspondencia **f** es una terna **(A, B, G)**, donde:

- **A**, **B** son conjuntos y $f: A \to B$ asocia elementos de **A** con elementos de **B**, denominándose **A** conjunto inicial y **B** conjunto final.

- $\mathbf{D(f)} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{A} / \exists \mathbf{y} \in \mathbf{B} : \mathbf{f(x)} = \mathbf{y}\}$, es el conjunto Dominio de la correspondencia y está formado por los elementos (llamados origen o antiimagen) del conjunto inicial que tienen algún elemento correspondiente en el conjunto final.

- $\mathbf{Im(f)} = \{\mathbf{y} \in \mathbf{B} / \exists \mathbf{x} \in \mathbf{A} : \mathbf{f(x)} = \mathbf{y}\}$ es el conjunto Imagen de la correspondencia y está formado por los elementos (llamados imagen) del conjunto final que se corresponden con algún elemento del dominio de la correspondencia.

- $\mathbf{G} \subset \mathbf{AxB}$, se denomina Grafo de la correspondencia y está formado por pares **(x,y)** donde $\mathbf{x} \in \mathbf{D(f)}$ e $\mathbf{y} \in \mathbf{Im(f)}$:

$$\mathbf{G(f)} = \{(x,y) \in A \times B / \ x \in D(f) \wedge y \in Im(f) \wedge f(x) = y\}$$

Cualquier correspondencia **f** nos permite definir su correspondencia recíproca o inversa, de la siguiente manera: $\mathbf{f^{-1} : B \to A \ / \ D(f^{-1}) = Im(f) \ i \ Im(f^{-1}) = D(f)}$.

Algunas correspondencias pueden ser:

- *Unívoca: a cada elemento de **A** le corresponde un elemento o ninguno de **B**.*
- *Biunívoca: tanto **f**, como **f** $^{-1}$, son unívocas.*
- *Aplicación: todo elemento de **A** tiene imagen en **B** y esta es única. Es decir,* $\forall a \in A, \exists! b \in B \ / \ f(a) = b$.

> *Algunas aplicaciones pueden ser:*
>
> – *Suprayectiva: todo elemento de **B** es imagen de algún elemento de **A**:* $\forall b \in B, \exists a \in A / \ f(a) = b$
> – *Inyectiva: elementos distintos de **A** tienen imágenes distintas en **B**:* $\forall a, b \in A : a \neq b \to f(a) \neq f(b)$
> – *Biyectiva*: suprayectiva e inyectiva al mismo tiempo.

- *Composición de aplicaciones: dada una aplicación* $f : A \to B$ *y otra* $g : B \to C$ *de forma que* $\forall a \in A \ f(a) = b \ \wedge \ \forall b \in B \ g(b) = c$ *, se define la composición de aplicaciones como otra aplicación* $g \circ f : A \to C$, *cumpliéndose que* $\forall a \in A \ \ g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c$. Si las aplicaciones f y g son biyectivas su composición $g \circ f$ también lo es.

1.4. Relaciones binarias

Una Relación Binaria es una asociación o conexión que se establece entre parejas de elementos de un conjunto. Puede haber muchas definidas en un mismo conjunto. Analíticamente, podemos decir que una relación **R** es una terna **(A, A, G)**, donde $\mathbf{G \subset A \times A}$, como ocurre en el punto anterior, entonces diremos que **xRy** sii **(x,y)** pertenece a **G**.

> *Propiedades:* $\forall \mathbf{x, y, z} \in \mathbf{A}$
>
> *1. Reflexiva:* **xRx**
> *2. Antirreflexiva:* **x** no se relaciona consigo mismo.
> *3. Simétrica:* **xRy → yRx**
> *4. Antisimétrica:* **xRy ∧ yRx → x = y** o bien, **x ≠ y ∧ xRy → y** $\overline{\mathbf{R}}$ **x**
> *5. Transitiva:* **xRy ∧ yRz → xRz**
> *6. Circular:* **xRy ∧ yRz → zRx**
> *7. Conexa:* **xRy ∨ yRx**

Nota: si una relación binaria definida en un conjunto cumple algunas de las propiedades anteriores, recibe el nombre de:

- *Relación binaria de equivalencia: cumple reflexiva, simétrica y transitiva.*
- *Relación binaria de preorden: cumple reflexiva y transitiva.*
- *Relación binaria de orden (también llamada de orden amplio): cumple reflexiva, antisimétrica y transitiva.*
- *Relación binaria de orden estricto: cumple antirreflexiva, antisimétrica y transitiva.*
- *Cualquier relación de orden definida anteriormente se denominan de* orden parcial*, porque no se le ha exigido que cumpla la propiedad conexa. Si esta propiedad se cumple, las relaciones de orden se denominan de* orden total.

1.4.1. Clases de equivalencia

Una Relación Binaria de equivalencia definida en un conjunto, organiza sus elementos en subconjuntos que constituyen una partición del conjunto (ver anexo 1.2.2). Esta organización se denomina Clasificación y cada uno de los subconjuntos se denomina Clase de equivalencia y está formado por los elementos del conjunto que se relacionan mediante la relación.

1.4.2. Conjunto cociente

Una vez establecida una clasificación, las clases de equivalencia forman un conjunto que se denomina Conjunto Cociente. Si ***A*** es el conjunto donde tenemos definida la relación de equivalencia ***R***, el conjunto cociente se representa por ***A/R***.

1.5. Estructuras algebraicas

Cuando se estudian las propiedades de las operaciones en los diferentes conjuntos numéricos, se observan algunas que se repiten de manera regular en todos ellos, y otras que se presentan de manera específica. Estas contribuyen a determinar la estructura algebraica de dichos conjuntos numéricos.

En general, cuando hablamos de estructura algebraica nos referimos a las propiedades que cumplen las operaciones definidas entre los elementos de un conjunto. De acuerdo con estas, se establece una clasificación de los conjuntos, en la cual cada una de las clases de equivalencia corresponde a una de las estructuras que se recogen a continuación.

Las operaciones necesarias para determinar una estructura pueden ser Internas o Externas:

- Se define operación interna, como una aplicación **(*): A × A→A**. Es decir, operando elementos de un conjunto **A**, obtenemos elementos del mismo conjunto.

- Se define operación externa, como una aplicación **(·): K × A→A**. Es decir, operando elementos de un conjunto **A** con elementos de otro conjunto **K**, llamado de escalares, obtenemos elementos del conjunto **A**.

Las operaciones definidas pueden cumplir algunas de las siguientes propiedades:

- Asociativa (aso): $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{A}:$ **(a*b)*c = a*(b*c)**

- Conmutativa (conm): $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{A}:$ **a*b = b*a**

- Elemento Neutro (en): $\exists \mathbf{n} \in \mathbf{A} / \forall \mathbf{a} \in \mathbf{A}:$ **a*n = n*a = a**

- Elemento Simétrico (es): $\forall \mathbf{a} \in \mathbf{A}, \exists \mathbf{a}' \in \mathbf{A} /$ **a*a´= a*a´= n**

- Distributiva de * respecto de □ : $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{A}:$ **a*(b □ c) = (a*b) □ (a*c)**, donde □ es otra operación interna definida en A

Las principales estructuras son:

Para la operación interna:

	Asociativa	*Conmutativa*	*Elemento neutro*	*Elemento simétrico*
Semigrupo	X			
Semigrupo conmutativo	X	X		
Monoide	X		X	
Monoide conmutativo	X	X	X	
Grupo	X		X	X
Grupo conmutativo o abeliano	X	X	X	X

Para dos operaciones internas:

	Primera operación				*Segunda operación*				*Distributiva de la 2ª respecto de la 1ª*
	aso	*conm*	*en*	*es*	*aso*	*conm*	*en*	*es*	
Semianillo	X	X	X		X				X
Semianillo conmutativo	X	X	X		X	X			X
Semianillo conmutativo unitario	X	X	X		X	X	X		X
Anillo	X	X	X	X	X				X
Anillo conmutativo	X	X	X	X	X	X			X
Anillo conmutativo unitario	X	X	X	X	X	X	X		X
Cuerpo	X	X	X	X	X		X	X (*)	X
Cuerpo conmutativo	X	X	X	X	X	X	X	X (*)	X

(*): Exceptuando el elemento neutro de la primera, todos los elementos del conjunto tienen simétrico para la segunda operación.

Habría que añadir, finalmente, las definiciones de *semimódulo* y *espacio vectorial*:

Un conjunto $(M, *, \cdot)$, con una operación interna * y otra externa $\cdot$, definida con la ayuda de un semianillo $(\mathbf{A}, +, \times)$, es un *semimódulo* sii:

- $(\mathbf{M}, *)$ es un semigrupo conmutativo.
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{A} \ \wedge \ \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{M}$ se cumplen las siguientes propiedades:

$$(\alpha + \beta) \cdot a = (\alpha \cdot a) * (\beta \cdot a)$$
$$\alpha \cdot (a * b) = (\alpha \cdot a) * (\alpha \cdot b)$$
$$\alpha \cdot (\beta \cdot a) = (\alpha \times \beta) * a$$

Un conjunto **(V,*,·)**, con una operación interna ***** y otra externa **·** definida con la ayuda de un cuerpo (**K**,+, ×) es un *espacio vectorial* sii:

- **(V,*)** es un grupo abeliano.
- $\forall u, v \in V, \forall \lambda, \mu, 1 \in K$ se cumplen las siguientes propiedades:
  - $(\lambda + \mu) \cdot v = (\lambda \cdot v) * (\mu \cdot v)$
  - $\lambda \cdot (u * v) = (\lambda \cdot u) * (\lambda \cdot v)$
  - $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \times \mu) \cdot v$
  - $1 \cdot v = v$

Referencias bibliográficas

Chamorro, C. (coord.) (2003): *Didàctica de las Matemáticas para primaria.* Madrid. Pearson Educación.

Colectivo Periódica Pura (1982): *Didáctica de los números enteros*. Madrid. Nuestra Cultura.

Ifrah, G. (2001): *Historia universal de las cifras. La inteligencia de la humanidad contada por los números y el cálculo.* Madrid. Espasa Calpe.

Llinares, S.; Sánchez, M.ª V. (1988): *Fracciones. La relación parte-todo*. Matemáticas: cultura y aprendizaje, n.º 4. Madrid. Síntesis.

Mankiewicz, R. (2005): *Historia de las matemáticas.* Madrid. Paidós.

Bibliografía recomendada

Alsina, C. (1993): Del *número 0 al 99. Fem comptes amb els contes.* Instruments-Guix: 10. Barcelona. Graó.

Centeno, J. (1988): *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?* Matemáticas: cultura y aprendizaje, n.º 5. Madrid. Síntesis.

Chamorro, C.; Belmonte, J. M. (1988): *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales*. Matemáticas: cultura y aprendizaje, n.º 17. Madrid. Síntesis.

Dickson, L. *et al.* (1991): *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid. Labor-mec.

Farre, E.; Segura, C. (1989): *24 rellotges i altres instruments per a la mesura del temps*. Barcelona. Graó.

Fernández, J.; Rodríguez, M.ª I. (1989): *Juegos y pasatiempos para la enseñanza de la matemática elemental*. Matemáticas: cultura y aprendizaje, n.º 32. Madrid. Síntesis.

Fiol, Mª. L.; Fortuny, J. M.ª (1990): *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Matemáticas: cultura y aprendizaje, n.º 20. Madrid. Síntesis.

García, R. (1992): *Cómo enseñar o aprender el sistema métrico*. Madrid. Escuela Española sa.

Gómez, P. *et al.* (1993): «Adaptaciones curriculares individualizadas», *Cuadernos de Pedagogía*, nº 212, marzo 1993, pp. 40-44.

González, J. L. *et al.* (1990): *Números enteros*. Matemáticas: cultura y aprendizaje, n.º 6. Madrid. Síntesis.

Jiménez, V. (1990): *Cómo lograr una enseñanza activa de la matemática*. Barcelona. ceac.

Maza, C.; Arce, C. (1991): *Ordenar y clasificar*. Matemáticas: cultura y aprendizaje, n.º 31. Madrid. Síntesis.

Moreno, P. (1986): «La construcció infantil de la mesura de superfície», en Ajuntament de Barcelona (1986): *La Pedagogia Operatòria, avui*. Col·lecció:

Estudis i recerques. Barcelona. Ajuntament de Barcelona, Publicacions, pp. 219-234 (castellano: pp. 511-526).

Nortes, A. (1993): *Matemáticas y su didáctica*. Murcia. Tema-dm.

Nortes, A.; Serrano, J. M.ª. (1991): «Un análisis psicoeducativo del paso de las operaciones concretas a las formales: el caso del bloque numérico en los contenidos de matemáticas de 6º egb», en Nortes, A.; Serrano, J. M.ª (1991): *Operaciones concretas y formales*. Murcia. Universidad de Murcia, Secretariado de Publicaciones, pp. 139-152.

Olmo, M.ª A. del *et al.* (1989): *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?* Matemáticas: cultura y aprendizaje, n.º 19. Madrid. Síntesis.

Orduña, S. (1992): «Aprendiendo a medir», *Cuadernos de Pedagogía*, n.º 199, enero 1992, pp. 36-37.

Segovia, I. *et al.* (1989): *Estimación en cálculo y medida*. Matemáticas: cultura y aprendizaje, n.º 9. Madrid. Síntesis.

Skemp, R. R. (1980): *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Matemáticas. Madrid. Morata.

Índice de figuras

I. Pérez / M. Alcalde / G. Lorenzo - ISBN: 978-84-697-1443-0 Los números enteros y racionales, las magnitudes y la medida en el aula de primaria - UJI - DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia97