Universitat Jaume I

Escuela Superior de Tecnología y Ciencias Experimentales

EL TEOREMA DE NAMIOKA Y ALGUNAS GENERALIZACIONES

Trabajo Fin de Máster presentado por Luis Tárrega Ruiz
para obtener el título de Máster en Matemática Computacional

Julio 2014

Dirigido por:

Salvador Hernández Muñoz

Departamento de Matemáticas

UNIVERSITAT JAUME·I

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En el año 1821 Cauchy afirma en su libro *Cours d'analyse* [6] que si una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es separadamente continua, entonces conjuntamente continua. Recordemos que f es separadamente continua si al fijar una de las dos componentes la función resultante es continua. Por otro lado, se dice que f es conjuntamente continua si es continua en el sentido clásico. La afirmación realizada por Cauchy es incorrecta. Dicho error no se corrigió durante décadas. El primer contraejemplo, debido a E. Heine, aparece en la primera edición del libro de J. Thomae [49]. Otro ejemplo más simple y conocido de una función separadamente continua que no es conjuntamente continua en un punto se recoge en el tratado de cálculo de Genocchi y Peano [19] en el año 1884. La función se define:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{, si } x^2+y^2 \neq 0; \\ 0 & \text{, si } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

En 1899 Baire [3] demuestra que para cada función separadamente continua $f : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ existe un conjunto residual de lineas paralelas a los ejes constituidas por puntos de continuidad conjunta. Su trabajo estableció el siguiente problema general: encontrar las condiciones que han de cumplir los espacios X, Y y Z para que toda función separadamente continua $f : X\times Y \to Z$ sea conjuntamente continua en un subconjunto "sustancial" (en algún sentido topológico) de $X\times Y$. Trabajos posteriores, que buscaban dar solución a este problema, exigían que f estuviera definida sobre un producto en el que al menos uno de los factores fuese un espacio metrizable o verificase alguna condición de numerabilidad.

En 1974 I. Namioka [33] prueba el siguiente resultado: si X es un espacio regular y numerablemente Čech-completo, Y un espacio compacto, Z un espacio métrico y $f : X \times Y \to Z$ una función separadamente continua, entonces existe un subconjunto A de X que es G_δ y denso, de manera que f es conjuntamente continua en cada punto de $A \times Y$. Esa familia de espacios incluye, entre otros, a los espacios Čech-completos, a los localmente compactos y a los completamente metrizables.

A raíz de este artículo muchos matemáticos se vuelven a interesar por el estudio de los problemas relativos a la continuidad separada y conjunta. El siguiente trabajo relevante se debe a J.P.R. Christensen [8] en el año 1981, en el cual se extiende el resultado de Namioka a una clase más amplia de espacios que vienen definidos en términos de juegos topológicos. El

juego básico sobre el que se asientan el resto de juegos es el conocido juego de Choquet (también llamado juego de Banach-Mazur) sobre un espacio topológico X. El juego de Choquet sobre X, que denotamos por $\mathcal{J}(X)$, se define como sigue:
Dos jugadores, β y α, van eligiendo alternadamente los abiertos no vacíos de X, $\{V_n : n \in \omega\}$ y $\{U_n : n \in \omega\}$, cumpliendo las siguientes condiciones:

- β empieza escogiendo un abierto V_1 no vacío arbitrario.

- Una vez el jugador β ha elegido el abierto V_n el jugador α escoge un abierto U_n no vacío contenido en V_n.

- Una vez el jugador α ha elegido el abierto U_n el jugador β escoge un abierto V_n no vacío contenido en U_n.

Se dice que el jugador α gana la partida si $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \neq \emptyset$. Siguiendo la terminología de Choquet [7], se dice que un espacio topológico es β-desfavorable si el jugador β no posee ninguna estrategia ganadora en X.

Sean X e Y espacio topológicos, utilizando una terminología introducida por G. Debs [12], denotamos por $\mathcal{N}(X,Y)$ la siguiente propiedad: para cualquier aplicación separadamente continua $f : X \times Y \to [-1,1]$ existe un subconjunto $U \subseteq X$, que es G_δ y denso tal que f es conjuntamente continua en cada punto de $U \times Y$. Christensen [8] demostró que la definición de la clase de espacios de Namioka es equivalente a la que resulta reemplazando el espacio de llegada $[-1,1]$ por cualquier espacio métrico. Se dice que un espacio topológico X es un espacio de Namioka si se verifica la propiedad $\mathcal{N}(X,Y)$ para cualquier espacio compacto Y. La noción de espacio de Namioka fue introducida por J.P.R. Christensen en [8].

J. Saint-Raymond [43] caracteriza los espacios de Baire en términos de juegos topológicos:

Teorema 1.0.1 *Un espacio topológico X es un espacio de Baire si y sólo si es β-desfavorable.*

Además, también generaliza el juego de Choquet para probar los siguientes resultados:

Teorema 1.0.2 *Sea X un espacio de Namioka completamente regular. Entonces X es un espacio de Baire.*

Teorema 1.0.3 *Sea X un espacio de Baire separable. Entonces X es un espacio de Namioka.*

Teorema 1.0.4 *Sea X un espacio metrizable. Entonces X es un espacio de Namioka si y sólo si X es un espacio de Baire.*

En otra dirección diferente también son objeto de estudio los espacios topológicos Y que verifican la condición $\mathcal{N}(X,Y)$ para cualquier espacio X de Baire. Dichos espacios se conocen como espacios co-Namioka. Al igual que para la clase de espacios de Namioka, Namioka y Pol [34] demuestran que la definición de la clase de espacios co-Namioka es equivalente a la que resulta cuando se reemplaza el espacio de llegada $[-1,1]$ por cualquier espacio métrico.

Talagrand [47] demuestra en 1979 que cada espacio de Baire con un subconjunto K_σ y denso es de Namioka. En 1986 Debs [11] mejora el resultado de Talagrand demostrando que todo espacio de Baire con un subconjunto k-analítico y denso es de Namioka. En 1996 Namioka y Pol [35] demuestran que todo espacio completamente regular con un subespacio denso Cech-completo es de Namioka. Rybakov [42] en 2001 fortalece el resultado probando que todo espacio de Baire con un subconjunto k-numerablente determinado y denso es de Namioka.

Los primeros resultados sobre la clase de los espacios co-Namioka se remontan a 1972, cuando Feiock demuestra que contiene a los compactos metrizables. En 1984 [13] Deville demuestra que los compactos de Eberlein son espacios co-Namioka y en 1986 Debs [12] mejora el resultado probando que todos los compactos de Corson son espacios co-Namioka. El mismo año también prueba que los espacios compactos X tales que $C(X)$ es k-analítico son co-Namioka, resultado que engloba a los compactos de Eberlein. Otra mejora se obtiene en 1992 cuando Deville y Godefroy [14] demuestran que las imágenes continuas de los compactos de Valdivia son espacios co-Namioka, hecho que implica que los compactos diádicos (imágenes continuas de $\{0,1\}^I$) y los grupos topológicos compactos sean espacios co-Namioka.

Sea X un espacio topológico, denotamos por $C(X)$ el espacio de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$. Escribimos $C_p(X)$ para denotar a dicho espacio equipado con la topología de la convergencia puntal y $C_u(X)$ si la equipamos con la topología de la convergencia uniforme (para más información, véase el apartado A.1.1 del apéndice). De manera general a partir de una función $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ continua en la segunda variable, podemos construir una nueva función $\Phi : X \to C_p(Y)$ definida como $\Phi(x) = f_x$. Recíprocamente, dada una función $\Phi : X \to C_p(Y)$ se puede obtener otra función $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ continua en la segunda variable definida como $f(x,y) = \Phi(x)(y)$. Obsérvese que f es separadamente continua si y sólo si Φ es continua con la topología puntual. Además, si Y es compacto, Φ es continua en la norma supremo de $C(Y)$ si y sólo si f es continua (véase 4.1.8). Por tanto, la propiedad $\mathcal{N}(X,Y)$ cuando Y es compacto se puede enunciar también de la siguiente manera: para cualquier aplicación $\Phi : X \to C(K)$ continua con la topología de la convergencia puntual y acotada, existe un subconjunto $U \subseteq$ que es G_δ y denso tal que Φ es continua en la topología de la convergencia uniforme en cada punto de U.

Este punto de vista conecta con el estudio de las funciones $f : X \to Y$, donde Y es un espacio métrico, que en presencia de la propiedad de Baire en X permitan asegurar que el conjunto de puntos de continuidad de f es un G_δ y denso.

Sea $f : X \to Y$ una función definida en un espacio topológico X que toma valores en un espacio métrico Y. Se dice que f tiene la *propiedad del punto de continuidad* si para cada cerrado $F \subset X$ la restricción $f|_F$ de f sobre F tiene un punto de continuidad. Este tipo de funciones también se conocen como *barely continuas* [31]. Se dice que f es *fragmentable* si para todo $\epsilon > 0$ y todo subconjunto no vacío (equivalentemente, cerrado no vacío) A de X, existe un abierto no vacío U relativo a A tal que $diam(f(U)) < \epsilon$. Nótese que toda función con la propiedad del punto de continuidad es fragmentable. La implicación inversa se cumple cuando X es un espacio hereditariamente de Baire (i.e. todo subespacio cerrado de X es un espacio de Baire).

Por otra parte, se dice que f es *casi-continua* [28] si para todo $\epsilon > 0$, todo $x \in X$ y todo entorno abierto U de x existe un abierto no vacío V tal que $V \subset U$ y $diam(f(V)) < \epsilon$. Es fácil ver que si $f|_F$ es casi-continua para todo $F \subseteq X$ cerrado, la función es casi-continua. Como podemos ver en la proposición 4.1.7, si X es un espacio de Baire, f es casi-continua si y sólo si el conjunto de puntos de continuidad de f es un G_δ y denso.

El estudio de las funciones de la primera clase de Baire, definidas como límites puntuales de sucesiones convergentes de funciones continuas, y cuyo conjunto denotamos por $B_1(X)$, se inició en 1899 cuando R. Baire las introdujo en [3]. En dicho artículo prueba que toda función de la primera clase de Baire $f : X \to \mathbb{R}$, para X métrico completo, posee la propiedad del punto de continuidad.

Siguiendo la idea de la demostración de Stegall (teorema 3 en [46]) se obtiene que toda función fragmentable $f : X \to E$, donde X es un espacio perfectamente paracompacto y E es un espacio normado, es de la primera clase de Baire. Por tanto, si X es un espacio métrico completo, una función $f : X \to \mathbb{R}$ es de la primera clase de Baire si y sólo si es fragmentable.

Siguiendo la nomenclatura introducida por J.E. Jayne y C.A. Rogers en [26] se dice que un espacio topológico (X, τ) está *fragmentado* por una (pseudo)métrica ρ en X si para cada subconjunto A de X no vacío y para cada $\epsilon > 0$ existe un subconjunto U de X abierto para la topología τ tal que $U \cap A \neq \emptyset$ y ρ-$diam(U \cap A) \leq \epsilon$. Existe una dualidad entre la equi-fragmentabilidad de una familia de funciones y la fragmentabilidad del dominio. Sea X un espacio topológico, (Y, d) un espacio métrico y $\mathcal{F} = \{f_i : X \to Y\}_{i \in I}$ una familia de funciones, se tiene que $\mathcal{F}$ es equi-fragmentable si y sólo si X está fragmentado por la pseudométrica $\rho(x, x') := sup\{d(f_i(x), f_i(x')) : i \in I\}$ para cada $x, x' \in X$.

Sea X un espacio compacto, se sigue del teorema de Namioka que todo subconjunto $t_p(X)$-Čech-completo de $C_p(X)$ está framentado por la norma supremo.

Sea X un espacio topológico, $D \subseteq C(X)$ y $K = \overline{D}^{\mathbb{R}^X}$. Talagrand [47] en 1979 demuestra que si X es $t_p(D)$-compacto y $t_p(K)$-k-analítico, entonces X está fragmentado por la norma de $C(K)$. En el mismo artículo conjetura que se cumple el mismo resultado para el caso en que el subconjunto sea $t_p(K)$-Lindelöf en lugar de $t_p(K)$-k-analítico. Dicho resultado lo prueban B. Cascales, I. Namioka y G. Vera en [5].

• **Descripción del trabajo realizado:**

El objetivo de esta memoria es el estudio del teorema de Namioka y algunas de las muchas extensiones de este resultado fundamental en el análisis funcional. Aunque la mayor parte de nuestro trabajo ha consistido en la recopilación y puesta en relación de una buena parte de la literatura matemática sobre el tema, en la memoria se presentan también algunos resultados originales obtenidos durante su realización.

A continuación sigue un resumen de cada uno de los capítulos del trabajo:

Capítulo 2: En este capítulo se presentan unos resultados básicos e históricos que nos serán útiles para el desarrollo de los siguientes capítulos. Empezamos con una generalización del teorema de Grothendieck realizada por M. O. Asanov y N. V. Velichko [2] y posteriormente se presenta una adaptación del resultado considerando X k-espacio en vez de numerablemente compacto. También se constata, con ayuda de un contraejemplo, que, en general, no se puede generalizar el teorema para el caso en que X sea un espacio pseudocompacto.

En el siguiente apartado introducimos la noción de compacto de Eberlein y compacto de Corson, una familia de compactos más amplia que contiene a los compactos de Eberlein. Demostramos el teorema de Preiss-Simon [36], el cual nos asegura que todo subespacio pseudocompacto de un Eberlein compacto es un espacio compacto. Posteriormente, vemos que todos los compactos de Corson son espacios co-Namioka.

Por último, definimos la noción de espacio topológico angélico. Analizamos para qué tipo de espacios X el espacio de funciones $C_p(X)$ es angélico y probamos el teorema de Haydon [24], resultado que nos asegura que si X es un espacio pseudocompacto entonces los subespacios compactos de $C_p(X)$ y de $C_p(\beta X)$ coinciden.

Finalmente, siguiendo los resultados de Roshental [41] y de Bourgain, Fremlin y Talagrand [4] vemos que si el espacio X es polaco, entonces el espacio de funciones $B_1(X)$ es angélico.

Capítulo 3: Empezamos el capítulo con una prueba más breve del teorema de Namioka realizada por Hansel y Troallic [23] y la extensión al caso en que X sea un producto $X_1 \times \ldots \times X_n$ de espacios Čech-completos y que f sea separadamente continua en $X_1 \times \ldots \times X_n \times Y$, donde Y es un espacio compacto.

A continuación, nos centramos en buscar para qué espacios se cumple la propiedad $\mathcal{N}(X, Y)$ cuando el espacio Y es pseudocompacto.

Capítulo 4: Empezamos enlazando los resultados sobre los espacios de Namioka y la fragmentabilidad de la siguiente manera: un conjunto de funciones $Y \subset C_p(X, M)$ compacto es fragmentable si la propiedad que hace que el espacio X sea espacio de Namioka es hereditaria por subconjuntos cerrados.

Posteriormente, basándonos en una demostración de Stegall [46] vemos que una función $f : X \to \mathbb{R}$ es de la primera clase de Baire si y sólo si es fragmentable.

A continuación introducimos el teorema de Corson y Glicksberg, resultado que nos ayudará a caracterizar cuándo un subconjunto de $C(X, M)$, con X métrico y compacto y M métrico, es fragmentable. Vemos algunos casos de subconjuntos que son fragmentables y nos centramos en analizar para qué subconjuntos se cumple el resultado pero con X únicamente compacto. En este sentido, vemos la prueba del teorema de Talagrand y presentamos un teorema de simplificación que nos indicará para qué casos podemos rebajar las hipótesis de los resultados obtenidos con X métrico y compacto a X compacto. Este resultado de simplificación se empleará en la prueba del Teorema de Namioka, Cascales y Vera, el cuál generaliza el teorema de Talagrand.

Terminamos la memoria con un apéndice en el que recogemos algunas definiciones y resultados topológicos que se emplean en el desarrollo del trabajo.

Capítulo 2

Resultados iniciales

El primer capítulo está dedicado a la demostración de algunos resultados básicos e históricos que más adelante nos serán útiles. En el primer apartado presentamos una generalización del teorema de Grothendieck realizada por M. O. Asanov y N. V. Velichko. Recordemos que el teorema de Grothendieck [22] nos asegura que dado un espacio X numerablemente compacto y $A \subseteq C_p(X)$ un subespacio numerablemente compacto se tiene que la clausura de A en $C_p(X)$ es compacta. La generalización debilita las propiedades del subconjunto A de $C_p(X)$ exigiendo que sea un subconjunto acotado de $C_p(X)$.
En el segundo apartado definimos el término de compacto de Eberlein, y una familia de compactos que los contienen, los compactos de Corson. A continuación probamos el teorema de Preiss-Simon [36], el cual nos asegura que todo subespacio pseudocompacto de un Eberlein compacto es un espacio compacto. Finalmente vemos que todos los compactos de Corson son espacios co-Namioka, y por ende también los compactos de Eberlein.
En el tercer apartado, presentamos el concepto de espacio angélico para posteriormente demostrar algunos casos en los que los espacios de funciones $C_p(X)$ y $B_1(X)$ son espacios angélicos. Respecto al primer espacio de funciones, vemos el teorema de Pryce, resultado que nos proporciona una familia de espacios X para los que $C_p(X)$ es angélico. Además, presentamos el teorema de Haydon, que nos asegura que si X es un espacio pseudocompacto, entonces los subespacios compactos de $C_p(X)$ y de $C_p(\beta X)$ coinciden. Respecto al segundo espacio de funciones probamos que si X es polaco, entonces $B_1(X)$ es angélico.

2.1. El teorema de Grothendieck

Para probar el teorema necesitamos los siguientes resultados:

Proposición 2.1.1 *Si X es un espacio normal todo subespacio cerrado y acotado de X es pseudocompacto.*

Proposición 2.1.2 *Todo espacio de Hausdorff paracompacto X es normal.*

Para espacios paracompactos la pseudocompacidad es equivalente a la compacidad. Por tanto se tiene:

Proposición 2.1.3 *En un espacio paracompacto todo conjunto cerrado y acotado es compacto.*

Proposición 2.1.4 *Sea $A \subset X$ un conjunto acotado en X y sea $f : X \to Y$ una aplicación continua. Entonces $f(A)$ es un conjunto acotado en Y*

Sea X un espacio topológico e Y un subconjunto de X, denotamos por π_Y a las aplicaciones restricción $\mathbb{R}^X \to \mathbb{R}^Y$ y $C_p(X) \to C_p(Y)$, definidas por $\pi_Y(f) = f|_Y$ (véase el apartado A.1.3. que se encuentra en el apéndice). El subespacio $\pi_Y(C_p(X)) \subset C_p(Y)$ lo denotaremos por $C_p(Y|X)$. Sea $A \subset C_p(X)$, definimos el subespacio $A|Y = \pi_Y(A) = \{f|_Y : f \in A\}$ del espacio $C_p(Y|X)$.

Lema 2.1.5 *Sea X un espacio, F un conjunto acotado en $C_p(X)$ e Y un subespacio numerable de X. Denotamos por C_Y la clausura del conjunto $F|Y = \{f|_Y : f \in F\}$ en $C_p(Y)$.*
Entonces C_Y es compacto y, por tanto, cerrado en el espacio $C_p(Y) \subset \mathbb{R}^Y$.

Demostración. La aplicación restricción $\pi_Y : C_p(X) \to C_p(Y)$, en la cual cada $f \in C_p(X)$ es enviada a $f|_Y$, es continua y se tiene que $\pi_Y(F) = F|Y$, véase (A.1.14). Por la proposición 2.1.4 el conjunto $F|Y$ está acotado en $C_p(Y)$. Pero como $C_p(Y) \subset \mathbb{R}^Y$ y $\mathbb{R}^Y$ es un espacio con una base numerable, ya que Y es numerable, se sigue que $C_p(Y)$ es paracompacto. Por consiguiente, por la proposición 2.1.3, C_Y es compacto. $\square$

Veamos la generalización del teorema de Grothendieck:

Teorema 2.1.6 (Asanov y Velichko) *Si X es un espacio numerablemente compacto, entonces la clausura $\overline{F}$ en $C_p(X)$ de cualquier conjunto F acotado en $C_p(X)$ es compacto en $C_p(X)$.*

Demostración. El conjunto F es puntualmente acotado, i.e. $\forall x \in X$ el conjunto $\{f(x) : f \in F\}$ es acotado en $\mathbb{R}$. De hecho, si no lo fuera, existiría un $x \in X$ tal que la aplicación continua (veáse proposición A.1.12) $g_x : C_p(X) \to \mathbb{R}$ definida por $g_x(f) = f(x)$ no sería acotada sobre F, lo cual es una contradicción.
Dado $x \in X$, tomamos $B_x = \overline{\{f(x) : f \in F\}}$. Entonces B_x es compacto, y como $F \subset \prod\{B_x : x \in X\} \subset \mathbb{R}^X$, por el Teorema de Tychonoff se tiene que $\prod\{B_x : x \in X\}$ es compacto. Luego la clausura de F en $\mathbb{R}^X$ es compacta. La llamaremos P. Basta probar que $P \subset C_p(X)$ para finalizar la demostración.
Supongamos que $P \setminus C_p(X) \neq \emptyset$ y fijemos $f \in P \setminus C_p(X)$. Entonces $f : X \to \mathbb{R}$ no es una aplicación continua y, por tanto, existe un punto $x^* \in X$ y un conjunto $A \subset X$ tales que $x^* \in \overline{A}$ pero $f(x^*) \notin \overline{f(A)}$. Tomamos $U, G \subset \mathbb{R}$ abiertos tales que $f(x^*) \in U$, $f(A) \subset G$, y $\overline{U} \cap \overline{G} = \emptyset$. A continuación se construye una sucesión $\{x_n : n \in \omega\}$ de puntos de A, una sucesión $\{V_n : n \in \omega\}$ de conjuntos abiertos en X y una sucesión $\{f_n : n \in \omega\}$ de elementos de F, tales que para todo $n \in \omega$:

(0) $x^* \in V_n$;

(1) $\overline{V_{n+1}} \subset V_n$;

(2) $f_n(V_n) \subset U$;

(3) $f_{n+1}(x_i) \in G, \quad$ para $i = 1, \dots, n$;

(4) $x_n \in V_n$.

Como f pertenece a la clausura de F y $f(x^*) \in U$, existe $f_1 \in F$ tal que $f_1(x^*) \in U$. Tomamos $V_1 = f_1^{-1}(U)$. Entonces se tiene que $x^* \in V_1$ y V_1 es abierto. Dado que $x^* \in \overline{A}$ podemos elegir $x_1 \in V_1 \cap A$. Existe $f_2 \in F$ tal que $f_2(x^*) \in U$ y $f_2(x_1) \in G$. Tomamos $V_2 \subset f_2^{-1}(U)$ tal que $\overline{V_2} \subset V_1$ y consideramos $x_2 \in V_2 \cap A$. Continuando la construcción de la misma manera para cada $n \in \omega$ conseguimos las sucesiones que buscamos.
Como X es numerablemente compacto, la sucesión $\{x_n : n \in \omega\}$ posee un punto de acumulación $x_\infty \in X$. Además, $x_\infty \in C := \bigcap\{V_n : n \in \omega\}$. En efecto, por (2) se tiene que $C = \bigcap\left\{\overline{V_n} : n \in \omega\right\}$. Por las propiedades (1) y (4) se sigue que $x_i \in V_n$ para todo $i > n$. Luego $x_\infty \in \overline{V_n}$ para todo $n \in \omega$, y $x_\infty \in C$.
Tenemos que $f_n(x_\infty) \in f_n\left(\bigcap\{V_n : n \in \omega\}\right) \subset f_n(V_n) \subset U$. Consideramos $Y = \{x_\infty\} \cup \{x_n : n \in \omega\}$ y $g_n = f_n|_Y$ para todo $n \in \omega$. Entonces por el lema 2.1.5 la clausura del conjunto $\{g_n : n \in \omega\}$ en $C_p(Y)$ es compacta. Por tanto, existe una función límite $g \in C_p(Y)$ de la sucesión $\{g_n : n \in \omega\}$. Como $g_n(x_i) = f_n(x_i) \in G$ para $i > n$ (por (4) y (1)), se tiene que $g(x_i) \in \overline{G}$ para todo $i \in \omega$. Consecuentemente, $g(x_\infty) \in \overline{G}$.
Por otro lado, $g_n(x_\infty) = f_n(x_\infty) \in U$ implica que $g(x_\infty) \in \overline{U}$, obteniendo que $g(x_\infty) \in \overline{U} \cap \overline{G} = \emptyset$. Llegamos así a una contradicción. $\square$

En particular, el teorema implica que se cumpla el siguiente resultado:

Corolario 2.1.7 *Si X es un espacio numerablemente compacto, entonces todo subespacio pseudocompacto cerrado de $C_p(X)$ es compacto.*

También, como corolario del teorema, se sigue el resultado clásico de Grothendieck.

Corolario 2.1.8 (Teorema de Grothendieck) *Sea X es un espacio numerablemente compacto y $A \subset C_p(X)$ un conjunto numerablemente compato en $C_p(X)$. Entonces la clausura de A en $C_p(X)$ es compacta.*

Nota 2.1.9 *D. B. Shakhmatov [44] construye un espacio X pseudocompacto tal que $C_p(X)$ contiene un subespacio pseudocompacto (y por tanto acotado) que no es compacto. Luego el teorema de Grothendieck no se puede generalizar a espacios pseudocompactos.*

Para dicha construcción es necesario el siguiente lema:

Lema 2.1.10 *Sea X un subespacio denso del cubo de Tychonoff I^A. Entonces X es pseudocompacto si y sólo si $\pi_B(X) = I^B$ para todo subconjunto $B \subset A$ numerable.*

<u>*Demostración.*</u> ($\Rightarrow$) Sea $B \subset A$ numerable. Como la aplicación π_B es continua y X es pseudocompacto se tiene que $\pi_B(X)$ es pseudocompacto. Por ser I^B metrizable se sigue que $\pi_B(X)$ es compacto. Dado que $\pi_B(X)$ es denso en I^B se llega a que $\pi_B(X) = I^B$.

($\Leftarrow$) Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Como X es denso en I^A, por el teorema II de Mazur en [30], existe un subconjunto numerable B de A y una función continua $g : \pi_B(X) \to \mathbb{R}$

tal que $f = g \circ \pi_B|_X$. La función g, al ser continua sobre el espacio compacto $\pi_B(X) = I^B$, es acotada. Por consiguiente, f es acotada. $\Box$

Construcción: Denotamos por M al mínimo conjunto bien ordenado con cardinal $2^{\aleph_0}$ y sea $I^M = \prod\limits_{\alpha\in M} I_\alpha$ el cubo de Tychonoff de peso $2^{\aleph_0}$.
Sea $G = \{x \in I^M : |\{\alpha \in M : \pi_\alpha(x) \neq 0\}| \leq \aleph_0\} \subset I^M$. Se tiene que $|G| = 2^{\aleph_0} = |M|$. Escogemos $\{g_\alpha : \alpha \in M\}$ una enumeración de los elementos de G tales que $|\{\alpha \in M : g = g_\alpha\}| = 2^{\aleph_0}$ para todo $g \in G$. Sea $\mathcal{E} = \{A \subset M : |A| \leq \aleph_0\}$. Se tiene que $|\mathcal{E}| = 2^{\aleph_0}$. Elegimos una enumeración $\{A_\beta : \beta \in M\}$ de elementos de $\mathcal{E}$, razonando de forma similar a la anterior, tales que $|\{\beta \in M : A = A_\beta\}| = 2^{\aleph_0}$.
Para cada $\alpha \in M$ fijamos un punto $x_\alpha \in I^M$ definido por:

$$\pi_\gamma(x_\alpha) = \begin{cases} \pi_\gamma(g_\alpha) & \text{, si } \gamma \leq \alpha; \\ \quad 1 & \text{, si } \gamma > \alpha, \alpha \in A_\gamma; \\ \quad 0 & \text{, si } \gamma > \alpha, \alpha \notin A_\gamma. \end{cases}$$

Definimos el espacio $X = \{x_\alpha : \alpha \in M\} \subset I^M$. Veamos que para todo subconjunto numerable B de M tenemos que $\pi_B(X) = I^B$. De esta manera, por el lema anterior, probamos que X es pseudocompacto. Sea $g \in I^B$ arbitrario. Existe un $\alpha > \sup\{\delta : \delta \in B\}$ tal que $g = \pi_B(g_\alpha)$ (existe por la enumeración de G escogida). Por construcción, $\pi_B(x_\alpha) = g$.
Veamos que los subconjuntos numerables de X son cerrados y C^0-sumergibles. Para ello, veamos que dado $B \subset M$ numerable el conjunto $\overline{\{x_\alpha : \alpha \in B\}}^{I^M}$ es homeomorfo a $\beta\omega$. Basta ver que dados $M_1, M_2 \subset M$ numerables tales que $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ se tiene que $\overline{\{x_\alpha : \alpha \in M_1\}}^{I^M} \cap \overline{\{x_\alpha : \alpha \in M_2\}}^{I^M} = \emptyset$.
Existe $\theta \in M$ tal que $\theta > \sup(M_1 \cup M_2)$ y $A_\theta = M_1$ (existe por la enumeración de $\mathcal{E}$ escogida). Entonces $\pi_\theta(x_\alpha) = 1$ si $\alpha \in M_1$ y $\pi_\theta(x_\alpha) = 0$ si $\alpha \in M_2$. Por tanto, los conjuntos $\{x_\alpha : \alpha \in M_1\}$ y $\{x_\alpha : \alpha \in M_2\}$ están funcionalmente separados en I^M. También se ha probado que todo subconjunto numerable de X es cerrado en X.
Veamos que para todo subconjunto numerable $A \subset X$ y toda función $f : A \to I$, f se puede extender a una función continua sobre X que toma valores reales. Dado $A \subset X$ existe un subconjunto B de M tal que $A = \{x_\alpha : \alpha \in B\}$. Dado que $f \in C_p(\{x_\alpha : \alpha \in B\}, I) = I^B$, como $P = \overline{\{x_\alpha : \alpha \in B\}}$ es homeomorfo a $\beta\omega$, existe una función $\hat{f}_0 \in C_p(P, I)$ tal que $\hat{f}_0|_{x_{\{\alpha\}}:\alpha\in B} = f$. Claramente, existe una función $\hat{f}_1 \in C_p(I^M, I)$ tal que $\hat{f}_1|_P = \hat{f}_0$. Luego $\hat{f} = \hat{f}_1|X$ es la función que buscamos.
Veamos que la bola unidad $V_1 = C_p(X, I)$ en $C_p(X)$ es pseudocompacta. Como V_1 es denso en I^X y $C_p(B, I) = I^B$ para todo subconjunto numerable $B \subseteq X$ se sigue que $\pi_B(V_1) = I^B$ para todo subconjunto numerable $B \subseteq X$. Por el lema anterior obtenemos que V_1 es pseudocompacto.

Definición 2.1.11 *Decimos que X es un **μ-espacio** si la clausura de todo subconjunto acotado de X es compacta.*

Por el teorema principal de este apartado sabemos que si X es numerablemente compacto, entonces $C_p(X)$ es un μ-espacio.

Definición 2.1.12 *Decimos que X es un espacio* ***numerablemente pseudocompacto*** *si para todo subconjunto numerable B de X existe un subconjunto numerable A de X tal que $B \subseteq \overline{A}^X$ y $\overline{A}^X$ es pseudocompacto.*

Notemos que los espacios numerablemente compactos y los pseudocompactos separables son espacios numerablemente pseudocompactos, y que todo espacio numerablemente pseudocompacto es pseudocompacto. Por [25] se tiene que si X es numerablemente pseudocompacto, entonces $C_p(X)$ es un μ-espacio:

Veamos que si X es un k-espacio se sigue que $C_p(X)$ es un μ-espacio (para recordar la definición de k-espacio véase el apartado A.4. del apéndice). Para ello necesitamos el siguiente lema:

Lema 2.1.13 *Si X es un k-espacio e Y un espacio topológico, entonces $f \in Y^X$ es continua si y sólo si $f|_K$ es continua para todo $K \subset X$ compacto.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Inmediato.

($\Leftarrow$) Tomemos $K \subset X$ compacto y $C \subset Y$ cerrado, entonces $f^{-1}(C) \cap K = (f|_K)^{-1}(C)$ es cerrado. Luego f es continua, ya que X es un k-espacio. □

Veamos ahora la generalización del teorema de Grothendieck a los k-espacios.

Corolario 2.1.14 *Si X es un k-espacio, entonces $C_p(X)$ es un μ-espacio.*

Demostración. Sea $F \subset C_p(X)$ acotado. Siguiendo de manera idéntica el primer párrafo de la demostración del teorema 2.1.6 se llega a que $\overline{F}^{\mathbb{R}^X}$ es compacto en $\mathbb{R}^X$. Veamos que $\overline{F}^{\mathbb{R}^X} \subset C_p(X)$.
Para ello razonamos por reducción al absurdo, supongamos que existe $f \in \mathbb{R}^X$ no continua tal que $f \in \overline{F}^{\mathbb{R}^X}$. Como X es un k-espacio, dado $Y \subset X$ compacto, por el lema anterior se tiene que $f|_Y \notin C_p(Y|X)$.
Notemos que $C_p(K|X) = C_p(K)$ para todo $K \subset X$ compacto, ya que toda función real definida en un compacto K se puede extender a una función continua en X.
Como π_Y es continua se tiene que $F|Y = \pi_Y(F)$ es acotado en $C_p(Y|X) = C_p(Y)$. Además, dado que $f \in \overline{F}^{\mathbb{R}^X}$, por la continuidad de π_Y se obtiene que $f|_Y \in \overline{F|Y}^{\mathbb{R}^Y}$.
Entonces por el teorema 2.1.6, $D = \overline{F|Y}^{C_p(Y|X)}$ es compacto. Como $\overline{D}^{\mathbb{R}^Y} = D$, se tiene que $\overline{D}^{\mathbb{R}^Y} \subset C_p(Y|X)$.
Como $f|_Y \in \overline{F|Y}^{\mathbb{R}^Y} \subset D$, se obtiene que $f|_Y \in C_p(Y|X)$, lo cual es una contradicción. □

2.2. Algunas propiedades de los compactos de Eberlein y de Corson

Definición 2.2.1 *Un compacto F se dice* ***Eberlein compacto*** *si existe un compacto X tal que F es homeomorfo a un subespacio de $C_p(X)$.*

Lindenstrauss [29] presenta la siguiente caracterización de Compacto de Eberlein:

Proposición 2.2.2 *Un espacio de Hausdorff compacto X es Eberlein compacto si X puede ser sumergido en algún cubo $[0,1]^\Gamma$ de manera que para todo $x \in X$ y para todo $\epsilon > 0$ el conjunto $\{\gamma \in \Gamma \mid x(\gamma) > \epsilon\}$ es finito.*

Definición 2.2.3 *Un espacio de Hausdorff compacto X se dice que es* ***Corson compacto*** *si X puede ser sumergido en algún cubo $[0,1]^\Gamma$ de manera que para todo $x \in X$ el conjunto $\{\gamma \in \Gamma : x(\gamma) > 0\}$ es numerable.*

Notemos que por definición todo espacio Eberlein compacto es Corson compacto.

2.2.1. El teorema de Preiss-Simon

Veamos que la definición de compacto de Eberlein es equivalente a la caracterización que da Roshental [40]. Para ello necesitamos la siguiente definición:

Definición 2.2.4 *Decimos que $\mathcal{A}$ es una familia* ***punto-finita*** *si para cada $x \in X$ se tiene $|\{A \in \mathcal{A} : x \in A\}| < \omega$.*

Teorema 2.2.5 *Un espacio de Hausdorff compacto X es un Eberlein compacto si y sólo si X admite una colección numerable de familias punto-finita de conjuntos cocero que separan los puntos de X.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que $X \subset [0,1]^\Gamma$ es un Eberlein compacto.
Definimos $C_{j,\gamma,n} = \pi_\gamma^{-1}\left(\left]\frac{j-2}{n}, \frac{j}{n}\right[\right) \cap X$, donde π_γ es la proyección en γ. Definimos también:

$$\varphi_n \quad = \quad \{C_{j,\gamma,n} \mid j = 3,4,\ldots,n+1, \gamma \in \Gamma\}$$

y

$$\varphi \quad = \quad \bigcup\{\varphi_n \mid n = 2,3,4,\ldots\}.$$

Notemos que los $C_{j,\gamma,n}$ son conjuntos cocero. Veamos que la familia φ_n es punto finita. Supongamos lo contrario. Si $x \in X$ pertenece a una cantidad infinita de $C_{j,\gamma,n} \in \varphi_n$, entonces debe haber una cantidad infinita de indices γ tales que $x(\gamma) > 1/n$. Contradicción, por ser X Eberlein compacto.
Veamos que la familia φ separa los puntos de X. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Entonces $x(\gamma) \neq y(\gamma)$ para algún $\gamma \in \Gamma$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x(\gamma) < y(\gamma)$. Podemos encontrar $n \in \omega$ tal que se cumplan las dos siguientes desigualdades: $\mid y(\gamma) - x(\gamma) \mid > 2/n$, $y(\gamma) > 1/n$. Existe un $j \in \omega$ tal que $y \in C_{j,\gamma,n}$. Notemos que $x \notin C_{j,\gamma,n}$, ya que en caso contrario $y(\gamma) - x(\gamma) < j/n - (j-2)/n = 2/n$.

($\Leftarrow$) Sea $\varphi = \bigcup\{\varphi_n \mid n \in \omega\}$ la familia de conjuntos cocero que separan los puntos de X con cada φ_n punto-finita. Para cada $C \in \varphi_n$ existe una aplicación continua $f_C : X \to [0,1]$ tal que $f_C(X) \subset [0, 1/n]$, $C = f_C^{-1}(]0,1])$ y $X \setminus C = f_C^{-1}(0)$.

Consideramos la aplicación $\psi : X \to [0,1]^{\varphi}$ definida por $\psi(x) = \{f_C(x) \mid C \in \varphi\}$. Notemos que ψ es continua, dado que cada f_C es continua. Veamos que ψ es inyectiva. Sean $x, y \in X$ tales que $\psi(x) = \psi(y)$, entonces $f_C(x) = f_C(y)$ para todo $C \in \varphi$, ello implica que $x, y \in f_C^{-1}(A)$ para el mismo A, donde éste es $]0,1]$ ó $\{0\}$ para todo $C \in \varphi$, es decir, que tanto x como y pertenecen a C ó a $X \setminus C$ para cada uno de los $C \in \varphi$, pero esto sólo se cumple si $x = y$, ya que φ separa los puntos de X. Como tanto el dominio como la imagen de ψ son espacios de Hausdorff compactos se tiene que ψ es un embebimiento.
Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$ arbitrarios, tomamos $y = \psi(x)$ y $1 \leq n \in \omega$ tal que $\epsilon > 1/n$.
La familia $\mathcal{B} = \{C \mid C \in \varphi_1 \cup \varphi_2 \cup \ldots \cup \varphi_n, x \in \varphi\}$ es finita, ya que cada φ_i es punto-finita. Tomamos $C \in \varphi \setminus \mathcal{B}$. Si $C \in \varphi_i$ para $i \leq n$, entonces $y(C) = f_C(x) = 0$, ya que $x \notin C$. Si $C \in \varphi_i$ para $i > n$, entonces $y(C) = f_C(x) \leq 1/i < 1/n < \epsilon$. □

Para demostrar el teorema de Preiss-Simon necesitamos los siguiente resultados:

Proposición 2.2.6 *Sea $X \subset [0,1]^{\Gamma}$ Eberlein compacto y $x \in X$. Entonces, existe un embebimiento ψ de X en algún cubo $[0,1]^{\Delta}$ tal que $\psi(X)$ es Eberlein compacto y $\psi(x)(\delta) = 0$ para todo $\delta \in \Delta$.*

Demostración. Consideramos $\Delta = \Gamma \times \{0,1\}$. Definimos el embebimiento ψ como sigue: $\psi(y) = z$, donde $z(\gamma, 0) = máx\{y(\gamma) - x(\gamma), 0\}$, $z(\gamma, 1) = máx\{x(\gamma) - y(\gamma), 0\}$.
Es fácil ver que $\psi(x)(\gamma, i) = 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$ y para todo $i \in \{0,1\}$.
Notemos que $\psi(y)(\gamma, i) \leq x(\gamma) + y(\gamma)$, para $i = 0, 1$. Sean $y \in X$ y $\epsilon > 0$ arbitrarios, tenemos que ver que $\{\delta \in \Delta : \psi(y)(\delta) > \epsilon\}$ es finito. Notemos que si $y = x$ ya se cumple, suponemos que $y \neq x$. Para $i = 0$:

$$| \{\gamma \in \Gamma : \psi(y)(\gamma, 0) > \epsilon\} | = | \{\gamma \in \Gamma : y(\gamma) - x(\gamma) > \epsilon\} | \leq | \{\gamma \in \Gamma : y(\gamma) > \epsilon\} | < \omega.$$

Análogamente, para $i = 1$ se tiene que $| \{(\gamma, i) \in \Gamma \times \{0,1\} : \psi(y)(\gamma, i) > \epsilon\} | < \omega$. □

Lema 2.2.7 *Sea $X \subset [0,1]^{\Gamma}$ un Eberlein compacto, $\emptyset \neq A \subset X$ y $\epsilon > 0$. Entonces existe un conjunto finito $F(A, \epsilon) \subset \Gamma$, con las propiedades siguientes:*

(a) El conjunto $\{x \in A : \gamma \in F(A,\epsilon) \Longrightarrow x(\gamma) > \epsilon\}$ es no vacio.

(b) Si para $x \in A$, se tiene $x(\gamma) > \epsilon$ para todo $\gamma \in F(A, \epsilon)$, entonces $x(\gamma) \leq \epsilon$ siempre que $\gamma \notin F(A, \epsilon)$.

Demostración. Probaremos el lema por reducción al absurdo. Supongamos que para todo $F \subset \Gamma$ finito tal que satisface (a) no satisface (b).
Si esto ocurre, se puede construir inductivamente una sucesión estrictamente creciente de conjunto finitos de Γ, $F_1 \subsetneqq F_2 \subsetneqq \ldots$, tales que para cada $n \in \omega$ el conjunto $\{x \in A : \gamma \in F_n \Longrightarrow x(\gamma) > \epsilon\}$ es no vacío.
Para cada $n \in \omega$ consideramos $K_n = \{x \in [0,1]^{\Gamma} : \gamma \in F_n \Longrightarrow x(\gamma) \geq \epsilon\}$. Notemos que para todo $n \in \omega$, $K_n \cap X \neq \emptyset$. Como $\{K_n : n \in \omega\}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos compactos de $[0,1]^{\Gamma}$ *(cerrados de $[0,1]^{\Gamma}$, que es compacto por el teorema de Tychonoff)* y X es compacto, entonces existe un punto $y \in X \cap \bigcap_{n \in \omega} K_n$, ya que $\{X \cap K_n : n \in \omega\}$ posee la propiedad de la intersección finita. Pero se tendría que $y(\gamma) \geq \epsilon$ para infinitos índices γ de Γ, lo cual es una contradicción por ser X Eberlein compacto. □

Teorema 2.2.8 *Sea X un Eberlein compacto y x un punto no aislado de X. Entonces existe una sucesión de conjuntos abiertos $\{U_n : n \in \omega\}$ en X que converge a x.*

<u>*Demostración.*</u> Según la proposición 2.2.6 podemos suponer que $X \subset [0,1]^\Gamma$ y $x(\gamma) = 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Para cada $n \in \omega$ definimos de manera inductiva un conjunto de índices F_n finito, un entorno abierto V_n de x y un subconjunto abierto U_n de X de la siguiente manera:
Para $n = 1$ definimos $F_1 = \emptyset$, $U_1 = V_1 = X$.
Sea $1 < n \in \omega$ y supongamos que F_k, U_k y V_k ya han sido definidos para todo $k = 1, 2, \ldots, n-1$.
Definimos $V_n = \{y \in X : \gamma \in \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} F_i \Longrightarrow y(\gamma) < 1/n\}$.
Por el lema 2.2.7 existe un conjunto finito $F_n = F(V_n, 1/n) \subset \Gamma$ con las propiedades (a) y (b).
Notemos que $F_n \bigcap \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} F_i \right) = \emptyset$.
Definimos $U_n = \{y \in V_n : \gamma \in F_n \Rightarrow y(\gamma) > 1/n\}$. Notemos que U_n es abierto.
Veamos que $\{U_n : n \in \omega\}$ converge a x. Sea W un entorno de x. Entonces existe un numero natural n y un conjunto finito D de índices tales que:

$$W_0 = \{y \in X : \gamma \in D \Rightarrow y(\gamma) < 1/n\} \subset W.$$

Como D es finito y los F_n son disjuntos, existe un $m \in \omega$, $m > n$, tal que $F_k \cap D = \emptyset$ para todo $k \geq m$. Sean $k \geq m$, $y \in U_k$, $\gamma \in D$. Como $y \in V_k$ y $\gamma \notin F_k$, aplicando el apartado (b) del lema anterior obtenemos que $y(\gamma) \leq 1/k \leq 1/m < 1/n$. Por tanto, $y \in W_0 \subset W$. $\square$

Corolario 2.2.9 (Preiss-Simon) *Un subespacio pseudocompacto de un Eberlein compacto es cerrado y, por tanto, Eberlein compacto.*

<u>*Demostración.*</u> Supongamos lo contrario. Sea $Y \subset X$ un subconjunto pseudocompacto tal que $Y \neq X$ y $\overline{Y} = X$.
Por el teorema 2.2.8 existe una sucesión $\{U_n\}$ de conjuntos abiertos que converge a un punto de $X \backslash Y$. Para cada $n \in \omega$ tomamos un punto $x_n \in U_n \cap Y \neq \emptyset$. Consideramos $U = X \backslash \{x_n : n \in \omega\}$. Entonces tenemos que $\{U_n \cap Y : n \in \omega\} \bigcup \{U \cap Y\}$ es un recubrimiento infinito por abiertos localmente finito sobre Y. Como Y es pseudocompacto, por la proposición A.8.7, llegamos a una contradicción. $\square$

Una consecuencia del resultado de Preiss-Simon es que todo espacio Eberlein-compacto es fuertemente Fréchet y por consiguiente, es Fréchet:

Definición 2.2.10 *Un espacio topológico X se dice que es **Fréchet**, si para cada $A \subset X$ y $x \in \overline{A} \setminus A$ existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A que converge a x. Se dice que X es **fuertemente Fréchet** si para cada $A \subset X$ y $x \in \overline{A} \setminus A$ existe una sucesión $\{U_n\}$ de abiertos relativos de A que converge a x.*

Corolario 2.2.11 *Todo Eberlein compacto es fuertemente Fréchet. Consecuentemente, también es Fréchet.*

Demostración. Por el teorema 2.2.8 todo Eberlein compacto es fuertemente Fréchet. Notemos que fuertemente Fréchet implica Fréchet. Sea X un espacio fuertemente Fréchet, sean $A \subset X$ y $x \in \overline{A} \setminus A$. Entonces por definición existe una sucesión $\{U_n\}$ de abiertos relativos de A que converge a x, es decir, para todo entorno de x existe un $n_0 \in \omega$ tal que $U_n \subset U$ para todo $n \geq n_0$. Tomando para cada $n \in \omega$ un punto $x_n \in U_n$ arbitrario, obtenemos una sucesión $\{x_n\} \subset A$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$. $\square$

Nota 2.2.12 *Otra manera de probar que un espacio Eberlein compacto es Fréchet se puede encontrar en [1].*

Definición 2.2.13 *Un espacio X se dice **σ-compacto** si es unión numerable de subespacios compactos.*

La siguiente proposición nos ofrece una nueva caracterización de espacio Eberlein compacto:

Lema 2.2.14 *Sea X un espacio σ-compacto. Entonces existe un compacto F tal que $C_p(X)$ es homeomorfo a un subespacio de $C_p(F)$.*

Demostración. Véase III.1.11. en [1] . $\square$

Proposición 2.2.15 *Sea X un espacio compacto. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) X es Eberlein compacto.

(b) Existe un compacto $F \subset C_p(X)$ que separa los puntos de X.

(c) Existe un subespacio σ-compacto $Y \subset C_p(X)$ que los separa los puntos de X.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Como X es Eberlein compacto existe un compacto Y tal que $X \subset C_p(Y)$. Tomamos F como la imagen de Y bajo la aplicación evaluación $\psi : Y \to C_p(X)$, entonces F es compacto y separa los puntos de X.

$(b) \Rightarrow (c)$ Inmediato.

$(c) \Rightarrow (a)$ La aplicación evaluación $\psi : X \to C_p(Y)$ es continua, y separa los puntos de X, ya que Y separa los puntos de X. Notemos que X es homeomorfo a $\psi(X) \subset C_p(Y)$.
Como Y es σ-compacto, por el lema 2.2.14, existe un compacto K tal que $C_p(Y)$ es homeomorfo a un subespacio de S de $C_p(K)$.
Luego $X \cong \psi(X) \subset C_p(Y) \cong S \subset C_p(K)$ y, por tanto, X es Eberlein compacto. $\square$

2.2.2. El teorema de Debs

Veamos que todos los compactos de Corson son espacios co-Namioka:

Teorema 2.2.16 (Debs) *Sea X un espacio de Baire, K un espacio Corson compacto y $\Phi : X \to C_p(K)$ una función continua. Entonces existe un subconjunto A de X que es G_δ y denso de manera que $\Phi : X \to C_u(K)$ es continua en cada punto $x \in A$.*

Demostración. Podemos suponer que K es un subespacio de un cubo $[0,1]^I$ y que para cada $y \in K$ el conjunto

$$S(y) = \{i \in I : y(i) > 0\}$$

es numerable. Para cada subconjunto Y de K consideramos:

$$S(Y) = \bigcup_{y \in Y} S(y).$$

Si J es un subconjunto numerable de I, identificamos el espacio $C([0,1]^J)$ como el subespacio de $C([0,1]^I)$ constituido por las funciones sobre $[0,1]^I$ que dependen de las J-coordenadas únicamente y fijamos el conjunto numerable $\{\psi_J^k : k \in \omega\}$ de $C([0,1]^J)$ denso para la topología de la convergencia uniforme (véase lema 4.2.5). Para cada subconjunto numerable H de K y para cada natural n consideramos:

$$\Psi(H) = \{\psi_J^k : J = S(H), k \in \omega\}$$

y

$$\Psi_n(H) = \{\psi_J^k : J = S(H), 0 \leq k \leq n\}.$$

Sea $x \in X$, denotamos por $osc(x)$ a la oscilación en x de la función $\Phi : X \to C_u(K)$ definida como sigue:

$$osc(x) = inf\{sup\{\|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\| : x_1, x_2 \in W\} : W \subseteq X \text{ abierto y } x \in W\}.$$

Para cada $k \in \omega$. Consideramos $G_k = \{x \in X : osc(x) < \frac{1}{k}\}$.
Nótese que cada G_k es abierto. Ya que si $x \in G_k$, entonces existe un entorno W de x tal que $S_W = sup\{\|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\| : x_1, x_2 \in W\} < 1/k$ y por lo tanto $W \subseteq G_k$. Luego $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ es un conjunto G_δ de X. Al ser X un espacio de Baire, para probar que $\overline{A} = X$ basta ver que $\overline{G_k} = X$ para todo k natural dado. Supongamos que existe un natural k_0 tal que $\overline{G_{k_0}} \neq X$. Tomamos $U = X \setminus \overline{G_{k_0}}$ y $\epsilon = \frac{1}{k_0}$.
Consideramos ahora el juego de Choquet $\mathcal{J}(X)$ (véase la introducción), donde el jugador β juega los abiertos no vacíos $\{V_n : n \in \omega\}$, α juega los abiertos no vacíos $\{U_n : n \in \omega\}$, y se construye además una sucesión de subconjuntos finitos $\{F_n : n \in \omega\}$ de K satisfaciendo las condiciones:

(1) $V_0 = U$ y $F_0 = \{y_0\}$ (donde $y_0 \in K$ es un punto arbitrario);

(2) $V_{n+1} \subset V_n$ y $F_n \subset F_{n+1}$;

(3) $\forall x \in V_{n+1}$, $\forall k \leq n$, $\forall \psi \in \Psi_n(F_k)$, $\exists y \in F_{n+1} : |(\Phi(x) - \psi)(y)| > \frac{\epsilon}{2}$;

(4) $\emptyset \neq U_n \subset V_n \Rightarrow V_{n+1} \neq \emptyset$.

Notemos que (4) implica que la construcción nos proporciona una estrategia para β en el juego $\mathcal{J}(X)$. Veamos, por inducción sobre n, que dicha construcción es posible. Para $n = 0$ está claro. Supongamos que tenemos construidos $\{(V_k, F_k) : k \leq n\}$ para cierto n natural y tomemos $U_n \subset V_n$ no vacío arbitrario.
Consideramos:

$$\{\psi^0, \ldots, \psi^p\} = \bigcup_{0 \leq k \leq n} \Psi_n(F_k)$$

y para cada $0 \leq m \leq p$ definimos:

$$V^m = \{x \in U_n : \exists y \in K, |(\Phi(x) - \psi^m)(y)| > \frac{\epsilon}{2}\}.$$

Para cada $x \in U_n \setminus V^m$ se tiene que $\|\Psi(x) - \psi^m\| < \frac{\epsilon}{2}$, por lo que $diam(\Psi(U_n \setminus V^m)) \leq \epsilon$. Como $V_0 \cap G_{k_0} = \emptyset$, el abierto V^m es denso en U_n para cualquier $0 \leq m \leq p$. Luego el abierto $V = \bigcap_{0 \leq m \leq p} V^m$ es no vacío. Fijamos un punto $a \in V$ arbitrario y para cada $0 \leq m \leq p$ elegimos un punto $b_m \in K$ tal que $|(f(a) - \psi^m)(b_m)| > \frac{\epsilon}{2}$.
Definimos:

$$V_{n+1} = \bigcap_{m=0}^{p} \{x \in V : |(\Phi(x) - \psi^m)(b_m)| > \frac{\epsilon}{2}\}$$

y

$$F_{n+1} = F_n \cup \{b_0, \ldots, b_p\}.$$

Entonces dado que V_{n+1} es un conjunto abierto y no vacío por el hecho de contener el punto a, llegamos a que (V_{n+1}, F_{n+1}) satisface las condiciones (2), (3) y (4).
Por el teorema 1.0.1 el espacio X es β-desfavorable, por lo que $\bigcap_{n \in \omega} V_n \neq \emptyset$. Consideramos ahora los conjuntos:

$$J_n = S(F_n);$$
$$J = \bigcup_{n \in \omega} J_n$$

y

$$L = \{y \in K : S(y) \subset J\} = \bigcap_{i \in I \setminus J} \{y \in K : y(i) = 0\}.$$

Notemos que L es un subconjunto compacto y metrizable de K que se puede sumergir en $[0,1]^J$ (donde J es un conjunto numerable) por la proyección canónica. Dado que la sucesión $\{J_n :$

$n \in \omega\}$ es creciente, el espacio $\bigcup_{n\in\omega} C([0,1]^{J_n})$ es denso en $C([0,1]^J)$. Por tanto, si consideramos el conjunto $\Gamma = \bigcup_{n\in\omega} \Psi(F_n)$, se tiene que $\Gamma_L = \{\varphi|_L : \varphi \in \Gamma\}$ es denso en $C(L)$. Sabemos que $\bigcap_{n\in\omega} V_n \neq \emptyset$, por lo que tomamos un punto $x_0 \in \bigcap_{n\in\omega} V_n$. Como $\bigcup_{\substack{0\le k\le n,\\ n\in\omega}} \Psi_n(F_k) = \Gamma$ y $\bigcup_{n\in\omega} F_n \subset L$, se sigue de (3) que

$$\|\Psi(x_0) - \varphi\| > \frac{\epsilon}{2},$$

lo cual es una contradicción con el hecho de que Γ_L sea denso en $C(L)$. □

Corolario 2.2.17 *Si K es Corson compacto entonces K un espacio co-Namioka.*

El resultado de Debs nos permite demostrar que todo espacio de Baire que continene un subespacio σ-acotado denso es un espacio de Namioka:

Corolario 2.2.18 *Sea X un espacio de Baire tal que posee un subespacio σ-acotado denso. Entonces X es un espacio de Namioka.*

Demostración. Sea Y un espacio compacto arbitrario y $F : X \times Y \to \mathbb{R}$ una función separadamente continua. Consideremos la siguiente relación de equivalencia sobre Y:

$$y_1 \sim y_2 \Longleftrightarrow F(x, y_1) = F(x, y_2), \qquad \forall x \in X.$$

Consideremos el espacio cociente $\tilde{Y} = \dfrac{Y}{\sim}$. Notemos que $\tilde{Y}$ es compacto.
Entonces $\Phi : X \to C_p(\tilde{Y})$ es una función continua.
Por el teorema de Grothendieck se tiene que $\overline{\Phi(X)}^{C_p(\tilde{Y})}$ contiene un subespacio denso σ-compacto, el cual denotamos por B. Como B separa los puntos de $\tilde{Y}$, por la proposición 2.2.15, $\tilde{Y}$ es también Eberlein compacto (y por tanto Corson compacto), luego por el corolario 2.2.17 se tiene lo que buscábamos. □

En particular, se sigue que son espacios de Namioka los *espacios σ-compactos*, los *espacios de Baire σ-acotados*, los *espacios de Baire con un subconjunto denso σ-compacto*, y los *espacios de Baire separables.*

2.3. Espacios angélicos

Sabemos que tanto la compacidad como la compacidad secuencial implican compacidad numerable, y lo mismo ocurre con las propiedades relativas correspondientes. Es bien sabido que los espacios métricos cumplen la implicación inversa. Veamos una clase interesante de espacios.

Definición 2.3.1 *Un espacio topológico X se dice que es **angélico** si posee las siguientes tres propiedades:*

(a) Dado $A \subseteq X$, son equivalentes:

(1) A es relativamente compacto.

(2) A es relativamente numerablemente compacto.

(3) A es relativamente secuencialmente compacto.

(b) Dado $A \subseteq X$, son equivalentes:

(4) A es compacto.

(5) A es numerablemente compacto.

(6) A es secuencialmente compacto.

(c) Todo punto en la clausura de un subconjunto A relativamente compacto es límite de una sucesión en A.

Nota 2.3.2 *Notemos que todo espacio métrico es angélico y que el Teorema de Eberlein-Šmulian afirma que un espacio de Banach con la topología débil es angélico.*

El siguiente lema nos ofrece una caracterización más escueta de espacio angélico:

Lema 2.3.3 *X es angélico si y sólo si se cumple la implicación* (2) $\Rightarrow$ (1) *y* (*c*).

<u>*Demostración.*</u> Véase 0.3. de [37]. □

2.3.1. El espacio $C_p(X)$

A continuación presentamos una serie de resultados que nos permiten demostrar el teorema de Pryce y poder probar que si X contiene un subconjunto σ-compacto y denso, entonces $C_p(X)$ es angélico.

Definimos el siguiente subespacio de $\mathbb{R}^X$:

$$G = \{\varphi \in \mathbb{R}^X : \varphi \text{ es acotada sobre cada subconjunto compacto de } X\},$$

y sobre G definimos para cada subconjunto relativamente compacto Y de X la seminorma:

$$p_Y(\varphi) = sup\{|\varphi(x)| : x \in X\}.$$

El conjunto de todas las seminormas define sobre G la topología, localmente convexa, de la convergencia compacta. Escribiremos C-clausura para hacer referencia a la clausura respecto a esta topología.

Notemos que G es un álgebra bajo las operaciones puntuales usuales y que $C(X)$ es una subálgebra de G. En la demostración de la siguiente proposición empleamos la siguiente versión del teorema de Stone-Weierstrass (véase [39], pág. 127, Corolario 3.2.18).

Teorema 2.3.4 (Stone-Weierstrass) *Sea K un espacio topológico compacto y sea $1 \in A \subset C(K)$. Entonces la subálgebra $\overline{alg}A$ generada por A, cerrada para la norma, está formada por todas las funciones $y \in C(K)$ tales que:*

$$\text{si } s,t \in K \quad y \quad x(s) = x(t), \qquad \forall x \in A \quad \Rightarrow \quad y(s) = y(t).$$

(Denotamos por 1 la función con valor constante la unidad.)

Proposición 2.3.5 *Sea X un espacio topológico, $A \subset C_p(X)$ un conjunto relativamente numerablemente compacto y $\psi \in \overline{A}^{\mathbb{R}^X}$. Entonces para cada subconjunto $B \subset X$ σ-compacto existe una función $f \in C(X)$ y una sucesión $\{f_n : n \in \omega\}$ en A tal que:*

$$f_n(x) \to f(x) = \psi(x), \qquad \forall x \in \overline{B}^X.$$

<u>*Demostración.*</u> Veamos que $\overline{A}^{\mathbb{R}^X} \subset G$. Para ello suponemos lo contrario, es decir, que existe una función $g \in \overline{A}^{\mathbb{R}^X}$ que no es acotada en algún subconjunto $K \subset X$ compacto. Por consiguiente, podemos encontrar una sucesión $\{x_n : n \in \omega\}$ en K tal que $|g(x_n)| \to \infty$.
Notemos que podemos aproximar g por elementos de A sobre subconjuntos finitos de X. Dado $\epsilon > 0$ y un subconjunto finito $F \subset X$, como $g \in \overline{A}^{\mathbb{R}^X}$, si tomamos $U = U_g(F;\epsilon)$ (véase apéndice para la definición de entorno en la topología de la convergencia puntual) se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$. Por consiguiente, existe $h \in A$ tal que $|g(x) - h(x)| \leq \epsilon$ para todo $x \in F$.
Luego para cada $n \in \omega$ existe una función $f_n \in A$ tal que $|g(x_j) - f_n(x_j)| \leq \frac{1}{n}$ para $1 \leq j \leq n$. Por hipótesis $\{f_n : n \in \omega\}$ posee un punto de acumulación $f \in C(X)$.
Dado $N \in \omega$, tomando $U = U_f(x_1, \ldots, x_N; \frac{1}{N})$, se tiene que existe $n_0 \geq N$ tal que $f_{n_0} \in U$, es decir, $|f_{n_0}(x_j) - f(x_j)| \leq \frac{1}{N}$ para $1 \leq j \leq N$. Luego:

$$|g(x_j) - f(x_j)| \leq |g(x_j) - f_{n_0}(x_j)| + |f_{n_0}(x_j) - f(x_j)| \leq \frac{2}{N}.$$

Como N es arbitrario se llega a que $g(x_n) = f(x_n)$ para todo $n \in \omega$, lo cual es una contradicción, ya que $f \in C(X)$.
Sea $g \in \overline{A}^{\mathbb{R}^X}$ y $B \subseteq X$ σ-compacto. Veamos que existe una sucesión $\{B_n : n \in \omega\}$ de conjuntos compactos de X tales que $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$ y $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Al ser B σ-compacto existe una sucesión $\{\tilde{B}_n : n \in \omega\}$ de conjuntos compactos de X tales que $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n$. Como la unión finita de conjuntos compactos es compacto, basta definir la sucesión $\{B_n : n \in \omega\}$ de la siguiente manera: $B_1 = \tilde{B}_1$, $B_2 = \tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2, \ldots$, $B_n = \tilde{B}_{n-1} \cup \tilde{B}_n$.
La siguiente construcción se realiza por inducción. Empezamos definiendo $M_1 = \langle g, 1\rangle \subset G$. Tomamos $Y_1 \subset B_1$ finito tal que:

$$p_{Y_1}(\varphi) \geq \frac{1}{2} p_{B_1}(\varphi).$$

(Basta razonar por reducción al absurdo para ver que podemos encontrar Y_1.)
Seleccionamos $f_1 \in A$ tal que $|g(x) - f_1(x)| \leq \frac{1}{1}$ para todo $x \in Y_1$.
Definimos $M_2 = \langle g, 1, f_1, f_1^2\rangle \subset G$. Tomamos $Y_2 \subset B_2$ tal que $Y_1 \subset Y_2$ y:

$$\begin{cases} p_{Y_2 \cap B_1}(\varphi) \geq \frac{1}{2} p_{B_1}(\varphi) \\ p_{Y_2}(\varphi) \geq \frac{1}{2} p_{B_2}(\varphi) \end{cases}$$

para todo $\varphi \in M_2$. Notemos que para ello basta tomar $Z_1 \subset B_1$, $Z_2 \subset B_2$ de forma separada y considerar $Y_2 = Y_1 \cup Z_1 \cup Z_2$.
Seleccionamos $f_2 \in A$ tal que $|g(x) - f_2(x)| \leq \frac{1}{2}$, para todo $x \in Y_2$.
Continuando de esta manera se obtienen las sucesiones $\{f_n : n \in \omega\}$, $\{M_n : n \in \omega\}$ y $\{Y_n : n \in \omega\}$ tales que:

(1) M_n es el espacio vectorial generado por g y todos los polinomios de grado a lo sumo n conteniendo $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$;

(2) Y_n es un subconjunto finito de B_n;

(3) $p_{Y_n \cap B_k}(\varphi) \geq \frac{1}{2} p_{B_k}(\varphi)$ para todo $\varphi \in M_n$ y $1 \leq k \leq n$;

(4) $|g(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ para todo $x \in Y_n$;

(5) $Y_{n-1} \subset Y_n$, $M_{n-1} \subset M_n$, $x_n \in A$.

Definimos $Y = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Y_n$ y $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n \subset G$. Entonces M es el espacio vectorial generado por g junto con la subálgebra $alg\{f_n : n \in \omega\}$ de $C(X)$.
Sea $k \in \omega$ y $\varphi \in M$, entonces $\varphi \in M_n$ para algún $n \geq k$, y se sigue que:

$$p_{Y \cap B_k}(\varphi) \geq p_{Y_n \cap B_k}(\varphi) \geq \frac{1}{2} p_{B_k}(\varphi).$$

Por tanto,

$$p_{Y \cap B_k}(\varphi) \geq \frac{1}{2} p_{B_k}(\varphi), \qquad \text{para todo } \varphi \in M \text{ y } k \in \omega.$$

Como $p_{Y \cap B_k}$ y p_{B_k} son funciones sobre G que toman valores reales y continuas para la topología de la convergencia compacta se puede extender la desigualdad previa a la C-clausura de M, que denotaremos por $\overline{M}$:

(6) $p_{Y \cap B_k}(\varphi) \geq \frac{1}{2} p_{B_k}(\varphi)$ para todo $\varphi \in \overline{M}$ y $k \in \omega$.

Por hipótesis, $\{f_n : n \in \omega\}$ tiene un punto de acumulación $f \in C(X)$. Como la subálgebra $alg\{f_n : n \in \omega\} \subset M$, para todo subconjunto compacto K de X podemos aproximar uniformemente sobre K a cualquier función $h \in C(X)$ por elementos de M con la propiedad:

$$f_n(s) = f_n(t), \forall n \quad \Rightarrow \quad h(s) = h(t),$$

aplicando el teorema de Stone-Weierstrass a las funciones en $C(X)$ restringidas a K.
Notemos que el punto de acumulación $f \in C(X)$ obtenido cumple la anterior propiedad. Entonces para cada compacto $K \subset X$ y $\epsilon > 0$ existe una función $h \in M$ tal que $p_K(f - h) < \epsilon$. Ello implica que $f \in \overline{M}$ y por (6) se tiene que:

$$p_{Y \cap B_k}(g - f) \geq \frac{1}{2} p_{B_k}(g - f), \qquad \text{para todo } k \in \omega. \tag{*}$$

Dados $x \in Y$ y $N \in \omega$ existe un natural $n_0 \geq N$ tal que $x \in Y_{n_0}$ (y por tanto $x \in Y_n$ para todo $n \geq n_0$). Como f es punto de acumulación de $\{f_n : n \in \omega\}$, tomando $U = U_f(x, \frac{1}{N})$ podemos seleccionar $n_* \geq n_0$ tal que $f_{n_*} \in U$. Entonces:

$$|g(x) - f(x)| \leq |g(x) - f_{n_*}(x)| + |f_{n_*}(x) - f(x)| \leq \frac{2}{N}.$$

Como N es arbitrario, obtenemos que:

$$g(x) = f(x), \qquad \text{para todo } x \in Y$$

y, por la desigualdad (*), se llega a que:

$$p_{B_k}(g - f) \leq 2p_{Y \cap B_k}(g - f) = 0, \qquad \text{para todo } k \in \omega.$$

Por tanto, $g(x) = f(x)$ para todo $x \in B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

Supongamos que existe un punto $x_0 \in \overline{B}$ tal que $f_n(x_0) \nrightarrow g(x_0)$. Entonces existe un $\epsilon > 0$ y una subsucesión $\{n_k : k \in \omega\}$ tal que $|f_{n_k}(x_0) - g(x_0)| \geq \epsilon$ para todo $k \in \omega$.

La subsucesión $\{f_{n_k} : k \in \omega\}$ tiene un punto de acumulación $h \in C(X)$ tal que $h(x_0) \neq f(x_0)$. Pero h es también un punto de acumulación de $\{f_n : n \in \omega\}$ y por el razonamiento anterior se tiene que $g(x) = h(x)$ para todo $x \in B$. Ello implica que $(f - h)$ es una función continua que se anula en B pero no en $x_0 \in \overline{B}$ lo cual es una contradicción. Por consiguiente, $f_n(x) \to g(x)$ para todo $x \in \overline{B}$ y como f es punto de acumulación de $\{f_n : n \in \omega\}$ llegamos a que $g = f$ en $\overline{B}$. $\square$

Para probar el teorema de Pryce es necesaria la siguiente observación:

Observación 2.3.6 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^X$ relativamente numerablemente compacto. Entonces $\overline{A}^{\mathbb{R}^X}$ es compacto.*

<u>*Demostración.*</u> Supongamos que A no es puntualmente acotado, entonces existe $x \in X$ y $\{f_n : n \in \omega\}$ en A tal que $|f_n(x)| \to \infty$, por lo que $\{f_n : n \in \omega\}$ no puede tener un punto de acumulación, lo cual es una contradicción.

Al ser A puntualmente acotado está contenido en un producto de intervalos cerrados. Entonces $\overline{A}^{\mathbb{R}^X}$ es compacto por el teorema de Tychonoff. $\square$

Teorema 2.3.7 (Pryce) *Sea X un espacio topológico y $\mathcal{B}$ la familia formada por las clausuras de subconjuntos σ-compactos de X. Si X tiene la propiedad de que cualquier función $\psi \in \mathbb{R}^X$ que coincide en cada $C \in \mathcal{B}$ con alguna $f \in C_p(X)$ (f depende de C) está en $C_p(X)$, entonces la compacidad relativa y la compacidad numerable relativa son equivalentes en los subconjuntos de $C_p(X)$.*

<u>*Demostración.*</u> Queremos demostrar que la clausura en $C_p(X)$ de un conjunto relativamente numerablemente compacto es compacto en $C_p(X)$. Por la observación 2.3.6 basta probar que su clausura en $\mathbb{R}^X$ es continua. Pero, dadas las hipótesis del enunciado del teorema, se obtiene el resultado por la proposición 2.3.5. $\square$

Veamos, como consecuencia del teorema de Pryce, una familia de espacios X para los que $C_p(X)$ es angélico:

Corolario 2.3.8 *Si X contiene un subconjunto σ-compacto y denso, entonces $C_p(X)$ es angélico.*

Demostración. Sea B subconjunto de X, σ-compacto y denso y A un subconjunto relativamente numerablemente compacto en $C_p(X)$. Entonces por la proposición 2.3.5 todo elemento de la clausura de A en $\mathbb{R}^X$ es continua y es límite de una sucesión en A. Como el teorema 2.3.7 implica que A es relativamente compacto en $C_p(X)$ se tiene que $C_p(X)$ es angélico por la caracterización del lema 2.3.3. □

En particular, $C_p(X)$ es angélico si X es compacto, separable ó σ-compacto.

Observación 2.3.9 *Si X es pseudocompacto, entonces $C_p(\beta X)$ es angélico. En particular, todo subconjunto relativamente numerablemente compacto de $C_p(\beta X)$ es relativamente compacto en $C_p(\beta X)$.*

Otra consecuencia del teorema de Pryce es el teorema de Haydon. Para la prueba del teorema es necesario recordar la noción de compactificación de Stone-Čech (véase el teorema A.3.2).

Teorema 2.3.10 (Haydon) *Si X es un espacio pseudocompacto, entonces los subespacios compactos de $C_p(X)$ son compactos en $C_p(\beta X)$.*

Demostración. Sea $\{f_n : n \in \omega\}$ una sucesión en $C_p(X)$. Si tomamos $u \in \beta X$, veamos que existe $x \in X$ tal que $f_n(x) = f_n^\beta(u)$ para cada $n \in \omega$.
Consideramos la sucesión $\{r_n : n \in \omega\}$ en $\mathbb{R}$ donde $r_n = f_n^\beta(u)$ para cada $n \in \omega$. Como el conjunto $(f_n^\beta)^{-1}(r_n) = \bigcap_{k=1}^{\infty} (f_n^\beta)^{-1}(]r_n - \frac{1}{k}, r + \frac{1}{k}[)$ es G_δ, entonces $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} (f_n^\beta)^{-1}(r_n)$ es G_δ.
Por la proposición A.8.8, $G \not\subset \beta X \setminus X$, luego existe $x \in X$ tal que $f_n(x) = f_n^\beta(u)$ para todo $n \in \omega$.
Se sigue de lo anterior que los subconjuntos relativamente numerablemente compactos de $C_p(X)$ y $C_p(\beta X)$ son los mismos. Entonces, un subconjunto relativamente compacto de $C_p(X)$ es relativamente numerablemente compacto en $C_p(\beta X)$ y, por la observación 2.3.9, es relativamente compacto en $C_p(\beta X)$. Ello implica que si un subconjunto es compacto en $C_p(X)$, al ser relativamente compacto y cerrado, se tiene que es compacto en $C_p(\beta X)$. □

2.3.2. El espacio $B_1(X)$

Definición 2.3.11 *Se dice que una función $f : X \to \mathbb{R}$ es de la **primera clase de Baire** si existe una sucesión de funciones continuas $\{f_n : n \in \omega\} \subseteq C(X)$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$. Denotamos por $B_1(X)$ al conjunto de todas las funciones de la primera clase de Baire sobre X.*

Definición 2.3.12 *Se dice que una función $f : X \to M$ tiene la **propiedad del punto de continuidad** si para todo cerrado F de X, $f|_F$ tiene al menos un punto de continuidad.*

El siguiente resultado es conocido como el teorema de caracterización de Baire [3] para funciones de la primera clase de Baire:

Teorema 2.3.13 (Baire) *Sea X un espacio métrico completo. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ es de la primera clase de Baire si y sólo si f tiene la propiedad del punto de continuidad.*

La demostración del teorema se sigue de los siguientes lemas, en ellos se supone que X es un espacio métrico completo:

Lema 2.3.14 *Para todo $f \in B_1(X)$ y todo $U \subseteq \mathbb{R}$ abierto, $f^{-1}(U)$ es un conjunto F_σ.*

Demostración. Basta probar que para todo $q \in \mathbb{Q}$ los conjuntos $\{x \in X : f(x) < q\}$ y $\{x \in X : f(x) > q\}$ son F_σ. Sea $\{f_n : n \in \omega\} \subseteq C(X)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$, entonces:

$$\{x \in X : f(x) < q\} = \bigcup_{\substack{p\in\mathbb{Q}\\ p<q}} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) \leq p\};$$

$$\{x \in X : f(x) > q\} = \bigcup_{\substack{p\in\mathbb{Q}\\ p>q}} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) \geq p\}.$$

□

Lema 2.3.15 *Si A y B son conjuntos F_σ, entones existen $A^* \subseteq A$ y $B^* \subseteq B$ conjuntos F_σ tales que $A \cup B = A^* \cup B^*$ y $A^* \cap B^* = \emptyset$.*

Demostración. Dado que $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ y $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ donde A_n y B_n son cerrados para todo $n \in \omega$. Fijado $n \in \omega$, consideramos los conjuntos $A_n^* = A_n \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} B_i$ y $B_n^* = B_n \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i$. Entonces cada A_n^* y B_n^* son F_σ y tomando $A^* = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n^*$ y $B^* = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n^*$ llegamos a lo que buscamos. □

Lema 2.3.16 *Si $A \subset X$ es a la vez F_σ y G_δ entonces $\chi_A \in B_1(X)$.*

Demostración. Consideramos $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ y $X \setminus A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ donde A_n y B_n son cerrados para todo $n \in \omega$ y donde las sucesiones $\{A_n : n \in \omega\}$ y $\{B_n : n \in \omega\}$ son crecientes. Entonces para cada $n \in \omega$, por el lema de Urysohn, existe una función continua $f_n : X \to [0, 1]$ tal que $f_n(a) = 1$ si $a \in A_n$ y $f_n(b) = 0$ si $b \in B_n$. Por tanto, como $\chi_A = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, se tiene que $\chi_A \in B_1(X)$. □

Lema 2.3.17 *Si $f : X \to \mathbb{R}$ es tal que $f^{-1}(]-\infty, q[)$ y $f^{-1}(]q, \infty[)$ son F_σ para todo $q \in \mathbb{Q}$, entonces $f \in B_1(X)$.*

Demostración. Podemos suponer que $f : X \to]0,1[$. Para cada $n \geq 2$ e $i = 0, 1, \ldots, n-2$, consideramos el conjunto:

$$A_n(i) = \left\{ x \in X : f(x) \in \left] \frac{i}{n}, \frac{(i+2)}{n} \right[\right\}.$$

Recordemos que en un espacio métrico todo abierto es un F_σ, luego por el lema 2.3.15, podemos tomar los conjuntos F_σ, $A_n^*(i) \subseteq A_n(i)$, para $n \leq 2$, $i = 0, \ldots, n-2$, tales que $A_n^*(i) \cap A_n^*(j) = \emptyset$ si $i \neq j$ y $\bigcup_{i=0}^{n-2} A_n^*(i) = X$ para todo $n \geq 2$. Consideramos la función:

$$f_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \chi_{A_n^*(i)}.$$

Entonces, por el lema 2.3.16, $f_n \in B_1(X)$ para cada $n \geq 2$. Dado que $f_n \to f$ uniformemente, por el lema 4.1.16, se llega a que $f \in B_1(X)$. □

Lema 2.3.18 *Sea $f \in B_1(X)$, entonces f tiene la propiedad del punto de continuidad.*

Demostración. Dados $p, q \in \mathbb{Q}$ tales que $p < q$, consideramos el conjunto:

$$F_{pq} = \{x \in F : \limsup_{\substack{y \to x \\ y \in F}} f(y) \leq q \wedge \liminf_{\substack{y \to x \\ y \in F}} f(y) \geq q\}.$$

Por el teorema de categoría de Baire basta probar que todo F_{pq} es cerrado y raro (i.e. denso en ninguna parte). Supongamos que existen $p < q$ tales que F_{pq} contiene un abierto no vacío U. Si tomamos dos racionales $p < p' < q < q'$ se tiene que $U \cap f^{-1}(]-\infty, p'])$ y $U \cap f^{-1}([q', \infty[)$ son dos conjuntos densos y G_δ (cerrados en un métrico) de U con intersección vacía, contradiciendo el teorema de categoría de Baire. □

Lema 2.3.19 *Sea $f : X \to \mathbb{R}$. Si f tiene la propiedad del punto de continuidad, entonces $f \in B_1(X)$.*

Demostración. Por el lema 2.3.17 basta probar que para cada $q \in \mathbb{Q}$ los conjuntos $A_q = \{x \in X : f(x) < q\}$ y $B_q = \{x \in X : f(x) > q\}$ son F_σ. Por simetría es suficiente probar sólo que el conjunto A_q es F_σ. Dado $p \in \mathbb{Q}$ consideramos el conjunto $F_p = \{x \in X : f(x) \leq p\}$. Basta con encontrar para cada $p < q$ un conjunto F_σ, F_p^*, tal que $F_p \subseteq F_p^* \subseteq A_q$. Veamos que tales conjuntos existen. Consideramos la familia:

$$\mathcal{U}_p = \{U \subset X \text{ abierto } : \exists C \subseteq X \text{ que es } F_\sigma \text{ tal que } U \cap F_p \subseteq C \subseteq A_q\}.$$

Sea $G = \bigcup \mathcal{U}_p$. Notemos que $G \in \mathcal{U}_p$. Veamos que $G = X$. Supongamos lo contrario. Sea $F = X \setminus G$, e $y \in F$ un punto de continuidad de $f|_F$. Entonces existe un abierto U tal que $y \in U \cap F$ y $f(U \cap F) \subseteq]p, \infty[$ ó $f(U \cap F) \subseteq]-\infty, q[$, dependiendo de si $f(y) > p$ ó $f(y) < p$ respectivamente.

Si se da el primer caso, entonces $U \cap F \cap F_p = \emptyset$, luego $U \cap F_p = U \cap G \cap F_p$. Por ello y por

el hecho de que $U \cap G \in \mathcal{U}_p$ se sigue que $U \in \mathcal{U}_p$. Por consiguiente, $y \in \bigcup \mathcal{U}_p$, lo cual es una contradicción.
Para el segundo caso, se tiene que:

$$U \cap F_p \subseteq (U \cap F) \cup (U \cap G \cap F_p) \subseteq A_q$$

y por el hecho de que $U \cap G \in \mathcal{U}_p$ y que $U \cap F$ es un F_σ se llega a la contradicción. $\square$

Definición 2.3.20 *Sea X un espacio topológico y f una función definida en X que toma valores reales. Se dice que f satisface el* ***Criterio de Discontinuidad*** *si existe un subconjunto no vacío $L \subset X$ y $r, \delta \in \mathbb{R}$ con $\delta > 0$ tales que para todo abierto no vacío $U \subseteq L$ relativo a L existen $y, z \in U$ tales que $f(y) > r + \delta$ y $f(z) < r$.*

Notemos que si f satisface el criterio de discontinuidad, entonces existe un subconjunto K cerrado no vacío de X tal que $f|_K$ no tiene ningún punto de continuidad. Para ello basta tomar L, r, δ de la definición del criterio de discontinuidad, y considerar $K = \overline{L}$.

Proposición 2.3.21 *Sea $f : X \to \mathbb{R}$, donde X es un espacio métrico completo. Entonces, f no tiene la propiedad del punto de continuidad si y sólo si f satisface el criterio de discontinuidad.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Como f no tiene la propiedad del punto de continuidad existe un subconjunto K cerrado no vacío de X tal que $f|_K$ no tiene ningún punto de continuidad.
Para cada $n \in \omega$ consideramos el conjunto:

$$A_n = \{x \in K : \forall \text{ entorno } U \text{ de } x\ \exists y, z \in U \text{ tales que } f(y) - f(z) > \frac{1}{n}\}.$$

Como $f|_K$ no tiene ningún punto de continuidad se tiene que:

$$K = \bigcup_{n \in \omega} A_n.$$

Entonces por el teorema de categoría de Baire existe un n_0 natural tal que A_{n_0} tiene interior no vacío U_0. Tomamos $K_0 = \overline{U_0}$ y $\delta = \frac{1}{n_0}$. Notemos que para todo $U \subseteq K_0$ abierto se tiene que $U \cap U_0$ es abierto en K_0. Luego existen $y, z \in U$ tales que $f(y) - f(z) > \delta$.
Sea $\{r_n : n \in \omega\} = \mathbb{Q}$. Para cada $n \in \omega$ definimos el conjunto:

$$B_n = \{x \in K_0 : \forall \text{ entorno } U \text{ de } x\ \exists y, z \in U \cap K_0 \text{ tales que } f(z) < r_n\ ,\ f(y) > r_n + \delta\}.$$

Como:

$$K_0 = \bigcup_{n \in \omega} B_n,$$

por el teorema de categoría de Baire, existe un n_1 natural tal que B_{n_1} tiene interior no vacío V. Consideramos $L = \overline{V}$ y $r = r_{n_1}$. Entonces llegamos a que f satisface el criterio de discontinuidad para L, r, δ.

($\Leftarrow$) Por el comentario anterior. $\square$

Para demostrar que el espacio de funciones $B_1(X)$ es angélico si X es polaco necesitamos mostrar previamente algunos resultados. Recordemos que un espacio polaco es métrico completo y separable.

Sean $M, M' \subseteq \omega$ tales que $M' \cap (X \setminus M)$ es finito. Se dice que M' está casi contenido en M, y se denota por $M' \subseteq_a M$.

Lema 2.3.22 *Sea X un espacio polaco y $\{f_n : n \in \omega\}$ una sucesión puntualmente acotada de funciones sobre X que toman valores reales tal que $\{f_n : n \in \omega\}$ no contiene una subsucesión convergente puntualmente. Entonces existe un conjunto $N' \subseteq \omega$ y números reales r, δ con $\delta > 0$ tales que para cada $M \subseteq N'$ existe un $x \in X$ cumpliendo:*

$$f_m(x) > r + \delta \quad \text{para infinitos } m \in M \tag{2.1}$$

y

$$f_m(x) < r \quad \text{para infinitos } m \in M.$$

Demostración. Supongamos que no se cumple. Numeramos los elementos de $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ por $\{(r_n, \delta_n) : n \in \omega\}$. Elegimos infinitos conjuntos $M_0 \supseteq M_1 \supseteq \ldots \supseteq M_n \supseteq \ldots$, donde $M_0 = \omega$, de la siguiente manera. Supongamos que M_{n-1} acaba de ser elegido. Como (2.1) es falso, entonces existirá $M_n \subseteq M_{n-1}$ tal que todo $x \in X$ no cumple (2.1) para M_n y (r_n, δ_n). Por un argumento de diagonalización podemos tomar $M \subseteq_a M_n$ para todo $n \in \omega$ tal que para todo $x \in X$ no existe $(r, \delta) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ satisfaciendo (2.1). Como $\{f_n : n \in M\}$ es puntualmente acotado y no posee una subsucesión convergente existe un $x \in X$ tal que:

$$\liminf_{m\in M} f_m(x) \lneq \limsup_{m\in M} f_m(x).$$

Tomamos r, δ racionales con $\delta > 0$ tales que:

$$\liminf_{m\in M} f_m(x) < r < r + \delta < \limsup_{m\in M} f_m(x).$$

Por consiguiente, x satisface (2.1) con M, r y δ, lo cual es una contradicción. $\square$

Proposición 2.3.23 *Sea X un espacio polaco y $\{f_n : n \in \omega\}$ una sucesión puntualmente acotada de funciones sobre X que toman valores reales tal que $\{f_n : n \in \omega\}$ no contiene una subsucesión convergente puntualmente. Entonces existe un subconjunto no vacío $L \subseteq X$ y una subsucesión $\{f_{n_k} : k \in \omega\}$ que es puntualmente convergente sobre L de modo que la función f satisface el criterio de discontinuidad.*
Consecuentemente, la clausura de $\{f_{n_k} : k \in \omega\}$ para la topología de la convergencia uniforme no posee una función de la primera clase de Baire.

Demostración. Sean N', r y δ como en el lema anterior. Para cada $M \subseteq N'$ denotaremos por $K(M)$ a la clausura del conjunto de todos los $x \in X$ satisfaciendo (2.1). Entonces tenemos que:

(a) $K(M)$ es un conjunto cerrado no vacío de X para cada $M \subseteq N'$;

(b) $K(M') \subseteq K(M)$ si $M' \subseteq_a M \subseteq_a N'$.

Recordemos que un espacio polaco tiene una base numerable, por lo que no tiene una sucesión transfinita decreciente estrictamente de subconjuntos cerrados (i.e. no existe una familia $\{K_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ de subconjuntos cerrados, indexada por el primer ordinal no numerable ω_1, con $K_\alpha \subsetneq K_\beta$ para todo $\beta < \alpha < \omega_1$).
Por tanto, existe un $M \subseteq N'$ tal que:

$$K(M') = K(M) \quad \forall M' \subseteq_a M.$$

Supongamos que es falso, entonces podremos construir una familia $\{M_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de infinitos subconjuntos de N' tales que para todo $\alpha < \beta < \omega_1$ se tiene que $M_\beta \subseteq_a M_\alpha$ y $K(M_\beta) \subsetneq K(M_\alpha)$. Por consiguiente, la familia $\{K(M_\alpha) : \alpha \in \omega_1\}$ es una sucesión transfinita estrictamente decreciente de conjuntos cerrados y se llega a una contradicción. Veamos la construcción de dicha familia. Sea $M_0 = N'$. Supongamos ya elegido M_α, ahora tomamos $M_{\alpha+1} \subseteq_a M_\alpha$ con $K(M_{\alpha+1}) \neq K(M_\alpha)$. Si $\gamma < \omega_1$ es un ordinal límite y los M_α ya han sido construidos cumpliendo las propiedades que buscamos para todo $\alpha > \gamma$, elegimos $M_\gamma \subseteq_a M_\alpha$ para todo $\alpha > \gamma$ mediante el argumento estándar de diagonalización.
Veamos que para todo $M' \subseteq_a M$ y para todo $U \subseteq K(M)$ abierto existen $M'' \subseteq_a M'$ y $y, z \in U$ tales que:

$$\lim_{n \in M''} f_n(y) \geq r + \delta \tag{2.2}$$

y

$$\lim_{n \in M''} f_n(z) \leq r.$$

Para ello, dados $M' \subset M$ y U, por la definición de $K(M')$ y (2.2) existe $y \in U$ tal que $f_n(y) > r + \delta$ para infinitos $n \in M'$. Tomamos un subconjunto $M_1 \subseteq_a M'$ tal que $\{f_n(y) : n \in M_1\}$ converge. Por definición existe $z \in U$ tal que $f_n(z) < r$ para infinitos $n \in M_1$. Por último, tomamos $M_2 \subseteq_a M_1$ tal que $\{f_n(z) : n \in M_2\}$ converge.
Sea $\{U_n : n \in \omega\}$ una base de abiertos de $K(M)$. Entonces podemos construir una sucesión infinita de conjuntos $\{M_n : n \in \omega\}$ de ω con:

$$M_{n+1} \subseteq_a M_n, \quad \forall n \in \omega \quad \text{y}$$
$$z_n, y_n \in U_n, \quad \forall n \in \omega$$

tales que (2.2) se cumple para $y = y_n, z = z_n$ y $M'' = M_n$.
Mediante el argumento de digonalización tomamos $Q \subseteq_a M_n$ para todo $n \in \omega$ y consideramos el conjunto $L = \{y_n, z_n : n \in \omega\}$. Notemos que L es denso en $K(M)$.
Definimos:

$$f(x) = \lim_{n \in Q} f_n(x), \forall x \in L.$$

Si U es un abierto no vacío relativo a L existe un abierto V relativo a K tal que $U = V \cap L$. Por tanto existe un $i \in \omega$ tal que $U_i \subset V$, pero entonces $f(y_i) \geq r + \delta$ y $f(z_i) \geq r$ y tanto y_i como z_i pertenecen a $U_i \cap L \subseteq U$.
Consecuentemente $\{f_{n_k} : k \in \omega\} = \{f_n : n \in Q\}$ y se sigue que L y f satisfacen el resultado que buscamos. □

Corolario 2.3.24 *Sea X un espacio polaco y A un subconjunto relativamente numerablemente compacto en $B_1(X)$, entonces A es relativamente secuencialmente compacto.*

Demostración. Por hipótesis A tiene que ser puntualmente acotado. Por lo tanto, por el **??** se obtiene el resultado. □

Lema 2.3.25 *Sea S un subconjunto relativamente compacto de $B_1(X)$ tal que $0 \in \overline{S}$ y $s(x) \geq 0$ para todo $s \in S$ y todo $x \in X$. Entonces para todo $\delta > 0$ existe un subconjunto $H \subseteq S$ numerable tal que $\lim_{h \in H} h(x) < \delta$ para todo $x \in X$.*

Demostración. Supongamos que no se cumple. Entonces para todo $H \subseteq S$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$K(H) = \{x \in X : h(x) \geq \delta, \quad \forall h \in H\}$$

es no vacío. Notemos que

$$K(H') \subseteq K(H) \quad \text{si } H \subseteq H'. \tag{2.3}$$

Por inducción transfinita construimos $\{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, $\{\{s_n^\alpha : n \in \omega\} : \alpha < \omega_1\} \subseteq S$ y $\{H_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tales que:

(a) $H_\alpha \subseteq H_\beta$ para $\alpha < \beta < \omega_1$;

(b) D_α es denso en K_α (donde $K_\alpha = \overline{K(H_\alpha)}$) y D_α es numerable;

(c) $\lim_{n\to\infty} s_n^\alpha(x) = 0$ para todo $x \in D_\alpha$;

(d) $H_{\alpha+1} = H_\alpha \cup \{s_n^\alpha : n \in \omega\}$.

Veamos que la construcción es posible. Para ello tomamos H_0 arbitrario. Una vez elegido H_α, se toma D_α satisfaciendo (b) y luego se elige $\{\{s_n^\alpha : n \in \omega\} : \alpha < \omega_1\} \subseteq S$ cumpliendo (3). Esto es posible mediante el argumento diagonalización y usando el hecho de que $0 \in \overline{S}$.
Consideramos $H_{\alpha+1}$ como en (d). Si β es un ordinal límite, tomamos $H_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} H_\alpha$. La numerabilidad de β y la numerabilidad de cada H_α implican que H_β es numerable.
Se sigue de (2.3), (a) y de la definición de K_α que para todo $\alpha < \beta < \omega_1$ se tiene que $K_\beta \subset K_\alpha$. Como X tiene un base numerable y los conjuntos K_α son cerrados, existe un $\alpha < \omega_1$ tal que $K_\alpha = K_{\alpha+1}$.
Sea f un punto de acumulación de $\{\{s_n^\alpha : n \in \omega\} : \alpha < \omega_1\} \subseteq S$. Entonces f se anula sobre D_α por (c). Pero como para todo $x \in K(H_{\alpha+1})$, $s_n^\alpha(x) \geq \delta$ para todo $n \in \omega$, entonces $f(x) \geq \delta$. Como tanto D_α como $K(H_{\alpha+1})$ son densos en $\overline{K(H_\alpha)}$ se tiene que f satisface el criterio de discontinuidad y, por la proposición 2.3.21 y el teorema 2.3.13, se llega a que $f \notin B_1(X)$, lo cual es una contradicción. □

Para llegar al resultado principal necesitamos una serie de lemas.

Lema 2.3.26 *Sea X un espacio Čech-completo y $\mathcal{A}$ una familia de pares (A, B), donde $A, B \subset X$ son abiertos. Supongamos que existe un subconjunto no vacio $Y \subseteq X$ tal que $\mathcal{A}$ es débilmente denso en Y (i.e., $\forall E_0, \dots, E_n$ abiertos tales que $E_k \cap Y \neq \emptyset$, $k = 0, \dots, n$ existe un par $(G, H) \in \mathcal{A}$ tal que $G \cap E_i \cap Y \neq \emptyset$ y $H \cap E_i \cap Y \neq \emptyset$ para todo $i = 0, \dots, n$).*
Entonces existe una sucesión $\{(G_n, H_n) : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{A}$ y un conjunto compacto $K \subseteq X$ tales que:

$$K \cap \bigcap_{n \in I} G_n \cap \bigcap_{n \in \omega \setminus I} H_n \neq \emptyset, \quad \forall I \subseteq \omega.$$

<u>*Demostración.*</u> Por la definición A.6.4 existe un espacio compacto y de Hausdorff Z y una familia de abiertos $\{A_n : n \in \omega\}$ en Z tales que $X = \bigcap_{n \in \omega} A_n$.
Sea:

$$\mathcal{B} = \{(G, H) : G, H \subseteq Z \text{ abiertos y } (G \cap X, H \cap X) \in \mathcal{A}\}.$$

Tenemos que $\mathcal{B}$ es débilmente denso en Y. Veamos que podemos construir una sucesión $\{(G_n, H_n) : n \in \omega\}$ y conjuntos abiertos $C_{P,Q}$ tales que:

(a) $C_{P,Q}$ viene definido por el par (P, Q), el cual es una partición de $\{0, \dots, n\}$ para algún $n \in \omega$ y donde $C_{P,Q}$ es un abierto no vacío de Z tal que:

$$C_{P,Q} \cap Y \neq \emptyset;$$

y

$$\overline{C_{P,Q}} \subseteq A_n \cap \left(\bigcap_{n \in P} G_n \right) \cap \left(\bigcap_{n \in Q} H_n \right).$$

(b) Si $P \subseteq P'$ y $Q \subseteq Q'$, entonces $C_{P',Q'} \subseteq C_{P,Q}$.

La construcción se realiza como sigue. Como Y es no vacío por hipótesis existe $(G_0, H_0) \in \mathcal{B}$ tal que:

$$G_0 \cap Y \neq \emptyset, \qquad H_0 \cap Y \neq \emptyset.$$

Elegimos los conjuntos abiertos en Z no vacíos $C_{\{0\},\emptyset}$ y $C_{\emptyset,\{0\}}$ tales que:

$$C_{\{0\},\emptyset} \cap Y \neq \emptyset, \qquad C_{\emptyset,\{0\}} \cap Y \neq \emptyset$$

y

$$\overline{C_{\{0\},\emptyset}} \subseteq G_0 \cap A_0, \qquad \overline{C_{\emptyset,\{0\}}} \subseteq H_0 \cap A_0.$$

Supongamos que G_i, H_i han sido construidos para todo $i \leq n$ y $C_{P,Q}$ ha sido elegido para cada partición (P, Q) de $\{0, \dots, n\}$.

Como $C_{P,Q}$ es un conjunto abierto no vacío de Z tal que $C_{P,Q} \cap Y \neq \emptyset$ y $\mathcal{B}$ es débilmente denso en Y existen $(G_{n+1}, H_{n+1}) \in \mathcal{B}$ tales que:

$$G_{n+1} \cap C_{P,Q} \cap Y \neq \emptyset \quad \text{y} \quad H_{n+1} \cap C_{P,Q} \cap Y \neq \emptyset$$

para cada partición (P, Q) de $\{0, \ldots, n\}$.
Para cada partición (P, Q) de $\{0, \ldots, n\}$ elegimos los conjuntos abiertos $C_{P\cup\{n+1\},Q}$ y $C_{P,Q\cup\{n+1\}}$ tales que:

$$C_{P\cup\{n+1\},Q} \cap Y \neq \emptyset, \qquad C_{P,Q\cup\{n+1\}} \cap Y \neq \emptyset$$

y

$$\overline{C_{P\cup\{n+1\},Q}} \subseteq G_{n+1} \cap A_{n+1}, \qquad \overline{C_{P,Q\cup\{n+1\}}} \subseteq H_{n+1} \cap A_{n+1}.$$

Definimos:

$$K = \bigcap_{n\in\omega} \bigcup \{\overline{C_{P,Q}} : (P, Q) \text{ es una partición de } \{0, \ldots, n\}\}.$$

Dado que K es cerrado en Z se tiene que K es compacto. Para $I \subseteq \omega$ consideramos los conjuntos:

$$P_n = \{i \in I : i \leq n\} \quad \text{y} \quad Q_n = \{i \notin I : i \leq n\}.$$

Por tanto, (P_n, Q_n) es una partición de $\{0, \ldots, n\}$. Como Z es compacto se tiene que:

$$\emptyset \neq \bigcap_{n\in\omega} \overline{C_{P_n,Q_n}} \subseteq K \cap \bigcap_{n\in I} G_n \cap \bigcap_{n\in\omega\setminus I} H_n.$$

Finalmente, como $\overline{C_{P,Q}} \subseteq A_n$ para cada partición (P, Q) de $\{0, \ldots, n\}$, tenemos que $K \subseteq X$.
□

Lema 2.3.27 *Sea X un espacio de Hausdorff regular sucesionalmente compacto tal que*

si $A \subseteq X$ y $x \in \overline{A}$ existe un conjunto numerable $A_0 \subseteq A$ de manera que $x \in \overline{A_0}$. (*)

Sea $\{x_n : n \in \omega\}$ una sucesión en X y $\{I_n : n \in \omega\}$ una sucesión decreciente de subconjuntos infinitos de ω tales que las sucesiones:

$$\{x_i : i \in I_n\} \text{ tienen un punto de acumulación común } x.$$

Entonces existe un conjunto infinito $I \subseteq \omega$ tal que $I \setminus I_n$ es finito para todo $n \in \omega$ y x es un punto de acumulación de $\{x_i : i \in I\}$.

<u>Demostración.</u> Sea:

$$F = \{\lim_{i\in I} x_i : I \text{ es un conjunto infinito}, \lim_{i\in I} x_i \text{ existe y } I \setminus I_n \text{ es finito } \forall n \in \omega\}.$$

Veamos que $x \in \overline{F}$. Dado U entorno de x consideramos el conjunto $J = \{i \in \omega : x_i \in U\}$. Entonces $J \cap I_n$ es un conjunto infinito. Como $\{I_n : n \in \omega\}$ es decreciente existe un conjunto infinito $K \subseteq J$ tal que $K \setminus I_n$ es finito para todo $n \in \omega$. Por ser X sucesionalmente compacto existe un conjunto infinito $I \subseteq K$ tal que existe $\lim\limits_{i \in I} x_i = z$.
Luego $z \in F \cap \overline{U}$ y, como X es regular, entonces $x \in \overline{F}$. Por (*) existe una sucesión $\{z_m : m \in \omega\} \subseteq F$ tal que $x \in \overline{\{z_m : m \in \omega\}}$.
Cada $z_m = \lim\limits_{i \in J_m} x_i$, donde J_m es infinito y tal que $J_m \setminus I_n$ es finito para cada $n \in \omega$.
Tomamos $I = \bigcup\limits_{n \in \omega} (I_n \cap J_n)$. Entonces se tiene que $I \setminus I_n$ es finito y $J_n \setminus I$ es finito para todo $n \in \omega$. Se sigue que z_m es un punto de acumulación de $\{x_i : i \in I\}$. Pero como el conjunto de puntos de acumulación de una sucesión siempre es cerrado, se llega a que x es un punto de acumulación de $\{x_i : i \in I\}$. $\square$

Lema 2.3.28 *Sea X un espacio polaco y $\{x_n : n \in \omega\}$ una sucesión en $C_p(X)$ tal que:*

(i) $\{x_n : n \in \omega\}$ *es relativamente compacto en* $B_1(X)$;

(ii) 0 *es un punto de acumulación de* $\{x_n : n \in \omega\}$.

Sea $W \subseteq X$ un subconjunto cerrado no vacío y $\epsilon > 0$. Entonces existe un abierto relativo no vacío $U \subseteq W$ y un subconjunto infinito $J \subseteq \omega$ tales que:

(a) 0 *es un punto de acumulación de* $\{x_i : i \in J\}$;

(b) $\limsup\limits_{i \in J} |x_i(t)| \leq 2\epsilon, \quad \forall t \in U$.

<u>*Demostración.*</u> Para todo $I \subseteq \omega$ infinito consideramos el conjunto:

$$A(I) = \{\text{puntos de acumulación de } \{x_i : i \in I\}\} \subseteq B_1(X).$$

Supongamos que no se cumple el lema. Sean $G_i = \{t \in X : |x_i(t)| < \epsilon\}$ y $H_i = \{t \in X : |x_i(t)| > 2\epsilon\}$. Tomamos $\mathcal{A} = \{(G_i, H_i) : i \in \omega\}$. Veamos que $\mathcal{A}$ es débilmente denso en W. Sean $E_0, \ldots, E_n \subseteq X$ conjuntos abiertos con $E_i \cap W \neq \emptyset$. Sean $s_i \in E_i \cap W$, para $i = 0, \ldots, n$, e $I = \{i \in \omega : |x_i(s_r)| < \epsilon, \forall r \leq n\}$. Entonces por (ii), $0 \in A(I)$. Sean $J_r = \{i \in I : |x_i(t)| \leq 2\epsilon, \forall t \in E_r \cap W\}$. Por hipótesis se tiene que $0 \notin A(J_r)$ para todo $r \leq n$.
Como:

$$A\left(\bigcup_{r \leq n} J_r\right) = \bigcup_{r \leq n} A(J_r)$$

se sigue que $I \neq \bigcup\limits_{r \leq n} J_r$. Si $i \in I \setminus \bigcup\limits_{r \leq n} J_r$ se tiene que:

$$G_i \cap E_r \cap W \neq \emptyset \qquad (\text{ ya que } i \in I);$$
$$H_i \cap E_r \cap W \neq \emptyset \qquad (\text{ ya que } i \notin J_r).$$

Por el lema 2.3.26 existe un compacto $K \subseteq X$ tal que :

$$K \cap \bigcap_{n\in I} G_n \cap \bigcap_{n\in\omega\setminus I} H_n \neq \emptyset, \quad \forall I \subseteq \omega.$$

En particular, existe una sucesión $\{y_n : n \in \omega\}$ en $\{x_i : i \in \omega\}$ tal que para todo $I \subseteq \omega$ se tiene que:

$$\{t \in K : |y_n(t)| < \epsilon, \forall n \in I, \text{ y } |y_n(t)| > 2\epsilon, \forall n \in \omega \setminus I\} \neq \emptyset.$$

Por consiguiente, $\{|y_n| : n \in \omega\}$ no puede tener una subsucesión convergente (y por lo tanto $\{y_n : n \in \omega\}$ tampoco). Pero dado que $\{y_n : n \in \omega\}$ es una sucesión contenida en $\{x_i : i \in \omega\}$, conjunto que es relativamente compacto, y que por el corolario 2.3.24 es sucesionalmente compacto en $B_1(X)$, se llega a una contradicción. □

Lema 2.3.29 *Sea X un espacio polaco y $\{x_n : n \in \omega\}$ una sucesión en $C_p(X)$ tal que*

(a) $\{x_n : n \in \omega\}$ es relativamente compacto en $B_1(X)$;

(b) 0 es un punto de acumulación de $\{x_n : n \in \omega\}$.

Entonces existe un subconjunto infinito $I \subseteq \omega$ tal que:

$$\limsup_{i\in I} |x_i(t)| \leq \epsilon, \quad \forall t \in X$$

y 0 es un punto de acumulación de $\{x_i : i \in I\}$.

<u>*Demostración.*</u> Para cada $I \subseteq \omega$ consideramos el conjunto $U(I) = Int\{t \in X : \limsup_{i\in I} |x_i(t)| \leq \epsilon\}$ y el conjunto $A(I)$ formado por todos los puntos de acumulación de $\{x_i : i \in I\}$. Notemos que si $I \setminus J$ es finito, entonces $U(J) \subseteq U(I)$.
Dada una base de abiertos $\{V_k : k \in \omega\}$ de X, elegimos una sucesión decreciente $\{I_k : k \in \omega\}$ de subconjuntos infinitos de ω tales que $0 \in A(I_k)$ para cada $k \in \omega$. Empezamos la construcción tomando $I_0 = \omega$. Elegido I_k, si existe un subconjunto infinito $I \subseteq I_k$ tal que $0 \in A(I)$ y $V_k \subseteq U(I)$ tomamos $I_{k+1} = I$. En caso contrario, tomamos $I_{k+1} = I_k$. Una vez construido, considerando el conjunto $\overline{\{x_i : i \in \omega\}}$, por el lema 2.3.27 existe un subconjunto infinito $I \subseteq \omega$ tal que $0 \in A(I)$ y $I \setminus I_k$ es finito para todo $k \in \omega$.
Fijado $J \subseteq I$ infinito tal que $0 \in A(J)$ se tiene que $U(I) \subseteq U(J)$. Veamos que se trata de una igualdad. Supongamos que $U(J) \neq U(I)$, entonces existe un $k \in \omega$ tal que $V_k \subseteq U(J)$ y $V_k \nsubseteq U(I)$.
Como $J \setminus I_k$ es finito, se sigue que $J \cap I_k$ es un conjunto infinito en I_k tal que $0 \in A(J \cap I_k)$ y $V_k \subseteq U(J \cap I_k)$, por la construcción de I_k. Por consiguiente, $V_k \subseteq U(I_k + 1)$. Pero en esta situación $I \setminus I_{k+1}$ tiene que ser finito, por lo que $V_k \subseteq U(I_{k+1}) \subseteq U(I)$, lo cual contradice lo supuesto anteriormente. Por tanto,

$$U(J) = U(I), \quad \forall J \subseteq I \text{ tal que } 0 \in A(J). \tag{*}$$

Veamos que $U(I) = X$. Para ello, si suponemos que no son iguales, podemos tomar un conjunto cerrado no vacío $W \subseteq X \setminus U(I)$. Aplicando el lema 2.3.28 a $\{x_i : i \in I\}$ existe un $J \subseteq I$ tal que $0 \in A(J)$ y

$$\limsup_{i\in J} |x_i(t)| \leq \epsilon, \quad \forall t \in U, \qquad \text{donde } U \text{ es un abierto de } W.$$

Por tanto,

$$\limsup_{i\in J} |x_i(t)| \leq \epsilon, \quad \forall t \in U \cup U(I)$$

y

$$U(J) \subseteq Int\,(U \cup U(I)) \neq U(I).$$

Lo cual contradice $(*)$. Entonces $U(I) = X$ y $\limsup_{i\in I} |x_i(t)| \leq \epsilon$ para todo $t \in X$, como se buscaba. □

Corolario 2.3.30 *Sea X un espacio polaco y $\{x_n : n \in \omega\}$ una sucesión en $C_p(X)$ tal que*

(a) $\{x_n : n \in \omega\}$ es relativamente compacto en $B_1(X)$;

(b) 0 es un punto de acumulación de $\{x_n : n \in \omega\}$.

Entonces existe una subsucesión de $\{x_n : n \in \omega\}$ que converge a 0.

<u>*Demostración.*</u> Para cada $k \in \omega$, aplicando el lema 2.3.29, para $\epsilon = \frac{1}{2^k}$, existe $I_k \subseteq \omega$ tal que

$$\limsup_{i\in I_k} |x_i(t)| \leq \frac{1}{2^k}, \quad \forall t \in X, \quad k \in \omega.$$

Notemos que se pueden ir eligiendo para que la sucesión $\{I_k : k \in \omega\}$ sea decreciente. Si ahora tomamos un subconjunto infinito $I \subseteq \omega$ tal que $I \setminus I_k$ sea finito para cada k, observamos que $\lim_{i\in I} x_i = 0$. □

Teorema 2.3.31 (Bourgain-Fremlin-Talagrand) *Si X es un espacio polaco, entonces $B_1(X)$ es angélico.*

<u>*Demostración.*</u> (1) Veamos primero que todo subconjunto de $B_1(X)$ relativamente numerablemente compacto es relativamente compacto en $B_1(X)$.
Para ello razonamos por reducción al absurdo. Sea F un subconjunto relativamente numerablemente compacto que no es relativamente compacto en $B_1(X)$. Al ser F puntualmente acotado se tiene que $\overline{F}^{\mathbb{R}^X}$ es compacto por el teorema de Tychonoff. Entonces existirá una función f que no es de la primera clase de Baire en $\overline{F}^{\mathbb{R}^X}$.
Por el teorema 2.3.13 existe un subconjunto K cerrado no vacío de X tal que $f|_K$ no tiene ningún punto de continuidad. Entonces por la proposición 2.3.21 f satisface el criterio de discontinuidad. Sean $L \subset X$ no vacío y $r, \delta \in \mathbb{R}$ con $\delta > 0$ los valores correspondientes de la

definición 2.3.20.
Sea $\{U_n : n \in \omega\}$ una base de abiertos de L, para cada $n \in \omega$ tomamos $y_n, z_n \in U_n$ tales que $f(y_n) > r + \delta$ y $f(z_n) < r$.
Sea $Q = \{y_n, z_n : n \in \omega\}$. Como $f \in \overline{F}^{\mathbb{R}^X}$ y Q es un conjunto numerable existe una sucesión $\{f_n : n \in \omega\} \subseteq F$ tal que $f_n(q) \to f(q)$ para todo $q \in Q$. Al ser Q denso en L se sigue que $f|_Q$ satisface el criterio de discontinuidad. Notemos que si g es un punto de acumulación de $\{f_n : n \in \omega\}$ entonces $g|_Q = f|_Q$, por lo que g no tendría ningún punto de continuidad en $\overline{Q}$. Por tanto, $\{f_n : n \in \omega\}$ no tiene un punto de acumulación que sea función de la primera clase de Baire, lo cual es una contradicción, ya que F es relativamente numerablemente compacto.

(2) Veamos que si $A \subseteq B_1(X)$ es relativamente compacto y $x \in \overline{A}$, entonces existe una sucesión en A que converge a x.
Observemos que x se encuentra en la clausura de un subconjunto numerable de A, i.e. existe una sucesión $\{x_n : n \in \omega\} \subseteq A$ tal que x es punto de acumulación de $\{x_n : n \in \omega\}$.
Para todo $m \in \omega$ consideramos la aplicación:

$$\phi_m : B_1(X) \longrightarrow B_1(X^m)$$

definida por:

$$\phi_m(f)(x_1, \ldots, x_m) = |f(x_1)| + \ldots + |f(x_m)|.$$

Dado $g \in \overline{A}$, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $g = 0$ (en caso contrario basta considerar $\{f - g : f \in A\}$). Entonces ϕ_m es una aplicación continua y $\phi_m(0) = 0$. Luego $\phi_m(A)$ es relativamente compacto en $B_1(X^m)$ y $0 \in \overline{\phi_m(A)}$. Por el lema 2.3.25 existe un subconjunto numerable H_m de A tal que:

$$\frac{1}{m} > \inf\{(\phi_m h)(y) : h \in H_m\}, \quad \forall y \in X^m.$$

Por tanto, $0 \in \overline{\bigcup_{m \in \omega} H_m}$.
Una vez visto que podemos encontrar una sucesión $\{x_n : n \in \omega\} \subseteq A$ tal que x es punto de acumulación de $\{x_n : n \in \omega\}$ continuamos la prueba definiendo la aplicación:

$$\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}^\omega$$

dada por :

$$\varphi(t)(0) = x(t),$$
$$\varphi(t)(n+1) = x_n(t),$$

para todo $t \in X$ y $n \in \omega$.
Veamos que φ es una función de Borel. Para ello basta probar que si $n_1, \ldots, n_k \in \omega$, entonces

$$\varphi^{-1}(\{f \in \mathbb{R}^\omega : |f(n_i)| < \sigma, i = 1, \ldots, k\})$$

es un conjunto de Borel. Notemos que dicho conjunto coincide con

$$\{t \in X : |\varphi(t)(n_i)| < \sigma, i = 1, \ldots, k\} = \bigcap_{i=1}^{k} \{t \in X : |x_{n_i - 1}| < \sigma\}.$$

Como cada x_n está en $B_1(X)$ sabemos que cada $\{t \in X : |x_{n_i-1}| < \sigma\}$ es un conjunto F_σ por el lema 2.3.14. Por consiguiente, la función φ es de Borel.
Consideremos el conjunto $L = \{(x, y) : \varphi(x) = y\} \subseteq X \times \mathbb{R}^\omega$. Tomando la aplicación:

$$h(x, y) = |y - \varphi(x)|$$

tenemos que h es una aplicación de Borel. Por tanto, L es un conjunto de Borel en $X \times \mathbb{R}^\omega$.
Sea la aplicación proyección de la segunda componente:

$$\pi_2 : X \times \mathbb{R}^\omega \longrightarrow \mathbb{R}^\omega.$$

Dado que $Y = \varphi(X)$ coincide con $\pi_2(L)$ tenemos que Y es un conjunto analítico por la proposición A.2.2. Por definición de conjunto analítico (véase A.2.1) existe un espacio polaco Z y una función continua y sobreyectiva tales que:

$$\psi_2 : Z \longrightarrow Y = \phi(X) \subseteq \mathbb{R}^\omega.$$

Tomamos y e y_n en $\mathbb{R}^Y$, para cada $n \in \omega$, definidos de la siguiente manera:

$$y(u) = u(0),$$
$$y_n(u) = u(n+1),$$

para $u \in Y$.
Observamos que y es un punto de acumulación de $\{y_n : n \in \omega\}$ en $\mathbb{R}^Y$ y que toda subsucesión de $\{y_n : n \in \omega\}$ tiene una subsucesión convergente, ya que A es relativamente secuencialmente compacto en $B_1(X)$ por el corolario 2.3.24. Entonces toda subsucesión de $\{x_n : n \in \omega\}$ tiene una subsucesión convergente.
Tomamos z e z_n en $\mathbb{R}^Z$, para cada $n \in \omega$, definidos de la siguiente manera:

$$z = y \circ \psi,$$
$$z_n = y_n \circ \psi.$$

Entonces z es un punto de acumulación de $\{z_n : n \in \omega\}$ en $\mathbb{R}^Z$. Notemos que $\{z_n : n \in \omega\} \subseteq C_p(Z)$ (ya que cada y_n es la proyección coordenada que es continua y ψ es continua). Además, toda subsucesión de $\{z_n : n \in \omega\}$ tiene una subsucesión convergente. Por definición, tenemos que $\{z_n : n \in \omega\} \subset B_1(X)$ es relativamente sucesionalmente compacto, por lo tanto es relativamente numerablemente compacto y, por el corolario 2.3.24, es relativamente compacto en $B_1(X)$.
También se tiene que $z \in C_p(Z)$. Aplicamos el corolario 2.3.30 a $\{z_n - z : n \in \omega\}$ para obtener una subsucesión $\{z_n : n \in I\}$ convergente a z. Por construcción tenemos que $\lim_{n\in I} y_n = y$. Luego $\lim_{n\in I} x_n = x$. $\square$

Nota 2.3.32 *Los resultados del apartado 2.1 han sido extraídos de [1]. En la subsección 2.2.1 los resultados que aparecen hasta el corolario 2.2.11 pueden encontrarse en [36] y el resto en [1]. En la siguiente subsección los dos primeros resultados aparecen en [12] y el último es una consecuencia directa de ellos.*
En el siguiente apartado los resultados de la subsección 2.3.1 pueden encontrarse en [37] y [24] y los de la subsección 2.3.2 en [41] y en [4].

Capítulo 3

El teorema de Namioka

En el primer apartado presentamos el teorema de Namioka y una extensión al caso de un producto de espacios numerablemente Čech-completos. En el segundo apartado analizamos para qué espacios X se cumple la propiedad $\mathcal{N}(X,Y)$ cuando el espacio Y es pseudocompacto.

3.1. El teorema de Namioka

Nota 3.1.1 *Todo espacio Y localmente compacto y σ-compacto cumple la propiedad $\mathcal{N}(X,Y)$ para todo espacio X de Namioka.*

<u>*Demostración.*</u> Como Y es localmente compacto y σ-compacto, por 7.2. de [15], existe una sucesión $\{Y_n : n \in \omega\}$ de subconjuntos compactos de Y tales que $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Int(Y_n)$.
Sea X un espacio Namioka y $F : X \times Y \to [-1,1]$ una función separadamente continua. Sabemos que para cada $n \in \omega$ existe un subconjunto $U_n \subset X$ G_δ y denso tal que F es conjuntamente continua en los puntos de $U_n \times Y_n$. Por tanto, F es conjuntamente continua en los puntos de $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right) \times Y$. Como, por el teorema 1.0.2, el conjunto $U = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ es un subconjunto G_δ y denso de X se obtiene el resultado. $\square$

Para demostrar el teorema de Namioka son necesarios el siguiente comentario y el siguiente lema.

Sea Y un espacio compacto e I un conjunto arbitrario, consideramos $(\mathbb{R}^I)_b$ el conjunto de todas las funciones reales acotadas sobre I. Equipamos al espacio $(\mathbb{R}^I)_b$ con la métrica de la convergencia uniforme d. La relación de orden usual en $\mathbb{R}$ induce sobre los espacios $(\mathbb{R}^I)_b$ y $C(Y,(\mathbb{R}^I)_b)$ una relación de orden que hace que sean retículos (i.e. conjuntos parcialmente ordenados en los cuales, para cada par de elementos, existen un supremo y un ínfimo). Dados $f, g \in C(Y,(\mathbb{R}^I)_b)$ se tiene que:

$$f \le g \Leftrightarrow f(y) \le g(y), \quad \forall y \in Y \Leftrightarrow f(y)(i) \le g(y)(i), \quad \forall y \in Y \text{ y } \forall i \in I.$$

Lema 3.1.2 *Sea Y un espacio compacto, I un conjunto y H un subrretículo de $C(Y,(\mathbb{R}^I)_b)$. Sea $g \in C(Y,(\mathbb{R}^I)_b)$ y $\epsilon > 0$. Supongamos que para todo $(y,y') \in Y \times Y$ existe $h_{yy'} \in H$ tal que:*

$$d(h_{yy'}(y), g(y)) < \epsilon \qquad y \qquad d(h_{yy'}(y'), g(y')) < \epsilon. \tag{3.1}$$

Entonces existe $h \in H$ tal que $d(h,g) \leq \epsilon$. Por consiguiente, la clausura de H es la misma en $C_p(Y,(\mathbb{R}^I)_b)$ que en $C_u(Y,(\mathbb{R}^I)_b)$.

<u>*Demostración.*</u> Para cada $(y,y') \in Y \times Y$ consideramos el conjunto abierto $U_{yy'} = \{z \in Y : d(h_{yy'}(z), g(z)) < \epsilon\}$ que por (3.1) contiene a $y' \in Y$.
Fijado $y \in Y$, como $\{U_{yy'} : y' \in Y\}$ es un cubrimiento por abiertos del espacio compacto Y, existen $y'_1, \ldots, y'_n \in Y$ tales que $Y = U_{yy'_1} \cup \ldots \cup U_{yy'_n}$.
Consideramos $h_y = sup\{h_{yy'_1}, \ldots, h_{yy'_n}\}$. Tenemos que $h_y \in H$ y

$$g(z)(i) < h_y(z)(i) + \epsilon, \text{ para todo } z \in Y \text{ y todo } i \in I. \tag{3.2}$$

Además se sigue de (3.1) que $d(h_y(y), g(y)) < \epsilon$.
Para cada $y \in Y$ consideramos el conjunto abierto $U_y = \{z \in Y : d(h_y(z), g(z)) < \epsilon\}$, el cual contiene a y.
Como $\{U_y : y \in Y\}$ es un cubrimiento por abiertos del espacio compacto Y, existen $y_1, \ldots, y_m \in Y$ tales que $Y = U_{y_1} \cup \ldots \cup U_{y_m}$.
Consideramos $h = inf\{h_{y_1}, \ldots, h_{y_m}\}$. Tenemos que $h \in H$, por lo que $h(z)(i) < g(z)(i) + \epsilon$ para todo $z \in Y$ y todo $i \in I$. Se sigue de (3.2) que $g(z)(i) < h(z)(i) + \epsilon$ para todo $z \in Y$ y todo $i \in I$. Por consiguiente, $d(h,g) \leq \epsilon$. $\square$

Nota 3.1.3 *Dado un espacio métrico M y un punto fijo $x_0 \in M$ consideramos la función $\theta : M \to (\mathbb{R}^M)_b$ definida por*

$$\theta(x)(x') = d(x',x) - d(x',x_0), \qquad \forall x, x' \in M.$$

Entonces θ induce una isometría de M sobre $\theta(M)$.

Teorema 3.1.4 (Namioka) *Sean X un espacio regular y numerablemente Čech-completo, Y un espacio compacto, M un espacio métrico y $\Phi : X \to C_p(Y,M)$ una función continua. Entonces existe un subconjunto A de X que es G_δ y denso tal que $\Phi : X \to C_u(Y,M)$ es continua en todo punto $x \in A$.*

<u>*Demostración.*</u> Por la nota anterior podemos suponer que $M = (\mathbb{R}^I)_b$, donde I es un conjunto. Sea $x \in X$, denotamos por $osc(x)$ la oscilación en x de la función $\Phi : X \to C_u(Y,M)$, es decir:

$$osc(x) = inf\{sup\{\|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\| : x_1, x_2 \in W\} : W \subseteq X \text{ abierto y } x \in W\}.$$

Para cada $k \in \omega$, consideramos el conjunto $G_k = \{x \in X : osc(x) < \frac{1}{k}\}$. Razonando como en el teorema teorema 2.2.16 se prueba que G_k es abierto. Por consiguiente, $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ es un conjunto G_δ de X. Al ser X un espacio de Baire (véase proposición A.6.3), para probar que $\overline{A} = X$ basta ver que $\overline{G_k} = X$ para todo k natural dado. Supongamos que existe un natural k_0

tal que $\overline{G_{k_0}} \neq X$. Tomamos $V = X \setminus \overline{G_{k_0}}$, y $\epsilon = \frac{1}{3k_0}$.
Dada una función $f \in C(Y,M)$ consideramos el conjunto $X_f = \Phi^{-1}(B(f,\epsilon))$, donde $B(f,\epsilon) = \{g \in C(Y,M) : d(g,f) \leq \epsilon\}$. Notemos que si x está en el interior de X_f entonces $osc(x) \leq 2\epsilon < 1/k_0$. Es fácil ver que $B(f,\epsilon)$ también es cerrado en $C_p(Y,M)$ y por la continuidad de Φ se sigue que X_f es cerrado en X. Por consiguiente, si x pertenece al interior de la unión finita $X_{f_1} \cup \ldots \cup X_{f_n}$, entonces pertenece al interior de uno de ellos y se tiene que $osc(x) < 1/k_0$.
Sea $\{\mathcal{A}_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de recubrimientos por abiertos de X. Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de todos los pares (U,x) tales que U es un subconjunto abierto de X contenido en V y x un punto de U.
Construimos la sucesión $\{(U_k,x_k) : k \in \omega\}$ de elementos de $\mathcal{P}$ de la siguiente manera. Primero elegimos $x_0 \in V$ arbitrario y por regularidad tomamos un entorno U_0 de x_0 tal que $\overline{U_0} \subset V$ y tal que $\overline{U_0}$ tiene diámetro menor que $\mathcal{A}_0$. Supongamos construidos $(U_j,x_j) \in P$ para $j = 0,\ldots,k$. Sea L_k el subrretículo finito de $C(Y,M)$ generado por los $\Phi(x_j)$, con $j = 0,\ldots,k$ y sea $M_k = \bigcup\limits_{f \in L_k} X_f$. Como U_k es un subconjunto abierto de V se tiene que no está contenido en M_k. Por tanto, podemos elegir un punto $x_{k+1} \in U_k \setminus M_k$ y un entorno abierto U_{k+1} en X de x_{k+1} tal que $\overline{U_{k+1}} \subset U_k$ y tal que $\overline{U_{k+1}}$ tiene diámetro menor que $\mathcal{A}_{k+1}$.
Para cada $k \in \omega$ consideramos el conjunto $F_k = \overline{\{x_j : j \geq k\}}$. Como $F_k \subset \overline{U_k}$ se sigue que F_k tiene diámetro menor que $\mathcal{A}_k$. Por ser numerablemente Čech-completo la sucesión decreciente de cerrados no vacíos $\{F_k : k \in \omega\}$ tiene intersección no vacía, por lo que la sucesión $\{x_k : k \in \omega\}$ posee en X al menos un punto de acumulación r.
Como la función $\Phi : X \to C_p(Y,M)$ es continua $\Phi(r)$ es un punto de acumulación de $\{\Phi(x_k) : k \in \omega\}$ en $C_p(Y,M)$ y, por tanto, pertenece a la clausura de $H = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} L_k$ en $C_p(Y,M)$.
Como H es un subrretículo de $C(Y,M)$ se sigue del lema anterior que existe $g \in H$ tal que $d(g,\Phi(r)) \leq \epsilon$. Sea $p \in \omega$ tal que $g \in L_p$. Entonces $r \in M_k$. Por otro lado, para cada $k > p$ tenemos que $x_k \in \overline{U_{p+1}} \subset U_p \setminus M_p$. Por consiguiente, $r \in U_p \setminus M_p$, lo cual es una contradicción.
□

Corolario 3.1.5 *Sea X un espacio regular y numerablemente Čech-completo, Y un espacio compacto, M un espacio métrico y $f : X \times Y \to M$ una función separadamente continua. Entonces existe un subconjunto A de X que es G_δ y denso tal que f es conjuntamente continua en todo punto de $A \times Y$.*

Definición 3.1.6 *Sean X e Y espacios topológicos, $x \in X$ y $f : X \to Y$ una aplicación. Se dice que f es **casi-continua en x** si para cualquier entorno W de $f(x)$ en Y y para cualquier entorno V de x en X, existe un subconjunto, no vacío, abierto U de V tal que $f(U) \subset W$. Si f es casi-continua en todo punto x de X se dice que f es **casi-continua en X**.*

*Sean $X_1,\ldots,X_n$ e Y espacios topológicos, $f : X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$ una aplicación y $(x_1,\ldots,x_n) \in X_1 \times X_n$. Decimos que f es **fuertemente casi-continua en $(x_1,\ldots,x_n)$** si satisface la siguiente condición: para todo W entorno abierto de $f(x_1,\ldots,x_n)$ en Y y todo $V_1 \times \ldots \times V_n$ entorno abierto cilíndrico de $(x_1,\ldots,x_n)$ en $X_1 \times \ldots \times X_n$ existe un subconjunto abierto, no vacío, cilíndrico $U_1 \times \ldots \times U_n \subset V_1 \times \ldots \times V_n$ tal que $x_n \in U_n$ y $f(U_1 \times \ldots \times U_n) \subset W$. Si se satisface para todo $(x_1,\ldots,x_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n$, entonces se dice que f es **fuertemente casi-continua en $X_1 \times \ldots \times X_n$**.*

El objetivo ahora es extender el resultado anterior a una función separadamente continua $f : X_1 \times \ldots \times X_n \times Y \to M$, donde $X_1, \ldots, X_n$ son espacios numerablemente Čech-completos, Y es un espacio compacto y M un espacio métrico. Para ello se necesitan unos resultados previos:

Proposición 3.1.7 *Sean $X_1, \ldots, X_n$ espacios regulares y numerablemente Čech-completos, Y un espacio métrico y $f : X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$ una función separadamente continua. Entonces f es fuertemente casi-continua.*

Demostración. Para $n = 1$ el resultado es inmediato. Supongamos que se tiene el resultado para $i = 1, \ldots, n-1$ ($n \geq 2$), veamos que se cumple para n. Supongamos que no es fuertemente casi-continua en $(a_1, \ldots, a_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n$, entonces existe un $\alpha > 0$ y un entorno abierto cilíndrico $V_1 \times \ldots \times V_n$ de $(a_1, \ldots, a_n)$ en $X_1 \times \ldots \times X_n$ satisfaciendo la siguiente condición:
($*$) Para todo conjunto abierto cilíndrico $U_1 \times \ldots \times U_n \subset V_1 \times \ldots \times V_n$ tal que $a_n \in U_n$, existe $(x_1, \ldots, x_n) \in U_1 \times \ldots \times U_n$ tal que $d(f(x_1, \ldots, x_n), f(a_1, \ldots, a_n)) \geq \alpha$, donde d es la métrica de Y. Tomamos $\epsilon = \alpha/3$.
Sea $\{\mathcal{A}_{ki}\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de recubrimientos por abiertos de X_i, para $i = 1, \ldots, n$. Sea $\mathcal{P}_i$ el conjunto de todos los pares (U_i, x_i) tales que U_i es un subconjunto abierto de X_i contenido en V_i y x_i un punto de U_i, para $i = 1, \ldots, n$. Sea $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \ldots \times \mathcal{P}_n$. Definimos por inducción una sucesión $\{(U_{k1}, x_{k1}), \ldots, (U_{kn}, x_{kn}) : k \in \omega\}$ de puntos de $\mathcal{P}$ de la siguiente manera. Fijamos $x_{0i} = a_i$ y tomamos un entorno abierto U_{0i} de x_{0i} en X_i de manera que $\overline{U_{0i}} \subset V_i$ y $\overline{U_{0i}}$ tenga diámetro menor que $\mathcal{A}_{0i}$, para $i = 0, \ldots, n$. Supongamos definidos $\{(U_{j1}, x_{j1}), \ldots, (U_{jn}, x_{jn})\}$ para $j = 0, \ldots, k$. Entonces elegimos $((U_{(k+1)1}, x_{(k+1)1}), \ldots, (U_{(k+1)n}, x_{(k+1)n})) \in \mathcal{P}$ cumpliendo las siguientes condiciones:

$$\overline{U_{(k+1)i}} \subset U_{ki}, \qquad i = 1, \ldots, n; \tag{3.3}$$

$$\overline{U_{(k+1)i}} \quad \text{tiene diámetro menor que } \mathcal{A}_{(k+1)i}, \qquad i = 1, \ldots, n; \tag{3.4}$$

$$d(f(x, x_{(k+1)n}), f(x, x_{0n})) < \frac{1}{k} + 1, \qquad \forall x \in S_{k1} \times \ldots \times S_{k(n-1)}, \tag{3.5}$$

donde $S_{ki} = \{x_{ji} : 0 \leq j \leq k\}$, $i = 1, \ldots, n-1$.
Además, para todo $x \in U_{(k+1)1} \times \ldots \times U_{(k+1)(n-1)}$:

$$d(f(x, x_{kn}), f(x_{k1}, \ldots, x_{kn})) \leq \epsilon; \tag{3.6}$$

$$d(f(x_{(k+1)1} \ldots, x_{(k+1)n}), f(x_{01}, \ldots, x_{0n})) \geq \alpha. \tag{3.7}$$

Veamos que dicha elección es posible. Dado $x \in S_{k1} \times \ldots \times S_{k(n-1)}$, la función parcial f_x es continua en x_{0n}, entonces existe un entorno abierto $U_{(k+1)n}$ de x_{0n} en X_n tal que $d(f(x, x_n), f(x, x_{0n})) < \frac{1}{k} + 1$ para todo $x_n \in U_{(k+1)n}$. Podemos suponer que $\overline{U_{(k+1)n}} \subset U_{kn}$ con diámetro menor que $\mathcal{A}_{(k+1)n}$. El punto $x_{(k+1)n}$ lo podemos tomar en $U_{(k+1)n}$ cumpliéndose la condición (3.5).
Por hipótesis de inducción se tiene que la función parcial $f_{x_{kn}}$ es casi-continua en el punto $(x_{k1}, \ldots, x_{k(n-1)})$, por lo que existe en $X_1 \times \ldots \times X_{n-1}$ un conjunto abierto, no vacío, cilíndrico $U_{(k+1)1} \times \ldots \times U_{(k+1)(n-1)} \subset U_{(k)1} \times \ldots \times U_{(k)(n-1)}$ cumpliendo la condición (3.6). Además, podemos suponer que $\overline{U_{(k+1)i}} \subset U_{ki}$ y que $\overline{U_{(k+1)i}}$ tiene diámetro menor que $\mathcal{A}_{(k+1)i}$, para $i = 1, \ldots, n-1$ satisfaciéndose las condiciones (3.3) y (3.4).
Por la condición ($*$) podemos tomar $(x_{(k+1)1}, \ldots, x_{(k+1)n}) \in U_{(k+1)1} \times \ldots \times U_{(k+1)n}$ tal que la condición (3.7) se satisfaga.

Para cada $k \in \omega$ y cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, consideramos $F_{ki} = \overline{\{x_{ji} : j \geq k\}}$. Como $F_{ki} \subset \overline{U_{ki}}$, se sigue que F_{ki} tiene diámetro menor que $\mathcal{A}_{ki}$. Por ser cada X_i numerablemente Čech-completo toda sucesión decreciente de cerrados no vacíos $\{F_{ki} : k \in \omega\}$ tiene intersección no vacía. Por consiguiente, la sucesión $\{x_{ki} : k \in \omega\}$ posee en X_i al menos un punto de acumulación r_i.
Para cada $i = 1, \ldots, n-1$ consideramos el conjunto $S_i = \{x_{ji} : j \in \omega\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_{ki}$. Notemos que $S_1 \times \ldots \times S_{n-1} = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_{k1} \times \ldots \times S_{k(n-1)}$. Para todo $x \in S_1 \times \ldots \times S_{n-1}$ se sigue de (3.5) y de la continuidad de la función f_x que $d(f(x, r_n), f(x, x_{0n})) = 0$. Como f_{r_n} y $f_{x_{0n}}$ son separadamente continuas se sigue de la nota A.1.17 que $d(f(x, r_n), f(x, x_{0n})) = 0$ para todo $x \in \overline{S_1} \times \ldots \times \overline{S_{n-1}}$. Por tanto:

$$f(r_1, \ldots, r_{n-1}, r_n) = f(r_1, \ldots, r_{n-1}, x_{0n}). \tag{3.8}$$

Como $f_{x_{kn}}$ es separadamente continua se sigue de (3.6) y de la nota A.1.17 que para todo $x \in \overline{U_{(k+1)1}} \times \ldots \times \overline{U_{(k+1)n}}$ se tiene que $d(f(x, x_{kn}), f(x_{k1}, \ldots, x_{kn})) \leq \epsilon$.
Como $x_{ji} \in U_{(k+1)i}$ para todo $j \geq k+1$ y todo $i = 1, \ldots, n-1$ se tiene que para todo $k \in \omega$

$$d(f(r_1, \ldots, r_{n-1}, x_{kn}), f(x_{k1}, \ldots, x_{kn})) \leq \epsilon. \tag{3.9}$$

Luego, por (3.8) y (3.9) se llega a que:

$$d(f(r_1, \ldots, r_{n-1}, r_n), f(x_{01}, \ldots, x_{0n})) \leq \epsilon. \tag{3.10}$$

Pero, de (3.9) y (3.7) se deduce que para todo $k \in \omega$:

$$d(f(r_1, \ldots, r_{n-1}, x_{kn}), f(x_{01}, \ldots, x_{0n})) \geq \alpha - \epsilon \geq 2\epsilon \tag{3.11}$$

y como la función parcial $f_{(r_1, \ldots, r_{n-1})}$ es continua llegamos a que:

$$d(f(r_1, \ldots, r_{n-1}, r_n), f(x_{01}, \ldots, x_{0n})) \geq 2\epsilon. \tag{3.12}$$

Por (3.10) y (3.12) se llega a contradicción. □

Corolario 3.1.8 *Sean $X_1, \ldots, X_n$ espacios regulares y numerablemente Čech-completos, Y un espacio completamente regular y $f : X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$ una función separadamente continua. Entonces f es fuertemente casi-continua.*

Demostración. Sea $(a_1, \ldots, a_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n$. Veamos que f es fuertemente casi-continua en $(a_1, \ldots, a_n)$. Sea W un entorno abierto de $f(a_1, \ldots, a_n)$ en Y y sea $V_1 \times \ldots \times V_n$ un entorno abierto cilíndrico de $(a_1, \ldots, a_n)$ en $X_1 \times \ldots \times X_n$. Como Y es completamente regular existe una función continua $\gamma : Y \to \mathbb{R}$ tal que $\gamma(f(a_1, \ldots, a_n)) = 1$ y $\gamma(c) = 0$ para todo $c \in Y \setminus W$. Si consideramos la función $(\gamma \circ f) : X_1 \times \ldots \times X_n \to \mathbb{R}$ se tiene que es separadamente continua. Luego por la proposición 3.1.7 se sigue que $\gamma \circ f$ es fuertemente casi-continua en $(a_1, \ldots, a_n)$.

Por tanto, existe un conjunto abierto, no vacío, cilíndrico $U_1 \times \ldots \times U_n \subset V_1 \times \ldots \times V_n$ tal que $a_n \in U_n$ y:

$$|(\gamma \circ f)(x_1, \ldots, x_n) - (\gamma \circ f)(a_1, \ldots, a_n)| < \frac{1}{2},$$

para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in U_1 \times \ldots \times U_n$. Por tanto, $f(U_1 \times \ldots \times U_n) \subset W$ y se sigue que f es fuertemente casi-continua en $(a_1, \ldots, a_n)$. □

Proposición 3.1.9 *Sea X un espacio de Baire, Y un espacio topológico, M un espacio métrico y $f : X \times Y \to M$ una función. Si f es fuertemente casi-continua en $X \times Y$, entonces existe un subconjunto A de X que es G_δ y denso tal que f es continua en los puntos de $A \times Y$.*

Demostración. Sea $y \in Y$, consideramos el subconjunto A de X formado por los $x \in X$ tales que f es continua en (x, y). Para cada $k \in \omega$, consideramos el conjunto $U_k = \{x \in X : osc(x, y) < 1/k\}$, donde $osc(x, y)$ es la oscilación de f en (x, y). Notemos que cada U_k es abierto en X, por lo que $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$ es un subconjunto G_δ de X.
Dado cualquier $k_0 \in \omega$, como X es un espacio de Baire, basta ver que U_{k_0} es denso en X para probar que A es denso en X.
Sea W un subconjunto abierto no vacío de X, tomamos $x \in W$. Como f es fuertemente casi-continua en (x, y), existe un conjunto abierto, no vacío, cilíndrico $U \times V \subset W \times Y$ tal que $y \in V$ y con $d(f(u, v), f(x, y)) < 1/3k_0$ para todo punto $(u, v) \in U \times V$. Luego $U \subset U_{k_0}$. Como $U \subset W$ se tiene que $U_{k_0} \cap W \neq \emptyset$. Por consiguiente, U_{k_0} es denso en X. □

Como consecuencia inmediata de la proposición 3.1.7 y del corolario 3.1.9 se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3.1.10 *Sean $X_1, \ldots, X_n$ espacios regulares y numerablemente Čech-completos, Y un espacio métrico y $f : X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$ una función separadamente continua. Entonces existe un subconjunto A de $X_1 \times \ldots \times X_{n-1}$ que es G_δ y denso tal que f es continua en los puntos de $A \times X_n$.*

Nota 3.1.11 *Como caso particular, se cumple la propiedad $\mathcal{N}(X, Y)$ si X e Y son numerablemente Čech-completos.*

Veamos una extensión del teorema de Namioka:

Teorema 3.1.12 *Sean $X_1, \ldots, X_n$ espacios regulares y numerablemente Čech-completos, Y un espacio compacto, M un espacio métrico y $\Phi : X_1 \times \ldots \times X_n \to C_p(Y, M)$ una función separadamente continua. Entonces, existe un subconjunto A de $X_1 \times \ldots \times X_n$ que es G_δ y denso tal que $\Phi : X_1 \times \ldots \times X_n \to C_u(Y, M)$ es continua en todo punto $x \in A$.*

Demostración. La prueba es similar a la del teorema 3.1.4. Por la nota 3.1.3 podemos suponer que $M = (\mathbb{R}^I)_b$, donde I es un conjunto. Denotamos por X el espacio producto $X_1 \times \ldots \times X_n$ y por Ψ la función $x \mapsto \Phi(x)$ de X en $C(Y, M)$. Sea $f \in C_u(Y, M)$ y $\rho > 0$, veamos que $\Psi^{-1}(B(f, \rho))$ y $\overline{\Psi^{-1}(B(f, \rho))}$ tienen el mismo interior en X. Sea U el interior de $\overline{\Psi^{-1}(B(f, \rho))}$ y

$x \in U$, observemos que $x \in \Psi^{-1}(B(f,\rho))$. Para ello suponemos que $x \notin \Psi^{-1}(B(f,\rho))$, entonces $\Psi(x) \notin B(f,\rho)$. Como la bola $B(f,\rho)$ también es cerrada en $C_p(Y,M)$ se sigue del corolario 3.1.8 que la función $\Phi : X \to C_p(Y,M)$ es casi-continua en x. Entonces existe un subconjunto abierto, no vacío, $U' \subset U$ que es disjunto con $\Psi^{-1}(B(f,\rho))$. Pero esto es incompatible con la inclusión $U \subset \overline{\Psi^{-1}(B(f,\rho))}$.

Para todo $x \in X$, denotamos por $osc(x)$ a la oscilación en x de la función $\Psi : X \to C_u(Y,M)$. Para cada $k \in \omega$ consideramos el conjunto $G_k = \{x \in X : osc(x) < \frac{1}{k}\}$. Por ser cada G_k abierto se sigue que $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ es un conjunto G_δ de X. Al ser X un espacio de Baire (véase proposición A.6.3) para probar que $\overline{A} = X$ basta ver que $\overline{G_k} = X$ para todo k natural. Supongamos que existe un natural k_0 tal que $\overline{G_{k_0}} \neq X$.

Veamos que existe un conjunto abierto, no vacío, V que es disjunto con G_{k_0} y tal que $\Psi(V)$ es un subconjunto acotado de $C_u(Y,M)$. Sea $f \in C_u(Y,M)$, se tiene que:

$$X \setminus G_{k_0} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Psi^{-1}(B(f,k))(= X).$$

Como X es un espacio de Baire, existe un subconjunto abierto, no vacío, $V \subset X \setminus G_{k_0}$ y un natural m tal que $V \subset \overline{\Psi^{-1}(B(f,m))}$. Por lo visto antes, $V \subset \Psi^{-1}(B(f,m))$ y, por tanto, $\Psi(V)$ es un subconjunto acotado de $C_u(Y,M)$.

Sea $\epsilon = 1/3k_0$, sea $U \subset V$ abierto, no vacío, y L un subconjunto finito de $C(X,M)$. Veamos que:

$(*)$ $U \not\subset \overline{\Psi^{-1}(B(L,\epsilon))}$, donde $B(L,\epsilon) = \bigcup_{f \in L} B(f,\epsilon)$.

En caso contrario existiría $g \in L$ y un subconjunto abierto, no vacío, $U' \subset U$ tal que $U' \subset \overline{\Psi^{-1}(B(g,\epsilon))}$. Luego $U' \subset \Psi^{-1}(B(g,\epsilon))$ y, consecuentemente, $osc(x) \leq 2\epsilon < 1/k_0$ para todo $x \in U'$. Llegamos a una contradicción, ya que $U' \subset X \setminus G_{k_0}$.

Sea $\{\mathcal{A}_{ki}\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de recubrimientos por abiertos de X_i, para $i = 1,\ldots,n$. Sea $V_1 \times \ldots \times V_n$ un subconjunto abierto, no vacío, cilíndrico de V, y sea $\mathcal{P}_i$ el conjunto de todos los pares (U_i, x_i) tales que U_i es un subconjunto abierto, no vacío, de X_i contenido en V_i y x_i un punto de U_i, para $i = 1,\ldots,n$. Sea $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \ldots \times \mathcal{P}_n$ definimos por inducción una sucesión $\{(U_{k1}, x_{k1}), \ldots, (U_{kn}, x_{kn}) : k \in \omega\}$ de puntos de $\mathcal{P}$ de la siguiente forma. Elegimos $((U_{01}, x_{01}), \ldots, (U_{0n}, x_{0n})) \in \mathcal{P}$ de manera que $\overline{U_{0i}} \subset V_i$ y $\overline{U_{0i}}$ sea de diámetro menor que $\mathcal{A}_{0i}$, para $i = 0,\ldots,n$. Supongamos definidos $((U_{j1}, x_{j1}), \ldots, (U_{jn}, x_{jn}))$ para $j = 0,\ldots,k$. Sea $S_{ki} = \{x_{ji} : 0 \leq j \leq k\}$, $i = 1,\ldots,n-1$. Denotamos por L_k al subrretículo finito de $C(Y,M)$ generado por $\Psi(S_{k1} \times \ldots \times S_{kn})$. Entonces elegimos $((U_{(k+1)1}, x_{(k+1)1}), \ldots, (U_{(k+1)n}, x_{(k+1)n})) \in \mathcal{P}$ cumpliendo las siguientes condiciones:

$$\overline{U_{(k+1)i}} \subset U_{ki}, \qquad i = 1,\ldots,n; \tag{3.13}$$

$$\overline{U_{(k+1)i}} \quad \text{es de diámetro menor que } \mathcal{A}_{(k+1)i}, \qquad i = 1,\ldots,n; \tag{3.14}$$

$$(U_{(k+1)1} \times \ldots \times U_{(k+1)n}) \cap \Psi^{-1}(B(L_k,\epsilon)) = \emptyset. \tag{3.15}$$

Esta elección es posible como consecuencia de $(*)$.

Para todo $i = 1,\ldots,n$, consideramos $S_i = \{x_{ji} : j \in \omega\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_{ki}$.

Se sigue de las condiciones (3.13) y (3.14) que S_i es un subconjunto relativamente numerablemente compacto de X_i, para $i = 1,\ldots,n$. Sea r_i un punto de acumulación de la sucesión

$\{x_{ki} : k \in \omega\}$ en X_i, para $i = 1, \ldots, n$. Consideramos $r = (r_1, \ldots, r_n)$. Veamos que $\Psi(r)$ pertenece a la clausura de $\Psi(S_1 \times \ldots \times S_n)$ en $C_p(Y, M)$. Como $r \in \overline{S_1} \times \ldots \times \overline{S_n}$ se sigue de la nota A.1.17 que $\Psi(\overline{S_1} \times \ldots \times \overline{Sn}) \subset \overline{\Psi(S_1 \times \ldots \times S_n)}$.
Por (3.13) se tiene que:

$$r \in U_{k1} \times \ldots \times U_{kn}, \qquad \forall k \in \omega. \tag{3.16}$$

Como $S_1 \times \ldots \times S_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_{k1} \times \ldots \times S_{kn}$ y $\Psi(S_{k1} \times \ldots \times S_{kn}) \subset L_k$ para todo $k \in \omega$.

$\Psi(r)$ pertenece a la clausura de $H = \bigcup_{k=1}^{\infty} L_k$ en $C_p(Y, M)$. Como H es un subrretículo de $C(Y, M)$ se sigue del lema 3.1.2 que existe $g \in H$ tal que $r \in \Psi^{-1}(B(g, \epsilon))$. Sea $m \in \omega$ tal que $g \in L_m$, entonces $r \in \Psi^{-1}(B(L_m, \epsilon))$ y se tiene por (3.15) que $r \notin U_{(m+1)1} \times \ldots \times U_{(m+1)n}$, lo cual contradice (3.16). □

Corolario 3.1.13 *Sean $X_1, \ldots, X_n$ espacios regulares y numerablemente Čech-completos, Y un espacio compacto, M un espacio métrico y $f : X \times Y \to M$ una función separadamente continua. Entonces existe un subconjunto A de $X_1 \times \ldots \times X_n$ que es G_δ y denso tal que f es conjuntamente continua en todo punto de $A \times Y$.*

3.2. Algunas extensiones del teorema de Namioka

Los dos siguientes resultados son claves para abordar el problema en el que al menos uno de los dos espacios es pseudocompacto. Sean X e Y espacios topológicos, en el apartado A.1.4. del apéndice se define la *aplicación exponencial* $\Lambda_{X,Y}$.

Proposición 3.2.1 *Sean X e Y espacios topológicos, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ separadamente continua y $\varphi = \Lambda_{X,Y}(f)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) La función f se puede extender a una función separadamente continua $\hat{f} : \beta(X) \times Y \to \mathbb{R}$.

(b) La clausura de $\varphi(X)$ en $C_p(Y)$ es compacta.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Por la proposición A.1.18 tenemos que $\hat{\varphi} = \Lambda_{\beta X,Y}(\hat{f}) : \beta X \to C_p(Y)$ es continua. Luego el conjunto $\varphi(X)$ está contenido en el compacto $\hat{\varphi}(\beta X) \subset C_p(Y)$ y su clausura es compacta.

$(b) \Rightarrow (a)$ Como la clausura de $\varphi(X)$ en $C_p(Y)$ es compacta la aplicación φ se puede extender a una función continua $\hat{\varphi} : \beta X \to C_p(Y)$. Por la proposición A.1.18 la función $\hat{f} = \Lambda^{-1}_{\beta X,Y}(\hat{\varphi}) : \beta X \times Y \to \mathbb{R}$ es separadamente continua. Notemos que $\hat{f}$ es extensión de f. □

Proposición 3.2.2 *Sean X e Y espacios pseudocompactos, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ separadamente continua y $\varphi = \Lambda_{X,Y}(f)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) La función f se puede extender a una función separadamente continua sobre $\beta X \times Y$.

(b) La función f se puede extender a una función separadamente continua sobre $X \times \beta Y$.

(c) La función f se puede extender a una función separadamente continua $\hat{f} : \beta X \times \beta Y \to \mathbb{R}$.

(d) La clausura de $\varphi(X)$ en $C_p(Y)$ es compacta.

(e) $\varphi(X)$ es un subespacio compacto de $C_p(Y)$.

Demostración. Las implicaciones $(c) \Rightarrow (a)$, $(c) \Rightarrow (b)$ y $(e) \Rightarrow (d)$ son inmediatas, mientras que la equivalencia $(a) \Leftrightarrow (d)$ se sigue de la proposición 3.2.1.

$(d) \Rightarrow (e)$ Por el teorema de Haydon (2.3.10) la clausura de $\varphi(X)$ en $C_p(Y)$ es compacta en $C_p(\beta Y)$, por lo que es Eberlein compacta. Se sigue del teorema de Preiss-Simon (2.2.9) que $\varphi(X)$ es un subespacio compacto de $C_p(Y)$.

$(e) \Rightarrow (c)$ El teorema de Haydon implica que $\varphi(X)$ es compacto en $C_p(\beta Y)$. Por consiguiente, podemos suponer que φ es una aplicación continua que va de X a $C_p(\beta Y)$. Se sigue de la proposición 3.2.1 que $f_0 = \Lambda_{X,\beta Y}^{-1}(\varphi)$ se puede extender a una función separadamente continua $\hat{f} : \beta X \times \beta Y \to \mathbb{R}$.

$(b) \Rightarrow (c)$ se sigue de $(a) \Rightarrow (c)$. $\square$

Sea $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ una función separadamente continua. Si fijamos un punto $y \in Y$ la función $f^y : X \to \mathbb{R}$, definida por $f^y(x) = f(x, y)$ para cada $x \in X$, es continua. Por ser X un espacio completamente regular podemos considerar su extensión continua sobre βX, $(f^y)^\beta : X \to \mathbb{R}$ (véase teorema A.3.2).
Definimos la función:

$$\begin{array}{rcl} f^\beta : \beta X \times Y & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (p, y) & \longmapsto & f^\beta(p, y) = (f^y)^\beta(p) \end{array}$$

Proposición 3.2.3 *Sea $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ una función separadamente continua, donde X es un espacio pseudocompacto e Y es un espacio topológico. Entonces para cada $p \in \beta X$ la función f_p^β es continua sobre todos los conjuntos numerables de Y.*

Demostración. Sea $p \in \beta X$ y sea el subconjunto $\{y_n : n \in \omega\} \subseteq Y$ numerable. Consideramos para cada $n \in \omega$ el punto $r_n = f^\beta(p, y_n)$. Notemos que fijado $r \in \mathbb{R}$ el conjunto $(f^\beta)^{-1}(r) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (f^\beta)^{-1} \left(]r - \frac{1}{n}, r + \frac{1}{n}[\right)$ es un conjunto G_δ y cerrado.
Por lo tanto el conjunto $G = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} ((f^{y_n})^\beta)^{-1}(r_n)$ es un cerrado y G_δ. Notemos que $p \in G$.
Por la proposición A.8.8 existe un $x \in X$ tal que $f(x, y_n) = f(p, y_n)$ para todo $n \in \omega$. Luego $f_x = f_p^\beta$ en $\{y_n : n \in \omega\}$. Por tanto, f_p^β es continua sobre $\{y_n : n \in \omega\}$. $\square$

Para continuar necesitamos el siguiente lema:

Lema 3.2.4 *Sean X y Z espacios topológicos, $f : X \to Z$ una función e $Y \subset X$ un subconjunto denso en X. Si la restricción de f a cada subespacio de la forma $Y \cup \{x\}$, donde $x \in X$ es arbitrario, es continua, entonces la aplicación f es continua.*

Corolario 3.2.5 *Sea $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ una función separadamente continua, donde X es un espacio pseudocompacto e Y es un espacio topológico. Entonces f_p^β es continua sobre las clausuras de todos los conjuntos numerables de Y.*

Corolario 3.2.6 *Sea $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ una función separadamente continua, donde X es un espacio de Baire separable e Y es un espacio pseudocompacto. Entonces existe un subconjunto $U \subset X$ G_δ y denso tal que f es conjuntamente continua en los puntos de $U \times Y$.*

Demostración. Como X es separable existe un subconjunto $D = \{x_n : n \in \omega\}$ denso en X. Fijado $x \in X$, como $f_x : Y \to \mathbb{R}$, definida por $f_x(y) = f(x, y)$ para cada $y \in Y$, es continua, sabemos que existe $f_x^\beta : \beta Y \to \mathbb{R}$, extensión continua de f_x.
Definimos la aplicación $f^\beta : X \times \beta Y \to \mathbb{R}$ tal que $f^\beta(x, p) = f_x^\beta(p)$ para todo $x \in X$ y $p \in \beta Y$. Veamos que es separadamente continua. Ya sabemos que, fijado $x \in X$, $f_x^\beta \in C(\beta Y)$; fijado $p \in \beta Y$, por el corolario 3.2.5, se tiene que $(f^\beta)^p \in C(X)$. Aplicando el teorema 1.0.3 (o el corolario 3.2.13) se llega al resultado. □

Sea $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ una función separadamente continua, donde X e Y son espacios topológicos. Consideramos las aplicación continua

$$\begin{aligned} \Psi : Y &\longrightarrow C_p(X) \\ y &\longmapsto \Psi(y) = F^y \end{aligned}$$

Teorema 3.2.7 *Todo espacio pseudocompacto es un espacio de Namioka.*

Demostración. Sea una función separadamente continua $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ donde X es un espacio pseudocompacto e Y es un espacio compacto. Sabemos que Y también es pseudocompacto. Como Ψ es continua se sigue que $\Psi(Y)$ es compacto en $C_p(X)$. Luego por la proposición 3.2.2 f se puede extender a una función separadamente continua $\hat{f} : \beta X \times Y$. Por el teorema de Namioka (3.1.5) existe un subconjunto $U \subset X$ G_δ y denso tal que f es conjuntamente continua en los puntos de $U \times Y$. □

Teorema 3.2.8 *Sea $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ una función separadamente continua, donde X es un espacio de Namioka e Y un espacio tal que $\overline{\Psi(Y)}^{C_p(X)}$ es compacto en $C_p(X)$. Entonces existe un subconjunto $U \subset X$ G_δ y denso tal que f es conjuntamente continua en los puntos de $U \times Y$.*

Demostración. Por la proposición 3.2.1 la función f se puede extender a una función separadamente continua $\hat{f} : X \times \beta Y \to \mathbb{R}$. Como X es de Namioka existe un subconjunto $U \subset X$ G_δ y denso tal que $\hat{f}$ es conjuntamente continua en los puntos de $U \times \beta Y$. Luego $f = \hat{f}|_{X \times Y}$ es continua en los puntos de $U \times Y$. □

Corolario 3.2.9 *Sea $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ una función separadamente continua, donde X e Y son espacios pseudocompactos y $C_p(X)$ es un μ-espacio. Entonces:*

(i) Existe un subconjunto $U \subset X$ G_δ y denso tal que f es conjuntamente continua en los puntos de $U \times Y$.

(ii) Existe un subconjunto $V \subset Y$ G_δ y denso tal que f es conjuntamente continua en los puntos de $X \times V$.

Demostración. Al ser $C_p(X)$ un μ-espacio, la clausura de $\Psi(Y)$ en $C_p(X)$ es compacta. Por tanto, por la proposición 3.2.2 tenemos:

(a) La función f se puede extender a una función separadamente continua sobre $\beta X \times Y$.

(b) La función f se puede extender a una función separadamente continua sobre $X \times \beta Y$.

Por el teorema 3.2.7 llegamos al resultado que buscamos. □

En particular, espacios que cumplen los requisitos del espacio X en el enunciado anterior pueden ser: los *compactos*, los *numerablemente compactos* y los *numerablemente pseudocompactos* (véase 4.2 de [25]).

Nota 3.2.10 *Es un problema abierto saber si dados dos espacios pseudocompactos X e Y se satisface la propiedad $\mathcal{N}(X,Y)$. El ejemplo de D. B. Shakhmatov (véase nota 2.1.9) pone de manifiesto que no se puede seguir el planteamiento simple que nos ofrece la proposición 3.2.2 para tratar esta cuestión.*

Corolario 3.2.11 *Sea $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ una función separadamente continua, donde X es un espacio Namioka tal que $C_p(X)$ es un μ-espacio e Y un espacio pseudocompacto. Entonces existe un subconjunto $U \subset X$ G_δ y denso tal que f es conjuntamente continua en los puntos de $U \times Y$.*

Nota 3.2.12 *Si X es un k-espacio entonces $C_p(X)$ es un μ-espacio por el corolario 2.1.14, luego los k-espacios de Namioka cumplen los requisitos del teorema anterior en cuanto al espacio X.*

Corolario 3.2.13 *Sea $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ una función separadamente continua, donde X un espacio Čech-completo e Y un espacio pseudocompacto. Entonces existe un subconjunto $U \subset X$ G_δ y denso tal que f es conjuntamente continua en los puntos de $U \times Y$.*

Demostración. Sea X un espacio Čech-completo. Por el teorema 3.1.4 sabemos que es un espacio de Namioka y, por la proposición A.6.5, se tiene que es un k-espacio. Entonces se cumplen las hipótesis del corolario 3.2.11 y se llega al resultado. □

Nota 3.2.14 *Los resultados del apartado 3.1 han sido extraídos de [23]. Los dos primeros resultados del apartado 3.2 se encuentran en [38] y el resto de resultados son conclusiones que se pueden ir obteniendo a raíz de todos los resultados que se han ido probando anteriormente en la memoria.*

Capítulo 4

Fragmentabilidad

En el primer apartado estudiamos la relación que hay entre el problema de Namioka y el concepto de fragmentabilidad. Posteriormente, en el caso de que X sea métrico completo, vemos que una función pertenece al espacio de funciones $B_1(X)$ si y sólo si es fragmentable. En el segundo apartado mostramos cómo emplear el teorema de Corson y Glicksberg para analizar cuándo un subconjunto de $C_p(X)$ es fragmentable, en el caso de que X sea métrico y compacto. A continuación, abordaremos el mismo problema para X compacto. En ese sentido presentamos por una parte el teorema de Talagrand y, por otro lado, un resultado que nos informa sobre los casos en los que se puede debilitar la naturaleza del espacio X.

4.1. Fragmentabilidad y funciones de primera clase de Baire

Empezamos reescribiendo la definición de casi-continuidad de una función $f : X \to Y$ dada en (3.1.6) para el caso en el que el espacio Y sea métrico:

Definición 4.1.1 *Sea $f : X \longrightarrow (M, d)$ una aplicación definida sobre un espacio topológico X que toma valores en un espacio métrico (M, d).*
Se dice que f es ***casi-continua en $x \in X$*** *si para todo entorno U de x y para todo $\epsilon > 0$ existe un abierto $V \subseteq U$ tal que $diam(f(V)) < \epsilon$.*
Se dice que f es ***casi-continua*** *si para todo abierto U no vacío de X y para todo $\epsilon > 0$ existe un abierto $V \subseteq U$ tal que $diam(f(V)) < \epsilon$. Notemos que es lo mismo que ser casi-continua para todo $x \in X$.*
Se dice que f es ***fragmentable*** *cuando $f|_C$ es casi-continua para todo $C \subseteq X$ no vacío.*

Nota 4.1.2 *Una función f es fragmentable si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ y para todo $C \subseteq X$ no vacío existe un abierto $V \subseteq X$ tal que $C \cap V \neq \emptyset$ y $diam(f(C \cap V)) < \epsilon$.*

<u>*Demostración.*</u> ($\Rightarrow$) Sean $\epsilon > 0$ y $C \subset X$. Sea $U \subset C$ abierto relativo a C no vacío, entonces existe un abierto $\tilde{U}$ no vacío en X tal que $U = \tilde{U} \cap C$. Por definición de fragmentable existe un $V \subset U$ abierto relativo a C tal que $diam(f(V)) < \epsilon$. Por tanto, existe un abierto $\tilde{V}$ en X tal que $V = \tilde{V} \cap C$ cumpliendo que $diam(f(\tilde{V} \cap C)) < \epsilon$.

($\Leftarrow$) Sea $\epsilon > 0$, $C \subset X$ y $U \subset C$ abierto no vacío relativo a C. Existe un abierto $\tilde{U}$ no vacío en X tal que $U = \tilde{U} \cap C$. Entonces como $\emptyset \neq U \cap V = (V \cap \tilde{U}) \cap C =: W$, se tiene que W es un abierto relativo a C tal que $W \subset U$ y $diam(f(W)) < \epsilon$. $\Box$

Definición 4.1.3 *Sea una familia de funciones $F = \{f_j : X \to (M,d)\}_{j \in J} \subseteq M^X$.*
Se dice que F es ***equi-casi-continua en $x \in X$*** *si para todo entorno U de x y para todo $\epsilon > 0$ existe un abierto $V \subseteq U$ tal que $diam(f_j(V)) < \epsilon$ para todo $j \in J$.*
Se dice que F es ***equi-casi-continua*** *si para todo abierto U no vacío de X y para todo $\epsilon > 0$ existe un abierto $V \subseteq U$ tal que $diam(f_j(V)) < \epsilon$ para todo $j \in J$.*
Se dice que la familia de funciones F es ***fragmentable*** *cuando F es equi-casi-continua para todo $S \subseteq X$ no vacío. O, equivalentemente, si para todo $\epsilon > 0$ y para todo $C \subseteq X$ no vacío existe un abierto $V \subseteq X$ tal que $C \cap V \neq \emptyset$ y $diam(f_j(C \cap V)) < \epsilon$ para todo $f_j \in F$.*

Definición 4.1.4 *Sea (X,τ) un espacio topológico y ρ una métrica sobre X.*
Se dice que (X,τ) ***está fragmentado por ρ*** *(o* ***ρ****-fragmentado) si para todo $\epsilon > 0$ y para todo $C \subseteq X$ no vacío existe un abierto $V \subseteq X$ en la topología τ tal que $C \cap V \neq \emptyset$ y ρ-diam$(C \cap V) < \epsilon$. Si está clara la métrica ρ se dice que X está fragmentado.*
Sea (M,d) un espacio métrico, se dice que (X,τ) ***está (τ,d)-fragmentado por una función $f : X \to M$*** *si para todo $\epsilon > 0$ y para todo $C \subseteq X$ no vacío existe un abierto $V \subseteq X$ para la topología τ tal que $C \cap V \neq \emptyset$ y d-diam$(f(C \cap V)) < \epsilon$. Si la topología τ de X y la métrica d de M están claras, se dice que X está fragmentado por f. Notemos que en el caso de que X esté fragmentado por una función f, entonces f es fragmentable.*

Nota 4.1.5 *Sea X un espacio topológico, M un espacio métrico y $K \subset M^X$ una familia de funciones fragmentable. Entonces podemos equipar a $C(K,M)$ con la métrica supremo, definida como sigue:*

$$d_\infty(h_1,h_2) = sup\{d(h_1(\varphi),h_2(\varphi)) : \varphi \in K\}.$$

Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} f : X & \longrightarrow & C(K,M) \\ x & \longmapsto & x^* \end{array}$$

tal que, dado $\varphi \in K$, se tiene $x^*(\varphi) = \varphi(x) \in M$. Notemos que en este caso X está fragmentado por f.

Lema 4.1.6 *Sea X espacio topológico y $K \subset M^X$ una familia de funciones fragmentable. Entonces $\overline{K}^{M^X}$ es fragmentable.*

<u>*Demostración.*</u> Sea $\epsilon > 0$ y $C \subseteq X$ no vacío, por ser K fragmentable existe un abierto $V \subseteq X$ tal que $C \cap V \neq \emptyset$ y $diam(f(C \cap V)) < \frac{\epsilon}{3}$, para todo $f \in K$. Sea $f \in \overline{K}^{M^X}$ y sean $x, y \in C \cap V$ arbitrarios. Considerando $W = U_f(x, y; \frac{\epsilon}{3})$ entorno básico de f se sigue que $W \cap K \neq \emptyset$. Luego existe un $g \in K$ tal que $|f(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ y $|f(y) - g(y)| < \frac{\epsilon}{3}$. Por tanto, $diam(f(C \cap V)) < \epsilon$, para todo $f \in \overline{K}^{M^X}$. $\Box$

Proposición 4.1.7 *Sea $f : X \to (M,d)$ una una aplicación definida en un espacio X de Baire que toma valores en un espacio métrico (M,d). Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) f es casi-continua.

(b) $Cont(f)$ es un conjunto G_δ y denso en X.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Como X es un espacio de Baire y $Cont(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_{1/n}(f)$, donde fijado $\epsilon > 0$, se define $O_\epsilon(f) = \bigcup\{V \subset X : V$ es abierto y $diam(f(V)) < \epsilon\}$. Basta demostrar que para todo $\epsilon > 0$ el abierto $O_\epsilon(f)$ es denso en X. Sea V abierto, no vacío, arbitrario en X. Por ser f casi-continua existe un abierto, no vacío, W en X tal que $W \subset V$ y $diam(f(W)) < \epsilon$. Como $W \subseteq O_\epsilon(f)$, se tiene que $V \cap O_\epsilon(f) \neq \emptyset$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Sea U abierto arbitrario en X. Como $Cont(f)$ es denso existe un $x_0 \in U \cap Cont(f)$. Por tanto, existe un entorno abierto V de x_0 tal que $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $x \in V$. Tomando el abierto $W = U \cap V$ se llega a que f es casi-continua. □

Dada una función $F : X \times Y \to \mathbb{R}$, donde X e Y son espacios topológicos, fijado un punto $x \in X$, denotamos por $F_x : Y \to \mathbb{R}$ a la función asociada $F_x(y) = F(x,y)$. Análogamente, fijado un punto $y \in Y$ designamos por $F^y : X \to \mathbb{R}$ a la función asociada $F^y(x) = F(x,y)$. Si la función F es separadamente continua, entonces F_x y F^y son continuas para todo $x \in X$ y para todo $y \in Y$ respectivamente.

Proposición 4.1.8 *Si Y es compacto y $F : X \times Y \to \mathbb{R}$ es una función separadamente continua. Fijado $x \in X$, son equivalentes:*

(a) F es conjuntamente continua en cada punto de $\{x\} \times Y$.

(b) La función asociada $\Phi : X \to C_u(Y)$, definida por $\Phi(x) = F_x$, es continua en x.

(c) La familia $Y_F = \{F^y : y \in Y\} \subset C(X)$ es equicontinua en x.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Dado $\epsilon > 0$ para cada $y \in Y$ existen abiertos U_y y V_y de x e y respectivamente, tales que $|F(x',y') - F(x,y)| < \epsilon$ para todo $x' \in U_y$ y todo $y' \in V_y$. Notemos que $\{V_y : y \in Y\}$ es un cubrimiento por abiertos del compacto Y. Por tanto, existe un subrecubrimiento finito $\{V_{y_n} : 1 \leq n \leq p\}$ de Y. Tomamos el entorno abierto de x, $U = \bigcap_{n=1}^{p} U_{y_n}$. Notemos que para todo $z \in U$ se tiene que $\|\Phi(z) - \Phi(x)\|_\infty < 2\epsilon$.

$(b) \Leftrightarrow (c)$ Es inmediato.

$(b) \Rightarrow (a)$ Sea $y \in Y$. Veamos que F es continua en (x,y). Sea $\epsilon > 0$, por (b) sabemos que existe un entorno abierto U de x tal que para todo $z \in U$ se tiene:

$$\|\Phi(z) - \Phi(x)\|_\infty = \|F_z - F_x\|_\infty = sup\{|F(z,y') - F(x,y')| : y' \in Y\} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como la función asociada $\Psi : Y \to C_p(X)$, definida por $y \mapsto F^y$, es continua dado el abierto $W = U_{F^y}(x; \frac{\epsilon}{2})$, existe un entorno abierto V de y tal que $\varphi(V) \subset W$. Entonces para todo $(x', y') \in U \times W$:

$$|F(x', y') - F(x, y)| \leq |F(x', y') - F(x, y')| + |F(x, y') - F(x, y)| \leq \epsilon.$$

□

Lema 4.1.9 *Sea D un subconjunto denso en X y $H \subset C_p(X)$ equicontinuo en los puntos de D. Entonces H es equi-casi-continua.*

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ y U un subconjunto, no vacío, abierto en X. Entonces $U \cap D \neq \emptyset$. Dado $x \in U \cap D$ existe un entorno abierto V de x tal que $|h(z) - h(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $z \in V$ y $h \in H$. Tomando el abierto $W = V \cap U$ encontramos un abierto $W \subset U$ tal que $diam(h(V)) < \epsilon$ para todo $h \in H$. □

Corolario 4.1.10 *Sea X un espacio de Namioka e $Y \subset C_p(X, M)$ un subconjunto compacto. Entonces Y es equi-casi-continua.*

Demostración. Por la nota A.1.15 tenemos que la aplicación:

$$\begin{array}{rcl} F : X \times Y & \longrightarrow & M \\ (x, y) & \longmapsto & F(x, y) = y(x) \end{array}$$

es separadamente contínua. Por ser X un espacio de Namioka existe un subconjunto $D \subset X$ G_δ y denso tal que F es conjuntamente continua en los puntos de $D \times Y$. Por la proposición 4.1.8 la familia Y es equicontinua en D. Entonces Y es equi-casi-continua por el lema 4.1.9. □

Nota 4.1.11 *Si lo que queremos ver ahora es cuándo el conjunto de funciones compacto $Y \subset C_p(X, M)$ es fragmentable, por definición se precisa que la propiedad que nos indica que el espacio X es de Namioka sea hereditaria bajo subconjuntos cerrados. Algunos de estos espacios son los compactos, los numerablemente compactos, los numerablemente pseudocompactos, los Čech-completos y los localmente compactos.*

Lema 4.1.12 *Dado un espacio X perfectamente normal se tiene que:*

(i) Si A es abierto, entonces $\chi_A \in B_1(X)$.

(ii) Si B es cerrado, entonces $\chi_B \in B_1(X)$.

Demostración. (i) Como todo abierto es un F_σ podemos expresar $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$ donde cada Z_n es cerrado. Fijado $n \in \omega$, por el lema de Uryshon, existe una aplicación $f_n : X \to [0, 1]$ continua tal que $f_n(z) = 1$ para todo $x \in Z_n$ y $f_n(c) = 0$ para todo $c \in X \setminus A$.

Entonces para todo $x \in X$ tenemos que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_A(x)$, es decir, $\chi_A \in B_1(X)$.

(ii) Como $X \setminus B$ es abierto existe una sucesión de cerrados $\{Z_n : n \in \omega\}$ tales que $X \setminus B = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$. Fijado $n \in \omega$, por el lema de Uryshon, existe una aplicación $f_n : X \to [0,1]$ continua tal que $f_n(b) = 1$ para todo $b \in B$ y $f_n(z) = 0$ para todo $z \in Z_n$.
Entonces para todo $x \in X$ tenemos que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_B(x)$, es decir, $\chi_B \in B_1(X)$. □

Notemos que un espacio métrico (X,d) es perfectamente normal, ya que dado un abierto A en X, si para cada $n \in \omega$ consideramos el conjunto cerrado $Z_n = \{x \in X : d(x, X \setminus A) \geq \frac{1}{n}\}$, llegamos a que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$ y $Z_n \subset Int(Z_{n+1})$ para todo $n \in \omega$.

Definición 4.1.13 *Sea $A \subset X$ y $r : X \to A$ una aplicación. Se dice que r es una **retracción de X sobre A** si r es continua y $r(a) = a$ para cada $a \in A$.*

Definición 4.1.14 *Se dice que un espacio métrico (M,d) es **retráctil** si para cada $\epsilon > 0$ existe una función continua $h_\epsilon : M \times M \to M$ verificando:*

(a) $d(h_\epsilon(x,y), y) \leq \epsilon$ para todo $(x,y) \in M \times M$;

(b) $h_\epsilon(x,y) = x$ si $d(x,y) \leq \epsilon$.

Notemos que $x \mapsto h_\epsilon(x,y)$ es una retracción de M sobre la bola cerrada $\{x \in M : d(x,y) \leq \epsilon\}$.

Observación 4.1.15 *Un espacio normado es un espacio métrico retráctil. Basta considerar las funciones h_ϵ definidas como sigue:*

$$h_\epsilon(x,y) = \begin{cases} x & , \text{ si } \|x-y\| \leq \epsilon; \\ y + r \cdot \frac{x-y}{\|x-y\|} & , \text{ si } \|x-y\| \geq \epsilon. \end{cases}$$

Lema 4.1.16 *Sea X un espacio topológico y (M,d) un espacio métrico retráctil. Si $f : X \to M$ es una aplicación tal que para todo $\epsilon > 0$ existe una función $g_\epsilon \in B_1(X,M)$ tal que $d(f(x), g_\epsilon(x)) \leq \epsilon$, entonces $f \in B_1(X,M)$.*

<u>Demostración.</u> Por hipótesis, podemos construir la sucesión de funciones $\{f_n : n \in \omega\} \subset B_1(X,M)$ tal que $d(f(x), f_n(x)) < \frac{1}{2^{n+1}}$ para todo $x \in X$. Por consiguiente, $d(f_n(x), f_{n+1}(x)) < \frac{1}{2^n}$ para todo $x \in X$. Como $f_n \in B_1(X,M)$ para cada $n \in N$, existe una sucesión $\{\varphi_k^n : k \in \omega\} \subset C(X,M)$ tal que $\lim_{k\to\infty} \varphi_k^n(x) = f_n(x)$ para todo $x \in X$.
Definimos por inducción las sucesiones:

$$\begin{cases} \psi_k^1(x) = \varphi_k^1(x) \\ \psi_k^{n+1}(x) = h_{2^{-n}}(\varphi_k^{n+1}(x), \psi_k^n(x)) \end{cases}$$

donde h_ϵ, para $\epsilon > 0$, es la función retráctil.
Como $d(\varphi_k^2(x), \psi_k^1(x))$ converge a $d(f_2(x), f_1(x)) < 1/2$ existe un natural $k_1(x)$ tal que $d(\varphi_k^2(x), \psi_k^1(x)) < 1/2$ para todo $k > k_1(x)$.

Por consiguiente, si $k > k_1(x)$, se tiene que $\psi_k^2(x) = h_{2^{-n}}(\varphi_k^2(x), \psi_k^1(x)) = \varphi_k^2(x)$. Luego $\lim_{k\to\infty} \psi_k^2(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k^2(x) = f_2(x)$ para todo $x \in X$.
De modo recurrente se prueba que para cada $n \in \omega$ existe un natural $k_n(x)$ tal que $\psi_k^n(x) = \varphi_k^n(x)$ si $k > k_n(x)$. Por tanto, $\lim_{k\to\infty} \psi_k^n(x) = f_n(x)$ para todo $x \in X$.
Notemos que para todo $x \in X$ y todo $k \in \omega$:

$$d(\psi_k^{n+1}(x), \psi_k^n(x)) = d(h_{2^{-1}}(\varphi_k^{n+1}(x), \psi_k^n(x)), \psi_k^n(x)) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Veamos que la sucesión $\{\psi_k^k : k \in \omega\} \subset C(X, M)$ converge puntualmente hacia f. Dado $x \in X$ y $\epsilon > 0$, tomamos $m \in \omega$ tal que $\frac{1}{2^{m-1}} < \frac{\epsilon}{3}$. Sabemos que existe un natural $k_m(x)$ tal que $d(f_m(x), \psi_k^m(x)) \leq \epsilon/3$ para todo $k > k_m(x)$. Si tomamos $k > \max\{m, k_m(x)\}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} d(f(x), \psi_k^k(x)) \leq & \quad d(f(x), f_m(x)) + d(f_m(x), \psi_k^m(x)) + d(\psi_k^m(x), \psi_k^k(x)) \\ \leq & \quad \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + d(\psi_k^m(x), \psi_k^{m+1}(x)) + \ldots + d(\psi_k^{k-1}(x), \psi_k^k(x)) \\ \leq & \quad \frac{2\epsilon}{3} + \left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

□

Lema 4.1.17 *Sea $f : X \to (M, d)$ una aplicación definida en un espacio X hereditariamente de Baire que toma valores en un espacio métrico (M, d). Son equivalentes:*

(a) f tiene la propiedad del punto de continuidad.

(b) f es fragmentable.

<u>*Demostración.*</u> $(a) \Rightarrow (b)$ Es inmediato.

$(b) \Rightarrow (a)$ Sea $C \subset X$ cerrado no vacío y $\epsilon > 0$, entonces $f|_C$ es casi-continua. Sea U abierto, no vacío, en C. Existe un abierto, no vacío, $V \subset U$ en C tal que $diam(f_C(V)) < \frac{\epsilon}{2}$. Luego fijado $x_0 \in V$, tenemos que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ para todo $x \in V$. Entonces $f|_C$ es continua en x_0. □

Siguiendo la idea de la prueba del teorema de Stegall (véase [46]) se tiene el siguiente resultado:

Teorema 4.1.18 *Sea $f : X \to E$ una función fragmentable donde X es un espacio perfectamente paracompacto y E es un espacio normado. Entonces $f \in B_1(X, E)$.*

<u>*Demostración.*</u> Todo espacio paracompacto es normal (véase 5.1.15 en [16]). Dado $\epsilon > 0$ consideramos el conjunto:

$$\mathcal{U}_\epsilon = \{U \subset M \text{abierto: } U \neq \emptyset, \text{ t.q. } \exists f_U \in B_1(X, M) \text{ verificando } \|f_U(x) - f(x)\| \leq \epsilon, \forall x \in U\}.$$

Veamos que $\mathcal{U}_\epsilon \neq \emptyset$. Como f es fragmentable, existe un abierto V no vacío tal que $diam(f(V)) < \epsilon$. Fijamos $x_0 \in V$ y definimos $g_V(x) = \chi_V(x) f(x_0)$. Por el lema 4.1.12 $g_V \in B_1(X, M)$ y, como

$\|g_V(x) - f(x)\| \le \epsilon$ para todo $x \in X$, entonces $V \in \mathcal{U}_\epsilon$, luego $\mathcal{U}_\epsilon \neq \emptyset$.

Consideramos el conjunto $U_0 = \bigcup\{U \in \mathcal{U}_\epsilon\}$. Veamos que $U_0 \in \mathcal{U}_\epsilon$. Dado que la propiedad de paracompacidad es hereditaria por subconjuntos F_σ (véase 5.1.28 en [16]) y U_0 es F_σ se tiene que U_0 es paracompacto. Por tanto, existe una colección localmente finita $\{V_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \subset \mathcal{U}_\epsilon$ tal que $\bigcup\{V_\gamma : \gamma \in \Gamma\} = U_0$. Asumimos que Γ está bien ordenado con elemento minimal 1. Definimos el conjunto $V_0 = \emptyset$. Fijado $\gamma \in \Gamma$, como $\chi_{\left(V_\gamma \setminus \bigcup\limits_{\beta<\gamma} V_\beta\right)} \in B_1(X)$, por el lema 4.1.12, podemos tomar una sucesión de funciones continuas $r_{\gamma,n} : X \to \mathbb{R}$ tal que cada $r_{\gamma,n}$ se anula fuera de V_r y $\lim\limits_{n\to\infty} r_{\gamma,n}(x) = \chi_{\left(V_\gamma \setminus \bigcup\limits_{\beta<\gamma} V_\beta\right)}(x)$ para todo $x \in X$.
Como cada V_γ está contenido en algún $U_\gamma \in \mathcal{U}_\epsilon$, existe una función $g_{V_\gamma} \in B_1(X, M)$ tal que $\|g_{V_\gamma}(x) - f(x)\| \le \epsilon, \forall x \in V_\gamma$. Tomamos la sucesión de funciones continuas $\{f_{\gamma,n} : n \in \omega\}$ tales que $\lim\limits_{n\to\infty} f_{\gamma,n}(x) = f_{V_\gamma}(x)$ para todo $x \in X$. Como $\chi_{U_0} \in B_1(X)$ podemos tomar la sucesión de funciones continuas $\{s_n : n \in \omega\}$ tales que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = \chi_{U_0}(x)$ para todo $x \in X$ y $s_n(x) = 0$ si $\|x - y\| \le \frac{1}{n}$ para todo $y \in X \setminus U_0$.
Definimos la función:

$$g_n(x) = s_n(x) \sum_{\gamma\in\Gamma} r_{\gamma,n}(x) f_{\gamma,n}(x).$$

Como $\{V_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ es localmente finita en U_0 cada g_n está bien definida y es continua en todo X. Consideramos:

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \chi_{U_0}(x) \sum_{\gamma\in\Gamma} \chi_{\left(V_\gamma \setminus \bigcup_{\beta<\gamma} V_\beta\right)}(x) f_{V_\gamma}(x)$$

Entonces $g \in B_1(X, M)$. Fijado $x \in U_0$ se tiene que $g(x) = f_{V_\gamma}(x)$ para algún γ. Entonces $\|g(x) - f(x)\| \le \epsilon$, por lo que $U_0 \in \mathcal{U}_\epsilon$.
Veamos que $U_0 = X$. Para ello razonamos por reducción al absurdo. Sea $C = X \setminus U_0 \neq \emptyset$ cerrado, como f es fragmentable existe un abierto $V \subset X$ no vacío, con $C \cap V \neq \emptyset$ y $diam(f(C \cap V)) \le \epsilon$. Sea $x_0 \in C \cap V$ fijo. Consideramos la función:

$$h = g\chi_{U_0} + f(x_0)\chi_{C\cap V}.$$

Notemos que $h \in B_1(X, M)$ y se tiene que $\|h(x) - f(x)\| \le \epsilon$ para todo $x \in U_0 \cup V$. Por consiguiente, $U_0 \cup V \in \mathcal{U}_\epsilon$, lo cual es una contradicción.
Por tanto, para todo $\epsilon > 0$ existe una función $g_\epsilon \in B_1(X, M)$ tal que $\|g_\epsilon(x) - f(x)\| \le \epsilon$ para todo $x \in X$. Finalmente, por el lema 4.1.16, $f \in B_1(X, M)$.
□

Corolario 4.1.19 *Sea X un espacio métrico completo y $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Entonces $f \in B_1(X)$ si y sólo si f es fragmentable.*

<u>Demostración.</u> ($\Rightarrow$) Por el teorema 2.3.13 f tiene la propiedad del punto de continuidad y por el lema 4.1.17 se sigue que f es fragmentable.

($\Leftarrow$) Por el teorema 4.1.18. □

4.2. El teorema de Corson y Glicksberg y aplicaciones

Teorema 4.2.1 (Corson y Glicksberg) *Sea X un espacio de Baire, M un espacio métrico y K un subespacio de M^X compacto y metrizable. Si existe un subespacio D de $C(X, M)$ tal que $\overline{D}^{M^X} = K$, entonces K es equi-casi-continuo.*

Demostración. Consideramos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "Eval"] \arrow[dr, dashed, "\Phi \circ Eval"'] & (C(K,M), t_p(D)) \arrow[d, "\Phi"] \\
 & (C(K,M), d_\infty)
\end{tikzcd}$$

donde $d_\infty(\psi_1, \psi_2) = sup\{d(\psi_1(k), \psi_2(k)) : k \in K\}$ para $\psi_1, \psi_2 \in C(K, M)$, siendo d la métrica del espacio M.
Observamos que por el hecho de ser K compacto se tiene que $(C(K, M), d_\infty)$ es un espacio métrico.

Veamos primero que la aplicación $Eval$ es continua. Para ello notemos que dado $f \in D$ se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "Eval"] \arrow[dr, dashed, "\delta_f \circ Eval"'] & (C(K,M), t_p(D)) \arrow[d, "\delta_f"] \\
 & M
\end{tikzcd}$$

donde para cada $\phi \in C(K, M)$, $\delta_f(\phi) = \phi(f)$.
Sea $x \in X$. Si fijamos $k \in K$ se tiene que $Eval(x)[k] = k(x)$. Por tanto, $Eval(x) \in M^K$.
Sea una sucesión $\{k_n : n \in \omega\} \subset K$ una sucesión que converge a $k_* \in K$, entonces $\{k_n : n \in \omega\} \cup \{k_*\} \subset K$. Como la topología de K es $t_p(X)$, entonces $k_n \to k_*$ si y sólo si $k_n(x) \to k_*(x)$ para todo $x \in X$. Por tanto, $Eval(x) \in C(K, M)$ para todo $x \in X$.
Para ver la continuidad de $Eval$ tomamos una red $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta} \subset X$ que converge a $x \in X$. Entonces si $f \in D \subseteq C(X, M)$ se tiene que $f(x_\delta) \to f(x)$. Como $f(x_\delta) \to f(x)$ para todo $f \in D$ si y sólo si $(\delta_f \circ Eval)$ es continua para todo $f \in D$, se sigue que la aplicación $Eval$ es continua.
Obviamente, la aplicación Φ no es continua, sin embargo, veamos que la antiimagen de una bola cerrada es cerrada.
Sea $B = \overline{B_{d_\infty}}(\phi, r)$ donde $\phi \in C(K, M)$ y $r > 0$. Dada una red $\{\phi_\delta\}_{\delta \in \Delta} \subset B$ tal que $\phi_\delta \xrightarrow{t_p(D)} \phi_0$, veamos que $\phi_0 \in B$.

Si $\phi_\delta \in B$, entonces $d_\infty(\phi, \phi_\delta) \leq r \Rightarrow d(\phi(k), \phi_\delta(k)) \leq r$ para todo $k \in K$ (en particular, para todo $d \in D$).
Si fijamos $d_0 \in D$ arbitrario, entonces $d(\phi(d_0), \phi_\delta(d_0)) \leq r$, y como $\phi_\delta(d_0) \to \phi_0(d_0)$, se tiene que $d(\phi(d_0), \phi_0(d_0)) \leq r$. Ello implica que $\phi_0 \in B$, por lo que B es cerrado en $t_p(D)$.
Observemos que por ser K compacto y metrizable el espacio $(C(K, M), d_\infty)$ es separable.
Para ver que K es equi-casi-continua tomamos $\epsilon > 0$ y $U \subseteq X$ abierto. Elegimos $n \in \omega$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2}$. Por ser $(C(K, M), d_\infty)$ separable existe una cantidad numerable de bolas:

$$\{B_{d_\infty}(\phi_m, \frac{1}{n}) : m \in \omega\}$$

tal que la unión de todas ellas es $C(K, M)$.
Considerando las bolas cerradas, tenemos que los conjuntos:

$$\{(\Phi \circ Eval)^{-1}\left(\overline{B_{d_\infty}}(\phi_m, \frac{1}{n})\right) : m \in \omega\}$$

son cerrados en X.
En particular, dado el subconjunto $U \subseteq X$ abierto anterior, sabemos que U es de Baire. Como:

$$U = \bigcup_{m \in \omega} U \cap (\Phi \circ Eval)^{-1}\left(\overline{B_{d_\infty}}(\phi_m, \frac{1}{n})\right)$$

donde cada $U \cap (\Phi \circ Eval)^{-1}\left(\overline{B_{d_\infty}}(\phi_m, \frac{1}{n})\right)$ es cerrado en U, por el teorema de categoría de Baire existe un $m_0 \in \omega$ tal que $U \cap (\Phi \circ Eval)^{-1}\left(\overline{B_{d_\infty}}(\phi_{m_0}, \frac{1}{n})\right)$ tiene interior no vacío en U. Dado que U es abierto en X, el conjunto anterior tiene interior no vacío en X.
Sea $V \subseteq X$ abierto tal que $V \subseteq U \cap (\Phi \circ Eval)^{-1}\left(\overline{B_{d_\infty}}(\phi_{m_0}, \frac{1}{n})\right)$. Si $x_1, x_2 \in V$, entonces $(\Phi \circ Eval)(x_1) = Eval(x_1)$ y $(\Phi \circ Eval)(x_2) = Eval(x_2)$ están en $\overline{B_{d_\infty}}(\phi_{m_0}, \frac{1}{n})$.
Por consiguiente:

$$d_\infty(Eval(x_1), Eval(x_2)) \leq d_\infty(Eval(x_1), \phi_{m_0}) + d_\infty(\phi_{m_0}, Eval(x_2)) \leq \frac{2}{n} < \epsilon.$$

Por tanto:

$$sup\{d(k(x_1), k(x_2)) : k \in K\} < \epsilon.$$

□

Nota 4.2.2 *Si en el teorema anterior se supone que X es hereditariamente de Baire, entonces K es fragmentable.*

Demostración. Tenemos que demostrar que para todo $C \subseteq X$ cerrado, $K|_C$ es equi-casi-continua en C. Como X es hereditariamente de Baire basta suponer que $A = X$. Se sigue del teorema anterior. □

Lema 4.2.3 *Sea X espacio metrizable y separable e (Y, d) un espacio métrico. Si X está fragmentado por una aplicación sobreyectiva $f : X \to Y$, entonces Y es separable.*

Demostración. Supongamos que Y no es separable, entonces existe un $\epsilon > 0$ y un subconjunto H de Y tal que $d(h_1, h_2) > \epsilon$ para todo $h_1, h_2 \in H$ tales que $h_1 \neq h_2$.
Como f es sobreyectiva, existe un subconjunto A de X tal que $f(A) = H$ y f restringida a A es biyectiva. Dado que X es metrizable y separable el subconjunto no numerable A de X se puede expresar como la unión disjunta de un subconjunto numerable N y un subconjunto M no vacio, cerrado y perfecto, que consta de los puntos de condensación de A (este resultado se sigue de la prueba del teorema de Cantor-Bendixson (véase 6.4 en [27]).
Por fragmentabilidad, dado el cerrado M existe un abierto U en X tal que $U \cap M \neq \emptyset$ y $diam(f(U \cap M)) < \epsilon$.
Por la propiedad de H se tiene que $U \cap M$ debe ser un punto. Lo cual es una contradicción, ya que ningún punto de M es aislado. □

Teorema 4.2.4 *Sea X un espacio métrico compacto, M un espacio métrico y D un subconjunto de $C(X, M)$ tal que $K = \overline{D}^{M^X}$. Entonces K es metrizable si y sólo si K es fragmentable.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Véase el teorema 4.2.1.

($\Leftarrow$) Si K es fragmentable entonces X está fragmentado por $f : X \to C(K, M)$ como hemos visto en la nota 4.1.5. Por el lema 4.2.3 se tiene que $f(X) \subset C(K, M)$ es separable. Luego existe un subconjunto denso y numerable $A = \{a_n : n \in \omega\}$ de $f(X)$.
Notemos que $f(X)$ separa los puntos de K. Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in K$, tales que $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Se sigue que existe un $x \in X$ tal que $\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)$. Si tomamos $x^* = f(x)$, entonces $x^*(\varphi_1) = \varphi_1(x) \neq \varphi_2(x) = x^*(\varphi_2)$. Por tanto, A también separa los puntos de K.
Si consideremos el producto diagonal:

$$\begin{aligned} \Delta A : K &\longrightarrow M^A \equiv \prod_{n\in\omega} M^{a_n} \\ \varphi &\longmapsto \{a_n(\varphi) : n \in \omega\} \end{aligned}$$

tenemos que es un embebimiento. Como M es metrizable y A es numerable se llega a que M^A es metrizable. Por consiguiente, K es metrizable. □

Lema 4.2.5 *Si X es un espacio completamente regular. Entonces $C^*(X)$ es separable si y sólo si X es un espacio métrico compacto.*

Demostración. Véase 6.6 en [9]. □

Lema 4.2.6 *Sea X un espacio separable y $K \subseteq C_p(X)$ compacto. Entonces K es metrizable.*

Demostración. Como X es separable existe un $D \subseteq X$ numerable tal que $\overline{D} = K$. Fijados $p, q \in \mathbb{Q}$ tales que $p < q$ consideramos los conjuntos abiertos definidos de la siguiente forma:

$$S(x, p, q) = \{f \in C(X) : p < f(x) < q\}$$

y tomamos el conjunto:

$$G = \{S(x,p,q) : x \in D; \quad p,q \in \mathbb{Q}\}.$$

Notemos que G es una familia numerable de abiertos. Sea $K \subseteq C_p(X)$ compacto, consideramos $\tilde{G} = G|_K$.
Si consideramos la topología τ' generada por $\tilde{G}$ como subbase se tiene que es de Hausdorff y más débil que la topología original de K, y dado que la topología de K no se puede debilitar por ser compacto, se llega a que (K,τ') y $(K,t_p(X))$ son homeomorfos. Por tanto, $(K,t_p(X))$ tiene una base numerable y, consecuentemente, es metrizable. □

Proposición 4.2.7 *Sea $(X,t_p(D))$ un espacio compacto y metrizable, donde $D \subset C_p(X)$ compacto. Entonces D es fragmentable.*

Demostración. Notemos que $(X,t_p(D))$ es separable. Entonces, por el lema 4.2.6, D es metrizable. Aplicando el teorema 4.2.4 se llega a que D es fragmentable. □

Corolario 4.2.8 *Sea $(X,t_p(D))$ un espacio compacto y metrizable, donde $D \subset C_p(X)$ es pseudocompacto. Entonces D es fragmentable.*

Demostración. Se sigue el resultado por el corolario 2.2.9 y la proposición 4.2.7. □

4.3. El teorema de Talagrand

Denotamos por 2^ω el espacio compacto formado por las sucesiones infinitas de ceros y unos, equipado con la topología producto, y por $2^{(\omega)}$ el conjunto constituido por las sucesiones finitas de ceros y unos. Sea $t \in 2^{(\omega)}$, denotamos por $|t|$ a la longitud de t. Dado $\sigma \in 2^\omega \cup 2^{(\omega)}$ y $n \in \omega$ menor o igual que $|\sigma|$, consideraremos $\sigma|n = (\sigma(1),\ldots,\sigma(n)) \in 2^{(\omega)}$.
Notemos que el conjunto $2^{(\omega)}$ es numerable, ya que si consideramos el conjunto S_n de todas las sucesiones de longitud n de ceros y unos se tiene que su cardinal es finito y, como $2^{(\omega)} = \bigcup_{n\in\omega} S_n$, se llega a que $2^{(\omega)}$ es un conjunto numerable.
Análogamente, denotamos por ω^ω el espacio formado por las sucesiones infinitas de naturales, equipado con la topología producto, y por $\omega^{(\omega)}$ el espacio constituido por las sucesiones finitas de naturales. Dado $s \in \omega^\omega \cup \omega^{(\omega)}$ y $n \in \omega$ menor o igual que $|s|$, consideraremos $s|n = (s(1),\ldots,s(n)) \in \omega^{(\omega)}$.
Sea X un espacio topológico, se denota por $\mathcal{K}(X)$ el conjunto de subconjuntos compactos de X no vacíos.

Definición 4.3.1 *Sea X un espacio topológico. Una aplicación $\sigma \to X_\sigma$ de ω^ω en $\mathcal{K}(X)$ se dice que es* ***semicontinua superiormente sobre los compactos de*** *X si para todo abierto U de X el conjunto de σ tales que $X_\sigma \subset U$ es un abierto de ω^ω. Si $X = \bigcup_{\sigma\in\omega^\omega} X_\sigma$ se dice que X es un espacio* ***k-analítico****.*

Teorema 4.3.2 (Talagrand) *Sea (X,τ) un espacio compacto y M un espacio compacto metrizable. Sea $D \subset C(X,M)$. Consideramos $K = \overline{D}^{X^M}$, y τ' la topologia menos fina sobre X que hace continuas las funciones de K. Si (X,τ') es k-analítico, entonces existe un subconjunto G de (X,τ) que es G_δ y denso tal que D es equi-continuo en todo punto de G.*
Consecuentemente, la aplicación separadamente continua $(x,y) \mapsto y(x)$ que va de $X \times D$ a M es conjuntamente continua en todo punto de $G \times D$.

Demostración. *Paso 1:* Como M se puede sumergir en $[0,1]^\omega$, dado que una familia de aplicaciones que toman valores en $[0,1]^\omega$ es equi-continua en un punto si para cada proyección, la familia que resulta al componer las aplicaciones previas con las proyecciones es equi-continua en dicho punto y, por el hecho de que una intersección numerable de conjuntos G_δ y densos es un G_δ y denso, podemos suponer que $M = [0,1]$.

Paso 2: Veamos que para todo $\epsilon > 0$ existe un abierto no vacío U de X tal que para todo $d \in D$ y todo $x_1, x_2 \in U$ se tiene que $|d(x_1) - d(x_2)| \leq \epsilon$. Para ello razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo abierto U no vacío de X existe un $d \in D$ y $x_1, x_2 \in U$ tales que $|d(x_1) - d(x_2)| > \epsilon$. Para cada $t \in 2^{(\omega)}$ construiremos por inducción sobre la longitud $|t|$ de t un cerrado A_t de X y un elemento $d_t \in D$ verificando las condiciones siguientes:

(a) $Int(A_t) \neq \emptyset$;

(b) $A_{t,0} \cup A_{t,1} \subset A_t$;

(c) $|d_t(x_0) - d_t(x_1)| > \epsilon$ para todo $x_0 \in A_{t,0}$ y todo $x_1 \in A_{t,1}$.

Partimos considerando $A_\emptyset = X$. Supongamos construidos los A_t para $|t| \leq n$ y los d_t para $|t| \leq n-1$. Fijamos t tal que $|t| \leq n$. Por hipótesis existen $x_0, x_1 \in A_t$ y $d_t \in D$ tales que $|d_t(x_0) - d_t(x_1)| - \epsilon = 2\alpha > 0$. Consideramos para $i = 0,1$, el conjunto:

$$A_{t,i} = \{x \in A_t : |d_t(x) - d(x_i)| \leq \frac{\alpha}{2}\}.$$

Dado que d_t es continua se sigue que los conjuntos $A_{t,i}$ son no vacíos.
Definimos el conjunto numerable $H = \overline{\{d_t : t \in 2^{(\omega)}\}}^{[0,1]^X}$. Notemos que H es compacto para la topología de la convergencia puntual y está formado por funciones que son continuas para la topología τ'.
Como (X,τ') es k-analítico y H es separable se sigue de [48] (teoremas 3.7 y 6.2) que $C(H)$ es separable. Para cada $\sigma \in 2^\omega$ consideramos un punto x_σ de $\bigcap_{t<\sigma} A_t$. Notemos que dicha intersección es no vacía por ser una intersección decreciente de conjuntos compactos. Sean $\sigma, \sigma' \in 2^\omega$ distintos, existirá un $n \in \{0\} \cup \omega$ tal que $\sigma|n = \sigma'|n$ y $\sigma(n+1) \neq \sigma'(n+1)$. Tomamos $t = \sigma(n)$, entonces $x_\sigma \in A_{d,0}$ y $x_{\sigma'} \in A_{d,1}$. Luego por la condición (c) se tiene que $|d_t(x_\sigma) - d_t(x_{\sigma'})| > \epsilon$. Ello implica que los elementos $y \to y(x_\sigma)$ e $y \to y(x_{\sigma'})$ de $C(H)$ distan en norma como mínimo ϵ. Contradicción con el hecho de que $C(H)$ sea separable.

Paso 3: Para cada $n \in \omega$ consideramos el conjunto:

$$G_n = \{U \subset X : U \text{ es abierto y } |d(x_0) - d(x_1)| \leq \frac{1}{n}, \forall d \in D, \forall x_0, x_1 \in U\}.$$

Notemos que G_n es denso para todo $n \in \omega$. En efecto, sea V abierto no vacío de X, entonces las hipótesis del teorema se siguen cumpliendo para $\overline{V}$ y por el paso 2 tenemos que $V \cap G_n \neq \emptyset$. Entonces $G = \bigcap_{n\in\omega} G_n$ es un subconjunto G_δ y denso de X tal que en todo punto D es equicontinuo. $\square$

Nota 4.3.3 *(a) Por un resultado de Frolik [18] se sabe que todo espacio k-analítico es Lindelöf, y según afirma Talagrand en el artículo [47], el resultado se puede extender al caso de que (X, τ') es Lindelöf, aunque la demostración no la incluye argumentando que sería muy extensa ("la démonstration serait alors beaucoup plus longue"). En el año 2000, Cascales, Namioka y Vera demuestran que sí se cumple la conjetura de Talagrand, como veremos más adelante.*

(b) Como consecuencia se tiene que si un espacio X es compacto y el subconjunto $K \subset C(X)$ es compacto, entonces K es fragmentable. Más adelante proporcionamos una prueba autocontenida de dicho resultado. Recordemos que la prueba del teorema de Talagrand emplea resultados de otro artículo suyo [48], en el cual utiliza ideas que se salen del planteamiento de esta memoria.

4.4. Un resultado de simplificación

Empezamos presentando el resultado de simplificación que hemos mencionado en la introducción de la memoria.

Teorema 4.4.1 *Sea $(X, t_p(D))$ un espacio compacto, donde $D \subseteq C_p(X)$. Entonces D es fragmentable si y sólo si para todo $F \subseteq X$ cerrado y para todo $\tilde{D} \subseteq D$ numerable, $\overline{\tilde{D}}^{\mathbb{R}^F}$ es metrizable.*

<u>*Demostración.*</u> ($\Rightarrow$) Sea $F \subset X$ cerrado, no vacío, y sea $\tilde{D} \subseteq D$ un subconjunto numerable.
Por ser D fragmentable se tiene que $\tilde{D}$ es fragmentable y, por el lema 4.1.6, se sigue que $\overline{\tilde{D}}^{\mathbb{R}^F}$ es fragmentable.
Por ser F $t_p(D)$-cerrado y X $t_p(D)$-compacto se sigue que F es $t_p(D)$-compacto. Dado que la topología $t_p(\tilde{D})$ es menos fina que $t_p(D)$ y la topología de un espacio compacto no se puede debilitar se concluye que F es $t_p(\tilde{D})$-compacto. Por ser $\tilde{D}$ numerable se tiene que $(F, t_p(\tilde{D}))$ también es métrizable. Entonces por el teorema 4.2.4, $\overline{\tilde{D}}^{\mathbb{R}^F}$ es metrizable.

($\Leftarrow$) Supongamos que D no es fragmentable (X no está fragmentado por la norma), entonces existe un subconjunto $F \subseteq X$ $t_p(D)$-cerrado (por lo tanto $t_p(D)$-compacto), no vacío, y un $\epsilon > 0$ de manera que todo $t_p(D)$-abierto de C tiene un diámetro respecto a la norma mayor que ϵ.
Por inducción sobre $n = |t|$, $t \in 2^{(\omega)}$, construimos las familias numerables:

- $\{U_t : t \in 2^{(\omega)}\}$ de conjuntos $t_p(D)$-abiertos no vacíos, relativos a F;
- $\{d_t : t \in 2^{(\omega)}\}$ de funciones de D,

cumpliendo las siguientes condiciones:

(1) $U_\emptyset = F$;

(2) $\overline{U_{t0}} \cup \overline{U_{t1}} \subset U_t$ para todo $t \in 2^{(\omega)}$;

(3) $|d_t(x) - d_t(y)| > \epsilon$ para todo $x \in U_{t0}$ y para todo $y \in U_{t1}$;

(4) si $s, t \in 2^{(\omega)}$ con $|s| < |t|$, entonces $d_s(\overline{U_{tj}}) < \frac{1}{|t|}$, $(j = 0, 1)$.

Veamos que dicha construcción es posible. Si $n = 0$ tomamos $U_\emptyset = F$. Supongamos ya construidos $\{U_t : |t| < n\}$ y $\{d_t : |t| < n\}$. Fijado $t \in 2^{(\omega)}$ con $|t| = n-1$, por la no fragmentabilidad de D que hemos supuesto, existen $x_0, x_1 \in U_t$ tales que $\|x_0 - x_1\| > \epsilon$. Por consiguiente, existe un $d_t \in D$ tal que $|d_t(x_0) - d_t(x_1)| > \epsilon$.
Como d_t y d_s, $|s| < |t|$, son continuas en $(X, t_p(D))$, podemos elegir entornos abiertos U_{t0}, U_{t1} de x_0 y x_1 respectivamente que cumplen las condiciones (2), (3) y (4).
Notemos que por (3), se tiene que $\overline{U_{t0}} \cap \overline{U_{t1}} = \emptyset$ para todo $t \in 2^{(\omega)}$.
Consideramos $C = \bigcap\limits_{n\in\omega} \bigcup\limits_{|t|=n} \overline{U_t}$. Entonces C es un subconjunto compacto de $(F, t_p(D))$. Notemos que podemos expresar el anterior conjunto como $C = \bigcup\limits_{\sigma\in 2^\omega} \bigcap\limits_{n\in\omega} \overline{U_{\sigma|n}}$.
Definimos la aplicación $\psi : C \to 2^\omega$ tal que $\psi^{-1}(\sigma) = \bigcap\limits_{n\in\omega} \overline{U_{\sigma|n}}$. La aplicación ψ es continua y sobreyectiva. Observemos que para todo $t \in 2^{(\omega)}$ y $\sigma \in 2^\omega$ se tiene que $d_t(\psi^{-1}(\sigma))$ es un sólo punto por (4). Entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "d_t"'] & 2^\omega \arrow[d, dashed, "d_t^*"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

donde la aplicación d_t^* es continua.
Dados $x, y \in C$ tales que $\psi(x) \neq \psi(y)$, llamamos $\sigma = \psi(x)$ y $\sigma' = \psi(y)$. Existe un $n \in \{0\} \cup \omega$ tal que $\sigma|n = \sigma'|n$ y $\sigma(n+1) \neq \sigma'(n+1)$. Tomamos $t = \sigma|n$. Por (3) se sigue que $|d_t(x) - d_t(y)| > \epsilon$ y, por tanto, $\|x - y\|_D > \epsilon$.

Por hipótesis, considerando $\tilde{D} = \{d_t : t \in 2^{(\omega)}\}$, se tiene que $\tilde{K} = \overline{\tilde{D}}^{\mathbb{R}^F}$ es metrizable. Luego $C(\tilde{K})$ es separable por el lema 4.2.5, lo cual es una contradicción. $\square$

Veamos un par de aplicaciones de este resultado antes de centrarnos en cómo aplicarlo al teorema de Casacales, Namioka y Vera:

Corolario 4.4.2 *Sea X un espacio compacto y $K \subset C_p(X)$ compacto. Entonces K es fragmentable.*

Demostración. Sea F un subconjunto cerrado de $(X, t_p(K))$ y $\tilde{K} \subset K$ un subconjunto numerable. Se sigue que F es $t_p(K)$-compacto. Como la aplicación $id : (F, t_p(K)) \to (F, t_p(\tilde{K}))$ es

continua, se tendrá que F es $t_p(\tilde{K})$-compacto. Además, por el lema 4.2.5 también es metrizable.
Como π_F es continua (véase A.1.14) se sigue que $\pi_F(K)$ es compacto. Por tanto, $C = \overline{\tilde{K}}^{\mathbb{R}^F}$ es compacto. Por el mismo razonamiento de antes sabemos que F es $t_p(C)$-compacto. Dado que la topología $t_p(\tilde{K})$ es de Hausdorff y $t_p(\tilde{K}) \subseteq t_p(C)$, al ser F $t_p(C)$-compacto, como no se puede debilitar su topología se sigue que $(F, t_p(C))$ es metrizable.
Por la proposición 4.2.7 se tiene que C es fragmentable. Por teorema 4.2.4 se llega a que C es metrizable. Finalmente, aplicando el teorema 4.4.1, se obtiene el resultado. □

Corolario 4.4.3 *Sea $(X, t_p(D))$ un espacio compacto, donde $D \subset C_p(X)$ es pseudocompacto. Entonces D es fragmentable.*

<u>*Demostración.*</u> Por el corolario 2.2.9 se tiene que D es compacto. Se tiene el resultado por el corolario 4.4.2. □

Definición 4.4.4 *Sea X un espacio topológico, se dice que X tiene **tightness numerable** si para todo $A \subseteq X$ y $x \in \overline{A}$ existe un subconjunto numerable $B \subseteq A$ tal que $x \in \overline{B}$.*

A continuación demostramos, con ayuda de unos resultados auxiliares, que $\beta\omega$ no tiene tightness numerable:

Lema 4.4.5 *Sea X un espacio completamente regular, entonces X es homeomorfo a $\prod_{f \in C(X,I)} I$*

<u>*Demostración.*</u> Definimos la aplicación:

$$\begin{aligned} E : X &\longrightarrow \prod_{f \in C(X,I)} I \\ x &\longmapsto \{f(x) : f \in C(X,I)\} \end{aligned}$$

La continuidad de la aplicación E se sigue del hecho de que cada $f \in C(X, I)$ es continua. Como para cada par $x, y \in X$ tales que $x \neq y$ existe una función $f \in C(X, I)$ que cumple que $f(x) \neq f(y)$, la aplicación es inyectiva.
Veamos que E^{-1} es continua. Sea $U \subseteq X$ abierto tal que $x = E^{-1}(E(x)) \in U$. Como X es completamente regular, existe una aplicación continua $g : X \to I$ tal que $g(X \setminus U) \subset \{0\}$ y $g(x) = 1$. Sea $V = \prod_{f \in C(X,I)} I_f$ donde $I_f = I$ para todo $f \neq g$ e $I_g =]0, 1[$. Entonces $V_0 = V \cap E(X)$ es abierto en $E(X)$ y $E(x) \in V_0$. Veamos que $E^{-1}(V_0) \subseteq U$. Para ello tomamos $T = E(y) \in V_0$. Notemos que $T(g) \in]0, 1]$, ya que $T \in V_0$. Si $y \in X \setminus U$, entonces tendríamos que $T(g) = 0$, contradicción. Por consiguiente, se sigue que $y = E^{-1}(E(y)) \in U$. □

De forma alternativa a la descripción presentada en A.3.2 (véase apéndice) se puede definir la compactación de Stone-Čech de un espacio completamente regular X como $\overline{E(X)}$, donde la clausura se toma en el espacio producto.

Corolario 4.4.6 *Sea X un espacio completamente regular y compacto y sea $\mathcal{A} \subseteq C(X, I)$ una familia que separa los puntos de X. Entonces X es homeomorfo a $\prod_{f \in \mathcal{A}} I$.*

Demostración. Definimos la aplicación:

$$\begin{array}{rcl} E_{\mathcal{A}} : X & \longrightarrow & \prod_{f \in C(X,I)} I \\ x & \longmapsto & \{f(x) : f \in \mathcal{A}\} \end{array}$$

Recordemos que la topología de X es la mínima que hace que las funciones $f \in C(X, I)$ sean continuas. Notemos que si dotamos a X de la mínima topolgía que hace que la familia de funciones $\mathcal{A}$ sea continua, ésta es más débil que la original. Dado que $\mathcal{A}$ separa los puntos de X esta topología es de Hausdorff. Como la topología de un espacio compacto no se puede debilitar (sin perder la propiedad de que sea de Hausdorff) se sigue que ambas topologías son homeomorfas y se llega al resultado por el lema anterior. □

Denotamos por ω_1 el ordinal más pequeño que al ser considerado como conjunto no es numerable. Es el supremo de todos los cardinales numerables. El cardinal de dicho conjunto es el primer cardinal no numerable, $\aleph_1$. Como cualquier ordinal, ω_1 está bien ordenado. Denotamos por $\omega_1 + 1$ el espacio de números ordinales $[0, \omega_1] = \{\alpha : \alpha \leq \omega_1\}$.
Consideraremos, sobre ω_1+1, la topología generada por la base $\mathcal{B} = \{(y, x] : y < x \leq \omega_1\} \cup \{0\}$, donde $(y, x] = \{z \in \omega_1 + 1 : y < z \leq x\}$ para cada $y, x \in \omega_1 + 1$. El espacio $\omega_1 + 1$ es completamente regular. Dado que el elemento ω_1 no se puede obtener como límite de una sucesión se sigue que el espacio $\omega_1 + 1$ no tiene tightness numerable.

Lema 4.4.7 *El espacio $\omega_1 + 1$ es compacto.*

Demostración. Sea $\{U_s : s \in S\}$ un recubrimiento por abiertos del espacio ω_1+1. Consideramos el conjunto A formado por los $x \in \omega_1 + 1$ tales que el intervalo $[0, x]$ está contenido en la unión finita de elementos de $\{U_s : s \in S\}$. Basta probar que $(\omega_1 + 1) \setminus A = \emptyset$. Supongamos que $(\omega_1 + 1) \setminus A \neq \emptyset$ y tomemos x_0 el menor elemento de dicho conjunto. Observemos que $x_0 \neq 0$. Sea $s_0 \in S$ tal que $x_0 \in U_{s_0}$. Dado que $x_0 > 0$ existe $y < x_0$ tal que $(y, x_0] \subset U_{s_0}$. Como x_0 es el mínimo elemento de $(\omega_1 + 1) \setminus A$, se tiene que $[0, y] \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i}$ para ciertos $s_1, s_2, \ldots, s_k \in S$. Entonces, $[0, x] \subset \bigcup_{i=0}^{k} U_{s_i}$, lo cual es una contradicción. □

Se define el cardinal del continuo, $\mathfrak{c}$, como el cardinal del conjunto $\mathbb{R}$. Se sabe que $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$.

Corolario 4.4.8 *El espacio $\omega_1 + 1$ está sumergido en $I^{\mathfrak{c}}$.*

Demostración. Consideramos la familia de funciones continuas $\mathcal{A} = \{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tal que para cada $\alpha < \omega_1$ se tiene que $f_\alpha = 0$ si $x \leq \alpha$ y $f_\alpha = 1$ si $x > \alpha$. Notemos que la familia $\mathcal{A}$ separa los puntos de $\omega_1 + 1$. Dado que $|\mathcal{A}| = \aleph_1 \leq \mathfrak{c}$, por el corolario 4.4.6, se obtiene el resultado. □

Lema 4.4.9 *Sea A un conjunto tal que $|A| = \mathfrak{c}$. Entonces, existe una familia numerable de funciones $\{f_k : k \in \omega\}$ tal que para toda función $f : A \to \omega$ y todo subconjunto finito $A' \subset A$ existe $k \in \omega$ tal que $f_k|_{A'} = f|_{A'}$.*

Demostración. Basta probarlo para un conjunto A particular tal que $|A| = \mathfrak{c}$. Consideramos $A = 2^\omega$. Para cada $m \in \omega$ tomamos el conjunto $A_m = \{t \in 2^{(\omega)} : |t| = m\}$. Cada aplicación $g : A_m \to \omega$ genera una aplicación $f_g : A \to \omega$ definida como $f_g((x_0, x_1, \ldots)) = g((x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}))$.
Sea $\mathcal{H}_m = \{g : A_m \to \omega\}$. Notemos que $\mathcal{H}_m$ es equivalente a ω^m. Y dado que una unión finita de conjuntos numerables es numerable se sigue que $\mathcal{H}_m$ es numerable. Sea $\mathcal{G} = \bigcup_{m\in\omega} \mathcal{H}_m$, dado que es unión numerable de conjuntos numerables se tiene que $\mathcal{G}$ es numerable. Consideramos el conjunto numerable de funciones $\mathcal{F} = \{f_g : g \in \mathcal{G}\}$. Veamos que este conjunto es el que satisface el enunciado del lema. Dada una función $f : 2^\omega \to \omega$ y un subconjunto finito $A' = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \subset 2^\omega$ podemos tomar $a_i = f(t_i) \in \omega$ para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Si $m \in \omega$ es suficientemente grande como para que los $t_i|m$ sean diferentes, entonces existe una función $g : A_m \to \omega$ para la cual $g(t_i|m) = a_i$ para todo $0 \le i \le n$. Por tanto, para $f_g \in \mathcal{F}$ se tiene que $f_g(t_i) = a_i$ como buscábamos. □

Lema 4.4.10 (Hewitt, Marczewski y Pondiczery) *Sea A un conjunto tal que $|A| = \mathfrak{c}$. Sea $\{X_a : a \in A\}$ una familia de espacios topológicos separables. Entonces el espacio producto $Y = \prod_{a\in A} X_a$ es separable.*

Demostración. Para cada $a \in A$ tomamos el subconjunto denso y numerable $\{x_j^{(a)} : j \in \omega\}$ de X_a. Sea $\{f_k : k \in \omega\}$ la familia de funciones del lema anterior. Para cada $k \in \omega$, tomamos el elemento $F_k \in Y$ tal que $F_k(a) = x_{f_k(a)}^{(a)}$ para cada $a \in A$. Sea $D = \{F_k : k \in \omega\} \subset Y$, se sigue que D es un conjunto numerable y, usando la definición de la topología producto, se llega a que D es denso en Y. □

Lema 4.4.11 *Todo compacto separable es imagen continua del espacio $\beta\omega$.*

Demostración. Sea X compacto y separable. Por ser separable existe un subconjunto $D \subseteq X$ numerable tal que $\overline{D} = X$. Sea $f : \omega \to D$ sobreyectiva y continua (recordemos que ω está equipado con la topología discreta). Como f se puede extender a una función continua $f^\beta : \beta\omega \to X$ se sigue que $f^\beta(\beta\omega)$ es un conjunto compacto y cerrado en X que contiene a D, y por consiguiente también contiene a $\overline{D} = X$. Por tanto, f^β también es sobreyectiva. □

Corolario 4.4.12 *El espacio $\beta\omega$ no tiene tightness numerable.*

Demostración. Supongamos que $\beta\omega$ tiene tightness numerable. El espacio $I^\mathfrak{c}$ es separable por el lema 4.4.10 y compacto por el teorema de Tychonoff. Por consiguiente, existe una función continua y sobreyectiva $f : \beta\omega \to I^\mathfrak{c}$ por el lema 4.4.11. Por tanto, $I^\mathfrak{c}$ tiene tightness numerable. Por el corolario 4.4.8 sabemos que el espacio $\omega_1 + 1$, que no tiene tightness numerable, está sumergido en $I^\mathfrak{c}$, lo cual es una contradicción. □

Para demostrar el teorema de Cascales, Namioka y Vera, necesitamos unos resultados previos. En la proposición 4.4.18 emplearemos el resultado que hemos obtenido en el corolario 4.4.12.

Lema 4.4.13 *Sea X un espacio métrico completo y $f \in \mathbb{R}^X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $f \in B_1(X)$;

(b) $\forall F \subseteq X$ *cerrado y* $\forall s < t$ *en* $\mathbb{R}$ *se tiene que uno de los conjuntos* $\overline{F \cap A_s}$ *ó* $\overline{F \cap B_t}$ *no es igual a* F, *siendo* $A_s = \{x \in X : f(x) < s\}$ *y* $B_t = \{x \in X : f(x) > t\}$.

Demostración. Notemos que X es hereditariamente Baire, es decir, todo subconjunto cerrado $F \subseteq X$ es un espacio de Baire. Por el corolario 4.1.19 sabemos que f es fragmentable si y sólo si es de la primera clase de Baire.
Veamos que (b) es equivalente a:

$$\forall F \subseteq X \text{ cerrado y } \forall s < t \text{ en } \mathbb{R} \text{ se tiene que } Int_F\left(\overline{F \cap A_s}\right) \cap Int_F\left(\overline{F \cap B_t}\right) = \emptyset. \qquad (*)$$

$(b) \Rightarrow (*)$ Si $F \neq \emptyset$, supongamos que $\overline{F \cap A_s}$ y $\overline{F \cap B_t}$ son ambos iguales a F. Entonces:

$$Int(F) = Int(\overline{F \cap A_s} \cap \overline{F \cap B_t}) = Int((\overline{F \cap A_s}) \cap Int(\overline{F \cap B_t}) = \emptyset,$$

por lo que llegamos a una contradicción, ya que F es un espacio de Baire.

$(b) \Leftarrow (*)$ Supongamos que existe $F \subset X$ cerrado, y $s < t$ reales tales que $G = Int_F\left(\overline{F \cap A_s}\right) \cap Int_F\left(\overline{F \cap B_t}\right) \neq \emptyset$. Sea $S = \overline{G}$. Se sigue que todo abierto que intersecta con S también intersecta con G y, por lo tanto, también con $G \cap A_s$ y $G \cap B_t$. Por consiguiente, $\emptyset \neq S = \overline{S \cap A_s} = \overline{S \cap B_t}$, lo cual es una contradicción.

$(a) \Rightarrow (*)$ Basta probar que si f es casi-continua entonces $\forall s < t$ en $\mathbb{R}$ se tiene que $Int\left(\overline{A_s}\right) \cap Int\left(\overline{B_t}\right) = \emptyset$. Supongamos que $U = Int\left(\overline{A_s}\right) \cap Int\left(\overline{B_t}\right) \neq \emptyset$. Consideramos $L_s =]-\infty, s[$ y $L_t =]t, \infty[$. Observemos que los conjuntos $U \cap A_s$ y $U \cap B_t$ son densos en U. Por ser f casi-continua podemos elegir de forma inductiva un sucesión $\{V_n : n \in \omega\}$ de abiertos no vacíos en U tales que $V_0 \subseteq U$, $V_{n+1} \subseteq V_n$ para todo $n \in \omega$ y con $diam(f(V_n)) \leq \epsilon$ para todo $n \in \omega$.
Fijado $n \in \omega$, como V_n intesecta a A_s y B_t podemos elegir $s_n \in V_n \cap A_s$ y $t_n \in V_n \cap B_t$. Observemos que las sucesiones $\{f(s_n) : n \in \omega\}$ y $\{f(t_n) : n \in \omega\}$ son ambas de Cauchy, por lo que deben de tener el mismo límite en $\overline{L_s} \cap \overline{L_t} = \emptyset$, lo cual es una contradicción.

$(a) \Leftarrow (*)$ Basta probar que si $\forall s < t$ en $\mathbb{R}$ tales que $Int\left(\overline{A_s}\right) \cap Int\left(\overline{B_t}\right) = \emptyset$, entonces f es casi-continua. Fijados $s < t$, definimos el conjunto $G_{st} = Int\left(\{x \in X : f(x) < t\}\right) \cup Int\left(\{\{x \in X : f(x) > s\}\right) = Int(X \setminus B_t) \cup Int(X \setminus A_s)$.
Veamos que G_{st} es denso en X. Para ello recordemos las siguientes propiedades: $X \setminus Int(D) = \overline{X \setminus D}$ e $Int(X \setminus D) = X \setminus \overline{D}$.

$$
\begin{aligned}
\overline{G_{st}} &= X \setminus Int(X \setminus G_{st}) = X \setminus Int\,(X \setminus (Int(X \setminus B_t) \cup Int(X \setminus A_s))) \\
&= X \setminus Int\,((X \setminus Int(X \setminus B_t)) \cap (X \setminus Int(X \setminus A_s))) \\
&= X \setminus (Int(X \setminus Int(X \setminus B_t)) \cap Int(X \setminus Int(X \setminus A_s))) \\
&= X \setminus ((X \setminus \overline{Int(X \setminus B_t)}) \cap (X \setminus \overline{Int(X \setminus A_s)})) \\
&= (X \setminus (X \setminus \overline{Int(X \setminus B_t)})) \cup (X \setminus (X \setminus \overline{Int(X \setminus A_s)})) \\
&= \overline{Int(X \setminus B_t)} \cup \overline{Int(X \setminus A_s)} = (\overline{X \setminus \overline{B_t}}) \cup (\overline{X \setminus \overline{A_s}}) \\
&= (X \setminus Int(\overline{B_t})) \cup (X \setminus Int(\overline{A_s})) = X \setminus (Int(\overline{B_t}) \cap Int(\overline{A_s})) \\
&= X \setminus \emptyset = X.
\end{aligned}
$$

Consideramos $Y = \bigcap\{G_{st} : s, t \in Q,$ tales que $s > t\}$. Como X es un espacio de Baire Y es denso en X. Veamos que f es continua en todo punto de Y. Sean $x_0 \in Y$ y $\epsilon > 0$, existen $s, t \in \mathbb{Q}$ ($s < t$) tales que $f(x_0) \leq s < t \leq f(x_0) + \epsilon$. Luego $x_0 \in G_{s,t}$ y $x_0 \notin Int(\{x \in X : f(x) > s\})$. Por tanto, $x_0 \in Int(\{x \in X : f(x) < t\}) \subseteq Int(\{x \in X : f(x) \leq f(x_0) + \epsilon\})$.
Análogamente existen $s', t' \in \mathbb{Q}$ ($s' < t'$) tales que $f(x_0) - \epsilon \leq s' < t' \leq f(x_0)$. Luego $x_0 \in G_{s',t'}$ y $x_0 \notin Int(\{x \in X : f(x) < t'\})$. Por consiguiente, $x_0 \in Int(\{x \in X : f(x) > s'\}) \subseteq Int(\{x \in X : f(x) \geq f(x_0) - \epsilon\})$.
Como ϵ es arbitrario y f es continua en x_0 se sigue que f es continua en Y.
Por último veamos que f es casi-continua en X. Sea $U \subseteq X$ abierto y $\epsilon > 0$ arbitrarios. Como Y es denso en X existe un $x_0 \in U \cap Y$ tal que f es continua en dicho punto. Por tanto, hay un entorno abierto V de x_0 contenido en $U \cap Y$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $x \in V$. Luego $diam(f(V)) < \epsilon$. $\square$

Teorema 4.4.14 *Sea (X, d) un espacio métrico completo, D un subconjunto de $C^*(X)$ uniformemente acotado por 1 y $K = \overline{D}^{[-1,1]^X}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $K \not\subset B_1(X)$.

(b) Existe un homeomorfismo $\varphi : 2^\omega \to \varphi(2^\omega) \subset X$, una sucesión $\{f_n : n \in \omega\}$ en D y números $-1 < s < t < 1$ tales que:

$$f_n(\varphi(\sigma)) \in G_{\sigma(n)} \quad \forall \sigma \in 2^\omega \text{ y } n \in \omega,$$

donde $G_0 = [-1, s[$ y $G_1 =]t, 1[$.

<u>*Demostración.*</u> $(a) \Rightarrow (b)$ Sea $f \in K \setminus B_1(X)$. Por el lema 4.4.13 existe un cerrado no vacío $F \subseteq X$ y números reales $-1 < s < t < 1$ tales que, considerando $G_0 = [-1, s[$ y $G_1 =]t, 1]$, los conjuntos $\{x \in F : f(x) \in G_0\}$ y $\{x \in F : f(x) \in G_1\}$ son ambos densos en F.
Por inducción sobre $n = |t|$, construiremos una familia $\{U_t : t \in 2^{(\omega)}\}$ de abiertos relativos a F no vacíos y una sucesión $\{f_n : n \in \omega\}$ en D cumpliendo las siguientes condiciones:

(i) $U_\emptyset = F$;

(ii) para cada $t \in 2^\omega$, $\overline{U_{t0}} \cup \overline{U_{t1}} \subset U_t$ y $\overline{U_{t0}} \cap \overline{U_{t1}} = \emptyset$;

(iii) $diam(U_t) < \frac{1}{|t|}$ para cada $t \in 2^{(\omega)}$;

(iv) $f_n(U_{tj}) \subset G_j$ para $j = 0$ ó 1 y $|t| = n - 1$.

Veamos que se puede realizar dicha construcción. Partimos considerando (i). Supongamos que para $n \geq 1$ tenemos construidos $\{U_t : |t| < n\}$ y $\{f_i : i < n\}$ satisfaciendo las condiciones $(i) - (iv)$. Para cada $t \in 2^{(\omega)}$ con $|t| = n - 1$ elegimos $a_t, b_t \in U_t$ tales que $f(a_t) \in G_0$ y $f(b_t) \in G_1$. Como $f \in \overline{D}$, existe una función $f_n \in D$ tal que $f_n(a_t) \in G_0$ y $f_n(b_t) \in G_1$ para todo t con $|t| = n - 1$. Como f_n es continua, existen entornos abiertos U_{t0} y U_{t1} de a_t y b_t respectivamente tales que se cumplen las condiciones $(ii) - (iv)$. Consideramos el conjunto $\Delta = \bigcap\limits_{n\in\omega} \bigcup\limits_{|t|=n} \overline{U_t} = \bigcap\limits_{n\in\omega} \bigcup\limits_{|t|=n} U_t$.
Sea la aplicación $\varphi : 2^\omega \to \Delta$ dada por $\varphi(\sigma) = \bigcap\limits_{n\in\omega} \overline{U_{\sigma|n}}$. Ya que φ es continua, biyectiva, parte de un espacio compacto y toma valores en un espacio de Hausdorff, se tiene que φ es un homeomorfismo y que Δ es compacto. Teniendo en cuenta la definción de las funciones $\{f_n : n \in \omega\}$ se cumple (b).

$(a) \Leftarrow (b)$ Sea $g : \overline{G_0} \cup \overline{G_1} \to \{0, 1\}$ la aplicación tal que $g(x) = 0$ si $x \in \overline{G_0}$ y $g(x) = 1$ si $x \in \overline{G_1}$. Sea f un punto de acumulación de $\{f_n : n \in \omega\}$ y $\Delta = \varphi(2^\omega)$. Entonces $f(\Delta) \subset \overline{G_0} \cup \overline{G_1}$ y, por (b), se tiene que $(g \circ f_n \circ \varphi)$ es la proyección n-ésima de 2^ω en $\{0, 1\}$ para cada $n \in \omega$. Como $(g \circ f \circ \varphi)$ es un punto de acumulación de la sucesión $\{(g \circ f_n \circ \varphi) : n \in \omega\}$, se tiene que $(g \circ f \circ \varphi)$ no es Borel medible por el teorema de Sierpinski (véase [45]). Por lo tanto, como $f|_\Delta$ no es medible se tiene que $f \in K \setminus B_1(X)$. $\square$

Definición 4.4.15 *Una sucesión de funciones* $\{f_n : n \in \omega\} \subset \mathbb{R}^\Omega$ *se dice que es* ***independiente*** *sobre* $A \subseteq \Omega$ *si existen números reales* $s < t$ *tales que para todo par finito de subconjuntos disjuntos* $P, Q \subset \omega$*, se cumple:*

$$\bigcap_{n\in P} \{a \in A : f_n(a) \leq s\} \cap \bigcap_{n\in Q} \{a \in A : f_n(a) \geq t\} \neq \emptyset. \qquad (*)$$

Nota 4.4.16 *Sea* X *un espacio compacto, si* $\{f_n : n \in \omega\} \subseteq C(X)$ *es independiente sobre* X*, entonces* $(*)$ *se cumple para todo par de subconjuntos* $P, Q \subseteq \omega$*, no necesariamente finitos.*

Demostración. Supongamos que existen $P, Q \subseteq \omega$ disjuntos tales que no se cumple $(*)$.
Consideramos los conjuntos cerrados:

$$A_n^s = \{x \in X : f_n(x) \leq s\} = f_n^{-1}(]-\infty, s])$$

y

$$B_n^t = \{x \in X : f_n(x) \geq t\} = f_n^{-1}([t, \infty[).$$

Entonces:

$$X \setminus \left(\bigcap_{n\in P} A_n^s \cap \bigcap_{n\in Q} B_n^t \right) = X \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n\in P} (X \setminus A_n^s) \cup \bigcup_{n\in Q} (X \setminus B_n^t) = X$$

Como X es compacto existen subconjuntos finitos disjuntos $\tilde{P}, \tilde{Q} \subset \omega$ tales que:

$$X = \bigcup_{n\in\tilde{P}} (X \setminus A_n^s) \cup \bigcup_{n\in\tilde{Q}} (X \setminus B_n^t) = X \setminus \left(\bigcap_{n\in\tilde{P}} A_n^s \cap \bigcap_{n\in\tilde{Q}} B_n^t \right) \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{n\in\tilde{P}} A_n^s \cap \bigcap_{n\in\tilde{Q}} B_n^t = \emptyset,$$

lo cual es una contradicción, ya que la sucesión de funciones es independiente. $\square$

Lema 4.4.17 *Sea X un espacio compacto de Hausdorff y $\{f_n : n \in \omega\} \subseteq C(X)$ una familia de funciones tal que $\|f_n\| \leq 1$ para todo $n \in \omega$. Si $\{f_n : n \in \omega\}$ es independiente sobre X, entonces la aplicación:*

$$\begin{aligned} \varphi : \omega &\longrightarrow C(X) \\ n &\longmapsto f_n \end{aligned}$$

se extiende a un homeomorfismo de $\beta\omega$ sobre la clausura de $\{f_n : n \in \omega\}$ en $[-1,1]^X$.

Demostración. Por definición de $\beta\omega$ la aplicación $n \mapsto f_n$ se extiende a una aplicación continua $\delta : \beta\omega \mapsto [-1,1]^X$. Claramente $\delta(\beta\omega) = \overline{\{f_n : n \in \omega\}}$. Para probar que δ es un homeomorfismo sobre $\overline{\{f_n : n \in \omega\}}$ basta probar que δ es inyectiva (ya que sabemos que δ es continua, sobreyectiva, $\beta\omega$ es compacto y el espacio de llegado es de Hausdorff). Sean $\alpha, \beta \in \beta\omega$ tales que $\alpha \neq \beta$, entonces existen entornos disjuntos clopen de α y β respectivamente, es decir, conjuntos $P, Q \subset \omega$ tales que $\alpha \in \overline{P}$, $\beta \in \overline{Q}$ y $\overline{P} \cap \overline{Q} = \emptyset$. Como X es compacto y $\{f_n : n \in \omega\}$ es independiente sobre X existen números reales $s < t$ y un punto $x \in X$ tales que $\delta(n)(x) = f_n(x) \leq s$ para todo $n \in P$ y $\delta(n)(x) = f_n(x) \geq t$ para todo $n \in Q$. Como δ es continua y $\alpha \in \overline{P}$ se tiene que $\delta(\alpha)(x) \leq s$. Análogamente se tiene que $\delta(\beta)(x) \geq t$. Por consiguiente, $\delta(\alpha) \neq \delta(\beta)$. $\square$

Proposición 4.4.18 *Sea X un espacio compacto metrizable, $D \subset C_p(X)$ un subconjunto uniformemente acotado que separa los puntos de X y $K = \overline{D}^{\mathbb{R}^X}$. Si X es $t_p(K)$-Lindelöf, entonces $K \subset B_1(X)$.*

Demostración. Probaremos que $K \not\subset B_1(X)$ implica que X no puede ser $t_p(K)$-Lindelöf. Como X es polaco y $K \not\subset B_1(X)$, el teorema 4.4.14 nos indica que existe una sucesión $\{f_n : n \in \omega\} \subseteq D$, números reales $-1 < s < t < 1$ y un homeomorfismo :

$$\begin{aligned} \varphi : 2^\omega &\longrightarrow X \\ \chi_M &\longmapsto x_M \end{aligned}$$

de manera que para cada $M \subset \omega$ se cumple que:

$$f_n(x_M) < s \quad \text{para todo } n \in \omega \setminus M; \tag{4.1}$$

$$f_n(x_M) > t \quad \text{para todo } n \in M. \tag{4.2}$$

Sea $\Delta = \varphi(2^\omega)$ subconjunto compacto de X. Dado que D separa los puntos de X y la topología de X inducida por D es más débil que $t_p(K)$, Δ es cerrado en $(X, t_p(K))$.

Notemos que por (4.1) y (4.2) la sucesión $\{f_n : n \in \omega\}$ es independiente sobre X. Por la proposición 4.4.18 existe un homeomorfismo δ de $\beta\omega$ sobre $C = \overline{\{f_n : n \in \omega\}}^{[-1,1]^X} \subset K$ que extiende la aplicación $n \mapsto f_n$.
De (4.1) y (4.2) también se deduce que para todo $M \subset \omega$:

$$h(x_M) \leq s, \quad \text{si } x \in C \setminus \delta(\overline{M}) \quad \text{y} \quad h(x_M) \geq t, \quad \text{si } x \in \delta(\overline{M}). \tag{4.3}$$

Para cada $h \in C$ consideramos el conjunto $t_p(K)$-clopen de Δ:

$$G_h = \{x_M \in \Delta : h(x_M) \geq t\} = \{x_M \in \Delta : h(x_M) > s\}. \tag{4.4}$$

Veamos que para todo $A \subseteq C$ se tiene que $a \in \overline{A}$ si y sólo si $G_a \subseteq \{G_h : h \in A\}$. Supongamos que $a \in \overline{A}$, entonces si $x_M \in G_a$ se sigue que $a(x_M) > s$. Por densidad se tiene que $h(x_M) > s$ para alguna función $h \in A$. De lo que se sigue que $x_M \in G_h$ para alguna función $h \in A$. Recíprocamente, supongamos que $a \notin \overline{A}$, entonces existe un clopen O (C es 0-dimensional, recordemos que la base de abiertos de $\beta\omega = C$ es $\{\overline{A}^{\beta\omega} : A \subseteq \omega\}$) tal que $a \in O$ y $O \cap A = \emptyset$, es decir, para algún $M \subseteq \omega$ se tiene que $a \in \delta(\overline{M})$ y $\delta(\overline{M}) \cap A = \emptyset$. Entonces por (4.3), $a(x_M) \geq t$ y $h(x_M) \leq s$ para todo $h \in A$. Por tanto, $x_M \in G_a \setminus \bigcup\{G_x : x \in A\}$, lo cual es una contradicción.
Supongamos, razonando por reducción al absurdo, que X es $t_p(K)$-Lindelöf. Entonces el conjunto Δ, por ser $t_p(K)$-cerrado, es $t_p(K)$-Lindelöf. Veamos que C tiene tightness numerable (i.e. $\forall A \subseteq C$ y $p \in \overline{A}$ existe un subconjunto $B \subseteq A$ numerable tal que $p \in \overline{B}$).
Sea $A \subseteq C$ y $a \in \overline{A}$ se tiene que $G_a \subseteq \bigcup\{G_x : x \in A\}$ y dado que G_a es $t_p(K)$-Lindelöf existe $B \subseteq A$ numerable tal que $G_a \subseteq \bigcup\{G_x : x \in B\}$. Luego $a \in \overline{B}$.
Por consiguiente, C tiene tightness numerable, y por ser homeomorfo a $\beta\omega$, se sigue que $\beta\omega$ tiene tightness numerable. Por el corolario 4.4.12 llegamos a una contradicción. □

Proposición 4.4.19 *Sea $(X, t_p(D))$ un espacio compacto, metrizable y con medida (de Haar) μ estrictamente positiva, donde $D \subset C_p(X)$. Sea $K = \overline{D}^{\mathbb{R}^X}$. Si X es $t_p(K)$-Lindelöf, entonces D es fragmentable.*

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo, supongamos que la familia de funciones D no es fragmentable. Recordemos que por la nota 4.1.5 sabemos que el hecho de que la familia de funciones D no sea framentable implica que X no está fragmentado por la norma supremo ρ. Por consiguiente, existe un subconjunto F $t_p(D)$-cerrado de X (y, por tanto, $t_p(D)$-compacto y metrizable) y un $\epsilon > 0$ tal que para todo U $t_p(D)$-abierto de F se tiene que $diam(f(U)) \geq \epsilon$ para todo $f \in D$. Como las propiedades de X se conservan bajo $t_p(D)$-cerrados razonaremos para $F = X$. Luego supondremos que $\rho(x, x') = sup\{|f(x) - f(x')| : f \in D\} \geq \epsilon$ para todos los $x, x' \in X$ tales que $x \neq x'$.
Por la proposición 4.4.18 se tiene que $K \subset B_1(X)$. Sea el conjunto:

$$\mathcal{U} = \{U \subset X : U \text{ es de Borel, } t_p(K)\text{-abierto y } \mu(U) = 0\}.$$

Consideramos $G = \bigcup \mathcal{U}$ y $C = X \setminus G$. Notemos que $C \neq \emptyset$, ya que en caso contrario, por ser X $t_p(K)$-Lindelöf, se podría expresar como unión numerable de elementos de $\mathcal{U}$, y se tendría que

$\mu(X) = 0$.
Sea la aplicación:

$$\begin{array}{rcl}\varphi : (K, t_p(X)) & \longrightarrow & (L^1(X,\mu), norma) \\ f & \longmapsto & [f]\end{array}$$

Veamos que φ es continua. Sea $A \subseteq K$ y $f \in \overline{A}^{\mathbb{R}^X}$, por ser $B_1(X)$ angélico (véase el teorema 2.3.31) existe una sucesión $\{f_n : n \in \omega\} \subseteq A$ tal que f_n converge puntualmente a f en X. Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se tiene que $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$ y como $|f_n - f| \to 0$, entonces $\int |f_n - f| \to 0$. Por lo tanto $\varphi(f) \in \overline{\varphi(A)}$.
Se sigue que $\varphi(K)$ es compacto y metrizable (ya que tiene una norma) y $\varphi : (K, t_p(X)) \longrightarrow \varphi(K)$ es una aplicación cociente. Aplicando el lema 4.2.5 se sigue que $C(\varphi(K))$ es separable en la norma.
Veamos que dados $f, g \in K$, si $\varphi(f) = \varphi(g)$, entonces $f(x) = g(x)$ para todo $x \in C$:
Sea $V = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$. Recordemos que dado que $[f] = [g]$ se tiene que $f = g$ casi por todas partes.
Dado $x_0 \in V$ existe un $r > 0$ tal que $|f(x_0) - g(x_0)| = r$. Tomamos el entorno $W = U_{x_0}(f, g; \frac{r}{3}) = \{x \in X : |f(x) - f(x_0)| < \frac{r}{3}, \quad |g(x) - g(x_0)| < \frac{r}{3}\}$. Como $W \subset V$ se llega a que $V \in \mathcal{U}$. Por tanto, $C \cap V = \emptyset$.
Observemos que cada elemento $x \in C$ define una aplicación $\hat{x}$ sobre $\varphi(K)$ continua de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl}\hat{x} : \varphi(K) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi(f) & \longmapsto & \hat{x}(\varphi(f)) = f(x)\end{array}$$

Veamos la continuidad de $\hat{x}$. Dada una sucesión $\{\varphi(f_n) : n \in \omega\}$ que converge a $\varphi(f)$, tenemos que ver si $\hat{x}(\varphi(f_n)) \to \hat{x}(\varphi(f))$, es decir, si $f_n(x) \to f(x)$.
Como $\varphi(f_n) \to \varphi(f)$ se sigue que $[f_n] \to [f]$. Como $\{f_n : n \in \omega\} \subseteq K \subset B_1(X)$, por ser $B_1(X)$ angélico, existe una subsucesión $\{f_{n_k} : k \in \omega\}$ que converge puntualmente a una función g. Luego $[f_{n_k}] \to [g]$ y por lo tanto $[f] = [g]$, es decir, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in C$. Por consiguiente, $f_{n_m}(x) \to g(x) = f(x)$.
Definimos el conjunto $\hat{C} = \{\hat{x} : x \in C\}$. Dado que $\hat{C} \subset C(\varphi(K))$, se sigue que $(\hat{C}, \|\cdot\|)$ es separable.
Notemos que:

$$\rho(x, x') = sup\{|f(x) - f(x')| : f \in D\} = sup\{|f(x) - f(x')| : f \in K\} = \|\hat{x} - \hat{x'}\|.$$

Entonces $((\hat{C}, \|\cdot\|)$ es isométrico a (C, ρ). Como el primer espacio es separable y el segundo es discreto se sigue que C es numerable. Por consiguiente, C y $G = X \setminus C$ son conjuntos de Borel y $\mu(C) = 0$. Notemos que por ser C numerable $\mu(X) = \mu(X \setminus C) + \mu(C)$. Si probamos que $\mu(G) = 0$ llegamos a una contradicción. Tomamos un subconjunto compacto de G. El hecho de que D separe los puntos de X implica que su topología $t_p(K)$ es más fina que su topología natural, por lo que L es $t_p(K)$-cerrado en X y, por consiguiente, es $t_p(K)$-Lindelöf. Entonces L se puede cubrir con una cantidad numerable de elementos de $\mathcal{U}$, por lo tanto $\mu(L) = 0$. Por ser μ una medida regular se llega a que $\mu(G) = 0$. $\square$

Teorema 4.4.20 (Casacales, Namioka y Vera) *Sea $(X, t_p(D))$ un espacio compacto, donde $D \subseteq C(X)$. Sea $K = \overline{D}^{\mathbb{R}^X}$. Si X es $t_p(K)$-Lindelöf, entonces D es fragmentable.*

Demostración. Sea F un subconjunto cerrado de $(X, t_p(D))$ y $\tilde{D} \subset D$ un subconjunto numerable. Sabemos que $(F, t_p(\tilde{D}))$ es compacto y metrizable. Consideramos el conjunto $\tilde{K} = \overline{\tilde{D}}^{\mathbb{R}^F}$. Como la aplicación $id : (F, t_p(K)) \to (F, t_p(\tilde{K}))$ es continua, dado que $\tilde{K} \subset K$, se sigue que $(F, t_p(\tilde{K}))$ es Lindelöf. Por la proposición 4.4.19 se tiene que $\tilde{D}$ es fragmentable. Finalmente, por el lema 4.1.6, el teorema 4.2.4 y el teorema 4.4.1 se tiene que D es fragmentable. □

Corolario 4.4.21 *Sea X un espacio compacto, D un subconjunto puntualmente acotado de $C(X)$ que separa los puntos de X y $K = \overline{D}^{\mathbb{R}^H}$. Si X es $t_p(K)$-Lindelöf, entonces para cada subconjunto cerrado F de X existe un subconjunto Z de F denso y G_δ tal que $\{f|_F : f \in K\}$ es equicontinua en cada punto de Z.*

Demostración. Con la topología puntual se tiene que K es un espacio compacto, y D es un subconjunto denso de K. A cada $x \in X$ le podemos asociar la función $\hat{h} \in C(K)$ definida por $\hat{h}(f) = f(h)$ para cada $f \in K$. Luego la aplicación:

$$\begin{array}{rcl} \psi : X & \longrightarrow & (\hat{X}, t_p(D)) \\ x & \longmapsto & \hat{x} \end{array}$$

es un homeomorfismo. Por hipótesis se tiene que $\hat{H}$ es $t_p(K)$-Lindelöf. Aplicando el teorema 4.4.20 se tiene que $(\hat{X}, t_p(D))$ es fragmentable por la norma, o equivalentemente, se tiene que X está framgentado por ρ, donde ρ es una métrica definida sobre X como sigue:

$$\rho(x, x') = \sup_{f \in K} |f(x) - f(x')|, \qquad \text{para } x, x' \in X.$$

Sea F un subconjunto cerrado en X, sabemos que ρ_F es casi-continua. Por la proposición 4.1.7 se tiene que $Z = Cont(\rho|_F)$ es G_δ y denso en F. Por tanto, $\{f|_F : f \in K\}$ es equicontinua en cada punto de Z. □

Nota 4.4.22 *La prueba del teorema 4.1.18 es una adaptación de la prueba del teorema de Stegall [46]. La prueba del teorema de Corson y Glicksberg 4.2.1 se encuentra en [10]. La demostración del teorema 4.3.2 se ha extraído de [47]. Por último, las ideas y el resultado principal del apartado 4.4 se encuentran en [5].*

Apéndice A

Notas de topología

A.1. Espacios de funciones

A.1.1. Topologías en espacios de funciones

Dados dos espacios topológicos X e Y presentamos algunas topológias con las que podemos equipar el conjunto Y^X, constituido por todas las funciones de X en Y, y su subconjunto $C(X,Y) = \{f \in Y^X : f \text{ es una fnción continua}\}$. En el caso de que $Y = \mathbb{R}$ escribimos simplemente $C(X)$. Otro subconjunto interesante es el formado por las funciones continuas y acotadas, que denotaremos por $C^*(X,Y)$.
Dichas topologías son la *topología de la convergencia puntual*, la *topología de la convergencia compacta*, la *topología de la convergencia uniforme* y la *topología compacto-abierta.*

Definición A.1.1 *Dado $x \in X$ y $V \subset Y$ abierto consideramos el conjunto:*

$$S(x;V) = \{f \in Y^X : f(x) \in V\}.$$

*Los conjuntos $S(x,V)$ forman una subbase para una topología sobre Y^X, la cual se conoce como la **topología de la convergencia puntual** (o **topología punto-abierta**).*

Denotamos por $C_p(X,Y)$ al espacio $C(X,Y)$ equipado con la topología de la convergencia puntual. Notemos que esta topología es precisamente la topología producto, la cual se caracteriza como la mínima topología que hace continua a cualquier proyección $\pi_x : Y^X \to Y$. Observemos que $S(x;V)$ es el conjunto $\pi_x^{-1}(V)$.

El siguiente resultado justifica porqué esta topología se la conoce como la topología de la convergencia puntual:

Proposición A.1.2 *Una sucesión $\{f_n : n \in \omega\}$ de funciones converge a una función f en la topología de la convergencia puntual si y sólo si para cada $x \in X$ la sucesión $\{f_n(x) : n \in \omega\}$ en Y converge a $f(x)$.*

<u>*Demostración.*</u> Véase 46.1. en [32]. □

Describamos cómo obtener una base para esta topología. Para cada subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de X y cada subcolección finita de abiertos $\{V_1, \ldots, V_n\}$ en Y denotamos por:

$$\tilde{U}(x_1, \ldots, x_n; V_1, \ldots, V_n)$$

al suconjunto $\pi_{x_1}^{-1}(V_1) \cap \pi_{x_2}^{-1}(V_2) \cap \ldots \pi_{x_n}^{-1}(V_n)$, es decir, al conjunto de funciones $f \in Y^X$ tales que $f(x_i) \in V_i$, para cada $i = 1, \ldots, n$.
La familia de todos los conjuntos de este tipo constituye una base para esta topología. Por consiguiente:

$$U(x_1, \ldots, x_n; V_1, \ldots, V_n) = \tilde{U}(x_1, \ldots, x_n; V_1, \ldots, V_n) \cap C(X, Y)$$

es una base para $C_p(X, Y)$.

Proposición A.1.3 *Sea $\mathcal{B}$ una base de la topología de Y y $\mathcal{B}_Y(y)$ una base de entornos para cada $y \in Y$. Entonces:*

(a) La familia:

$$\{\tilde{U}(x_1, \ldots, x_n; B_1, \ldots, B_n) : n \in \omega, x_i \in X, B_i \in \mathcal{B}\}$$

es una base para la topología en Y^X, mientras que la familia:

$$\{U(x_1, \ldots, x_n; B_1, \ldots, B_n) : n \in \omega, x_i \in X, B_i \in \mathcal{B}\}$$

es una base para $C_p(X, Y)$.

(b) Dado $f \in Y^X$, la familia de todos los conjuntos de la forma:

$$\tilde{U}_f(x_1, \ldots, x_n; B_1, \ldots, B_n) = \{g \in Y^X : g(x_i) \in B_i, i = 1, \ldots, n\}$$

donde $n \in \omega$, $x_i \in X$, $B_i \in \mathcal{B}_Y(f(x_i))$, para cada $i = 1, \ldots, n$, es una base de entornos de $f \in Y^X$, mientras que los conjuntos:

$$U_f(x_1, \ldots, x_n; B_1, \ldots, B_n) = \{g \in C(X, Y) : g(x_i) \in B_i, i = 1, \ldots, n\}$$

constituyen una base de entornos de $f \in C_p(X, Y)$.

En el caso de que el espacio Y sea un espacio metrizable, podemos emplear como base de entornos en Y a la familia de bolas abiertas. Por tanto, los conjuntos:

$$\tilde{U}_f(x_1, \ldots, x_n; \epsilon) = \{g \in Y^X : d(f(x_i), g(x_i)) < \epsilon, i = 1, \ldots, n\}$$

forman una base de entornos de $f \in Y^X$ (donde d es una métrica que define la topología de Y). Análogamente, los conjuntos:

$$U_f(x_1, \ldots, x_n; \epsilon) = \{g \in C(X, Y) : d(f(x_i), g(x_i)) < \epsilon, i = 1, \ldots, n\}$$

forman una base de entornos de $f \in C_p(X, Y)$.

Definición A.1.4 *Sea (Y,d) un espacio métrico y X un espacio topológico. Dados $f \in Y^X$, un subespacio compacto C de X y $\epsilon > 0$, los conjuntos:*

$$B_C(f;\epsilon) = \{g \in Y^X : sup\{d(f(x),g(x)) : x \in C\} < \epsilon\}$$

*forman una base para una topología sobre Y^X, la cual se conoce como **topología de la convergencia compacta**.*

El siguiente resultado justifica porqué esta topología se la conoce como la topología de la convergencia compacta:

Proposición A.1.5 *Una sucesión $\{f_n : n \in \omega\}$ de funciones converge a una función f en la topología de la convergencia compacta si y sólo si para cada subconjunto compacto $C \subset X$ la sucesión $\{f_n|_C : n \in \omega\}$ converge uniformemente a f.*

Demostración. Véase 46.2. en [32]. □

Definición A.1.6 *Sea (Y,d) un espacio métrico y X un espacio (compacto). Dados $f \in Y^X$ y un número $\epsilon > 0$, los conjuntos:*

$$B(f;\epsilon) = \{g \in Y^X : sup\{d(f(x),g(x)) : x \in X\} < \epsilon\}$$

*forman una base para una topología sobre Y^X, que se conoce como **topología de la convergencia uniforme**.*

Denotaremos por $C_u(X,Y)$ al espacio $C(X,Y)$ equipado con esta topología.

Proposición A.1.7 *Una sucesión $\{f_n : n \in \omega\}$ de funciones converge a una función f en la topología de la convergencia uniforme si y sólo si la sucesión $\{f_n|_C : n \in \omega\}$ converge uniformemente a f.*

La relación entre las tres topologías queda establecida en la siguiente proposición:

Proposición A.1.8 *Sea X un espacio topológico e (Y,d) un espacio métrico. Para el espacio de funciones Y^X tenemos las siguientes inclusiones topológicas:*

$$(\textit{convergencia puntual}) \subset (\textit{convergencia compacta}) \subset (\textit{convergencia uniforme})$$

Si X es compacto, las dos últimas coinciden, y si X es discreto las dos primeras coinciden.

Observemos que para la definición de la topología de la convergencia compacta y la topología de la convergencia uniforme se precisa que el espacio Y sea metrizable, mientras que la topología de la convergencia puntual se puede definir para cualquier espacio topológico Y. En la búsqueda de si alguna de estas dos topologías se puede extender a un espacio topológico arbitrario surge la *topología compacto-abierta*. En el espacio $C(X,Y)$, si Y es metrizable, esta topología coincide con la de la convergencia compacta.

Definición A.1.9 *Sean X e Y espacios topológicos. Si C es un subconjunto compacto de X y U es un subconjunto abierto de Y definimos el conjunto:*

$$S(C;U) = \{f \in C(X,Y) : f(C) \subset U\}.$$

*Los conjuntos $S(C;U)$ forman una subbase para una topología sobre $C(X,Y)$, la cual se conoce como la **topología de la convergencia uniforme**.*

Denotaremos por $C_{CA}(X,Y)$ al espacio $C(X,Y)$ equipado con esta topología. Se sigue de la definición que esta topología es más fina que la topología puntual.

Proposición A.1.10 *Sea X un espacio topológico e (Y,d) un espacio métrico. Sobre el espacio de funciones $C(X,Y)$, la topología compacto-abierta y la topología de la convergencia compacta coinciden.*

Demostración. Véase 46.8. en [32]. □

Observación A.1.11 *Por las proposiciones A.1.8 y A.1.10 se tiene que si X es compacto e Y es metrizable, entonces en el espacio de funciones $C(X,Y)$ la topología compacto-abierta y la topología de la convergencia uniforme coinciden.*

A.1.2. Aplicación evaluación

Sea X un conjunto y $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^X$ una familia de funciones. Entonces para cada $x \in X$ existe una aplicación $g_x : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ definida por $g_x(f) = f(x)$ para todo $f \in \mathcal{F}$. Si consideramos $\psi_{\mathcal{F}}(x) = g_x$ para $x \in X$ obtenemos la aplicación evaluación $\psi_{\mathcal{F}} : X \to \mathbb{R}^{\mathcal{F}}$.

Proposición A.1.12 *Para todo espacio X y todo subespacio $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^X$ la aplicación $g_x : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ es continua para todo $x \in X$.*

Demostración. Sea $x \in X$ y $f \in \mathcal{F}$. Veamos que g_x es continua en f. Sea $\epsilon > 0$ y $B(g_x(f), \epsilon)$ entorno básico de $g_x(f)$ $(= f(x))$. Tomamos $U_f(x,\epsilon)$ entorno de f. Notemos que $|g_x(h) - g_x(f)| = |h(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $h \in U_f(x,\epsilon)$. □

Proposición A.1.13 *Para todo espacio X y todo subespacio $\mathcal{F} \subset C_p(X)$ la aplicación $\psi_{\mathcal{F}} : X \to C_p(\mathcal{F})$ es continua.*

Demostración. Sea $x \in X$ y $U_{g_x}(f_1, \ldots, f_k; \epsilon)$ un entorno básico de g_x en $C_p(\mathcal{F})$. Como cada $f_i \in \mathcal{F} \subset C_p(X)$ se sigue que $(\psi_{\mathcal{F}})^{-1}\left(U_{g_x}(f_1, \ldots, f_k; \epsilon)\right) = \bigcap_{i=1}^{k} f_j^{-1}\left([f_j(x) - \epsilon, f_j(x) + \epsilon]\right)$ es un entorno abierto de x en X. Por tanto, $\psi_{\mathcal{F}}$ es continua. □

A.1.3. Aplicación restricción

Sea X un espacio topológico y $Y \subseteq X$. Denotamos por $\pi_Y : C_p(X) \to C_p(Y)$ a la aplicación que restringe toda función de $C_p(X)$ al espacio Y, es decir, tal que $\pi_Y(f) = f|_Y$ para todo $f \in C_p(X)$. El subespacio $\pi_Y(C_p(X)) \subseteq C_p(Y)$ lo denotamos por $C_p(Y|X)$.

Proposición A.1.14 *Sea $Y \subset X$, entonces:*

(i) La aplicación π_Y es continua y $\overline{\pi_Y(C_p(X))} = C_p(Y)$.

(ii) Si Y es cerrado en X, entonces π_Y es una aplicación abierta de $C_p(X)$ sobre el subespacio $\pi_Y(C_p(X))$ de $C_p(Y)$.

Demostración. Véase 0.4.1. en [1]. □

A.1.4. Funciones en espacios producto

Funciones separadamente continuas

Sea $F : X \times Y \to (M, d)$ una función donde X e Y son espacios topológicos de Hausdorff y M es un espacio métrico. Fijado $x \in X$ consideramos la función parcial $F_x : Y \to (M, d)$ definida por $F_x(y) = F(x, y)$. Análogamente, fijado $y \in Y$ obtenemos la función parcial $F^y : X \to (M, d)$ definida por $F^y(x) = F(x, y)$.

Se dice que F es una función **separadamente continua** cuando las funciones parciales F_x y F^y son continuas para todo $x \in X$ y para todo $y \in Y$ respectivamente. Denotamos al conjunto de funciones separadamente continuas sobre $X \times Y$ que toman valores en M por $SC(X \times Y, M)$. Si $M = \mathbb{R}$ escribimos simplemente $SC(X \times Y)$.

Nota A.1.15 *Dado un espacio topológico X y $F \subseteq C_p(X)$ se define canónicamente la aplicación:*

$$\begin{array}{rcl} \Phi : X \times F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, f) & \longmapsto & \Phi(x, f) = f(x) \end{array}$$

Veamos que es *separadamente continua.*
Demostración. Fijado $f \in F$, la aplicación $\Phi_f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ coincide con f, la cual está en $C_p(X)$. Fijado $x \in X$, la aplicación $\Phi^x : F \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, porque la topología de la convergencia puntual es la mínima topología que hace que estas aplicaciones sean continuas. □

Nota A.1.16 *Recíprocamente, si partimos de una aplicación separadamente continua $\Phi : X \times F \longrightarrow \mathbb{R}$, donde X y F son dos espacios topológicos. Podemos considerar que F es un subconjunto de $C(X)$ mediante la aplicación:*

$$\begin{array}{rcl} \Psi : F & \longrightarrow & C(X) \\ f & \longmapsto & \Psi(f) \end{array}$$

tal que, para cada $x \in X$, $\Psi(f)[x] = \Phi(x, f)$.

Notemos que con esta identificación Ψ no es inyectiva en general. Es por ello que se considera el espacio cociente $\frac{F}{\sim}$ con la relación de equivalencia $\sim$ sobre F:

$$f \sim g \Longleftrightarrow \Phi(x, f) = \Phi(x, g), \qquad \forall x \in X.$$

Con esta identificación si sustituimos F por $\tilde{F} = \frac{F}{\sim}$ se tiene que la aplicación Ψ es inyectiva.

Sean $X_1, \ldots, X_n$ e Y espacios topológicos y sea $f : X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$ una aplicación. Fijado $i \in \{1, \ldots, n\}$, para cada $x = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in X_1 \times \ldots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \ldots \times X_n$, definimos la función $f_x : X_i \to Y$ tal que $f_x(x_i) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ para cada $x_i \in X_i$.
Se dice que f es **separadamente continua** si para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y todo $x \in X_1 \times \ldots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \ldots \times X_n$ la función f_x es continua.

Nota A.1.17 *Sean $X_1, \ldots, X_n$ e Y espacios topológicos y sea $f : X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$ una aplicación. Sean los subconjuntos $A_1 \subset X_1, \ldots, A_n \subset X_n$. Si para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y todo $x \in \overline{A_1} \times \ldots \times \overline{A_{i-1}} \times \overline{A_{i+1}} \times \ldots \times \overline{A_n}$ se tiene que $f_x(\overline{A_i}) \subset \overline{f_x(A_i)}$. Entonces:*

$$f(\overline{A_1} \times \ldots \times \overline{A_n}) \subset \overline{f(A_1 \times \ldots \times A_n)}.$$

<u>*Demostración.*</u> Se prueba por inducción. Si $n = 1$ es inmediato. Supongamos que se cumple hasta $n - 1$ ($n \geq 2$), veamos que se cumple para n. Para cualquier punto $x \in \overline{A_1} \times \ldots \times \overline{A_{n-1}}$, sabemos que $f_x(\overline{A_n}) \subset \overline{f_x(A_n)}$, por lo que $f(\overline{A_1} \times \ldots \times \overline{A_n}) \subset \overline{f(\overline{A_1} \times \ldots \times \overline{A_{n-1}} \times A_n)}$.
Como para cada $x_n \in A_n$ la función $f_{x_n} : X_1 \times \ldots \times X_{n-1} \to Y$ satisface la hipótesis de inducción se sigue que:

$$f(\overline{A_1} \times \ldots \times \overline{A_n}) \subset \overline{f(A_1 \times \ldots \times A_n)}.$$

□

Observemos que si la función $f : X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$ es separadamente continua se satisfaces las condiciones de la nota anterior.

Aplicación exponencial

Sean X, Y y Z espacios topológicos y $\Lambda^Z_{X,Y}$ la aplicación exponencial que va de $Z^{X \times Y}$ a $(Z^Y)^X$ definida por:

$$\Lambda^Z_{X,Y}(f)(x)(y) = f(x, y),$$

para cada $f \in Z^{X \times Y}$, $x \in X$, $y \in Y$. Si $Z = \mathbb{R}$, escribimos $\Lambda_{X,Y}$ para referirnos a la aplicación exponencial. El siguiente resultado es fácil de comprobar:

Proposición A.1.18 *Sean X e Y espacios topológicos. Entonces:*

(i) $\Lambda_{X,Y}(SC(X \times Y)) = C(X, C_p(Y))$;

(ii) $\Lambda_{X,Y}(C^*(X \times Y)) \supset C^*(X, C_u^*(Y))$.

Proposición A.1.19 *Sea Y un espacio localmente compacto y X y Z espacios arbitrarios. Si se considera la topología de la convergencia compacto-abierta para los espacios de funciones. entonces la aplicación $\Lambda_{X,Y}^Z$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Véase XII.5.3. en [15]. □

A.2. Conjuntos Analíticos

Definición A.2.1 *Sea X un espacio polaco. Un subconjunto $A \subset X$ se dice **analítico** si existe un espacio polaco Y y una función continua $f : X \to X$ tales que $f(Y) = A$.*

El conjunto vacío es analítico, basta tomar $Y = \emptyset$. Otra definición alternativa (véase 6.4. en [27]) es la anterior pero considerando $Y = \omega^\omega$ y $A \neq \emptyset$. La colección de los conjuntos analíticos en X se denota por $\Sigma_1^1(X)$. Se sigue de 13.7. en [27] que todo conjunto de Borel es un conjunto analítico.

Proposición A.2.2 *Sea X un espacio polaco y $A \subset X$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *A es analítico.*

(b) *Existe un espacio polaco Y y un conjunto de Borel $B \subseteq X \times Y$ tales que $A = proj_X(B)$.*

(c) *Existe un conjunto cerrado $F \subseteq X \times \omega^\omega$ con $A = proj_X(F)$.*

Demostración. Véase 14.3. en [27]. □

A.3. Compactificación de Stone-Čech

Teorema A.3.1 *Sea X denso en T. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *Toda aplicación continua τ de X en un espacio compacto Y posee una extensión continua $\overline{\tau}$ que va de βX a Y.*

(ii) *X está C^*-sumergido en T.*

(iii) *Todo par de conjuntos cero disjuntos en X poseen clausuras en T que son disjuntas.*

(iv) *Sean Z_1 y Z_2 conjuntos cero en X, entonces $\overline{Z_1 \cap Z_2}^T = \overline{Z_1}^T \cap \overline{Z_2}^T$.*

Demostración. Véase 6.4. en [20]. □

Teorema A.3.2 *Todo espacio completamente regular X tiene una compactificación βX, con las siguientes propiedades:*

(i) Toda aplicación continua τ de X en un espacio compacto Y posee una extensión continua $\overline{\tau}$ que va de βX a Y.

(ii) Toda función $f \in C^*(X)$ tiene una extensión $f^\beta \in C(\beta X)$.

(iii) Todo par de conjuntos cero disjuntos en X poseen clausuras en βX que son disjuntas.

(iv) Sean Z_1 y Z_2 conjuntos cero en X, entonces $\overline{Z_1 \cap Z_2}^{\beta X} = \overline{Z_1}^{\beta X} \cap \overline{Z_2}^{\beta X}$.

Demostración. Véase 6.5. en [20]. □

Nota A.3.3 *1. El espacio βX se conoce como la compactificación de Stone-Čech de X. Según el teorema anterior viene caracterizada como la compactificación de X en la cual X está C^*-sumergido.*

2. La aplicación $f \to f^\beta$ es un isomorfismo de $C^*(X)$ sobre $C(\beta X)$.

A.4. Espacios localmente compactos y k-espacios

Definición A.4.1 *Un espacio topológico X es un espacio **localmente compacto** si para todo $x \in X$ existe un entorno U de x tal que $\overline{U}$ es un subespacio compacto de X.*

Definición A.4.2 *Un espacio topológico X se dice que es un **k-espacio** si es de Hausdorff y es imagen bajo una aplicación cociente de un espacio localmente compacto. Claramente todo espacio localmente compacto es un k-espacio.*

Veamos la siguiente caracterización de k-espacio.

Proposición A.4.3 *Un espacio de Hausdorff X es un k-espacio si y sólo si todo conjunto que intersectado con cualquier compacto es cerrado en el compacto también es cerrado en X.*

Demostración. Véase 3.10.18. en [16]. □

Proposición A.4.4 *Todo espacio que cumple el primer axioma de numerabilidad es un k-espacio.*

Demostración. Véase 3.10.20. en [16]. □

Corolario A.4.5 *La propiedad de ser k-espacio es hereditaria tanto por subconjuntos cerrados como por subconjuntos abiertos.*

A.5. Espacios Lindelöf

Definición A.5.1 *Un espacio topológico X es un espacio* ***Lindelöf*** *si es regular y todo recubrimiento por abiertos de X admite un subrecubrimiento numerable.*

Proposición A.5.2 *Todo espacio que cumple el segundo axioma de numerabilidad es Lindelöf.*

Proposición A.5.3 *Todo espacio Lindelöf es normal.*

Demostración. Véase 3.8.2. en [16]. □

Proposición A.5.4 *Todo subespacio cerrado de un espacio Lindelöf es Lindelöf.*

Demostración. Véase 3.8.3. en [16]. □

Proposición A.5.5 *Todo espacio k-analítico es Lindelöf.*

Demostración. Véase en [18]. □

A.6. Espacios numerablemente Čech-completos y Čech-completos

Definición A.6.1 *Decimos que que el diámetro de un subconjunto A de un espacio topológico X es menor que un recubrimiento $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s\in S}$ del espacio X, y lo denotamos por $\delta(A) < \mathcal{A}$, si existe un $s \in S$ tal que $A \subset A_s$.*

Definición A.6.2 *Un espacio de Tychonoff X es un espacio* ***numerablemente Čech-completo*** *si y sólo si existe una familia numerable $\{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^{\infty}$ de recubrimientos por abiertos de X satisfaciendo la siguiente propiedad: toda familia numerable y decreciente $\mathcal{F}$ de subconjuntos cerrados de X que contiene conjuntos de diámetro menor que $\mathcal{A}_i$ para cada $i \in \omega$ tiene intersección no vacía.*

Veamos que *todo espacio métrico completo (X, d) es numerablemente Čech-completo.* Para ello consideramos, para cada $n \in N$, el cubrimiento por abiertos $\mathcal{A}_n = \{B(x, 1/n) : x \in X\}$ de X. Sea $\{C_n : n \in N\}$ una familia numerable y decreciente de conjuntos cerrados de X con diámetro menor que $\mathcal{A}_i$ para cada $i \in \omega$. Por el teorema de encaje de Cantor se sigue que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$.

Análogamente, se prueba que *todo espacio localemente compacto X es numerablemente Čech-completo.* Elegimos, para cada $n \in \omega$, el conjunto $\mathcal{A}_n$ formado por todos los abiertos que son relativamente compactos en X y razonamos como en el caso anterior.

Proposición A.6.3 *Todo espacio numerablemente Čech-completo es un espacio de Baire.*

Demostración. Véase 3.9.3. en [16]. □

Es sencillo ver que todo cerrado de un espacio numerablemente Čech-completo es numerablemente Čech-completo. Sin embargo en [17] se prueba que el producto de dos espacios numerablemente Čech-completos es un espacio de Baire, pero no tiene porque ser numerablemente Čech-completo.

Una clase de espacios contenida en la clase de espacios numerablemente Čech-completo con mejores propiedades es la siguiente:

Definición A.6.4 *Un espacio de Tychonoff X es un espacio* ***Čech-completo*** *si y sólo si existe una familia numerable $\{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^{\infty}$ de recubrimientos por abiertos de X satisfaciendo la siguiente propiedad: toda familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de la intersección finita que contiene conjuntos de diámetro menor que $\mathcal{A}_i$ para cada $i \in \omega$ tiene intersección no vacía.*

En [16] podemos encontrar una caracterización interesante de espacio Čech-completo. Un espacio topológico X es ***Čech-completo*** *si se puede expresar como un subconjunto G_δ de un espacio compacto y de Hausdorff Y (i.e. si existe un espacio Z compacto y de Hausdorff y una familia de abiertos $\{A_n : n \in \omega\}$ en Z tales que $X = \bigcap_{n\in\omega} A_n$).*

Proposición A.6.5 *Todo espacio Čech-completo es un k-espacio.*

Demostración. Véase 3.9.5. en [16]. □

Proposición A.6.6 *El producto cartesiano de una familia numerable de espacios Čech-completos es Čech-completo.*

Demostración. Véase 3.9.8. en [16]. □

Proposición A.6.7 *Todo subespacio cerrado ó G_δ de un espacio Čech-completo es Čech-completo.*

Demostración. Véase 3.9.6. en [16]. □

A.7. Compacidad secuencial y compacidad numerable

Definición A.7.1 *Se dice que $x \in X$ es un* ***punto de acumulación*** *de una sucesión $\{x_n : n \in \omega\} \subset X$ si para todo entorno U de x existe una cantidad infinita de numeros naturales n tales que $x_n \in U$. Si el espacio es Fréchet la definición es equivalente a que x sea límite de alguna subsucesión de $\{x_n : n \in \omega\}$.*

Definición A.7.2 *Un subconjunto A de un espacio topológico X es:*

- ***relativamente compacto*** *si $\overline{A}$ es compacto.*

- ***relativamente numerablemente compacto*** *si toda sucesión en A tiene un punto de acumulación en X.*

- ***relativamente sucesionalmente compacto*** *si toda sucesión en A tiene una subsucesión que converge a un punto de X.*

- ***numerablemente compacto***, ***sucesionalmente compacto*** *si en las dos definiciones anteriores el punto de acumulación o el punto límite se encuentra en A.*

Proposición A.7.3 *Todo espacio topológico X secuencialmente compacto es numerablemente compacto.*

La implicación contraria no se cumple en general. Como contraejemplo se tiene el espacio $\beta\omega$. Sin embargo cuando el espacio cumple el primer axioma de numerabilidad son equivalentes (véase 3.10.31. en [16]).

Proposición A.7.4 *Sea X un espacio de Hausdorff. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) El espacio X es numerablemente compacto.

(b) Todo recubrimiento numerable por abiertos de X tiene un subrecubrimiento finito.

Demostración. Véase 3.10.3. en [16]. □

Corolario A.7.5 *Un espacio topológico X es compacto si y sólo si es numerablemente compacto y Lindelöf.*

Proposición A.7.6 *Todo subespacio cerrado de un espacio numerablemente compacto es numerablemente compacto.*

Demostración. Véase 3.10.4. en [16]. □

A.8. Pseudocompacidad

Definición A.8.1 *Un conjunto $A \subset X$ se dice que está* ***acotado*** *en un espacio X si para toda función continua sobre X que toma valores reales está acotada sobre A.*

Definición A.8.2 *Un espacio topológico X se dice que es* ***pseudocompacto*** *si es un espacio de Tychonoff y toda función continua que toma valores reales definida en X es acotada.*

Proposición A.8.3 *Si existe una aplicación continua $f : X \to Y$ sobreyectiva entre un espacio pseudocompacto X y un espacio de Tychonoff Y, entonces Y es un espacio pseudocompacto.*

Proposición A.8.4 *Todo espacio numerablemente compacto es pseudocompacto.*

Demostración. Véase 3.10.20. en [16]. □

Proposición A.8.5 *Todo espacio pseudocompacto y normal es numerablemente compacto.*

Demostración. Véase 3.10.3. en [16]. □

Definición A.8.6 *Sea X un espacio topológico, se dice que $p \in X$ es un* ***punto de acumulación*** *de la sucesión $\{U_n : n \in N\}$ de subconjuntos de X si para todo entorno V de p se tiene que $V \cap U_n \neq \emptyset$ para una cantidad infinita de enteros n.*

Proposición A.8.7 *Sea X un espacio de Tychonoff. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) El espacio X es pseudocompacto.

(b) Toda familia localmente finita de subconjuntos de X abiertos no vacíos es finita.

(c) Todo cubrimiento por abiertos localmente finito de X posee un subrecubrimiento finito.

Demostración. Véase 3.10.22. en [16]. □

En el artículo [21] encontramos las siguientes caracterizaciones:

Proposición A.8.8 *El espacio X es pseudocompacto si y sólo si no existe un conjunto no vacío G_δ contenido en $\beta X \setminus X$.*

Proposición A.8.9 *Un espacio de Tychonoff X es pseudocompacto si y sólo si toda sucesión de abiertos $\{U_n : n \in N\}$ de X posee un punto de acumulación.*

Veamos que los espacios pseudocompactos son espacios de Baire.

Proposición A.8.10 *Todo espacio regular y pseudocompacto es un espacio de Baire.*

Demostración. Sea X un espacio regular y pseudocompacto y sea $\{U_1, U_2, \ldots\}$ una familia numerable de abiertos densos en X. Sea V un abierto no vacío de X arbitrario. Veamos que $V \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \right) \neq \emptyset$. Como U_1 es denso en X se tiene que $V \cap U_1 \neq \emptyset$. Sea el abierto $V_1 = V \cap U_1$, como U_2 es denso en X se sigue que $V_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Por ser X regular podemos encontrar $V_2 \subset U_2$ abierto tal que $\overline{V_2} \subset V_1$. Siguiendo este razonamiento de manera inductiva obtenemos una familia de abiertos no vacíos $\{V_n\}_{n\in\omega}$ tal que para todo $n \in \omega$ se tiene que $V_n \subset U_n$ y $V_{n+1} \subset \overline{V_{n+1}} \subset V_n$. Por la proposición A.8.7 se sigue que la familia $\{V_n\}_{n\in\omega}$ no es localmente finita. Por consiguiente, existe un punto $x \in X$ tal que todo entorno intersecta a infinitos V_n. Por tanto, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V_n}$. Como $\overline{V_{n+1}} \subset V_n$ para todo n, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \emptyset$. El resultado se sigue por el hecho de que $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ □

Proposición A.8.11 *El producto cartesiano $X \times Y$ de un espacio pseudocompacto X y un k-espacio Y es pseudocompacto.*

<u>*Demostración.*</u> Véase 3.10.26. en [16]. □

Corolario A.8.12 *El producto cartesiano $X \times Y$ de un espacio pseudocompacto X y un espacio compacto Y es pseudocompacto.*

Bibliografía

[1] A.V. Arkhangel'skii. *Topological Function Spaces.* Springer, 1992.

[2] MO Asanov and NV Velichko. Compact sets in Cp(X). *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 22(2):255–266, 1981.

[3] R Baire. Sur les fonctions de variables réelles. *Annali di Matematica Pura et Appl.*, 3:1–123, 1899.

[4] J Bourgain, DH Fremlin, and M Talagrand. Pointwise compact sets of Baire-measurable functions. *American Journal of Mathematics*, 100(4):845–886, 1978.

[5] B Cascales, I Namioka, and G Vera. The Lindelöf property and fragmentability. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 128(11):3301–3309, 2000.

[6] AL Cauchy. *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique.* 1821.

[7] G Choquet. *Lectures on analysis.* W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.

[8] JPR Christensen. Joint Continuity of separately continuous functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 82(3):455–461, 1981.

[9] JB Conway. *A course in functional analysis.* Springer-Verlag, New York, 1990.

[10] HH Corson and I Glicksberg. Compactness in Hom (G, H). *Canad. J. Math.*, 22:164–170, 1970.

[11] G Debs. Points de continuité d'une fonction séparément continue. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 97(1):167–176, 1986.

[12] G Debs. Pointwise and uniform convergence on a Corson compact space. *Topology Appl.*, 23(3):299–303, 1986.

[13] R Deville. Convergence ponctuelle et uniforme sur un espace compact. *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, 37(7-12):507–515, 1989.

[14] R Deville and G Godefroy. Some applications of projective resolutions of identity. *Proc. London Math. Soc.*, 67(1):183–199, 1993.

[15] J Dugundji. *Topology.* Allyn and Bacon, Inc., 1966.

[16] R Engelking. *General topology.* Heldermann Verlag, 1989.

[17] Z Frolík. Baire spaces and some generalizations of complete metric spaces. *Czechoslovak Math. J.*, 11:237–248, 1961.

[18] Z Frolík. A survey of separable descriptive theory of sets and spaces. *Czechoslovak Math. J.*, 20:406–467, 1970.

[19] A Genocchi and G Peano. *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale.* 1884.

[20] L Gillman and M Jerison. *Rings of continuous functions.* Literary Licensing, 1960.

[21] I Glicksberg. Stone-Cech compactifications of products. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 90:369–382, 1959.

[22] A Grothendieck. Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux. *Amer. J. Math*, 74:168–186, 1952.

[23] G Hansel and JP Troallic. Quasicontinuity and Namioka's theorem. *Topology Appl.*, 46(2):135–149, 1992.

[24] R Haydon. Compactness in Cs (T) and applications. *Publ. Dép. Math. (Lyon)*, 9(1):105–113, 1972.

[25] S Hernández and S Macario. Dual properties in totally bounded Abelian groups. *Arch. Math. (Basel)*, 80(3):271–283, 2003.

[26] JE Jayne and CA Rogers. Borel selectors for upper semi-continuous set-valued maps. *Acta Math.*, 155(1-2):41–79, 1985.

[27] AS Kechris. *Classical descriptive set theory.* Springer, 1995.

[28] S Kempisty. Sur les fonctions quasicontinues. *Fundamenta Mathematicae*, 19(1):184–197, 1932.

[29] J Lindenstrauss. *Weakly compact sets—their topological properties and the Banach spaces they generate.* Annals of Math. Studies, 1972.

[30] S Mazur. On continuous mappings on Cartesian products. *Fundamenta Mathematicae*, 39:229–238, 1952.

[31] E Michael and I Namioka. Barely continuous functions. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 24(10):889–892, 1976.

[32] James R. Munkres. *Topology.* Prentice Hall, Incorporated, 2000.

[33] I Namioka. Separate continuity and joint continuity. *Pacific J. Math.*, 51(2):515–531, 1974.

[34] I Namioka and R Pol. Mappings of Baire spaces into function spaces and Kadeč renorming. *Israel J. Math.*, 78(1):1–20, 1992.

[35] I Namioka and R Pol. σ-fragmentability and analyticity. *Mathematatika*, 43(1):172–181, 1996.

[36] D Preiss and P Simon. A weakly pseudocompact subspace of Banach space is weakly compact. *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 15(4):603–609, 1974.

[37] JD Pryce. A device of R. J. Whitley's applied to pointwise compactness in spaces of continuous functions. *Proc. London Math. Soc.*, 23(3):532–546, 1971.

[38] EA Reznichenko. Extension of functions defined on products of pseudocompact spaces and continuity of the inverse in pseudocompact groups. *Topology and its Applications*, 59(3):233–244, 1994.

[39] CE Rickart. *Banach algebras.* Von Nostrand, Princeton, 1960.

[40] HP Rosenthal. The heredity problem for weakly compactly generated Banach spaces. *Compositio Math.*, 28:83–111, 1974.

[41] HP Rosenthal. Point-wise compact subsets of the first Baire class. *Amer. J. Math.*, 99(2):362–378, 1977.

[42] VI Rybakov. Yet Another Class of Namioka Spaces. *Math. Notes*, 73(1-2):244–248, 2003.

[43] J Saint-Raymond. Jeux topologiques et espaces de Namioka. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 87(3):499–504, 1983.

[44] DB Shakhmatov. A pseudocompact Tychonoff space all countable subsets of which are closed and C$*$-embedded. *Topology Appl.*, 22(2):139–144, 1986.

[45] W Sierpiński. Sur une suite infinie de fonctions de classe 1 dont toute fonction d'accumulation est non mesurable. *Fund. Math.*, 33:104–105, 1945.

[46] Charles Stegall. Functions of the first Baire class with values in Banach spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 111(4):981–991, 1991.

[47] M Talagrand. Deux généralisations d'un théoreme de I. Namioka. *Pacific J. Math*, 81(1):239–251, 1979.

[48] M Talagrand. Espaces de Banach faiblement κ-analytiques. *Annals of Mathematics*, 110(3):407–438, 1979.

[49] J Thomae. *Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Veränderlichen.* 1873.