Eratóstenes: um génio do período Helénico!

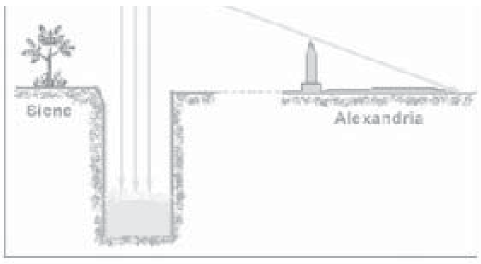
Maria do Carmo Martins*

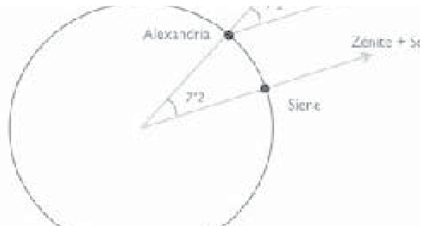
Apesar do melancólico final das férias e do regresso à azáfama diária, há sempre tempo para uma estória interessante ou até mesmo um enredo. Ora, também no mundo da matemática há estórias que nem o diabo se lembraria. Hoje narramos duas ocorridas na vida de Eratóstenes.

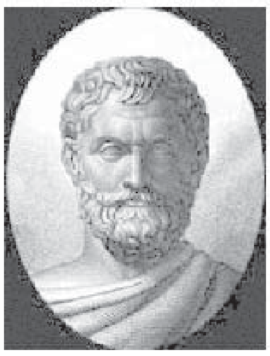
Eratóstenes (276 a.C.-194 a.C.) foi um matemático, linguista, filósofo, poeta, geógrafo, bibliotecário e astrónomo da Grécia antiga. É considerado o pai da Geografia. Brilhante desde criança, estudou com os melhores professores do seu tempo e tornou-se tão famoso que o faraó egípcio Ptolomeu III concedeu-lhe a direção da imponente Biblioteca de Alexandria. Um cientista da altura apelidava-o por Beta, a segunda letra do alfabeto grego, porque para ele Eratóstenes era o segundo melhor do mundo em tudo. Mas acontece que Eratóstenes era Alfa em muitas coisas.

Pois bem, por volta de 220 a.C. Eratóstenes leu num papiro que na cidade Egípcia de Siene, conhecida hoje como Assuão (situada a 950 Km a sul do Cairo), no dia mais longo do ano (solstício de verão) as sombras das colunas dos templos decresciam à media que se aproximava o meio-dia; e que precisamente a esta hora o sol aparecia totalmente refletido no fundo dos poços, o que não ocorria em mais nenhum dia do ano. Esta observação deixou-o intrigado. A maioria das pessoas deixava cair esta afirmação em esquecimento, mas Eratóstenes era um cientista e esperou pacientemente até ao solstício. Às doze badaladas desse dia de verão em Alexandria, Eratóstenes mediu a sombra de um pau que havia preparado, comprovando que na sua cidade este tinha sombra. Não tendo razão para duvidar da informação do papiro, Eratóstenes encontrou a única explicação plausível para que os raios solares (paralelos entre si, dada a distância a que o Sol se encontra da Terra) provocassem, num mesmo instante, duas sombras distintas. Tal só poderia acontecer se a superfície do nosso planeta fosse curva, contrariando a crença de então de que a terra era plana.

Para comprovar a sua hipótese, Eratóstenes contratou um trabalhador para medir, passo a passo, os 800 Km que separam Alexandria de Siene. Ele imaginou que um pau em Alexandria e outro em Siene se prologavam até ao centro da Terra e descobriu que, em função do comprimento da sombra que havia registado, faziam um ângulo de aproximadamente 7 graus (ver figura). Ora, como uma circunferência mede 360 graus, o ângulo calculado representa 1/50 da circunferência terrestre. Assim, 50 x 800 Km = 40 000 Km corresponde à media da circunferência da Terra. Estes foram os cálculos efetuados por Eratóstenes com paus, sombras, passos e muita imaginação. Hoje, dotados de equipamentos de elevada precisão concluímos que o perímetro da Terra é 40 075,017 Km. Eratóstenes falhou em cerca de 0,1% o valor exato, razão para exclamarmos: contas bem feitas!







Outra contribuição de Eratóstenes é a elaboração de um método para determinar uma lista de números primos. Recordo que um número primo é um inteiro maior do que 1 e que é divisível somente por si e pela unidade. A lista dos primeiros 13 números primos é 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 e 41. Estes números formam um conjunto infinito e têm propriedades muito interessantes. Refira-se que é possível escrever qualquer número inteiro (maior do que 1) usando somente multiplicações de números primos, designada por decomposição de um número em fatores primos. Por exemplo, 60 = 2 x 2 x 3 x 5. Mais, esta decomposição é única.

Como aplicação prática dos números primos, saiba o leitor que quando acede a um sítio na Internet onde utiliza navegação segura, tal como quando faz compras ou acede às suas contas bancárias através da Internet, está protegido pelas propriedades mágicas dos números primos. Outra curiosidade destes números é que não se conhece um processo natural de os produzir. A sonda Voyager 1, enviada em 1977 para explorar o espaço exterior ao nosso sistema solar, leva uma lista de números primos como forma de mostrar, a quem algum dia a encontre, que somos seres inteligentes.

Mas voltemos a Eratóstenes e à produção de sequências de números primos. Imagine que se pretende elaborar a lista dos números primos até 40. Enumeremos estes números: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39 e 40; Eratóstenes pensou assim: i) o primeiro número da lista não cortado é primo, ou seja, 2 é primo; ii) cortar da lista todos os múltiplos de 2 (> 2), ficando-se com: 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39; iii) o próximo número primo é o 3! iv) cortar todos os múltiplos de 3 da lista (> 3), ficando-se com: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37, 39; v) 5 é primo! vi) cortar todos os múltiplos de 5 da lista (> 5): 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 39; e o procedimento repete-se para os restantes números da lista. Este método é conhecido como o "Crivo de Eratóstenes" (ver figura).

Note o leitor que após cortarmos os múltiplos de 5 obtivemos a lista que havíamos indicado anteriormente. Mais, não há nesta lista múltiplos de 7, nem de 11, nem de 13... Isto acontece porque, 7 x 7 = 49 > 40 e por isso o procedimento pode parar no número 5. Generalizando, para construir a lista de primos até X (por exemplo 100), calculamos a raiz quadrada de X (um número Y tal que Y x Y = X; no caso de X = 100, Y = 10, pois 10 x 10 = 100) e aplicamos o método de Eratóstenes até Y (ou seja 10). Assim, para gerar a lista de números primos até 100, basta-nos retirar simplesmente os múltiplos de 2, 3, 5 e 7 (ver figura "Crivo de Eratóstenes"). Para a obtenção da lista dos números primos até 1000, basta-nos repetir o procedimento até ao número 31 (a raiz quadrada de 1000 é 31,6227...), que corresponde a cortar os múltiplos dos primeiros 11 números primos. Para gerar a lista de números primos até 100 000 teríamos de testar para os primeiros 65 números primos (até ao primo 313). Este é somente o método mais rápido que existe para determinar uma lista de números primos e foi descoberto por Eratóstenes há 2 200 anos atrás.

Responsável por uma quantidade admirável de descobertas e inovações, Eratóstenes viveu até aos 80 anos. Contudo, não esperou que a morte viesse e, preferindo ser o eterno dono da sua vida, suicidou-se.

PS: queria discutir dois assuntos aflorados no texto.

1) Para determinar se um número é primo basta testar que não possui um divisor até à sua raiz quadrada? Para se perceber que sim, há que notar que os divisores de um número existem sempre aos pares e que ao encontrar-se um divisor, na verdade encontram-se dois. Tome-se o caso do número 12. O número 2 divide 12, porque 2 x 6 = 12; mas também ficamos a saber que 6 é divisor de 12, pois 6 x 2 = 12. Continuando, 3 também é divisor de 12, pois 3 x 4 = 12. Neste momento, descobrimos que 4 também é. Se continuarmos, vamos descobrir o 4 e o 6, que já tínhamos conhecimento. Então até onde devemos ir? Os divisores estão emparelhados: um mais pequeno a multiplicar por um maior (ou vice-versa); à medida que o número mais pequeno aumenta o número maior diminui. E encontram-se no meio. Mas que meio é este? Há de ser um número que multiplicado por si próprio dê o número que estamos a averiguar se é primo, e esta é exatamente a definição de raiz quadrada. Por esta razão é que não faz sentido procurar divisores de um número para além da sua raiz quadrada, senão o que vamos encontrar são os números que emparelham com os divisores menores do que a raiz quadrada do número e que já encontramos antes.

2) É o crivo de Eratóstenes o método mais eficiente para determinar uma lista de primos? Para verificar se um número é primo há que testar que este não é divisível por nenhum número para além dele próprio e da unidade. Como os divisores de um número não são superiores ao próprio número, basta tentar dividir o número que se pretende averiguar se é primo por 2, depois por 3, depois por 4, até à raiz quadrada do número. Se encontrarmos um divisor, o número não é primo; caso contrário, é primo. Note-se que todos os números divisíveis por 4 também o são por 2, e os divisíveis por 6 também o são por 3 e por 2. O método de testar todos os números é pouco eficiente, porque faz divisões desnecessárias. O método do Crivo só contempla divisões pelos primos e assim ao verificar que um número não é divisível por 2, não vai testar que é divisível por 4 ou por mais nenhum par, por exemplo.

*Professora do Departamento de Matemática da Universidade dos Açores
mika@uac.pt