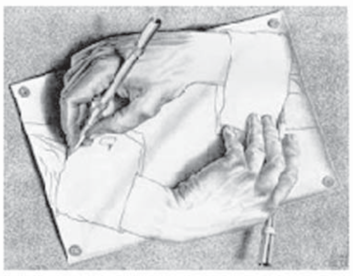
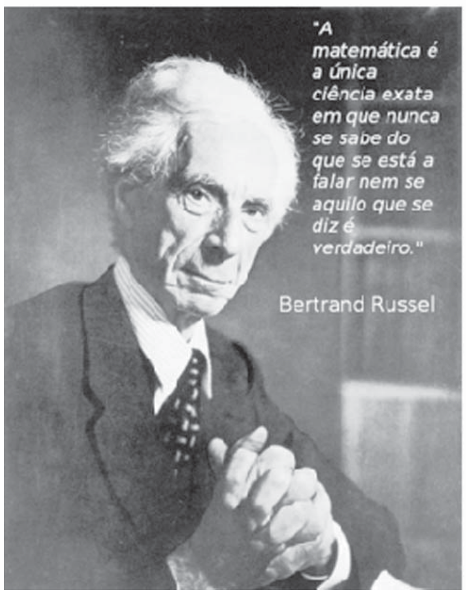
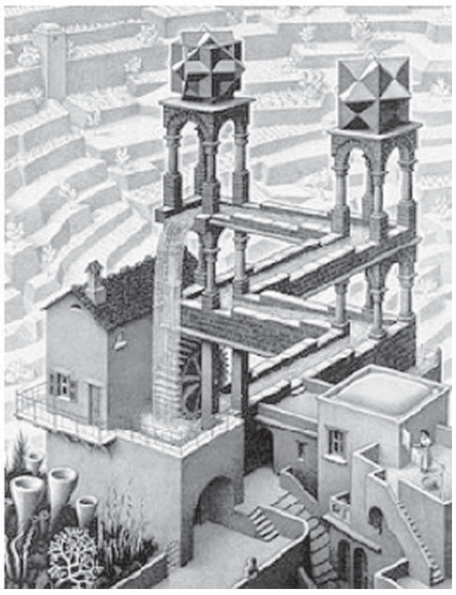
Uma (des)complicada viagem ao mundo dos paradoxos

Por: Maria do Carmo Martins
Professora do Departamento de Matemática
da Universidade dos Açores
mika@uac.pt







Hoje proponho-vos uma pequena viagem ao mundo dos paradoxos e das implicações que estes trazem para a Matemática, Filosofia e outros campos do saber. Mas, comecemos por definir a palavra paradoxo. Uma procura rápida no dicionário esclarece a nossa curiosidade (ou não): "**Paradoxo** |ôcs| (latim *paradoxum*, *i*, do grego *parádoxos*, *-on*, surpreendente, estranho, extraordinário) *substantivo masculino* 1. Opinião contrária à comum; 2. [Por extensão] Facto incrível; 3. Desconchavo, asneira. *Adjetivo* 4. Paradoxal. Plural: paradoxos." Trocando isso por miúdos, paradoxo é uma declaração aparentemente verdadeira que leva a uma contradição lógica ou a uma situação que contradiz a intuição comum. Não se preocupe o leitor se ainda não entendeu por completo o significado de paradoxo. Um ilustração vem mesmo a calhar, certo?

Comecemos por apresentar o paradoxo do mentiroso. Consideremos a afirmação: "todo o micaelense é mentiroso". Vamos analisar a veracidade desta afirmação quando dita por mim, natural da R. Grande. Bem, (i) se ao dizer "todo o micaelense é mentiroso" estiver **a falar a verdade**, então a afirmação "todo o micaelense é mentiroso" é verdadeira! Daqui resulta que eu sou mentirosa (**não estou a falar a verdade**)! (ii) Se **estou a mentir**, a então a afirmação "todo o micaelense é mentiroso" é falsa, pelo que **não estou a mentir**! Nas duas averiguações anteriores, concluímos que eu estou a falar verdade e não estou a falar verdade ou que estou a mentir e a não mentir. Confusos, certo?! Vejamos isso, pelo lado positivo: talvez esse paradoxo seja filho único e assim não haverá outros. Hum... bom demais!

(In)felizmente existem outros e espalhados por diversas áreas, tais como: literatura, futebol, *Internet*, arte, música e... claro na filosofia e na matemática. Na literatura basta recordar o tão conhecido soneto de Luís de Camões "amor é fogo que arde sem se ver; é ferida que dói e não se sente; é um contentamento descontente; é dor que desatina sem doer".

No cinema, a trilogia "Regresso ao Futuro" (1985, 1898 e 1990) com Michael J. Fox. Nesta saga, a personagem central da história, Marty McFly, faz uma viagem ao passado e interage consigo próprio e com os seus futuros pais. Acontece que a mãe acabou por se apaixonar por ele em vez de se apaixonar pelo pai, o que provocaria que ele não viria a nascer e como tal não conseguiria viajar ao passado para que a mãe se voltasse a apaixonar por ele, logo, voltaria a nascer.

Na *Internet*, a citação de Abraham Lincoln (1809-1865): "o problema sobre as citações que encontramos na *Internet* é que nunca sabemos da sua veracidade". Esta não parece ter nada de mal, mas espere: se esta citação é de Lincoln e usa a palavra *Internet*, então, das duas uma ou a *Internet* é mais antiga do que pensávamos ou Lincoln é nosso contemporâneo!

No grandioso mundo do futebol, João Pinto, defesa do futebol clube do Porto nos anos 80, ficou conhecido pelos seus célebres comentários "estamos à beira do abismo! Agora, para sairmos da situação só nos resta dar um passo em frente" ou "rematei com o pé que tinha mais à mão".

Na arte, Escher (1898-1972) foi um famoso artista holandês que se distinguiu pelas suas construções impossíveis e pela sua capacidade de gerar imagens com efeitos de ilusão ótica. Refira-se por exemplo, a obra Drawing Hands de 1948, na qual uma mão desenha a outra e Waterfall, de 1962, onde a água de uma cascata põe em movimento a roda de um moinho e descreve depois um percurso em ziguezague até ao ponto em que a queda da água começa de novo o seu trajeto (ver imagem).

Na matemática e na filosofia há muitos exemplos. Obviamente não faremos a separação entre os paradoxos na matemática e na filosofia, pois os maiores filósofos desta área eram também os maiores matemáticos do seu tempo. Sem qualquer intenção de ferir a sensibilidade religiosa do leitor, apresento o famoso paradoxo de Nietzche (1844-1900) da Omnipotência de Deus. É sabido das sagradas escrituras que "Deus é omnipotente!". Ora Nietzche coloca a questão de que se Deus pode verdadeiramente tudo, então pode criar uma rocha tão pesada que Ele próprio não a consiga levantar. Analisemos: (i) **se Deus não puder criar tal rocha**, contraria a hipótese de ser omnipotente, pelo que Deus não é omnipotente. (ii) **Se Deus é omnipotente**, então pode criar uma rocha tão pesada que não a pode levantar e daí **Deus não é omnipotente**. Mas Deus é omnipotente!

O aspeto de auto referência dos paradoxos pode também ser expresso de outras formas. Consideremos o conhecido paradoxo do barbeiro: Numa aldeia estão em vigor as seguintes regras: 1. O barbeiro não faz a barba a quem se barbeia sozinho; 2. O barbeiro faz a barba a todos os homens que não se barbeiam sozinhos. Aparentemente, do ponto de vista jurídico, não há problema com estas regras! Mas será mesmo assim? Então quem faz a barba ao barbeiro?!? Investiguemos. Homem faz a sua barba, então o barbeiro não a faz (regra 1). Mas como o barbeiro também é um homem, vamos substituir nesta regra a palavra homem por barbeiro e ver o resultado: ~~Homem~~ **Barbeiro faz a sua barba**, então o **barbeiro não a faz** (regra 1). Temos assim uma contradição. Uma explicação é que talvez existam problemas com a regra 1. Passemos à regra 2: Homem não faz a sua barba, então o barbeiro faz. Fazendo o mesmo exercício de substituir a palavra homem pela palavra barbeiro, obtemos: ~~Homem~~ **Barbeiro não faz a sua barba**, então o **barbeiro faz**. Novamente, deparamo-nos com uma contradição. Conclusão: ninguém faz a barba ao desgraçado do barbeiro, isto porque as regras 1 e 2 não são consistentes. Como sair desta contradição? Tal aldeia não pode existir!

O paradoxo do barbeiro pode ser expresso na teoria dos conjuntos (ramo da matemática que estuda coleções de elementos e as suas propriedades). E que mal poderá isto ter? No início do século XX houve um ramo da matemática que começou a estudar o seu significado formal: os fundamentos da matemática. Foi escolhida a teoria dos conjuntos para representar e ser os alicerces de toda esta ciência. A realçar que já havia muita investigação nesse sentido. Para David Hilbert (1862-1943), um dos matemáticos mais notáveis de sempre, toda a matemática podia ser representada usando a teoria dos conjuntos.

Bertrand Russel (1872-1970), filósofo e matemático inglês, chegou a uma conclusão que abalou a matemática de então, hoje conhecido como o paradoxo de Russel. Embora esteja estruturado em termos da teoria dos conjuntos, a única coisa que o leitor precisará de saber sobre conjuntos é que, os conjuntos são coleções bem definidas de elementos de qualquer tipo. Certamente que um pouco de notação irá também ajudar. Para indicar que 26 é um elemento do conjunto dos números naturais, designado por IN, escrevemos 26 IN (lê-se 26 pertence ao conjunto dos números naturais) e para indicar que -2 não é um elemento de IN, escrevemos -2 IN (lê-se -2 não pertence aos naturais).

Agora, para estabelecer o paradoxo, observamos que alguns conjuntos não se contêm a si próprios como membros (X X) e outros sim (X X). Para percebermos melhor daremos exemplos dos primeiros e dos segundos. Para os primeiros, basta considerar que o conjunto de todos os homens não é ele próprio um homem, e portanto não é um elemento de si próprio. Para os segundos, pensemos em todos os conjuntos que não contêm homens. Ora, o conjunto de todos os conjuntos que não contêm homens, ele próprio não contém homens. Então esse conjunto pertence a si próprio.

Designemos por A o conjunto de todos os conjuntos que se contêm a si próprios como membros e por B o conjunto de todos aqueles que conjuntos que não se contêm a si próprios como membros. Podemos perguntar agora se B é membro de si próprio ou não (esta questão faz lembrar o leitor "quem barbeia o barbeiro?"). Ora, (i) **se B pertence a B**, por definição do conjunto B, então **B não pertence a B**. Por outro lado, (ii) **se B não pertence a B**, então (novamente pela definição de B) **B pertence a B.** Portanto, B é um membro de si próprio se e só se não for um membro de si próprio. Esta contradição constitui o paradoxo de Russel, cujo impacto na teoria dos conjuntos foi trágico. Numa lógica em que P e **não** P são verdade é possível provar a veracidade de qualquer proposição. Tal lógica é inconsistente.

Em suma, a descoberta dos paradoxos abalaram projetos de investigadores proeminentes. Os maiores do século XX. Mas sobre esta tragédia, continuaremos noutra oportunidade.