Racionalizar ou não racionalizar, eis a questão!

Maria do Carmo Martins
Professora do Departamento
de Matemática da Universidade
dos Açores
mika@uac.pt

A matemática é uma ciência exata e rigorosa, com uma escrita e notação própria que por vezes intimida quem a tenta aprender. Pode até encerrar certos "mistérios", quando o conhecimento desta disciplina tem fragilidades. Há dias, ao ler uma revista generalista deparei-me com a seguinte frase: "a matemática é a música da razão e a música é a matemática dos sentidos". Achei curiosa esta associação entre a matemática, a música e a razão, pois a música está ligada às artes e a matemática às ciências exatas. Não deixa de ser interessante pensar que a matemática é a arte que exprime a razão e a música é a ciência dos sentidos. Pena a sua má fama, e até ódio, junto de alunos e da comunidade em geral.

Ao longo da minha vida como professora, tenho verificado que a matemática é cada vez mais incompreendida pelos alunos e, por vezes, colocada até num patamar inatingível. Noto ainda, de forma mais acentuada, uma grande falta de bases por parte dos alunos, que se manifesta no fraco domínio de conceitos básicos. Enumero como exemplo a dificuldade em utilizar incógnitas (letras) na resolução de problemas, o não saber simplificar radicais e frações tornando-as irredutíveis, e até a ausência de espírito crítico em relação ao resultado de um problema. Por vezes a solução obtida é "estranha" (por exemplo, uma área negativa de -14 metros quadrados) e o resultado é aceite como "certo", revelando falta de discernimento. Valoriza-se a mecanização cega de tarefas em oposição à aplicação de raciocínio lógico.

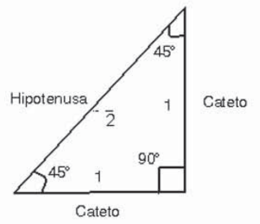
Hoje falarei sobre um destes problemas que atormenta muitos alunos do ensino básico (e não só...) em geral: **a racionalização do denominador de uma fração**. Recorde o leitor que uma fração é um modo de exprimir uma quantidade a partir da divisão (ou razão) entre dois números. De uma forma simples, podemos dizer que uma fração, representada por *x/y*, designa o número que resulta da divisão de *x* em *y* partes iguais. Ao número *x* chamamos numerador e ao *y* denominador, o qual não pode ser igual a zero. Não tem significado dividir um número em zero partes.

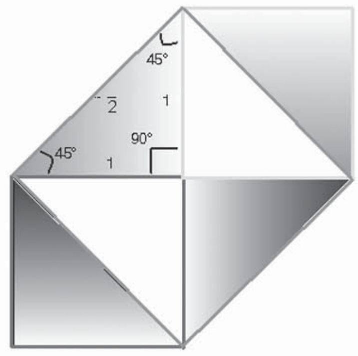
A racionalização de denominadores consiste em transformar uma fração cujo denominador é irracional noutra equivalente com um denominador racional. Mas o que são números racionais e irracionais? Comecemos pelos mais simples. Os números racionais são aqueles que se escrevem como a razão entre dois números inteiros. Em termos de casas decimais, estes números apresentam ou um número finito de casas decimais ou um número infinito de casas decimais que obedecem a um padrão. Como exemplos temos 4/1 (tem zero casas decimais); 1/8 que corresponde ao número 0,125 (tem três casas decimais); 10/3 representa o número 0,333(3). O parêntesis à volta de 3 indica que o número tem uma infinidade de casas decimais construídas a partir da repetição infinita do (padrão) 3. Por outro lado, os números irracionais são aqueles que possuem um número infinito de casas decimais, as quais aparecem numa sequência completamente aleatória; ou seja, se inspecionarmos as casas decimais não detetamos qualquer padrão entre elas. Daí o nome irracional. Para obtermos um número irracional podemos construir um triângulo retângulo (tem um ângulo que mede 90 graus) cujos lados, que formam este ângulo, (os catetos) medem ambos 1 cm (ver figura 4). Se se tentar medir o comprimento do lado maior (a hipotenusa) vamos ter uma surpresa. O famoso teorema de Pitágoras diz-nos que, num triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma do quadrado dos catetos; por outras palavras, seguindo o nosso exemplo, se construirmos um quadrado cujos lados têm o comprimento da hipotenusa, a sua área mede 2 cm quadrados (a soma das áreas dos quadrados formados pelo comprimento de cada cateto) (ver figura 5). Este procedimento não parece ter nada de irracional! E assim pensou Pitágoras e os seus discípulos, mas a verdade é que não conseguiram encontrar um número que representasse de forma exata a medida do lado deste quadrado formado pela hipotenusa. Atendendo a que a área do quadrado maior (de lado igual à hipotenusa h) da figura 5 é a soma das áreas dos dois quadrados pequenos (ambos de lado 1 cm), temos: h x h = 1 x 1 + 1 x 1. Daqui resulta que h é a raiz quadrada de dois, um valor aproximadamente igual a 1,4142135623730951... As reticências significam que o número não tem fim e que não se consegue encontrar um padrão para a repetição das suas casas decimais.

1 $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2 $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}} = \dfrac{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{3}$

3 $\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

4


5


Mas voltemos à racionalização. Porque é que as raízes no denominador de uma fração têm de ser simplificadas? O que há de errado em deixar um número irracional num denominador? Por exemplo, qual o problema com a fração 1 sobre a raiz quadrada de dois que não se manifesta na fração raiz quadrada de dois sobre dois que lhe é equivalente? Permitam-me um exemplo. Tomemos a razão entre um dos catetos e a hipotenusa do triângulo da figura 4, ou seja 1 sobre a raiz quadrada de dois. Como curiosidade, refira-se que este valor corresponde ao seno (e ao cosseno) do ângulo com a amplitude de 45 graus. O leitor consegue obter o resultado utilizando uma calculadora que compute raízes quadradas. O resultado é aproximadamente 0,7071067814... Agora desafio o leitor a fazer a divisão sem recorrer à calculadora. Estou certa que a maior parte de vós (que tem mais de 30 anos) ainda se lembra do algoritmo da divisão. Certamente que o número de leitores, que recordam o algoritmo da divisão, quando o divisor possui casas decimais, é mais reduzido; palpita-me, até, que será ainda menor aqueles que sabem lidar com o caso em que o dividendo é menor do que o divisor e o divisor tem um número grande de casas decimais. Ora bem, zero ao quociente, coloca-se um zero à esquerda do 1, e... é melhor ficarmos por aqui. Mas o leitor interessado, e corajoso, pode continuar o exercício.

Sejamos honestos, não é uma experiência das mais agradáveis! Mas tentemos agora calcular manualmente o valor da fração raiz quadrada de dois sobre dois que, como dissemos corresponde ao mesmo valor que 1 sobre a raiz quadrada de dois. Agora a tarefa parece ser bem mais simples. Até só recorrendo ao cálculo mental, a nossa intuição permite-nos concluir que 0,70710... é metade de 1,4142... Então, com qual das frações prefere o leitor trabalhar? Com qual obtém de imediato uma intuição sobre o seu valor? Qual delas se torna mais fácil de comparar com outros números? Com qual delas prefere operar se necessitar de adicionar ou subtrair outras frações? Palpita-me que prefira trabalhar com raiz quadrada de dois sobre dois.

Mas como transformar 1 sobre a raiz quadrada de dois em raiz quadrada de dois sobre dois, ou no caso mais geral, uma fração com raízes no denominador noutra mais simples de trabalhar? A resposta é muito simples. Multiplicam-se o numerador e o denominador pelo mesmo valor, que no nosso exemplo é a raiz quadrada de dois (ver figura 1).

Para além da motivação relacionada com a facilidade de calcular uma solução, a outra principal justificação para se racionalizar o denominador é para se ter uma forma padronizada na escrita das respostas. A racionalização torna mais fácil ao professor corrigir uma solução e aos alunos verificarem e compararem as suas respostas nos seus livros e manuais. Além disso, usando uma forma padronizada poderá tornar mais fácil reconhecer resultados semelhantes em problemas complicados e combiná-los. Por exemplo, se quisermos adicionar a raiz quadrada de dois com 1 sobre a raiz quadrada de dois, verificamos que teremos de racionalizar a fração (ver figura 3).

Em suma: antes da invenção das calculadoras, havia uma razão específica para racionalizar os denominadores que era evitar cálculos complicados e morosos. Atendendo a este facto, a racionalização tornou-se uma forma padronizada, pelo que é natural aos professores esperarem que os alunos adiram incondicionalmente à racionalização. Nos dias de hoje, em que reina a mais alta tecnologia, os cálculos são usualmente realizados por computadores e calculadoras e não é tão claro o propósito da racionalização. Embora a escrita de frações de forma padronizada continue a ser muito útil nos primeiros anos de aprendizagem da matemática, após este período, há que ter em conta a situação concreta. Por exemplo, não é claro que o segundo membro da igualdade na figura 2 com o denominador racionalizado se leia ou se compreenda melhor do que o primeiro membro, daí que racionalizar ou não racionalizar é de facto uma questão.