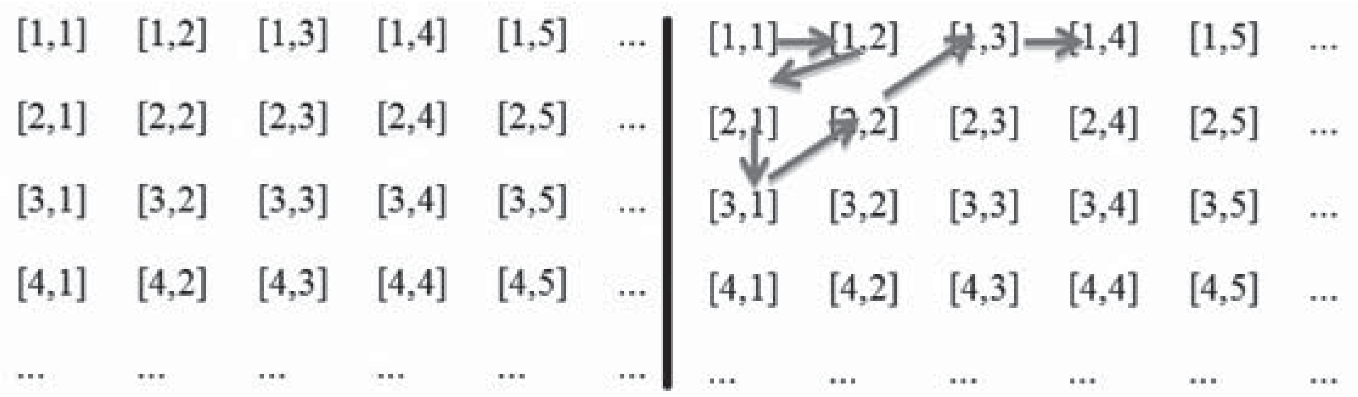
# Compadre, será que o teu hotel tem mais quartos e janelas do que o meu?

Maria do Carmo Martins*




Da última vez que escrevi neste espaço, prometi levar-vos numa fascinante viagem ao hotel infinito de Hilbert. Sei que na atual crise económica não é prudente qualquer devaneio turístico, mas como o prometido é devido, eis-me a tentar explicar um desafio que ficou em banho-maria desde dezembro e que consistia em resolver o seguinte enigma: se um hotel tiver um número infinito de quartos e cada quarto possuir um número infinito de janelas, será que existem mais quartos do que janelas?

É de realçar que tal hotel com infinitos quartos, todos ocupados é apenas uma quimera, mas serve na perfeição para ilustrar alguns conteúdos matemáticos. Permitam-me, antes de responder à questão, (alguns vícios de professor são de bradar aos céus!) colocar outros dois problemas, porventura mais simples, que ajudarão a perceber algumas das propriedades paradoxais do dito hotel.

Primeiro, admitindo que o hotel tem os quartos todos ocupados, como fazer para alojar um novo hóspede? Ora, como o hotel é infinito, basta pedirmos ao hóspede do quarto 1 para passar para o quarto 2, ao do quarto 2 para passar para o 3 e assim sucessivamente. No final de todas as mudanças, o quarto 1 ficará livre e alojamos o novo hóspede neste quarto. Assunto resolvido! Note o leitor que não procedemos realojando o hóspede do quarto N no quarto N+1, o do quarto N-1 no quarto N e continuamente até que alojaríamos o hóspede do quarto 1 no quarto 2, porque, embora no final desta operação o quarto 1 ficasse também livre, o facto de falarmos do quarto N levar-nos-ia a assumir que o hotel tem um número finito de quartos (N), o que contraria a hipótese inicial de existirem infinitos quartos. Subtil?

Segundo, imaginemos agora que em vez de um hóspede chega um número infinito de hóspedes. Trabalhos redobrados, para o rececionista! Como proceder para os acomodar? A solução passa por transferir o hóspede do quarto 1 para o quarto 2, o do quarto 2 para o 4, o do 3 para o 6 e assim por diante, ou seja, cada hóspede passa a ocupar o quarto cujo número corresponde ao dobro do número do seu antigo quarto. Assim sendo, os quartos com número ímpar ficam livres, pois nenhum número ímpar é o dobro de algum número inteiro. Esta operação de realojamento deixa livre uma infinidade de quartos (os correspondentes aos números ímpares), e assim podemos alojar o tal número infinito de hóspedes.

Em suma, resolvemos dois problemas do mundo da hotelaria. Mas qual o contributo desta metáfora para a matemática? Com o primeiro problema percebemos como lidar com quantidades infinitas, em especial, que não se pode supor que existem N elementos: ao enunciar o número, estamos a definir um número de elementos (cardinal) finito. O segundo é mais interessante. O leitor lembra-se de ter aprendido o conjunto dos números naturais e de, mais tarde, os números negativos (...,-3, -2, -1), os quais deram algumas dores de cabeça nos problemas de aritmética. Ao conjunto que inclui inteiros negativos, zero e positivos dá-se o nome de conjunto dos números inteiros relativos. Pois bem, o que se pretendeu "provar" (informalmente) é que existem tantos números inteiros relativos, quantos os naturais. Para tal, basta acomodar os naturais nos números pares e os negativos nos números ímpares, tal como ilustrámos com a chegada de um número infinito de hóspedes (que representam os números negativos) e que arranjámos espaço para os colocar no hotel (que representa os números naturais).

Passemos agora ao problema principal deste artigo: contar quartos e janelas. Para percebermos a estratégia de resolução do problema, vamos primeiro arranjar uma forma de identificar os quartos e as janelas do hotel de Hilbert. Considere-se o esquema representado no lado esquerdo da figura, que é apresentada neste artigo.

A ideia é que cada linha representa um quarto e as suas janelas. Assim, a primeira linha representa as janelas do primeiro quarto: [1,1] corresponde à primeira janela do primeiro quarto, [1,2] corresponde à segunda janela do primeiro quarto, e assim para a infinidade de janelas do primeiro quarto. Por sua vez, a segunda linha numera as janelas do segundo quarto. Então, [2,1] será a primeira janela do segundo quarto e assim sucessivamente. Note o leitor que além de cada linha ser infinita (por causa do número infinito de janelas), também existe um número infinito de linhas (por causa do número infinito de quartos). Pergunta: será o número de quartos igual ao número de janelas? Por outras palavras, será o conjunto dos naturais suficientemente grande para enumerar todas as janelas? Em termos matemáticos, será o conjunto das janelas enumerável? Ou ainda, existirá uma bijeção entre as janelas deste hotel e os naturais?

Vamos lá então meter mãos à obra. Primeira abordagem: fazer corresponder cada elemento da primeira linha a um número inteiro não negativo. Por exemplo, ao seguirmos na horizontal, fazemos corresponder [1,1] ao número 0, [1,2] corresponde ao número 1, e assim por diante. Problema: esgotamos todos os números naturais positivos só com as janelas do primeiro quarto. O que não é de estranhar, pois existe uma infinidade de janelas no primeiro quarto. Então e como enumerar as outras? Parece que existem mais janelas do que quartos! Mas não vamos desistir já! Segunda abordagem: fazer corresponder cada elemento da primeira coluna a um natural. Assim, percorrendo verticalmente o esquema, [1,1] corresponde a 0, [2,1] corresponde a 1, e assim consecutivamente. Problema: esgotamos todos os naturais só com a primeira janela de todos os quartos do hotel. Novamente não é de estranhar, pois existe uma infinidade de quartos. Isto não está fácil. Será que existem mais janelas do que quartos? Ia de encontro à nossa intuição... Mas, por outro lado, aquele esquema que apresentámos parece-nos suficiente para identificar (enumerar) todas as janelas. Então como estabelecer a correspondência?

O matemático, de origem alemã, Georg Cantor veio mostrar-nos, de forma notável, que de facto existem tantas janelas quantos quartos. Mas que relação encontrou ele? Usou um argumento muito simples, mas que ninguém até então havia pensado: percorreu o esquema em diagonal, com extremidades na primeira linha e na primeira coluna, obtendo sempre uma diagonal finita. O esquema, apresentado no lado direito da figura anexa a este artigo, ilustra a forma como Cantor percorreu as janelas dos quartos.

Assim, [1,1] corresponde a 0, [1,2] corresponde a 1, [2,1] corresponde a 2, [3,1] corresponde a 3, [2,2] corresponde a 4, e assim por diante. O leitor pode utilizar o esquema descrito e comprovar que [3,2] corresponde ao número 8, ou que o número 12 corresponde a [3,3]. Procedendo desta forma Cantor foi capaz de emparelhar as janelas dos quartos com os números naturais e assim determinar que existem tantas janelas quantos quartos.

Mas porque ia Cantor dedicar-se a hotéis infinitos? Na verdade, apelando mais um pouco à memória (ou imaginação) do leitor, a seguir aos inteiros relativos vinha o conjunto das frações, conhecido por conjunto dos números racionais. Pois bem, o hotel infinito de Hilbert é uma forma, se quisermos, lúdica de apresentar o conjunto dos números racionais, ou seja, o conjunto dos números que se escrevem como a razão (divisão) entre dois números inteiros. São exemplos, 3/2 (três meios), 5/4 (cinco quartos) e 7/1 (sete). Portanto, Cantor determinou que o conjunto dos números racionais era enumerável e por conseguinte tinha um cardinal igual ao dos números naturais. Caros matemáticos, existe uma bijeção entre o conjunto dos racionais e o conjunto dos naturais. Surpreendidos? A fórmula (da função) apresentada por Cantor é um pouco mais complicada do que a explicação que aqui dei, pois tem em conta as frações equivalentes.

Espero ter dado assunto para algumas conversas entre compadres, esclarecendo o misterioso problema do hotel infinito de Hilbert e apresentei argumentos para raciocinar sobre a comparação de conjuntos infinitos. Os ossos do ofício, permitem-me, em tom de despedida, deixar-vos mais uma questão: será que existem conjuntos com mais elementos do que os naturais? Ou serão os naturais os únicos números que realmente interessam e todos os outros são apenas formas diferentes de os representar?

Termino brindando à amizade (e porque não também à matemática) que se celebra nestas ilhas encantadas na forma dos encontros entre amigos, amigas, compadres e comadres.

Professora do Departamento
de Matemática
da Universidade dos Açores
mika@uac.pt