Contando infinitos ou de como Cantor enganou o próprio Sísifo

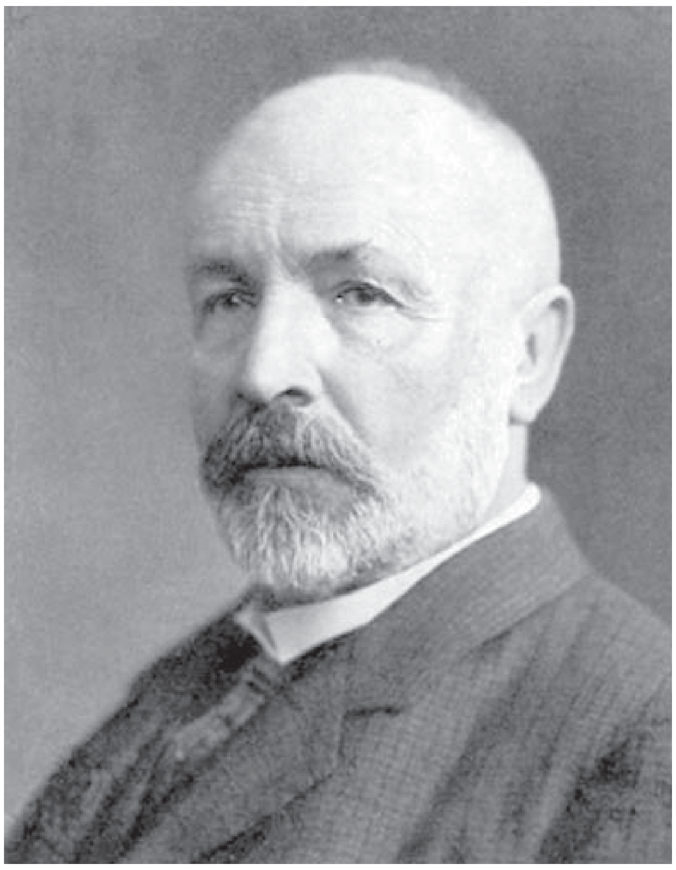
Maria do CarmoMartins*

No meu artigo de 19 de Dezembro neste jornal com o título "o Infinito" deixei ao leitor alguns desafios, porventura paradoxais, de raciocinar sobre conjuntos. A recordar, perguntei qual dos conjuntos tinha mais elementos: (1) o conjunto dos números positivos pares, ou seja, o conjunto formado pelos elementos 2, 4, 6, 8, ... ou o conjunto de todos os números inteiros positivos, 1, 2, 3, 4, 5, 6...; e (2) se um hotel tivesse um número infinito de quartos e cada quarto possuísse um número infinito de janelas, será que havia mais quartos do que janelas? Hoje proponho-me a explorar a primeira questão e num futuro próximo levar-vos-ei a uma fascinante viagem ao hotel infinito de Hilbert.

Acredito que o calor das reuniões familiares e sociais da quadra natalícia não tenha proporcionado qualquer tempo para indagar estes tópicos, até porque, nestas ocasiões as questões de barriga sobrepõem-se às de espírito e não sobra tempo (nem paciência) para divagações sobre o infinito.

Seguindo o senso comum, em particular que o todo é maior (ou igual) do que a soma das partes, não haverá dúvidas em afirmar que existem mais números inteiros do que números pares e que mais janelas do que quartos. Assunto resolvido! Mas, se pensarmos com um pouco mais de cuidado, há uma infinidade de números pares e uma infinidade de números inteiros positivos. Para o comprovar podemos fazer o seguinte jogo: por maior que seja o número par que eu indique, o leitor consegue sempre fornecer-me um número par maior do que aquele que referi. Para tal basta adicionar dois ao número que indiquei. O mesmo acontece para os número inteiros positivos e por isso dizemos que estes conjuntos são infinitos. Mas como determinar qual destes infinitos é maior? Fará sequer sentido comparar dois infinitos? Neste artigo irei apresentar alguns argumentos que ajudarão o leitor a raciocinar sobre este tipos de questões.

Antes de avançarmos na discussão sobre o número de elementos de conjuntos infinitos, vamos começar pela base: a noção de conjunto. Um conjunto representa uma coleção de elementos que têm algum tipo de afinidade, como por exemplo, o conjunto das ilhas Açorianas ou o conjunto dos números inteiros. O primeiro é composto por nove ilhas, e diz-se um conjunto finito; o segundo, como já avançámos anteriormente, é infinito. Vamos deter-nos primeiro sobre os conjuntos finitos, que são aqueles que estamos mais habituados a lidar no nosso dia-a-dia. A comparação do número de elementos de conjuntos finitos parece trivial: determina-se o número de elementos de cada um e depois verifica-se qual o maior. Por exemplo, o conjunto de ilhas do arquipélago de Cabo Verde (dez) tem mais elementos do que o conjunto de ilhas Açorianas (nove). Os números que designam a quantidade de elementos que compõem um conjunto chamam-se "números cardinais". (Confronte-se com os números que indicam a ordem em que determinados elementos se encontram os números ordinais: primeiro, segundo, ...).



David Hilbert: "Ninguém nos poderá expulsar do paraíso que Cantor nos criou"

Em vez de se contar explicitamente os elementos de cada conjunto, podemos proceder de outra forma. Tome-se como exemplo um estádio de futebol repleto de espectadores a assistirem a um emocionante dérbi. Não é necessário saber a capacidade do estádio ou o número de espectadores para se determinar se há mais lugares do que adeptos ou vice-versa; basta verificar que se existem cadeiras livres, então é porque há mais lugares do que espectadores. Se o estádio estiver completo e ainda pessoas à porta a querer entrar, é porque existem mais espectadores do que lugares. Felizmente que a liga de futebol ainda nos facilita mais a tarefa e utiliza bilhetes para acesso ao estádio. Assim, basta-nos verificar se sobraram bilhetes para serem vendidos ou se estes se esgotaram havendo ainda pessoas a querer comprar um bilhete.

Interessante, reduzimos a comparação do número de elementos de dois conjuntos (o dos espectadores e dos lugares no estádio) a verificar se há bilhetes disponíveis ou pessoas a quererem comparar o que já não existe. Mas porque será que se pode proceder assim? Um bilhete estabelece uma associação entre um espectador e um lugar no estádio. O conjunto de todas estas associações define uma relação entre os espectadores e os lugares do estádio. Se esta relação fizer corresponder a cada espectador uma cadeira (função), se não houver mais do que um espectador sentado na mesma cadeira (injeção) e se todas as cadeiras tiverem uma pessoa sentada (sobrejeção), então podemos concluir que existem tantos espectadores como cadeiras, porque conseguimos emparelhar cada espectador com uma cadeira e vice-versa. Este tipo de relações designam-se em matemática por bijeções—funções injetivas e sobrejetivas. E este é um outro método para comparar o número de elementos de dois conjuntos: arranjar uma bijeção entre os seus elementos, ou seja, encontrar uma correspondência biunívoca entre os elementos de ambos os conjuntos.

Esta abordagem para a comparação da cardinalidade de conjuntos foi proposta no final do século XIX pelo matemático russo de origem alemã Georg Cantor (1845–1918) (imagem extraída da Wikipédia). A parte interessante é que esta abordagem dá para raciocinarmos sobre conjuntos com um número infinito de elementos. Senão, como procederíamos para contar quantos elementos tem um conjunto infinito? E levaríamos um tempo infinito para os contar? O pior é que sempre que estivéssemos quase a chegar ao fim, novos elementos (na verdade uma infinidade deles) apareciam para nos atrapalhar as contas. Seria outro trabalho digno para o castigo de Sísifo , que na mitologia grega enganou a morte, duas vezes, e recebeu um castigo para toda a eternidade: em vez de rolar uma pedra de mármore montanha acima para toda a eternidade, contar números que aparecem para todo o sempre ao menos tem a vantagem de ser menos monótono, pois os números são sempre diferentes.

Vamos então exemplificar a técnica com o primeiro desafio que vos coloquei: terá o conjunto de números inteiros positivos mais elementos do que o conjunto dos números pares? Ora os dois conjuntos são: N0 = {1, 2, 3, 4, 5, 6,...} e P = {2, 4, 6, 8, 10, 12, ...}. A função dobro, que a cada inteiro positivo faz corresponder o seu dobro permite relacionar os elementos dos conjuntos N0 e P, não deixando de fora qualquer número inteiro, nem qualquer número par. Veja-se que 2 x 1 = 2, 2 x 2 = 4, 2 x 3 = 6, ..., ou seja, para cada inteiro somos sempre capazes de encontrar um par (basta multiplicar este número por 2) e para cada par conseguimos sempre encontrar um inteiro positivo (basta dividir o número par por 2). Desta forma, fomos capazes de encontrar uma bijeção entre os dois conjuntos—a função dobro—e de acordo com a argumentação de Cantor estes dois conjuntos, embora com um número infinito de elementos, têm o mesmo cardinal. Cantor utilizou a primeira letra do alfabeto hebraico, (que se pronuncia como "áléf"), para representar cardinalidades infinitas e usou 0 para designar o cardinal dos conjuntos que têm tantos elementos como o conjunto dos inteiros positivos, que ele chamou de conjuntos enumeráveis (que se podem contar).

A comunidade matemática da época ficou reticente e mostrou-se céptica em relação aos conceitos matemáticos inovadores que Cantor propôs. Contudo, hoje em dia o trabalho desenvolvido por Cantor na teoria de conjuntos é reconhecida e considerado muito importante. As palavras do matemático alemão David Hilbert (1862-1943): "ninguém nos poderá expulsar do paraíso que Cantor nos criou" ilustram a satisfação e o grande passo que foi dado na altura pelo trabalho de Cantor.

*Professora do Departamento de Matemática da Universidade dos Açores
mika@uac.pt