

# Mecànica de fluids i termodinàmica

Javier Cervera Montesinos  
Marcel I. Aguilera Arzo  
Santiago E. Gómez Hernández

# Mecànica de fluids i termodinàmica

Javier Cervera Montesinos

Marcel I. Aguilera Arzo

Santiago E. Gómez Hernández



ENGINYERIA TÈCNICA EN DISSENY INDUSTRIAL

■ Codi d'assignatura 502

**U**NIVERSITAT  
**J**AUME • I

Edita: Publicacions de la Universitat Jaume I. Servei de Comunicació i Publicacions  
Campus del Riu Sec. Edifici Rectorat i Serveis Centrals. 12071 Castelló de la Plana  
<http://www.tenda.uji.es> e-mail: [publicacions@uji.es](mailto:publicacions@uji.es)

Col·lecció Sapientia, 43  
Primera edició, 2010  
[www.sapientia.uji.es](http://www.sapientia.uji.es)

ISBN: 978-84-693-5548-0



Aquest text està subjecte a una llicència Reconeixement-NoComercial-Compartir Igual de Creative Commons, que permet copiar, distribuir i comunicar públicament l'obra sempre que especifique l'autor i el nom de la publicació i sense objectius comercials, i també permet crear obres derivades, sempre que siguin distribuïdes amb aquesta mateixa llicència.

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/es/deed.ca>

# Índex

<b>Presentació</b>	iv
<b>1 Mecànica de fluids</b>	<b>1</b>
1.1 Forces intermoleculars . . . . .	1
1.2 Fluids. Definició i propietats generals . . . . .	4
1.2.1 Hipòtesi de continu. Densitat . . . . .	4
1.2.2 Definició de fluid . . . . .	5
1.2.3 Pressió i compressibilitat . . . . .	6
1.2.4 Viscositat . . . . .	9
1.2.5 Tensió superficial . . . . .	11
1.2.6 Pressió de vapor . . . . .	15
1.3 Estàtica de fluids . . . . .	19
1.3.1 Forces superficials i volúmiques . . . . .	19
1.3.2 Equació fonamental . . . . .	19
1.3.3 Mesura de la pressió . . . . .	23
1.3.4 Principi de Pascal . . . . .	25
1.3.5 Flotació. Principi d'Arquímedes . . . . .	27
1.3.6 Efectes de la tensió superficial . . . . .	30
1.4 Cinemàtica de fluids . . . . .	36
1.4.1 Representació del camp de velocitats . . . . .	37
1.4.2 Tipus de règims . . . . .	38
1.5 Dinàmica de fluids . . . . .	39
1.5.1 Conservació de la massa: equació de continuïtat . . . . .	39
1.5.2 Conservació de l'energia: equació de Bernoulli . . . . .	41
1.5.3 La condició de fluid incompressible . . . . .	51
1.6 Fluids viscosos . . . . .	52
1.6.1 Transició del règim laminar a turbulent . . . . .	56
1.7 Problemes . . . . .	59



<b>2</b>	<b>Termodinàmica</b>	<b>66</b>
2.1	Introducció . . . . .	66
2.1.1	Moviment tèrmic i energia tèrmica . . . . .	66
2.2	Sistemes i interaccions termodinàmiques . . . . .	70
2.2.1	Principi General de la Termodinàmica . . . . .	72
2.2.2	Variables d'estat . . . . .	73
2.2.3	Equacions d'estat . . . . .	74
2.2.4	Processos termodinàmics . . . . .	75
2.3	Temperatura . . . . .	78
2.3.1	Temperatura empírica . . . . .	79
2.4	Sistemes en equilibri termodinàmic . . . . .	86
2.4.1	Líquids i sòlids . . . . .	87
2.4.2	Gasos . . . . .	92
2.5	Treball i calor . . . . .	94
2.5.1	Treball . . . . .	95
2.5.2	Calor . . . . .	98
2.6	Primer Principi de la Termodinàmica . . . . .	112
2.6.1	L'experiència de Joule . . . . .	112
2.6.2	Treball adiabàtic . . . . .	113
2.6.3	Formulació del Primer Principi . . . . .	114
2.6.4	Capacitat tèrmica . . . . .	115
2.6.5	Processos isoterms . . . . .	116
2.6.6	Processos adiabàtics . . . . .	118
2.7	Segon Principi de la Termodinàmica . . . . .	121
2.7.1	Necessitat d'un Segon Principi . . . . .	121
2.7.2	Màquines tèrmiques. Energia aprofitable . . . . .	122
2.7.3	Cicle de Carnot . . . . .	125
2.7.4	Refrigeradors i bombes de calor . . . . .	129
2.8	Problemes . . . . .	131
<b>A</b>	<b>Introducció a wxMaxima</b>	<b>140</b>
A.1	Instal·lació de wxMaxima . . . . .	140
A.1.1	Instal·lació en Linux . . . . .	141
A.1.2	Instal·lació en Windows . . . . .	142
A.2	Execució de l'aplicació . . . . .	142
A.3	Ajuda en línia . . . . .	143
A.4	Instruccions elementals . . . . .	144
A.5	Equacions i sistemes d'equacions . . . . .	146

A.6	Simplificar expressions i substituir valors . . . . .	147
A.7	Derivades, integrals i equacions diferencials . . . . .	149
A.7.1	Derivades . . . . .	149
A.7.2	Integrals . . . . .	150
A.7.3	Equacions diferencials . . . . .	151
A.8	Gràfics . . . . .	153
A.9	Ajustament de dades . . . . .	155
<b>B</b>	<b>Problemes resolts</b>	<b>158</b>
B.1	Fluids . . . . .	158
B.2	Termodinàmica . . . . .	169

# Presentació

Teniu davant vostre el primer volum del manual de Física per a Enginyeria Tècnica en Disseny Industrial (i el futur Grau en Enginyeria en Disseny Industrial i Desenvolupament de Productes) corresponent al segon quadrimestre de l'assignatura. Aquest manual és una continuació del manual de la primera part del curs, que teniu disponible al Servei de Publicacions de la Universitat Jaume I. Pretenem que disposeu d'un recull d'apunts complet sobre l'assignatura de Física, amb la suficient qualitat perquè us simplifiqui la presa d'apunts i pugueu utilitzar d'una forma més eficaç el temps de classe.

El manual comprèn els capítols de Mecànica de Fluids i Termodinàmica. Pot utilitzar-se per a estudiar de forma autònoma però el nostre objectiu prioritari és que servisca com a material de suport de l'assignatura, que complemente les classes de teoria i problemes. Cada capítol explica els conceptes principals que s'han d'aprendre, amb l'ajuda de figures i exemples per a facilitar-ne al màxim la comprensió. Amb la finalitat que es pugui avaluar el grau d'assimilació dels conceptes, s'ha inclòs un recull de problemes amb solucions dins de cada capítol. Alguns d'aquests problemes es troben resolts als apèndixs finals. A més, al final del capítol podeu trobar unes breus referències bibliogràfiques, tant bàsiques com avançades, que us permetran aprofundir en el coneixement de cada capítol si així ho desitgeu.

Al primer apèndix podeu trobar una breu introducció al programa wxMaxima, que s'ha utilitzat en la resolució dels problemes. Aquest programa forma part de la família dels sistemes d'àlgebra computacional. En el manual l'utilitzem com una eina matemàtica que ens ajuda amb els càlculs matemàtics i ens permet concentrar-nos en els conceptes físics. En recomanem l'aprenentatge i l'ús, sense que això excloga la necessitat d'aprendre els conceptes matemàtics que s'utilitzen en la Física. Ans al contrari, resulten imprescindibles si volem fer un ús adequat d'aquesta eina.

Finalment volem agrair l'ajuda del professor José Antonio Manzanares, catedràtic de Física Aplicada de la Universitat de València. Sense la seua ajuda aquest manual no hauria estat possible.

Castelló de la Plana, 19 d'octubre de 2010

Els autors

# Mecànica de fluids

Les propietats dels fluids són la base d'una gran quantitat i varietat de dispositius. A més els fluids estan presents en tots els mitjans de transport, i són imprescindibles en els medis aeri i fluvial. Inicialment expliquem les diferències entre sòlids, líquids i gasos des del punt de vista microscòpic. Passem a continuació a establir la definició de fluid, des del punt de vista de la Mecànica, i les seues propietats bàsiques. L'estudi dels fluids en equilibri ens permet introduir el Principi de Pascal, base entre altres de l'elevador hidràulic i dels frens dels cotxes, i d'Arquímedes, amb el concepte de flotabilitat. L'estudi dels fluids en moviment comença amb la cinemàtica de fluids, on introduïm els diferents règims amb què es mouen els fluids. Finalment, la dinàmica de fluids ens permet analitzar conceptes com el cabal, important a l'hora de dissenyar circuits de canalització, i l'efecte Venturi, que és la base de diversos dispositius, com aquells que s'empren en la mesura de la velocitat del fluid.

## 1.1 Forces intermoleculares

Els materials estan formats per partícules, àtoms o molècules, en moviment continu que interaccionen entre elles. Encara que hi ha una gran varietat de forces intermoleculares, totes comparteixen una sèrie d'aspectes generals que es mostren a la figura 1.2. Quan dos partícules estan molt allunyades l'una de l'altra, la interacció entre elles és negligible. Però a mesura que les molècules s'apropen apareix una *interacció atractiva* ( $F < 0$ ). Aquesta força és la responsable que es puguin formar aglomerats estables de moltes partícules, que conformen els estats sòlid i líquid. Tanmateix, si apropem encara més les molècules, les forces es tornen repulsives ( $F > 0$ ). Això explica que es necessiten forces molt grans per a comprimir els sòlids i els líquids. Les forces intermoleculares passen d'atractives a repulsives a la distància d'*equilibri estable* entre molècules. Aquest punt assenjala la distància mitjana entre partícules en líquids i sòlids, i hi explica la seua inherent estabilitat. En canvi, en els gasos les molècules estan tan allunyades que pràcticament no interaccionen entre elles excepte quan col·lideixen. En aquest cas les molècules tenen una gran velocitat. Això fa que puguin entrar en contacte fins la zona on la força entre molècules és

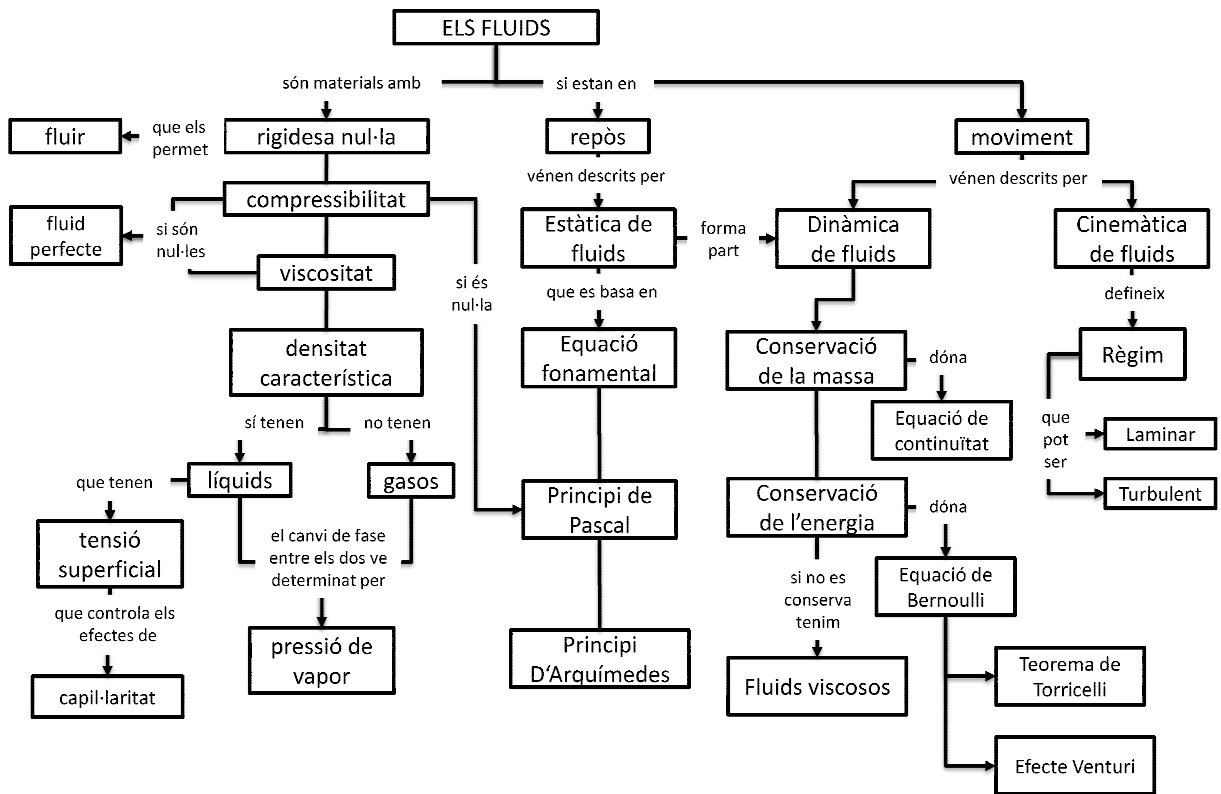


Figura 1.1: Mapa conceptual

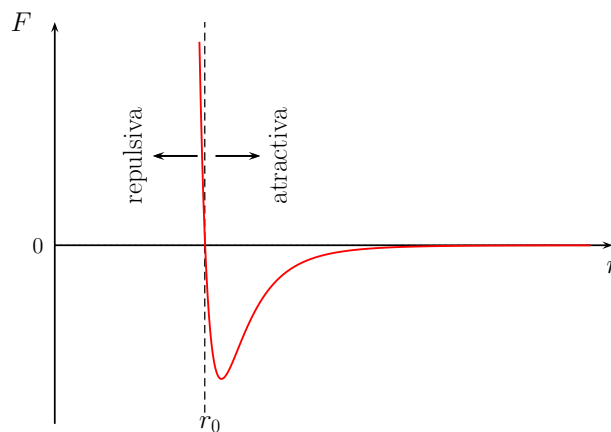


Figura 1.2: Les forces intermoleculares tenen una part atractiva ( $F < 0$ ) i una part repulsiva ( $F > 0$ ). El punt en què la força passa d'atractiva a repulsiva és la distància d'equilibri estable  $r_0$

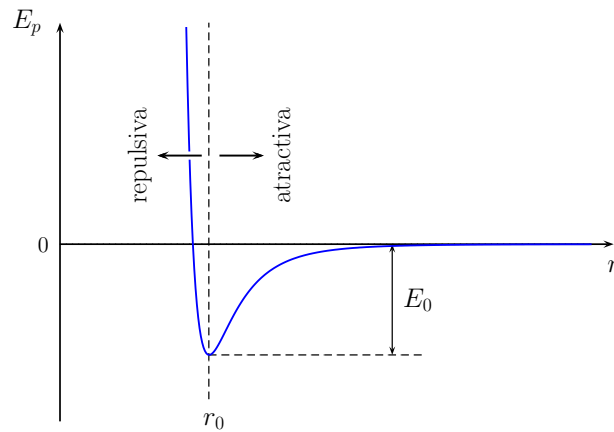


Figura 1.3: Associada a la força intermolecular  $F(r)$  està l'energia potencial  $E_p$ . Al punt d'equilibri a  $r_0$  tenim un mínim d'energia potencial de valor  $E_0$  que dona estabilitat al parell de partícules

repulsiva. Aquesta força actua durant un breu interval de temps (com una força impulsiva) i és responsable del xoc que s'hi produeix entre les molècules i que sol ser fonamentalment elàstic. Després de la col·lisió, les molècules tornen a separar-se amb una velocitat diferent de la que portaven inicialment.

Associada a les forces intermoleculars tenim l'energia potencial

$$E_p = - \int_{\infty}^r F(r') dr' \quad (1.1)$$

que es calcula com el treball necessari per a portar una molècula des de l'infinit fins a una distància  $r$  d'una altra molècula. La corba corresponent a l'energia potencial associada a la força  $F$  de la figura 1.2 es mostra a la figura 1.3. En aquest cas, el punt d'equilibri estable es correspon amb el mínim de l'energia potencial de valor  $E_0$ . Aquest valor és també l'energia necessària per a trencar el parell de molècules.

L'energia potencial deguda a les forces intermoleculars no és l'única energia que tenen les molècules. Per descriure correctament les propietats del material necessitem considerar també l'energia cinètica molecular  $E_c = (1/2)mv^2$ . L'energia cinètica mitjana de les molècules és de l'ordre de  $k_B T$ , on  $k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$  és la constant de Boltzmann i  $T$  la temperatura absoluta a la que es troba el material.<sup>1</sup> La relació entre  $E_p$  i  $E_c$  determina la fase (sòlida, líquida o gasosa) a la que es troba el material a una temperatura determinada:

<sup>1</sup>Com veurem al capítol de termodinàmica, existeix un mínim de temperatura a la que pot estar un material:  $-273.15 \text{ }^\circ\text{C}$ . Aquest punt marca el 0 de l'escala absoluta o Kelvin, que es mesura en Kelvin (K) i és igual a l'escala Celsius (la que utilitzem en el dia a dia) amb un canvi d'origen:  $T(\text{Kelvin}) = T(\text{graus Celsius}) + 273.15$ . Una temperatura de  $T = 0 \text{ K}$  es correspondria clàssicament amb una energia mitjana nul·la, és dir, els àtoms estarien en repòs.

- $E_c \gg |E_p|$ : No es poden formar parells estables de molècules. Per tant no poden formar-se agregats i el material es comporta com un gas.
- $E_c \ll |E_p|$ : Els parells moleculars no es poden dissociar i es formen agregats. Les molècules pràcticament no se separen de la seua posició d'equilibri. El material es troba en fase sòlida.
- $E_c \sim |E_p|$ : Tenim la solució intermèdia, els líquids. Les molècules s'agrupen en agregats. De forma contínua es formen parells de molècules (per causa d' $E_p$ ) i es trenquen (per causa d' $E_c$ ). Algunes molècules tenen energia suficient per a dissociar-se de la fase líquida ( $E_c > |E_p|$ ) mentre que altres queden atrapades ( $E_c < |E_p|$ ).

La relació entre les energies potencial intermolecular i cinètica mitjana determina la disposició de les molècules en el material i la seua distància intermolecular mitjana, que finalment determina la fase en què es troba el material. Als sòlids, la distribució de les molècules és regular i compacta (densa). Donat que  $E_c \ll E_p$ , les molècules pràcticament no es poden moure de la seua posició d'equilibri. Als líquids, la disposició de les molècules també és densa, però la seua llibertat de moviment és major que en els sòlids. Això fa que els líquids puguen *fluir*. Per últim, als gasos la distància intermolecular és de l'ordre de deu voltes major que als líquids. Les forces intermoleculars són tan dèbils que la seua interacció amb altres molècules del gas es redueix a les col·lisions que es produeixen entre elles o amb les molècules del recipient que conté el gas. Excepte en aquests casos, les molècules es mouen lliurement.

## 1.2 Fluids. Definició i propietats generals

### 1.2.1 Hipòtesi de continu. Densitat

Fins ara hem utilitzat el punt de vista microscòpic per a establir les diferències entre les fases sòlida, líquida i gasosa. Això ens ajudarà a entendre millor algunes propietats dels fluids i de les interfases líquid-vapor(gas). Tanmateix, per a abordar l'estudi de la mecànica de fluids utilitzarem raonaments macroscòpics. Des d'aquest punt de vista, la matèria forma un *medi continu* (dit d'una altra forma, no considerem de forma explícita les molècules que componen el material). L'aproximació de medi continu recolza en el concepte de densitat. Donat un volum  $V$  de material que té una massa  $M$ , es defineix la densitat del material com

$$\rho \equiv \frac{M}{V} \quad (1.2)$$

Perquè l'aproximació de medi continu siga vàlida, el volum ha de ser suficientment gran. Però, com de gran? El límit en la grandària del volum el fixen les fluctuacions del sistema. Si considerem un volum lleugerament diferent  $V' = V + \Delta V$ , amb  $\Delta V \rightarrow 0$ , la variació de la massa  $M' =$

substància	$\rho$ ( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )
aire (20 °C, 760 Torr)	1.2
nitrogen (0 °C, 760 Torr)	1.25
aigua	1000
etanol	789
mercuri	13540
plàstics	850–1400
suro	220–260
ferro	7874
plom	11340

Taula 1.1: Densitat per a diferents substàncies

$M + \Delta M$  ha de complir que  $M'/V' = M/V = \rho$ . Això indica que el volum ha de ser suficientment gran com perquè les fluctuacions en el nombre de molècules siguin negligibles a efectes de la densitat. El mateix passa si escollim un volum adjacent a l'inicial, la densitat de la substància no ha de variar. El límit inferior en el volum on podem definir la densitat serveix també per a definir l'element de volum infinitesimal. Aquest és un element de volum  $V \rightarrow 0$  amb una massa  $M \rightarrow 0$ , però suficientment gran per a poder definir la densitat  $\rho = M/V$  i fer un tractament continu de la matèria.

La unitat de la densitat en el sistema internacional és el  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Altres unitats com el  $\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$  són també molt comunes. La densitat dels materials depèn de la temperatura i la pressió a què es troben. Per als sòlids i els líquids esta dependència és negligible a efectes pràctics en la majoria dels casos en les condicions més habituals. En canvi, la densitat dels gasos depèn fortament d'aquestes propietats. Per això resulta imprescindible conèixer a quines condicions de pressió i temperatura s'ha mesurat la densitat d'un gas.

### 1.2.2 Definició de fluid

Suposem que agafem una rajola entre les mans i li apliquem una força tangencial en les cares superior i inferior com indica la figura 1.4. La força aplicada s'anirà transmetent per les diferents capes del material. Si la força no és massa gran, la rajola sofrirà una petita deformació. Si deixem d'aplicar la força, la rajola recobrarà la seua forma original. Aquesta «resistència» que la rajola ofereix davant la deformació s'anomena *rigidesa*. Un fluid es defineix com un material amb *rigidesa nul·la*. Dit d'una altra forma, quan a un fluid li apliquem forces tangencials (també anomenades de cisallament) es crea una deformació que creix amb el temps. És a dir, comença a



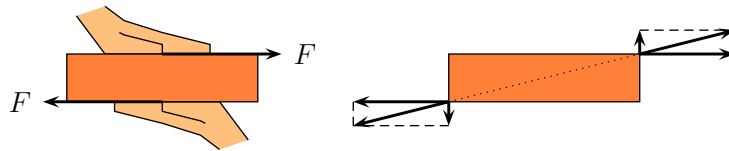


Figura 1.4: Apliquem una força tangencial en les cares superior i inferior d'una rajola (esquerra). En realitat, per a evitar que el parell de forces produísca una rotació, també s'aplica una força en les cares anterior i posterior (dreta)

*fluir*. A més, si deixem d'aplicar les forces, el fluid no recobra la seua forma original com passa amb la rajola.

La definició de fluid no indica quina és la velocitat de deformació. En aquest sentit, el vidre ha sigut considerat un fluid amb una velocitat de deformació extraordinàriament lenta, atenent al flux observat en el vidre de les finestres d'edificis antics. Actualment però, es creu que el flux està més relacionat amb els mètodes de fabricació del vidre en aquells temps que amb alguna característica intrínseca del material. Per altra banda, la qualitat de rigidesa nul·la implica que la deformació s'ha de produir per menuda que siga la força aplicada. Això exclou per exemple la pintura abans d'assecar-se, perquè en aquest cas es necessita una força mínima per produir-hi deformació.

Des del punt de vista macroscòpic que hem pres, els fluids vénen caracteritzats per una sèrie relativament reduïda de propietats com ara la densitat  $\rho$ . A més, en estudiar les propietats mecàniques dels fluids no es fa generalment distinció entre líquids i gasos perquè els dos comparteixen la característica principal que defineix un fluid: la seua capacitat de fluir. Des d'aquest punt de vista macroscòpic, la principal diferència entre un líquid i un gas resideix en què el primer té una densitat característica (a una temperatura donada) i el segon no. Un gas adquireix la forma del recipient que el conté i escapa d'aquest si no està hermèticament tancat. Un líquid també adquireix la forma del recipient però no té per què omplir-ho del tot. Si no ho fa, es forma una superfície de separació entre el líquid i el gas del recipient (figura 1.5).

### 1.2.3 Pressió i compressibilitat

Suposem un element de volum al si d'un fluid (figura 1.6). Aquest element interaccionarà amb la resta del fluid mitjançant la seua superfície. Si el fluid es troba en repòs, no pot estar sotmès a cap força de cisallament (tangencial a la superfície) perquè el faria fluir. Per tant, les interaccions entre l'element de fluid i el seu entorn es redueixen a les forces perpendiculars o normals a la superfície. L'element exercirà una força normal a la superfície sobre l'entorn i el mateix farà l'entorn amb l'element de fluid per acció/reacció. Per evitar la dependència amb la grandària de

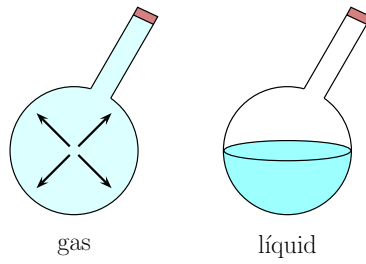


Figura 1.5: Els gasos no tenen una densitat definida i omplir completament el recipient (tancat) que els conté. Els líquids en canvi sí tenen una densitat definida i poden no omplir completament el recipient i formar una superfície de separació definida

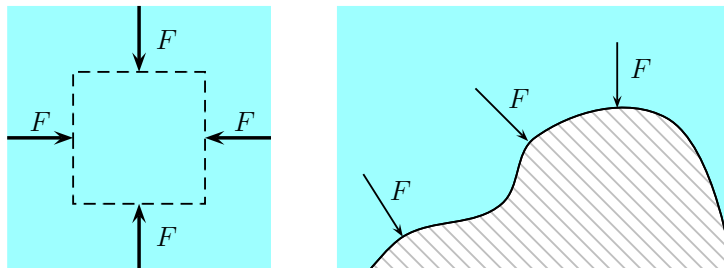


Figura 1.6: Cada element al si del fluid experimenta una força perpendicular a la seua superfície que exerceix la resta del fluid. Els fluids exerceixen sobre els cossos en contacte una força perpendicular a la superfície en cada punt (i a la inversa)

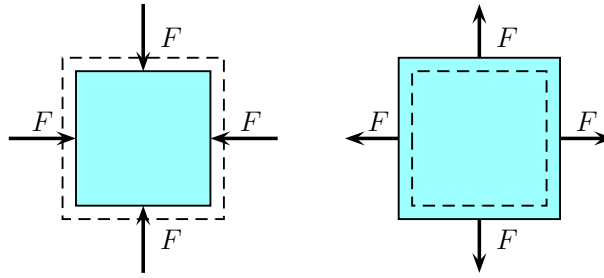


Figura 1.7: Si variem la pressió sobre un fluid (la força per unitat d'àrea) varia el volum del fluid (la seua densitat)

la superfície, definim *pressió* com aquesta força normal (en mòdul) per unitat de superfície

$$P \equiv \frac{F}{S} \quad (1.3)$$

Les unitats al sistema internacional de la pressió són els Pascals (Pa):  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ . Altres unitats molt comunes són les atmosferes ( $1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$ ), els bars i mil·libars ( $1 \text{ bar} = 10^3 \text{ mil·libars} = 10^5 \text{ Pa}$ ) i els Torr o mil·límetres de mercuri ( $760 \text{ Torr} = 1 \text{ atm}$ ).

La pressió és un escalar que ens indica la intensitat de la força (normal) que el fluid exerceix sobre cadascun dels elements de fluid que el componen i sobre els cossos amb què estiga en contacte (i a la inversa, del recipient sobre el fluid). Com que els elements de fluid tenen un volum infinitesimal, podem assignar una pressió a la posició  $\vec{r}$  del centre de cada element de fluid:  $P = P(\vec{r})$ . Diem per tant que a la posició  $\vec{r}$  del fluid hi ha una pressió  $P(\vec{r})$ .

Considerem ara un fluid dins d'un recipient. Si variem de forma homogènia la pressió que suporta un  $\Delta P$ , es produirà una variació de volum  $\Delta V$  (figura 1.7). Per quantificar quin és el canvi de volum en funció del canvi de pressió, es defineix el mòdul de compressibilitat  $B$  com

$$B \equiv -V \frac{\Delta P}{\Delta V} = -\rho \frac{\Delta P}{\Delta \rho} \quad (1.4)$$

El mòdul de compressibilitat és especialment útil en el cas dels líquids. Els sòlids són molt poc compressibles i els gasos són tan compressibles que  $B$  varia molt amb les condicions de pressió i temperatura. En els líquids,  $B$  resulta ser gran (són poc compressibles) i les seues variacions amb la pressió i temperatura no són massa grans. Per exemple, en el cas de l'aigua,  $B$  dobla el seu valor al passar d'1 atm a 3500 atm.

En general els efectes de compressibilitat només són importants en les situacions en què es produeixen grans gradients de pressió. En els líquids la densitat és aproximadament constant i podem tractar-los en la majoria dels casos com incompressibles. En el cas dels gasos, podem no tenir en compte la seua compressibilitat si els gradients de pressió no són massa grans. Com a regla general, la compressibilitat es considera important quan la velocitat del fluid excedeix en

substància	$B$ ( $\times 10^{10}$ Pa)
aigua	2.0
etanol	1.3
petroli	1.5
mercuri	2.6
ferro	10
fusta	1
coure	14
marbre	7

Taula 1.2: Coeficient de compressibilitat per a diferents substàncies

una cinquena part la velocitat del so en el fluid. Justificarem aquesta afirmació a la secció 1.5.3 quan estudiem els fluids en moviment.<sup>2</sup>

#### 1.2.4 Viscositat

La definició de fluid indica que l'aplicació d'una força de cisallament provoca el flux del fluid. No obstant això, no indica quina és la velocitat que adquireix el fluid. Per exemple, baix les mateixes condicions de cisallament, l'aigua flueix més ràpid que la mel. A més, en aplicar una força de cisallament, el fluid no es posa en moviment tot al mateix temps, sinó que ho fa progressivament. De la mateixa forma, en deixar d'aplicar la força, el flux també s'anul·la de forma seqüencial. Per a explicar aquests fenòmens, introduïm una propietat dels fluids anomenada viscositat.

Considerem el sistema mostrat a la figura 1.8. Està compost d'una porció de fluid entre dos plaques idèntiques d'àrea  $A$  que estan separades una distància  $d$ . A una de les plaques li apliquem una força  $F$  en el sentit de les  $x$  positives mentre que l'altra es manté fixa (li apliquem la mateixa força però en sentit contrari). Si la força aplicada no és massa gran, la reacció del fluid fa que la placa arribi a una velocitat límit constant  $v_0$  (és a dir, el moviment de la placa no té acceleració encara que està sotmesa a una força constant). Això vol dir que la reacció del fluid compensa la força aplicada. Aquesta reacció és deguda a la viscositat del fluid. La força de cisallament exercida per les plaques es transmet per tot el fluid. Per veure com es realitza la transmissió, dividim el fluid en diferents capes que llisquen unes sobre altres. La capa de fluid

<sup>2</sup>Aquesta regla general només és una guia però no hem de considerar-la vàlida en tots els casos sinó que, per a cada cas concret, hem de considerar les seues característiques pròpies. Per exemple, als estudis de l'atmosfera la densitat de l'aire varia amb l'altura i fa que siga necessari incloure la compressibilitat dels gasos encara que l'aire estiga en repòs o la seua velocitat siga baixa.

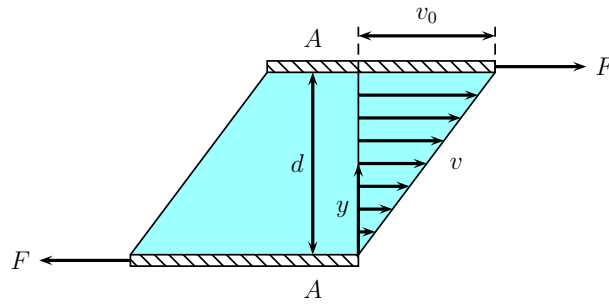


Figura 1.8: La força que hem d'aplicar per a moure la placa superior a una velocitat  $v$  és proporcional a la velocitat  $v$ , l'àrea  $A$  de les plaques i la distància  $d$  entre aquestes

en contacte amb la placa en moviment es veu arrossegada per aquesta i acaba movent-se amb velocitat  $v_0$ . Aquesta capa interacciona amb la capa de fluid que té immediatament baix i la fica en moviment. Successivament, cada capa adquireix una velocitat i provoca el moviment de la de baix en interaccionar amb ella. D'aquesta forma, el moviment es va transmetent entre les diferents capes fins arribar a la capa de fluid que està en contacte amb la placa en repòs, és a dir, amb velocitat nul·la. En alguns fluids, la força  $F$  per unitat d'àrea  $A$  és proporcional al gradient de velocitat  $dv/dy$  (és a dir, a la diferència de velocitats entre plaques successives)

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{dv}{dy} \quad (1.5)$$

El factor de proporcionalitat  $\eta$  és una propietat del fluid anomenada *viscositat*. L'equació (1.5) es denomina llei de Newton de la viscositat. En aplicar aquesta relació al problema de la figura 1.8, obtenim el gradient lineal de velocitats

$$v(y) = v_0 \frac{y}{d} \quad (1.6)$$

com de fet mostra la figura. La relació entre la força  $F$  i la velocitat  $v_0$  de la placa és

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{v_0}{d} \quad (1.7)$$

Resulta evident per l'equació (1.7) que, conforme major siga la viscositat  $\eta$  del fluid, menor serà la velocitat  $v_0$ .

La unitat de mesura del coeficient de viscositat és el  $\text{Pa} \cdot \text{s}$ . Per tradició també s'utilitza el poise:  $1 \text{ Pa} \cdot \text{s} = 10 \text{ poise}$ .

L'equació (1.5) (amb  $\eta$  constant) és una relació empírica que no compleixen tots els fluids sinó només els anomenats fluids *newtonians*. Fluids molt comuns com l'aire i l'aigua ho són. Hi ha d'altres, però, on la viscositat depèn de la intensitat de la força de cisallament, que s'anomenen fluids *no newtonians* (figura 1.9). Els efectes de la viscositat són importants on ho són les forces de cisallament, com en el contacte del fluid amb el recipient o amb un objecte que es trobe immers

substància	$\eta$ ( $\times 10^{-3}$ Pa·s)
aire	0.018
hidrogen	0.009
oxigen	0.020
aigua	1.0
etanol	1.2
mercuri	1.6
oli d'oliva	8.4

Taula 1.3: Viscositat a 20 °C per a diferents substàncies

en el fluid. En altres casos, com a una canonada ampla, podem negligir els efectes viscosos. Els fluids amb una viscositat nul·la s'anomenen *fluids ideals* i, si a més són incompressibles, s'anomenen *fluids perfectes*. Encara que no existeix cap fluid ideal ni, evidentment, perfecte, diem que un fluid real es *comporta* com un fluid ideal o perfecte baix certes condicions de flux. En aquest cas atribuïm les característiques *ideal* i *perfecte* no al fluid sinó al flux. És a dir, un fluid flueix idealment si els efectes de la viscositat són negligibles, i flueix de forma perfecta si a més els efectes de la compressibilitat també són negligibles.

**Interpretació microscòpica.** En els gasos, on les molècules interaccionen molt dèbilment, l'efecte de la viscositat té a veure principalment amb l'intercanvi de molècules entre capes. Quan tenim dos capes adjacents amb velocitats diferents, les molècules de la capa amb major velocitat poden passar a l'altra capa i produir-hi un augment de la velocitat mitjana per les col·lisions. De la mateixa forma, si la molècula que passa té una velocitat menor que les que formen la capa, aquesta produirà una disminució de la velocitat mitjana.

En el cas dels líquids hem de considerar a més la interacció intermolecular. De fet, la influència entre les diferents capes es produeix principalment per l'atracció entre les molècules de les diferents capes més que pel seu intercanvi. Les diferents formes de les interaccions intermoleculars fan que la dependència entre  $F/A$  i el gradient de velocitats no siga lineal en tots els casos, sinó només en els fluids newtonians.

### 1.2.5 Tensió superficial

Com havíem indicat anteriorment, al contrari que en els gasos, en els líquids les partícules interaccionen fortament. Això fa que tinguem una densitat característica i mostren una superfície definida. Suposem un sistema format per una fase líquida en contacte amb una fase vapor. Cada

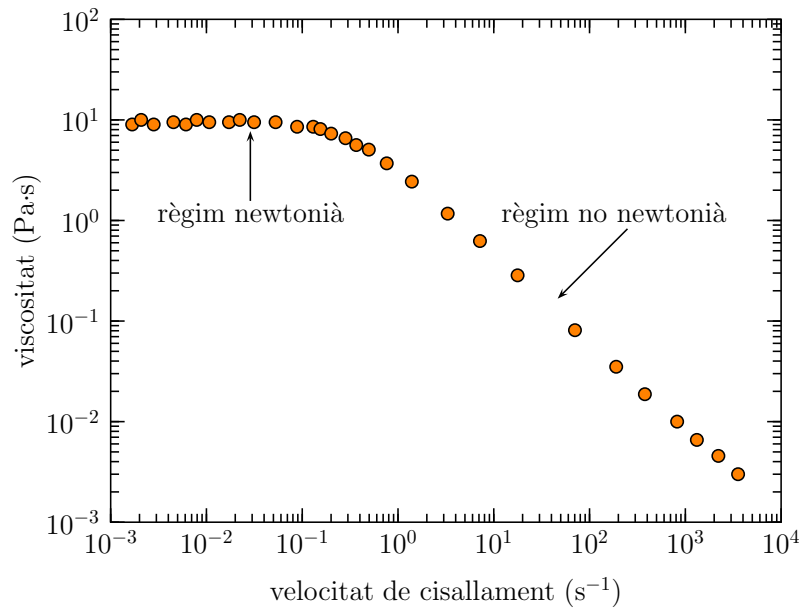


Figura 1.9: En un fluid no newtonià la viscositat depèn de la intensitat de la força de cisallament. La figura mostra la viscositat en funció de la velocitat de cisallament, que és proporcional a la força de cisallament que exerceix l'aparell de mesura, per a un fluid orgànic utilitzat en la indústria alimentària (una dissolució de goma de xanté al 2.4% en massa). Podem observar que per a valors baixos de la força de cisallament es comporta com un fluid newtonià però que, per a valors alts, la viscositat comença a baixar



Figura 1.10: Efectes de la tensió superficial. Tot i ser més densa que l'aigua, la moneda no s'afona (fotografia de Roger McLassus). La gota d'aigua adquireix forma esfèrica sobre una superfície hidròfoba quan és suficientment menuda com perquè els efectes gravitatoris siguin negligibles (fotografia de Michael Apel)

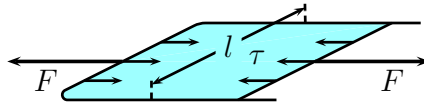


Figura 1.11: Aparell per a mesurar la tensió superficial  $\sigma$  d'un líquid. A la figura s'han dibuixat esquemàticament les forces en la superfície del líquid que estan en contacte amb el bastidor. La màxima força que es pot aplicar sense trencar la làmina determina el valor de  $\sigma$

molècula que es troba al si del líquid està sotmesa a una energia potencial mitjana  $E_p < 0$ , creada per les altres molècules de la fase líquida. En canvi, en les molècules de la fase vapor, l'energia potencial és nul·la donat que interaccionen molt dèbilment entre elles. A la superfície del líquid tenim la situació intermèdia. L'entorn de cada molècula és diferent al que trobem al si del fluid o al si del gas. En aquesta zona les molècules estan sotmeses a una energia potencial major que al si del fluid però menor que zero, que és l'energia potencial a la fase vapor. Això fa que la superfície es comporte com una *membrana sotmesa a tensió*. Els insectes, per exemple, poden aprofitar aquesta propietat per a romandre sobre la superfície de l'aigua, sense penetrar en el fluid, en produir-hi una deformació. Aquesta propietat també és responsable de que les gotes d'aigua siguin esfèriques quan la interacció gravitatòria és negligible, donat que la superfície es minimitza perquè l'energia del sistema siga mínima.

Considerem ara l'aparell mostrat a la figura 1.11. Està format per una part fixa i una part mòbil (bastidor) que encerclen una fina làmina de líquid. Aquesta presenta dos superfícies de separació amb l'aire (dalt i baix). Les interaccions entre les molècules del líquid i entre aquestes i el filferro que forma l'aparell impedeixen que l'acció de la gravetat provoqui la seua caiguda. Apliquem a la part mòbil de l'aparell una força  $F$  que provoca el moviment del bastidor. La interacció de les molècules del líquid amb el bastidor porta a l'aparició d'una força  $\tau$  que tracta d'impedir l'augment de la superfície i, per tant, que més molècules del líquid passen del si del líquid a la superfície. Aquesta tensió és igual a la força aplicada i de sentit contrari

$$\tau = F \quad (1.8)$$

Existeix una força màxima que podem aplicar sense que la pel·lícula d'aigua es trenque. Aquest punt es correspon a la tensió màxima que exerceixen les molècules del líquid i resulta ser proporcional a la longitud  $l$  del bastidor

$$\tau = 2\sigma l \quad (1.9)$$

En l'equació anterior, el número 2 prové del fet que tenim dos superfícies i  $\sigma$  és un paràmetre que depèn del líquid i que s'anomena *tensió superficial*. La tensió superficial depèn de les interaccions de curt abast entre les molècules del líquid i el bastidor. La mobilitat de les partícules en el fluid a més fa que, al contrari del que passaria amb un sòlid elàstic, no depenga de la grandària



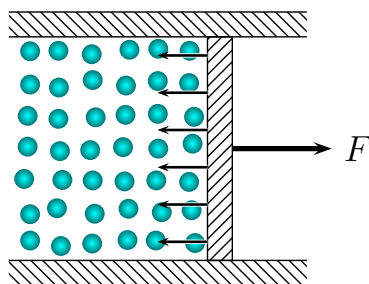


Figura 1.12: Dibuix esquemàtic de les partícules del líquid que intervenen en l'aparició de la tensió superficial. Només intervenen unes poques capes de partícules, el que fa que siguin forces de curt abast

líquid	$\sigma$ ( $\times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ )
aigua	73.1
etanol	22.8
cloroform	27.1
acetona	23.7
mercuri	435.5

Taula 1.4: Tensió superficial de diversos líquids en contacte amb l'aire a 20 °C

de la superfície.<sup>3</sup> Per a tractar d'entendre millor què significa això observem la figura 1.12 on s'han representat de forma esquemàtica les partícules que conformen el líquid. La interacció microscòpica que resulta en la tensió superficial només s'estén a unes quantes capes de fluid. En augmentar la superfície es produeix un moviment de partícules des del si del fluid cap a la superfície. No obstant això, el nombre de partícules que intervenen en la tensió amb què el fluid actua sobre el bastidor no canvia.

El desplaçament de la part mòbil de l'aparell en aplicar-li la força  $F$  fa que l'àrea de la làmina de fluid augmente. Per produir-hi aquesta variació d'àrea, la força  $F$  fa un treball

$$W = F\Delta x = 2\sigma l\Delta x = 2\sigma\Delta A \quad (1.10)$$

on  $\Delta x$  és el desplaçament lateral del bastidor i  $\Delta A$  és l'augment de la superfície de la làmina que provoca. Per tant, la tensió superficial es pot interpretar com l'energia per unitat d'àrea necessària per a variar la superfície del líquid. Així mateix, podem assignar l'energia de la superfície  $A$  al treball necessari per a crear-la,  $\sigma A$ . Això explicaria la forma esfèrica de les gotes d'aigua en absència d'efectes gravitatoris. Com que l'augment d'àrea té una penalització energètica, la forma que tenen és la que dóna una menor superfície per volum.

<sup>3</sup>Compareu per exemple amb la força elàstica d'una molla que depèn de l'extensió de la molla.

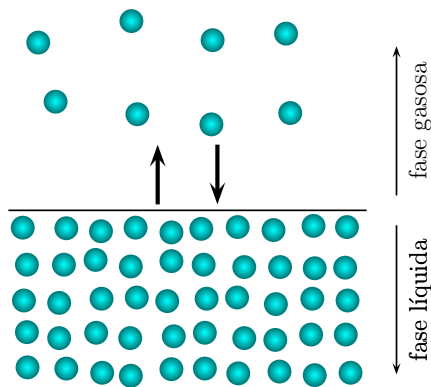


Figura 1.13: Entre la fase gasosa i la líquida es produeix un intercanvi de partícules. En aquest intercanvi hi ha un transport net de partícules cap a la fase vapor quan la pressió d'aquesta és menor que la pressió de vapor ( $P < P_v$ ) i cap a la fase líquida quan és major ( $P > P_v$ ). Quan s'assoleix l'equilibri dinàmic el transport net és nul ( $P = P_v$ )

La tensió superficial disminueix fortament amb la temperatura (que suposa un augment de l'energia cinètica de les molècules). També es veu afectada per la presència d'impureses, que modifica l'entorn de les molècules de la superfície. Aquest és el principi de les substàncies *tensioactives*, que produeixen una forta disminució de la tensió superficial. Els detergents són elements tensioactius que tenen la funció de disminuir la tensió superficial de l'aigua, facilitant el llavat de la roba.

### 1.2.6 Pressió de vapor

Si omplim un got d'aigua i el deixem una nit en una taula, al matí següent descobrirem que el nivell ha baixat. Diem aleshores que part de l'aigua s'ha *evaporat* però, en què consisteix el fenomen de l'evaporació?

Des d'un punt de vista microscòpic vam veure que les molècules d'aigua tenen una velocitat mitjana, origen de la seua energia cinètica. No obstant això, no totes les molècules tenen la mateixa velocitat. Algunes de les molècules d'aigua que arriben a la superfície tenen una velocitat superior a un llindar que fa que puguen escapar de la fase líquida i passar a formar part del gas. De la mateixa forma, algunes molècules de la fase gasosa poden apropar-se a la superfície i quedar atrapades en la fase líquida. Amb el temps s'estableix un *equilibri dinàmic* on, en terme mitjà, el mateix nombre de molècules passen de la fase líquida a la vapor i de la fase vapor a la líquida.

Amb la finalitat de caracteritzar experimentalment l'equilibri dinàmic entre la fase vapor i la fase líquida s'utilitza la pressió a que es troba la fase vapor, una volta l'equilibri s'ha assolit. Anomenem a eixe valor *pressió de vapor*  $P_v$ . Si, en un moment donat, la pressió de la fase vapor

		$\theta$ (°C)	$P_v$ (Torr)
		0	4.58
		20	17.54
		40	55.32
		60	149.38
		80	355.10
		100	760.00
		120	1489.14

Líquid	$P_v$ (Torr)
gasolina	414
etanol	44
mercuri	$1.3 \times 10^{-3}$
glicerina	$1.1 \times 10^{-4}$

Taula 1.5: Pressió de vapor a 20 °C per a diferents líquids (esquerra) i de l'aigua a diferents temperatures (dreta)

$P$  és menor que la pressió de vapor ( $P < P_v$ ), aleshores tindrem un transport net de molècules de la fase líquida a la fase vapor per a augmentar  $P$  i tractar d'arribar a l'equilibri. Es produeix l'evaporació. En canvi, si la pressió de la fase vapor és major que la pressió de vapor ( $P > P_v$ ), es produirà un transport net de molècules de la fase vapor a la fase líquida per a disminuir la pressió de la fase vapor. És a dir, es produeix una condensació fins que s'arribi de nou a l'equilibri dinàmic ( $P = P_v$ ).

La pressió de vapor depèn principalment de les forces intermoleculars i de la temperatura. Una major temperatura suposa una major energia cinètica mitjana i un major nombre de molècules poden escapar de la fase líquida, el que fa augmentar la pressió de vapor. Per contra, unes forces intermoleculars més intenses impliquen una major dificultat de les molècules a l'hora d'escapar de la fase líquida i una menor pressió de vapor. Un exemple d'això el tenim si comparem l'etanol ( $\text{CH}_3\text{-CH}_2\text{-OH}$ ) i l'èter dimetilic ( $\text{CH}_3\text{-O-CH}_3$ ). Els dos compostos tenen la mateixa composició molecular ( $\text{C}_2\text{H}_6\text{O}$ ), però la major intensitat de les interaccions moleculars en el cas de l'etanol fan que aquest tinga una menor pressió de vapor. De fet, a pressió i temperatura ambientals l'etanol és líquid i l'èter dimetilic no (totes les molècules s'evaporen).

## Humitat relativa

En la discussió sobre la pressió de vapor, havíem suposat implícitament que només hi havia un tipus de molècules a la fase líquida i a la fase vapor. La descripció feta sobre la pressió de vapor és essencialment vàlida quan a la fase vapor hi ha més d'un tipus de molècules (per exemple, a les capes baixes de l'atmosfera, l'aire es compon principalment d'oxigen, nitrogen, aigua, argó i diòxid de carboni). En aquest cas a la *pressió total* de la fase vapor contribueixen les diferents molècules presents i parlem de la *pressió parcial* de la fase vapor de cada compost. L'evaporació

aleshores es produeix quan la pressió parcial és menor que la pressió de vapor de la fase líquida i la condensació quan és major.

En el cas particular de l'aigua, la pressió total de la fase vapor  $p$  és igual a la suma de la pressió parcial de l'aire sec  $p_a$  més la pressió parcial de la fase vapor de l'aigua  $p_{\text{H}_2\text{O}}$ . Per a referir-nos a la quantitat d'aigua present en l'atmosfera introduïm el concepte d'*humitat relativa* com el quocient de la pressió parcial de l'aigua i la pressió de vapor

$$\text{HR} \equiv \frac{p_{\text{H}_2\text{O}}}{p_v} \times 100 \quad (1.11)$$

Si  $\text{HR} = 100\%$ , diem que l'aire està saturat d'aigua. En eixe punt estem en l'equilibri dinàmic. Una variació en la pressió de vapor, per exemple una disminució de la temperatura, provocaria que  $p_{\text{H}_2\text{O}} > p_v$  i la consegüent condensació per tal d'arribar a la situació d'equilibri. Aquest efecte és la causa de la rosada a les nits, quan la temperatura baixa.

Controlar la humitat relativa resulta de vital importància en la conservació de documents, ja que un alt grau d'humitat relativa pot deteriorar-los. Per altra banda, en el disseny d'aparells d'aire condicionat no només hem de considerar la temperatura sinó també la humitat relativa. Una humitat relativa òptima s'aconsegueix amb un 40% o 50%. Per baix d'aquest valor es ressequen massa la pell i les mucoses, i per dalt impedeix que la suor s'evapore de la nostra pell (ens fa sentir-nos «enganxosos»).

### Exemple

Per a mesurar la humitat relativa utilitzem una fina làmina metàl·lica que refredem fins que el vapor d'aigua comença a condensar. Si a una habitació que es troba a una temperatura de 25 °C la condensació comença a 10 °C, estima quina és la humitat relativa.

El primer que hem de fer és determinar la pressió de vapor a la temperatura de l'habitació. A la taula 1.5 tenim els valors de la pressió de vapor de l'aigua a diferents temperatures. Com no apareix el valor a 25 °C, el que fem és estimar-ho mitjançant una interpolació lineal. Si tenim una taula de valors  $(x_i, y_i)$  i un valor  $x$  del qual volem conèixer  $y$ , hem d'identificar entre quins dos valors  $x_0$  i  $x_1$  es troba  $x$  ( $x_0 < x < x_1$ ) i aplicar-hi la fórmula de la interpolació lineal

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0$$

En aplicar la fórmula per a la pressió de vapor de 25 °C obtenim<sup>a</sup>

$$\begin{aligned}P_v(25 \text{ °C}) &= \frac{P_v(40 \text{ °C}) - P_v(20 \text{ °C})}{40 \text{ °C} - 20 \text{ °C}}(25 \text{ °C} - 20 \text{ °C}) + P_v(20 \text{ °C}) \\ &= 26.98 \text{ Torr}\end{aligned}$$

D'altra banda, necessitem saber quina és la pressió parcial del vapor d'aigua de l'aire de l'habitació. Sabem que l'aigua comença a condensar quan la pressió parcial del vapor d'aigua és igual a la pressió de vapor de l'aigua. Com que la condensació comença quan la làmina està a 10 °C, la pressió parcial que busquem serà igual a la pressió de vapor de l'aigua a 10 °C. Estimem la pressió de vapor a 10 °C utilitzant de nou la taula 1.5<sup>b</sup>

$$\begin{aligned}P_v(10 \text{ °C}) &= \frac{P_v(20 \text{ °C}) - P_v(0 \text{ °C})}{20 \text{ °C} - 0 \text{ °C}}(10 \text{ °C} - 0 \text{ °C}) + P_v(0 \text{ °C}) \\ &= 11.06 \text{ Torr}\end{aligned}$$

Com que  $P = P_v(10 \text{ °C})$ , finalment obtenim que la humitat relativa de l'habitació és

$$\text{HR} = \frac{P}{P_v} \times 100 = \frac{11.06}{26.98} \times 100 = 41 \%$$

---

<sup>a</sup>També podem fer la interpolació amb el wxMaxima (veure la resolució del problema 2.3, apèndix B.2).

Primer carreguem la llibreria `interpol`

```
(%i1) load(interpol)$;
```

després introduïm les dades de la taula en una matriu

```
(%i2) dades:matrix([0,4.58],[20,17.54],[40,55.32],[60,149.38],[80,355.10],[100,760],[120,1489.14]);
```

```
(%o2) matrix([0,4.58],[20,17.54],[40,55.32],[60,149.38],[80,355.1],[100,760.0],[120,1489.14])
```

fem la interpolació lineal

```
(%i3) linearinterpol(dades)$
```

definim una funció d'interpolació

```
(%i4) f(x):=''%$;
```

```
(%i5) f(25),number;
```

```
(%o5) 26.985000000000001
```

<sup>b</sup>o la instrucció

```
(%i6) f(10);
```

```
(%o6) 11.06
```

## Ebullició

Relacionada amb la pressió de vapor tenim el concepte d'ebullició. Suposem que cal fem un recipient amb aigua que es troba en contacte amb l'atmosfera. A mesura que la temperatura augmenta, també ho fa la pressió de vapor de l'aigua. En el moment en què la pressió de vapor iguala a la pressió atmosfèrica, la vaporització es produeix en tot el líquid. És a dir, comencen

a formar-se bombolles per tot el líquid: tenim l'ebullició.

L'ebullició depèn de la pressió de la fase vapor. Per exemple, si prenem un recipient i anem disminuint la pressió total de la fase vapor, arribarà un moment en que aquesta pressió igualarà a la pressió de vapor de l'element, iniciant l'ebullició. En l'aigua a 20 °C, aquesta pressió és de 2.33 kPa (equivalent als 17.54 Torr de la pressió de vapor de l'aigua a eixa temperatura – taula 1.5). Per aquest mateix motiu, a l'Everest, on la pressió atmosfèrica és de 26.39 kPa, la temperatura d'ebullició de l'aigua és 69 °C. En canvi, en les olles a pressió el que es produeix és l'efecte contrari. La pressió és major que l'atmosfèrica i l'ebullició es produeix a una temperatura major. Amb això s'aconsegueix que augmente la velocitat de cocció. Per exemple, si l'aigua dins de l'olla a pressió es troba a 2 atm de pressió, l'aigua no bullirà fins que arribe a 120 °C.

## 1.3 Estàtica de fluids

### 1.3.1 Forces superficials i volúmiques

En els fluids tenim dos tipus de forces: les forces superficials i les forces volúmiques. Les forces superficials actuen sobre la superfície de contacte entre dos sistemes. Aquestes són, per exemple, les forces que exerceixen els fluids sobre els sòlids, que actuen de forma distribuïda per tota la superfície de contacte.

Les forces volúmiques són aquelles que actuen sobre tots els elements de volum que componen el sistema. Per exemple, les forces degudes al camp gravitatori terrestre són forces volúmiques. En aquest cas no són forces de contacte sinó que són forces a distància. La descripció d'aquestes forces pot ser complexa si varien amb la posició en el sistema. No obstant això, el cas de la força gravitatòria se simplifica molt perquè la força té el mateix sentit i direcció en tot el volum del sistema. Si a més considerem un fluid incompressible, la seua densitat és constant i podem substituir la força en cadascun dels elements de volum per una única força en el centre de masses del sistema.

### 1.3.2 Equació fonamental

Hem vist que la pressió actua en tots els punts del fluid però, *com varia la pressió dins el fluid?* Sabem que la pressió al mar augmenta amb la profunditat. A l'atmosfera, la pressió disminueix amb l'altura.

Suposem una columna d'un fluid *incompressible*, és a dir, de *densitat constant*, en repòs que té una altura  $h$  i una superfície  $A$  (figura 1.14). A la part de dalt del fluid tenim una pressió  $P$  i a

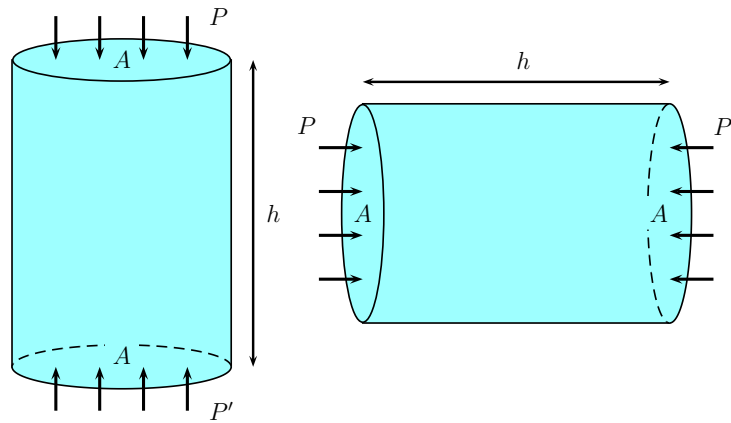


Figura 1.14: En un fluid incompressible en repòs, la pressió només depèn de la profunditat (altura). La diferència de pressió entre  $P$  i  $P'$  en la columna vertical (esquerra) compensa el pes d'aquesta. En la columna horitzontal (dreta) la diferència de pressió és zero (no hi ha pes que compensar)

la part de baix una pressió  $P'$ . La força que exerceix la resta del fluid sobre la superfície de dalt té un valor  $F = PA$  i direcció cap avall. Mentre, la força que exerceix el fluid en la superfície de baix és  $F' = P'A$  amb direcció cap amunt. A més hem de tindre en compte la força deguda al camp gravitatori terrestre. Al contrari que la força deguda a la pressió, aquesta no és una força superficial sinó volúmica (actua sobre la massa total de la columna de fluid, no sobre cap superfície). Com el sistema està en equilibri, la força neta ha de ser zero. El balanç de forces dóna

$$F' = F + mg \quad (1.12)$$

on  $mg$  és el pes de la columna de fluid. Com que la densitat  $\rho$  del fluid és constant, el pes de la columna és  $mg = \rho Ahg$ . Amb aquesta expressió, i com que  $F = PA$  i  $F' = P'A$ , el balanç de forces queda com

$$P'A = PA + \rho Ahg \quad (1.13)$$

Dividint per l'àrea  $A$  tenim finalment

$$P' = P + \rho gh, \quad \rho \text{ constant} \quad (1.14)$$

Què passa si la columna està horitzontal? En aquest cas no hi ha cap pes que compensar. El balanç de forces és simplement  $F' = F$  i per tant  $P' = P$ . La pressió *només depèn de l'altura (profunditat)*. L'equació (1.14), unida al fet que la pressió només depèn de l'altura es coneix com *l'equació fonamental de l'estàtica de fluids*. Ens permet calcular la pressió en cada punt d'un fluid incompressible en repòs si coneixem la pressió en un punt.

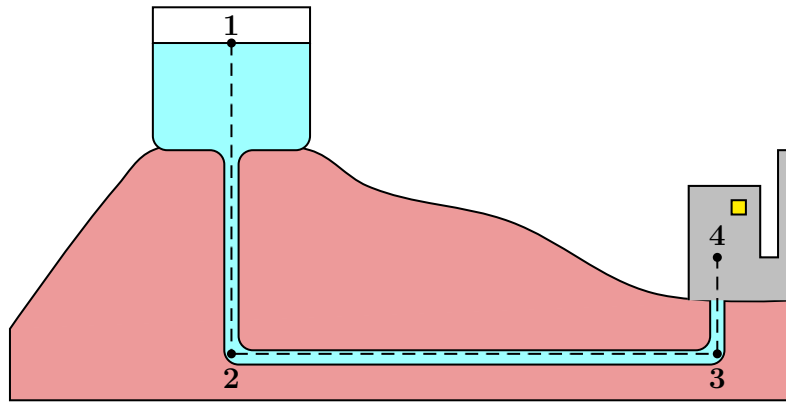


Figura 1.15: Com que la pressió només depèn de l'altura, la pressió entre el punt 4 i el punt 1 només depèn de la profunditat a què es troba el punt 4 respecte del punt 1

### Exemple

Considereu el sistema representat a la figura 1.15. Volem conèixer la pressió al punt 4,  $P_4$ . Coneixem la pressió al punt 1,  $P_1$ , i la diferència de profunditat entre els dos punts,  $h_1 - h_2$ . Per a obtenir  $P_4$  considerem els punts auxiliars 2 i 3. La diferència de pressió entre els punts 1 i 2 és, d'acord amb l'equació (1.14)

$$P_2 = P_1 + \rho g(h_1 - h_2)$$

Finalment, la relació entre les pressions del punt 3 i del punt quatre és

$$P_4 = P_3 + \rho g(h_3 - h_4)$$

i, utilitzant la relació entre  $P_3$  i  $P_1$  i que  $h_2 = h_3$ , tenim finalment

$$P_4 = P_1 + \rho g(h_1 - h_4)$$

La variació de la pressió amb la profunditat [equació (1.14)] complica la descripció dels sistemes on actuen perquè les forces superficials no són homogènies sinó que varien amb la posició. Suposem per exemple el cas d'una presa de gravetat (figura 1.16). La pressió de l'aigua va variant amb la profunditat. A una profunditat  $z$  respecte de la superfície de l'aigua és igual a

$$P(z) = P_{\text{atm}} + \rho g z \quad (1.15)$$

on  $P_{\text{atm}}$  és la pressió atmosfèrica a la superfície de l'aigua. Aquesta variació de la pressió implica la variació de la força que l'aigua exerceix sobre la paret de la presa. Si dividim l'altura de la presa en elements d'altura  $dz$ , tenim que la força que exerceix l'aigua entre  $z$  i  $z + dz$  és

$$dF(z) = P(z)Ldz = (P_{\text{atm}} + \rho g z)Ldz \quad (1.16)$$



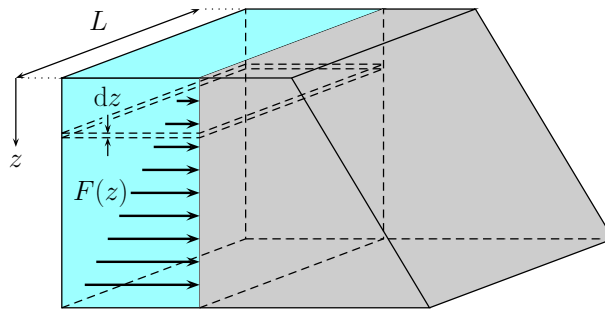


Figura 1.16: En una presa la força que l'aigua exerceix sobre la paret augmenta amb la profunditat. Una forma de compensar aquest efecte consisteix en fer el gruix de la paret més gran a la part de baix (presa de gravetat). La forma de la presa ha d'evitar que l'aigua arrossegui (compense la força de l'aigua), gire (compense el moment resultant de la força de l'aigua) o trenque la paret de formigó

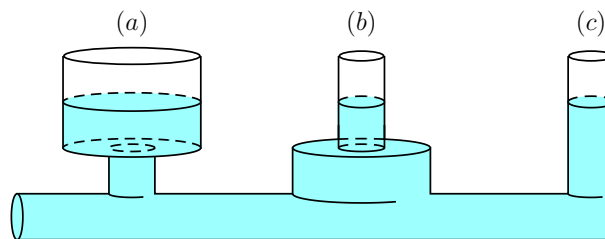


Figura 1.17: Paradoxa hidrostàtica: el nivell del fluid és el mateix en tots els recipients independentment de la seua forma

on  $L$  és l'amplària de la presa (la superfície sobre la que actua  $dF(z)$  és  $dS = Ldz$ ). D'aquesta equació podem calcular la força total que actua sobre la presa a partir d'una integració (és a dir, la suma de totes les  $dF$ ),<sup>4</sup>

$$F_{\text{tot}} = \int_0^h (P_{\text{atm}} + \rho g z) L dz = \left( P_{\text{atm}} + \frac{1}{2} \rho g h \right) L h \quad (1.17)$$

on  $h(> 0)$  és la profunditat de la capa d'aigua que mulla la presa.

El fet que la pressió només depèn de la profunditat (altura) explica la paradoxa hidrostàtica de la figura 1.17: el nivell del fluid és el mateix en els tres casos. Al recipient (a) l'excés de fluid està suportat per la base. Mentre, al recipient (b) l'absència de fluid està compensada per la pressió que exerceix la base.

<sup>4</sup>Amb el wxMaxima podem fer la integral fàcilment

```
(%i1) integrate((Patm+rho*g*z)*L,z,0,h);
(%o1) ((g*h^2*rho+2*h*Patm)*L)/2
(%i2) factor(%);
(%o2) (h*(g*h*rho+2*Patm)*L)/2
```

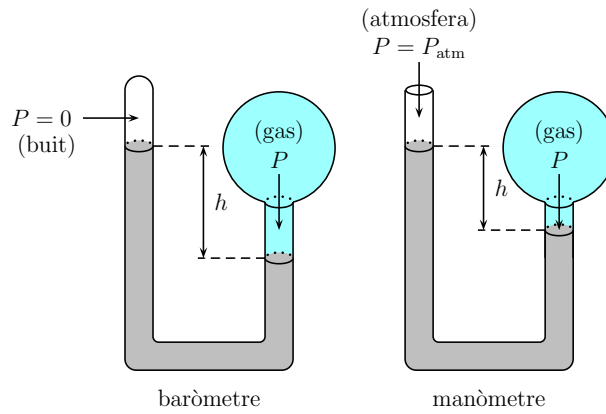


Figura 1.18: El baròmetre mesura la pressió absoluta utilitzant el buit com a referència. El manòmetre mesura la pressió d'un sistema respecte de la pressió atmosfèrica

### 1.3.3 Mesura de la pressió

No podem mesurar directament pressions absolutes, només pressions relatives respecte d'un punt de referència. Els punts de referència més habituals són la pressió atmosfèrica i el buit. En el primer dels casos, la pressió mesurada s'anomena *pressió manomètrica* i l'aparell utilitzat *manòmetre*. La pressió manomètrica pot ser positiva (si la pressió del punt és major que l'atmosfèrica) o negativa (si és menor). Quan el punt de referència de l'aparell és el buit, la pressió s'anomena *pressió baromètrica* i l'aparell de mesura *baròmetre*.

Un tipus de baròmetre i manòmetre molt usual és el format per un tub de vidre en forma d'U que conté un líquid, generalment mercuri (figura 1.18). Un dels extrems es fica en contacte amb el sistema del que volem conèixer la pressió i l'altre en contacte amb el sistema de referència. Una volta el sistema arriba a l'equilibri, cadascuna de les superfícies del líquid tindrà la pressió del sistema amb qui està en contacte. En eixe punt, d'acord amb l'equació fonamental de l'estàtica de fluids, la diferència d'altura entre els dos extrems del líquid ens donarà la diferència de pressió entre el sistema estudi i el sistema de referència

$$P - P_{\text{ref}} = \rho g(h - h_{\text{ref}}) \quad (1.18)$$

És evident que com major siga la densitat del líquid, menor serà la diferència d'altura i l'aparell podrà tenir una grandària més reduïda (encara que també tindrà una precisió menor). Per aquest motiu, en general s'utilitza mercuri, el líquid de major densitat a temperatura ambient, i els mmHg (mil·límetres de mercuri)<sup>5</sup> són una unitat comuna per la pressió. En condicions normals, a l'altura del nivell del mar, la pressió baromètrica de l'atmosfera és de 760 mmHg. Si

<sup>5</sup>Que, com vam veure, també s'anomenen Torr en honor d'Evangelista Torricelli (1608-1647), inventor del baròmetre.

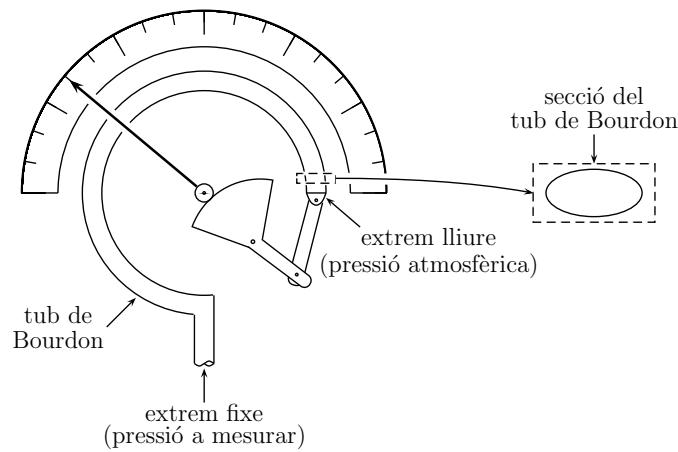


Figura 1.19: Manòmetre de Bourdon. La forma del tub de secció el·líptica varia amb la diferència de pressió entre l'extrem fixe i l'extrem lliure. Això provoca el moviment de l'extrem lliure que es transmet a l'agulla del sistema indicador

utilitzarem aigua, el baròmetre marcaria una diferència d'altures de 10.3 m!

Probablement, el tipus de manòmetre que utilitzem més habitualment és el de Bourdon (figura 1.19). Aquest manòmetre s'utilitza per exemple per a mesurar la pressió manomètrica dels neumàtics a les gasolineres. Està basat en el tub de Bourdon, un tub de secció el·líptica on un extrem està fixe mentre l'altre es pot moure lliurement. L'extrem fixe es connecta amb el sistema del qual volem mesurar la pressió manomètrica, mentre que l'extrem lliure es fica en contacte amb l'atmosfera. La diferència de pressions modifica la forma del tub. Això provoca el desplaçament de l'extrem lliure que, mitjançant un sistema mecànic, es trasllada a l'agulla d'un sistema indicador. Utilitzant diferents tipus de materials i tubs de diferents grossors podem fabricar manòmetres de Bourdon per a diferents intervals de pressió manomètrica. El manòmetre ha de treballar dins del límit elàstic del tub de Bourdon. Si mesurem una pressió més gran que el límit superior de l'aparell, el tub es deformarà de forma irreversible trencant el manòmetre.

La mesura de molt altes pressions es fa amb sensors fabricats amb materials piezoelèctrics. En aquests materials, l'aplicació d'una pressió produeix un desplaçament de la posició d'equilibri dels ions que componen el material, el que provoca l'aparició d'una diferència de potencial elèctric. En els sensors piezoelèctrics es mesura esta diferència de potencial elèctric i es relaciona amb la pressió a què està sotmès el sensor.

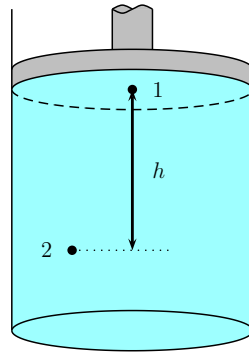


Figura 1.20: Dipòsit tancat amb un èmbol

### 1.3.4 Principi de Pascal

Considerem ara un dipòsit tancat amb un èmbol que conté un fluid incompressible com mostra la figura 1.20. El punt 1 està a la superfície de l'èmbol mentre que el punt 2 està a una profunditat  $h$  d'aquest. Inicialment l'èmbol exerceix una força  $F_1$  sobre el fluid que es correspon amb una pressió  $P_1 = F_1/A$ , on  $A$  és l'àrea de l'èmbol. Al punt 2 hi ha una pressió  $P_2 = P_1 + \rho gh$ . Augmentem ara la força que exerceix l'èmbol al punt 1 un  $\Delta F_1$ :  $F'_1 = F_1 + \Delta F_1$ . La pressió al punt 1 passa a ser

$$P'_1 = \frac{F'_1}{A} = \frac{F_1 + \Delta F_1}{A} = P_1 + \Delta P_1 \quad (1.19)$$

Aquest augment de la pressió anirà transmetent-se successivament pel fluid. Una volta el sistema torna al repòs, la pressió al punt 2 haurà variat fins  $P'_2 = P_2 + \Delta P_2$ . Com que la profunditat del punt 2 respecte del punt 1 roman la mateixa (el fluid és incompressible i per tant el seu volum no varia), tenim que

$$P'_2 = P'_1 + \rho gh = P_1 + \rho gh + \Delta P_1 = P_2 + \Delta P_1 \quad (1.20)$$

Per tant,  $\Delta P_2 = \Delta P_1$ : la pressió al punt 2 augmenta la mateixa quantitat que al punt 1. Això és recollit al *Principi de Pascal*

Un canvi de pressió aplicat a un líquid incompressible que es troba en un recipient tancat, es transmet per igual a tots els punts del líquid i a les parets del recipient.

Una gran quantitat de dispositius es basen en el principi de Pascal. Entre ells tenim l'elevador hidràulic (figura 1.21). La pressió a l'èmbol 1 és la mateixa que a l'èmbol 2:  $P_1 = P_2$  (quan estan a la mateixa altura). Això implica que la força *per unitat d'àrea* és la mateixa en els dos èmbols, és a dir, que la força que actua en cada element d'àrea és la mateixa. Matemàticament es compleix la relació

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad (1.21)$$

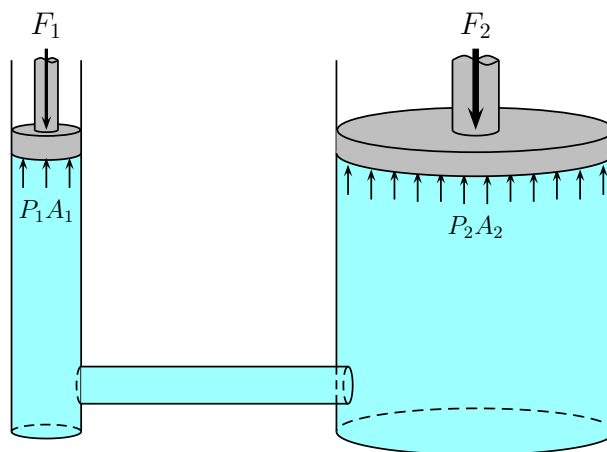


Figura 1.21: Elevador hidràulic

Com que la força total a cada èmbol és la suma de les forces que actuen sobre cada element d'àrea, com més gran és la superfície de l'èmbol, major és la força tota que hi actua.

### Exemple

Considereu un elevador hidràulic amb dos èmbols de diàmetres  $d_1 = 20$  cm i  $d_2 = 200$  cm. Quina força hem d'aplicar a l'èmbol menut per a elevar un cotxe de massa 2000 kg situat a l'èmbol gran?

Per a elevar el cotxe de massa 2000 kg situat a l'èmbol gran hem de fer una força

$$F_2 = mg \approx 2 \times 10^4 \text{ N}$$

La força amb què hem de prémer l'èmbol menut de diàmetre  $d_1 = 20$  cm és [equació (1.21)]

$$F_1 = \frac{A_1}{A_2} F_2 = \frac{\pi(d_1/2)^2}{\pi(d_2/2)^2} F_2 = \frac{F_2}{100} = 200 \text{ N}$$

És a dir, l'equivalent a un pes aproximat de 20 kg.

En realitat també hem de considerar la força que exerceix la pressió atmosfèrica. Així, la força de cotxe+atmosfera és

$$F'_2 = mg + P_{\text{atm}} A_2$$

i la força sobre l'èmbol menut és

$$F'_1 = F_1 + P_{\text{atm}} A_1$$

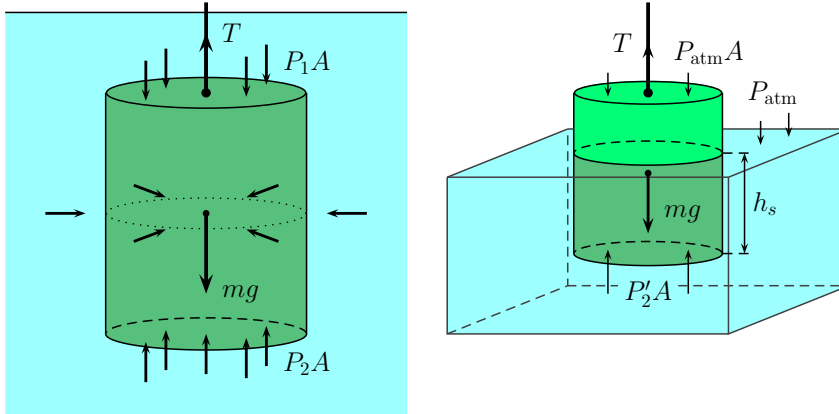


Figura 1.22: En un cos submergit de forma cilíndrica la major pressió en la part de baix (2) respecte a la part de dalt (1) fa que el cos experimente una força ascensional. La força ascensional depèn del volum del cos que es troba submergit

En utilitzar la relació (1.21) tenim

$$\frac{F'_1}{A_1} = \frac{F'_2}{A_2} \rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{mg}{A_2}$$

que és l'expressió que havíem utilitzat perquè els termes amb  $P_{\text{atm}}$  es cancel·len.

### 1.3.5 Flotació. Principi d'Arquímedes

#### Flotació

La posició d'equilibri d'un objecte sòlid immers (total o parcialment) dins d'un fluid depèn del balanç de forces volumiques i superficials. Suposem el cas d'un objecte submergit en un fluid de densitat  $\rho_f$  i sostingut per un fil que el manté en equilibri amb el fluid que l'envolta. Al buit, la tensió  $T$  de la corda seria igual al pes  $mg$  de l'objecte. Al fluid, hem de tenir en compte que el fluid exerceix una pressió sobre la superfície de l'objecte amb què està en contacte. Hem vist que en un fluid incompressible en equilibri la pressió depèn de la profunditat. La pressió en la part de baix del cos serà per tant major que en la part de dalt. En conseqüència, el cos experimentarà una força cap a dalt anomenada força ascensional (o de flotació). Per aquesta raó, la tensió al fil serà menor que el pes del cos.

*Quin és el valor de la tensió al fil?* Suposem primer el cas d'un cilindre totalment submergit en un fluid incompressible (figura 1.22, esquerra). La pressió que actua sobre les parets laterals és la mateixa a cada altura. Per tant s'anul·len quan fem el balanç de forces. En canvi, si ens fixem

en el balanç de les forces que actuen en direcció vertical tenim

$$mg + F_1 = T + F_2 \quad (1.22)$$

(cap avall)            (cap amunt)

on  $F_1$  i  $F_2$  són les forces que exerceix el fluid en les cares de dalt i baix

$$F_1 = P_1 A, \text{ cara superior} \quad (1.23)$$

$$F_2 = P_2 A, \text{ cara inferior} \quad (1.24)$$

on  $A$  és l'àrea de les cares superior i inferior del cilindre. Resolent per a  $T$  tenim

$$T = mg + F_1 - F_2 = mg + (P_1 - P_2)A \quad (1.25)$$

Com que  $P_1 - P_2 = -\rho_f g h$ , finalment obtenim

$$T = mg - \rho_f g V \quad (1.26)$$

on hem emprat que  $V = hA$  és el volum del cilindre. El terme  $\rho_f g V$  és la força ascensional que experimenta el sòlid pel fet d'estar submergit al fluid. És igual al pes d'una massa de fluid del mateix volum que el cos submergit.

Suposem ara que el cos només està parcialment submergit fins una profunditat  $h_s$  (figura 1.22, dreta). En aquest cas, sobre la superfície de dalt actua la pressió atmosfèrica  $P_{\text{atm}}$  i sobre la superfície de baix una pressió  $P'_2$  menor que en el cas anterior, donat que la profunditat també és menor. La tensió ara vindrà donada per

$$T = mg + (P_{\text{atm}} - P'_2)A \quad (1.27)$$

i, com que  $P_{\text{atm}} - P'_2 = -\rho_f g h_s$ , per l'equació fonamental de l'estàtica de fluids tenim que

$$T = mg - \rho_f g V_s \quad (1.28)$$

on  $V_s = h_s A$  és el volum submergit del cos. La força ascensional que experimenta el cos en aquest cas és  $\rho_f g V_s$ . Els resultats trobats en les equacions (1.26) i (1.28) vénen recollits en el *Principi d'Arquímedes*

Tot cos submergit en un fluid experimenta una força ascensional equivalent al pes del fluid desallotjat.

Aquest principi és independent de la forma del cos submergit. Podem fer una deducció no rigorosa del Principi d'Arquímedes. Suposem un cos de forma irregular submergit en un fluid

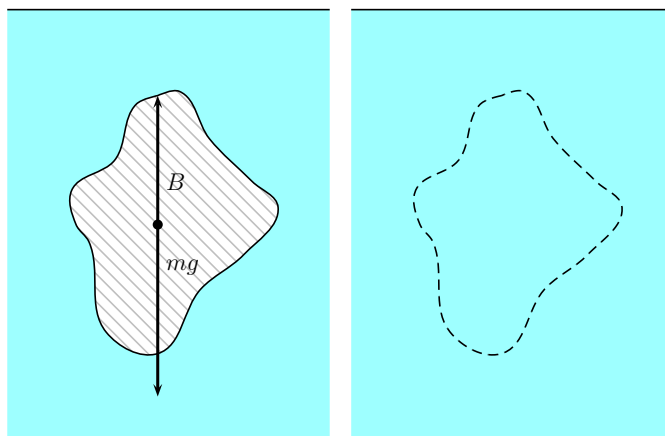


Figura 1.23: La força de flotació només depèn del volum submergit del cos. No varia si substituïm el cos per una quantitat de fluid de la mateixa forma. En aquest segon cas hi ha equilibri (tot és fluid), i això ens permet obtenir el valor de la força de flotació:  $B = \rho_f g V$

(figura 1.23, esquerra). Si substituïm el cos per una quantitat de fluid de la mateixa forma (figura 1.23, dreta), aquest fluid estarà en equilibri amb el fluid que l'envolta, és a dir

$$m_f g - B = 0 \quad (1.29)$$

on  $m_f g = \rho_f g V$  és el pes del fluid i  $B$  és la força ascensional, resultat de la pressió que exerceix el fluid extern sobre la superfície (virtual) de l'element delimitat. Com que  $B$  només depèn del fluid extern i la superfície de contacte, el seu valor és independent de si en eixe espai tenim el cos inicial o la porció de fluid per la que ho hem substituït. En tots dos casos,  $B = \rho_f g V$ .

La força ascensional depèn del volum *submergit* del cos  $V_s \leq V$ :  $B = \rho_f g V_s$ . Quan un cos flota, es troba en una situació d'equilibri on la força ascensional compensa el pes del cos

$$B = \rho_f g V_s = m g \quad (1.30)$$

Si el material del qual està fet el cos té una densitat  $\rho$ , la seua massa és  $m = \rho V$ . Per tant

$$\rho_f g V_s = \rho g V \quad (1.31)$$

d'on tenim que la proporció del cos submergit  $V_s/V$  és igual a la relació entre les densitats del sòlid i del fluid.

$$\frac{V_s}{V} = \frac{\rho}{\rho_f} \quad (1.32)$$

Per exemple, un iceberg és un tros de gel gegant que s'ha separat d'un glacera. El gel té una densitat de  $\rho = 0.917 \text{ g/cm}^3$  i flota sobre l'aigua salada de l'oceà que té una densitat aproximadament de  $\rho_f = 1.020 \text{ g/cm}^3$  (lleugerament major que la de l'aigua dolça). Amb aquestes dades



podem calcular la proporció del volum de l'iceberg que està submergida

$$\frac{V_s}{V} = \frac{\rho}{\rho_f} = \frac{0.917}{1.020} = 0.899 \approx 0.90$$

És a dir, només un 10% està per sobre de l'aigua.

Per al cas que el fluid siga l'aigua, es defineix la *densitat específica* d'un material com el quocient entre la seua densitat i la de l'aigua:  $\rho_e = \rho/\rho_{\text{H}_2\text{O}}$ . El cos flota en aigua si  $V_s < V$ , és a dir si la densitat específica del material amb què està fet és menor que la unitat.

### Exemple

Dos naufrags volen marxar de l'illa on estan reclosos. Per a fer-ho han construït una bassa amb 20 troncs d'arbre de 15 cm de radi i 3 m de longitud. La densitat de la fusta és de  $0.8 \text{ g/cm}^3$  i la massa de cadascun dels navegants és de 70 kg. Estimeu la màxima càrrega que poden ficar sobre la bassa perquè almenys un 10% d'aquesta no estiga submergida.

El límit està en el punt en què els troncs estan submergits un 90%. En eixe cas la força ascensional és

$$\left. \begin{aligned} B &= \rho_f g V_s \\ V_s &= 0.9 \times 20 \times (\pi \cdot 0.15^2 \cdot 3) = 3.82 \text{ m}^3 \\ \rho_f &= 1020 \text{ kg/m}^3 \end{aligned} \right\} B = 38.2 \text{ kN}$$

Pel balanç de forces tenim

$$(m_{\text{bassa}} + m_{\text{naufrags}} + m_{\text{càrrega}})g = B$$

Com que

$$m_{\text{bassa}}g = \rho_{\text{fusta}}gV = 33.3 \text{ kN}$$

i

$$m_{\text{naufrags}}g = 1.37 \text{ kN}$$

tenim finalment

$$m_{\text{càrrega}}g = 3.53 \text{ kN} \rightarrow m_{\text{càrrega}} = 353 \text{ kg}$$

## 1.3.6 Efectes de la tensió superficial

### Tensió superficial en bombolles i gotes

Considerem el cas d'una bombolla d'aire en suspensió dins d'un got d'aigua. L'aire de la bombolla es troba a la pressió  $P_\alpha$  i l'aigua que l'envolta a la pressió  $P_\beta$ . La bombolla està sotmesa a la

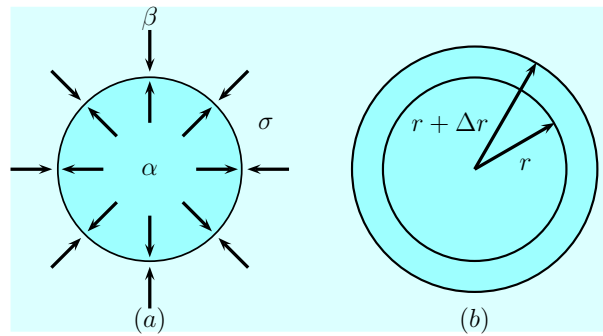


Figura 1.24: (a) Per a volums menuts, la forma esfèrica que adquireix el volum de fluid  $\alpha$  dins del fluid  $\beta$  és resultat de l'equilibri entre la tensió superficial i la diferència de pressions dins/fora. (b) L'increment de l'àrea que separa els dos fluids té sempre una penalització energètica

força gravitatòria i a les forces superfícials degudes a la diferència de pressions entre els dos medis  $P_\alpha \neq P_\beta$ , per un costat, i a la tensió superficial, per l'altre.

Si la bombolla és suficientment menuda podem negligir els efectes de la força gravitatòria sobre la forma i grandària de la bombolla. En aquest cas, la bombolla adquireix forma esfèrica i la seua grandària ve determinada per l'equilibri entre la força deguda a la pressió i la deguda a la tensió superficial. L'aire de l'interior de la bombolla exercirà una força cap a l'exterior de la bombolla de magnitud

$$F_\alpha = P_\alpha A \quad (1.33)$$

on  $A$  és l'àrea de la interfase (de la bombolla). Per la seua banda, l'aigua que envolta la bombolla exercirà una força cap a l'interior de la bombolla de magnitud

$$F_\beta = P_\beta A \quad (1.34)$$

Per tant, la força neta deguda a les pressions de l'aire i l'aigua és

$$F_P = (P_\alpha - P_\beta)A = \Delta P A \quad (1.35)$$

Comencem pel cas  $P_\alpha > P_\beta$ . Segons l'equació (1.35) existirà una força neta en direcció cap a l'exterior de la bombolla. Aquesta força tendirà a augmentar la grandària de la bombolla. Això però, aquest augment de superfície té associat un cost energètic donat per la tensió superficial. Suposem que inicialment la bombolla té un radi  $r$ . Com que té forma esfèrica, la superfície de separació vindrà donada per l'expressió

$$A = 4\pi r^2 \quad (1.36)$$

Suposem ara que, per l'existència de la força neta de l'equació (1.35), la grandària de la bombolla augmenta lleugerament de forma que el seu radi passa de  $r$  a  $r + \Delta r$ , amb  $\Delta r \ll r$ . El treball

que fa la força per a produir l'increment de la grandària de la bombolla és

$$W = F_P \Delta r = \Delta P 4\pi r^2 \Delta r \quad (1.37)$$

L'augment del radi fa que la superfície s'incremente un  $\Delta A = 8\pi r \Delta r$ .<sup>6</sup> Això té un cost energètic que ve donat per

$$\Delta E_\sigma = \sigma \Delta A = \sigma 8\pi r \Delta r \quad (1.38)$$

En la situació d'equilibri es compleix que  $W = \Delta E_\sigma$ , d'on tenim al comparar les equacions (1.37) i (1.38) que

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{r} \quad (1.39)$$

Aquesta equació es coneix com equació de Young-Laplace i ens dóna la relació entre la diferència de pressions dins-fora i el radi de la bombolla.

Què passa si  $P_\alpha < P_\beta$ ? En aquest cas la tendència de la força  $F_P$  és reduir la grandària de la bombolla. A més aquest efecte està afavorit energèticament per la tensió superficial perquè ara la superfície disminueix. El resultat global és que el volum de la bombolla va reduint-se fins que això provoca un augment de la pressió de l'aire de l'interior. L'equilibri es torna a trobar quan la pressió de dins és major que la de fora, i la relació entre  $\Delta P$  i  $r$  compleix l'equació de Young-Laplace. És a dir, en una bombolla en suspensió i en equilibri sempre es compleix que la pressió de dins és major que la de fora. Això és vàlid tant en el cas d'una bombolla d'aire en aigua com d'una gota d'aigua en aire.

### Exemple

Determineu la pressió en l'interior d'una bombolla d'aire de radi  $r = 1 \text{ mm}$  que es troba dins d'un recipient amb aigua a una profunditat de  $6 \text{ cm}$  si la pressió atmosfèrica és de  $760 \text{ Torr}$ .

[Dada: tensió superficial de l'aigua  $\sigma = 73 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ]

El primer que fem és determinar quina és la pressió  $P_\beta$  de l'aigua a la profunditat  $h$  a què es troba la bombolla.

<sup>6</sup>Calculat com la variació elemental  $dA = d(4\pi r^2) = 8\pi r dr$ .

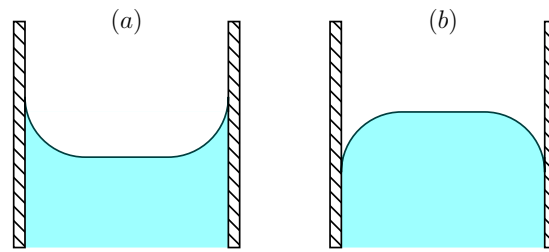


Figura 1.25: Dependent de la relació de les forces de cohesió (entre molècules de líquid) i d'adhesió (entre molècules de líquid i sòlid) tenim un meniscus còncau (a) o convex (b)

Segons l'equació fonamental de l'estàtica de fluids

$$P_{\beta} - P_{\text{atm}} = \rho gh \rightarrow P_{\beta} = P_{\text{atm}} + \rho gh$$

on  $P_{\text{atm}}$  és la pressió atmosfèrica.

Segons l'equació de Young-Laplace, la diferència de pressió entre l'interior i l'exterior de la bombolla ve donat per

$$\Delta P = P_{\alpha} - P_{\beta} = \frac{2\sigma}{r}$$

on  $P_{\alpha}$  és la pressió que busquem. Resolent per  $P_{\alpha}$  en les equacions anteriors tenim finalment

$$P_{\alpha} = P_{\beta} + \frac{2\sigma}{r} = P_{\text{atm}} + \rho gh + \frac{2\sigma}{r} = 101325 + 1000 \times 9.8 \times 0.06 + \frac{2 \times 73 \times 10^{-3}}{10^{-3}} = 102059 \text{ Pa}$$

## Capil·laritat

En tubs molt estrets, on podem negligir la influència aplanadora de la força gravitatòria, s'observa que es forma una corba a la superfície del líquid en el punt de contacte entre el líquid i el sòlid contenidor. Aquesta curvatura s'anomena meniscus i pot ser còncau o convexa (figura 1.25).

Les molècules del líquid que es troben prop del sòlid interaccionen amb molècules del sòlid (mitjançant forces d'adhesió) i amb molècules del líquid (mitjançant forces de cohesió). Si les forces d'adhesió són majors que les de cohesió el meniscus és còncau. Es diu en eixe cas que el líquid «mulla» al sòlid. Aquest seria el cas de l'aigua i el vidre. En cas contrari el meniscus és convex (el líquid no mulla el sòlid). Aquest seria el cas del mercuri i el vidre.

La capil·laritat és responsable de l'ascens o descens d'un líquid per un tub de vidre suficientment estret anomenat capil·lar (figura 1.26). Per a estimar l'altura  $h$  de l'ascens per capil·laritat partim

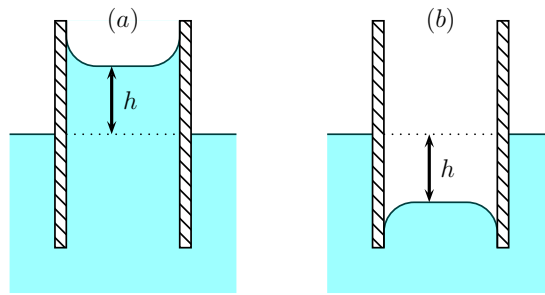


Figura 1.26: En tubs molt estrets (capil·lars) es pot observar l'ascens o descens del fluid depenent de si el líquid mulla o no el sòlid

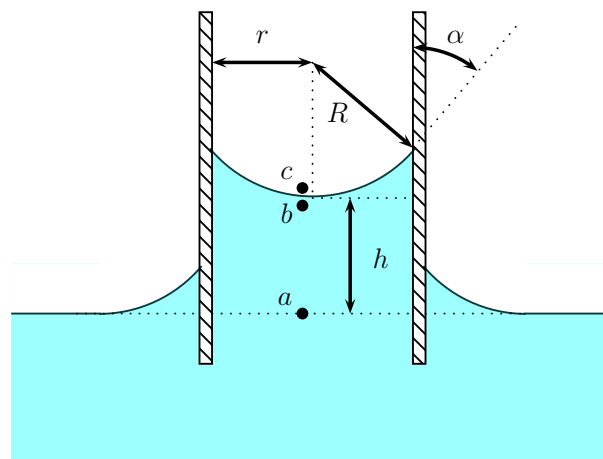


Figura 1.27: Esquema per a estimar l'ascens o descens per capil·laritat

de la figura 1.27. Considerem un punt (*a*) que es troba a la mateixa altura que la superfície del fluid que està *fora* del capil·lar. Així mateix considerem dos punts (*b*) i (*c*) que es troben just per baix i per dalt de la superfície del fluid *dins* del capil·lar, respectivament. La relació entre les pressions als punts (*a*) i (*b*) és

$$P_b = P_a - \rho gh \quad (1.40)$$

considerant el líquid com a fluid incompressible. Per altra banda, els punts (*b*) i (*c*) estan a la part convexa i còncava, respectivament, d'una superfície de separació en forma de corba esfèrica de radi *R*. Com que (*b*) està a la part convexa, la pressió en eixe punt ha de ser menor que la que existeix a (*c*). De forma anàloga a com s'ha obtingut l'equació de Young-Laplace [equació (1.39)] es pot demostrar que la relació entre la pressió en aquests dos punts és

$$P_b = P_c - \frac{2\sigma}{R} \quad (1.41)$$

Comparant les equacions (1.40) i (1.41) tenim que

$$\rho gh = \frac{2\sigma}{R} \quad (1.42)$$

donat que  $P_a = P_c = P_{\text{atm}}$ . La relació entre l'angle de contacte  $\alpha$ , el radi del capil·lar *r* i el radi de curvatura *R* de la corba esfèrica és

$$r = R \cos \alpha \quad (1.43)$$

que substituïda en l'equació (1.42) dóna

$$\rho gh = \frac{2\sigma}{r} \cos \alpha \quad (1.44)$$

d'on podem obtenir l'altura

$$h = 2 \frac{\sigma \cos \alpha}{r \rho g} \quad (1.45)$$

L'equació (1.45) es coneix com *lleï de Jurín*. Encara que només s'ha demostrat en el cas de l'ascens per capil·laritat, el descens segueix la mateixa equació (la demostració és anàloga a la de l'ascens). En el cas de l'ascens, el líquid mulla el sòlid. Per tant l'angle de contacte  $\alpha < 90^\circ$  i, en conseqüència,  $\cos \alpha > 0$  i  $h > 0$ . En canvi, si el líquid no mulla el sòlid,  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ,  $\cos \alpha < 0$  i, per tant,  $h < 0$ . Tenim descens per capil·laritat.



Figura 1.28: Utilitzant tints o fum acolorit podem visualitzar la trajectòria d'un fluid que passa per una regió. [Font: Langley Research Center (NASA)]

### Exemple

Al ficar un capil·lar de 0.4 mm de diàmetre en mercuri, observem un descens per capil·laritat d'1.5 cm. Determineu l'angle de contacte entre el mercuri i el vidre. [Dades: tensió superficial del mercuri  $\sigma = 547 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ , densitat del mercuri  $\rho = 13.5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ ]

La llei de Jurín [equació (1.45)] ens dona la relació entre l'angle de contacte i l'ascens o descens per capil·laritat. A partir d'aquesta equació podem resoldre per al cosinus de l'angle de contacte

$$\cos \alpha = \frac{\rho g h}{2\sigma} r = \frac{13500 \times 9.8 \times (-1.5 \times 10^{-2})}{2 \times 547 \times 10^{-3}} 0.4 \times 10^{-3} = -0.73$$

que es correspon amb un angle  $\alpha = 137^\circ$ . Noteu que  $\alpha > 90^\circ$ , com correspon a un descens per capil·laritat.

## 1.4 Cinemàtica de fluids

En la cinemàtica del sòlid rígid escollim un cos i descrivim la variació de la seua posició en funció del temps. En la cinemàtica de fluids el que ens interessa es veure la distribució dels fluxos i la seua variació amb el temps. Teòricament, en compte d'escollir un element de fluid determinat i veure'n la seua evolució (l'anomenada descripció lagrangiana), el que fem és escollir

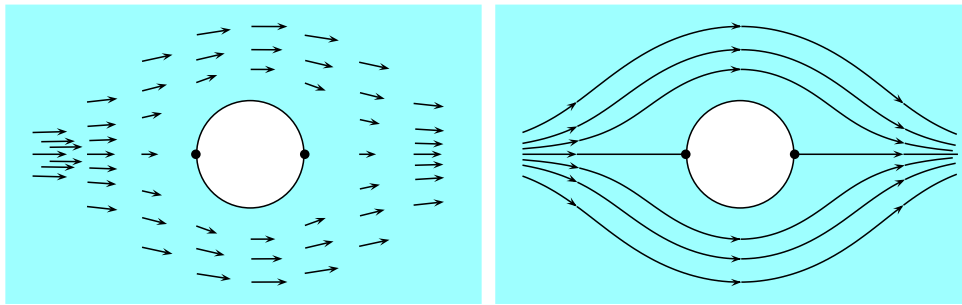


Figura 1.29: Diferents formes de representar el camp vectorial de velocitats. A l'esquerra s'ha representat el vector velocitat  $\vec{v}$  en diferents punts; a la dreta s'han dibuixat les línies de corrent. El flux presenta dos punts d'estancament (punts negres) just davant i darrere de l'esfera en la direcció del flux

un *punt fix*  $\vec{r}$  de l'espai i estudiar quina velocitat tenen els diferents elements de fluid que passen per eixe punt (descripció euleriana). Dit d'una altra forma, el que descrivim teòricament és el *camp de velocitats*  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$  del fluid. Aquesta descripció facilita després la introducció de les forces que produeixen els fluxos (la dinàmica de fluids). Malauradament, aquesta descripció dóna problemes per a fer les comparacions entre la teoria i l'experiment perquè el camp de velocitats no es pot observar directament excepte en alguns casos molt concrets. Experimentalment, per a estudiar el moviment dels fluids s'hi afegeix un tint o fum acolorit en un punt i s'hi observa la seua evolució. L'adició del tint pot ser de forma puntual (en un interval de temps curt) o contínua (en un interval de temps llarg). En el segon cas s'estudia el moviment dels elements de fluid que passen pel punt escollit, que formen una corba anomenada *vena*.

### 1.4.1 Representació del camp de velocitats

Si volem estudiar correctament el camp de velocitats hem de trobar formes de visualització. Per a introduir les principals representacions dels fluxos vegem un exemple. Suposem que volem representar el camp de velocitats d'un fluid que passa pels voltants d'una esfera. Lluny de l'esfera, el fluid es mou horitzontalment d'esquerra a dreta. Prop de l'esfera el flux es modifica donat que aquesta és impenetrable per al fluid. Una primera forma de visualitzar el fluid consisteix en escollir diversos punts i dibuixar-hi el vector velocitat (figura 1.29, esquerra). Però, en general s'utilitza una altra forma, que ens permet visualitzar el moviment del fluid. Aquesta consisteix en representar les *línies de corrent* (figura 1.29, dreta), que són aquelles línies que, en cada punt de l'espai, són tangents a la velocitat del fluid. Els elements de fluid segueixen les línies de corrent. No pot haver moviment de fluid que travesse una línia de corrent perquè això suposaria que la velocitat tindria una component normal a la línia de corrent. Les línies de corrent tampoc es poden creuar excepte en els *punts d'estancament*, on la velocitat del fluid és zero. A la figura



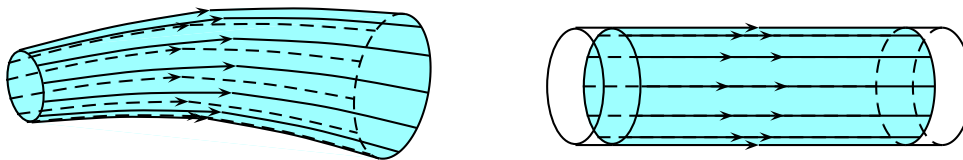


Figura 1.30: La regió tubular limitada per línies de corrent s'anomena tub de corrent. La quantitat de fluid que conté és constant. En una canonada on flueix un fluid amb velocitat baixa, aquesta delimita un tub de corrent

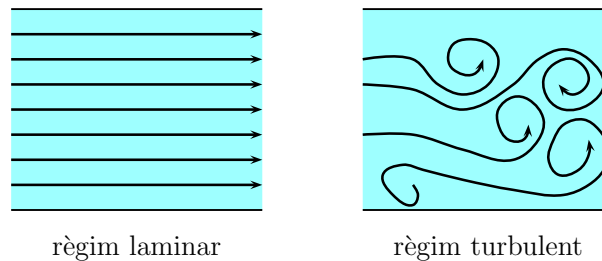


Figura 1.31: El règim turbulent es caracteritza per l'aparició de remolins

1.29 tenim dos punts d'estancament, just davant i just darrere de l'esfera (en la direcció del flux).

Finalment, definim *tub de corrent* (figura 1.30) com una regió tubular limitada per línies de corrent. El fluid per tant no pot travessar les parets d'un tub de corrent. Això tindrà una conseqüència important en la conservació del flux recollida en l'equació de continuïtat que veurem més endavant. Nosaltres només estudiarem amb detall el flux en canonades en condicions de velocitat baixa. En aquest cas, la pròpia canonada delimita un tub de corrent.

### 1.4.2 Tipus de règims

Segons les característiques del moviment del fluid es defineixen diferents tipus de règims. A velocitats baixes domina la viscositat i les capes de fluid més pròximes es mouen de forma paral·lela. Aquest règim s'anomena *règim laminar*. Si, pel contrari, la velocitat mitjana del fluid és suficientment alta, la velocitat de les partícules de fluid esdevé altament irregular i es formen i desfan remolins de forma contínua. Aquest règim s'anomena *règim turbulent*.

Segons siga la seua dependència temporal, el règim pot ser estacionari o ser depenent del temps. Només el règim laminar pot ser estacionari donat que en el règim turbulent els remolins es generen i es desfan contínuament.

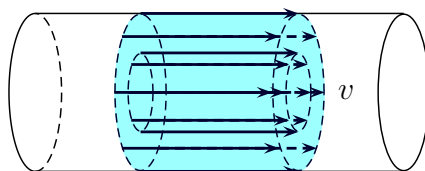


Figura 1.32: Per a fluids perfectes en règim laminar la velocitat del fluid té el mateix valor en tota la secció transversal de la canonada

En aquest capítol estudiarem els fluids perfectes: incompressibles i amb viscositat nul·la. No obstant el valor nul de viscositat, suposarem que el fluid es mou en règim laminar i es troba en estat estacionari. Aquesta aproximació implica que la viscositat és suficientment gran com perquè el règim siga laminar, però suficientment menuda per a poder negligir els efectes de dissipació energètica i de formació de remolins. Principalment estudiarem el flux dins de canonades. Les condicions imposades impliquen que la velocitat del fluid serà la mateixa en tota la secció transversal de la canonada (com indica la figura 1.32). Per tant podem identificar la velocitat del fluid en la secció amb el seu valor al centre de la canonada. L'aproximació feta serà vàlida en canonades amples amb les superfícies llises, sempre que la velocitat del fluid no siga major que un valor crític a la fi que el règim siga laminar. Encara que, en general, aquestes condicions són més l'excepció que la regla, el model físic que obtindrem representa una important primera aproximació al problema.

## 1.5 Dinàmica de fluids

El comportament dels fluids en moviment és en general molt complex. Pensem per exemple en el moviment del fum d'una espelma o de l'aigua en un torrent. En molts casos, apareixen fenòmens que són molt difícils de tractar inclús a nivell qualitatiu. Ací estudiarem el cas més senzill, el d'un fluid ideal (que flueix sense dissipació d'energia mecànica) i incompressible que flueix en règim laminar (sense remolins) i estacionari (que no canvia amb el temps).

### 1.5.1 Conservació de la massa: equació de continuïtat

Considerem el cas d'un fluid ideal incompressible que flueix per una canonada de secció de superfície  $A$  amb velocitat  $v$  (figura 1.33). En un temps  $\Delta t$ , el volum de fluid que passa per una secció de la canonada és

$$\Delta V = v\Delta tA \quad (1.46)$$

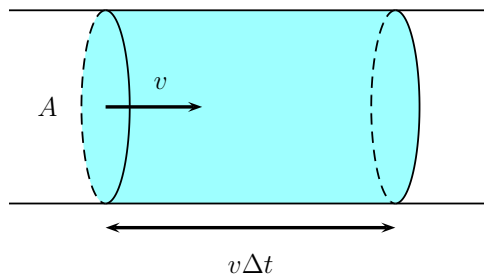


Figura 1.33: Fluid que circula per una canonada de secció  $A$  amb velocitat  $v$

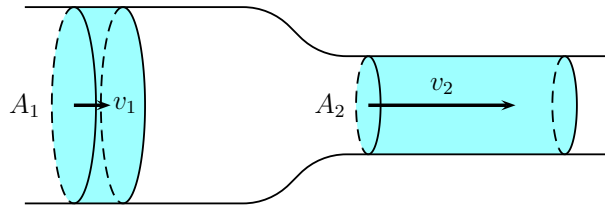


Figura 1.34: La velocitat del fluid ha d'augmentar en les seccions més estretes de la canonada per a mantenir la despesa constant

Dividint els dos termes de l'equació per  $\Delta t$  tenim que

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = Av = I_v \quad (1.47)$$

El terme  $I_v$  s'anomena *despesa* o *cabal*. És igual al volum de líquid que passa per la secció de la canonada per unitat de temps.

Considerem ara una canonada amb dos seccions d'àrea diferent  $A_1 > A_2$  (figura 1.34) per on circula un fluid perfecte. Si el règim és estacionari, la quantitat de fluid  $\Delta m$  que passa per cadascuna de les seccions en un temps  $\Delta t$  ha de ser la mateixa (conservació de la massa)

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \frac{\Delta m_2}{\Delta t} \rightarrow \rho_1 \frac{\Delta V_1}{\Delta t} = \rho_2 \frac{\Delta V_2}{\Delta t} \rightarrow \rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \quad (1.48)$$

Com el fluid és incompressible ( $\rho_1 = \rho_2$ ) l'equació pren la forma

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (1.49)$$

És a dir, la despesa es manté constant

$$I_v = Av = \text{constant} \quad (1.50)$$

L'equació (1.50) es coneix com *equació de continuïtat*. Expressa la conservació de la massa en fluids perfectes en règim estacionari.

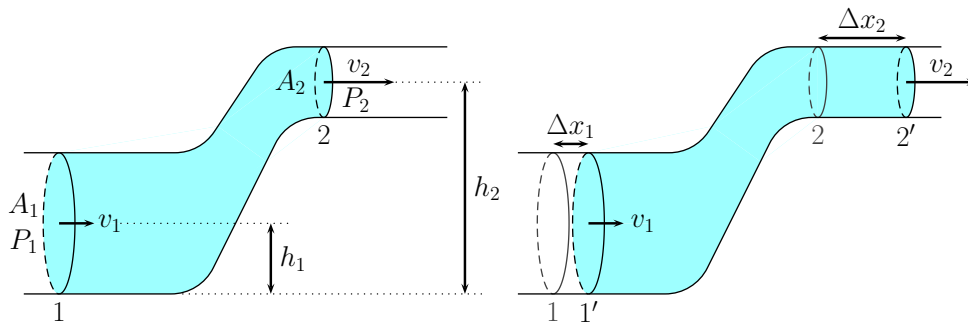


Figura 1.35: El moviment d'un fluid en una canonada està provocat per una diferència de pressió i/o altura entre dos seccions

### Exemple

Disposem d'un concentrador com el que es mostra a la figura 1.34 que produeix una reducció del radi de la secció de la canonada de 40 cm a 20 cm. Si la velocitat del fluid a la part més ampla del concentrador és de  $0.2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , calculeu quina velocitat té a l'eixida de concentrador. Si suposem que el fluid està en estat estacionari, l'equació de continuïtat ens indica que  $A_1 v_1 = A_2 v_2$ . Per tant

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} v_1 = \frac{\pi \times 0.40^2}{\pi \times 0.20^2} \times 0.2 = 0.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

### 1.5.2 Conservació de l'energia: equació de Bernoulli

En una canonada, el moviment d'un fluid està provocat per una diferència de pressió i/o altura entre dos seccions. Suposem el cas mostrat esquemàticament a la figura 1.35 on tenim un fluid en moviment. En un temps  $\Delta t$ , el fluid que estava en el punt 1 passa al punt 1' i el que estava en 2 passa a 2'. En eixe temps una quantitat de massa  $\Delta m$  deixarà d'estar a la zona 1, a una altura  $h_1$ , i de tindre una velocitat  $v_1$ . Per altra banda, la conservació de la massa fa que una quantitat de massa  $\Delta m$  del mateix valor que l'anterior arribe a la zona 2, que està a una altura  $h_2$ , i passe a tindre una velocitat  $v_2$ . En aquest procés el fluid experimenta un increment d'energia potencial

$$\Delta E_p = \Delta m g h_2 - \Delta m g h_1 = \Delta m g (h_2 - h_1) \quad (1.51)$$

i un increment d'energia cinètica

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2 = \frac{1}{2} \Delta m (v_2^2 - v_1^2) \quad (1.52)$$

El moviment del fluid està generat per una diferència de pressió entre 1 i 2 que efectua un treball sobre el fluid. El treball fet per les forces  $F_1 = P_1 A_1$  i  $F_2 = P_2 A_2$  degudes a la pressió és

$$W_1 = P_1 A \Delta x_1 = P_1 \Delta V_1 = P_1 \frac{\Delta m}{\rho_1} \quad (1.53)$$

$$W_2 = -P_2 A \Delta x_2 = -P_2 \Delta V_2 = -P_2 \frac{\Delta m}{\rho_2} \quad (1.54)$$

El signe negatiu de l'equació (1.54) es deu al fet que  $F_2$  i  $\Delta x_2$  tenen direccions oposades. El treball net fet per aquestes forces és

$$W = W_1 + W_2 = \frac{\Delta m}{\rho} (P_1 - P_2) \quad (1.55)$$

on hem utilitzat que  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$  al tractar-se d'un fluid incompressible. Com que no tenim fregament ( $\eta = 0$ ), l'energia mecànica es conserva. Per tant, el treball net fet per les pressions ha de ser igual a la variació d'energia mecànica

$$W = \Delta E_p + \Delta E_c \quad (1.56)$$

Utilitzant les equacions (1.51), (1.52) i (1.55) en l'equació (1.56) tenim

$$\frac{\Delta m}{\rho} (P_1 - P_2) = \Delta m g (h_2 - h_1) + \frac{1}{2} \Delta m (v_2^2 - v_1^2) \quad (1.57)$$

Dividint els dos termes per  $\Delta m$  i reorganitzant termes arribem a

$$P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (1.58)$$

Aquest resultat implica que en cada secció de la canonada

$$P + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constant} \quad (1.59)$$

que es coneix com *equació de Bernoulli*. Aquesta equació relaciona la pressió, altura i velocitat d'un fluid perfecte en estat estacionari en cada punt de la canonada. En equilibri tenim que  $v_1 = v_2 = 0$  i per tant

$$P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2 \quad (1.60)$$

recobrant el resultat que havíem obtingut per al fluid en equilibri.

## Teorema de Torricelli

Suposem el sistema mostrat a la figura 1.36 on un dipòsit es buida per un forat menut. A la superfície de l'aigua, el nivell baixa amb velocitat  $v_1$ . En eixe punt la secció del dipòsit té un àrea  $A_1$  i està a una altura  $h_1$ . L'obertura té un àrea  $A_2 \ll A_1$  i està a una altura  $h_2 < h_1$ . L'aigua flueix a través d'ella amb una velocitat  $v_2$ .

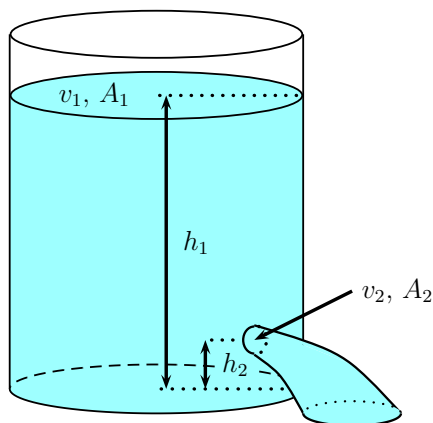


Figura 1.36: Dipòsit amb una obertura per on flueix l'aigua

L'aigua que ix per l'obertura fa baixar el nivell del dipòsit. A temps llargs aquest no és un sistema en estat estacionari perquè la velocitat d'eixida depèn de la diferència d'altures  $h_1 - h_2$ . Tanmateix, a temps curts podem aproximar que el sistema es comporta com si es trobava en estat estacionari si la baixada de nivell (donat que  $A_1 \gg A_2$ ) és molt lenta. Sota aquesta aproximació podem aplicar l'equació de Bernoulli entre la superfície de l'aigua i el forat per on ix

$$P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (1.61)$$

Tant la superfície de l'aigua com l'obertura estan en contacte i equilibri mecànic amb l'atmosfera. Això implica que la pressió als dos punts és la mateixa  $P_1 = P_{\text{atm}} = P_2$ , d'on obtenim que

$$\rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (1.62)$$

Si resollem per a la diferència de velocitats al quadrat entre la superfície i l'obertura tenim

$$v_2^2 - v_1^2 = 2g(h_1 - h_2) \quad (1.63)$$

L'aigua que ix pel forat és la que fa baixar el nivell de l'aigua del dipòsit. Podem per tant aplicar l'equació de continuïtat als dos punts

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad (1.64)$$

Com que  $A_2 \ll A_1$ , tenim que  $v_2 \gg v_1$  i, en conseqüència, podem aproximar que

$$v_2^2 - v_1^2 \approx v_2^2 \quad (1.65)$$

En substituir aquest resultat en l'equació (1.63) tenim finalment que la velocitat d'eixida de l'aigua per l'obertura és

$$v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \quad (1.66)$$

L'equació (1.66) es coneix com *Teorema de Torricelli*. Formalment és equivalent a deixar caure una pedra «d'aigua» des d'una altura  $\Delta h = h_1 - h_2$ .

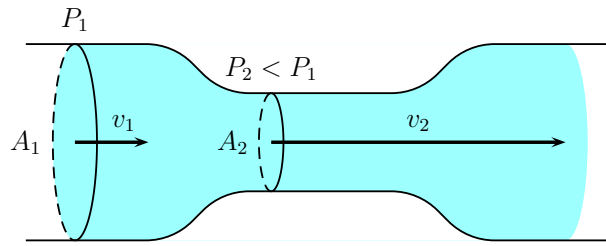


Figura 1.37: Efecte Venturi: en l'estrenyiment en una canonada la velocitat del fluid augmenta i la pressió disminueix

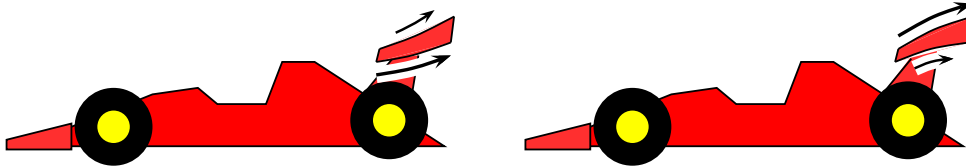


Figura 1.38: La forma de l'aleró utilitza l'efecte Venturi per a millorar l'estabilitat del cotxe. A la figura de l'esquerra, l'aire per baix de l'aleró circula amb major velocitat que el que va per dalt. Això implica que la pressió baix de l'aleró és menor que dalt, el que produeix una força neta que «xafa» el cotxe sobre l'asfalt. En canvi, a la figura de la dreta tenim l'efecte contrari. La força neta estaria en aquest cas dirigida cap a dalt, i això faria més inestable la posició del cotxe sobre l'asfalt

## Efecte Venturi

Considerem ara una canonada horitzontal amb un estrenyiment com mostra la figura 1.37. Si apliquem l'equació de continuïtat entre un punt de la zona ampla i un punt de la zona estreta

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (1.67)$$

Donat que  $A_1 > A_2$  tenim que  $v_2 > v_1$ . Apliquem ara l'equació de Bernoulli ( $h_1 = h_2$ )

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (1.68)$$

Com que  $v_2 > v_1$ , tenim que  $P_2 < P_1$ . Això és l'anomenat *efecte Venturi*

L'augment de la velocitat d'un fluid implica la disminució de la pressió.

L'efecte Venturi serveix per a explicar qualitativament molts efectes. Per exemple, a l'aleró dels cotxes de carreres (figura 1.38) l'aire circula amb més velocitat per baix que per dalt. La pressió en la zona de baix és aleshores menor que a la part de dalt, el que fa que aparega una força neta cap avall que «xafa» el cotxe sobre l'asfalt. Vegem alguns exemples de fenòmens i dispositius relacionats amb l'efecte Venturi.

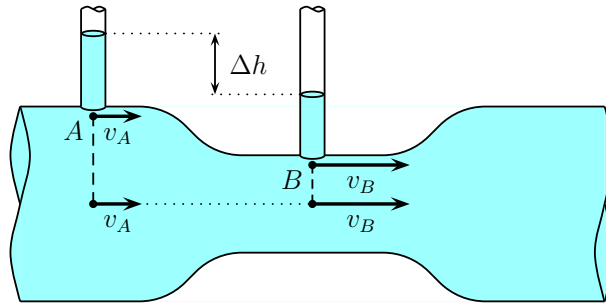


Figura 1.39: Dibuix esquemàtic d'un venturímetre. En l'estrenyiment s'hi produeix una disminució de pressió que determina la diferència d'altures  $h$

## Venturímetre

La figura 1.39 mostra un dibuix esquemàtic d'un dispositiu per a mesurar el cabal d'un líquid que flueix per una canonada anomenat *venturímetre*. El dispositiu té un estrenyiment i dos tubs verticals oberts a l'atmosfera, un situat en l'estrenyiment i l'altre just davant (o just darrere). Una volta assolit l'estat estacionari, el líquid en els tubs verticals roman pràcticament en equilibri. Per tant, l'altura de la columna de fluid ens indica la diferència de pressions entre el líquid i l'atmosfera (la pressió manomètrica) i la diferència d'altures  $\Delta h$  entre la part superior de les dos columnes ens indica la diferència de pressió en el fluid en els punts  $A$  i  $B$

$$P_A - P_B = \rho g \Delta h \quad (1.69)$$

Si apliquem l'equació de Bernoulli entre els punts  $A$  i  $B$  tenim que

$$P_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = P_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 \quad (1.70)$$

Per altra banda, la conservació del cabal ens indica que

$$I_v = v_A A_A = v_B A_B \quad (1.71)$$

Resolent per a  $v_A$  i  $v_B$  en l'equació (1.71) i substituint en l'equació (1.70) tenim

$$P_A + \frac{1}{2} \rho \frac{I_v^2}{A_A^2} = P_B + \frac{1}{2} \rho \frac{I_v^2}{A_B^2} \quad (1.72)$$

d'on, utilitzant l'equació (1.69), podem obtenir el cabal en funció de les àrees i la diferència d'altures  $\Delta h$

$$I_v = \sqrt{2g\Delta h} \frac{A_A A_B}{\sqrt{A_A^2 - A_B^2}} \quad (1.73)$$

L'esquema mostrat a la figura 1.39 només pot utilitzar-se en el cas de líquids. No obstant això, es pot modificar per al cas d'un gas (problema 1.16).



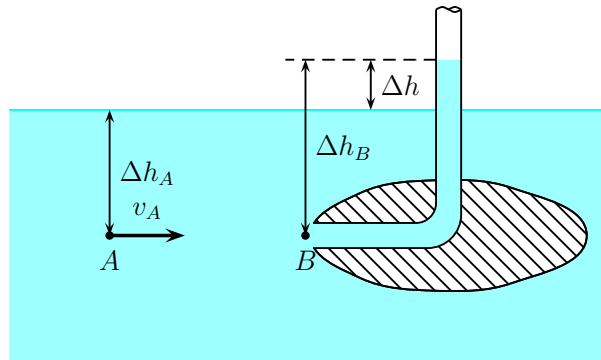


Figura 1.40: Dibuix esquemàtic d'un tub de Pitot. Dintre del tub de Pitot el fluid es pot assumir en estat estacionari i la diferència d'altures  $\Delta h$  ens dóna la velocitat relativa del fluid al tub

### Tub de Pitot

El tub de Pitot (figura 1.40) serveix per a mesurar la velocitat del fluid relativa al dispositiu de mesura. Dintre del tub de Pitot, el fluid es troba en repòs. Si apliquem l'equació de Bernoulli als punts  $A$  (allunyat de l'aparell on la seua influència és negligible) i el punt  $B$ , en repòs, tenim que

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B \quad (1.74)$$

on  $v_A$  és la velocitat del fluid que volem mesurar. La diferència d'altures entre el punt  $B$  i el nivell que assoleix el tub vertical ens dóna la diferència de pressions entre el punt  $B$  i l'atmosfera

$$P_B - P_{\text{atm}} = \rho g \Delta h_B \quad (1.75)$$

Per altra banda, suposem que la velocitat del fluid en el pla vertical que passa per  $A$  només té component horitzontal. Això vol dir que podem emprar l'equació fonamental de l'estàtica de fluids per a estimar la diferència de pressió entre el punt  $A$  i l'atmosfera

$$P_A - P_{\text{atm}} = \rho g \Delta h_A \quad (1.76)$$

Combinant les equacions (1.74), (1.75) i (1.76) podem estimar la velocitat del fluid relativa a l'aparell de mesura

$$v_A = \sqrt{2g\Delta h} \quad (1.77)$$

on hem emprat que  $\Delta h = \Delta h_B - \Delta h_A$ .

El disseny mostrat en la figura 1.40 només serveix per als líquids. Tanmateix, el disseny es pot modificar per a poder ser utilitzat també per als gasos (problema 1.18). De fet, els avions porten un tub de Pitot per a mesurar la velocitat de l'aire relativa a l'avió. En aquest cas hem de tenir en compte la compressibilitat dels gasos per a fer l'estimació correcta de la velocitat.

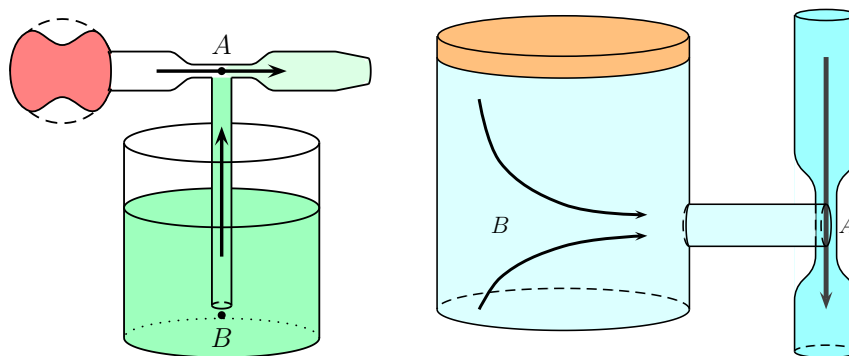


Figura 1.41: (Esquerra) En un polvoritzador de perfum la velocitat de l'aire en passar per l'estrenyiment fa disminuir la pressió. La disminució de pressió provoca un flux de perfum des del dipòsit de la base fins a l'estrenyiment, on es barreja amb l'aire i és arrossegat fins l'eixida. (Dreta) L'efecte Venturi es pot utilitzar per a generar el buit a un compartiment utilitzant un torrent d'aigua. La pressió a  $A$  és menor que a  $B$ , el que fa arrossegar l'aire de dins del compartiment

## Dispositius de buit

L'efecte Venturi ens indica que un augment de la velocitat del fluid produeix una disminució de la pressió. Això s'utilitzava en els polvoritzadors de perfum (figura 1.41, esquerra). Quan premem la pera es produeix un flux d'aire que, en passar per l'estrenyiment, provoca que la velocitat de l'aire augmente i que la pressió al punt  $A$  disminuïska. Si la disminució de pressió és suficientment gran, es produirà un flux de perfum des del punt  $B$  fins al punt  $A$ , on es barrejarà amb l'aire i serà arrossegat fins l'eixida.

Una altra aplicació de l'efecte Venturi és l'obtenció d'un buit mitjançant un torrent d'aigua (o trompa d'aigua). A la figura 1.41 (dreta) es mostra un esquema d'aquest tipus de dispositiu. Pel tub  $A$  es fa circular aigua amb una velocitat molt alta, que fa que la pressió siga baixa. La diferència de pressions entre el tub ( $A$ ) i el dipòsit ( $B$ ) provoca que l'aire del dipòsit es moga cap al tub i siga arrossegat pel corrent d'aigua. Aquest flux d'aire finalitza quan la pressió de l'aire del dipòsit s'igualava a la pressió que hi ha al tub.

## Sustentació

Relacionada amb l'efecte Venturi tenim la força de sustentació que contraresta la força de la gravetat en els avions en vol. Aquesta força prové del flux d'aire que envolta les ales dels avions. Si les ales foren simètriques respecte de la direcció del flux d'aire, la velocitat dalt i baix de l'ala seria la mateixa. Per això, les ales presenten un cert *angle d'atac* que fa que la distribució de la velocitat d'aire siga asimètrica.

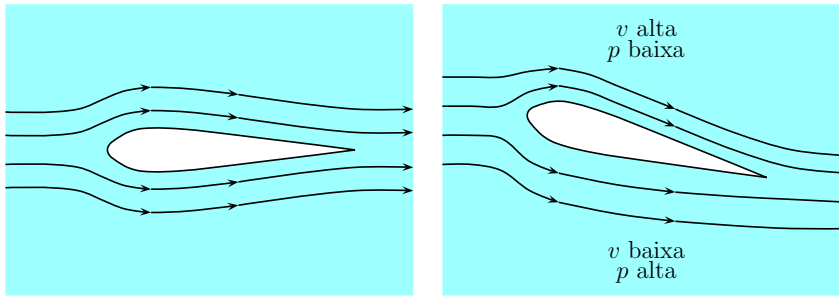


Figura 1.42: Perquè el flux d'aire que envolta l'ala d'un avió done lloc a una força de sustentació ha de presentar una asimetria que ve donada per l'angle d'atac. En aquest cas, si la velocitat del flux d'aire dalt de l'ala és major que baix de l'ala, es produirà una diferència de pressió que generarà la força de sustentació

Podem justificar la sustentació de forma qualitativa mitjançant el teorema de Bernoulli. Considerem l'ala d'un avió que presenta un cert angle d'atac, com mostra la imatge de la dreta de la figura 1.42. Suposem dos punts del fluid pròxims davant de l'ala del avió  $A$  i  $B$  on el fluid té una velocitat similar  $v_A \approx v_B$  i on té una pressió pareguda  $P_A \approx P_B$ . Suposem que la línia de corrent que passa per  $A$  continua per damunt de l'ala. En un punt  $A'$  que pertany a aquesta línia de corrent i està damunt de l'ala, el fluid té una velocitat  $v_{A'}$  i una pressió  $P_{A'}$ . Si entre aquests dos punts apliquem el teorema de Bernoulli tenim

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_{A'} + \frac{1}{2}\rho v_{A'}^2 \quad (1.78)$$

on hem suposat que  $h_A \approx h_{A'}$ . Per altra banda, suposem que la línia de corrent que passa pel punt  $B$  continua per baix de l'ala. En un punt  $B'$  de baix de l'ala que pertany a aquesta línia de corrent, el fluid té una velocitat  $v_{B'}$  i una pressió  $P_{B'}$ . Com abans, si apliquem el teorema de Bernoulli entre aquests dos punts tenim

$$P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 = P_{B'} + \frac{1}{2}\rho v_{B'}^2 \quad (1.79)$$

La força de sustentació  $F_{\text{sus}}$  és la component vertical de la força  $F$  que el fluid exerceix sobre l'ala. Si denominem  $\theta$  a l'angle d'atac de l'ala (l'angle que forma amb l'horitzontal), la relació entre  $F_{\text{sus}}$  i  $F$  és

$$F_{\text{sus}} = F \cos(\theta) \quad (1.80)$$

La força  $F$  prové de la diferència de pressió entre la part de dalt i la de baix de l'ala

$$F = (P_{\text{baix}} - P_{\text{dalt}})S \quad (1.81)$$

on  $S$  és la superfície de la part superior i inferior de l'ala. Si suposem una pressió i velocitat del fluid aproximadament homogènia dalt i baix de l'ala tenim que  $P_{\text{dalt}} \approx P_{A'}$  i  $P_{\text{baix}} \approx P_{B'}$ . Per

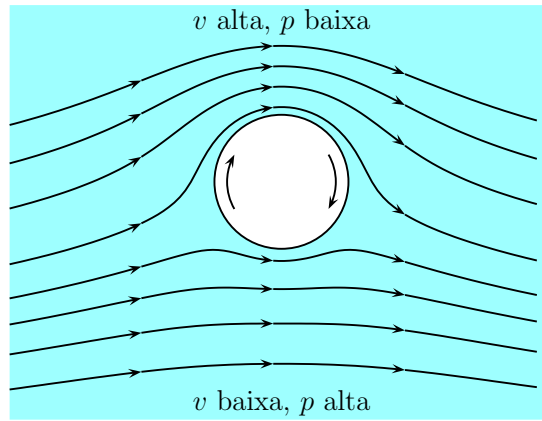


Figura 1.43: Efecte Magnus: el moviment de rotació de la pilota unit al moviment de translació provoca que el fluid que està per dalt tinga una major velocitat i una menor pressió que el que està per baix. Això produeix l'aparició d'una força similar a la sustentació

tant

$$F = (P_{B'} - P_{A'})S = \left( P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 - \frac{1}{2}\rho v_{B'}^2 - P_A - \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \frac{1}{2}\rho v_{A'}^2 \right) S \approx \frac{1}{2}\rho(v_{A'}^2 - v_{B'}^2)S \quad (1.82)$$

on hem emprat les equacions (1.78) i (1.79) i que  $P_A \approx P_B$  i  $v_A \approx v_B$ . La força de sustentació es pot estimar finalment com

$$F_{\text{sus}} = \frac{1}{2}\rho \cos \theta (v_{A'}^2 - v_{B'}^2)S \quad (1.83)$$

Amb aquesta anàlisi podem observar com la força de sustentació depèn de l'àrea  $S$  de l'ala (cara superior i inferior), de la diferència de velocitat que té l'aire en la cara superior i inferior al quadrat i del cosinus de l'angle d'atac. De l'equació (1.83) concloem que, perquè hi haja sustentació, necessitem que la velocitat de l'aire que passa per dalt de l'ala siga major que la que passa per baix. Això suposa que la pressió és menor i que la component vertical de la força neta s'oposa a la força de gravetat.

Resulta evident però que l'anàlisi feta de la força de sustentació en les ales dels avions només és qualitativa. El procés que dóna lloc a la sustentació és molt més complex i s'ha d'avaluar amb detall la distribució de velocitats i pressions al voltant de tota l'ala.

## Efecte Magnus

En el futbol és coneguda la possibilitat de fer llançaments «amb efecte». Per a produir l'efecte, a la pilota li hem de donar un moviment de rotació a més del moviment de translació. Això produeix l'aparició d'una força similar a la força de sustentació que hem vist abans, que modifica la trajectòria de la pilota.

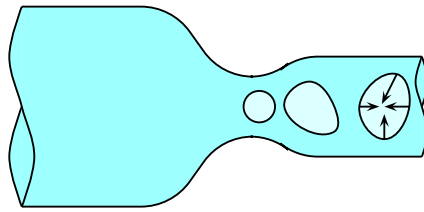


Figura 1.44: Quan la velocitat del líquid fa que la seua pressió estiga per baix de la pressió de vapor, el líquid comença a bullir (es formen bombolles). Si la velocitat baixa i la pressió del fluid líquid que rodeja la bombolla en fase gasosa augmenta, es produeix una implosió que pot fer malbé la canonada

Suposem que tenim una pilota que té un moviment de rotació en la direcció de les agulles del rellotge al si d'un fluid. La pilota també té un moviment de translació que provoca que el fluid tinga una velocitat relativa respecte de la pilota que va d'esquerra a dreta (figura 1.43). La condició de no lliscament (secció 1.2.4) provoca que la capa d'aire en contacte amb la pilota gire amb ella. Aquest moviment es trasllada a la resta del fluid. Per tant tenim que dalt de la pilota se *sumen* les components de la velocitat degudes a la translació i a la rotació. Mentre, a la part baixa de la pilota les components es *resten*. Això fa que la velocitat del fluid siga major a la part de dalt de la pilota, que en la part de baix. Associada a aquesta diferència de velocitats hi apareix una diferència de pressions que provoca un efecte paregut al que dona la força de sustentació. D'aquesta forma es pot generar una força que modifica la trajectòria de la pilota, el que es coneix com *efecte Magnus*.

En determinats casos el que volem aconseguir és una compensació parcial de la força de la gravetat i que la pilota es mantinga més temps en l'aire. Aquest és el cas per exemple del golf, on busquem que la pilota arribe el més lluny possible. De fet, per a augmentar la força de sustentació, la superfície de la pilota de golf es fa rugosa.

## Cavitació

Al líquids hi existeix un límit inferior per a la pressió que ve donat per la pressió de vapor. Si en un punt la velocitat del fluid és suficientment alta com perquè la pressió siga menor que la pressió de vapor, es formen bombolles de vapor (el fluid es fica a bullir). Aquest fenomen s'anomena de *cavitació*, és a dir, de formació de cavitats.

La formació de bombolles té un cost energètic donat per la tensió superficial (s'han de formar superfícies de separació líquid-vapor). En canvi, la presència d'impureses i la rugositat de la canonada hi faciliten la cavitació. A efectes pràctics s'ha d'evitar la formació de cavitats perquè, en passar a una regió de major pressió, les bombolles condensen ràpidament. Això genera unes

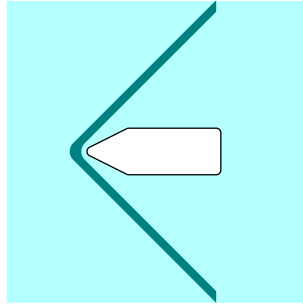


Figura 1.45: Quan un cos es mou a velocitats supersòniques es forma una capa d'aire comprimit al seu davant, una ona de xoc

pressions molt elevades sobre la superfície de les canonades, fins el punt de fer-les malbé (es «piquen»).

### 1.5.3 La condició de fluid incompressible

Quan vam introduir el coeficient de compressibilitat vam indicar que, en la majoria dels casos, podem suposar que el fluid és incompressible. Els efectes apreciables de la compressibilitat del fluid es poden produir per diferències de temperatura (per la variació de la densitat amb la temperatura) i/o pressió. En aquest segon cas, l'equació de Bernoulli ens permet estimar sota quines condicions podem considerar el fluid incompressible. Suposem que podem aplicar l'equació de Bernoulli entre dos punts situats a la mateixa altura

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (1.84)$$

A partir d'aquesta equació podem estimar la diferència de pressions en funció de la diferència de velocitats del flux

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) \quad (1.85)$$

Perquè els efectes de la compressió siguin apreciables, la diferència de velocitats ha de ser molt gran. Si  $v_2 \gg v_1$ , podem aproximar que

$$\Delta P \approx \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (1.86)$$

Els efectes de la pressió només seran apreciables si produeixen unes variacions importants de la densitat. De la definició del mòdul de compressibilitat (equació (1.4)), tenim que

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta P}{B} \quad (1.87)$$

La condició de fluid incompressible es pot aplicar si les fluctuacions de la densitat són menudes  $\Delta \rho / \rho \ll 1$ . De les equacions anteriors tenim que aquesta condició es tradueix en

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\rho v^2}{B} \ll 1 \quad (1.88)$$

La velocitat de propagació del so en un fluid es pot estimar igual a  $c_s = \sqrt{B/\rho}$ .<sup>7</sup> Utilitzant aquesta expressió, la condició d'incompressibilitat es pot escriure en la forma

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{v^2}{c_s^2} = \mathcal{M}^2 \quad (1.89)$$

on  $\mathcal{M} \equiv v/c_s$  és el nombre de Mach. Com vam dir al principi del capítol, els efectes de la compressió del fluid es poden negligir si el nombre de Mach és menor que 0.2. En aquest cas tindríem que les variacions de la densitat són de  $\mathcal{M}^2 = 0.2^2$ , és a dir, d'un 4%. En l'aire això correspondria a una avioneta volant a uns 240 km/h. En canvi, per a un Boeing 747 volant a Mach 0.7 (850 km/h), els canvis de densitat poden arribar al 50%. Quan un objecte vola a velocitats supersòniques,  $\mathcal{M} > 1$ , es forma una ona d'aire comprimit davant de l'objecte, una ona o front de xoc (figura 1.45).

## 1.6 Fluids viscosos

Fins ara hem tractat el fluid perfecte, incompressible i amb viscositat nul·la. En tractar un fluid viscosos apareixen efectes d'interacció entre les capes de fluid en moviment i entre aquestes i les superfícies sòlides amb què estiga en contacte. Aquestes interaccions provoquen un canvi en el perfil de velocitats i una dissipació energètica en forma de calor. En el cas d'un fluid que flueix per una canonada, el canvi en el perfil de velocitats es mostra a la figura 1.47. Quan el fluid és ideal (la seua viscositat és nul·la) no hi ha interacció amb les parets i la velocitat és la mateixa en tota la secció transversal. En el fluid viscosos però, la interacció entre el fluid i la paret provoca que la capa de fluid en contacte amb la paret es trobe en repòs (velocitat nul·la). Per altra banda, el fluid del centre de la canonada és el que més nota la diferència de pressió que produeix el flux. En eixe punt, la velocitat del fluid és màxima. Entre la paret i el centre tenim una gradació de velocitat produïda per la interacció entre les diverses capes.

Per a calcular el perfil de la velocitat en una canonada horitzontal partim de les forces que actuen sobre la capa de fluid entre  $r$  i  $r + dr$  (figura 1.46). La força que impulsa el fluid és la deguda a la diferència de pressió entre els extrems (que suposem horitzontal i dirigida d'esquerra a dreta)

$$F_P = -\Delta P[S(r + dr) - S(r)] = -\Delta P[\pi(r + dr)^2 - \pi r^2] \approx -\Delta P 2\pi r dr \quad (1.90)$$

on hem negligit el terme amb  $dr^2$ . A més d'aquesta força hem de considerar l'efecte de la viscositat. A la capa tenim una força provocada per la capa de fluid inferior (que té una major

---

<sup>7</sup>Es pot trobar una demostració d'aquesta estimació en llibres de la bibliografia com el (Tipler i Mosca, 2004) o el (Serway, Raymond i Jewett, 2005).

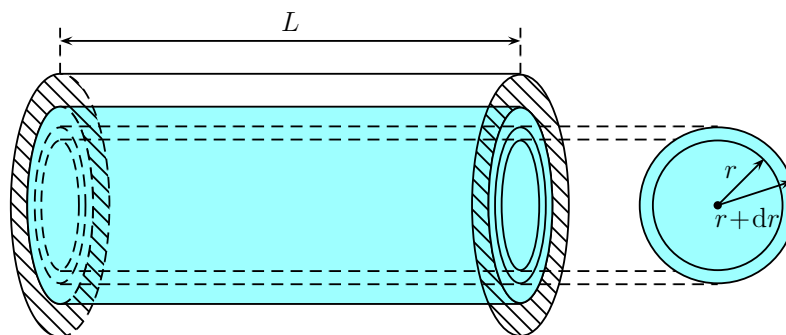


Figura 1.46: Esquema per a calcular el perfil de velocitats en una canonada cilíndrica amb un fluid viscós. En centrem en la capa entre  $r$  i  $r + dr$

velocitat) i que té la mateixa direcció que el flux (és una força d'arrossegament). Podem calcular-la a partir de l'equació (1.5)

$$F_{v,1} = -\eta(2\pi rL) \left. \frac{dv}{dr} \right|_r \quad (1.91)$$

on  $2\pi rL$  és la superfície de contacte entre les capes. També tenim una força que la capa superior exerceix sobre la capa que estem estudiant. Encara que l'origen és el mateix que en el cas anterior, en aquest cas s'oposa al moviment perquè la velocitat de la capa superior és inferior al de la nostra capa

$$F_{v,2} = \eta[2\pi(r + dr)L] \left. \frac{dv}{dr} \right|_{r+dr} \quad (1.92)$$

on la superfície de contacte és ara  $2\pi(r + dr)L$  i el gradient de velocitat està calculat en el punt  $r + dr$ . Per posar el gradient de velocitat en el punt  $r$ , ho desenvolupem en sèrie

$$\left. \frac{dv}{dr} \right|_{r+dr} \approx \left. \frac{dv}{dr} \right|_r + dr \left. \frac{d^2v}{dr^2} \right|_r \quad (1.93)$$

Amb aquesta expressió podem escriure  $F_{v,2}$  com

$$F_{v,2} = \eta[2\pi(r + dr)L] \left( \left. \frac{dv}{dr} \right|_r + dr \left. \frac{d^2v}{dr^2} \right|_r \right) \quad (1.94)$$

Com que suposem que la capa de fluid es mou en estat estacionari, la força neta que actua sobre aquesta ha de ser nul·la, per tant

$$-\Delta P 2\pi r dr + \eta 2\pi L \left. \frac{dv}{dr} \right|_r + \eta 2\pi r L \left. \frac{d^2v}{dr^2} \right|_r = 0 \quad (1.95)$$

Simplificant l'expressió tenim

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} = \frac{\Delta P}{\eta L} \quad (1.96)$$

Aquesta equació l'hem d'integrar per a tot el fluid dins de la canonada. A més, per simetria tenim

$$\left. \frac{dv}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (1.97)$$



i, per la condició de no lliscament a la superfície de la canonada

$$v(a) = 0 \quad (1.98)$$

on  $a$  és el radi de la canonada. Podem provar a resoldre aquesta equació amb el wxMaxima.

Primer introduïm l'equació diferencial

```
(%i1) eqn: diff(v(r),r,2)+(1/r)*'diff(v(r),r)=dP/(L*eta);
(%o1) 'diff(v(r),r,2)+'diff(v(r),r,1)/r=dP/(eta*L)
```

Utilitzem la instrucció `ode2` per integrar l'equació

```
(%i2) ode2(eqn,v(r),r);
(%o2) v(r)=(r^2*dP)/(4*eta*L)+(%k1*log(r))/(eta*L)+%k2
(%i3) subst(%o2,v(r));
(%o3) (r^2*dP)/(4*eta*L)+(%k1*log(r))/(eta*L)+%k2
(%i4) v(r):='%o3;
(%o4) v(r):=(r^2*dP)/(4*eta*L)+(%k1*log(r))/(eta*L)+%k2
```

on les constants  $\%k1$  i  $\%k2$  les calculem a partir de les condicions de contorn. La constant  $\%k1$  ha de ser nul·la perquè el logaritme divergeix a  $r = 0$

```
(%i5) %k1: 0.0;
(%o5) 0.0
(%i6) v(r);
(%o6) (r^2*dP)/(4*eta*L)+%k2
```

D'altra banda, imposem que  $v(a) = 0$

```
(%i7) solve(v(a)=0,%k2);
(%o7) [%k2=-(a^2*dP)/(4*eta*L)]
(%i8) subst(%o7,%k2);
(%o8) -(a^2*dP)/(4*eta*L)
(%i9) %k2: '%o8;
(%o9) -(a^2*dP)/(4*eta*L)
(%i10) v(r);
(%o10) (r^2*dP)/(4*eta*L)-(a^2*dP)/(4*eta*L)
```

Obtenim finalment

$$v = \frac{a^2}{4\eta} \frac{\Delta P}{L} \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] = v_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad (1.99)$$

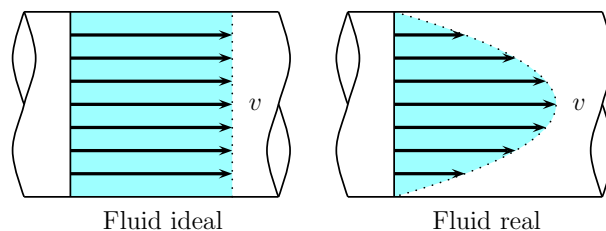


Figura 1.47: En un fluid ideal totes les parts del fluid tenen la mateixa velocitat. En un fluid real les forces viscoses fan que la velocitat del fluid siga nul·la a les parets i màxima al centre de la canonada

on  $v_{\max} = v(0)$  és la velocitat màxima (al centre de la canonada) i  $\Delta P$  és la diferència de pressió sobre la longitud  $L$  de la canonada que provoca el moviment del fluid. Amb el perfil de velocitats podem calcular el valor del cabal<sup>8</sup>

$$I_v = \int_0^a v(r)2\pi r dr = \frac{\pi a^4}{8\eta} \frac{\Delta P}{L} \quad (1.100)$$

i, amb aquest, la velocitat mitjana

$$\langle v \rangle = \frac{I_v}{A} = \frac{I_v}{\pi a^2} = \frac{a^2}{8\eta} \frac{\Delta P}{L} = \frac{v_{\max}}{2} \quad (1.101)$$

L'equació (1.100) es coneix com la *lei de Poiseuille*. La va obtenir empíricament Hagen en 1839 i, de forma independent, Poiseuille en 1842. L'equació la va justificar teòricament Stokes en 1845. Experimentalment s'observa que aquesta llei descriu el flux en canonades fins a un valor crític de la velocitat mitjana. A partir d'eixe punt apareixen inestabilitats i el flux comença a oscil·lar entre els règims laminar i turbulent fins que, per a valors suficientment grans de la velocitat, el flux esdevé sempre turbulent.

La viscositat no només canvia el perfil de velocitats en la canonada. Amb la interacció entre capes de fluid es produeix una dissipació energètica. Per a un fluid perfecte, l'equació de Bernoulli en una canonada horitzontal és

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constant} \quad (1.102)$$

Per a un fluid que es moga per una canonada de secció constant amb velocitat  $v$  constant, aquesta equació prediu que la pressió ha de romandre constant. En un fluid viscos en canvi tenim una pèrdua de pressió amb la distància que hem de compensar per a mantenir el cabal constant. Si el flux a la nostra canonada ve descrit per l'equació de Poiseuille, la diferència de pressió que hem d'aplicar per contrarestar la dissipació d'energia és proporcional al cabal

$$\Delta P = I_v R, \quad R = \frac{8\eta L}{\pi a^4} \quad (1.103)$$

<sup>8</sup>Podem fer la integral amb el wxMaxima

```
(%i1) v(r):=a**2/(4*eta)*dP/L*(1-(r/a)**2)$;
(%i2) integrate(v(r)*2*pi*r,r,0,a);
(%o2) (pi*a^4*dP)/(8*eta*L)
```

La constant de proporcionalitat  $R$  té la funció d'una resistència que s'oposa al moviment de fluid dins la canonada. En el cas considerat,  $R \propto 1/a^4$ , és a dir, si el radi  $a$  de la canonada disminueix,  $R$  augmenta i per tant hem d'augmentar la diferència de pressió per mantenir el cabal constant.

### 1.6.1 Transició del règim laminar a turbulent

Hem comentat a la secció anterior que la transició del règim laminar a turbulent es produeix quan la velocitat mitjana del fluid assoleix un cert valor crític. Com a exemple d'aquesta transició descrivim en aquesta secció qualitativament el flux d'un fluid pel voltant d'un cilindre.

Per qualificar les característiques del flux utilitzem un nombre adimensional, el nombre de Reynolds  $\mathcal{R}$ , que per al cas considerat d'un fluid que flueix pel voltant d'un cilindre pren la forma

$$\mathcal{R} = \frac{2a\rho v}{\eta} \quad (1.104)$$

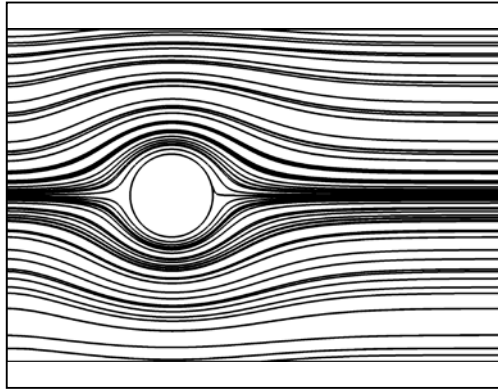
on  $a$  és el radi del cilindre, i  $\rho$ ,  $v$  i  $\eta$  són la densitat, la velocitat mitjana i la viscositat del fluid, respectivament. No derivarem com s'obté el nombre de Reynolds però, si ens fixem en la seua expressió, podem observar que conté el quocient entre la velocitat mitjana i la viscositat. Quan  $\mathcal{R}$  és baix, domina la viscositat i el règim és laminar. En canvi, quan  $\mathcal{R}$  és alt, domina la velocitat i el règim passa a ser turbulent.

L'ús de nombres adimensionals com el nombre de Reynolds respon a un important teorema anomenat *similitud dinàmica*. Aquest teorema indica que dos sistemes amb la mateixa geometria on els fluids es mouen amb un nombre de Reynolds paregut es comporten de forma similar. Això permet l'ús de models a escala per estudiar el comportament del fluid en els casos reals, per exemple per estudiar el flux d'aire en un avió.

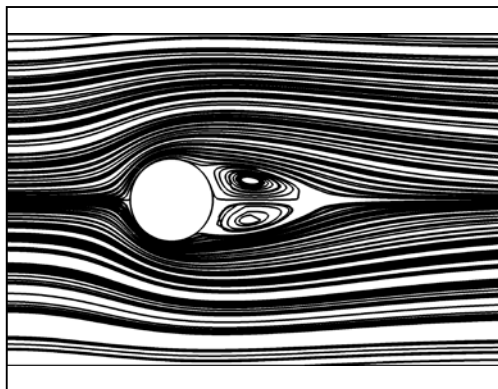
Com a exemple de la transició entre diferents règims, la figura 1.48 mostra el flux d'un fluid incompressible però viscos per a diferents valors del nombre de Reynolds. Quan  $\mathcal{R} < 1$  tenim un flux laminar, que està dominat per la viscositat. Si augmentem  $\mathcal{R}$  fins que supera la unitat, apareixen dos remolins just darrere del cilindre que estan enganxats a aquest. Es pot justificar l'aparició d'aquests remolins si considerem la diferència de velocitat del fluid entre la superfície del fluid (zero) i les parts allunyades del cilindre. Si aquesta diferència de velocitat del fluid no és massa gran, les partícules de fluid tenen temps de difondre's en el corrent general. Quan la velocitat augmenta però, això no és possible i la diferència de velocitats fa que s'originen els remolins. Si continuem augmentant  $\mathcal{R}$ , els remolins s'allarguen fins que, quan  $\mathcal{R} \approx 40$ , els remolins comencen a despenjar-se del cilindre. Cada volta que un remolí es despenja, un altre comença a formar-se. El dos remolins se separen alternativament, primer el superior, després l'inferior, després el superior i així seqüencialment. En moure's avall en el flux, es genera una estela coneguda com *estela de Von Kármán*. En aquest valor d' $\mathcal{R}$ , el règim passa de ser estacionari

a ser dependent del temps, però la dependència és periòdica. Si continuem augmentant el nombre de Reynolds fins a arribar a alguns centenars, apareixen turbulències, la velocitat es fa molt irregular i es perd la periodicitat. Finalment, en augmentar encara més el nombre de Reynolds, la *cua* turbulent s'aprima. No només això, les mesures han mostrat que en aquest punt la força que exerceix el fluid sobre el cilindre disminueix. Per aquest motiu, a les ales dels avions s'afegeixen uns dispositius per a crear turbulències i disminuir el fregament amb l'aire.

$$\mathcal{R} = 10^{-2}$$



$$\mathcal{R} = 20$$



$$\mathcal{R} = 100$$

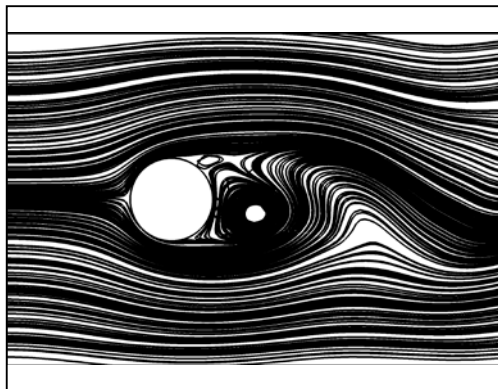
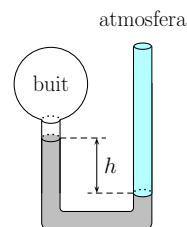


Figura 1.48: Patrons de flux pel voltants d'un cilindre per a diferents valors del nombre de Reynolds. Les figures són el resultat de càlculs numèrics fets amb el programa COMSOL Multiphysics. L'aparició de turbulència normalment significa que el càlcul no convergeix

## 1.7 Problemes



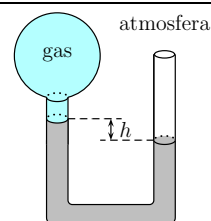
1.1. Tenim un baròmetre de tub en U amb mercuri ( $\rho = 13.54 \text{ g cm}^{-3}$ ). Per a mesurar la pressió atmosfèrica connectem una branca a un recipient on s'ha fet el buit mentre l'altra està oberta a l'atmosfera. Si la diferència de pressions entre les branques provoca una diferència d'altures  $h = 76.2 \text{ cm}$ , determineu quina és la pressió atmosfèrica eixe dia.



Sol:  $P_{\text{atm}} = 101.6 \text{ kPa}$



1.2. Un manòmetre està format per un tub en U que conté mercuri. Per a mesurar la pressió manomètrica d'un gas connectem una branca del manòmetre al recipient que el conté i deixem l'altra branca oberta a l'atmosfera. Si la diferència d'altura del nivell que assoleix el mercuri és  $h = 6.5 \text{ cm}$



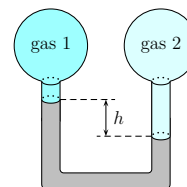
(a) Quina és la pressió manomètrica del gas?

(b) Si la pressió atmosfèrica és de 759.4 Torr, quina és la pressió baromètrica del gas?

Sol: (a)  $\Delta P_{\text{gas}} = -8.5 \text{ kPa}$  (b)  $P_{\text{gas}} = 92.7 \text{ kPa}$



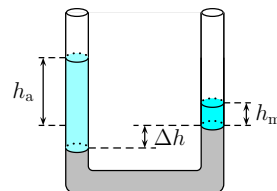
1.3. Per a conèixer la diferència de pressió entre els gasos de dos recipients els connectem mitjançant un tub en U que conté mercuri ( $\rho = 13.54 \text{ g cm}^{-3}$ ). Si la diferència d'altura entre els nivells que assoleix el mercuri és  $h = 3.2 \text{ cm}$ , determineu la pressió relativa que hi existeix entre els gasos dels dos recipients.



Sol:  $P_2 - P_1 = 4.2 \text{ kPa}$



1.4. A un tub en U hi tenim aigua (branca esquerra), mercuri (fons) i metanol (branca dreta). Quan el sistema assoleix l'equilibri, apareix una diferència  $\Delta h = 1.5 \text{ cm}$  entre els nivells de mercuri. Si l'altura de la columna d'aigua és  $h_a = 24 \text{ cm}$ ,



(a) Quina és l'altura de la columna de metanol?

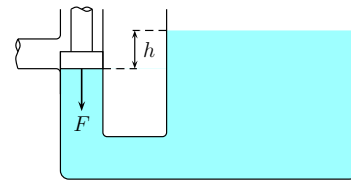
(b) Com ha de variar l'altura anterior perquè s'igualen els nivells de mercuri?

Dades:  $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ ,  $\rho_{\text{Hg}} = 13.5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ ,  $\rho_{\text{CH}_3\text{OH}} = 0.79 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$

Sol: (a)  $h_m = 4.7 \text{ cm}$ , (b)  $h_m = 30.4 \text{ cm}$



1.5. En el dispositiu de la figura s'utilitza un pistó per a controlar el nivell màxim d'aigua a què pot arribar el dipòsit. El pistó és circular amb un diàmetre de 5 cm i exerceix una força de 5 N (a sumar a l'exercida per l'atmosfera).



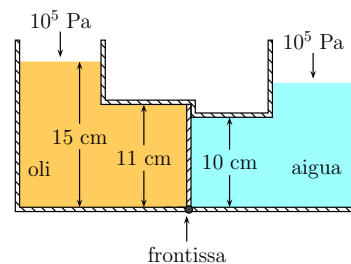
Indiqueu quin es el nivell màxim de l'aigua al dipòsit  $h$  respecte de l'altura del pistó.

Sol:  $h = 26.0$  cm

### Problema resolt a l'apèndix B.1



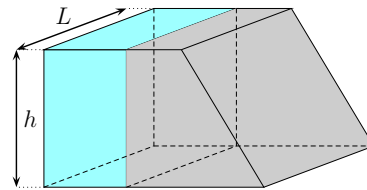
1.6. Tenim dos dipòsits separats per una làmina amb massa negligible que pot girar per mitjà d'una frontissa. Si al dipòsit de l'esquerra tenim oli de densitat específica  $\rho_e = 0.8$ , calculeu quin és el nivell màxim que pot assolir l'aigua sense que la làmina es desplace i hi haja transvàs de líquid entre els dipòsits.



Sol:  $h_{\text{aigua}} = 2.28$  m



1.7. S'està projectant una presa de longitud  $L = 200$  m i altura  $h = 80$  m. Calculeu quina força total exercirà l'aigua sobre el mur quan estiga totalment plena. Suposa que la pressió atmosfèrica és de 760 Torr.



Sol:  $F = 7.9 \times 10^9$  N



1.8. Hem de dissenyar una boia cilíndrica de 30 cm de radi i 1 m de longitud que s'ha de fabricar amb plàstic de densitat  $\rho = 900$  kg · m<sup>-3</sup>. Com volem que només se submergeixca un 60% en aigua salada de densitat  $\rho = 1030$  kg · m<sup>-3</sup>, li afegim una càmera d'aire (densitat  $\rho = 1.2$  kg · m<sup>-3</sup>) a la boia. Calculeu quin ha de ser el volum de la càmera d'aire.

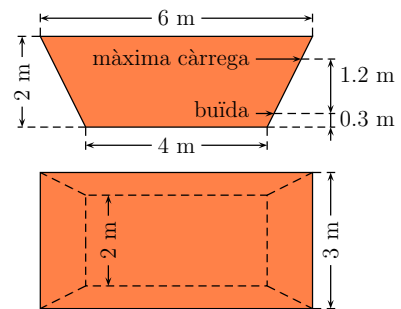
Sol:  $V_c = 8.9 \times 10^{-2}$  m<sup>-3</sup>, un 31% del volum total de la boia

1.9. La barcaça de la figura s'utilitza per a transportar arròs per una via fluvial (densitat de l'aigua del riu  $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ). Quan la barcaça està buida, s'enfonsa 30 cm i quan està a la màxima capacitat ho fa 150 cm. Determineu la massa de la barcaça buida i la massa de la càrrega màxima que pot transportar.

Dada: el volum submergit de la barcaça a una fondària  $z$  és

$$V_s(z) = a_0 b_0 z + \frac{z^2 [a_0(b_1 - b_0) + b_0(a_1 - a_0)]}{2h} + \frac{2z^3(a_1 - a_0)(b_1 - b_0)}{3h^2}$$

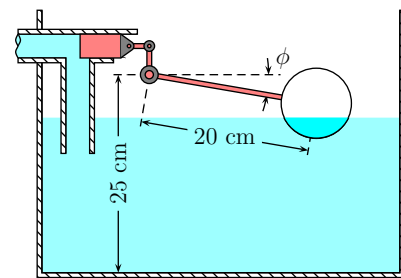
on  $a_0$  i  $b_0$  són els costats de la base,  $a_1$  i  $b_1$  són els costats de dalt i  $h$  és l'altura.



Sol:  $m_{\text{buida}} = 2.59 \times 10^3 \text{ kg}$ ,  $m_{\text{càrrega}} = 15.0 \times 10^3 \text{ kg}$

### Problema resolt a l'apèndix B.1

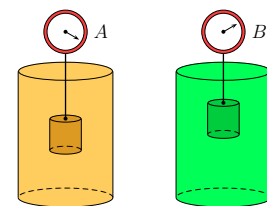
1.10. En el dispositiu de la figura s'utilitza una boia de radi  $r = 2 \text{ cm}$  i densitat  $300 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  per controlar el nivell màxim a què s'omple una cisterna. La boia està connectada amb un mecanisme a un pistó que tanca l'entrada d'aigua quan l'angle d'inclinació és  $\phi = 10^\circ$ . Calculeu quina és l'altura màxima de l'aigua ( $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ).



Dada: el volum submergit de l'esfera ve donat per  $V_s = \pi h_s^2(3r - h_s)/3$ , on  $h_s$  és la profunditat submergida de l'esfera en l'eix vertical.

Sol:  $y_{\text{aigua}} = 21.0 \text{ cm}$

1.11. Mesurem el pes d'un cos totalment submergit en dos líquids diferents A i B donant  $T_A = 107 \text{ N}$  i  $T_B = 46 \text{ N}$ , respectivament. Si les densitats dels líquids són  $\rho_A = 800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  i  $\rho_B = 1200 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , calculeu la densitat del cos.



Sol:  $\rho = 1500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$





1.12. En contacte amb l'aire, el mercuri té una tensió superficial  $\sigma = 0.44 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ . Quan el fem en un capil·lar estret, forma un angle amb el vidre  $\alpha = 137^\circ$ . Si el capil·lar té 1 mm de diàmetre, determineu l'ascens o descens per capil·laritat.

Sol:  $h = -9.7 \text{ mm}$



1.13. En un capil·lar de radi 2 mm mesurem per a l'aigua ( $\sigma = 7.3 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ) un ascens per capil·laritat  $h = 0.74 \text{ cm}$ . Estimeu el valor de l'angle de contacte.

Sol:  $\alpha \approx 6.6^\circ$



1.14. Tenim un dispositiu que genera boira artificial per al seu ús en pel·lícules. Per a fer-ho, genera gotes d'aigua de radi  $r = 10^{-4} \text{ m}$  emprant un cabal de  $50 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$ .

(a) Estimeu la diferència de pressió a l'interior de les gotes respecte de la que hi ha a l'exterior.

(b) Estimeu la potència mínima que necessita el dispositiu per a crear la boira.

Sol: (a)  $\Delta P = 1.46 \times 10^3 \text{ Pa}$ , (b)  $Pot = 109.5 \text{ W}$

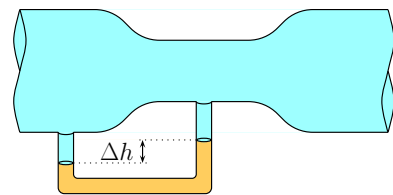


1.15. Per una canonada cilíndrica horitzontal de secció de radi 10 cm flueix un fluid perfecte en estat estacionari amb un cabal de  $2 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$ . En un punt es troba un tub de reducció on la canonada s'estreny fins a un radi de 4 cm. Calculeu la velocitat del fluid en la zona ampla i estreta del tub de reducció.

Sol:  $v = 6.4 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$  en la part ampla (radi 10 cm) i  $v = 39.8 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$  en la part estreta (radi 4 cm).



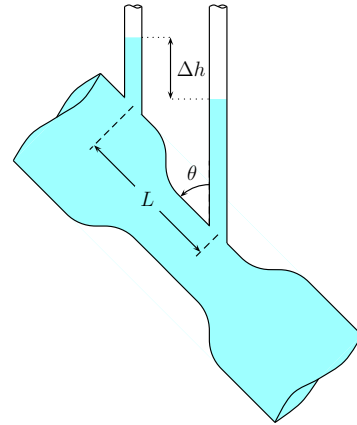
1.16. Per a mesurar la velocitat de l'aire ( $\rho = 1.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ) utilitzem un venturímetre de seccions de radi 2 cm i 1 cm. El tub que connecta la part ampla i estreta conté un oli de densitat  $1.5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ . Determineu la velocitat de l'aire (part ampla) si la diferència d'altura és  $\Delta h = 5.5 \text{ cm}$ .



Sol:  $v = 9.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

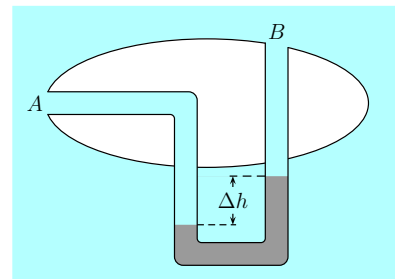
Problema resolt a l'apèndix B.1

1.17. Tenim un venturímetre per a mesurar el cabal d'aigua que circula per una canonada amb un angle d'inclinació  $\theta = 45^\circ$ . El radi de la canonada és d'1 cm, el de l'estrenyiment del venturímetre és de 0.5 cm. La distància entre els tubs de mesura és  $L = 5$  cm. Si la diferència d'altura és  $\Delta h = 2.2$  cm, determineu el cabal.



Sol:  $I_v = 0.05 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$ .

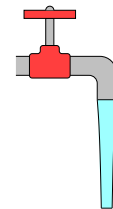
1.18. Es dissenya un dispositiu basat en el tub de Pitot per a mesurar la velocitat de l'aire (densitat  $1.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ), on s'utilitza com a baròmetre diferencial un tub en U amb mercuri (densitat  $\rho = 13.54 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ ). Si el baròmetre marca  $\Delta h = 4.7$  cm, determineu quina és la velocitat del fluid (B) relativa a l'aparell de mesura (A).



Sol:  $v_B = 101.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Problema resolt a l'apèndix B.1

1.19. Pel canó d'una aixeta de radi  $r = 0.75$  cm ix aigua amb un cabal de  $0.15 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$ . Suposant que el règim és sempre laminar, determineu:  
 (a) Quina és la velocitat que té l'aigua a la boca del canó i a una altura de 5 cm per baix d'aquesta.  
 (b) Quin és el radi del flux d'aigua en aquest segon cas.



Sol: (a)  $v_1 = 0.85 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $v_2 = 1.30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  (b)  $r_2 = 0.6$  cm.

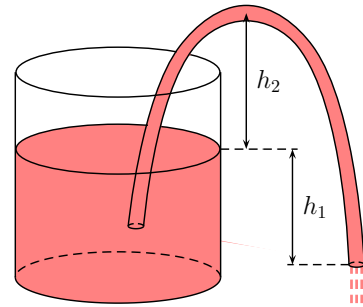


1.20. Utilitzem una mànega per extraure gasolina (densitat  $720 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ) d'un dipòsit. Si el radi interior de la mànega és molt menor que el del dipòsit i l'altura respecte del nivell de gasolina és  $h_1 = 23 \text{ cm}$ ,

(a) Determineu amb quina velocitat ix la gasolina per la mànega

(b) Estimeu quina és la pressió a la part més alta de la mànega si es troba a una altura  $h_2 = 18 \text{ cm}$  i la pressió atmosfèrica és de  $760 \text{ Torr}$ .

(c) Si la pressió de vapor de la gasolina a la temperatura d'operació és de  $414 \text{ Torr}$ , a quina altura  $h_2$  es poden començar a formar bombolles per cavitació?



Sol: (a)  $v = 2.1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , (b)  $P_2 = 750 \text{ Torr}$ , (c)  $h_2 = 6.5 \text{ m}$ .



## Bibliografia

### Bibliografia bàsica

- GIANCOLI, D. C. (2004): *Physics: Principles and applications*, Prentice Hall, Upper Saddle River.
- ROLLER, D. E. i R. BLUM (1983): *Mecánica, ondas y termodinámica*, Reverté, Barcelona.
- SEARS, F. W., M. W. ZEMANSKY i altres (2004): *Física Universitaria*, Pearson Educación, Madrid.
- SERWAY, R., A. RAYMOND i J. W. JEWETT (2005): *Física para ciencias e Ingeniería*, Thomson Paraninfo, Madrid.
- TIPLER, P. A. i G. MOSCA (2004): *Física para la ciencia y la tecnología*, Reverté, Barcelona.
- WILSON, J. D. i A. J. BUFFA (2003): *Física*, Pearson Educación, Madrid.

### Bibliografia avançada

#### Teoria i problemes

- DOUGLAS, J. F., J. GASIOREK i J. SWAFFIELD (2001): *Fluid dynamics*, Prentice Hall, Harlow.
- FABER, T. E. (1995): *Fluid dynamics for physicists*, Cambridge University Press, Cambridge.
- FEYNMAN, R., R. B. LEIGHTON i M. SANDS (1999): *Física Volumen 2 - Electromagnetismo y materia*, Addison Wesley Longman, México.
- MOTT, R. L. (1996): *Mecánica de fluidos aplicada*, Prentice Hall Hispanoamericana, Naupalcán de Juárez.
- TRITTON, D. J. (1988): *Physical fluid dynamics*, Oxford Science Publications, Oxford.

#### Problemes

- DOUGLAS, J. F. i R. D. MATTHEWS (1996): *Solving problems in fluids mechanics*, Longman, Harlow.
- SPURK, J. H. (1997): *Fluid dynamics - Problems and solutions*, Springer, Heidelberg.
- STREET, R. L., G. Z. WATTERS i J. K. VENNARD (1996): *Solutions manual to accompany Elementary Fluids Dynamics*, John Wiley & Sons, New York.

# Termodinàmica

L'estudi sistemàtic de la Termodinàmica va començar amb la Revolució Industrial. El seu objectiu era millorar el rendiment de la primera màquina tèrmica que es va desenvolupar, la màquina de vapor, que movia el món en aquells temps. Les màquines tèrmiques successores d'aquesta, els motors de quatre temps i dièsel, encara mouen el món dels nostres dies. Amb la Termodinàmica ampliem alguns dels conceptes que havíem vist prèviament a la part de Mecànica. Per una banda introdueix una nova magnitud, la temperatura, que resulta necessària per a poder descriure correctament les propietats dels materials. La variació d'aquesta magnitud pot provocar el canvi de grandària dels objectes (dilatació o contracció) i, fins i tot, un canvi dràstic de propietats quan es produeix un canvi de fase. Per altra banda, la Termodinàmica amplia el principi de conservació de l'energia mecànica en incloure l'intercanvi d'energia en forma de calor, que ocorre entre dos sistemes amb diferent temperatura. No només això, la Termodinàmica també analitza quins processos es produeixen de forma espontània a la natura, i amb això fixa les regles bàsiques del funcionament de les màquines tèrmiques.

## 2.1 Introducció

### 2.1.1 Moviment tèrmic i energia tèrmica

En un sistema en equilibri les propietats macroscòpiques no varien amb el temps. Però, inclús en aquest cas, els àtoms o molècules que el formen estan en moviment continu (figura 2.2). Aquest moviment comprèn la vibració, com passa en els sòlids, la rotació i la translació, com és el cas dels fluids (figura 2.3).<sup>1</sup> El reflex macroscòpic d'aquest moviment és la *temperatura* a la que es troba el sistema. De fet, podem prendre el punt de vista contrari i indicar que les partícules que formen el sistema estan en moviment perquè aquest es troba a una temperatura  $T$  determinada. Per això, el moviment s'anomena moviment tèrmic. La característica principal del moviment tèrmic és que és aleatori: no hi ha cap direcció determinada i la velocitat de les partícules canvia

---

<sup>1</sup>A més dels moviments dels àtoms, també hem de considerar el relatiu als electrons.

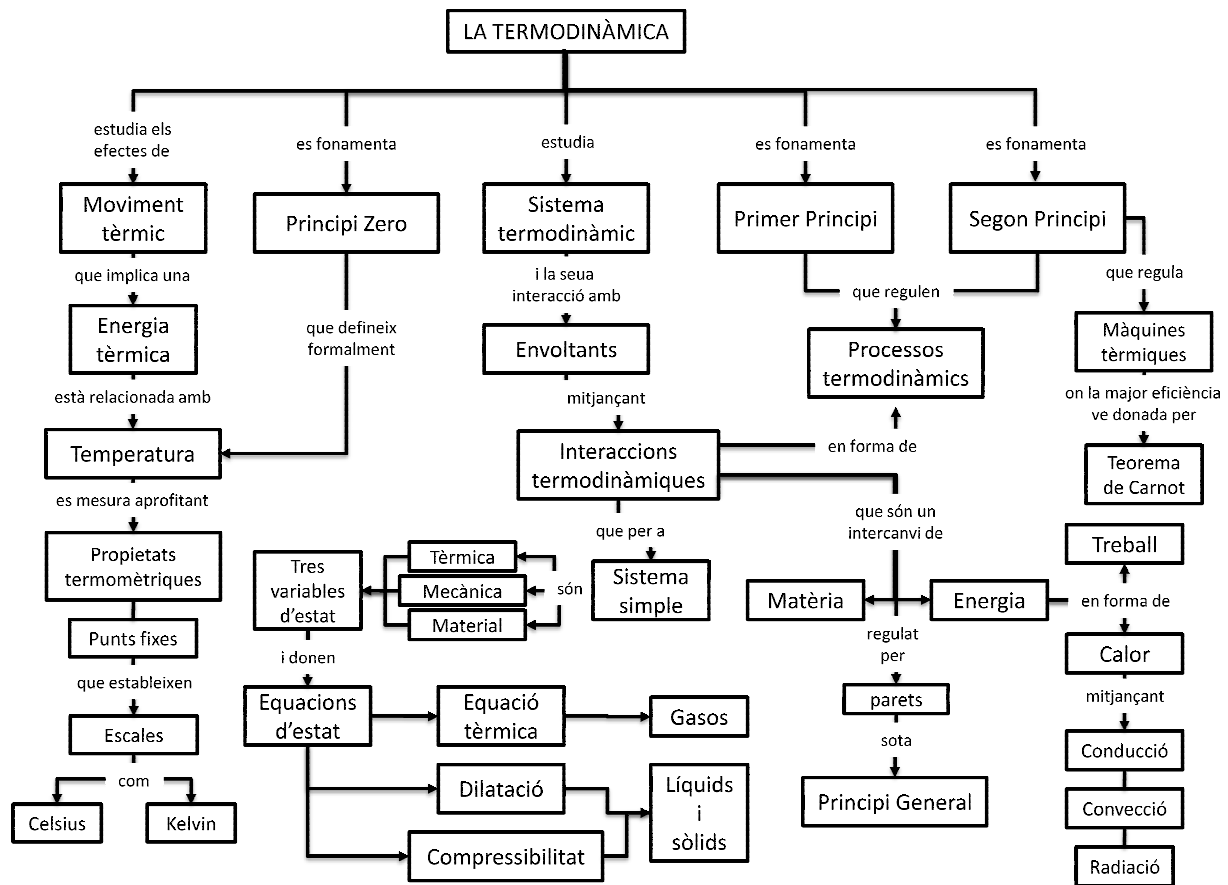


Figura 2.1: Mapa conceptual

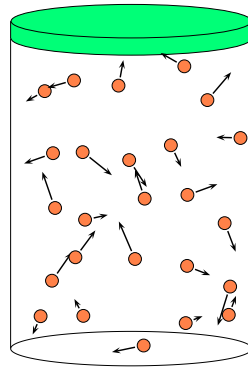


Figura 2.2: En un sistema en equilibri, com ara un gas, les partícules estan en moviment continu anomenat moviment tèrmic

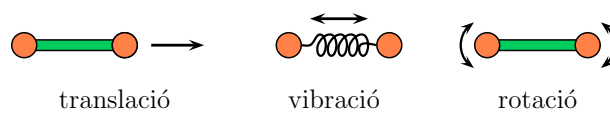


Figura 2.3: El moviment tèrmic de les partícules d'un sistema inclou la translació, vibració i rotació de les molècules i els estats excitats dels electrons. Observem que la molècula representada és la mateixa en tots els casos però, mentre que en la translació i la rotació la molècula es modela com un sòlid rígid, per a la vibració se suposa, en primera aproximació, una interacció elàstica entre els àtoms de la molècula (per aquest motiu hem dibuixat una molla entre els àtoms)

contínuament,<sup>2</sup> tant de direcció com de mòdul. Encara que el moviment és aleatori, la velocitat *mitjana* dels àtoms sí que té un valor constant (per a un sistema en equilibri).

Podem donar una primera definició de la Termodinàmica com la branca de la Física que estudia els efectes derivats del moviment tèrmic de les partícules. Vegem un exemple. Suposem que tenim aigua i fenol en un got (figura 2.4). Quan la temperatura és baixa els dos líquids no estan barrejats sinó que el fenol, més dens, es queda a la part de baix mentre que l'aigua, més lleugera, està a la part de dalt. Ens trobem davant d'un estat d'equilibri purament mecànic, que minimitza l'energia potencial del sistema. Si augmentem la temperatura, augmenta la intensitat del moviment tèrmic de les molècules d'aigua i fenol. A partir d'un cert valor de la temperatura s'observa un canvi de fase i els dos líquids passen a estar barrejats.<sup>3</sup> Com passa amb el canvi de fase de sòlid a líquid, aquest és un canvi abrupte que ocorre a una certa temperatura. La variació de les propietats del sistema amb la temperatura ens indica que el sistema no admet una descripció purament mecànica, sinó que necessita la inclusió d'elements de la Termodinàmica.

<sup>2</sup>Per exemple, en la translació canvia per mitjà de col·lisions entre partícules.

<sup>3</sup>Noteu que també podem barrejar els líquids si remenem el contingut del got amb una cullera, encara que en aquest cas no estaria en equilibri i, en deixar d'agitar, tornaria a haver separació entre les dos fases en tornar a l'equilibri.

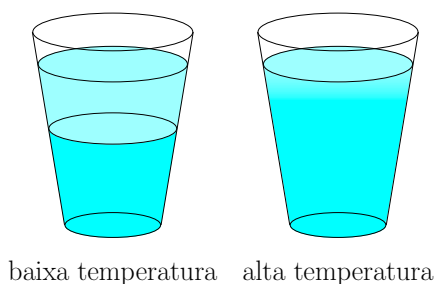


Figura 2.4: Si fem aqueig i fenol en un got tenim, a baixa temperatura, separació de fases amb el més dens (fenol) baix i el menys dens (aigua) dalt. Si pugem la temperatura, arriba un moment on podem veure una transició de fase on el sistema passa de tenir dos fases a només una, on els líquids estan barrejats. En aquesta fase les propietats varien gradualment (no de forma discontinua com quan en teníem dos)

Tanmateix, no ens hem de quedar amb la idea que la Termodinàmica s'utilitza només en aquells casos on hi ha un canvi de propietats per efecte de la temperatura. Hi ha efectes que es produeixen a una temperatura constant però que entren dins del camp de la Termodinàmica. Per exemple, si posem una quantitat menuda de sal en un got amb aigua i esperem el temps suficient, observarem com la sal es dissol en l'aigua sense haver d'agitar. L'explicació d'aquest efecte necessita de la Termodinàmica perquè és resultat de la interacció de les molècules d'aigua amb els àtoms que formen la sal i del seu moviment tèrmic.

Es podria pensar que, si la temperatura és la magnitud macroscòpica que ens indica la intensitat del moviment tèrmic de les partícules, deuria ser possible explicar el comportament del sistema anterior amb una descripció purament mecànica. Malauradament això no és tècnicament possible donat l'enorme nombre de partícules que componen el sistema. En un got amb 20 ml d'aigua hi ha aproximadament  $7 \times 10^{23}$  molècules d'aigua. Si tinguérem un ordinador que emprés un nanosegon ( $10^{-9}$  s) en assignar la posició i la velocitat inicial de cada una de les partícules, li costaria un temps total de  $6.8 \times 10^{14}$  s definir la posició inicial del sistema. Aquest temps equival a uns 21 bilions d'anys. Això ens indica una altra característica de la Termodinàmica i és que s'aplica a sistemes macroscòpics, formats per un gran nombre de partícules.<sup>4</sup> Però no només és això. Encara que poguérem gestionar un nombre tan gran de partícules, no sabríem què fer amb eixa quantitat d'informació. La Termodinàmica defineix una sèrie de magnituds, com ara la temperatura, amb les quals podem analitzar les propietats de sistemes formats amb un gran nombre de partícules. Això no vol dir que no hi haja teories que parteixen de la descripció microscòpica per explicar els fenòmens macroscòpics, com la Mecànica Estadística, però en cap

---

<sup>4</sup>En realitat això no és nou i tant la dinàmica del sòlid rígid com a la de fluids els passa el mateix. Per exemple, un objecte situat sobre una taula no la travessa per la interacció electromagnètica entre els àtoms que formen l'objecte i la taula. No obstant això, no és possible, ni necessari, fer una descripció del fenomen a partir de les interaccions fonamentals dels àtoms i una descripció macroscòpica ens serveix per a descriure el fenomen.



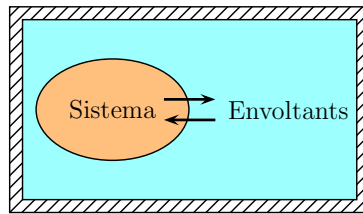


Figura 2.5: L'univers termodinàmic es compon del sistema que volem estudiar i els envoltants amb els que interacciona termodinàmicament

cas s'utilitza una descripció detallada de cada partícula de forma individual. Per exemple, en alguns sistemes la Mecànica Estadística relaciona la temperatura (magnitud macroscòpica) amb la velocitat quadràtica mitjana de les partícules ( $\langle v^2 \rangle$ , magnitud microscòpica).

Suposem de nou un sistema en equilibri. Com està en equilibri, el seu centre de masses es troba en repòs i la força neta externa que actua sobre el sistema és nul·la. Ja hem assenyalat que, tot i aquestes condicions, les partícules que formen el sistema estan en constant moviment tèrmic. Això implica que les partícules tenen una determinada energia cinètica, una *energia tèrmica*. Com que, a banda de les col·lisions, les partícules poden interaccionar entre si (per exemple mitjançant la interacció electromagnètica), cada partícula es mou dintre del camp d'energia potencial que generen les altres partícules. L'energia total (suma de l'energia cinètica i l'energia potencial) de cadascuna de les partícules del sistema ens dóna la seua *energia interna*  $U$ . S'anomena interna perquè, com hem assenyalat, el centre de masses es troba en repòs i no hi ha cap força neta externa que hi actue sobre el sistema. És a dir, l'energia es deu únicament a les partícules del sistema. En un sistema en equilibri, l'energia interna ha de ser constant en el temps perquè és una magnitud macroscòpica. Això vol dir que, encara que l'energia de cada partícula individual canvia constantment amb el temps, la suma de les energies de totes les partícules sempre té el mateix valor. Això és possible només en els sistemes macroscòpics, que estan formats per un gran nombre de partícules i que són l'objecte d'estudi de la Termodinàmica.

## 2.2 Sistemes i interaccions termodinàmiques

S'anomena *sistema termodinàmic* a la part de l'univers que volem estudiar. De la resta de l'univers, només estem interessats en aquella amb la que el nostre sistema interacciona, i que anomenem *envoltants* (figura 2.5). La suma del sistema i els envoltants s'anomena *univers termodinàmic*. Comprèn la part de l'univers on ocorren les interaccions que ens interessin. Per tant, l'univers termodinàmic depèn de cada cas concret que analitzem.

La variació de l'estat d'un sistema es produeix per les interaccions amb els seus envoltants.

En Termodinàmica, la paraula *interacció* fa referència a *l'intercanvi d'energia i matèria entre el sistema i els envoltants*. En aquest curs estudiarem sistemes simples, formats per un únic component i on no hi ha reaccions químiques. A més suposem que podem negligir la influència dels camps gravitatori i electromagnètic sobre el sistema. En aquest cas, hi existeixen tres tipus possibles d'interaccions termodinàmiques (figura 2.6):

**Interacció mecànica.** Es produeix per l'acció d'una força mecànica no compensada en la superfície de separació entre el sistema i els envoltants. La interacció mecànica fa variar la grandària del sistema. Per exemple, si tenim un gas en un compartiment amb un pistó mòbil, la interacció mecànica entre el sistema (gas) i els envoltants donaria lloc al moviment del pistó. Això faria variar el volum del sistema. Si, en canvi, el nostre sistema fos un filferro, la interacció mecànica faria variar la seua longitud.

**Interacció tèrmica.** Es produeix per una diferència de temperatura entre sistema i envoltants. Per exemple, aquesta interacció es produeix quan calquem un got de llet i el deixem sobre la taula de la cuina. Amb el temps observem com la temperatura del got va baixant poc a poc per la seua interacció amb l'aire de la cuina (més fred).

**Interacció material.** Es produeix quan hi ha una diferència de concentració d'un component entre el sistema i els envoltants<sup>5</sup>. Per exemple, suposem que tenim dos dipòsits connectats mitjançant una canonada amb un dispositiu obturador. Un dels dipòsits conté aigua salada mentre que l'altre conté aigua dolça. Si obrim l'obturador, observarem com al cap del temps s'ha produït un transport net de sal des del dipòsit amb aigua salada cap al dipòsit amb aigua dolça.

A la superfície de separació entre el sistema i els envoltants l'anomenem *paret*. Les parets poden ser reals o virtuals (artefactes matemàtics introduïts per facilitar la descripció del sistema). Les parets són *permissives* a algunes interaccions entre sistema i envoltants però són *restrictives* a la resta. El tipus d'interaccions que permeten les parets serveixen per a fer una classificació tant de les parets com dels sistemes. Quan les parets no permeten cap tipus d'interacció entre sistema i envoltants, se'n diuen *aïllants* i el sistema es diu que està *aïllat*.<sup>6</sup> És el tipus

---

<sup>5</sup>Això no és estrictament cert. Realment la interacció material es produeix quan hi ha una diferència d'una magnitud anomenada *potencial químic*. El potencial químic no només inclou la concentració de la substància sinó també per exemple el potencial elèctric a què es juga trobar. No obstant això, si hi ha una variació de concentració hi ha en general una diferència de potencial químic i en aquest sentit l'emprem ací.

<sup>6</sup>En realitat no hi ha cap sistema que estiga estrictament aïllat de la resta de l'univers perquè això suposaria, entre altres, que poguérem impedir la interacció gravitatòria. No obstant això, podem suposar en certs casos que el sistema es troba aïllat quan les interaccions amb els envoltants són negligibles o no condicionen l'evolució del sistema. En el cas de la interacció gravitatòria suposaríem que hi existeix una compensació de forces en el centre de masses del sistema.

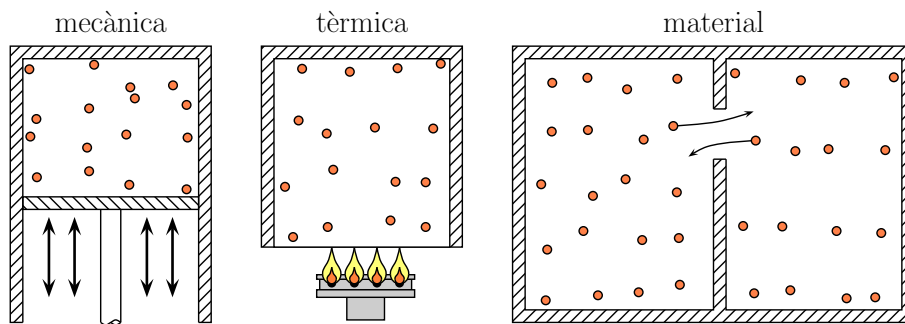


Figura 2.6: Representació dels tres tipus d'interaccions termodinàmiques entre un sistema simple i els seus envoltants: mecànica, tèrmica i material

<b>interacció</b>	<b>permet</b>		<b>impedeix</b>	
mecànica	mòbil	↔	rígida	
tèrmica	diatèrmana		adiabàtica	▨
material	permeable	⋮	impermeable	

Taula 2.1: Tipus de parets segons permeten o impedisquen les interaccions mecànica, tèrmica i material entre sistema i envoltants

de sistema més restrictiu que existeix i també el més important en el desenvolupament de la Termodinàmica. Si les parets permeten l'intercanvi d'energia entre el sistema i els envoltants però no de matèria, diem que les parets són impermeables i que el sistema és *tancat*. En aquest capítol només considerarem sistemes tancats. L'intercanvi d'energia en sistemes tancats pot ser mecànic (parets mòbils) i/o tèrmic (parets diatèrmanes). Si les parets permeten l'intercanvi d'energia en forma de calor però no mecànica, les parets són *diatèrmanes* i *rígides*. En canvi, si les parets permeten l'intercanvi d'energia mecànica però no tèrmica, diem que són *adiabàtiques* i *mòbils*. Finalment si les parets permeten l'intercanvi de matèria (i per tant també d'energia), diem que són *permeables* i que el sistema és *obert*. A la taula 2.1 s'indiquen els diferents tipus de parets segons permeten o impedisquen les interaccions mecànica, tèrmica i material i la forma de representar-les gràficament.

### 2.2.1 Principi General de la Termodinàmica

Experimentalment s'observa que un sistema *aïllat* evoluciona fins arribar a un estat d'*equilibri termodinàmic* on les seues propietats macroscòpiques no varien amb el temps. En aquest punt no hi ha cap intercanvi net d'energia o matèria entre les diferents parts del sistema. Aquesta evidència experimental s'eleva al grau de postulat en el Principi General de la Termodinàmica:

Tot sistema aïllat evoluciona en el temps fins assolir un estat d'equilibri termodinàmic.

En realitat cap sistema pot assolir un equilibri termodinàmic perfecte, de la mateixa manera que no hi ha cap sistema perfectament aïllat. Sempre hi haurà un reduït intercanvi de matèria i energia entre parts del sistema i entre aquest i els envoltants. No obstant això, podem considerar que un sistema ha assolit l'estat d'equilibri quan no observem cap evolució de les seues magnituds macroscòpiques durant un *temps llarg*. Aquest temps dependrà en definitiva de cada sistema (hi ha sistemes en els quals només veus l'evolució en anys) i serà la comparació entre la teoria que derivem i l'experiment el que finalment ens dirà si les hipòtesis de partida eren correctes o no (si no ho són acabaran per aparèixer inconsistències).

Com que hem definit l'univers termodinàmic com la part de l'univers on es produeixen les interaccions que ens interessin (entre el sistema i els envoltants), suposem que l'univers termodinàmic sempre està aïllat. El Principi General de la Termodinàmica ens indica, per tant, que el conjunt sistema + envoltants evolucionarà en el temps fins assolir l'equilibri termodinàmic. És a dir, fins que arriben a un punt on deixen d'haver intercanvi net d'energia i matèria entre ells. Aquesta evolució vindrà determinada per la situació inicial de sistema i envoltants i per les interaccions que permeten les parets que els separen. Per exemple, suposem que sistema i envoltants estan separats per una paret impermeable, rígida i diatèrmana que només permet la interacció tèrmica (això seria el cas, per exemple, d'utilitzar una pedra calenta per a calfar aigua). Si inicialment sistema i envoltants estan a una temperatura diferent es produirà una interacció tèrmica fins que el conjunt assolisca l'estat d'equilibri termodinàmic. En eixe punt sistema i envoltants tindran la mateixa temperatura i deixarà d'haver interacció tèrmica entre ells. L'univers termodinàmic estarà en equilibri termodinàmic. No hi haurà interacció tèrmica entre sistema i envoltants perquè estaran a la mateixa temperatura, i no hi haurà interaccions mecànica i material perquè els ho impedeix la paret de separació.

### 2.2.2 Variables d'estat

Quan el sistema es troba en equilibri termodinàmic el seu estat no depèn de la seua evolució anterior. Això implica que podem descriure el seu estat d'equilibri per mitjà d'unes poques variables que anomenem *variables d'estat*. Si, per exemple, permetem que el sistema interaccione mecànicament amb els envoltants per mitjà d'una paret adiabàtica, mòbil i impermeable, el seu estat d'equilibri evolucionarà fins assolir un nou estat d'equilibri on la pressió del sistema serà igual a la pressió dels envoltants. La pressió del sistema en el nou equilibri no depèn de la pressió que tinguera en el sistema inicial sinó de la pressió dels envoltants.

Abans hem indicat que en un sistema simple hi tenim tres tipus possibles d'interaccions termodinàmiques. Cada interacció ens dóna una variable d'estat. Comencem per la interacció mecànica. Quan un sistema interacciona mecànicament amb els envoltants, el seu volum  $V$  es modifica. Per tant el volum és la primera variable d'estat. Per la seua banda, la interacció tèrmica modifica l'energia interna  $U$ . Aquesta és la segona variable d'estat. Finalment, la interacció material modifica la quantitat de matèria que hi ha al sistema. Com el sistema és simple, amb un únic component, podem quantificar esta variació utilitzant el nombre de mols  $n$ , definit com

$$n \equiv \frac{N}{N_{Av}} \quad (2.1)$$

on  $N$  és el nombre de partícules i  $N_{Av} = 6.02 \times 10^{23}$  és el nombre d'Avogadro. El nombre de mols  $n$  és la tercera variable d'estat. Per tant tenim que l'estat (d'equilibri) del sistema queda totalment descrit pels seus valors d' $U$ ,  $V$  i  $n$ . Això també s'eleva al grau de postulat:

L'estat d'equilibri d'un sistema simple està totalment determinat pels seus valors de l'energia interna  $U$ , el volum  $V$  i el nombre de mols  $n$ .

Noteu que si l'estat d'equilibri està *totalment* determinat per aquestes variables, això implica que no necessitem cap altra variable per descriure'l.

El postulat que tot just hem introduït indica que l'estat d'equilibri d'un sistema simple està completament determinat pels seus valors d'energia interna  $U$ , volum  $V$ , i nombre de mols  $n$ . Tanmateix, el postulat no estableix la necessitat que siguin exactament aquestes variables les que hem d'emprar per descriure l'estat del sistema; en cada cas utilitzarem les variables que més ens convinguen. De fet, per a la descripció de l'estat termodinàmic és prou comú utilitzar la temperatura en lloc de l'energia interna perquè és més fàcil de mesurar.

### 2.2.3 Equacions d'estat

Adés hem indicat que, per a descriure completament l'estat d'equilibri d'un sistema simple, només necessitem conèixer la seua energia interna  $U$ , el seu volum  $V$  i el nombre de mols de la substància  $n$  que conté. També hem indicat que no és necessari que siguin aquestes tres variables d'estat sinó que podem utilitzar-ne d'altres segons ens convinga. Tanmateix, una volta hem determinat l'estat d'equilibri mitjançant tres variables d'estat, volem conèixer el valor d'altres magnituds. Per exemple, suposem que descrivim l'estat d'equilibri d'un sistema mitjançant les variables  $U$ ,  $V$ , i  $n$  però que volem conèixer el valor de la pressió  $P$ . Per tant, determinem la pressió per a diferents estats d'equilibri del sistema i construïm la funció  $P = P(U, V, n)$ . Aquesta funció és una *equació d'estat* del sistema perquè ens permet conèixer el valor d'una magnitud a partir dels valors de les variables d'estat. En l'equació d'estat considerada, la pressió  $P$  és una

variable *dependent* perquè obtenim el seu valor a partir de les variables d'estat  $(U, V, n)$ , que són les variables *independents*. La termodinàmica deixa una gran llibertat a l'hora d'escollir quines variables són independents, és a dir, a l'hora d'escollir les variables d'estat. Això li dona una gran flexibilitat perquè podem fer-ne l'elecció en funció de les interaccions entre el sistema i els envoltants.

No totes les equacions d'estat ens donen la mateixa informació. Hi ha algunes que ens permeten conèixer tota informació termodinàmica de l'estat d'equilibri, perquè a partir d'elles (generalment mitjançant la seua variació en front d'alguna variable) podem obtenir totes les magnituds referides al sistema. Altres, en canvi només ens donen una informació parcial del sistema.

## 2.2.4 Processos termodinàmics

En la secció anterior hem descrit els sistemes termodinàmics en *equilibri*. En aquesta secció i les següents parlem dels *processos termodinàmics* i establim els postulats de la Termodinàmica relatius a aquests.

Suposem un sistema inicialment en equilibri amb els seus envoltants. Si es produeix un canvi en els envoltants, això farà evolucionar el nostre sistema fins que es torne a assolir l'estat d'equilibri amb aquests. Per exemple, si la pressió dels envoltants baixa, es produirà un augment del volum del nostre sistema perquè la seua pressió baixi i torne a igualar-se a la dels envoltants. Per tant,

definim procés termodinàmic com l'evolució d'un sistema des d'un estat inicial d'equilibri fins a un estat final d'equilibri.

Tant l'estat inicial com el final han d'estar en equilibri termodinàmic.

### Classificació de processos

Hi existeixen diferents classificacions del processos termodinàmics. Si atensem a si la interacció es produeix entre un sistema i els seus envoltants o entre diferents subsistemes (per mitjà d'una paret interna)<sup>7</sup> classifiquem els processos en:

**Procés intern.** Quan l'intercanvi d'energia i/o matèria es produeix entre els diferents subsistemes d'un sistema compost.

---

<sup>7</sup>Per exemple, aquest seria el cas de dos subsistemes que en principi estigueren separats per una paret rígida que, a partir d'un cert moment, deixem que es pugui moure.

**Procés extern.** Quan l'intercanvi d'energia i/o matèria es produeix entre un sistema i els seus envoltants.

En canvi, si ens fixem en els estats inicial i final tenim:

**Procés cíclic.** Si l'estat inicial i final coincideixen.

**Procés obert.** Quan almenys una variable d'estat pren un valor diferent en l'estat final respecte de l'estat inicial.

La interacció entre un sistema i els seus envoltants es produeix per mitjà de parets que estan localitzades en una part del sistema. Això vol dir que és necessari un temps *de relaxació*  $\tau$  fins que l'intercanvi d'energia i/o matèria amb els envoltants es redistribueix per tot el sistema i aquest torna a assolir un estat d'equilibri. Per exemple, suposem el cas d'una interacció tèrmica entre sistema i envoltants. Si els envoltants augmenten la seua temperatura, es produirà un aport d'energia des dels envoltants cap al sistema. La part del sistema en contacte amb la paret que separa el sistema dels envoltants serà la primera que rebrà eixa energia, que després anirà difonent-se a la resta del sistema mitjançant el moviment tèrmic.

El temps de relaxació depèn del sistema i del procés. Per exemple, en un gas el restabliment de l'equilibri pot ser de l'ordre de  $10^{-16}$  s i en l'equilibri de distribució d'aliatges sòlids aquest temps pot ser de l'ordre d'anys. D'altra banda, els sistemes generalment assoleixen l'equilibri mecànic molt més ràpidament que l'equilibri tèrmic. Això ens permet suposar, en moltes transformacions que tenen lloc a la natura, que el sistema està a la mateixa pressió que els seus envoltants i, en canvi, que la seua temperatura és diferent.

Pot ocórrer que l'intercanvi d'energia entre el sistema i els envoltants siga més lent o més ràpid que la redistribució d'energia dintre del sistema. En el primer cas podem suposar que el sistema sempre està en equilibri. En canvi en el segon no ho està i això suposa que hi haja magnituds com la temperatura o la pressió que no estiguen ben definides en el sistema, és a dir que no tinguen un valor constant dintre del sistema. Considerant aquests dos casos classifiquem els processos termodinàmics en:

**Processos quasiestàtics.** Aquells on el sistema evoluciona sempre sobre estats d'equilibri, és a dir, on la redistribució d'energia i matèria dins del sistema és més ràpida que la interacció entre sistema i envoltants.

**Processos no estàtics.** Aquells on algun estat intermedi no siga d'equilibri termodinàmic, és a dir, on la interacció sistema-envoltants pugui ser més ràpida que el temps de relaxació del sistema.

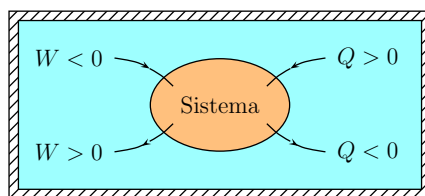


Figura 2.7: Criteri de signes per a l'intercanvi d'energia en forma de treball i calor entre el sistema i els envoltants

En aquest curs només estudiarem processos quasiestàtics. Els processos no estàtics són més complicats d'estudiar perquè algunes magnituds d'estat no estan definides (depenen de la posició dintre del sistema).

### Processos en sistemes tancats

En un sistema tancat, no hi ha intercanvi de matèria entre el sistema i els envoltants. El sistema interacciona amb els envoltants mitjançant les interaccions mecàniques i/o tèrmiques (figura 2.6). En tots dos casos, durant el procés hi ha un *intercanvi d'energia* entre el sistema i els envoltants. Quan les parets que separen el sistema dels envoltants són adiabàtiques i impermeables, però almenys una d'elles és mòbil, l'intercanvi d'energia en el procés es fa en *forma de treball* ( $W$ ). En canvi, quan les parets són rígides i impermeables, però almenys una d'elles és diatèrmana, l'intercanvi d'energia en el procés es fa en *forma de calor* ( $Q$ ). En general, però, tenim que en un procés termodinàmic hi ha un intercanvi d'energia en forma tant de treball com de calor.

La figura 2.7 mostra el criteri de signes per a l'intercanvi d'energia en forma treball i calor entre el sistema i els envoltants:

- $W < 0$ : el sistema rep energia en forma de treball dels envoltants.
- $W > 0$ : el sistema dóna energia en forma de treball als envoltants.
- $Q > 0$ : el sistema rep energia en forma de calor dels envoltants.
- $Q < 0$ : el sistema dóna energia en forma de calor als envoltants.

En la secció (2.5) analitzarem de forma més detallada l'intercanvi d'energia en forma de treball i calor en sistemes simples i, en la secció (2.6), estudiarem les conseqüències del balanç energètic entre sistema i envoltants.



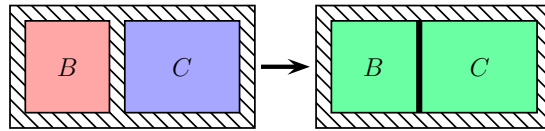


Figura 2.8: Sistema compost format per dos sistemes simples  $B$  i  $C$  que es troba aïllat de l'exterior. Inicialment els dos sistemes  $B$  i  $C$  estan en equilibri intern i aïllats l'un de l'altre (esquerra). Després els fem que es trobin en contacte tèrmic mitjançant una paret diatèrmana

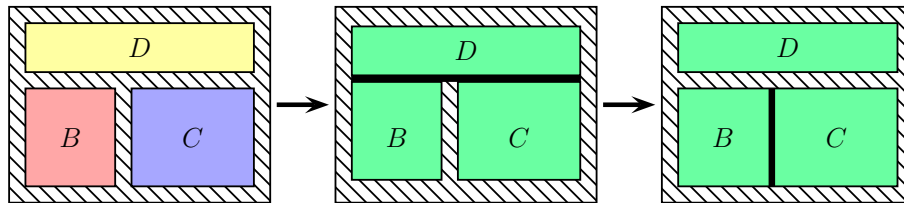


Figura 2.9: Al principi tenim tres sistemes en equilibri intern aïllats entre si. Posem els sistemes simples  $B$  i  $C$  en contacte tèrmic amb el sistema  $D$  tot mantenint els sistemes  $B$  i  $C$  aïllats entre si. Una volta s'ha assolit l'equilibri tèrmic mutu entre els sistemes  $B$  i  $D$ , per una banda, i els sistemes  $C$  i  $D$ , per l'altra, canviem la configuració del sistema. Aïllem el sistema  $D$  dels altres dos i fem que els sistemes  $B$  i  $C$  es trobin en contacte tèrmic. Durant tot el procés el conjunt  $D + B + C$  es troba aïllat de l'exterior

## 2.3 Temperatura

Donada la importància que té la temperatura dins de la Termodinàmica, dediquem aquesta secció a tractar la seua definició i mesura. En termodinàmica, l'existència formal de la temperatura s'estableix a partir d'un postulat, que s'anomena Principi Zero de la Termodinàmica. Considerem un sistema aïllat dels envoltants i que està format pels dos sistemes simples  $B$  i  $C$  (figura 2.8). Cadascun dels dos sistemes  $B$  i  $C$  inicialment es troben en equilibri termodinàmic intern i estan aïllats entre si. Si canviem la paret aïllant que separa els dos sistemes per una paret impermeable, rígida i *diatèrmana*, observarem com els sistemes evolucionen fins a arribar a un nou estat d'equilibri. Una volta assolit, diem que els sistemes es troben en *equilibri tèrmic mutu* i ho representem per  $B \leftrightarrow C$ . Si tornem a aïllar els dos sistemes entre si observarem que no es produeix en ells cap canvi posterior (estan en un estat d'equilibri termodinàmic intern, encara que diferent del seu estat inicial).

Suposem ara que els sistemes  $B$  i  $C$  inicials (cadascun en un estat d'equilibri intern però no en equilibri tèrmic mutu) es fiquen en contacte tèrmic per separat (però al mateix temps) amb un altre sistema  $D$ , que també es troba inicialment en equilibri intern (figura 2.9). Entre els sistemes  $B$  i  $C$  fiquem una paret aïllant que impedeix tot intercanvi directe d'energia i matèria entre els dos sistemes. En aquesta situació s'observa experimentalment que el sistema global evoluciona

fins que els sistemes  $B$  i  $C$  assoleixen un estat d'equilibri tèrmic mutu amb el sistema  $D$ :  $B \leftrightarrow D$  i  $C \leftrightarrow D$ . Si ara aïllem el sistema  $D$  dels sistemes  $B$  i  $C$  i posem aquests dos últims en contacte tèrmic (per mitjà d'una paret diatèrmana) observarem que el seu estat termodinàmic no varia en absolut. Això ens indica que els sistemes  $B$  i  $C$  ja havien arribat a estar en equilibri tèrmic mutu ( $B \leftrightarrow C$ ) *indirectament* mitjançant el sistema  $D$ .

Les experiències que hem comentat vénen recollides en el postulat conegut com *Principi Zero de la Termodinàmica*:

Dos sistemes en equilibri tèrmic mutu amb un tercer estan en equilibri tèrmic mutu entre si.

Aquest postulat estableix la relació d'equivalència *trobar-se en equilibri tèrmic mutu* ( $\leftrightarrow$ ) que té les propietats:

- Reflexiva:  $B \leftrightarrow B$
- Simètrica:  $B \leftrightarrow C \Rightarrow C \leftrightarrow B$
- Transitiva:  $\left. \begin{array}{l} B \leftrightarrow D \\ C \leftrightarrow D \end{array} \right\} \Rightarrow B \leftrightarrow C$

Aquesta relació permet classificar tots els possibles estats d'equilibri tèrmic mutu entre sistemes en classes d'equivalència caracteritzades pels diferents valors d'una propietat comuna: la *temperatura*. És a dir, com havíem avançat, dos sistemes estan en equilibri tèrmic mutu quan la seua temperatura té el mateix valor. A més, cada estat d'equilibri tèrmic mutu diferent es correspon a una única temperatura.

### 2.3.1 Temperatura empírica

El Principi Zero de la Termodinàmica estableix l'existència de la temperatura com la propietat que adquireix el mateix valor en dos sistemes que estiguen en equilibri tèrmic mutu. Però això no ens dóna cap indicació de com definir matemàticament aquesta propietat. Per això introduïm ara el concepte de *temperatura empírica* a partir de la mesura experimental de la temperatura.

El humans disposem del sentit del tacte. Això ens permet percebre una magnitud relacionada amb la temperatura però no directament la temperatura. Per exemple, si tenim en una habitació una catifa, notarem el terra més fred que la catifa encara que els dos estiguen a la mateixa temperatura. Necessitem altres sistemes que ens permeten mesurar la temperatura. Sabem que

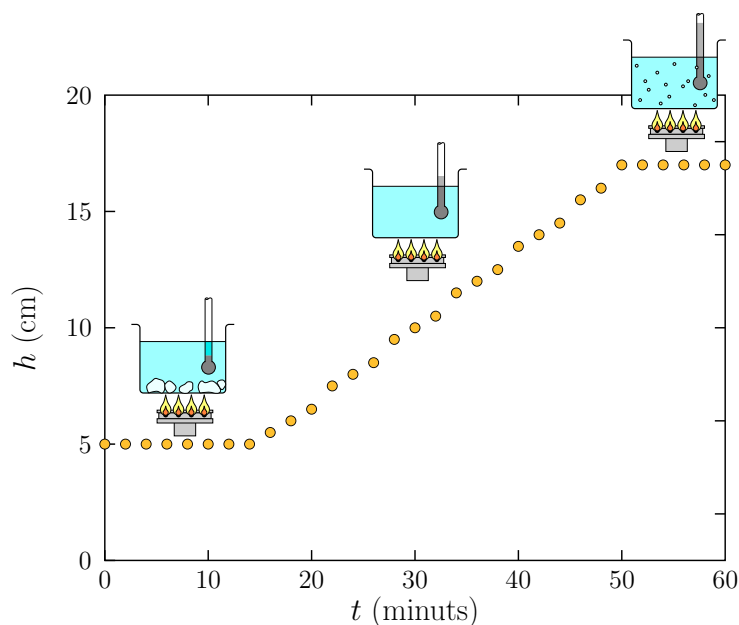


Figura 2.10: Gràfica que ens dona l'altura que assoleix el mercuri en un capil·lar de vidre en funció del temps. El capil·lar està en un bany hidrostàtic que calfem de forma constant amb el temps

hi ha sistemes amb propietats que depenen de la temperatura. Aquestes propietats, anomenades termomètriques, ens serviran per a definir la temperatura empírica.

Suposem un sistema format per un recipient que conté aigua líquida i gel, que fiquem a calfar. En contacte amb el sistema posem un capil·lar de vidre que conté mercuri. Quan calfem el sistema de forma *constant amb el temps* i mesurem l'altura que assoleix la columna de mercuri al capil·lar en funció del temps, obtenim una gràfica com la que mostra la figura 2.10. Podem observar que hi ha dos regions on l'altura del nivell de mercuri no varia encara que estem calfant el cos. Aquestes regions es corresponen amb la fusió del gel (al principi teníem aigua líquida i gel) i amb l'ebullició de l'aigua (quan el sistema trenca a bullir). En aquests punts la temperatura es manté constant.<sup>8</sup> Per això formen part dels anomenats *punts fixos de temperatura*, sistemes on la temperatura sempre té el mateix valor. Aquests punts fixos de temperatura ens serveixen per a definir una escala de temperatures i, una volta definida, per a calibrar els termòmetres. Considerem, per exemple, l'escala Celsius, que és la que utilitzem normalment. Aquesta escala es defineix assignant el valor  $\theta = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$  al punt fix de la fusió de l'aigua i el valor  $\theta = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$  al punt fix de l'ebullició de l'aigua.<sup>9</sup> Aquesta assignació defineix l'origen i la mida del *grau Celsius*,

<sup>8</sup>Si utilitzàrem un segon sistema amb aigua i gel i el mateix tub de vidre ens donaria els mateixos valors d'altura  $h$  encara que no de temps perquè depèn de la quantitat total d'aigua i de gel.

<sup>9</sup>En realitat l'escala Celsius ja no es defineix així sinó utilitzant l'escala absoluta Kelvin, que veurem després. Per aquesta raó, el punt de vaporització normal de l'aigua té una temperatura  $\theta = 99.97\text{ }^{\circ}\text{C}$ . No obstant això, per simplicitat suposem que aquest valor és aproximadament  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

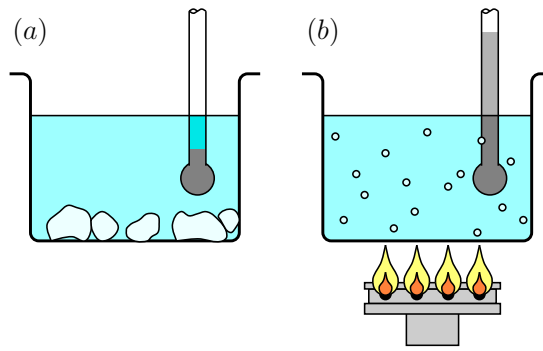


Figura 2.11: Punts fixos de temperatura per al calibratge del nostre termòmetre: (a) Aigua amb gel a 1 atm (punt normal de fusió de l'aigua) (b) Aigua bullint a 1 atm (punt de vaporització normal de l'aigua)

que es representa pel signe  $^{\circ}\text{C}$ . En Termodinàmica, la temperatura indicada en graus Celsius es representa mitjançant la lletra grega  $\theta$  (en alguns llibres s'utilitza el símbol  $t$ ). D'aquesta forma es diferencia clarament del símbol  $T$  que s'utilitza per a la temperatura quan aquesta s'indica en l'escala absoluta (que veurem més endavant).

Hem definit l'escala, però, per a poder mesurar la temperatura necessitem relacionar la temperatura amb la propietat termomètrica del sistema. Considerant la figura 2.10, *admetem* que la relació entre el nivell de mercuri  $h$  i la temperatura  $\theta$  és lineal

$$\theta = ah + b \quad (2.2)$$

on  $a$  i  $b$  són constants que determinem per mitjà dels punts fixos. Com que hem decidit utilitzar l'escala Celsius, tenim que  $h = h_0$  quan  $\theta = 0^{\circ}\text{C}$  i  $h = h_{100}$  quan  $\theta = 100^{\circ}\text{C}$ . En determinar les constants  $a$  i  $b$ , l'equació (2.2) queda com

$$\theta = \frac{h - h_0}{h_{100} - h_0} 100 \quad (2.3)$$

La definició de temperatura empírica està lligada a la propietat termomètrica utilitzada. Per a mesurar la temperatura hem admès una relació lineal (equació (2.2)) entre la propietat termomètrica del material emprat i la temperatura. Això fa que diferents termòmetres amb diferents propietats termomètriques donen temperatures que són prou similars però no iguals. En aquest context prenen una especial rellevància els termòmetres de gas a volum constant (figura 2.12). Aquests termòmetres utilitzen com a propietat termomètrica la dependència del volum del gas amb la temperatura i la pressió. Per a cada temperatura es varia la pressió que s'exerceix sobre el gas perquè el volum del gas es mantinga constant. Això significa que tenim una pressió  $P_0$  per a  $\theta = 0^{\circ}\text{C}$  i una pressió diferent  $P_{100}$  per a  $\theta = 100^{\circ}\text{C}$ . Com havíem fet amb el termòmetre de mercuri, *admetem* una relació lineal entre la temperatura i la pressió (una volta vist com es

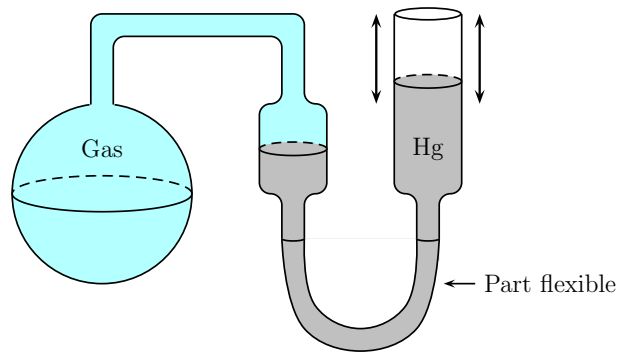


Figura 2.12: Representació esquemàtica d'un termòmetre de gas a volum constant. Pujant o baixant la columna de mercuri regulem la pressió a què està sotmès el gas perquè el seu volum es mantinga constant. La pressió ve donada per la diferència d'altures del nivell de mercuri

comporta el sistema) i obtenim que

$$\theta = \frac{P - P_0}{P_{100} - P_0} 100 \text{ (}^\circ\text{C)} \quad (2.4)$$

El que fa diferent a aquests termòmetres de la resta és que, si fem la gràfica del quocient de pressions  $P_{100}/P_0$  en funció de la quantitat de gas, observem que *tots els gasos* tendeixen a  $P_{100}/P_0 \rightarrow 1.3661$  quan el nombre de mols tendeix a zero ( $n \rightarrow 0$ ). Això implica que la temperatura mesurada *no depèn del tipus de gas* emprat si el gas es troba en quantitats suficientment menudes. Dit d'una altra manera, els gasos es comporten de la mateixa manera quan estan suficientment diluïts, independentment de quines siguin les partícules que els componen. En aquest cas es diu que els gasos es comporten com un *gas ideal*, que és aquell gas format per partícules (molècules) totes iguals que es troben molt allunyades les unes de les altres i només interaccionen mitjançant xocs. Aquesta propietat dels gasos molt diluïts permet la definició de temperatura empírica deslligada del tipus de material (en aquest cas del tipus de gas). Aquest tipus de termòmetres *defineixen l'estàndard* a partir del qual podem calibrar la resta.

La relació lineal de la temperatura en funció de la pressió del gas té la forma general

$$\theta = aP + b; \quad a, b \text{ constants} \quad (2.5)$$

A una pressió  $P = 0$  Pa del gas, obtindríem  $\theta_{\min} = b$ , la mínima temperatura que pot assolir el sistema (una temperatura menor que aquesta suposaria una pressió negativa). Utilitzem aquesta temperatura mínima per a definir l'origen de l'escala del gas ideal o escala de *temperatura absoluta*. Amb aquest punt de referència, la relació entre la temperatura i la pressió adquireix la forma

$$T = aP \quad (2.6)$$

on hem emprat la lletra  $T$  per designar la temperatura en aquesta escala. Necessitem conèixer el valor de la constant  $a$ . En principi només ens caldria obtenir el valor de la pressió a un segon

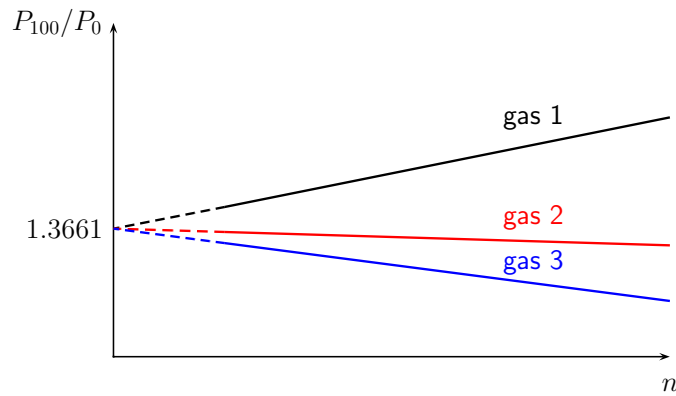


Figura 2.13: En mesurar el quocient  $P_{100}/P_0$ , utilitzant el termòmetre de gas a volum constant amb diferents gasos, s'observa que tots tendeixen cap a un valor únic quan la quantitat de gas tendeix a zero ( $n \rightarrow 0$ )

punt fix (el primer seria l'origen de l'escala) i definir a partir d'ell l'escala de temperatures. Tanmateix volem que la nova escala siga coherent amb l'escala Celsius; dit d'una altra manera, volem que la diferència entre les temperatures de fusió  $T_0$  i vaporització  $T_{100}$  normals de l'aigua continue sent

$$T_{100} - T_0 = 100 \quad (2.7)$$

Utilitzant l'equació (2.6) i que  $P_{100}/P_0 \rightarrow 1.3661$  per a gasos amb  $n \rightarrow 0$  tenim

$$\frac{T_{100}}{T_0} = \frac{P_{100}}{P_0} = 1.3661 \quad (2.8)$$

A partir d'aquestes dos últimes equacions obtenim les temperatures dels punts de fusió i vaporització en l'escala de temperatures absolutes

$$T_0 = 273.15 \text{ K} \quad (2.9)$$

$$T_{100} = 373.15 \text{ K} \quad (2.10)$$

Observem que aquesta escala es mesura en Kelvin (no en *graus* Kelvin, noteu que no porta cercle). Com ja coneixem el valor de la temperatura en l'escala absoluta per als punts fixos, podem obtenir el valor de la constant  $a$  a partir dels valors de  $P_0$  o  $P_{100}$

$$T(\text{K}) = \frac{P}{P_0} T_0 = 273.15 \frac{P}{P_0} \quad (2.11)$$

$$T(\text{K}) = \frac{P}{P_{100}} T_{100} = 373.15 \frac{P}{P_{100}} \quad (2.12)$$

Qualsevol de les dos equacions ens serveixen per al nostre propòsit. De fet, només necessitem un punt fix si coneixem el seu valor de la temperatura en l'escala absoluta. En aquest sentit hem de considerar que els punts de vaporització i fusió depenen de la pressió a què estiga el

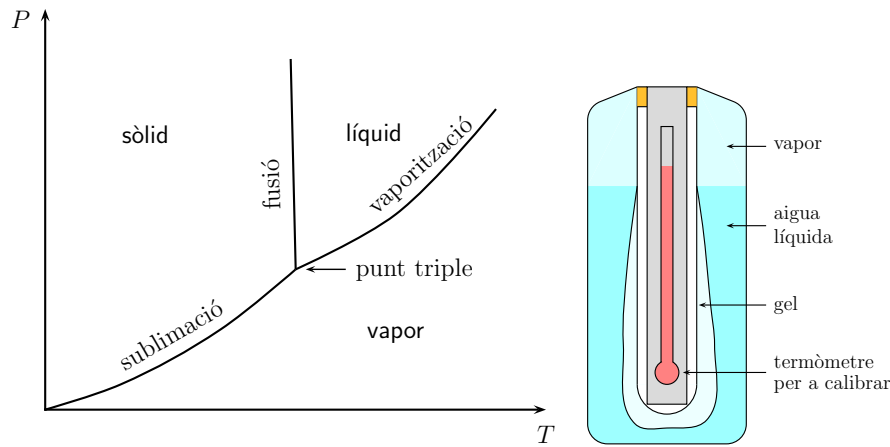


Figura 2.14: (Esquerra) Diagrama de fases de l'aigua. Es mostra el punt triple i les corbes de coexistència sòlid-líquid, sòlid-vapor i líquid-vapor. La corba de sublimació (transició sòlid→gas) és la mateixa que la de condensació (gas→sòlid). La corba de fusió (sòlid→líquid) és la mateixa que la de solidificació (líquid→sòlid) i la corba de vaporització (líquid→gas) és la mateixa que la de líquüefacció (gas→líquid). (Dreta) Calibratge d'un termòmetre utilitzant el punt triple de l'aigua

sistema.<sup>10</sup> Això es veu clarament al diagrama de fases de l'aigua (figura 2.14) on es mostren les corbes de coexistència sòlid-líquid, sòlid-vapor i líquid-vapor. Per això parlàvem de la fusió o vaporització *normal*, és a dir, amb una pressió  $P = 1 \text{ atm}$ . Per a evitar problemes derivats de la pressió, generalment s'escolleix com a segon punt de referència el punt triple de l'aigua, que és el punt de pressió i temperatura on coexisteixen les tres fases de l'aigua: sòlida, líquida i gasosa (figura 2.14). Aquest punt es correspon amb una pressió  $P_3 = 4.58 \text{ mmHg}$  i una temperatura  $T_3 = 273.16 \text{ K}$ . És fàcil de preparar i és més estable que els punts de fusió i vaporització. De fet, això ha provocat que el Kelvin es definisca com la  $1/273.16$  part de la temperatura del punt triple de l'aigua. L'expressió equivalent a l'equació (2.6) amb el punt triple de l'aigua com a segon punt de referència és

$$T = \frac{P}{P_3} T_3 \text{ (K)} \quad (2.13)$$

L'escala de temperatures absolutes és la que s'utilitza en les expressions matemàtiques de la Termodinàmica. Com havíem indicat, el zero de l'escala ( $T = 0 \text{ K}$ ) implica una pressió nul·la del gas ( $P = 0 \text{ Pa}$ ). Aquest punt es coneix com a *zero absolut*. En ell el moviment tèrmic seria nul (les molècules estarien congelades i de fet ja no tindríem un gas). Dos dels principis de la Termodinàmica donen com a conseqüència la impossibilitat d'arribar al valor  $T = 0 \text{ K}$  partint d'una temperatura  $T > 0 \text{ K}$ . La mínima temperatura que s'ha aconseguit està al voltant de  $10^{-9} \text{ K}$  en sistemes de congelació d'àtoms mitjançant feixos làser.

<sup>10</sup>Per exemple, al cim del mont Everest la pressió és de  $26.39 \text{ kPa}$  i la temperatura d'ebullició de l'aigua és  $69 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Finalment, hem d'indicar que la determinació de la temperatura amb el termòmetre de gas a volum constant no resulta pràctica en la major part dels casos. Això fa que aquests termòmetres s'utilitzin generalment per al calibratge de termòmetres. Hi existeix una norma, l'*Escala Internacional de Temperatura*, establida pel *Comitè Internacional de Pesos i Mesures* i actualitzada per darrera volta el 1990, que estableix els punts fixos de temperatura i els materials i les propietats termomètriques que defineixen la temperatura a cada interval de temperatura.

### Exemple

Un termistor és un sensor de temperatura format per un material semiconductor. La seua dependència amb la temperatura ve donada per l'expressió  $R = R_0 \exp(B/T)$ , on  $R$  és la resistència elèctrica del material semiconductor (en  $\Omega$ ) i  $T$  és la temperatura (en K).  $R_0$  i  $B$  són constants que han de determinar-se mitjançant punts de calibratge.

1. Si  $R_f = 7630 \Omega$  per al punt de fusió de l'aigua i  $R_e = 153 \Omega$  per al punt d'evaporació, calculeu  $R_0$  i  $B$ .
2. Quina és la sensibilitat del termòmetre en els punts de control?

Per a determinar les constant  $R_0$  i  $B$  iguaem la resistència a cada temperatura de control amb l'expressió del termistor

$$R_f = R_0 \exp(B/T_f)$$

$$R_e = R_0 \exp(B/T_e)$$

on  $T_f = 273.15 \text{ K}$  i  $T_e = 373.15 \text{ K}$ . Dividint les dos expressions anteriors tenim

$$\frac{R_f}{R_e} = \exp \left[ B \left( \frac{1}{T_f} - \frac{1}{T_e} \right) \right] = \exp \left[ B \left( \frac{T_e - T_f}{T_f T_e} \right) \right]$$

Prenent logaritmes als dos costats de l'equació obtenim el valor de  $B$

$$B \left( \frac{T_e - T_f}{T_f T_e} \right) = \ln \left( \frac{R_f}{R_e} \right) \rightarrow B = \left( \frac{T_f T_e}{T_e - T_f} \right) \ln \left( \frac{R_f}{R_e} \right) = 3981 \text{ K}$$

A partir del valor de  $B$  podem obtenir el de  $R_0$  d'un dels punts de control

$$R_0 = R_f \exp(-B/T_f) = 3.55 \times 10^{-3} \Omega$$



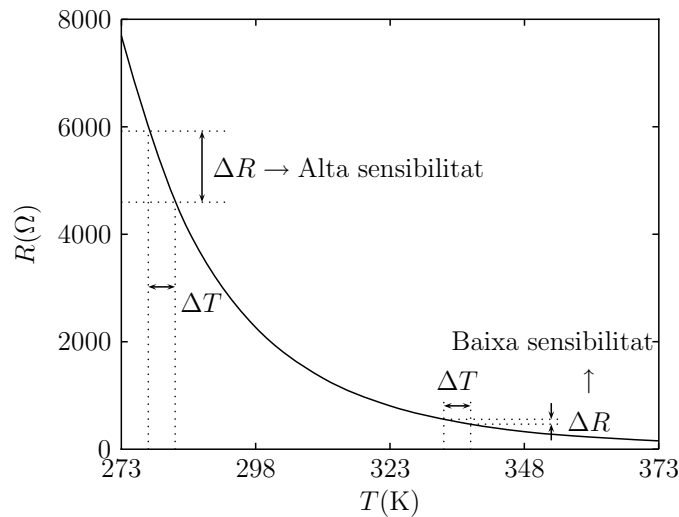


Figura 2.15: Variació de la resistència d'un termistor en funció de la temperatura. S'ha assenyalat la variació de  $R$  per a un  $\Delta T$  fix en una zona d'alta sensibilitat i una zona de baixa sensibilitat

La representació gràfica de la funció  $R = R_0 \exp(B/T)$  (figura 2.15) ens indica visualment que la major sensibilitat es dona al punt de fusió. En eixe punt la variació de la resistència (nombre d'ohms per Kelvin) és major. Quantitativament la sensibilitat es pot obtenir mitjançant la derivada  $dR/dT$ , que al cap i a la fi no és més que la variació d' $R$  en funció de  $T^a$

$$\frac{dR}{dT} = -\frac{BR_0}{T^2} \exp(B/T)$$

que aplicada als dos punts de control dona

$$\left. \frac{dR}{dT} \right|_{T_f} = -408 \text{ } \Omega/\text{K}$$

$$\left. \frac{dR}{dT} \right|_{T_e} = -4.38 \text{ } \Omega/\text{K}$$

<sup>a</sup>Encara que és una derivada senzilla, podem utilitzar el wxMaxima per a calcular-la

```
(%i1) diff(R0*exp(B/T),T);
(%o1) -(B*R0*e^(B/T))/T^2
```

## 2.4 Sistemes en equilibri termodinàmic

Una volta hem introduït les definicions bàsiques de la termodinàmica i la temperatura, passem a fer la descripció termodinàmica de diferents sistemes. Comencem amb sistemes que es troben en equilibri termodinàmic i analitzem com podem descriure el seu estat d'equilibri mitjançant les variables termodinàmiques més adequades. Com que, en general, tractarem amb sistemes

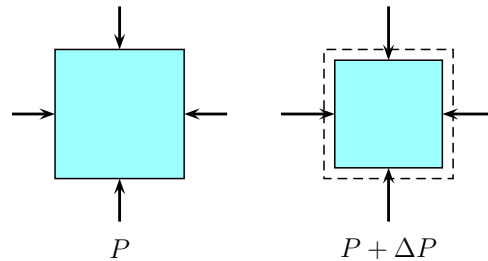


Figura 2.16: En variar la pressió aplicada pels envoltants sobre el sistema, tot mantenint la temperatura constant, es produeix una variació del seu volum perquè la seua pressió s'iguale a la dels envoltants

*tancats*, només tindrem dos interaccions bàsiques (mecànica i tèrmica; veure secció 2.2). Per tant, només necessitem dos variables d'estat per a descriure el sistema.

### 2.4.1 Líquids i sòlids

Descrivim primer l'estat d'equilibri de líquids i sòlids. Els gasos els tractarem de forma separada perquè, com vam veure al capítol anterior, no tenen una densitat definida. Per a la descripció de l'estat d'equilibri termodinàmic de líquids i sòlids escollim com variables *independents* la pressió  $P$  i la temperatura  $T$ . Aquesta elecció es deu al fet que només permetem que el nostre sistema interaccione tèrmicament i mecànicament amb els envoltants. És a dir, el nostre sistema serà *tancat* i no intercanviarà matèria amb els envoltants. Com hem vist al Principi Zero de la termodinàmica, dos sistemes estan en equilibri tèrmic quan la seua temperatura és la mateixa. De forma anàloga podríem establir un principi zero per a la interacció mecànica. Ens indicaria que dos sistemes estan en equilibri mecànic quan la pressió que exerceixen sobre la paret (mòbil) de separació és la mateixa. No ho fem perquè aquesta condició és la mateixa que s'obté des del punt de vista de la Mecànica.

Per a descriure completament el sistema necessitem una tercera variable. Escollim el volum  $V$ , que serà la nostra variable dependent. Tanmateix no busquem una equació d'estat  $V = V(P, T)$  explícita. En comptes d'això suposarem que *mesurem* el volum  $V$  a unes condicions concretes de pressió i volum, que anomenem valors inicials o de referència. La resta de valors d' $V$  els obtenim a partir de les variacions de  $P$  i  $T$  respecte dels seus valors inicials.

Suposem que hem mesurat al nostre sistema un volum  $V$  quan es troba a una pressió de referència  $P$  i a una temperatura de referència  $T$ . Si variem lleugerament la pressió externa a què està sotmès el sistema, mantenint la temperatura constant, aquest variarà la seua pressió interna fins arribar a un nou estat d'equilibri amb els envoltants (figura 2.16). Per a assolir el nou estat d'equilibri el volum de sistema haurà variat (la temperatura la mantenim constant). Si el canvi

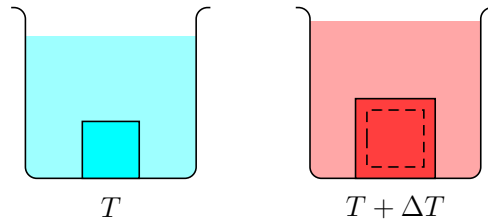


Figura 2.17: En variar la temperatura del bany tèrmic que actua sobre el sistema, tot mantenint la pressió constant, es produeix una variació tant de la temperatura del sistema (per a igualar la del bany tèrmic) com de volum

de pressió és menut, la variació del volum serà, en primera aproximació, proporcional al volum inicial  $V$  i a la variació de pressió  $\Delta P$

$$\Delta V = -\chi_T V \Delta P, \quad T = \text{constant} \quad (2.14)$$

on  $\chi_T$  és la *compressibilitat isoterma*, definida com

$$\chi_T \equiv -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad [\text{unitats Pa}^{-1}] \quad (2.15)$$

El signe  $-$  en la definició de  $\chi_T$  es fica perquè tinga valors positius ja que en augmentar la pressió, el volum dels materials disminueix. L'ús de les derivades parcials simplement respon al fet que  $V$  depèn de dos variables ( $P$  i  $T$ ) i que en la mesura de la compressibilitat isoterma modifiquem la pressió però mantenim constant la temperatura. El que indica  $\chi_T$  simplement és la variació relativa del volum del sistema en variar la pressió. La compressibilitat isoterma és la inversa del mòdul de compressibilitat  $B$  que havíem definit en el capítol de Mecànica de Fluids (secció 1.2.3).

Si ara, en canvi, variem lleugerament la temperatura dels envoltants del sistema tot mantenint constant la pressió, la temperatura del sistema variarà fins arribar a l'equilibri tèrmic on es tornaran a igualar les temperatures de sistema i envoltants (2.17). No només haurà variat la temperatura del sistema, també ho haurà fet el volum. Si la temperatura ha variat un valor molt menut, el canvi de volum del sistema serà, en primera aproximació, proporcional al volum inicial  $V$  i a la variació de temperatura  $\Delta T$

$$\Delta V = \gamma_P V \Delta T, \quad P = \text{constant} \quad (2.16)$$

El factor de proporcionalitat  $\gamma_P$  es coneix com *coeficient de dilatació volúmica isobàric* i es defineix com

$$\gamma_P \equiv \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \quad [\text{unitats K}^{-1}] \quad (2.17)$$

Com adés, l'ús de les derivades parcials respon al fet que  $V$  depèn de dos variables ( $T$  i  $P$ ). La  $P$  com a subíndex de la derivada parcial indica que aquesta es fa a pressió constant. Físicament,

Material	$\gamma_P$ (K <sup>-1</sup> )
Alumini	$75 \times 10^{-6}$
Acer	$36 \times 10^{-6}$
Plom	$87 \times 10^{-6}$
Vidre (pyrex)	$9 \times 10^{-6}$
Mercuri	$180 \times 10^{-6}$
Alcohol etílic	$1100 \times 10^{-6}$
Aigua	$210 \times 10^{-6}$

Taula 2.2: Valors del coeficient de dilatació volúmica isobàrica per a alguns materials a  $T = 20$  °C

el que indica el coeficient de dilatació volúmica isobàric és la variació relativa del volum amb la variació de la temperatura. El seu valor sol ser positiu, és a dir, els materials en fase sòlida i líquida augmenten de grandària, es *dilaten*, amb la temperatura.

### Exemple

Tenim un dipòsit de 200 l de capacitat que omplim completament amb aigua al matí, quan la temperatura és de 5 °C. Si a migdia la temperatura passa a ser de 35 °C, estima, negligint els efectes de l'evaporació, quina quantitat d'aigua s'haurà vessat del dipòsit.

La variació en el volum d'aigua entre el matí ( $T = 5$  °C) i el migdia ( $T = 35$  °C) és de

$$\Delta V = \gamma_P V \Delta T = 210 \times 10^{-6} \times 200 \times (35 - 5) = 1.26 \text{ l}$$

Com el dipòsit s'havia omplit completament, es vessaran 1.26 l d'aigua. Noteu que per a calcular  $\Delta T$  podem utilitzar els graus Celsius perquè la diferència de graus Celsius és igual a la diferència en Kelvin ( $\Delta\theta$  (°C) =  $\Delta T$  (K)).

Suposem ara que tenim un material sòlid en forma de barra de secció quadrada de costat  $a$  i longitud  $L$  de forma que  $L \gg a$  (figura 2.18). Si varia la temperatura de l'entorn, variarà la seua temperatura i el volum es modificarà. Però la variació de volum no serà homogènia (en termes absoluts) en totes les direccions sinó que la longitud augmentarà més que la secció transversal. Per exemple, suposem que tenim una barra amb una longitud  $L = 1$  m i una secció quadrada de costat  $a = 1$  cm, és a dir  $L \gg a$ . Si, per a una variació de temperatura  $\Delta T$ , el volum augmenta un 3%, això es traduirà en un augment de la longitud d'1% ( $\Delta L = 1$  cm) i un augment del costat de la secció d'1% ( $\Delta a = 0.1$  mm). És a dir,  $\Delta L \gg \Delta a$ . En aquest cas només ens interessa com varia la longitud de la barra i no la seua secció. Per tant podem escriure una equació anàloga a

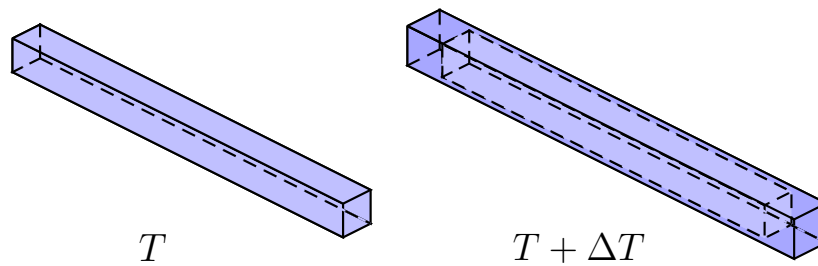


Figura 2.18: En una barra, quan sofreix una dilatació volúmica per causa de la temperatura, la longitud augmenta molt més (en termes absoluts) que la secció transversal

l'equació (2.16) per a la longitud

$$\Delta L = \alpha_P L \Delta T \quad (2.18)$$

on  $\alpha_P$  és el coeficient de dilatació *lineal* isobàric. Per a materials isòtrops es compleix que  $\alpha_P = \gamma_P/3$ .

De forma anàloga podem tenir un sistema on una de les dimensions siga molt menor que les altres dos, per exemple un disc. En aquest cas el que ens interessa és la superfície  $S$  i la seua variació

$$\Delta S = \beta_P S \Delta T \quad (2.19)$$

on  $\beta_P$  és el coeficient de dilatació *superficial* isobàric. En materials isòtrops tenim que  $\beta_P = 2\gamma_P/3$ .

### Exemple

Per a fer una via de tren es tendeixen rails d'acer en segments de 12 m de llarg. Els rails es fiquen suficientment separats com perquè no es toquen en estiu, quan la temperatura pot assolir els 40 °C. Estimeu quina separació hi ha entre cada parella de rails en hivern, quan la temperatura és de -6 °C.

La diferència de longitud dels rails entre hivern i estiu és

$$\Delta L = \alpha_P L \Delta T = 12 \times 10^{-6} \times 12 \times (-6 - 40) = -6.6 \times 10^{-3} \text{ m}$$

La variació és negativa perquè la temperatura en hivern és menor que en estiu. La disminució de longitud de cada rail en hivern es dividirà en parts iguals a la dreta i l'esquerra. Per exemple, a l'esquerra serà  $\Delta L_{\text{esquerra}} = \Delta L/2 = 3.3 \times 10^{-3} \text{ m}$ . Tanmateix, com que la distància entre dos rails serà la suma de la variació de la part dreta del rail anterior i la variació de la part esquerra del rail posterior, tenim que

$$\Delta L_{\text{dreta}} + \Delta L_{\text{esquerra}} = \Delta L = 6.6 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Per a obtenir el volum  $V$  a diferents valors de pressió i temperatura ens hem basat en el seu valor inicial i en la relació del seu increment amb els increments de  $P$  i  $T$ . Ens podem preguntar fins a quin punt és vàlida aquesta forma de procedir. Suposem que tenim un valor inicial del volum  $V$  i que modifiquem la temperatura un  $\Delta T$  mantenint constant la pressió. Per l'equació (2.16) tenim que l'increment de volum serà  $\Delta V = \gamma_P V \Delta T$ . Per tant, el nou volum vindrà donat per

$$V'_1 = V + \Delta V = V(1 + \gamma_P \Delta T) \quad (2.20)$$

Suposem ara que augmentem la temperatura en 2 etapes de la mateixa grandària  $\Delta T/2$ . El volum després de la primera etapa serà

$$V'_1 = V \left( 1 + \gamma_P \frac{\Delta T}{2} \right) \quad (2.21)$$

i, després de la segona,

$$V'_2 = V'_1 \left( 1 + \gamma_P \frac{\Delta T}{2} \right) = V \left( 1 + \gamma_P \frac{\Delta T}{2} \right)^2 \quad (2.22)$$

Comparant  $(1 + \gamma_P \Delta T/2)^2$  amb  $(1 + \gamma_P)$  obtindríem una primera estimació de fins a quin punt l'equació (2.20) és vàlida per a la determinació del volum en les noves condicions de pressió i temperatura. No obstant això, podem pensar que la solució donada per l'equació (2.22) tampoc és exacta i que podem fer una millor estimació utilitzant més etapes. L'equació (2.22) es pot generalitzar fàcilment a un augment de temperatura en  $N$  etapes, cadascuna amb un augment de temperatura  $\Delta T/N$

$$V'_N = V \left( 1 + \gamma_P \frac{\Delta T}{N} \right)^N \quad (2.23)$$

En el límit  $N \rightarrow \infty$ <sup>11</sup>

$$V'_\infty = V \exp(\gamma_P \Delta T) \quad (2.24)$$

que és la solució més exacta que podem trobar. Ara ja podem estimar fins a quin punt l'equació (2.20) és correcta.

La figura 2.19 mostra la representació de la funció  $1 + \gamma_P \Delta T$  (corresponent a l'equació (2.20)) i de la funció  $\exp(\gamma_P \Delta T)$  (corresponent a l'equació (2.24)). Podem observar com les dos funcions coincideixen per a valors de  $\gamma_P \Delta T$  menuts (d'un pocs per cent). L'aproximació donada per l'equació (2.20) és molt bona en general perquè els valors del coeficients de dilatació volúmica són molt menuts (taula 2.2).

<sup>11</sup>Utilitzant el wxMaxima podem fer aquest límit utilitzant la instrucció:

```
(%i1) limit(V*(1+gammaP*dT/N)**N,N,inf);
```

```
Is N+dT*gammaP positive or negative?positive;
```

```
Is dT*gammaP positive, negative, or zero?positive;
```

```
(%o1) %e^(dT*gammaP)*V
```

(La resposta de la segona pregunta pot ser **positive** o **negative**; el resultat final és el mateix.)

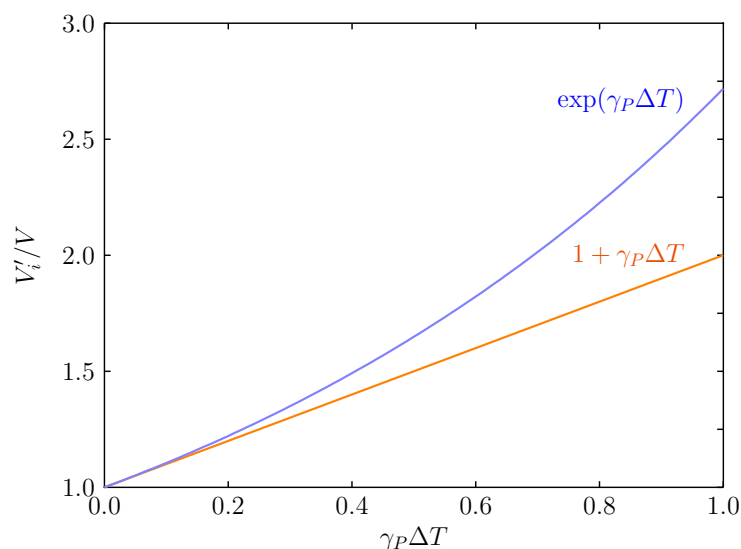


Figura 2.19: Comparació de la variació relativa de volum donada per les equacions (2.20) (aproximació lineal) i (2.24) (solució exacta) en funció de  $\gamma_P \Delta T$

### Exemple

Torna a estimar la quantitat d'aigua que es vessarà en l'exemple del dipòsit d'aigua anterior però utilitzant ara l'equació (2.24). Compara el resultat amb el que havíem obtingut abans.

La variació del volum d'aigua entre el migdia ( $T = 35 \text{ }^\circ\text{C}$ ) i el matí ( $T = 5 \text{ }^\circ\text{C}$ ) és de

$$\Delta V = V'_\infty - V = V \exp(\gamma_P \Delta T) - V = 1.263 \text{ l}$$

Com abans havíem estimat  $\Delta V = 1.26 \text{ l}$ , tenim que les dos equacions ens donen pràcticament la mateixa estimació.

## 2.4.2 Gasos

Hem descrit els estats d'equilibri de líquids i sòlids basant-nos en determinar un estat a  $(P, T, V)$  inicial o de referència, i obtenint la resta d'estats mitjançant les variacions de  $P$  i  $T$  i els coeficients de compressibilitat isoterma i de dilatació isobàrica. En aquests sistemes funcionava perquè els coeficients emprats eren constants i menuts en un ampli interval de temperatures i pressions. En canvi, aquest mètode no és útil per a descriure l'estat d'equilibri dels gasos perquè el seu volum depèn fortament de la pressió i la temperatura, i això fa que  $\chi_T$  i  $\gamma_P$  depenguin fortament de les condicions de  $P$  i  $T$ .

Per a la descripció dels gasos també fem com a variables termodinàmiques d'estat la pressió  $P$ , la temperatura  $T$  i el volum  $V$ . Tractem sistemes *tancats*, és a dir, sistemes on el nombre de

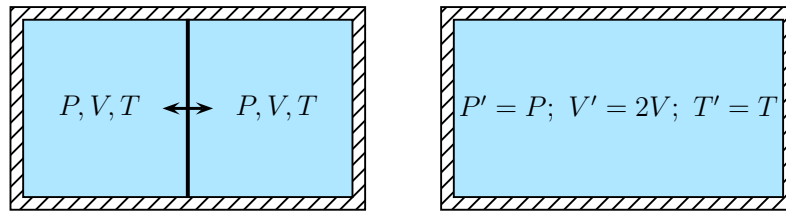


Figura 2.20: Inicialment el sistema evoluciona fins que els dos subsistemes assoleixen l'equilibri tèrmic (mateixa temperatura) i mecànic (mateixa pressió). En llevar la paret de separació, el sistema total està a la mateixa pressió i temperatura que els subsistemes inicials, però el volum és el doble

mols  $n$  es manté constant. A més suposem que la densitat del gas  $n/V$  és baixa. En aquestes condicions tots els gasos es comporten de la mateixa manera (és el que havíem vist amb el termòmetre de gas a volum constant). Partim de dos observacions experimentals per als gasos a densitats baixes:

- Llei de Boyle:  $PV = \text{constant}$
- Jacques Charles i Gay-Lussac observaren que:

$$PV = CT; C = \text{constant} \quad (2.25)$$

Per a  $T$  constant, les observacions de Jacques Charles i Gay-Lussac donen la Llei de Boyle. La magnitud  $C$  és, en principi, independent del tipus de gas (a densitats baixes) i roman constant sempre que no es varíe la quantitat de gas. Però, com depèn  $C$  de la quantitat de gas?

Suposem un contenidor aïllat de l'exterior que conté al seu interior una paret diatèrmana, mòbil i impermeable que separa dos compartiments que contenen gas amb el mateix nombre de mols (figura 2.20). Com que els subsistemes podem interaccionar tant mecànicament com tèrmicament, el sistema evolucionarà fins que la pressió i temperatura dels subsistemes s'iguale. Una volta assolit l'equilibri tenim dos subsistemes amb el mateix nombre de mols  $n$ , la mateixa pressió  $P$  i la mateixa temperatura  $T$ . Això implica que els dos sistemes estan en el mateix estat termodinàmic i que el seu volum  $V$  també és el mateix. Si apliquem l'equació (2.25) a cadascun dels subsistemes tenim que

$$PV = CT \quad (2.26)$$

Si ara llevem la paret de separació entre els subsistemes, observarem que el sistema total no es modifica (ja estava en equilibri). Aquest sistema té un volum  $V' = 2V$ , però la pressió  $P$  i la temperatura  $T$  és la que tenien els dos subsistemes en equilibri. Apliquem l'equació (2.25) al sistema total

$$PV' = C'T \quad (2.27)$$



Com que  $V' = 2V$  tenim que  $C' = 2C$ . És a dir, la constant  $C$  és proporcional a la grandària del sistema:<sup>12</sup>  $C = Rn$ , on  $R$  és una constant anomenada *constant dels gasos ideals* de valor

$$R = 8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

Per comoditat és molt comú mesurar les pressions en atmosferes i el volum en litres. En aquestes unitats el valor de la constant  $R$  és

$$R = 0.082 \text{ atm} \cdot \text{l} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

Amb la relació  $C = nR$ , l'equació que descriu el comportament dels gasos a densitats baixes és

$$PV = nRT \quad (2.28)$$

que es coneix com *l'equació tèrmica dels gasos ideals*. Aquesta equació relaciona les variables  $P$ ,  $T$ ,  $V$  i  $n$ . Per a sistemes tancats (amb  $n$  constant) relaciona les variables d'estat  $P$ ,  $T$  i  $V$ , de manera que només necessitem dos d'elles per a descriure l'estat d'equilibri del sistema.

A banda de l'equació tèrmica d'estat, utilitzarem *l'equació energètica d'estat*, que ens dona l'energia interna  $U$  com a funció de les variables d'estat ( $P, T, V$ ). En un gas ideal es compleix que, a temperatura constant  $T$ , l'energia interna és independent de la pressió i el volum

$$\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T = 0 \text{ i } \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0 \quad (2.29)$$

Per aquest motiu s'utilitza la temperatura com la variable independent en l'equació que determina  $U$ . L'equació energètica per a un gas ideal monoatòmic és

$$U = \frac{3}{2}nRT \quad (2.30)$$

Les equacions (2.28) i (2.30) només són vàlides per als gasos a una densitat baixa, quan la interacció entre partícules es redueix als xocs elàstics entre elles. En augmentar la densitat apareixen nous termes en les equacions que donen compte dels efectes relacionats amb noves interaccions entre partícules, per exemple, les degudes als fenòmens de natura electrostàtica.

## 2.5 Treball i calor

Una volta completada la descripció de l'estat d'equilibri termodinàmic de diferents sistemes, passem a l'estudi del processos termodinàmics. Quan vam introduir els processos ja vam indicar

<sup>12</sup>En general, en Termodinàmica podem classificar les magnituds en *extensives*, si depenen linealment de la grandària del sistema, aquest és el cas del volum i el nombre de mols, i *intensives*, si no depenen de la grandària del sistema, aquest és el cas de la pressió i la temperatura.

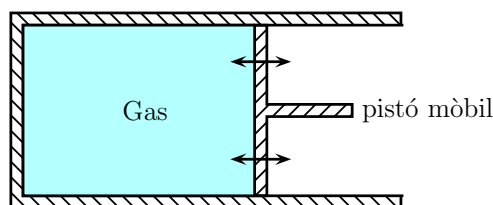


Figura 2.21: Com a sistema considerem un gas ideal dins d'un contenidor on una paret és un pistó mòbil

que, en aquest capítol, només analitzariem processos en sistemes *tancats*, on el sistema intercanvia energia amb els envoltants en forma de treball i calor. En aquesta secció estudiem amb més detall aquests processos i en la següent analitzarem quines conseqüències tenen sobre el sistema.

### 2.5.1 Treball

Considerem un sistema format per un gas ideal que es troba dins d'un contenidor on una paret és un pistó mòbil (figura 2.21). Suposem que el pistó mòbil es pot moure sense fregament i que la seua massa és negligible. Inicialment tant el gas com els envoltants estan en equilibri mecànic  $P = P_{\text{env}}$ , on  $P$  és la pressió del gas i  $P_{\text{env}}$  és la pressió dels envoltants. Variem lleugerament la pressió dels envoltants fins a un valor  $P_{\text{env}} + \Delta P$ , amb  $|\Delta P| \ll P_{\text{env}}$ . La diferència de pressió farà que el sistema evolucione i es produïska un desplaçament del pistó  $\Delta x$  fins que tornen a igualar-se les pressions. El treball efectuat pel gas és aleshores

$$W = F \Delta x \quad (2.31)$$

on  $F$  és la força que exerceix el gas sobre el pistó. Com que la diferència de pressió  $\Delta P$  és molt menuda, podem suposar en primera aproximació que la força  $F$  és constant durant el procés. L'equació (2.31) la podem escriure en funció de la pressió en comptes de la força dividint i multiplicant per l'àrea  $A$  del pistó

$$W = F \Delta x = \frac{F}{A} A \Delta x = P \Delta V \quad (2.32)$$

on  $\Delta V = A \Delta x$  és la variació de volum que experimenta el sistema.

Suposem ara que modifiquem la pressió dels envoltants entre  $P_0$  i  $P_1$  (figura 2.22). Per a fer-ho modifiquem la pressió en  $N \gg 1$  intervals. En cada interval la pressió es modifica un  $\Delta P = (P_1 - P_0)/N$  i a cada pas deixem que el sistema pugui assolir de nou l'equilibri amb els envoltants. Per a un nombre suficientment gran de passos tenim un procés quasiestàtic perquè podem considerar que el sistema passa per successius estats d'equilibri. El treball fet pel gas durant aquest procés és

$$W = \sum_{i=1}^N P_i \Delta V_i \quad (2.33)$$

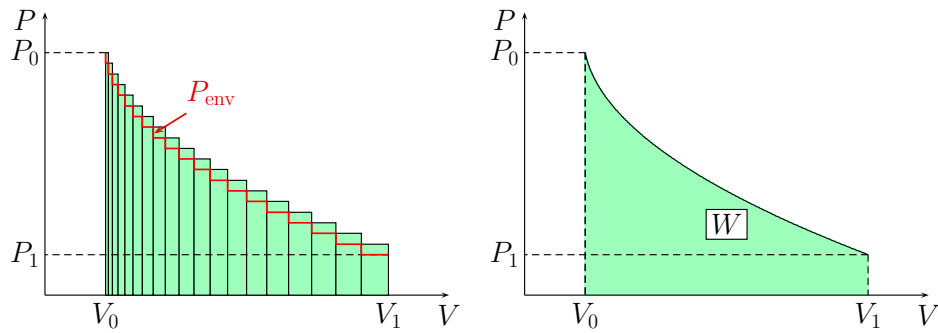


Figura 2.22: Treball mecànic fet pel gas del contenidor en variar la pressió dels envoltants. En la figura de l'esquerra la variació es fa en 20 etapes. En la figura de la dreta el nombre d'etapes augmenta (400 en la figura) i podem parlar d'un procés quasiestàtic, on el treball ve donat per l'equació (2.34) i és igual a l'àrea entre la corba  $P(V)$  i l'eix  $V = 0$

on  $P_i = P + i\Delta P$  i  $\Delta V_i$  és la pressió i l'increment de volum a cada pas. Per al límit  $N \rightarrow \infty$  ( $\Delta P \rightarrow 0$ ), l'equació (2.33) esdevé la integral

$$W = \int_{V_0}^{V_1} P dV \quad (2.34)$$

on  $V_0$  i  $V_1$  són els volums inicial i final del gas. L'equació (2.34) ens dona el treball mecànic fet pel gas durant el procés. En un diagrama pressió-volum  $P - V$  és igual a l'àrea existent entre la corba del procés (els diferents estats  $(P, V)$  pels que passa) i l'eix  $P = 0$  (figura 2.22).

Si és el gas qui realitza el treball ( $W > 0$ ) tenim una expansió ( $\Delta V > 0$ ). En canvi, si el treball el realitzen els envoltants ( $W < 0$ ) tenim una compressió ( $\Delta V < 0$ ). L'equació (2.34) ens indica a més que *només es realitza treball mecànic si hi ha una variació de volum*.

### El treball no és una magnitud d'estat

Al contrari que la pressió o l'energia interna, el treball no és una magnitud d'estat. Dit d'una altra forma, els sistemes *intercanvien energia en forma de treball però no tenen treball*. Vegem-ho amb un exemple. Suposem dos processos que fan que el nostre sistema canvie de l'estat  $(P_0, V_0)$  a l'estat  $(P_1, V_1)$ . El procés *A* comença per una expansió isobàrica (a pressió constant) entre l'estat  $(P_0, V_0)$  i l'estat intermedi  $(P_0, V_1)$ , i continua després per un procés isocor (a volum constant) entre l'estat intermedi i l'estat final  $(P_1, V_1)$  (figura 2.23). El treball fet pel sistema en el procés *A* és igual al treball d'expansió

$$W_A = P_0(V_1 - V_0) \quad (2.35)$$

perquè en el procés isocor  $\Delta V = 0$  i el treball és nul. En el procés *B* primer es produeix un procés isocor entre l'estat inicial  $(P_0, V_0)$  i l'estat intermedi  $(P_1, V_0)$ , i després una expansió

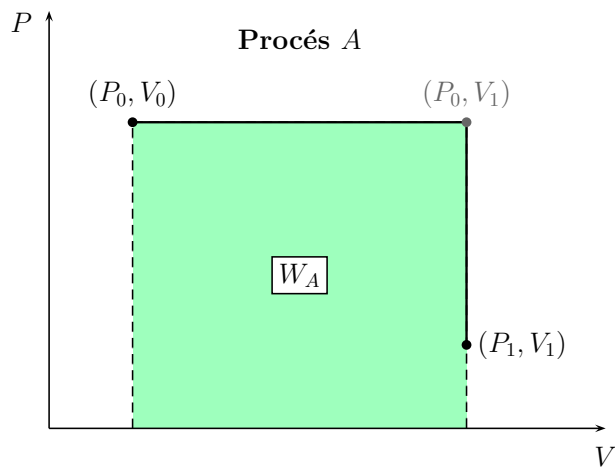


Figura 2.23: El procés  $A$  es compon d'una expansió isobàrica entre l'estat inicial  $(P_0, V_0)$  i l'estat intermedi  $(P_0, V_1)$  més un procés isocor entre l'estat intermedi i l'estat final  $(P_1, V_1)$ . El treball del procés  $W_A$  és igual al treball de l'expansió (en el procés isocor l'intercanvi d'energia en forma de treball és nul perquè  $\Delta V = 0$ )

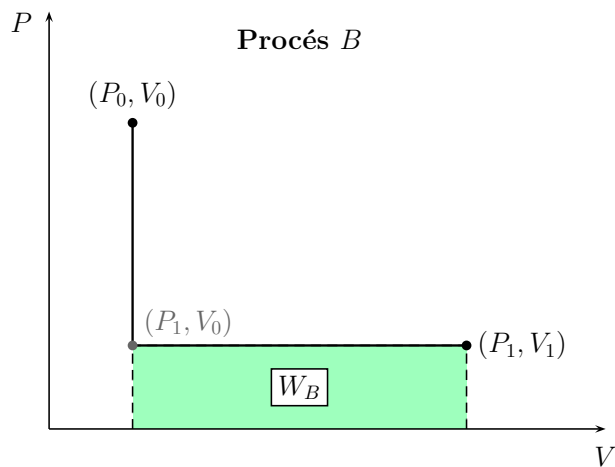


Figura 2.24: El procés  $B$  es compon d'un procés isocor entre l'estat inicial  $(P_0, V_0)$  i l'estat intermedi  $(P_1, V_0)$  més una expansió isobàrica entre l'estat intermedi i l'estat final  $(P_1, V_1)$ . Com passava en el procés  $A$ , el treball del procés  $W_B$  és igual al treball de l'expansió (en el procés isocor  $W = 0$  perquè  $\Delta V = 0$ )

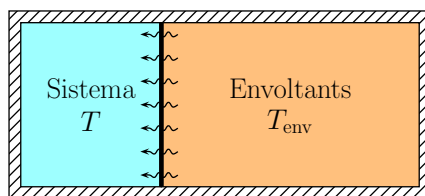


Figura 2.25: Univers termodinàmic format per un sistema en contacte tèrmic amb els envoltants. Inicialment el sistema i els envoltants estan en equilibri intern amb una temperatura diferent ( $T \neq T_{\text{env}}$ ). La paret diatèrmana, rígida i impermeable que els separa permet que el sistema intercanvi energia en forma de calor amb els envoltants fins que s'assoleix l'equilibri tèrmic, on  $T = T_{\text{env}}$

isobàrica entre l'estat intermedi i l'estat final ( $P_1, V_1$ ) (figura 2.24). El treball fet pel sistema en el procés  $B$  ve donat pel treball d'expansió isobàrica (segona part del procés)

$$W_B = P_1(V_1 - V_0) \quad (2.36)$$

perquè, com passava en el procés  $A$ , en el procés isocor no hi ha variació de volum i el treball és nul. Tenim per tant que  $W_A \neq W_B$ , és a dir que *el treball depèn del procés*. Això significa que el sistema no pot ser una magnitud d'estat. Si ho fos, l'estat final tindria un treball diferent si anara pel procés  $A$  que si ho fera pel procés  $B$ , i per tant no seria el mateix estat.

## 2.5.2 Calor

En aquesta secció parlarem de la interacció tèrmica. Fins ara sabem que la interacció tèrmica es produeix per una diferència de temperatures. Suposem el nostre sistema d'estudi (que no té per què ser un gas) en un contenidor on totes les parets són aïllants (rígides, impermeables i adiabàtiques) excepte per una que és diatèrmana i deixa que el sistema interaccione tèrmicament amb els envoltants (figura 2.25). Inicialment el nostre sistema està en equilibri tèrmic amb els envoltants  $T = T_{\text{env}}$ . De forma anàloga a com havíem fet amb el treball, variem la temperatura dels envoltants una quantitat  $\Delta T \ll T_{\text{env}}$ . Aquesta diferència de temperatura farà que es produïska un intercanvi d'energia entre els envoltants i els sistema, que s'anomena intercanvi d'energia en forma de *calor* i se li assigna la lletra  $Q$ . La calor és una *energia en trànsit*, com ho era el treball. Per tant es mesura en Joules (J). No obstant això, per raons històriques també s'utilitza la calor (cal). Una calor es defineix actualment com

$$1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J}$$

Sabem que la diferència de temperatures provoca un intercanvi d'energia en forma de calor. Ara passem a quantificar-la.

## Capacitat tèrmica

Tornem al sistema de la figura 2.25. L'intercanvi d'energia farà que la seua temperatura augmente fins a  $T + \Delta T$ . Experimentalment s'ha observat que l'energia intercanviada és proporcional a l'increment de temperatura

$$Q = C\Delta T \quad (2.37)$$

on  $C$  és la capacitat tèrmica del sistema. Encara que l'equació (2.37) és formalment anàloga a l'equació (2.32), que ens donava el treball que feia el sistema, aquesta similitud ho és només en aparença. Al contrari que la pressió, la capacitat tèrmica no és una magnitud d'estat. Un sistema no té capacitat tèrmica sinó que esta magnitud mesura la capacitat del sistema d'intercanviar energia mitjançant una interacció tèrmica. Això fa que siga una magnitud que *depèn del procés* (a més del sistema) com passava amb el treball i com passa amb la calor. Els dos tipus de processos més importants són els processos a pressió constant ( $C_P$ ) i a volum constant ( $C_V$ ). Generalment s'ha observat que  $C_P > C_V$ . En líquids i sòlids es compleix que  $C_P \gtrsim C_V$ . En el cas dels gasos la diferència entre  $C_P$  i  $C_V$  és més gran.

La capacitat tèrmica és una magnitud extensiva, és a dir, depèn linealment de la grandària del sistema. Per això es defineixen dos magnituds intensives (que no depenen de com siga de gran el cos) relacionades. La primera és la *calor específica* del cos  $c$ , que és la capacitat tèrmica del sistema per unitat de massa

$$c \equiv \frac{C}{m} \text{ [unitats J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}] \quad (2.38)$$

La segona és la *calor molar*  $c'$ , que és la capacitat tèrmica del sistema però per nombre de mols

$$c' \equiv \frac{C}{n} \text{ [unitats J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}] \quad (2.39)$$

## Calorimetria

L'equació (2.37) permet fer mesures de calorimetria, on obtenim la temperatura d'equilibri que assoleixen dos cossos en contacte tèrmic, o la capacitat tèrmica d'un d'ells en el procés (d'on s'obté la calor específica o molar del material amb què està fet en el procés).

Suposem un sistema que està aïllat de l'exterior. El sistema està format per dos subsistemes, inicialment aïllats entre si que suposem en equilibri mecànic però no tèrmic (figura 2.26). Cada subsistema es troba inicialment en equilibri i el seu estat termodinàmic està caracteritzat per  $(m_1, T_1, P)$  (subsistema 1) i  $(m_2, T_2, P)$  (subsistema 2).<sup>13</sup> Suposem a més que  $T_1 > T_2$ . En un determinat moment els fem en contacte tèrmic mitjançant una paret diatèrmana i impermeable. Ens preguntem quina és la temperatura d'equilibri si la calor específica del procés és  $c_1$

<sup>13</sup>Recordem que hem suposat que es troben en equilibri mecànic i per tant  $P_1 = P_2$ .

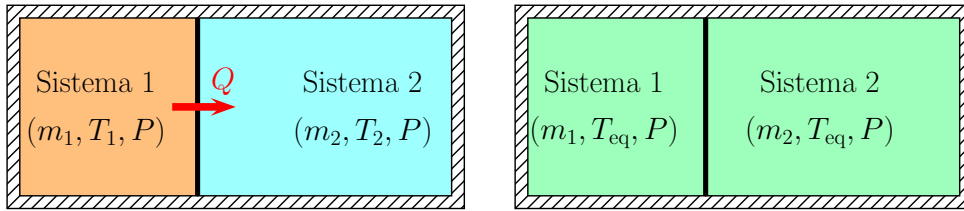


Figura 2.26: Quan fem en contacte tèrmic dos sistemes amb masses  $m_1$  i  $m_2$  i temperatures  $T_1 > T_2$  es produeix un intercanvi d'energia  $Q$  fins que els sistemes assoleixen l'equilibri tèrmic  $T_1 = T_2 = T_{\text{eq}}$ . El sistema amb major temperatura cedeix una energia  $Q_1 = -Q < 0$  que rep el sistema amb menor energia ( $Q_2 = Q > 0$ ). La temperatura d'equilibri és igual al valor mitjà de les temperatures inicials, ponderades per la massa i la calor específica dels sistemes [equació (2.43)]

per al sistema 1 i  $c_2$  per al sistema 2. Sabem, pel principi general de la Termodinàmica, que els sistemes evolucionaran fins a arribar a estar en equilibri tèrmic, és a dir, fins que tinguen la mateixa temperatura  $T_{\text{eq}}$ . Per l'equació (2.37) sabem que l'energia intercanviada entre el sistema 1 i els seus envoltants (en aquest cas el sistema 2) durant el procés és:

$$Q_1 = m_1 c_1 (T_{\text{eq}} - T_1) \quad (2.40)$$

on hem emprat la definició de calor específica [equació (2.38)]. De forma anàloga, l'energia intercanviada entre el sistema 2 i els seus envoltants (el sistema 1) durant el procés és:

$$Q_2 = m_2 c_2 (T_{\text{eq}} - T_2) \quad (2.41)$$

Com que el sistema total 1+2 està aïllat, tenim que s'ha de complir que  $Q_1 + Q_2 = 0$  (conservació de l'energia)

$$m_1 c_1 (T_{\text{eq}} - T_1) + m_2 c_2 (T_{\text{eq}} - T_2) = 0 \quad (2.42)$$

d'on podem resoldre per a la temperatura d'equilibri

$$T_{\text{eq}} = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2} \quad (2.43)$$

La temperatura d'equilibri és el valor mitjà ponderat de les temperatures inicials dels subsistemes. Això vol dir que es compleix que  $T_1 > T_{\text{eq}} > T_2$ , i per tant

$$Q_1 = m_1 c_1 (T_{\text{eq}} - T_1) < 0 \quad \rightarrow \quad \text{cedeix energia} \quad (2.44)$$

$$Q_2 = m_2 c_2 (T_{\text{eq}} - T_2) > 0 \quad \rightarrow \quad \text{rep energia} \quad (2.45)$$

Com que l'energia interna dels sistemes varia directament amb la temperatura ( $U$  augmenta si ho fa  $T$  i viceversa), a les equacions anteriors hem indicat que  $Q < 0$  implica que el sistema cedeix energia ( $Q_1 < 0$  perquè  $T_{\text{eq}} < T_1$ ) i  $Q > 0$  implica que el sistema rep energia ( $Q_2 > 0$  perquè  $T_{\text{eq}} > T_2$ ). És a dir, *el sistema amb major temperatura cedeix energia al sistema amb menor temperatura.*

### Exemple

Un calorímetre d'alumini de massa 0.5 kg conté 0.13 kg d'aigua a 20 °C. Submergim en el recipient un bloc de ferro de 0.2 kg que es troba a una temperatura de 75 °C. Trobeu la temperatura d'equilibri del conjunt suposant que no hi ha pèrdues de calor cap a l'exterior. Dades: Calors específiques: Al ( $910 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ), Fe ( $470 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ), H<sub>2</sub>O ( $4180 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ). Quan posem en contacte el bloc de ferro amb l'aigua que es troba dintre del recipient d'alumini, el primer cedirà energia en forma de calor (refredant-se) als darrers (que l'absorbiran i per tant es calfaran). El procés finalitzarà quan el sistema complet (bloc de ferro, aigua i recipient d'alumini) es trobe tot a la mateixa temperatura (temperatura d'equilibri). Com suposem que el sistema complet està aïllat (no hi ha fugues d'energia), per trobar la temperatura d'equilibri hem d'igualar la suma de l'energia que cedeix el ferro i la que absorbeixen l'aigua i el recipient d'alumini a zero:

- Calor que cedeix el ferro:  $Q_{\text{Fe}} = m_{\text{Fe}}c_{\text{Fe}}(T_{\text{eq}} - T_{\text{Fe}})$
- Calor que absorbeix l'aigua:  $Q_{\text{H}_2\text{O}} = m_{\text{H}_2\text{O}}c_{\text{H}_2\text{O}}(T_{\text{eq}} - T_{\text{H}_2\text{O}})$
- Calor que absorbeix el recipient:  $Q_{\text{Al}} = m_{\text{Al}}c_{\text{Al}}(T_{\text{eq}} - T_{\text{Al}})$

on  $T_{\text{eq}}$  és la temperatura d'equilibri i  $T_{\text{Fe}}$  i  $T_{\text{H}_2\text{O}} = T_{\text{Al}}$  són les temperatures inicials del bloc de ferro i de l'aigua i el recipient d'alumini, respectivament.

Fem el balanç d'energia:

$$Q_{\text{Fe}} + Q_{\text{H}_2\text{O}} + Q_{\text{Al}} = 0$$

d'on podem resoldre per obtenir el valor de la temperatura d'equilibri

$$T_{\text{eq}} = \frac{m_{\text{Fe}}c_{\text{Fe}}T_{\text{Fe}} + m_{\text{H}_2\text{O}}c_{\text{H}_2\text{O}}T_{\text{H}_2\text{O}} + m_{\text{Al}}c_{\text{Al}}T_{\text{Al}}}{m_{\text{Fe}}c_{\text{Fe}} + m_{\text{H}_2\text{O}}c_{\text{H}_2\text{O}} + m_{\text{Al}}c_{\text{Al}}} = 297.88 \text{ K}$$

és a dir, 24.73 °C (en l'expressió anterior podem utilitzar directament les temperatures en graus Celsius, el resultat evidentment estarà també en graus Celsius).

Si calculem ara l'energia cedida pel bloc de ferro i l'absorbida per l'aigua i el recipient d'alumini tenim

$$\begin{aligned}Q_{\text{Fe}} &= -4726 \text{ J} \\Q_{\text{H}_2\text{O}} &= +2575 \text{ J} \\Q_{\text{Al}} &= +2151 \text{ J}\end{aligned}$$

Podem observar com l'energia en forma de calor transferida és negativa en el cas del bloc de ferro (cedeix energia) i positiva en els altres dos casos (absorbeixen energia) i que el balanç energia cedida+energia absorbida= 0 es compleix.



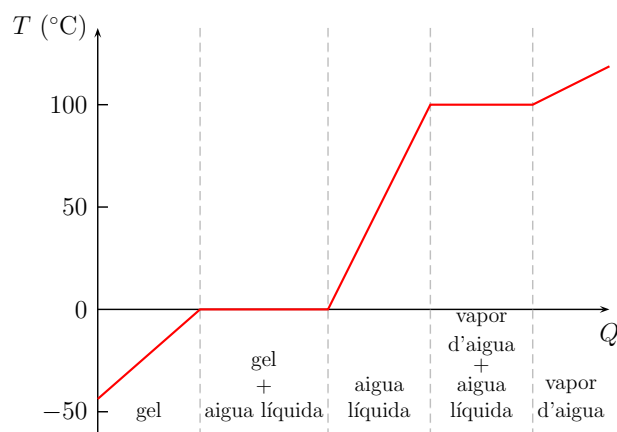


Figura 2.27: Gràfic temperatura-calor per a un sistema inicialment format per aigua en estat sòlid. En subministrar al sistema energia en forma de calor amb un ritme constant, es pot observar com la temperatura del sistema augmenta linealment quan només hi ha una fase i es manté constant en els canvis de fase

## Calor latent

Una altra diferència entre l'equació (2.37) i l'equació (2.32) és que no pot haver intercanvi d'energia per treball mecànic si no hi ha variació de volum ( $\Delta V = 0$ ) però sí que pot haver intercanvi d'energia encara que no hi haja canvi de temperatura. Un cas on això ocorre és quan l'energia subministrada (o cedida) en forma de calor pel sistema el que provoca és un *canvi de fase* del sistema, per exemple de líquid a gas. És per aquest motiu que existeixen els punts fixos de temperatura que ens han permès definir la temperatura empírica. L'energia necessària perquè el sistema complete un canvi de fase és proporcional a la massa

$$Q = Lm \quad (2.46)$$

on  $L$  és l'anomenada calor latent de canvi de fase. Per a cada canvi de fase (fusió, vaporització) tenim una calor latent diferent, que a més depèn de la pressió a la qual es produeix (com passava amb la temperatura de canvi de fase). Si l'energia intercanviada  $Q'$  és menor que la necessària per a completar el canvi de fase ( $Q' < Lm$ ), només ho farà la part proporcional  $m' = Q'/L$  del sistema.

Suposem com a exemple que el nostre sistema inicialment està format per aigua en estat sòlid. Si comencem a donar-li energia en forma de calor obtindrem una gràfica temperatura-calor pareguda a la mostrada per la figura 2.27. Comencem amb aigua en fase sòlida. En donar-li energia la seua temperatura augmenta linealment [equació (2.37)] fins que arriba al punt de fusió. En el canvi de fase sòlid-líquid la temperatura roman constant [equació (2.46)]. Durant aquest procés al sistema hi tenim una barreja de gel i aigua líquida, i finalitza quan tota l'aigua

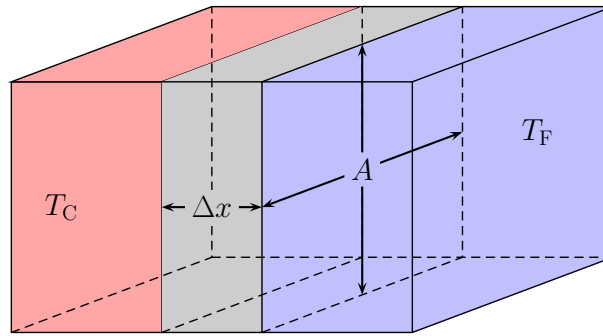


Figura 2.28: En la conducció tenim dos sistemes amb temperatures  $T_C$  i  $T_F$ , separats per una paret de gruix  $\Delta x$  i superfície de contacte  $A$

està en fase líquida. La resta de la gràfica és una repetició d'aquests dos processos. L'aigua es calfa augmentant linealment la seua temperatura fins que arriba al punt de vaporització (observem que la calor específica de l'aigua líquida i la sòlida és diferent i per tant la pendent de la corba no és la mateixa en els dos casos). En eixe punt l'energia en forma de calor que li arriba al sistema s'utilitza en canviar de fase i no en augmentar la temperatura. Finalment, una volta es completa aquest últim canvi de fase i l'aigua es troba en fase vapor, tota energia que li donem al sistema s'utilitzarà en augmentar la seua temperatura.

## Conducció

Fins ara hem distingit entre parets diatèrmanes o adiabàtiques segons permeten o no la interacció tèrmica. Ara ens fixem en quin és el procés físic que permet aquest intercanvi d'energia per interacció tèrmica i quina propietat permet classificar les parets en diatèrmanes o adiabàtiques.

Suposem un sistema format per dos subsistemes separats per una paret (figura 2.28). Cadascun dels subsistemes es troben inicialment en equilibri tèrmic intern. Un d'ells té una temperatura  $T_C$  més alta que l'altre, amb una temperatura  $T_F$ . La paret de separació està formada per un material rígid i impermeable, té una superfície  $A$  de contacte amb els sistemes i un gruix  $\Delta x$ . El mecanisme físic per mitjà del qual es produeix la transferència d'energia entre els sistemes és la *conducció*.

En la descripció de la conducció ens fixem en el flux d'energia en forma de calor (o intensitat tèrmica)

$$I \equiv \frac{Q}{\Delta t} \text{ [unitats W]} \quad (2.47)$$

Experimentalment s'ha observat que la intensitat tèrmica segueix l'equació de Fourier

$$I = kA \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (2.48)$$

Material	$k$ ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ )
Argent	420
Coure	380
Alumini	200
Vidre	0.84
Aigua	0.56
Aire	0.025

Taula 2.3: Conductivitat tèrmica de diferents materials

on  $k$  és una constant de proporcionalitat anomenada *conductivitat tèrmica* que depèn del material i  $\Delta T = T_C - T_F$  és la diferència de temperatura entre els sistemes.

A l'equació de Fourier podem notar que:

- $I$  és proporcional a  $\Delta T$ : si  $T_C = T_F$  tenim equilibri tèrmic entre els sistemes i per tant no hi ha flux d'energia.
- $I$  és proporcional a l'àrea de contacte de la paret amb els sistemes: com més gran siga  $A$ , major és el flux d'energia.
- $I$  és inversament proporcional al gruix de la paret: com major és  $\Delta x$ , menor és el ritme de transferència d'energia.
- $I$  és proporcional a la conductivitat tèrmica  $k$ : si  $k$  és gran tenim que el material és un bon conductor de la calor; si  $k$  és menuda el material és un mal conductor (o un bon aïllant).

Si reescrivim l'equació de Fourier en la forma

$$I = \frac{\Delta T}{\Delta x/kA}$$

podem definir la *resistència tèrmica* de la paret com

$$R \equiv \frac{\Delta x}{Ak} \quad (2.49)$$

amb la qual l'equació de Fourier pren la forma

$$I = \frac{\Delta T}{R} \quad (2.50)$$

La resistència tèrmica  $R$  indica la facilitat amb la que es produeix la transmissió d'energia a través de la paret mitjançant la conducció. Tenim una paret *adiabàtica* si  $R$  és suficientment gran com perquè puguem suposar que no hi ha transferència apreciable d'energia en el temps de

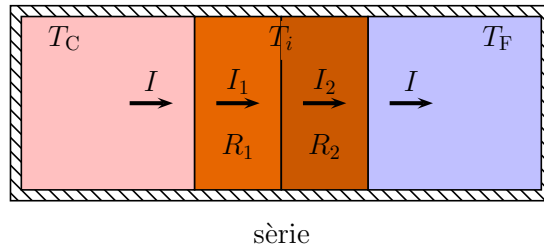


Figura 2.29: Disposició en sèrie d'un sistema format per dos materials diferents

mesura. Tindríem una paret adiabàtica perfecta en el límit  $R \rightarrow \infty$ . En canvi, podem considerar una paret diatèrmana quan tinga una  $R$  suficientment menuda com perquè la transferència d'energia siga apreciable i permeta la variació de temperatura entre els sistemes en el temps de mesura (i, en principi, que puguem assolir l'equilibri tèrmic si mesurem durant la suficient quantitat de temps). Perquè el procés termodinàmic associat a la transferència tèrmica pugui ser considerat *quasiestàtic*, s'ha de produir a més que la resistència tèrmica de la paret siga suficientment gran com perquè el temps involucrat en la transmissió d'energia siga més lent que el temps de relaxació del sistema.

L'equació (2.49) permet el càlcul de la resistència tèrmica d'una paret formada per un únic material i amb un gruix  $\Delta x$  uniforme. Per al càlcul de sistemes més complexos hem d'analitzar primer les configuracions bàsiques d'un sistema format per dos materials diferents.

Considerem primer el cas mostrat a la figura 2.29, on tenim un sistema format per dos capes de materials de resistències tèrmiques  $R_1$  i  $R_2$ , disposades en *sèrie*, que separa dos sistemes amb temperatures  $T_C$  i  $T_F$ , respectivament. El flux d'energia ha de passar primer per una de les capes de material i després per la segona. Si la temperatura que hi ha al punt mig que hi ha entre les dos capes és  $T_i$ , l'equació de Fourier aplicada a cadascuna de les capes de material per separat és

$$I_1 = \frac{T_C - T_i}{R_1} \quad (2.51)$$

$$I_2 = \frac{T_i - T_F}{R_2} \quad (2.52)$$

Aquestes equacions les podem escriure en la forma

$$T_C - T_i = I_1 R_1 \quad (2.53)$$

$$T_i - T_F = I_2 R_2 \quad (2.54)$$

Sumant les dos equacions tenim

$$T_C - T_F = I_1 R_1 + I_2 R_2 \quad (2.55)$$

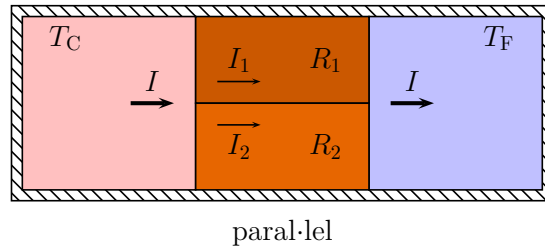


Figura 2.30: Disposició en paral·lel d'un sistema format per dos materials diferents

Com que el corrent tèrmic ha de ser el mateix en cadascuna de les capes i igual al corrent tèrmic que passa pel sistema complet,  $I_1 = I_2 = I$ , l'equació anterior pren la forma

$$T_C - T_F = I(R_1 + R_2) \quad (2.56)$$

Per altra banda, podem aplicar l'equació de Fourier al sistema complet

$$I = \frac{T_C - T_F}{R_{\text{eq}}} \quad (2.57)$$

on  $R_{\text{eq}}$  és la resistència equivalent del sistema. Si resollem per a l'increment de temperatura en l'última equació

$$T_C - T_F = IR_{\text{eq}} \quad (2.58)$$

i comparem amb l'equació (2.56), tenim que la relació entre la resistència equivalent i la resistència de cadascuna de les capes és

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 \quad (2.59)$$

En general, per a un sistema format per  $N$  capes de materials diferents en sèrie de resistències  $R_1, R_2, \dots, R_N$ , la resistència equivalent del sistema complet està donada per l'equació

$$R_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^N R_i, \text{ combinació en sèrie} \quad (2.60)$$

Considerem ara el sistema complementari al sistema anterior, mostrat en la figura 2.30. Tenim com abans un sistema format per dos capes de materials de resistències  $R_1$  i  $R_2$  que es troba separant dos sistemes de temperatures  $T_C$  i  $T_F$ , respectivament. Això però, la disposició és diferent. Ara les dos capes de material estan en contacte amb els sistemes i el flux d'energia passa per les dos capes alhora. Estan disposades en el que s'anomena combinació en paral·lel.

Apliquem primer l'equació de Fourier a cadascuna de les capes de material per separat

$$I_1 = \frac{T_C - T_F}{R_1} \quad (2.61)$$

$$I_2 = \frac{T_C - T_F}{R_2} \quad (2.62)$$

El corrent tèrmic que passa pel sistema complet serà igual a la suma dels corrents que passen per cadascuna de les capes per separat

$$I = I_1 + I_2 = \frac{T_C - T_F}{R_1} + \frac{T_C - T_F}{R_2} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) (T_C - T_F) \quad (2.63)$$

Si apliquem l'equació de Fourier al sistema complet

$$I = \frac{T_C - T_F}{R_{\text{eq}}} \quad (2.64)$$

i comparem amb l'equació (2.63), tenim que la relació entre la resistència equivalent del sistema complet i la de les capes de material que el formen és

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (2.65)$$

En general, per a un sistema format per  $N$  capes de material de resistències  $R_1, R_2, \dots, R_N$ , disposades en paral·lel, la resistència equivalent del sistema ve donada per l'equació

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}, \text{ combinació en paral·lel} \quad (2.66)$$

### Exemple

Una porta de fusta té de dimensions  $2 \times 0.8 \times 0.04$  m. La seua conductivitat tèrmica és  $k_f = 0.05 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . La temperatura de l'aire a l'interior de la casa és de  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  i a l'exterior és de  $-10 \text{ }^\circ\text{C}$ .

- (a) Quin és el seu ritme de pèrdua d'energia?
- (b) Si a la porta li fem una finestra quadrada de 0.5 m de costat, amb un vidre de 5 mm d'espessor i conductivitat  $k_v = 0.8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , en quina proporció augmenta el ritme de pèrdua d'energia?

(a)

La resistència tèrmica de la porta vindrà donada per [equació (2.49)]

$$R_p = \frac{\Delta x}{Ak_f} = \frac{0.04}{2 \times 0.8 \times 0.05} = 0.5 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}$$

El corrent tèrmic (ritme de pèrdua d'energia) per tant és

$$I_1 = \frac{\Delta T}{R_p} = \frac{20 - (-10)}{0.5} = 60 \text{ W}$$

(b)

En fer la finestra, tenim una disposició en paral·lel de la part de fusta de la porta i la finestra de vidre. La resistència tèrmica de la part de fusta de la porta ve donada per

$$I_f = \frac{\Delta x}{A_f k_f} = \frac{0.04}{(2 \times 0.8 - 0.5^2) \times 0.05} = 0.59 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}$$

on podem observar com la resistència tèrmica *augmenta* al disminuir la superfície.

Per la seua banda, la resistència tèrmica de la finestra de vidre és

$$R_v = \frac{\Delta x_v}{A_v k_v} = \frac{5 \times 10^{-3}}{0.5^2 \times 0.8} = 0.025 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}$$

Com tenim un sistema en paral·lel, la resistència tèrmica de la porta amb finestra de vidre és

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_v} \rightarrow R_p = 0.024 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}$$

on observem que la resistència tèrmica de la porta és *menor* que la de cadascuna de les parts que la componen (part de fusta i de vidre) perquè és un sistema en paral·lel (el contrari passa en els sistemes en sèrie). El corrent tèrmic en aquest cas és

$$I_2 = \frac{\Delta T}{R_p} = \frac{20 - (-10)}{0.024} = 1250 \text{ W}$$

En proporció, el corrent tèrmic ha augmentat  $I_2/I_1 = 20.8$ , és a dir, un 2080%.

## Convecció

La transferència d'energia provocada per una diferència de temperatura no es produeix només per conducció. Si considerem els fluids, observem que tenen en general una conductivitat tèrmica molt baixa en comparació amb els sòlids (taula 2.3). Tanmateix, els fluids tenen la propietat de *fluir*. Podem produir un flux per mitjà d'una diferència de pressió (com ja vam veure en el capítol anterior) però també, de forma separada o conjunta, per una diferència de temperatura. En el segon cas es produeix una transmissió d'energia en forma de calor junt amb el transport de matèria que anomenem *convecció*. La convecció pot ser lliure (si el moviment del fluid ve provocat per la mateixa diferència de temperatura) o forçada (si el moviment del fluid ve provocat per una diferència de pressió).

La descripció matemàtica del fenomen de convecció és massa complexa per tractar-la ací. Estem davant de processos no estàtics on el sistema no està en equilibri. Només hi donarem una explicació qualitativa de la convecció lliure. Considerem el sistema mostrat a la figura 2.31 on tenim aigua calfant-se dins d'un perol. La temperatura de l'aigua que està més prop del foc és major que la que hi ha dalt. Com a conseqüència té una densitat menor, el que fa que pugui pujar dalt

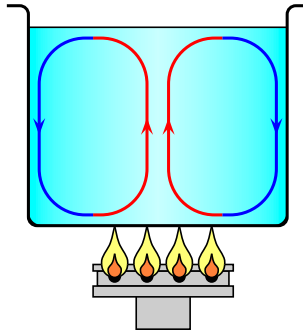


Figura 2.31: Quan cal fem aigua en un perol, la temperatura no és igual en tot el volum de l'aigua. La part més pròxima al foc té una temperatura major i una densitat menor que l'aigua més allunyada. Això provoca uns corrents de convecció on l'aigua amb més temperatura puja pel centre i l'aigua amb menys temperatura baixa pels costats

on es refreda. Pel balanç de massa i l'acció de la gravetat, l'aigua freda que està dalt baixa en pujar l'aigua calenta de baix, on es calenta, el que dóna lloc a un corrent de convecció.

## Radiació

Hi existeix un tercer mecanisme de transmissió d'energia en forma de calor, la radiació, on la transferència d'energia es fa mitjançant ones electromagnètiques. Les ones electromagnètiques són el resultat d'un moviment oscil·latori d'un camp elèctric i un camp magnètic. Són ones electromagnètiques, entre altres, la llum i les ones de ràdio.

Degut al moviment tèrmic, hi ha una transferència d'energia entre les molècules que formen un sistema (per exemple mitjançant les col·lisions). Aquesta transferència d'energia és la responsable que els sistemes evolucionen cap a un estat d'equilibri. En ocasions, la interacció entre molècules provoca que una d'elles assolisca un estat d'excitació electrònica. Aquest estat no dura molt i, en tornar al l'estat fonamental, la molècula pot cedir l'energia emetent radiació electromagnètica.

Tot cos que està a una certa temperatura  $T$  emet radiació electromagnètica. En general la radiació emesa per un cos depèn de molts factors. Quan només depèn de la seua temperatura diem que el sistema es comporta com un *cos gris*. En aquest cas la quantitat d'energia en forma de radiació que emet per unitat de temps és

$$I = \frac{Q}{\Delta t} = e\sigma AT^4 \quad (2.67)$$

on  $e$  és l'emissivitat del cos,  $\sigma$  és la constant de Stefan-Boltzmann,  $A$  és l'àrea del cos i  $T$  la seua temperatura. L'emissivitat és un nombre entre 0 i 1, característic del material del cos, que indica si aquest és un bon emissor ( $e \approx 1$ ) o no ( $e \approx 0$ ); per a un *cos negre* (emissor perfecte)



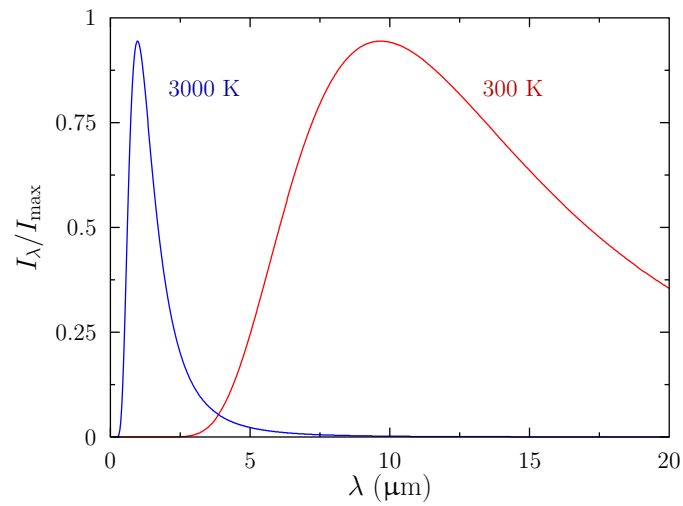


Figura 2.32: Espectre d'emissió d'un cos gris (negre). La radiació emesa presenta un màxim en una determinada regió de l'espectre (longitud d'ona) que depèn de la temperatura del cos emissor



Figura 2.33: La termografia permet mesurar la temperatura superficial d'un sistema analitzant la radiació electromagnètica que emet. La figura mostra la imatge d'uns fusibles industrials, un dels quals presenta una temperatura superior a la resta. Això pot provocar la seua fallida en un futur proper.

[Font: [Wikimedia Commons](#)]

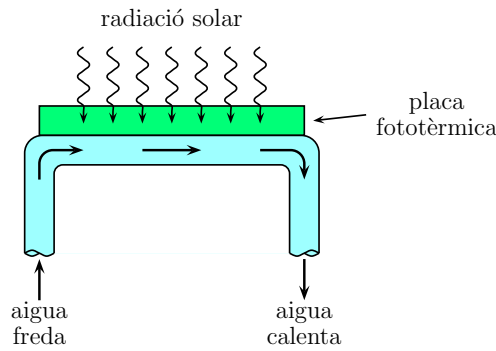


Figura 2.34: La radiació solar pot aprofitar-se com a font d'energia fototèrmica. Una placa absorbeix la radiació solar i augmenta la seua temperatura. Això permet calfar aigua per interacció tèrmica, que anirà a un dipòsit connectat amb la canalització d'aigua de la casa, que finalment la distribueix segons les necessitats

$e = 1$ . La constant de Stefan-Boltzmann és una constant universal que té el valor

$$\sigma = 5.6703 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$$

Inclús en un cos gris, el cos emet radiació electromagnètica en una gran quantitat de longituds d'ona diferents (figura 2.32).<sup>14</sup> En el cas d'un cos gris, el màxim d'emissió es fa en una determinada regió de longituds d'ona que depèn de la temperatura (figura 2.32). Això ens permet mesurar la temperatura superficial del cos a distància amb un detector sensible a la radiació, una tècnica que es coneix com *termografia* (figura 2.33).

Els cossos no només emeten radiació, també n'absorbeixen. Si no fos així anirien perdent energia amb el temps fins assolir  $T = 0 \text{ K}$ . Quan una ona electromagnètica penetra en un cos, part d'ella s'absorbeix i part es difon pel cos (canvia de direcció). En els dos casos les molècules del cos primer absorbeixen la radiació electromagnètica, assolint un estat excitat però, mentre en el primer cas l'energia es transfereix a altres molècules, el que fa que augmente la temperatura del cos, en el segon torna a emetre's (amb la mateixa longitud d'ona però amb una direcció diferent).<sup>15</sup> L'augment de temperatura del cos com a resultat de l'absorció de radiació electromagnètica pot utilitzar-se com a font d'energia fototèrmica, per exemple per a calfar aigua (figura 2.34).

Quan un cos està a la temperatura  $T_1$  i els seus voltants estan a temperatura  $T_2$ , és produeix un balanç entre l'energia emesa en forma de radiació pel cos, la que absorbeix i la reflecteix (i que no entra al cos). Tanmateix, dins d'aquest balanç també hem de considerar altres factors,

<sup>14</sup>Les ones electromagnètiques es caracteritzen per la seua intensitat i per la seua longitud d'ona. Així el color roig té una longitud d'ona al voltant de 700 nm i el color blau una longitud d'ona al voltant de 470 nm.

<sup>15</sup>Aquestes no són les úniques possibilitats en què el sistema pot utilitzar l'energia que rep en forma de radiació. Per exemple, les plantes utilitzen la radiació solar com la font d'energia que fa funcionar el cicle de reaccions químiques que formen el procés de la fotosíntesi.

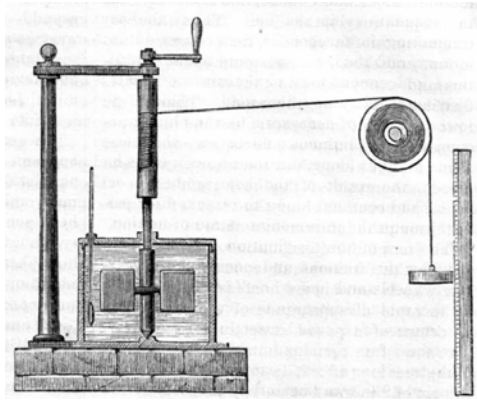


Figura 2.35: Dibuix esquemàtic del dispositiu experimental que va utilitzar Joule per a determinar l'equivalent mecànic de la calor. [Font: Harper's New Monthly Magazine, No. 231, August, 1869]

com la transmissió d'energia en forma de calor per conducció i convecció.

## 2.6 Primer Principi de la Termodinàmica

### 2.6.1 L'experiència de Joule

James Prescott Joule (1818–1889) era l'amo d'una fàbrica de cervesa molt popular que, abans i després de les seues jornades de treball en la destil·leria, realitzava experiments relatius al treball i la calor. L'experiència de Joule coneguda com *determinació de l'equivalent mecànic de la calor* tenia per objecte demostrar que treball i calor són dos formes d'energia en trànsit, i trobar la relació entre la unitat Joule i la unitat caloria (que en aquells moments es referia únicament a l'energia intercanviada en forma de calor).<sup>16</sup> En la seua experiència, Joule disposava d'un fluid tèrmicament aïllat (mitjançant parets adiabàtiques) que es mantenia a volum constant (figura 2.35). En l'interior del recipient que contenia el líquid hi havia unes pales que estaven unides mitjançant un mecanisme de correes a una pesa. Quan deixava caure la pesa des d'una certa altura, les pales giraven i aportaven al fluid (com a treball dissipatiu pel fregament entre les pales i el líquid) una quantitat d'energia igual a la disminució d'energia potencial gravitatòria de la pesa. Aquest treball dissipatiu provocava un augment de la temperatura  $T$  del líquid perquè el recipient estava tèrmicament aïllat. Comparant el valor del canvi d'energia potencial amb l'energia en forma de calor que havia d'aportar al fluid perquè la seua temperatura pujara el mateix valor, determinà que una caloria era igual a 4.186 J (que és com ara es defineix la

<sup>16</sup>Es definia com l'energia necessària per augmentar un gram d'aigua de 14.5 °C a 15.5 °C.

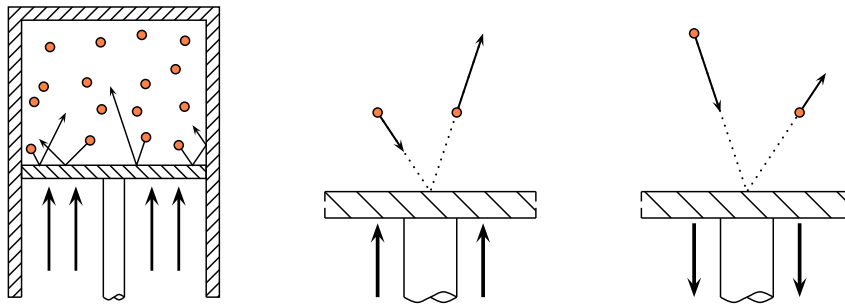


Figura 2.36: Visió esquemàtica de la variació d'energia interna produïda per un procés de treball mecànic sobre un gas en un compartiment de parets adiabàtiques amb un pistó mòbil. Quan es produeix una compressió, la transferència de moment lineal entre el pistó en moviment i les partícules del gas produeix un augment de la velocitat mitjana d'aquestes i, per tant, un augment de l'energia interna del gas. En canvi, quan el que tenim és una expansió, la transferència de moment produeix una disminució de l'energia mitjana de les partícules i, en conseqüència, una disminució de l'energia interna

caloria).<sup>17</sup>

El que l'experiència de Joule indica és que no només la calor pot modificar la temperatura d'un sistema, i per tant la seua energia interna, sinó que també ho pot fer el treball mecànic. Això es mostra esquemàticament a la figura 2.36 on el nostre sistema és un gas dintre d'un recipient amb un pistó mòbil. Si comprimim el gas, el moviment del pistó fa que augmente la velocitat mitjana de les partícules en col·lidir amb aquestes i, per tant, que augmente la seua energia interna i temperatura. En canvi, si retirem el pistó provocant una expansió del gas, les col·lisions de les partícules amb el pistó faran disminuir la velocitat mitjana de les molècules i, en conseqüència, disminuirà l'energia interna i la temperatura del gas.

## 2.6.2 Treball adiabàtic

Experimentalment s'ha observat que l'intercanvi d'energia per treball entre dos estats d'equilibri termodinàmic  $A$  i  $B$  diferents que es produeix en condicions adiabàtiques (sense intercanvi d'energia en forma de calor) és *independent* del procés. Si recordem quan vam introduir el treball com a procés termodinàmic, vam indicar que no era una magnitud d'estat perquè l'intercanvi d'energia en forma de treball *dependia* del procés. Per això el treball  $W_{ad}$  fet entre dos estats en un procés adiabàtic sí ha de ser igual a la variació d'una magnitud d'estat. Aquesta magnitud

<sup>17</sup>Curiosament, per aquella època existia una teoria anomenada del calòric que suposava que la calor era una propietat dels cossos i els seus contemporanis rebutjaren les seues mesures (tal volta perquè havien estat fetes a un laboratori construït en una cerveseria). Finalment Joule acabà presentant els seus resultats en una xarrada pública a una església de la seua ciutat (Manchester).

d'estat és l'energia interna  $U$  que havíem introduït al principi del capítol

$$W_{\text{ad}} = U_A - U_B = -\Delta U \quad (2.68)$$

El criteri de signes de l'equació (2.68) indica que el sistema dóna energia als voltants en forma de treball ( $W_{\text{ad}} > 0$ ) a costa de disminuir la seua energia interna ( $\Delta U < 0$ ). Per exemple, en el cas que havíem vist adés d'un gas en un recipient amb un pistó mòbil, això implicaria una expansió del gas. En canvi, si són els envoltants els que cedeixen energia en forma de treball al sistema ( $W_{\text{ad}} < 0$ ), això provoca un augment de l'energia interna del sistema ( $\Delta U > 0$ ). Aquest seria el cas de la compressió del gas.

Els processos d'intercanvi d'energia en forma de treball en condicions adiabàtiques s'utilitzen per a mesurar experimentalment les diferències d'energia interna entre dos estats. Per a obtenir el valor absolut de l'energia interna d'un estat d'equilibri necessitem establir a quin estat correspon l'origen d'energies  $U = 0$ . Havíem indicat adés que l'energia interna era la suma de les energies associades als graus de llibertat interns del sistema, com l'energia cinètica i potencial (interna) de les molècules del sistema. El mínim d'energia interna el tenim quan la temperatura absoluta és zero, perquè en aquest punt el moviment tèrmic s'anul·la. Per això assignem l'energia  $U = 0$  a l'estat corresponent a  $T = 0 \text{ K}$ .<sup>18</sup> No obstant això, a efectes pràctics en moltes ocasions només estem interessats en els intercanvis d'energia d'un procés termodinàmic entre dos estats d'equilibri. Per tant, només necessitem conèixer les diferències d'energia interna i no el valor absolut que pren en els estats.

### 2.6.3 Formulació del Primer Principi

Hem vist que la variació d'energia interna entre dos estats d'equilibri és igual a l'energia intercanviada en forma de treball si el procés termodinàmic es realitza en condicions adiabàtiques. Si les parets que separen el sistema dels envoltants són diatèrmanes, la variació de l'energia interna entre dos estats d'equilibri també pot variar per l'intercanvi d'energia en forma de calor  $Q$ . Per tant, si sumem les dos contribucions tenim

$$\Delta U = Q - W \quad (2.69)$$

que indica que l'energia interna pot variar per l'intercanvi energètic amb els envoltants tant en forma de treball com de calor. L'equació (2.69) és la formulació matemàtica del Primer Principi de la Termodinàmica. El que reflexa aquest principi és un balanç d'energia entre el sistema i els envoltants; amplia el principi de conservació de l'energia mecànica en incloure l'intercanvi d'energia en forma de calor. La transferència d'energia en forma de calor o treball modifica l'energia interna en la forma:

---

<sup>18</sup>Observem que això implica també assignar un origen a l'energia potencial de les molècules.

- $Q > 0$ : els envoltants donen energia en forma de calor al sistema  $\rightarrow U$  augmenta.
- $Q < 0$ : el sistema dona energia en forma de calor als envoltants  $\rightarrow U$  disminueix.
- $W > 0$ : el sistema dona energia en forma de treball als envoltants  $\rightarrow U$  disminueix (la disminució de l'energia interna és la que li permet fer eixe treball).
- $W < 0$ : els envoltants donen energia en forma de treball al sistema  $\rightarrow U$  augmenta.

## 2.6.4 Capacitat tèrmica

Adés havíem indicat que tant treball com calor són magnituds del sistema que depenen del procés i, en conseqüència, no són magnituds d'estat. En el cas de l'intercanvi d'energia en forma de calor entre el sistema i els envoltants havíem calculat el seu valor a partir del canvi de temperatura del procés

$$Q = C\Delta T \quad (2.37)$$

on  $C$  és la capacitat tèrmica, una magnitud que depèn del procés. A partir d'aquesta equació, si tenim un procés  $A$  que connecta dos estats  $(P_1, V_1, T_1)$  i  $(P_2, V_2, T_2)$ , *definim* la capacitat tèrmica del sistema en el procés  $C_A$  com el quocient entre l'intercanvi d'energia en forma de calor del procés,  $Q_A$ , i l'increment de temperatura del sistema entre els estats,  $T_2 - T_1$ ,

$$C_A \equiv \frac{Q_A}{T_2 - T_1} \quad (2.70)$$

Els dos processos més importants són els processos a volum constant ( $C_V$ ) i a pressió constant ( $C_P$ ). El Primer Principi de la Termodinàmica, junt amb les equacions tèrmica i energètica, ens permet el càlcul de les capacitats tèrmiques a volum constant i a pressió constant d'un sistema de gas ideal.

Suposem primer un procés quasiestàtic a volum constant en un gas ideal que passa de l'estat  $(P_1, V; T_1)$  a l'estat  $(P_2, V; T_2)$ .<sup>19</sup> Com és un procés a volum constant, l'intercanvi d'energia en forma de treball és nul:  $W = 0$ . Aplicant el Primer Principi de la Termodinàmica tenim que

$$\Delta U = Q_V = C_V(T_2 - T_1) \quad (2.71)$$

L'equació energètica d'estat d'un gas ideal monoatòmic era

$$U = \frac{3}{2}nRT \quad (2.30)$$

---

<sup>19</sup>El punt i coma davant la temperatura està per indicar que només necessitem la pressió i el volum junt amb l'equació tèrmica per determinar l'estat termodinàmic del gas.

De les equacions (2.30) i (2.71), tenim que la capacitat tèrmica d'un gas ideal monoatòmic en un procés a volum constant és

$$C_V = \frac{3}{2}nR \quad (2.72)$$

Considerem ara un procés quasiestàtic a pressió constant de  $(P, V_1; T_1)$  a  $(P, V_2; T_2)$ . Com que l'energia interna és una funció d'estat, la seua variació en el procés ve donada per

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1) = C_V(T_2 - T_1) \quad (2.73)$$

on evidentment  $T_1$  i  $T_2$  són diferents dels que teníem en el procés a volum constant. L'intercanvi d'energia en forma de treball d'aquest procés és

$$W_P = \int_{V_1}^{V_2} PdV = P \int_{V_1}^{V_2} dV = P(V_2 - V_1) \quad (2.74)$$

Emprant l'equació tèrmica d'estat del gas ideal ( $PV = nRT$ ), podem escriure  $W_P$  com

$$W_P = P(V_2 - V_1) = P \left( \frac{nRT_2}{P} - \frac{nRT_1}{P} \right) = nR(T_2 - T_1) \quad (2.75)$$

Aplicant el Primer Principi de la Termodinàmica al procés tenim que

$$\begin{aligned} Q_P = \Delta U + W_P \rightarrow Q_P &= C_V(T_2 - T_1) + nR(T_2 - T_1) \\ &= (C_V + nR)(T_2 - T_1) \end{aligned} \quad (2.76)$$

Per tant, la capacitat tèrmica per a un gas ideal monoatòmic d'un procés a pressió constant és

$$C_P = \frac{Q_P}{T_2 - T_1} = C_V + nR = \frac{5}{2}nR, \text{ gas ideal monoatòmic} \quad (2.77)$$

És evident per tant que  $C_P \neq C_V$ , posant de nou en evidència que l'intercanvi d'energia en forma de calor *depèn del tipus de procés*. A partir de l'equació (2.77) obtenim que, en un gas ideal, la diferència entre la calor molar a pressió constant ( $c'_P = C_P/n$ ) i a volum constant ( $c'_V = C_V/n$ ) és igual a la constant del gas ideal

$$c'_P - c'_V = R \quad (2.78)$$

Aquesta equació s'anomena relació de Mayer i serveix per a tots els gasos ideals, ja siguin monoatòmics o no (diatòmics, etc.).

### 2.6.5 Processos isotermes

No totes les interaccions tèrmiques es produeixen com a resultat d'una diferència de temperatura entre el sistema i els envoltants. La connexió entre els intercanvis energètics en forma de treball i calor amb l'energia interna que dona el Primer Principi permeten analitzar la transferència

d'energia en forma de calor en processos a *temperatura constant*. L'intercanvi d'energia en forma de calor en aquest cas està vinculat al treball mecànic.

Considerem el cas d'un gas ideal monoatòmic sotmès a un procés isoterm de compressió. L'equació energètica del gas ideal ( $U = (3/2)nRT$ ) ens indica que es tracta d'un procés on no es produeix cap variació de l'energia interna del sistema

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T = 0, \text{ procés isoterm} \quad (2.79)$$

Si apliquem el Primer Principi tenim que

$$\Delta U = 0 = Q_T - W_T \rightarrow Q_T = W_T \quad (2.80)$$

El treball de compressió que els envoltants han fet sobre el sistema ( $W_T < 0$  perquè  $\Delta V < 0$ ) és igual a l'energia en forma de calor que ha cedit el sistema ( $Q < 0$ ) als envoltants. Aquesta cesió d'energia del sistema als envoltants és la que permet que l'energia interna del sistema no varii, per tant, que es mantinga constant la temperatura.

Si, en comptes de fer un treball de compressió, els envoltants li aporten energia en forma de calor al sistema ( $Q > 0$ ) en un procés isoterm, el sistema utilitzarà aquesta energia per a fer un treball d'expansió sobre els envoltants ( $W > 0$ ) sense modificar la seua energia interna.

Quina és l'energia intercanviada en forma de treball (calor) en un procés isoterm quasiestàtic? Suposem un procés a temperatura constant entre els estats  $(P_1, V_1; T)$  i  $(P_2, V_2; T)$ . El treball podem calcular-lo a partir de l'equació

$$W_T = \int_{V_1}^{V_2} P dV \quad (2.34)$$

on la variació de la pressió en funció del volum l'obtenim a partir de l'equació tèrmica d'estat ( $PV = nRT$ )<sup>20</sup>

$$\begin{aligned} Q_T = W_T &= \int_{V_1}^{V_2} P dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV \\ &= nRT(\ln V_2 - \ln V_1) = nRT \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) \end{aligned} \quad (2.81)$$

<sup>20</sup>Podem fer la integral amb el wxMaxima utilitzant les instruccions:

```
(%i1) integrate(n*R*T/V,V,V1,V2);
Is V2-V1 positive, negative, or zero?positive;
Is V2 positive, negative, or zero?positive;
Is V1 positive, negative, or zero?positive;
Is V2+V1 positive or negative?positive;
(%o1) n*R*T*(log(V2)-log(V1))
```



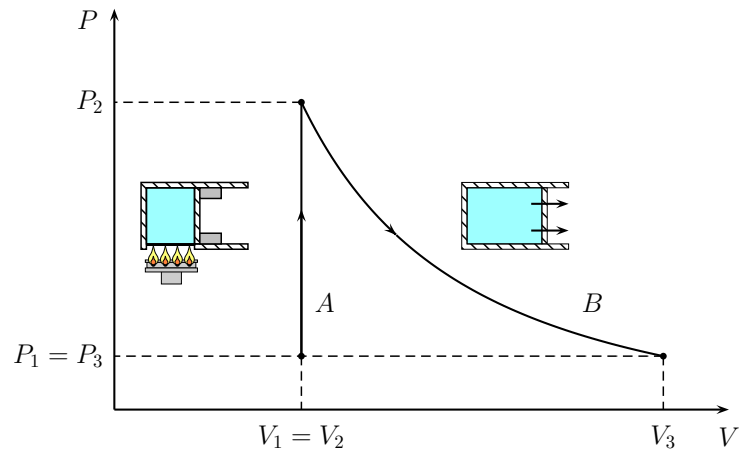


Figura 2.37: Diagrama pressió-volum d'un sistema format per un gas ideal tancat en un recipient amb parets aïllants, una de les quals és mòbil. Primer sotmetem al sistema a un calentament a volum constant bloquejant la paret mòbil i deixant que el sistema interaccione tèrmicament. Després aïllem de nou el sistema i eliminem el bloqueig de la paret mòbil, deixant que el sistema experimente una expansió adiabàtica

## 2.6.6 Processos adiabàtics

Acabem la secció completant l'anàlisi dels processos adiabàtics que ens havia servit per introduir el treball adiabàtic i el Primer Principi de la Termodinàmica. Aquest principi ens ajuda ara a deduir les condicions finals d'un sistema que sofreix una compressió o expansió adiabàtica.

Suposem que el nostre sistema està format per un gas ideal en un recipient amb parets aïllants, una de les quals és mòbil (figura 2.37). El gas està inicialment en equilibri termodinàmic intern i, mitjançant la paret mòbil, en equilibri mecànic amb els envoltants. El seu estat està determinat per  $(P_1, V_1; T_1)$ . Bloquegem la paret mòbil del recipient (per impedir una variació de volum) i augmentem la temperatura del sistema fins que arriba a ser de  $T_2$  (procés A). Per a fer això deixem que el sistema interaccione amb els envoltants per mitjà d'una paret diatèrmana. Lligada amb aquest canvi de temperatura hi tenim una variació de pressió del sistema. Això ho podem veure a partir de l'equació tèrmica del gas ideal

$$P = \frac{nRT}{V} \quad (2.82)$$

Si variem  $T$  i deixem fix el volum  $V$  (el nombre de mols és constant perquè el sistema és tancat) tenim que la pressió augmentarà o disminuirà si ho fa la temperatura. Per tant, després de calfar el sistema tindrem una pressió  $P_2 > P_1$ .

En un procés B tornem a aïllar el sistema (perquè no interaccione tèrmicament) i deixem lliure la paret mòbil del sistema. Es produirà una *expansió adiabàtica* fins que la pressió del sistema

s'iguale a la dels envoltants ( $P_3 = P_1$ , recordem que inicialment el sistema estava en equilibri termodinàmic amb els envoltants). Ens preguntem ara quin és l'estat final del sistema. Sabem la pressió final, però no el volum ni la temperatura. La solució ens la dóna el Primer Principi i l'equació tèrmica del gas ideal. Suposem que en un pas de l'expansió el volum del sistema ha variat  $dV$ . Associada a esta variació tenim que el gas ha efectuat un treball  $PdV$  i, pel Primer Principi, s'ha produït també una variació d'energia interna

$$C_V dT = -PdV \quad (2.83)$$

on hem emprat l'equació (2.73) per a descriure la variació de l'energia interna. El signe menys de l'equació anterior ens indica que l'augment del volum porta associat una disminució de la temperatura. Però no només varia la temperatura, sinó que també ho fa la pressió, que disminueix. Si fem la pressió en funció del volum i la temperatura utilitzant l'equació tèrmica del gas ideal tenim

$$C_V dT = -\frac{nRT}{V} dV \rightarrow \frac{dT}{T} = -\frac{nR}{C_V} \frac{dV}{V} \rightarrow \frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) \frac{dV}{V} \quad (2.84)$$

on hem utilitzat la relació de Mayer i hem definit  $\gamma \equiv C_P/C_V$ . El càlcul diferencial ens permet integrar l'expressió (és a dir sumar per al total d'etapes diferencials del procés)<sup>21</sup>

$$\int_{T_2}^{T_3} \frac{dT}{T} = (\gamma - 1) \int_{V_2}^{V_3} \frac{dV}{V} \rightarrow \ln(T_3/T_2) = -(\gamma - 1) \ln(V_3/V_2) \quad (2.85)$$

Expressió que podem escriure com

$$\frac{T_3}{T_2} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{-(\gamma-1)} = \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} \rightarrow T_3 V_3^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \quad (2.86)$$

Observem que l'expressió anterior ens indica la relació entre el volum i temperatura inicial i final, però no ens indica quins són els valors. Per a obtenir-los necessitem ficar una de les dos magnituds en funció de la pressió (que és la magnitud de la qual coneixem el valor) per mitjà de l'equació tèrmica del gas ideal. Així, la temperatura ve donada per  $T = nR/PV$ . Al començament de l'expansió el seu valor és

$$T_2 = \frac{P_2 V_2}{nR} \quad (2.87)$$

i al final de l'expansió és

$$T_3 = \frac{P_3 V_3}{nR} \quad (2.88)$$

<sup>21</sup>Les integrals són immediates. Tanmateix, podem utilitzar el wxMaxima per a fer-les

```
(%i1) integrate(1/T,T,T2,T3);
Is T3-T2 positive, negative, or zero?positive;
Is T3 positive, negative, or zero?positive;
Is T2 positive, negative, or zero?positive;
Is T3+T positive or negative?positive;
(%o1) log(T3)-log(T2)
```

Procés quasiestàtic	$W$	$Q$
isocor ( $V = V_1$ )	0	$C_V(T_2 - T_1)$
isobàric ( $P = P_1$ )	$P(V_2 - V_1)$	$C_P(T_2 - T_1)$
isotèrmic ( $T = T_1$ )	$nRT \ln(V_2/V_1)$	$-nRT \ln(V_2/V_1)$
adiabàtic ( $PV^\gamma = P_1V_1^\gamma$ )	$P_1V_1^\gamma \frac{V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}}{1-\gamma}$	0

Taula 2.4: Intercanvi d'energia en forma de treball i calor en els principals processos termodinàmics sobre un gas ideal. En tots els casos l'estat inicial és  $(P_1, V_1; T_1)$  i evoluciona cap a un diferent estat final depenent del procés termodinàmic que seguisca. La variació d'energia interna és sempre  $\Delta U = C_V(T_2 - T_1)$ , encara que  $T_2$  és diferent en cada cas

on  $P_3 = P_1$  perquè la pressió final és igual a la dels envoltants. Substituint aquestes expressions en l'equació (2.86) tenim

$$\frac{P_3}{P_2} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^\gamma \quad (2.89)$$

A partir d'esta equació podem obtenir el volum final  $V_3$  i, a partir d'aquest valor, la temperatura final  $T_3$ .

Les equacions (2.86) i (2.89) també ens indiquen que en cada pas del procés d'expansió adiabàtica es compleix que

$$TV^{\gamma-1} = \text{constant i } PV^\gamma = \text{constant} \quad (2.90)$$

La segona d'aquestes equacions la podem emprar per a calcular el treball del procés d'expansió<sup>22</sup>

$$W = \int_{V_2}^{V_3} PdV = \int_{V_2}^{V_3} \frac{P_2V_2^\gamma}{V^\gamma} dV = P_2V_2^\gamma \frac{V_3^{1-\gamma} - V_2^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad (2.91)$$

Si, en comptes de tenir un calfament a volum constant i una expansió adiabàtica, tenim un refredament a volum constant i una compressió adiabàtica, el procediment és anàleg i les expressions finals són les mateixes. Com en aquest cas el volum final és menor, la compressió portarà associada un augment de la temperatura.

<sup>22</sup>Utilitzant el wxMaxima tindriem

```
(%i1) integrate(P2*V2**gamma/V**gamma,V,V2,V3);
Is gamma positive, negative, or zero?positive;
Is V3-V2 positive, negative, or zero?positive;
Is V3 positive, negative, or zero?positive;
Is V2 positive, negative, or zero?positive;
Is gamma-1 zero or nonzero?nonzero;
(%o1) P2*V2^gamma*(V2/(V2^gamma*gamma-V2^gamma)-V3/(V3^gamma*gamma-V3^gamma))
(%i2) factor(%);
(%o2) (P2*(V2*V3^gamma-V2^gamma*V3))/(V3^gamma*(gamma-1))
```

## 2.7 Segon Principi de la Termodinàmica

### 2.7.1 Necessitat d'un Segon Principi

Hem vist com el Primer Principi de la Termodinàmica ampliava el principi de conservació de l'energia mecànica per a incloure l'intercanvi d'energia en forma de calor. Per exemple, si tenim un cos que es mou pel terra al final s'aturarà pel fregament entre el cos i el terra. En aquest sistema no hi ha conservació de l'energia mecànica, però sí que es compleix el Primer Principi perquè l'energia mecànica es transforma en energia en forma de calor a causa del fregament. De fet, tot procés que es produeix a la natura ha d'obeir el Primer Principi. No obstant això, a la natura hi ha fenòmens que, tot i que no violen aquest principi, no es produeixen de forma espontània.

Suposem que tenim un got amb gel i el fem a una habitació. Es produirà un intercanvi tèrmic entre l'aire de l'habitació i el gel del got fins que el gel es desfasa i la temperatura de l'aigua resultant s'iguala a la temperatura de l'habitació. Tanmateix, el procés invers no ocorre espontàniament. Si tenim un got amb aigua en una habitació, el que no succeeix és que l'aigua cedisca energia a l'aire de l'atmosfera i acabe per congelar-se! Observem no obstant que aquest segon procés *obeiria el Primer Principi*: l'aigua del got li donaria energia en forma de calor a l'habitació i la seua energia interna disminuiria.

Experimentalment s'observa que l'intercanvi d'energia entre dos sistemes a temperatures diferents mitjançant una interacció tèrmica *sempre va del cos amb major temperatura al cos amb menor temperatura*. Aquest resultat experimental s'eleva al grau de postulat i conforma el Segon Principi de la Termodinàmica que en l'enunciat de Clausius<sup>23</sup> indica que

No pot haver-hi cap procés on el seu *únic* resultat siga la transferència neta d'energia per interacció tèrmica d'un objecte de menor temperatura a un objecte de major temperatura.

L'enunciat de Clausius no és l'únic que hi ha del Segon Principi de la Termodinàmica. Com que la transferència d'energia per interacció tèrmica molt sovint està acoblada a un intercanvi en forma de treball (aquest es el resultat del Primer Principi), hi ha postulats del Segon Principi que tenen a veure amb sistemes que reben energia en forma de calor i donen energia en forma de treball, les màquines tèrmiques, que foren la base de la Revolució Industrial. És evident, no obstant que tots els enunciats són equivalents.

---

<sup>23</sup>Rudolf Clausius (1822–88)

## 2.7.2 Màquines tèrmiques. Energia aprofitable

Una màquina tèrmica és un dispositiu que rep energia en forma de calor i cedeix energia en forma de treball. Exemples de màquines tèrmiques són la màquina de vapor, el motor de combustió, i inclús les centrals nuclears, que utilitzen la fissió nuclear com a font d'energia en forma de calor que s'utilitza per a moure una turbina (cedir energia en forma de treball) que produeix electricitat mitjançant un generador.<sup>24</sup> Les màquines tèrmiques interaccionen tèrmicament amb els denominats focus de temperatura, sistemes suficientment grans com perquè la seua interacció amb la màquina no supose cap variació de la seua temperatura.<sup>25</sup> En l'exemple del got d'aigua a l'habitació, l'aire de l'habitació funcionava com a focus de temperatura perquè la seua temperatura romania pràcticament constant encara que li transferia energia a l'aigua del got. Les màquines tèrmiques treballen cíclicament, és a dir, reben energia en forma calor i cedeixen energia en forma de treball en processos cíclics en els quals el sistema torna periòdicament al punt de partida.

La màquina tèrmica més senzilla que podem pensar és la que rep energia d'un focus tèrmic i la cedeix en forma de treball. Pel Primer Principi tenim, en completar un cicle, que

$$\Delta U = 0 = Q - W \quad (2.92)$$

És a dir, la màquina transforma tota l'energia que rep del focus de temperatura en treball amb una eficiència del 100%. Malauradament esta màquina tèrmica no pot existir perquè no compleix el Segon Principi de la Termodinàmica. La raó d'això la trobem en el fet que la màquina ha de treballar cíclicament.

Suposem, per exemple, el sistema que havíem vist en la secció anterior quan vam estudiar els processos adiabàtics (figura 2.37): un gas en un dipòsit amb un pistó mòbil. Les parets del dipòsit eren aïllants. Inicialment el sistema estava en equilibri termodinàmic mutu i en equilibri mecànic amb els envoltants. Si, com en eixa ocasió, bloquegem el pistó i fem en contacte tèrmic el sistema amb un focus *calent* de temperatura  $T_C$ , es produeix un trasvàs d'energia des del focus de temperatura cap al sistema fins que la temperatura d'aquest últim es fa igual a  $T_C$ . No només es produeix un augment de la temperatura, sinó que la pressió també augmenta. Per tant, si tornem a aïllar el sistema de l'exterior i desbloquegem el pistó, es produirà una expansió adiabàtica (el sistema farà treball sobre els envoltants). L'expansió continuarà fins que la pressió del sistema s'iguale a la pressió dels envoltants. En eixe moment tenim que el

---

<sup>24</sup>De fet l'estudi de la termodinàmica pròpiament dit començà amb l'estudi sistemàtic de les màquines tèrmiques amb la finalitat de millorar el rendiment de la màquina de vapor.

<sup>25</sup>Si un cos dóna una energia en forma de calor  $Q$ , la variació de la seua temperatura serà [equació (2.37)]  $\Delta T = Q/C$ . Si el cos és molt gran, també ho serà la capacitat tèrmica que tinga en el procés d'intercanvi energètic i, per tant,  $\Delta T \approx 0$  K.

sistema ha rebut energia en forma de calor del focus de temperatura i ha efectuat treball, que és el que volíem. No obstant això, perquè siga un màquina tèrmica necessitem que funcione *cíclicament*, és a dir, necessitem que el sistema torne al seu estat termodinàmic inicial. Com podem tornar a l'estat inicial? Necessitem reduir el volum, però tota compressió porta associada que la temperatura es mantinga (procés isoterm) o augmente. La temperatura en aquest punt, al final de l'expansió adiabàtica, és menor que  $T_C$  però major que la que el sistema tenia a l'inici (abans de l'escalfament).<sup>26</sup> Per tant, hem de baixar la temperatura abans o després de la compressió per a tornar al sistema inicial. Això no es pot fer interaccionant amb el focus de temperatura, perquè l'intercanvi d'energia per interacció tèrmica sempre va del sistema amb major temperatura al sistema amb menor temperatura (Segon Principi de la Termodinàmica). L'únic que aconseguiríem és augmentar la temperatura, no disminuir-la. Ens cal per tant ens un *segon focus de temperatura*, el focus fred, que tinga una temperatura  $T_F$  que ens permeta baixar la temperatura del sistema.

Per a tornar al punt inicial des del punt final de l'expansió adiabàtica, bloquegem de nou el pistó i fem interaccionar el sistema amb el focus fred fins que la temperatura del sistema arriba a ser  $T_F$ . La baixada de temperatura a volum constant produeix una disminució de la pressió que ens permet comprimir adiabàticament el sistema sense haver de canviar la pressió dels envoltants. Si escollim de forma adequada la temperatura del focus fred, la compressió reduirà el volum i augmentarà la pressió i temperatura del sistema fins arribar a l'estat inicial.

El sistema que hem descrit es coneix com Cicle d'Otto i el seu diagrama pressió - volum està representat en la figura 2.38. El sistema produeix treball perquè el treball d'expansió que fa sobre els envoltants és major que el treball de compressió que fan els envoltants sobre el sistema per completar el cicle. És a dir, l'intercanvi *net* d'energia en forma de treball és positiu (ho fa la màquina tèrmica). El Cicle d'Otto representa una aproximació al motor d'explosió, que es coneix també com motor de quatre temps pels quatre processos termodinàmics bàsics que regulen el seu funcionament. En aquest tipus de motor el focus calent és el resultat de la ignició de la barreja de gasolina i aire (és una reacció química exotèrmica que fa augmentar la temperatura) i el focus fred és l'atmosfera, on s'envien els productes de la reacció pel tub d'escapament del cotxe.

El diagrama general d'una màquina tèrmica està representat en la figura 2.39. La màquina aprofita part de l'energia que flueix espontàniament d'un focus calent a un focus fred per a fer

---

<sup>26</sup>Inicialment (abans de l'escalfament) el sistema estava a temperatura  $T_1$ , pressió  $P_1$  i volum  $V_1$ . Al final de l'expansió adiabàtica el volum és  $V_2 > V_1$  i la pressió és  $P_1$ . Podem obtenir la temperatura en aquest punt,  $T_2$ , a partir de les equacions tèrmiques d'estat ( $P_1V_1 = nRT_1$ , estat 1, i  $P_1V_2 = nRT_2$ , estat 2). Aquesta temperatura és  $T_2 = (V_2/V_1)T_1$  i, com  $V_2 > V_1$ , tenim que  $T_2 > T_1$ .

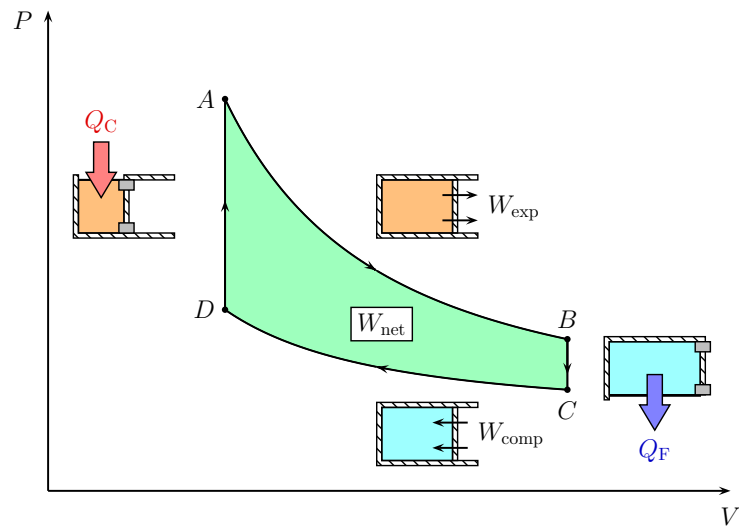


Figura 2.38: Diagrama pressió-volum del cicle d'Otto. El Cicle d'Otto és una aproximació del comportament termodinàmic d'un motor de combustió interna

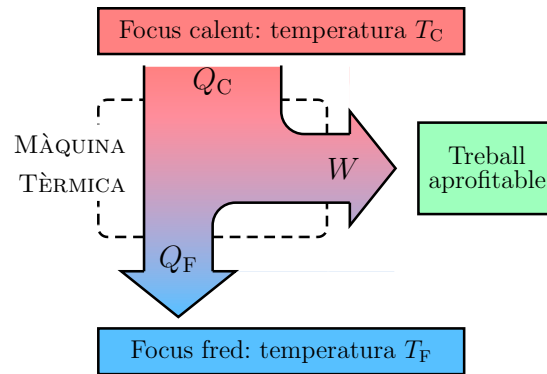


Figura 2.39: Diagrama d'una màquina tèrmica

treball. El balanç d'energia en un cicle ve donat, d'acord amb el Primer Principi, per

$$\Delta U = 0 = Q_C + Q_F - W \quad (2.93)$$

on  $Q_C > 0$  és l'energia en forma de calor que el sistema rep del focus calent,  $Q_F < 0$  és l'energia en forma de calor cedida al focus fred i  $W$  és el l'energia neta en forma de treball que el sistema intercanvia amb els envoltants. Resolent per a  $W$  tenim

$$W = Q_C + Q_F = |Q_C| - |Q_F| \quad (2.94)$$

$W > 0$  si el sistema realitza treball (rep més energia del focus calent que la que cedeix al focus fred). En eixe cas parlem de treball *aprofitable*, és a dir, energia en forma de treball que podem utilitzar. Relacionat amb aquest terme també es parla de *degradació de l'energia*, perquè l'energia en forma de calor que ha passat al focus fred no pot tornar a utilitzar-se en la màquina.

En una màquina tèrmica el que volem és obtenir la major quantitat d'energia en forma de treball  $W$  en relació a l'energia que li dona el focus calent al sistema  $Q_C$ . Per tant, per a classificar la qualitat de les màquines tèrmiques s'utilitza l'*eficiència* de la màquina, definida com el quocient entre  $W$  i  $Q_C$

$$\varepsilon = \frac{W}{Q_C} \quad (2.95)$$

Amb la relació de l'equació (2.94) tenim

$$\varepsilon = \frac{|Q_C| - |Q_F|}{|Q_C|} = 1 - \frac{|Q_F|}{|Q_C|} \quad (2.96)$$

Sabem que  $Q_F$  no pot ser nul·la (ha d'haver-hi un focus fred). Això implica que *l'eficiència d'una màquina tèrmica sempre és menor que 1* (és a dir, l'eficiència és menor del 100%).

### 2.7.3 Cicle de Carnot

L'eficiència d'una màquina tèrmica és sempre menor del 100%. Però, com de prop podem estar de la eficiència del 100%? Hi existeix una màquina tèrmica que ens indica quina és la màxima eficiència teòrica que podem obtenir treballant entre dos focus de temperatura  $T_C$  i  $T_F$ . Això ho descobrí Sadi Carnot (1796-1832) i és el contingut del Teorema que porta el seu nom

No hi ha cap màquina tèrmica que funcione entre dos focus de temperatura que tinga una major eficiència que la que treballa en un cicle termodinàmic reversible.

En un cicle reversible no poden existir processos irreversibles, és a dir, processos que només es produeixen en una direcció d'acord amb el Segon Principi de la Termodinàmica. Això implica que no hi poden haver efectes de dissipació energètica per fregament. Necessitem per tant un



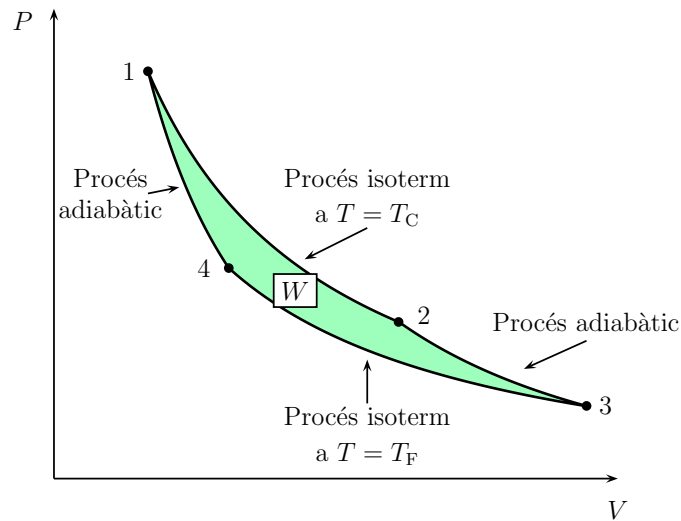


Figura 2.40: Diagrama pressió-volum del cicle de Carnot

sistema de gas ideal. També suposa que no pot haver-hi transferència d'energia en forma de calor mitjançant processos de conducció, convecció o radiació perquè en aquests casos es produeix una cessió d'energia d'un cos de temperatura alta a un cos amb temperatura baixa (que és un procés en una única direcció). Per tant, la interacció tèrmica de la màquina amb els focus tèrmics s'ha de produir mitjançant processos isotermes. Com vam veure (secció 2.6.5), en un procés isotèrmic la transferència d'energia està lligada, pel Primer Principi de la Termodinàmica, al treball d'expansió o compressió. Això fa que siga reversible. Ja tenim baix quins processos el nostre sistema interacciona amb els focus tèrmics. Només necessitem dos processos més per tancar el cicle i que puguin portar el nostre sistema des de la temperatura del focus calent  $T_C$ , on es produeix el procés isoterm en el qual el sistema rep energia, cap a la temperatura del focus fred  $T_F$ , on el sistema cedeix energia al focus fred també per un procés isoterm. No volem que el sistema intercanvie energia en forma de calor en aquests dos processos (perquè no seria un procés isoterm i per tant seria irreversible). Per tant, l'única solució és que els processos siguin *adiabàtics*.

El Cicle de Carnot (que compleix el Teorema de Carnot) per a un gas ideal es mostra a la figura 2.40. Per processos tenim:

- $1 \rightarrow 2$ : Expansió isoterma a  $T = T_C$

Com és un procés isoterm en un gas ideal,  $\Delta U = 0$ . Si apliquem el Primer Principi de la Termodinàmica tenim que

$$W_{12} = Q_{12} = Q_C \quad (2.97)$$

És a dir, el sistema rep energia en forma de calor del focus calent  $Q_C > 0$  i la cedeix en

forma de treball d'expansió  $W_{12} > 0$  sobre els envoltants

$$Q_C = W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} P dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_C}{V} dV = nRT_C \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) \quad (2.98)$$

- 2 → 3: Expansió adiabàtica

Com és un procés adiabàtic:  $Q_{23} = 0$ . Pel Primer Principi de la Termodinàmica tenim que  $\Delta_{23}U = -W_{23}$ . La disminució d'energia interna del sistema s'utilitza en fer treball sobre els envoltants

$$\Delta_{23}U = C_V(T_3 - T_2) = C_V(T_F - T_C) < 0 \quad (2.99)$$

- 3 → 4: Compensió isoterma

Com en 1 → 2, l'increment d'energia interna és nul:  $\Delta_{34}U = 0$ . Per tant,  $W_{34} = Q_{34} = Q_F$ . L'energia en forma de treball que els envoltants cedeixen al sistema ( $W_{34} < 0$ ) és igual a l'energia que el sistema cedeix al focus fred ( $Q_F < 0$ )

$$Q_F = W_{34} = \int_{V_3}^{V_4} P dV = \int_{V_3}^{V_4} \frac{nRT_F}{V} dV = nRT_F \ln \left( \frac{V_4}{V_3} \right) \quad (2.100)$$

- 4 → 1: Compensió adiabàtica

Com en 2 → 3,  $Q_{41} = 0$  i  $\Delta_{41}U = -W_{41}$ . L'energia en forma de treball  $W_{41} < 0$  que els envoltants cedeixen al sistema en comprimir-lo incrementa l'energia interna d'aquest

$$\Delta_{41}U = C_V(T_1 - T_4) = C_V(T_C - T_F) > 0 \quad (2.101)$$

El balanç d'intercanvi d'energia en forma de treball del cicle complet és

$$W = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} = nRT_C \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) + nRT_F \ln \left( \frac{V_4}{V_3} \right) \quad (2.102)$$

L'energia en forma de calor que obté sistema del focus calent ve donada per l'equació (2.98)

$$Q_C = nRT_C \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right)$$

i la que cedeix al focus fred per l'equació (2.100)

$$Q_F = nRT_F \ln \left( \frac{V_4}{V_3} \right)$$

Amb aquestes expressions podem calcular l'eficiència del Cicle de Carnot

$$\varepsilon = 1 - \frac{|Q_F|}{|Q_C|} = 1 - \frac{T_F}{T_C} \left| \frac{\ln(V_4/V_3)}{\ln(V_2/V_1)} \right| \quad (2.103)$$

Els estats 2 i 3, per una banda, i els estats 4 i 1, per l'altra, estan connectats per processos adiabàtics. Com es va mostrar a la secció 2.6.6, en aquests processos han de complir-se les relacions (2.86):

$$2 \rightarrow 3 \quad : \quad T_2 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1} \quad (2.104)$$

$$4 \rightarrow 1 \quad : \quad T_4 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \quad (2.105)$$

Dividint l'equació (2.105) entre l'equació (2.104) tenim

$$\frac{T_4 V_4^{\gamma-1}}{T_3 V_3^{\gamma-1}} = \frac{T_1 V_1^{\gamma-1}}{T_2 V_2^{\gamma-1}} \quad (2.106)$$

Com  $T_1 = T_2 = T_C$  i  $T_3 = T_4 = T_F$  (estan connectats per processos isoterms), l'equació anterior pren la forma

$$\left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \quad (2.107)$$

d'on tenim que ( $\gamma \neq 1$ )

$$\frac{V_4}{V_3} = \frac{V_1}{V_2} \quad (2.108)$$

i prenent logaritmes als dos costats de la igualtat

$$\ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) = \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) \quad (2.109)$$

Substituint aquest resultat en l'equació (2.103) finalment tenim que l'eficiència del Cicle de Carnot ve donada per

$$\varepsilon = 1 - \frac{T_F}{T_C} \quad (2.110)$$

Com podem observar, encara que el Cicle de Carnot és un cicle ideal, la seua eficiència és menor que la unitat,  $\varepsilon < 1$ , i només  $\varepsilon \rightarrow 1$  quan  $T_F/T_C \rightarrow 0$ , és a dir, el cicle és més eficient quant més gran és la diferència de temperatures entre el focus fred i el focus calent. L'eficiència del Cicle de Carnot ens indica el màxim d'eficiència que podem obtenir amb una màquina tèrmica real. La comparació amb aquest valor ens dirà si la màquina tèrmica és eficient i quin és el límit màxim que pot assolir.

### Exemple

Disposem d'una màquina tèrmica que treballa entre  $50\text{ }^{\circ}\text{C}$  i  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  amb una eficiència del 15%. És eficient? Si dóna 50 J d'energia en forma de treball per cicle, calculeu quina energia per cicle rep del focus calent i quina quantitat d'energia es perd per processos irreversibles. La màxima eficiència possible ve donada per la que tinga el Cicle de Carnot equivalent que treballa entre  $T_C$  i  $T_F$

$$\varepsilon_{\max} = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 1 - \frac{273}{323} = 0.18 \rightarrow 18\%$$

La màquina és molt eficient, només perd un 3% de l'energia que rep del focus calent en processos irreversibles.

Per altra banda dóna  $W = 50\text{ J}$  per cicle. Com que la seua eficiència és del 15% ( $\varepsilon = 0.15$ ), l'energia que rep del focus calent és

$$\varepsilon = \frac{W}{Q_C} \rightarrow Q_C = \frac{W}{\varepsilon} = \frac{50}{0.15} = 333\text{ J}$$

L'energia que perd per processos irreversibles és

$$\Delta W = W_{\text{Carnot}} - W_{\text{màquina}} = Q_C(\varepsilon_{\max} - \varepsilon) = 10\text{ J}$$

## 2.7.4 Refrigeradors i bombes de calor

Un refrigerador és bàsicament una màquina tèrmica que funciona a la inversa: rep energia en forma de treball que utilitza per extraure energia en forma de calor d'un focus fred i cedir energia en forma de calor a un focus calent. En aquest cas, el Segon Principi de la Termodinàmica estableix que és necessari efectuar un treball sobre el sistema perquè pugui enviar energia en forma de calor d'un cos més fred a un cos més calent (figura 2.41).

El que ens interessa en els refrigeradors és la quantitat d'energia que podem extraure del focus fred ( $Q_F$ ) en relació al treball efectuat ( $W$ ). Per classificar els refrigeradors utilitzem el *coeficient d'eficàcia*, definit per l'expressió

$$\eta \equiv \frac{Q_F}{W} \quad (2.111)$$

Com major és el coeficient d'eficàcia, més energia en forma de calor extrau per unitat d'energia en forma de treball rebuda. Al contrari que en l'eficiència  $\varepsilon$ , el valor de  $\eta$  no té un valor límit superior. Els refrigeradors ordinaris tenen un coeficient d'eficàcia entre 5 i 6.

Relacionats amb els refrigeradors tenim les bombes de calor. En aquest cas també utilitzem treball per extraure energia en forma de calor d'un focus fred i donar energia en forma de calor al focus calent. Però ara no estem interessats en el focus fred sinó en el focus calent. Volem mantenir la temperatura del focus calent per mitjà de l'energia que li extraiem al focus fred.

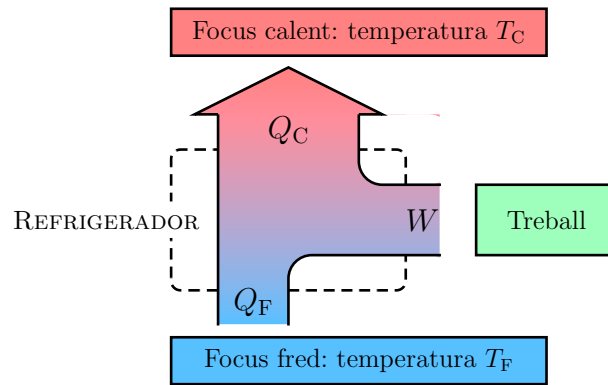


Figura 2.41: Esquema de funcionament d'un refrigerador (o d'una bomba de calor). L'aparell pren energia en forma de calor del focus fred i cedeix energia en forma de calor al focus calent mitjançant la realització d'un treball

En consonància, el coeficient d'eficàcia de la bomba de calor es defineix com el quocient entre l'energia en forma de calor que fem arribar al focus calent i el treball que hi apliquem

$$\eta_{BC} \equiv \frac{Q_C}{W} \quad (2.112)$$

## 2.8 Problemes

2.1. A un termòmetre de gas a volum constant llegim una pressió del gas de 26.66 kPa quan mesura la temperatura al punt triple de l'aigua. Al punt triple de l'oxigen, la pressió del gas és de 5.31 kPa. A quina temperatura correspon?



Nota: Com que el bulb on es fica el gas del termòmetre és rígid, la pressió del gas *no depèn* de la pressió del sistema que estiga mesurant sinó de la temperatura a la qual es trobe eixe sistema, que serà la del gas una volta assolit l'equilibri tèrmic, del volum del bulb i de la quantitat de gas. Per això, la pressió del gas quan mesura el punt triple de l'aigua no és de 611 Pa (la que correspon al punt triple de l'aigua) sinó de 26.66 kPa.

Sol:  $T = 54.41 \text{ K}$  ( $-218.74 \text{ }^\circ\text{C}$ )

### Problema resolt a l'apèndix B.2

2.2. Disposem d'un termòmetre de resistència de platí Pt100 on, d'acord amb el fabricant, la relació entre la resistència elèctrica (la propietat termomètrica) i la temperatura ve donada per l'expressió  $R = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2$  a l'interval  $0^\circ\text{C} \leq \theta < 850^\circ\text{C}$ . Per a determinar les constants de calibratge utilitzem tres punts fixos:



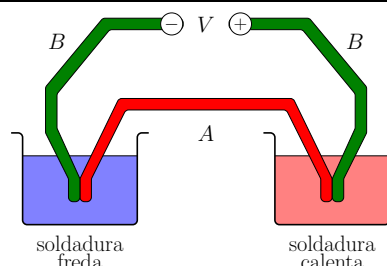
Punt fix de temperatura	$\theta$ ( $^\circ\text{C}$ )	$R$ ( $\Omega$ )
Punt triple de l'aigua	0.1	100.0
Fusió normal del zinc	419.5	253.7
Fusió normal de l'alumini	660.3	332.8

- (a) Calculeu el valor de les constants de calibratge del termòmetre  
 (b) Utilitzant el termòmetre mesurem una resistència  $R = 197.3 \Omega$ , a quina temperatura correspon?

Sol: (a)  $a_0 = 99.96 \Omega$ ,  $a_1 = 39.06 \times 10^{-2} \Omega \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $a_2 = -57.54 \times 10^{-6} \Omega \cdot ^\circ\text{C}^{-2}$ ; (b)  $\theta = 259.1 \text{ }^\circ\text{C}$

### Problema resolt a l'apèndix B.2

2.3. Un parell termoelèctric es compon de dos filaments de diferents metalls  $A$  i  $B$  soldats en els seus extrems. Quan les soldadures es fiquen en contacte tèrmic amb dos sistemes de temperatures diferents es genera una diferència de potencial elèctric  $V$  en circuit obert (efecte Seebeck).



El valor del potencial  $V$  depèn de la diferència de temperatures ( propietat termomètrica). Volem calibrar el termòmetre per a mesurar temperatures Celsius negatives. Per a fer-ho mesurem el valor del potencial elèctric  $V$  mantenint la soldadura calenta a  $0\text{ }^\circ\text{C}$  mentre que la freda la fem en contacte tèrmic amb un sistema amb una temperatura  $\theta < 0\text{ }^\circ\text{C}$ . Aquesta temperatura la mesurem mitjançant un termòmetre secundari:

$\theta\text{ (}^\circ\text{C)}$	-200	-190	-180	-170	-160	-150	-140	-130	-120	-110
$V\text{ (mV)}$	-8.83	-8.56	-8.27	-7.96	-7.63	-7.28	-6.91	-6.52	-6.11	-5.68
$\theta\text{ (}^\circ\text{C)}$	-100	-90	-80	-70	-60	-50	-40	-30	-20	-10
$V\text{ (mV)}$	-5.24	-4.78	-4.3	-3.81	-3.31	-2.79	-2.26	-1.71	-1.15	-0.58

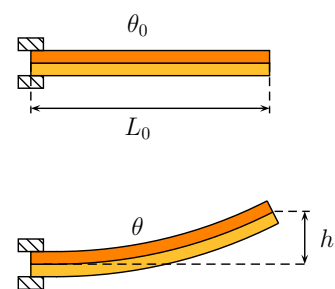
(a) Dibuixeu la gràfica  $V - \theta$

(b) Utilitzant el termòmetre mesurem un potencial  $V = -3.45\text{ mV}$ . Fent ús de la fórmula de la interpolació lineal, estimeu a quina temperatura correspon.

(c) Volem ajustar els valors de la temperatura en funció del potencial a una funció de tipus polinomial  $\theta = a_0 + a_1V + a_2V^2 + a_3V^3 + \dots$ . Indiqueu quin és el grau mínim del polinomi que ens dóna el valor de la temperatura amb un error menor de  $5\text{ }^\circ\text{C}$  per als valors mesurats. Utilitzant el polinomi, quina temperatura estimaríem per al potencial  $V = -3.45\text{ mV}$  anterior?

Sol. (b)  $\theta = -62.8\text{ }^\circ\text{C}$ ; (c) El grau mínim és 2. Amb un ajustament a grau 1 (recta), l'equació és  $\theta = 9.87 + 22.25V$  i la desviació màxima respecte dels valors experimentals és de  $13.4\text{ }^\circ\text{C}$ . Si el polinomi és de grau 2, l'equació és  $\theta = -2.49 + 13.89V - 0.91V^2$  i la desviació màxima és de  $3.7\text{ }^\circ\text{C}$ . En tots dos casos s'ha utilitzat també el punt de referència  $\theta = 0\text{ }^\circ\text{C}$  per a  $V = 0\text{ mV}$ . Utilitzant el polinomi de grau 2,  $\theta = -61.3\text{ }^\circ\text{C}$  per a  $V = -3.45\text{ mV}$ .

2.4. Una làmina bimetal·lica està formada per dos làmines de metalls que tenen un coeficient de dilatació molt diferent que està fixa en un extrem. A la temperatura  $\theta_0$  de referència, les dos làmines metàl·liques tenen la mateixa longitud  $L_0$ . Quan la temperatura  $\theta$  varia, el diferent coeficient de dilatació fa que la longitud de les làmines siga diferent i la làmina bimetal·lica es



corbe. Disposem d'una làmina bimetal·lica feta a partir d'una làmina de  $3\text{ mm}$  de gruix d'acer inoxidable ( $\gamma_P = 17.3 \times 10^{-6}\text{ K}^{-1}$ ) i d'una làmina de plom de gruix  $3\text{ mm}$  ( $\gamma_P = 86.7 \times 10^{-6}\text{ K}^{-1}$ ). La làmina bimetal·lica té una longitud  $L_0 = 20\text{ cm}$  a  $\theta_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$ . Quan la temperatura siga  $\theta = 400\text{ }^\circ\text{C}$ :



- (a) Determineu la longitud  $L_{\text{acer}}$  i  $L_{\text{Pb}}$  de les làmines de cada metall.
- (b) Suposant que a eixa temperatura les làmines adquireixen la forma d'un arc de circumferència, estima el valor de l'altura  $h$  de desviació de la làmina bimetàl·lica.

---

Sol: (a)  $L_{\text{acer}} = 20.01$  cm;  $L_{\text{Pb}} = 20.06$  cm (b)  $h = 1.67$  cm

2.5. Tenim un disc d'alumini ( $\gamma_P = 69.3 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ) amb un diàmetre de 10 cm a una temperatura de 25 °C.

- (a) Estimeu quin és el valor del diàmetre del disc a una temperatura de 345 °C.
- (b) Per a fabricar una anella, al disc li fem un forat interior de diàmetre 7.5 cm quan està a 25 °C. Estimeu quin és el diàmetre interior i exterior de l'anella a 345 °C.

---

Sol: (a) 10.07 cm (b) Diàmetre exterior 10.07 cm (com en l'apartat (a)), diàmetre interior 7.56 cm

2.6. Una abraçadora de coure ( $\gamma_P = 51 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ) ha d'ajustar fortament a un eix d'acer que té un diàmetre de 6 cm a una temperatura de 20 °C. Per això es fabrica l'abraçadora perquè tinga un diàmetre de 5.98 cm a 20 °C. Per a poder acoblar l'abraçadora a l'eix, elevem la temperatura de l'abraçadora tot mantenint l'eix d'acer a 20 °C. Estimeu quina és la temperatura mínima a què necessitem elevar l'abraçadora per a poder ficar-la a l'eix.

---

Sol: 217 °C

2.7. L'aigua té a 25 °C una densitat de  $997 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Estimeu la densitat de l'aigua a 30 °C si el coeficient de dilatació isobàric és  $\gamma_P = 210 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ .

---

Sol:  $996 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

2.8. Tenim 0.1 mol de gas ideal en un recipient tancat d'1.5 l a una temperatura de 20 °C.

- (a) Calculeu el valor de la pressió del gas.
- (b) Calfem el recipient fins que arriba a una temperatura de 120 °C. Quina és la pressió al final del procés?

---

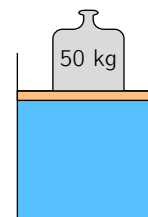
Sol: (a)  $P = 1.6$  atm (b)  $P = 2.15$  atm



2.9. Tenim 0.1 mol de gas a una temperatura de 25 °C en un recipient a la pressió atmosfèrica de 760 mmHg.

(a) Quin volum ocupa?

A la part superior del recipient tenim una tapa rodona de 20 cm de diàmetre i massa negligible. Damunt de la tapa col·loquem una pesa que comprimeix el gas de massa 50 kg.

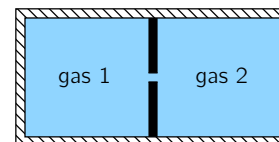
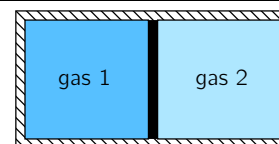


(b) Quina és la pressió que actua sobre el gas?

(c) Una volta en equilibri, si la temperatura del sistema no ha variat, quin és el nou volum del gas?

Sol: (a) 2.44 l (b) 116.9 kPa (c) 2.05 l

2.10. En un compartiment de parets externes adiabàtiques, tenim dos gasos separats entre si per una paret rígida, impermeable i diatèrmana. El gas 1 està en un compartiment de volum  $V_1 = 1$  l a una pressió d'1.5 atm i a una temperatura  $T = 300$  K. El gas 2 està en un compartiment de volum  $V_2 = 1$  l a una pressió de 0.1 atm i a la mateixa temperatura de 300 K (noteu que estan separats per una paret diatèrmana.)



(a) Calculeu la quantitat de gas (mols) que hi ha en cada compartiment.

(b) Obrim un forat menut en la paret de separació dels compartiments. Calculeu quina és la quantitat de gas i la pressió final en cadascun dels compartiments.

Sol: (a)  $n_1 = 6.10 \times 10^{-2}$  mol;  $n_2 = 4.07 \times 10^{-3}$  mol (b)  $n_1 = n_2 = 3.25 \times 10^{-2}$  mol;  $P_1 = P_2 = 0.80$  atm

### Problema resolt a l'apèndix B.2

2.11. Un gas realitza una expansió en un procés quasiestàtic segons les dades:

$P$ (atm)	20	15	12	10	6	3	1
$V$ (l)	21.4	26.9	32.2	37.3	56.1	97.7	235.4

(a) Dibueixeu la gràfica  $P - V$  del procés.

(b) Determineu a partir de les dades el treball fet pel gas en l'expansió.

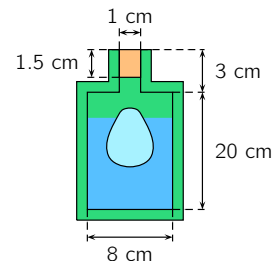
Sol: (b)  $W = 83.20$  kJ

2.12. Volem refredar l'aigua d'una botella de 1.5 l que es troba a 20 °C. Per a fer-ho fem l'aigua en un pitxer de plàstic amb tapa de massa 450 g que també té una temperatura de 20 °C. Estimeu el nombre de glaçons de gel de 2 × 2 × 2 cm que hem de traure del congelador (temperatura -20 °C) perquè la temperatura final siga com a màxim de 10 °C. Negligiu la pèrdua d'energia en forma de calor amb l'aire de l'habitació i la taula on reposa el pitxer.

Dades: densitats:  $\rho_{\text{aigua}} = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\rho_{\text{gel}} = 917 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ; calors específiques en el procés:  $c_{\text{aigua}} = 4190 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $c_{\text{gel}} = 2100 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $c_{\text{plastic}} = 1200 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ; calor latent de la fusió de l'aigua  $L_f = 333.5 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

Sol: Necessitarem almenys 23 glaçons de gel

2.13. La botella de la figura està feta de vidre de 4 mm de gruix i té un tap de suro. Contenia inicialment un 1 l d'aigua que volíem refredar ràpidament. Per a fer-ho vam ficar la botella al congelador, però va estar massa temps i s'ha congelat la meitat de l'aigua. Per descongelar-la la traïem del congelador i la fem en un bany tèrmic que es troba a una temperatura constant de 50 °C.

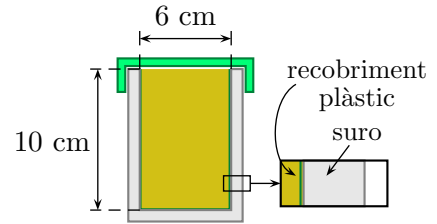


- (a) Determineu la resistència tèrmica de la botella.  
 (b) Determineu la quantitat d'energia necessària perquè el gel de la botella es fongui.  
 (c) Determineu el temps necessari perquè això ocorra.

Dades: densitats:  $\rho_{\text{aigua}} = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\rho_{\text{gel}} = 917 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ; calors específiques en el procés:  $c_{\text{aigua}} = 4190 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $c_{\text{gel}} = 2100 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ; calor latent de la fusió de l'aigua  $L_f = 333.5 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ ; conductivitats tèrmiques:  $k_{\text{suro}} = 0.07 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $k_{\text{vidre}} = 0.84 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$

Sol: (a)  $R_{\text{botella}} = 7.84 \times 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ ; (b)  $Q = 16.7 \text{ kJ}$ ; (c)  $t \approx 262 \text{ s}$

2.14. Hem de dissenyar un recipient que pugui mantenir un cafè amb llet calent durant un determinat temps. Per a fer-ho ens decidim per un recipient que té una base de suro de 5 mm de gruix, amb un recobriments de plàstic d'10  $\mu\text{m}$  i una tapa de plàstic de gruix 2 mm.



(a) Estimeu la resistència tèrmica del recipient.

(b) Suposant que el cafè amb llet té inicialment una temperatura de 60  $^{\circ}\text{C}$ , estima el temps que trigarà en assolir una temperatura de 40  $^{\circ}\text{C}$  si el fem en un bany tèrmic a 20  $^{\circ}\text{C}$ , en hivern a una temperatura ambiental de -5  $^{\circ}\text{C}$  i en estiu a una temperatura de 35  $^{\circ}\text{C}$ .

Dades:

Conductivitats tèrmiques:  $k_{\text{suro}} = 0.07 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $k_{\text{plàstic}} = 0.27 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ ; capacitat tèrmica del cafè amb llet del recipient en el procés  $C = 1070 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .

Sol: (a)  $R = 1.46 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$  (b) Per a  $\theta_{\text{ext}} = 20 \text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $t = 1082 \text{ s}$ , aproximadament 18 minuts; per a  $\theta_{\text{ext}} = -5 \text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $t = 574 \text{ s}$ , aproximadament 9.5 minuts; per a  $\theta_{\text{ext}} = 35 \text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $t = 2513 \text{ s}$ , aproximadament 42 minuts.

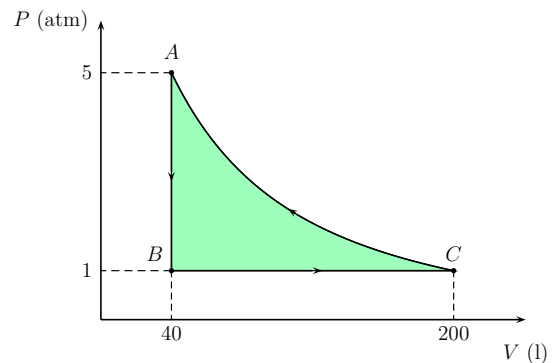
2.15 La temperatura d'operació del filament de tungstè d'una bombeta d'incandescència amb  $e = 0.35$  és de 2450 K. Calculeu l'àrea superficial que ha de tenir una bombeta de 120 W. (Considereu que tota l'energia consumida per la bombeta és radiada pel filament en forma d'ones electromagnètiques.)

Sol:  $A = 1.68 \text{ cm}^2$



2.16. Un mol de gas ideal monoatòmic evoluciona segons el cicle mostrat a la figura, format per un procés isocor ( $A \rightarrow B$ ), un isobàric ( $B \rightarrow C$ ) i un isotèrmic ( $C \rightarrow A$ ). Calculeu l'intercanvi d'energia en forma de treball i calor i la variació d'energia interna del sistema en:

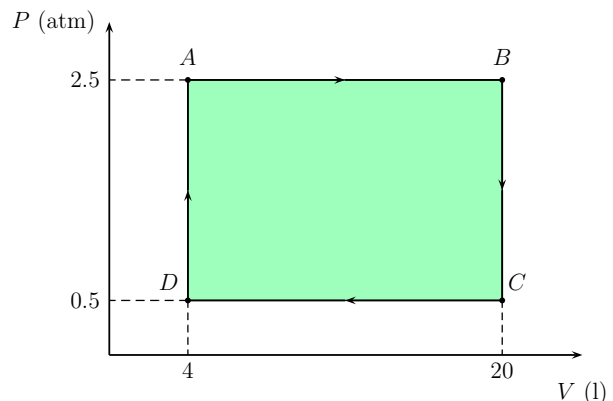
- (a) Procés  $A - B$   
 (b) Procés  $B - C$   
 (c) Procés  $C - A$   
 (d) Cicle complet  
 (e) Si considerem l'intercanvi net d'energia en forma de treball, es tracta d'una màquina tèrmica?



Sol: (a)  $W_{AB} = 0 \text{ J}$ ,  $\Delta_{AB}U = Q_{AB} = -24318 \text{ J}$ ; (b)  $W_{BC} = 16212 \text{ J}$ ,  $\Delta_{BC}U = 24318 \text{ J}$ ,  $Q_{BC} = 40530 \text{ J}$ ; (c)  $W_{CA} = Q_{CA} = -32615 \text{ J}$ ,  $\Delta_{CA}U = 0 \text{ J}$ ; (d)  $W_{\text{cicle}} = -16403 \text{ J}$ ;  $Q_{\text{cicle}} = -16403 \text{ J}$ ;  $\Delta_{\text{cicle}}U = 0 \text{ J}$ ; (e) no és una màquina tèrmica perquè l'energia neta intercanviada en forma de treball és negativa.

2.17. Un gas ideal diatòmic evoluciona segons el cicle mostrat a la figura. Si la quantitat de gas és  $n = 0.1 \text{ mol}$ , calculeu:

- (a) L'intercanvi net d'energia en forma de treball en el cicle.  
 (b) L'energia en forma de calor que la màquina rep de l'entorn.  
 (c) L'energia en forma de calor que la màquina cedeix a l'entorn.  
 (d) L'eficiència de la màquina tèrmica.



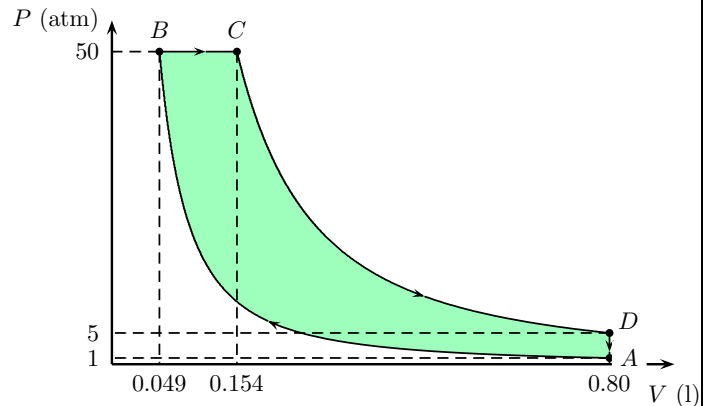
Dades: capacitat calorífica d'un gas diatòmic a volum constant ( $C_V = (5/2)nR$ ) i a pressió constant ( $C_P = (7/2)nR$ )

Sol: (a)  $W = 3242.4 \text{ J}$ ; (b)  $Q_C = 16212 \text{ J}$ ; (c)  $Q_F = -12969.6 \text{ J}$ ; (d)  $\varepsilon = 0.2$



2.18. El cicle de Diesel és un model idealitzat del funcionament d'un motor d'ignició per compressió o motor dièsel. Com al cicle d'Otto, el sistema que sofreix les transformacions del cicle és un sistema de gas ideal. El cicle està format per dos adiabàtiques (processos  $A-B$  i  $C-D$ ), un procés isobàric ( $B-C$ ) i un procés isocor ( $D-A$ ). Tenim un motor dièsel que empra 0.02 mol de gas ideal diatòmic i opera segons el cicle mostrat a la figura. Calculeu:

- (a) L'intercanvi net d'energia en forma de treball del cicle, i l'energia en forma de calor que rep de l'entorn i la que cedeix.
- (b) L'eficiència del motor.
- (c) En un determinat moment cada cicle dura 23 s. Indiqueu quina és la potència del motor.



Dades: capacitat calorífica d'un gas diatòmic a volum constant ( $C_V = (5/2)nR$ ) i a pressió constant ( $C_P = (7/2)nR$ )

Sol: (a)  $W = 1.05$  kJ;  $Q_C = 1.86$  kJ;  $Q_F = -0.81$  kJ (b)  $\varepsilon = 0.56$  (c) Pot=46 W

2.19 Una màquina tèrmica funciona entre les temperatures  $30^\circ\text{C}$  (focus fred) i  $300^\circ\text{C}$  (focus calent). En cada cicle la màquina rep una energia de 5 kJ del focus calent i cedeix una energia de 3.8 kJ al focus fred.

- (a) Calculeu l'energia neta en forma de treball que la màquina intercanvia amb l'entorn.
- (b) Quina és la màxima eficiència que pot assolir una màquina que funcione entre dos focus de temperatura. És eficient la nostra màquina?
- (c) Si cada cicle dura un minut i mig, quina és la potència de la màquina?

Sol: (a)  $W = 1.2$  kJ; (b)  $\varepsilon_{\max} = 0.47$ ,  $\varepsilon_{\text{màquina}} = 0.24$  (la màquina funciona a un 50% de la seua eficiència teòrica màxima, no és massa eficient); (c) Pot=13.3 W

2.20 Un refrigerador amb un coeficient d'eficàcia  $\eta = 5.4$  necessita cedir 100 W als envoltants que es troben a  $23^\circ\text{C}$ . Ha de mantenir una temperatura de  $2^\circ\text{C}$  per a la conservació adequada dels aliments. Si cada cicle té una durada de 72 s,

- (a) Indiqueu l'energia que extrau del focus fred i l'energia que consumeix en cada cicle en forma de treball
- (b) Quina potència està consumint de la xarxa elèctrica?

Sol: (a)  $Q_F = 6075$  J,  $W = 1125$  J; (b) Pot=15.63 W



## Bibliografia

### Bibliografia bàsica

- GIANCOLI, D. C. (2004): *Physics: Principles and applications*, Prentice Hall, Upper Saddle River.
- ROLLER, D. E. i R. BLUM (1983): *Mecánica, ondas y termodinámica*, Reverté, Barcelona.
- SEARS, F. W., M. W. ZEMANSKY i altres (2004): *Física Universitaria*, Pearson Educación, Madrid.
- SERWAY, R., A. RAYMOND i J. W. JEWETT (2005): *Física para ciencias e Ingeniería*, Thomson Paraninfo, Madrid.
- TIPLER, P. A. i G. MOSCA (2004): *Física para la ciencia y la tecnología*, Reverté, Barcelona.
- WILSON, J. D. i A. J. BUFFA (2003): *Física*, Pearson Educación, Madrid.

### Bibliografia avançada

#### Teoria i problemes

- AGUILAR, J. (1992): *Curso de Termodinámica*, Pearson Educación, Madrid.
- CARRINGTON, G. (1994): *Basic Thermodynamics*, Oxford Science Publications, Oxford.
- FEYNMAN, R., R. B. LEIGHTON i M. SANDS (1999): *Física Volumen 2 - Electromagnetismo y materia*, Addison Wesley Longman, México.

#### Problemes

- BRAUN, E. i E. T. WAIT (1973): *Problemas programados de Termodinámica*, Editorial Reverté, Barcelona.
- PELLICER, J. i J. A. MANZANARES (1996): *100 Problemas de Termodinámica*, Alianza Editorial, Madrid.
- RESEARCH & EDUCATION ASSOCIATION (1993): *Problem solvers Thermodynamics*, Research & Education Association, Piscataway.

# Introducció a wxMaxima

El programa **wxMaxima** és el que s'anomena un sistema d'àlgebra computacional (generalment identificat amb les sigles CAS, de l'anglès *Computer Algebra System*). Els programes CAS ens proporcionen totes les facilitats pròpies d'una calculadora, però a més ens permeten fer *càlcul simbòlic*. Això vol dir que wxMaxima ens permet fer càlculs matemàtics avançats, però no només de forma numèrica, sinó també «amb lletres», és a dir, sense assignar valors concrets a les variables del problema.

A continuació es presenta una breu introducció al programa wxMaxima. És un resum necessàriament molt reduït de les possibilitats de càlcul de wxMaxima, enfocat a la resolució dels problemes que planteja aquest manual. Podem aprofundir més en aquest excel·lent programa mitjançant la creixent documentació lliure i de qualitat que podem trobar en Internet. Part d'aquesta documentació s'ha referenciat al final de la introducció.

## A.1 Instal·lació de wxMaxima

El programa wxMaxima està dissenyat amb una estructura de nucli + entorn gràfic. El nucli és el programa que fa els càlculs. En el cas del wxMaxima, el nucli és el programa Maxima, que de fet pot utilitzar-se de forma autònoma com a programa CAS (això sí, no tindríem un entorn gràfic i sinó *de text*). Per la seua banda, l'entorn gràfic és la part del programa amb què interactuem, és a dir, la part del programa on introduïm les instruccions i on llegim els resultats del càlcul. Aquesta estructura provoca que la instal·lació del programa en ocasions supose instal·lar primer el nucli (programa Maxima) i després l'entorn gràfic (el programa wxMaxima pròpiament dit). A més de l'entorn gràfic wxMaxima, en algun cas necessitem instal·lar un segon programa auxiliar per a poder representar gràficament les dades i les funcions. En el nostre cas farem ús del programa gnuplot.

El programa wxMaxima es presenta en diferents versions que poden executar-se en una àmplia gamma d'ordinadors i sistemes operatius, en particular en Linux i Windows. Excepte per parlar

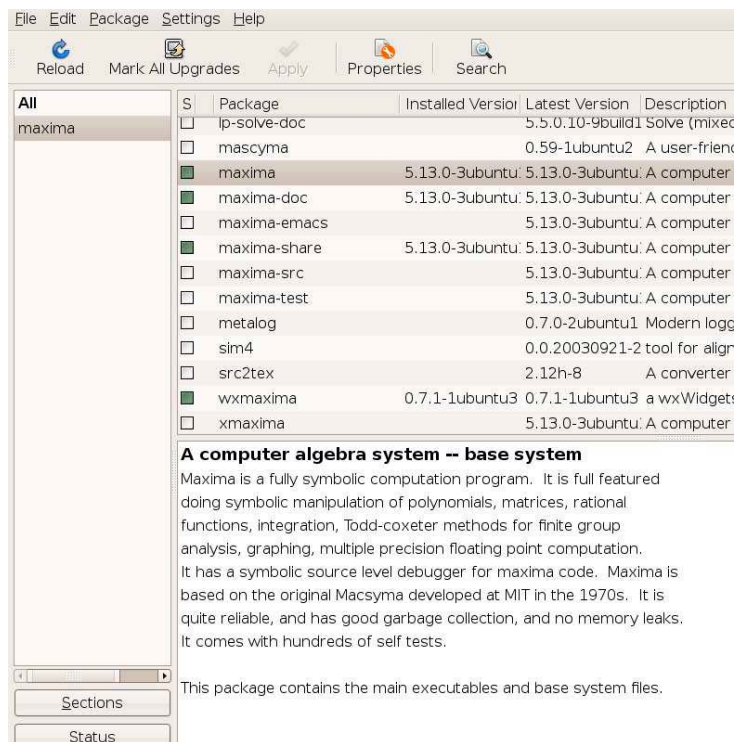


Figura A.1: Finestra del programa Synaptic

de la instal·lació, on indicarem les instruccions tant per a Windows com per a Linux, en la resta parlarem únicament de la versió Linux. Fem això perquè aquest sistema operatiu és obert i està a l'abast de tothom. Tanmateix, les diferències d'ús del programa en un sistema o l'altre són molt poques i els usuaris de Windows no deuriem tindre cap problema per a poder utilitzar profitosament aquesta introducció.

### A.1.1 Instal·lació en Linux

Al contrari que en el món Windows, hi existeixen diverses modalitats del sistema operatiu Linux, que s'anomenen *distribucions*. Encara que la base és la mateixa, entre les distribucions hi existeixen diferències que afecten, entre altres, a la instal·lació de programes. Ací només indicarem com fer la instal·lació de wxMaxima en les distribucions [Debian](#) i [Ubuntu](#) (que en deriva de la primera). Per a les altres distribucions caldrà que l'usuari revise la documentació que l'acompanya per a saber com s'hi instal·len els programes.

En les distribucions Debian i Ubuntu, podem fer la instal·lació del programa wxMaxima emprant l'entorn gràfic Synaptic (que en Ubuntu es troba dins de **Sistema**→**Administració**). Una volta hem obert el programa, hem de fer una recerca de la paraula **Maxima** i seleccionar-hi la instal·lació



dels paquets `Maxima`, `wxMaxima` i `maxima-share` (aquest últim és necessari per a fer l'ajustament per mínims quadrats i la interpolació, com veurem més endavant). A més hem d'instal·lar el programa `gnuplot` si no ho està ja.<sup>1</sup>

També podem fer la instal·lació del programa `wxMaxima` des de la línia de comandament. En aquest cas faríem ús del programa `apt-get` mitjançant la instrucció

```
apt-get install maxima maxima-share wxmaxima
```

### A.1.2 Instal·lació en Windows

La forma més fàcil d'instal·lar `wxMaxima` en el sistema Windows consisteix en obrir en un explorador web la pàgina d'internet de `wxMaxima`

- <http://wxmaxima.sourceforge.net>

i descarregar l'arxiu corresponent a Windows dintre de l'apartat `Download`. Una volta descarregat l'arxiu, l'hem d'executar i seguir els passos que indica el programa d'instal·lació.

## A.2 Execució de l'aplicació

Per a executar el programa `wxMaxima` simplement hem d'anar al menú de programes i executar `wxMaxima`.<sup>2</sup> La finestra serà semblant a la que es mostra a la figura A.2. Fixem-nos que el programa `wxMaxima` ja s'encarrega de cridar a `Maxima` (el seu nucli) i ens mostra en la finestra informació sobre les versions tant de `wxMaxima` com de `Maxima`. La versió que aparega probablement serà més recent que la mostrada a la figura.

El programa queda a l'espera que introduïm instruccions de càlcul. Això es pot fer de tres formes diferents:

- Mitjançant el menú superior (`Equations`, `Algebra`, `Calculus`, etc.).
- Mitjançant els botons que apareixen a la part de baix de la finestra del programa (`Simplify`, `Simplify(r)`, `Factor`, etc.)

---

<sup>1</sup>Per assabentar-nos-en podem cercar la paraula `gnuplot` dins del programa `Synaptic`.

<sup>2</sup>En la versió de Windows també tenim el programa `Maxima` dins del menú. Hem d'anar amb compte per a no equivocar-nos.

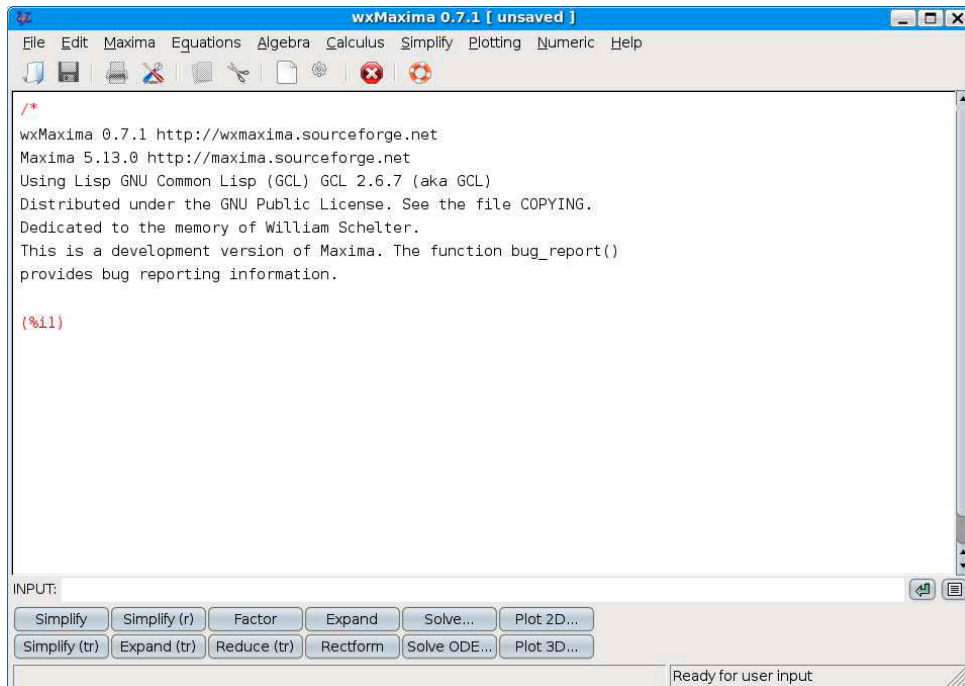


Figura A.2: Finestra principal del programa wxMaxima

- Escrivint directament la instrucció en el camp just al costat de la paraula INPUT: i prement ENTER. D'això se'n diu «executar la instrucció». En aquest cas necessitem conèixer la sintaxi de la instrucció que volem introduir.

### A.3 Ajuda en línia

El programa conté una ajuda en línia de les instruccions disponibles. Això és especialment important si ens decidim per introduir directament les instruccions al camp INPUT. L'ajuda en línia del programa es troba en anglès (com el propi programa). Per a accedir a l'ajuda en línia d'una instrucció de la que coneixem el nom hem d'executar ? instrucció. En cas de no conèixer-la, si executem ?? clau, el programa ens mostrarà instruccions que contenen la paraula clau. Per exemple:

```
(%i1) ?? sin;
```

```
0: Introduction to string processing
1: absint (Functions and Variables for Fourier Series)
2: asin (Functions and Variables for Trigonometric)
3: asinh (Functions and Variables for Trigonometric)
```

```

4: fourintsin (Functions and Variables for Fourier Series)
5: foursin (Functions and Variables for Fourier Series)
6: maxpsinegint (Functions and Variables for Special Functions)
7: maxpsiposint (Functions and Variables for Special Functions)
8: poisint (Functions and Variables for Special Functions)
9: sin (Functions and Variables for Trigonometric)
10: sinh (Functions and Variables for Trigonometric)
11: sinnpiflag (Functions and Variables for Fourier Series)
12: sinert (Functions and Variables for strings)
13: sinvertcase (Functions and Variables for strings)
Enter space-separated numbers, 'all' or 'none': 10;

-- Function: sinh (<x>)
   - Hyperbolic Sine.

```

Les ordres que utilitzarem més sovint es poden trobar al menú del programa. Tanmateix, això no ocorre en tots els casos i, per altra banda, resulta moltes voltes útil escriure o modificar directament les instruccions. En aquesta introducció mostrarem preferentment la versió escrita a mà, llesta per a ser introduïda directament a la línia INPUT:<sup>3</sup>

## A.4 Instruccions elementals

La forma més trivial d'utilitzar wxMaxima és com una calculadora. Per exemple si introduïm:

```
INPUT: 2+2
```

i premem ENTER al nostre teclat obtindrem:

```
(%i2) 2+2;
(%o2) 4
```

en la finestra superior. Aquesta finestra mostra la instrucció que hem introduït i l'eixida del programa (la solució si la instrucció era correcta). El format és sempre %iN per a la N-èsima instrucció d'entrada i %oN per a la N-èsima eixida de wxMaxima. Una cosa molt important és que el programa guarda la història de les instruccions i eixides des que el programa comença a funcionar. Podem cridar a la història des de la línia INPUT: si premem la tecla fletxa amunt (↑).

<sup>3</sup>Això permet per exemple copiar i pegar directament les ordres per a veure'n l'efecte a l'ordinador.

Això fa que es mostren a la finestra INPUT: les instruccions anteriors, que podem editar si cal. Podem guardar les instruccions d'una sessió per a futura referència amb el menú File->Save as, que crea un fitxer amb extensió .wxm.

Les operacions aritmètiques bàsiques es cridem amb +, -, \*, i /. La potènciació pot expressar-se de dos formes, bé mitjançant el símbol \*\* (per exemple 2\*\*3), bé amb el símbol ^ (per exemple 2^3).

Per a treballar de forma simbòlica resulta avantatjós poder assignar valors a símbols. En el programa wxMaxima podem assignar un valor numèric a una constant amb l'assignació :. Per exemple:

```
(%i3) a:2 /*assigna el valor 2 a "a"*/;  
(%o3) 2  
(%i4) a+5;  
(%o4) 7
```

Fixeu-vos que primer assignem a **a** el valor 2. Després executem **a+5**, que ens dóna com a resultat 7. És a dir, wxMaxima substitueix el valor de **a** que hem assignat prèviament. Una altra cosa interessant que es veu a la primera línia és un comentari. Els comentaris serveixen per a posar aclariments al codi, que és molt important si pensem guardar la sessió en un arxiu ja que ens ajuda a recordar la funció de cada instrucció quan ha passat molt de temps. El text d'un comentari es fica entre els caràcters /\* al principi i \*/ al final. El wxMaxima ignora tot el que troba entre eixos caràcters.

El programa wxMaxima té implementades les funcions elementals (i moltes de no tan elementals) com ara les funcions trigonomètriques. Per exemple, per a calcular el sinus d'un angle de 5 radians fiquem:<sup>4</sup>

```
(%i5) sin(5);  
(%o5) sin(5)
```

Observem que el programa no ens dóna el resultat numèric com faria una calculadora normal. Això perquè el wxMaxima treballa per defecte de forma *simbòlica*. Per exemple, si fiquem una instrucció que sabem que té un valor exacte obtenim:

```
(%i6) sin(%pi/6);  
(%o6) 1/2
```

---

<sup>4</sup>És important mencionar que el wxMaxima treballa *sempre amb radians* per a les funcions trigonomètriques.

Observem que el resultat és la fracció  $1/2$ , no el valor numèric 0.5. També que el programa coneix el valor del número  $\pi$ , que introduïm mitjançant `%pi`. Si volem un valor numèric sempre podem filtrar l'eixida a través de la funció `numer` o `bfloat` (si el volem en notació científica):

```
(%i7) sin(5),numer;  
(%o7) -0.95892427466314
```

El fet que el programa wxMaxima treballa de forma simbòlica ens ajudarà a l'hora de fer àlgebra (per exemple en la resolució de sistemes d'equacions) i càlcul infinitesimal (per exemple a l'hora de fer derivades i integrals) com mostrem més endavant.

Una altra diferència respecte de les calculadores tradicional és que el programa ens permet treballar amb números d'una precisió arbitrària. Per exemple, si volem 100 dígits decimals, li ho indiquem al programa per mitjà de la instrucció

```
(%i8) fpprec : 100;  
(%o8) 100
```

Si després filtrem el resultat amb la instrucció `bfloat`

```
(%i9) sin(5),bfloat; /* tambe bfloat(sin(5)) */  
(%o9) -  
9.58924274663138468893154406155993973352461543964601778131672454235102558086559  
6030769959554295328666b-1
```

el programa ens dona la precisió que li hem fixat. Podem observar en el cas considerat que el resultat acaba en `b-1`. Això indica que el nombre està multiplicat per  $10^{-1}$  (notació científica). En qualsevol cas, aquesta funcionalitat és bàsicament anecdòtica per a nosaltres.

## A.5 Equacions i sistemes d'equacions

La instrucció `solve` ens ajudarà a resoldre la majoria dels problemes que ens trobem. La seua estructura és `solve(eqs,vars)`, on `eqs` fa referència a les equacions (una o més) i `vars` a les variables de les quals volem conèixer el seu valor (òbviament, tantes com equacions). Quan hi ha més d'una equació, i per tant de variables, aquestes es fiquen entre claudàtors (`[]`) i se separen amb comes (és a dir, el que fem és ficar una *llista* d'equacions i de variables). Com funciona? Suposem que volem resoldre l'equació  $3x^3 - 2x = 0$ . Aleshores només hem d'introduir la instrucció:

```
(%i10) solve(3*x**3-2*x=0,x);
(%o10) [x=-sqrt(2)/sqrt(3),x=sqrt(2)/sqrt(3),x=0]
```

En l'eixida obtenim una llista de resultats. Observem que es tracta d'una equació cúbica, per tant amb tres solucions.

Si el que tenim és un sistema d'equacions, com per exemple:

$$\left. \begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ \frac{x}{3} - y &= 2 \end{aligned} \right\}$$

aleshores introduïm la instrucció:

```
(%i11) solve([x+2*y=5,x/3-y=2],[x,y]);
(%o11) [[x=27/5,y=-1/5]]
```

Recordem que sempre podem filtrar l'eixida amb `numer` si estem interessats en valors numèrics aproximats:

```
(%i12) solve([x+2*y=5,x/3-y=2],[x,y]),numer;
(%o12) [[x=5.4,y=-0.2]]
```

## A.6 Simplificar expressions i substituir valors

Com que el programa wxMaxima fa càlcul simbòlic, de vegades torna expressions complexes que, si bé són la solució del problema, podem en ocasions provar a simplificar-hi la seua estructura. Per aquest motiu el wxMaxima incorpora algunes instruccions amb què podem tractar de simplificar l'expressió de la solució. La més útil és probablement `factor(expressió)`. Hi ha però, una gran quantitat de funcions que estan pensades per a casos més específics, com ara `rectform` que busca la separació en parts real i imaginària d'una expressió.

Suposem per exemple que hem de resoldre l'equació de Bernoulli per a obtenir el cabal  $I_v$  d'una conducció (veure la resolució del problema 1.17, apèndix B.2)

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\frac{I_v^2}{A_1^2} + \rho gh_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\frac{I_v^2}{A_2^2} + \rho gh_2$$

Resolem l'equació anterior per a  $I_v$  amb l'ajuda del programa wxMaxima utilitzant la instrucció `solve` que acabem de veure

```
(%i13) solve(P1+rho/2*Iv^2/A1^2+rho*g*h1=P2+rho/2*Iv^2/A2^2+rho*g*h2,Iv);
```

```
(%o13) [Iv=-sqrt(2)*A1*A2*sqrt(P2/(rho*A2^2-rho*A1^2)-P1/(rho*A2^2-rho*A1^2)+
(g*h2*rho)/(rho*A2^2-rho*A1^2)-(g*h1*rho)/(rho*A2^2-rho*A1^2)),Iv=sqrt(2)*A1*A2
*sqrt(P2/(rho*A2^2-rho*A1^2)-P1/(rho*A2^2-rho*A1^2)+(g*h2*rho)/(rho*A2^2-rho*
A1^2)-(g*h1*rho)/(rho*A2^2-rho*A1^2))]
```

Encara que el programa ens ha donat la solució, la seua forma és prou complexa. Per això tractem de simplificar-la mitjançant la instrucció `factor`

```
(%i14) factor(%o13) /* o simplement factor(%) */;
(%o14) [Iv=-sqrt(2)*A1*A2*sqrt((P2-P1+(g*h2-g*h1)*rho)/(rho*(A2^2-A1^2))),
Iv=sqrt(2)*A1*A2*sqrt((P2-P1+(g*h2-g*h1)*rho)/(rho*(A2^2-A1^2)))]
```

que, com podem veure, ha simplificat l'expressió de la solució en extraure alguns factors comuns.

Suposem ara que volem resoldre l'equació

$$x^2 + x + 1 + i = 0$$

En el programa wxMaxima fem la instrucció adient

```
(%i15) solve(x^2+x+1+%i=0,x);
(%o15) [x=(-sqrt(-4+%i-3)+1)/2,x=(sqrt(-4+%i-3)-1)/2]
```

Per a separar la part real de la imaginària utilitzem la instrucció `rectform`

```
(%i16) rectform(%);
(%o16) [x=%i-1,x=-%i]
```

Quan resollem un problema és habitual obtenir una expressió matemàtica *analítica* que combina els diferents paràmetres del problema en la solució final. Per exemple, el cas que hem vist anteriorment obteníem una expressió per al cabal que passa per una canonada a partir de les dades que ens proporciona un venturímetre

```
(%o14) [Iv=-sqrt(2)*A1*A2*sqrt((P2-P1+(g*h2-g*h1)*rho)/(rho*(A2^2-A1^2))),
Iv=sqrt(2)*A1*A2*sqrt((P2-P1+(g*h2-g*h1)*rho)/(rho*(A2^2-A1^2)))]
```

Aquesta expressió és molt útil, sobretot a l'hora de dissenyar el venturímetre, perquè ens permet conèixer la dependència matemàtica del cabal mesurat amb els paràmetres del venturímetre. Tanmateix, abans o després haurem de substituir els valors dels paràmetres per a tenir un valor concret de cabal. Això ho podem fer amb la instrucció

```
subst([var1=value1,var2=value2,...],exp)
```

Aquesta instrucció substitueix els valors `value1`, `value2`, ... de les variables `var1`, `var2`, ... (introduïts com una llista) en l'expressió `exp`. Per exemple, per a saber el valor del cabal a partir dels valors dels paràmeters especificats en el problema utilitzem

```
(%i17) subst([A1=%pi*1.e-2^2,A2=%pi*0.5e-2^2,rho=1000,g=9.8,P2=0,P1=rho*g*(2.2
e-2-5.e-2*cos(%pi/4)-0.5e-2*sin(%pi/4)),h2=0,h1=5.e-2*cos(%pi/4)],%o14),numer;
(%o17) [Iv=-3.6275987284684353*10^-6*(346.4823227814084-0.01689087296526*g*
rho)^0.5,Iv=3.6275987284684353*10^-6*(346.4823227814084-0.01689087296526*g*
rho)^0.5]
(%i18) subst([g=9.8,rho=1000],%o17);
(%o18) [Iv=-4.8797846442816988*10^-5,Iv=4.8797846442816988*10^-5]
```

Observem que per a l'expressió `exp` que hem d'utilitzar a la instrucció `subst`, hem emprat la solució que ens havia donat el programa per a  $I_v$  (%o14).

## A.7 Derivades, integrals i equacions diferencials

### A.7.1 Derivades

La instrucció que calcula derivades té la sintaxi

```
diff(exp,var,n)
```

on `exp` és l'expressió que volem derivar, `var` és la variable de derivació i `n` (que pot aparèixer o no) fa referència a l'ordre de derivació (`n=1` per a una derivada primera, `n=2` per a una derivada segona, etc.). Per exemple, suposem que tenim un cos que es mou segons la següent equació de moviment en una dimensió:

$$x(t) = 3t^2 - 2t + 4$$

on  $x$  és la posició i  $t$  és el temps. Ens demanen que trobem la velocitat en cada instant. Per a fer-ho simplement hem de derivar eixa expressió respecte del temps. Podem emprar el wxMaxima amb aquest propòsit:

```
(%i19) diff(3*t**2-2*t+4,t);
(%o19) 6*t-2
```



que ens indica que la velocitat és  $v = 6t - 2$ , com podem comprovar fàcilment fent l'operació de forma manual.<sup>5</sup> Si volem ara l'acceleració del cos, podem derivar l'expressió obtinguda:

```
(%i20) diff(6*t-2,t);
(%o20) 6
```

o, més directament, fer la segona derivada de l'expressió original:

```
(%i21) diff(3*t**2-2*t+4,t,2);
(%o21) 6
```

Evidentment els dos camins ens donen el mateix resultat:  $a = 6$ . Fixem-nos com en el segon cas, hem afegit l'ordre de derivació ( $n=2$ ) que no és necessari quan fem una derivada de primer ordre.

## A.7.2 Integrals

Moltes voltes el que ens interessa és l'operació contrària a la derivació, és a dir, la integració. Per a fer integrals amb el wxMaxima utilitzem la instrucció

```
integrate(exp,var,from,to)
```

on, com en la derivació, **exp** és l'expressió que volem integrar i **var** fa referència a la variable d'integració. A més, si tenim una integral definida, hem de ficar els límits d'integració **from** i **to**. Per exemple, suposem que volem calcular la integral indefinida

$$\int \sin(x)dx = -\cos(x)$$

Amb el wxMaxima utilitzaríem la instrucció:

```
(%i22) integrate(sin(x),x);
(%o22) -cos(x)
```

No hem indicat els límits (**from** i **to**) perquè es tractava d'una integral indefinida. Si, en canvi, tenim una integral definida, sí que hem de posar els límits. Per exemple, per a calcular

$$\int_0^{\pi} \sin(x)dx = -\cos(x)|_0^{\pi} = -\cos(\pi) - [-\cos(0)] = 2$$

utilitzem la instrucció del wxMaxima

---

<sup>5</sup>Naturalment, com més complexa és l'expressió que volem derivar, el wxMaxima ens resultarà d'una major utilitat.

```
(%i23) integrate(sin(x),x,0,%pi);
(%o23) 2
```

Hi ha casos però, on el wxMaxima no troba una expressió analítica. Suposem que volem calcular la integral definida

$$\int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx$$

Primer provem amb la instrucció `integrate` del wxMaxima

```
(%i24) integrate(1/sqrt(1+x^3),x,1/2,1);
(%o24) integrate(1/sqrt(x^3+1),x,1/2,1)
```

L'eixida del programa és la mateixa expressió que havíem introduït. Això ens indica que no ha trobat una expressió analítica per a la integral. Com que la integral és definida, podem fer una *integració numèrica*. Utilitzem la instrucció `romberg`

```
(%i25) romberg(1/sqrt(1+x^3),x,1/2,1);
(%o25) 0.41702752122007
```

La instrucció `romberg` té la mateixa estructura que la instrucció `integrate` (quan aquesta fa una integral *definida*), però fa una integració numèrica utilitzant l'algorisme de Romberg (per això el nom). Per aquest motiu ens dóna com a eixida un valor numèric.

### A.7.3 Equacions diferencials

De forma simplificada podem dir que una equació diferencial és una equació que involucra la derivada d'una o més incògnites. Per exemple, des d'un punt de vista matemàtic, la segona Llei de Newton la podem escriure com una equació diferencial de segon ordre (perquè involucra una derivada de segon ordre) de la posició  $x(t)$  de l'objecte baix estudi

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(t)$$

on  $F(t)$  és la força aplicada sobre el cos, que suposem coneguda. Bona part de les sessions de teoria dedicades a la Cinemàtica i Mecànica del punt material estan dirigides a estudiar aquesta equació, per a una selecció suficientment senzilla i interessant de casos particulars d'aquest problema general (i que dóna com a resultat moviments rectilinis uniformes i accelerats, circulars, tir parabòlic, etc.).

Les sofisticades matemàtiques que podem trobar a l'hora de resoldre equacions diferencials es poden evitar en bona part si utilitzem un programa com el wxMaxima. Això ens permet

concentrar-nos en el significat físic de les expressions. Ací només ens ocuparem d'un tipus d'equacions diferencials especialment senzilles i generals que apareixen de forma habitual en física, les anomenades equacions diferencials *ordinàries* de primer i segon ordre. En wxMaxima aquestes equacions es poden resoldre amb la instrucció

```
desolve (eqn, dvar)
```

on `eqn` representa l'equació diferencial que volem resoldre (en l'exemple anterior seria  $m \frac{d^2x}{dt^2} = F(t)$ ), i `dvar` representa la variable dependent que volem conèixer ( $x(t)$  en l'exemple). Suposem com a exemple un cos sotmès únicament a la força de gravetat, és a dir, on  $F(t) = mg$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg$$

Per a resoldre aquesta equació diferencial primer introduïm l'equació diferencial en el wxMaxima:

```
(%i26) eqn:m*diff(x(t),t,2)=m*g;
(%o26) m*( 'diff(x(t),t,2))=g*m
```

Observem que s'ha posat la dependència explícita d' $x$  per a indicar al programa que es tracta de la variable dependent. Per a resoldre l'equació, primer introduïm les condicions inicials o de contorn (que ens determinen el problema junt amb l'equació diferencial). En el nostre cas posem (de forma simbòlica) els valors de la posició inicial ( $x(0) = x_0$ ) i de la velocitat inicial del cos ( $dx/dt|_{t=0} = v_0$ )

```
(%i27) atvalue(x(t),t=0,x0);
(%o27) x0
(%i28) atvalue(diff(x(t),t),t=0,v0);
(%o28) v0
```

Per a resoldre l'equació diferencial utilitzem la instrucció `desolve`

```
(%i29) desolve(eqn,x(t));
(%o29) x(t)=x0+t*v0+(g*t^2)/2
```

En la solució que ens dona el wxMaxima podem reconèixer l'equació del moviment uniformement accelerat, amb acceleració igual a la de la gravetat, i amb la posició inicial  $x_0$  i velocitat inicial  $v_0$ . Podem comprovar també que el moviment de la partícula no depèn de la massa, com ja va demostrar Galileu al segle XVI amb el seu famós experiment a la torre de Pisa.

La instrucció `desolve` també serveix per resoldre sistemes d'equacions diferencials. En eixe cas hem d'introduir una *llista* tant d'equacions diferencials com de variables dependents. Finalment hem d'indicar que `desolve` no és l'única instrucció del wxMaxima per a resoldre equacions diferencials. Per exemple, també podem provar amb la instrucció `ode2`. Una ullada a l'ajuda en línia (`? ode2`) ens servirà per a decidir quina de les instruccions s'acoba millor a la resolució del nostre problema particular.

## A.8 Gràfics

Una utilitat quasi imprescindible del wxMaxima és la possibilitat de fer gràfics. Els podem fer de dos i tres dimensions, però són els primers els que ens resultaran més útils. Imaginem que volem obtenir una representació de la posició de l'objecte mòbil que hem introduït abans entre dos instants de temps donats, per exemple 0 i 10.<sup>6</sup> El moviment del cos venia descrit per

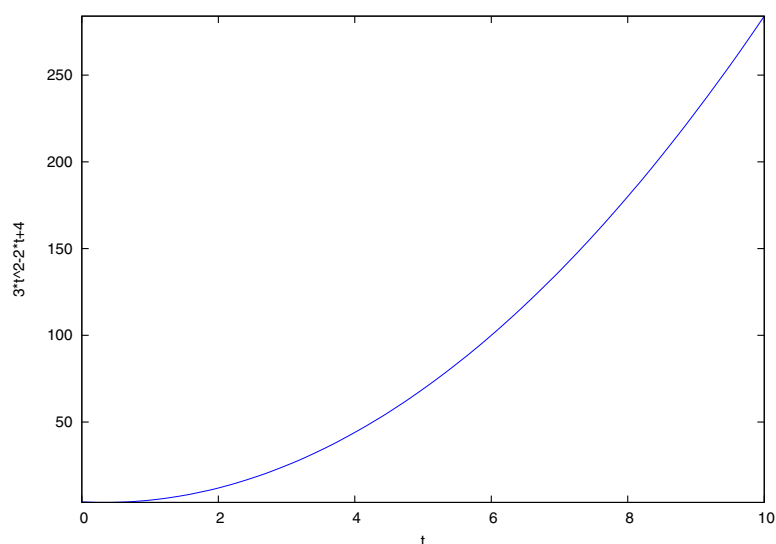
$$x(t) = 3t^2 - 2t + 4$$

La instrucció per a fer gràfics en 2-D és

```
plot2d(expr,limits)
```

on `expr` és l'expressió matemàtica que volem representar i `limits` és una llista que conté la variable i els límits numèrics de la representació. En el cas considerat utilitzaríem:

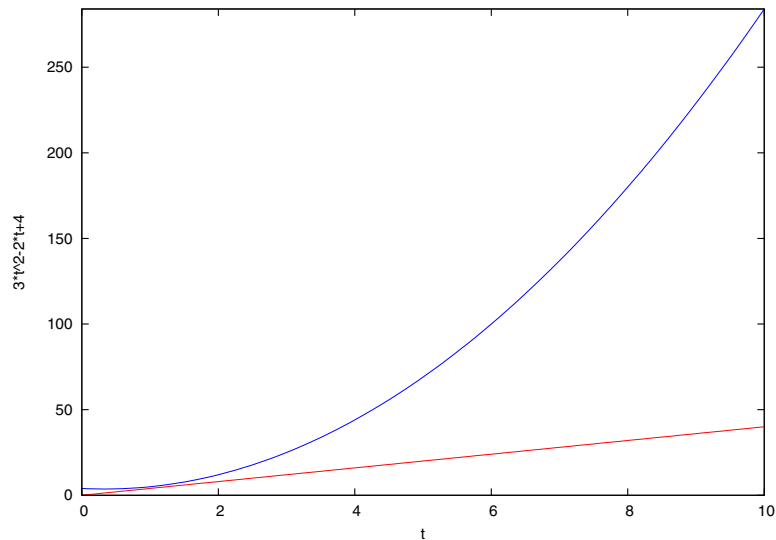
```
(%i28) plot2d(3*t^2-2*t+4,[t,0,10]);
```



<sup>6</sup>Evidentment en un cas real els instants tindrien unitats de temps. No les hem posades perquè no resulta rellevant per a mostrar com funciona la representació gràfica del wxMaxima.

També és possible dibuixar més d'una gràfica de forma simultània. Per a fer-ho només hem d'introduir a `expr` una *llista* amb les funcions que volem representar. Per exemple, si volem representar *conjuntament* la posició amb la velocitat utilitzem la instrucció:

```
(%i29) plot2d([3*t^2-2*t+4,diff(3*t^2-2*t+4,t)],[t,0,10]);
```



Podeu consultar l'ajuda del programa (amb la instrucció `? plot2d`) per a aprendre com modificar les característiques del gràfic, com ara el títol dels eixos, gruix i tipus de línia, etc.

Per a dibuixar gràfiques també podem fer ús de la llibreria `draw`, que es carrega mitjançant la instrucció

```
(%i30) load(draw);
(%o30) /usr/share/maxima/5.13.0/share/draw/draw.lisp
```

Per a dibuixar un gràfic amb la posició utilitzariem la instrucció

```
(%i31) draw2d(implicit(3*t^2-2*t+4,t,0,10));
(%o31) [gr2d(implicit)]
```

Com en el cas anterior, l'ajuda en línia (`? draw2d`) ens descriu les opcions disponibles per al gràfic.

## A.9 Ajustament de dades

El programa wxMaxima no deixa de costat una tasca tan habitual com és la de l'ajustament de dades experimentals. Les ferramentes que ofereix el programa en aquest aspecte, combinades amb les seues possibilitats gràfiques fan que wxMaxima siga també una ferramenta molt útil al laboratori, on l'anàlisi de dades experimentals és obligada. De fet el programa s'ha instal·lat als ordinadors del laboratori per si algú vol fer-ne ús.<sup>7</sup>

El programa wxMaxima permet fer ajustaments lineals i no lineals. En aquesta introducció ens centrarem en l'ajustament lineal. Utilitzarem l'exemple del document d'introducció a la teoria d'errors per a descriure el procediment de regressió lineal. Allí considerarem el cas d'un material òhmic, és a dir, que segueix aproximadament la llei d'Ohm  $V = RI$ , on  $V$  és la diferència de potencial aplicat entre els borns,  $I$  és el corrent elèctric que passa pel material (com a conseqüència d' $V$ ) i  $R$  és la resistència elèctrica. Els resultats experimentals eren

$I$ (mA)	5	10	15	20	25	30	35	40	45
$V$ (mV)	31	59	93	120	153	177	212	241	269

Amb aquestes dades experimentals, podem definir la següent matriu dins del wxMaxima:

```
(%i32) dades:matrix([5,31],[10,59],[15,93],[20,120],[25,153],[30,177],  
[35,212],[40,241],[45,269]);  
(%o32) matrix([5,31],[10,59],[15,93],[20,120],[25,153],[30,177],[35,212],  
[40,241],[45,269])
```

Per a poder realitzar l'ajustament necessitem carregar el paquet d'extensió `lsquares`

```
(%i33) load("lsquares");  
(%o33) /usr/share/maxima/5.13.0/share/contrib/lsquares.mac
```

D'aquesta llibreria utilitzem la funció `lsquares_estimates`:

```
(%i34) lsquares_estimates(dades,[x,y],y=A*x+B,[A,B]),numer;  
(%o34) [[A=5.976666666666667,B=1.138888888888889]]
```

La instrucció `lsquares_estimates` té com a arguments la matriu de dades, la disposició de les variables dins de la matriu, la funció a què s'ajusta (en aquest cas una recta  $y = Ax + B$ ) i

---

<sup>7</sup>És evident també que el programa ens pot servir de valuosa ajuda per a fer el càlcul de derivades parcials que comporta la propagació d'errors (errors indirectes).

finalment una llista amb els paràmetres de l'ajustament (en aquest cas  $A$  i  $B$ ), que són els valors que dona com a eixida (li hem afegit el filtre `number` perquè ens done els valors numèrics que és el que ens interessa). Per a convertir el resultat en un polinomi (que després podem utilitzar per a dibuixar un gràfic) utilitzem primer la instrucció `subst`

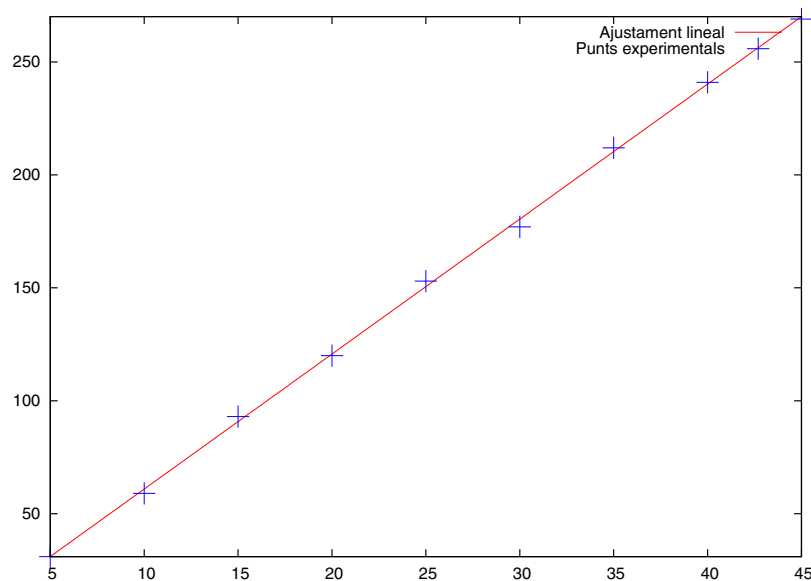
```
(%i35) subst(%o34,A*x+B);
(%o35) 5.976666666666667*x+1.138888888888889
```

amb què definim una funció

```
(%i36) pol1(x):=''%o35;
(%o36) pol1(x):=5.976666666666667*x+1.138888888888889
```

Això ens permet representar la sèrie de dades experimentals i l'ajustament per a comprovar la seua bondat

```
(%i37) draw2d(color=red,key="Ajustament lineal",explicit(pol1(x),x,5,45),
point_size=3,color=blue,key="Punts experimentals",points(args(dades)));
(%o37) [gr2d(explicit,points)]
```



## Referències

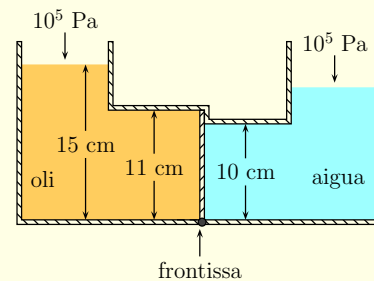
1. <http://wxmaxima.sourceforge.net>: Pàgina oficial d'Internet del programa wxMaxima. Allí hi trobarem a més del propi programa, enllaços a documentació del programa (fonamentalment en anglés).
2. [http://windowslibre.osl.uil.es/attached/resources/44/resources/introduccion\\_a\\_maxima.pdf](http://windowslibre.osl.uil.es/attached/resources/44/resources/introduccion_a_maxima.pdf): Una introducció molt senzilla a Maxima dirigida a estudiants de Batxillerat
3. <http://www.vimeo.com/maximajaj>: Una sèrie de vídeos sobre el programa wxMaxima molt interessants, fets per Javier Arántegui



## Problemes resolts

### B.1 Fluids

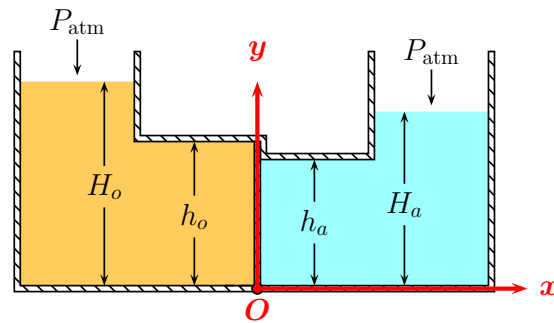
1.6. Tenim dos dipòsits separats per una làmina amb massa negligible que pot girar per mitjà d'una frontissa. Si al dipòsit de l'esquerra tenim oli de densitat específica  $\rho_e = 0.8$ , calcula quin és el nivell màxim que pot assolir l'aigua sense que la làmina es desplace i hi haja trasvàs de líquid entre els dipòsits.



Analitzem primer de forma qualitativa el problema, és a dir, tractem d'esbrinar com es comporta el sistema. Tenim una comporta que pot girar sobre el seu eix (la frontissa). Com és un moviment de rotació, ens hem de fixar en els moments de les forces que actuen sobre la comporta. Al costat esquerre l'oli exerceix una pressió, i per tant una força sobre la comporta. El moment d'aquesta força tracta de fer girar la comporta en el sentit de les agulles del rellotge. Al costat dret tenim, per un costat l'aigua, que també exerceix una pressió i, en conseqüència, un moment que tracta de fer girar la comporta en el sentit contrari a les agulles del rellotge. És a dir, els moments deguts a les forces que exerceixen l'oli i l'aigua actuen en sentits oposats. La pressió dels líquids, i per tant la força i el moment d'aquesta, depenen de la quantitat de fluid que hi haja (per l'equació fonamental de l'estàtica de fluids). A major nivell de fluid, major és la pressió i, en conseqüència, major és la força i el moment. Si el moment de la força exercida per l'oli sobre la comporta és major que el moment de la força exercida per l'aigua, en principi la comporta giraria en el sentit de les agulles del rellotge. Això no succeeix perquè hi ha un topall que impedeix el gir. En canvi, si el moment de la força exercida per l'aigua és major que el de la força exercida per l'oli, la comporta girarà en contra de les agulles del rellotge sense cap impediment. El problema ens demana quin és el nivell màxim d'aigua que podem tenir sense que el moment de la força

que exerceix sobre la comporta faça que s'òbriga la comporta. Això succeirà quan els moments de les forces degudes a l'oli i l'aigua s'igualen.

Per a resoldre quantitativament el problema, el primer que fem és triar un sistema de referència. Situem l'origen a la frontissa, l'eix  $OX$  al llarg de la base dels dipòsits i l'eix  $OY$  al llarg de la comporta, tal i com es mostra en roig al dibuix:



La comporta està sotmesa a les forces que exerceixen l'oli per un costat i l'aigua i la paret del dipòsit (el topall) per l'altre. El *moment* d'aquestes forces és el que pot provocar la rotació de la comporta sobre el seu eix (la frontissa). La major dificultat del problema la trobem en el fet que les forces són *distribuïdes* (actuen sobre la superfície de la comporta) i, a més, en el cas de l'oli i l'aigua, depenen de la posició  $y$ . Això últim és conseqüència que la pressió (per tant la força per unitat de superfície) en fluids incompressibles depèn de la profunditat.

Analitzem primer el moment que exerceix l'oli sobre la comporta. Suposem que la comporta té una altura  $L_1 = h_o$  i una amplària  $L_2$ . A una altura  $y$  del dipòsit prenem una superfície elemental  $dS = dyL_2$ , on  $dy$  és una altura elemental. En eixe punt la força elemental que exerceix l'oli és

$$dF_o = P_o dS = P_o(y)L_2 dy = [P_{\text{atm}} + \rho_o g(H_o - y)]L_2 dy$$

on  $\rho_o$  és la densitat de l'oli i  $H_o - y$  és la profunditat corresponent a l'altura  $y$ . La força  $dF_o$  va en direcció de les  $x$  positives. El moment d'aquesta força elemental en relació amb l'eix de gir (la frontissa) és

$$dM_o = dF_o y = [P_{\text{atm}} + \rho_o g(H_o - y)]L_2 y dy$$

Però aquesta expressió només ens dona la contribució de l'àrea  $dS$ . Hem d'obtenir el moment equivalent de tota la superfície de la comporta accessible a l'oli. Per a fer-ho, sumem els moments de les forces que actuen sobre cada superfície elemental  $dS$  de la comporta amb què està l'oli en contacte. Com estem tractant amb superfícies *elementals* això equival a fer una integral

$$M_o = \int_0^{h_o} [P_{\text{atm}} + \rho_o g(H_o - y)]L_2 y dy$$

De moment no fem la integral (ja ens ajudarà el wxMaxima a fer-la arribat el moment).

Avaluem ara el moment de la força que exerceix l'aigua sobre la comporta. De forma anàloga a l'oli és fàcil obtenir que

$$M_a = - \int_0^{h_a} [P_{\text{atm}} + \rho_a g(H_a - y)] L_2 y dy$$

El signe menys de l'expressió prové del fet que l'aigua exerceix una força en el sentit de les  $x$  negatives. També han canviat els límits de la integral perquè només hem de tenir en compte la superfície de la comporta accessible a l'aigua.<sup>1</sup> Tampoc resollem la integral en aquest moment. De fet no la podem resoldre perquè no coneixem el valor de  $H_a$ , que és la incògnita del problema.

Com hem indicat inicialment,  $M_o$  i  $M_a$  actuen en sentits oposats (perquè així ho fan les forces).  $M_o$  tracta de fer girar la comporta en el sentit de les agulles del rellotge;  $M_a$  tracta que la comporta gire en el sentit oposat a les agulles del rellotge. Si  $|M_o| > |M_a|$  la comporta no pot girar perquè la paret del dipòsit (rígida) actua com a topall. Apareix un moment  $M_r$ , resultat de la reacció de la paret del dipòsit sobre la comporta, que fa que el sistema romanga en equilibri ( $\sum_i M_i = 0$ )

$$M_o + M_a + M_r = 0$$

Què passa en canvi quan  $|M_a| > |M_o|$ ? En aquest cas la comporta comença a girar en sentit oposat a les agulles del rellotge perquè no hi ha cap obstacle que ho impedisca.

El problema ens demana el nivell d'aigua  $H_a$  màxim perquè la comporta no es moga. Si observem l'expressió que ens dona  $M_a$ , podem comprovar que el valor de  $|M_a|$  augmenta amb  $H_a$ . Això vol dir que hi haurà un valor límit per baix del qual tenim que  $|M_o| > |M_a|$  (la comporta no es mou pel topall) i per dalt del qual  $|M_a| > |M_o|$  i la comporta es mou en sentit oposat a les agulles del rellotge. Evidentment, la condició que ens dona el valor límit que busquem és  $|M_o| = |M_a|$ , o  $M_o + M_a = 0$ . Utilitzant les expressions de  $M_o$  i  $M_a$  aquesta condició esdevé

$$\int_0^{h_o} [P_{\text{atm}} + \rho_o g(H_o - y)] L_2 y dy - \int_0^{h_a} [P_{\text{atm}} + \rho_a g(H_a - y)] L_2 y dy = 0$$

Per a fer les integrals fem ús del wxMaxima. Per al moment degut a l'oli tenim

```
(%i1) integrate((Patm+rhoo*g*(Ho-y))*L2*y, y,0,ho);
(%o1) (((3*g*ho^2*Ho-2*g*ho^3)*rhoo+3*ho^2*Patm)*L2)/6
(%i2) factor(%);
(%o2) (ho^2*(3*g*Ho*rhoo-2*g*ho*rhoo+3*Patm)*L2)/6
```

és a dir

$$M_o = \frac{h_o^2(3gH_o\rho_o - 2gh_o\rho_o + 3P_{\text{atm}})L_2}{6}$$

<sup>1</sup>Hem ficat com a límit superior  $h_a$  però aquest límit podria ser diferent si el nivell de l'aigua fóra menor que  $h_a$ .

Observem que el programa wxMaxima pot calcular la integral sense assignar valors a les variables perquè pot fer càlcul simbòlic. En el càlcul de la integral li diem al programa que ha d'integrar només la variable  $y$ , la resta les tracta com a constants. De forma anàloga tenim, per al moment degut a l'aigua

```
(%i3) integrate((Patm+rhoa*g*(Ha-y))*L2*y,y,0,ha);
(%o3) (((3*g*ha^2*Ha-2*g*ha^3)*rhoa+3*ha^2*Patm)*L2)/6
(%i4) factor(%);
(%o4) (ha^2*(3*g*Ha*rhoa-2*g*ha*rhoa+3*Patm)*L2)/6
```

és a dir

$$M_a = \frac{h_a^2(3gH_a\rho_a - 2gh_a\rho_a + 3P_{\text{atm}})L_2}{6}$$

Resolem ara l'equació  $M_o - M_a = 0$  per a treure el valor de  $H_a$

```
(%i5) solve(%o2-%o4=0,Ha);
(%o5) [Ha=((3*g*ho^2*Ho-2*g*ho^3)*rhoo+2*g*ha^3*rhoa+
(3*ho^2-3*ha^2)*Patm)/(3*g*ha^2*rhoa)]
```

és a dir

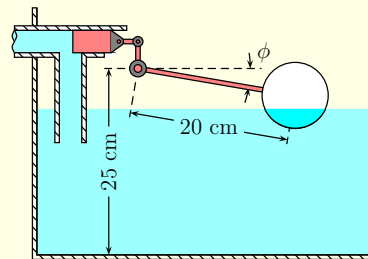
$$H_a = \frac{(3gh_o^2H_o - 2gh_o^3)\rho_o + 2gh_a^3\rho_a + (3h_o^2 - 3h_a^2)P_{\text{atm}}}{3gh_a^2\rho_a}$$

Observeu que el resultat no depèn de  $L_2$ . Per a obtenir un resultat numèric, substituïm els valors numèrics dels paràmetres

```
(%i6) subst([g=9.8,Ho=0.15,ho=0.11,rhoo=800.0,ha=0.1,rhoa=1000.,
Patm=1e5],%o5);
(%o6) [Ha=2.28373714285714]
```

El nivell màxim de l'aigua és  $H_a = 2.28$  m.

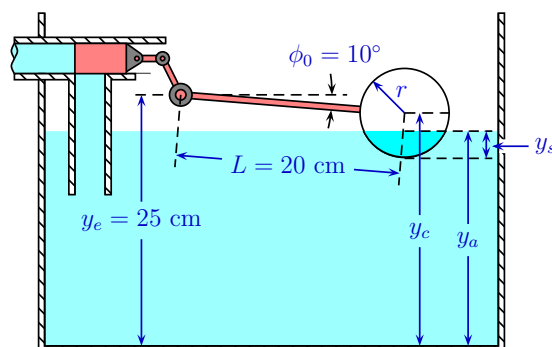
1.10. En el dispositiu de la figura s'utilitza una boia de radi  $r = 2 \text{ cm}$  i densitat  $300 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  per a controlar el nivell màxim a que s'omple una cisterna. La boia està connectada amb un mecanisme a un pistó que tanca l'entrada d'aigua quan l'angle d'inclinació és  $\phi = 10^\circ$ . Calculeu quina és l'altura màxima de l'aigua ( $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ).



Dada: el volum submergit de l'esfera ve donat per  $V_s = \pi h_s^2(3r - h_s)/3$ , on  $h_s$  és la profunditat submergida de l'esfera en l'eix vertical.

Comencem de nou tractant d'anticipar com es comporta el sistema. La boia té una densitat de  $300 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , menor que la de l'aigua, que és de  $1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , que li permet flotar. Quan el nivell d'aigua puja, també ho fa la boia, que mou el mecanisme que desplaça el pistó. En el moment que el nivell de l'aigua assoleix el seu nivell màxim, el pistó tanca l'entrada d'aigua i impedeix que hi entre més. Quan això es produeix, l'angle  $\phi$  és  $10^\circ$ . Ens demanen que calculem quin és el nivell màxim de l'aigua.

Suposem que l'aigua ha arribat al seu màxim nivell com mostra la figura



En aquest punt, l'altura de l'aigua  $y_a$  ha de ser igual a l'altura a què es troba el centre de l'esfera menys la part submergida

$$y_a = y_c - (r - y_s)$$

És a dir, per a obtenir  $y_a$  necessitem conèixer  $y_c$  i  $y_s$ . Per trigonometria podem obtenir el valor de  $y_c$  com

$$y_c = y_e - L \sin(\phi_0)$$

on  $y_e = 0.25 \text{ cm}$  és el valor de l'altura de l'eix que connecta la barra de l'esfera i el mecanisme de transmissió que tanca l'entrada d'aigua,  $L$  és la distància entre eixe eix i el centre de l'esfera i  $\phi_0 = 10^\circ$ , com correspon al màxim nivell de l'aigua. Per a obtenir el valor numèric d' $y_c$  podem utilitzar el programa wxMaxima

```
(%i1) solve(yc=0.25-0.20*sin(10.*%pi/180.),yc),numer;
'rat' replaced -0.2152703644666 by -4638/21545 = -0.2152703643537
'rat' replaced -0.2152703643537 by -4638/21545 = -0.2152703643537
'rat' replaced 4.6414481318171266E-5 by 1/21545 = 4.6414481318171
266E-5
'rat' replaced -0.2152703643537 by -4435/20602 = -0.2152703621008
(%o1) [yc=0.21527036210077]
```

on l'angle s'ha ficat en radians. Per altra banda, la fórmula de l'enunciat ens indica quina és la relació entre el volum submergit  $V_s$  i la profunditat submergida de l'esfera  $y_s$

$$V_s = \pi y_s^2 \frac{3r - y_s}{3}$$

Com sabem quina és la densitat de l'esfera  $\rho_e$  i la de l'aigua  $\rho_a$ , podem calcular la fracció del volum de l'esfera que es troba submergit a partir del principi d'Arquímedes

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{\rho_e}{\rho_a}$$

on  $V_e = (4/3)\pi r^3$  és el volum de l'esfera. Per tant, podem resoldre per a  $V_s$

$$V_s = \frac{\rho_e}{\rho_a} V_e = \frac{\rho_e}{\rho_a} \frac{4}{3} \pi r^3$$

i, utilitzant la relació entre  $V_s$  i  $y_s$ , tenim

$$\pi y_s^2 \frac{3r - y_s}{3} = \frac{\rho_e}{\rho_a} \frac{4}{3} \pi r^3$$

Hem de resoldre aquesta equació per obtenir el valor de  $y_s$ . Per a fer-ho podem fer ús del programa wxMaxima

```
(%i2) solve(%pi*ys^2*(3*r-ys)/3=rhoe/rhoa*(4/3)*%pi*r^3,ys);
(%o2) [ys=(-(sqrt(3)*%i)/2-1/2)*((2*r^3*sqrt(rhoe*(rhoe-rhoa)))/rhoa+(r^3*(rhoa-2*rhoe))/rhoa)^(1/3)+((sqrt(3)*%i)/2-1/2)*r^2)/((2*r^3*sqrt(rhoe*(rhoe-rhoa)))/rhoa+(r^3*(rhoa-2*rhoe))/rhoa)^(1/3)+r,ys=((sqrt(3)*%i)/2-1/2)*((2*r^3*sqrt(rhoe*(rhoe-rhoa)))/rhoa+(r^3*(rhoa-2*rhoe))/rhoa)^(1/3)+((-sqrt(3)*%i)/2-1/2)*r^2)/((2*r^3*sqrt(rhoe*(rhoe-rhoa)))/rhoa+(r^3*(rhoa-2*rhoe))/rhoa)^(1/3)+r,ys=((2*r^3*sqrt(rhoe*(rhoe-rhoa)))/rhoa+(r^3*(rhoa-2*rhoe))/rhoa)^(1/3)+r^2/((2*r^3*sqrt(rhoe*(rhoe-rhoa)))/rhoa+(r^3*(rhoa-2*rhoe))/rhoa)^(1/3)+r]
```

La solució és tan llarga que no ens serveix de molt. L'únic que podem observar és que hi ha tres solucions per a  $y_s$  (observem que partíem d'una equació cúbica) i que pareix que el resultat és complex. Provem a que ens done el valor numèric

```
(%i3) subst([r=2.e-2,rhoe=300.,rhoa=1000.],%o2);
(%o3) [ys=(-(sqrt(3)*%i)/2-1/2)*(1.6000000000000004*10^-6*sqrt(3)*sqrt(7)*%i+
3.2000000000000007*10^-6)^(1/3)+(4.0000000000000002*10^-4*(sqrt(3)*%i)/2-1/2)
)/(1.6000000000000004*10^-6*sqrt(3)*sqrt(7)*%i+3.2000000000000007*10^-6)^(1/3)
+0.02,ys=((sqrt(3)*%i)/2-1/2)*(1.6000000000000004*10^-6*sqrt(3)*sqrt(7)*%i+
3.2000000000000007*10^-6)^(1/3)+(4.0000000000000002*10^-4*(-(sqrt(3)*%i)/2-1/2))
/(1.6000000000000004*10^-6*sqrt(3)*sqrt(7)*%i+3.2000000000000007*10^-6)^(1/3)+
0.02,ys=(1.6000000000000004*10^-6*sqrt(3)*sqrt(7)*%i+3.2000000000000007*10^-6)^(
1/3)+(4.0000000000000002*10^-4)/(1.6000000000000004*10^-6*sqrt(3)*sqrt(7)*%i+
3.2000000000000007*10^-6)^(1/3)+0.02]
```

Bé, tampoc ens ajuda molt. Per simplificar-ho encara més utilitzem la funció `rectform`

```
(%i4) rectform(%o3),numer;
(%o4) [ys=0.014530299643623-2.0816681711721685*10^-17*%i,
ys=1.3877787807814457*10^-17*%i-0.011580769931443,
ys=8.6736173798840355*10^-18*%i+0.057050470287821]
```

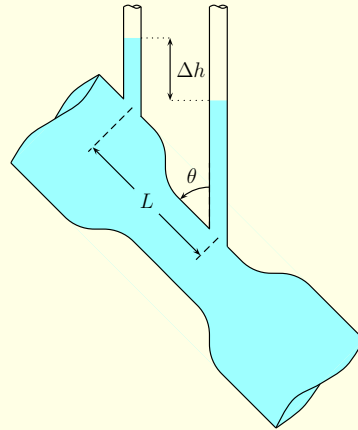
Ara sí que podem analitzar les solucions per a  $y_s$ . El primer que tenim és que el valor de la part imaginària és sempre molt menor que el valor de la part real. Això significa que aquests valors provenen d'errors provocats per la precisió de l'ordinador i no tenen sentit lògic. Ens quedem amb la part real de les solucions

```
(%i5) realpart(%o4);
(%o5) [ys=0.014530299643623,ys=-0.011580769931443,
ys=0.057050470287821]
```

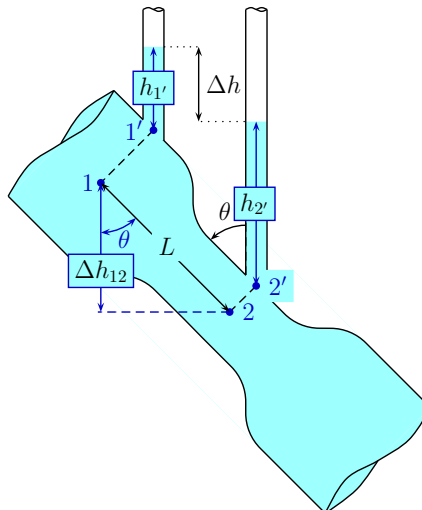
De les tres solucions de l'equació només la primera té sentit. La segona suposa que l'esfera flota 1.15 cm per damunt del nivell de l'aigua i la tercera indica que l'esfera està totalment submergida. Per tant, la solució que dona el programa és  $y_s = 1.45$  cm. Finalment, l'altura màxima de l'aigua és

$$y_a = y_c - r + y_s = 20.95 \text{ cm}$$

1.17. Tenim un venturímetre per a mesurar el cabal d'aigua que circula per una canonada que té un angle d'inclinació  $\theta = 45^\circ$ . El radi de la canonada és d'1 cm mentre que el de l'estrenyiment del venturímetre és de 0.5 cm. Si mesurem una diferència d'altura  $\Delta h = 2.2$  cm entre els nivells que assoleix l'aigua en els tubs de mesura i és  $L = 5$  cm la distància entre aquests tubs de mesura, determineu el cabal que circula per la canonada.



Al contrari que en un venturímetre horitzontal, en aquest cas l'augment de la velocitat no ve donat només per l'estrenyiment sinó que també hem de considerar la variació d'altura. Comencem amb el dibuix esquemàtic del sistema tot indicant les magnituds que ens seran útils per a resoldre el problema:



Suposem que la velocitat en cada secció transversal del tub que forma el venturímetre no varia. Això implica que la velocitat en 1 és la mateixa que hi ha en 1' i que la velocitat en 2 és la mateixa que hi ha en 2'. Escollim l'eix que hi ha entre 1 i 2 i hi apliquem l'equació de Bernoulli (conservació de l'energia)

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

on  $h_1$  i  $h_2$  són les altures a que es troben els punts 1 i 2 preses des d'un punt de referència comú. Al dibuix hi hem dibuixat  $\Delta h_{12} = h_1 - h_2$ .

Com que suposem que el sistema està en estat estacionari, el cabal ha de conservar-se

$$I_{v1} = I_{v2} = I_v \rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2$$



on  $A_1$  és l'àrea de la secció transversal del tub que passa per 1 i  $A_2$  és l'àrea de la secció transversal del tub que passa per 2. A partir d'aquesta equació podem obtenir les velocitats en funció del cabal

$$v_1 = \frac{I_v}{A_1}; \quad v_2 = \frac{I_v}{A_2}$$

que podem substituir a l'equació de Bernoulli

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\frac{I_v^2}{A_1^2} + \rho gh_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\frac{I_v^2}{A_2^2} + \rho gh_2$$

El que volem obtenir és el cabal  $I_v$ . Podem resoldre l'equació anterior amb l'ajuda del programa wxMaxima

```
(%i1) solve(P1+rho/2*Iv^2/A1^2+rho*g*h1=P2+rho/2*Iv^2/A2^2+
rho*g*h2,Iv);
(%o1) [Iv=-sqrt(2)*A1*A2*sqrt(P2/(rho*A2^2-rho*A1^2)-P1/(rho*A2^2-rho*A1^2)+
(g*h2*rho)/(rho*A2^2-rho*A1^2)-(g*h1*rho)/(rho*A2^2-rho*A1^2)),Iv=sqrt(2)*A1*
A2*sqrt(P2/(rho*A2^2-rho*A1^2)-P1/(rho*A2^2-rho*A1^2)+(g*h2*rho)/(rho*A2^2-
rho*A1^2)-(g*h1*rho)/(rho*A2^2-rho*A1^2))]
(%i2) factor(%o1);
(%o2) [Iv=-sqrt(2)*A1*A2*sqrt((P2-P1+(g*h2-g*h1)*rho)/(rho*(A2^2-A1^2))),
Iv=sqrt(2)*A1*A2*sqrt((P2-P1+(g*h2-g*h1)*rho)/(rho*(A2^2-A1^2)))]
```

És a dir, ens dona com a solucions

$$I_v = \pm\sqrt{2}A_1A_2\sqrt{\frac{P_2 - P_1 + (gh_2 - gh_1)\rho}{\rho(A_2^2 - A_1^2)}}$$

Evidentment només la solució positiva té sentit físic. D'aquesta equació coneixem els valors d' $A_1 = \pi r_1^2$  i  $A_2 = \pi r_2^2$ , on  $r_1$  i  $r_2$  són els valors del radi de la secció transversal del tub als punts 1 i 2, respectivament. Ens cal conèixer  $h_2 - h_1$  i  $P_2 - P_1$ . Comencem pel primer. Del dibuix esquemàtic que hem fet és fàcil deduir per trigonometria que

$$h_1 - h_2 = \Delta h_{12} = L \cos \theta$$

Per altra banda suposem que  $P_1 \approx P_{1'}$  i  $P_2 \approx P_{2'}$ . Als tubs verticals el fluid es troba en repòs. Això permet aplicar l'equació fonamental dels fluids als tubs

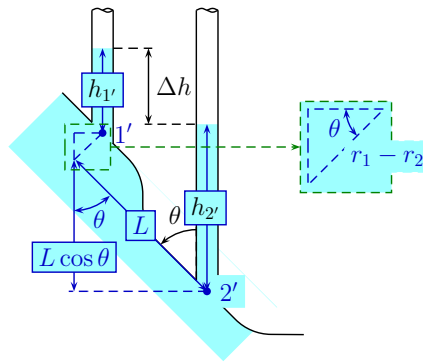
$$P_1 - P_{\text{atm}} = \rho gh_{1'}$$

$$P_2 - P_{\text{atm}} = \rho gh_{2'}$$

on  $P_{\text{atm}}$  és la pressió atmosfèrica. Restant aquestes equacions tenim que

$$P_1 - P_2 = \rho g(h_{1'} - h_{2'})$$

Per trobar la relació entre  $h_{1'}$  i  $h_{2'}$  considerem el següent dibuix esquemàtic



Recolzant-nos en aquesta figura, la relació entre  $h_{1'}$  i  $h_{2'}$  és

$$L \cos \theta + (r_1 - r_2) \sin \theta + h_{1'} = \Delta h + h_{2'}$$

d'on tenim que<sup>2</sup>

$$P_1 - P_2 = \rho g [\Delta h - L \cos \theta - (r_1 - r_2) \sin \theta]$$

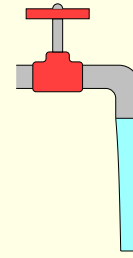
Amb aquests resultats ja podem calcular el valor de la despesa

```
(%i3) subst([A1=%pi*1.e-2^2,A2=%pi*0.5e-2^2,rho=1000,g=9.8,P2=0,P1=rho*g*(2.2
e-2-5.e-2*cos(%pi/4)-0.5e-2*sin(%pi/4)),h2=0,h1=5.e-2*cos(%pi/4)],%o2),numer;
(%o3) [Iv=-3.6275987284684353*10^-6*(346.4823227814084-0.01689087296526*g*rho)
^0.5,Iv=3.6275987284684353*10^-6*(346.4823227814084-0.01689087296526*g*rho)^0.5]
(%i4) subst([g=9.8,rho=1000],%o7);
(%o4) [Iv=-4.8797846442816988*10^-5,Iv=4.8797846442816988*10^-5]
```

És a dir,  $I_v = 5 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} = 0.05 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$ .

<sup>2</sup>Val a dir no obstant que l'aproximació  $h_{1'} - h_{2'} = \Delta h - L \cos \theta$  deuria poder utilitzar-se per ser vàlida amb l'aproximació  $P_{1'} \approx P_1$  i  $P_{2'} \approx P_2$ .

- 1.19. Pel canó d'una aixeta de radi  $r = 0.75$  cm ix aigua amb un cabal de  $0.15 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$ . Suposant que el règim és sempre laminar, determineu:
- (a) Quina és la velocitat que té l'aigua a la boca del canó i a una altura de 5 cm per baix d'aquesta.
- (b) Quin és el radi del flux d'aigua en aquest segon cas.



Per a calcular la velocitat del fluid a la boca del canó de l'aixeta utilitzem l'equació de la despesa  $I_v = vA$ . Com el radi del canó és  $r = 0.75$  cm i el cabal és  $I_v = 0.15 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$ , la velocitat és

$$v = \frac{I_v}{A} = \frac{I_v}{\pi r^2} = 0.85 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Per a calcular quina és la velocitat 5 cm per baix de la boca del canó utilitzem la conservació de l'energia (equació de Bernoulli)

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

on 1 és el punt de la boca de l'aixeta i 2 és la secció que es troba 5 cm per baix d'aquesta. Utilitzem el programa wxMaxima per a obtenir  $v_2$

```
(%i1) solve(P1+rho/2*v1^2+rho*g*h1=P2+rho/2*v2^2+rho*g*h2,v2);
(%o1) [v2=-sqrt(-(2*P2)/rho+(2*P1)/rho+v1^2-2*g*h2+2*g*h1),
v2=sqrt(-(2*P2)/rho+(2*P1)/rho+v1^2-2*g*h2+2*g*h1)]
(%i2) subst([P1=Patm,P2=Patm,rho=1000.,v1=0.85,g=9.8,h2=-5.e-2,h1=0],%o1),numer;
(%o2) [v2=-1.304798835069989,v2=1.304798835069989]
```

És a dir, la velocitat és  $v_2 = 1.30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Per a calcular el radi del fluid considerem la conservació del cabal

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

Com més alta siga la velocitat, menor serà l'àrea. Utilitzant el cabal  $I_v = 0.15 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$ , la velocitat  $v_2$  calculada i suposant que la secció transversal continua sent circular (és a dir suposant que  $A_2 = \pi r_2^2$ , tenim que el radi  $r_2$  és

```
(%i3) solve(Iv=v2*pi*r2^2,r2);
(%o3) [r2=-sqrt(Iv/v2)/sqrt(pi),r2=sqrt(Iv/v2)/sqrt(pi)]
(%i4) subst([Iv=0.15e-3,v2=1.30],%o3),numer;
(%o4) [r2=-0.0060603682883499,r2=0.0060603682883499]
```

És a dir,  $r_2 = 0.6$  cm.

## B.2 Termodinàmica

2.2. Disposem d'un termòmetre de resistència de platí Pt100 on, d'acord amb el fabricant, la relació entre la resistència elèctrica (la propietat termomètrica) i la temperatura ve donada per l'expressió  $R = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2$  a l'interval  $0^\circ\text{C} \leq \theta < 850^\circ\text{C}$ . Per a determinar les constants de calibratge utilitzem tres punts fixos:

Punt fix de temperatura	$\theta$ ( $^\circ\text{C}$ )	$R$ ( $\Omega$ )
Punt triple de l'aigua	0.1	100.0
Fusió normal del zinc	419.5	253.7
Fusió normal de l'alumini	660.3	332.8

- (a) Calculeu el valor de les constants de calibratge del termòmetre.  
(b) Utilitzant el termòmetre mesurem una resistència  $R = 197.3 \Omega$ , a quina temperatura correspon?

La relació entre la resistència elèctrica  $R$ , propietat termomètrica, i la temperatura  $\theta$  és polinomial de grau 2 (funció quadràtica)

$$R = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2$$

Com que tenim tres variables d'ajustament ( $a_0, a_1, a_2$ ), necessitem tres punts de calibratge, com ens dona l'enunciat. Si assignem  $(R_0, \theta_0) = (100, 0.1)$ ,  $(R_1, \theta_1) = (253.7, 419.5)$ , i  $(R_2, \theta_2) = (332.8, 660.3)$ , el sistema de tres equacions que hem de resoldre per obtenir les variables de calibratge és

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= a_0 + a_1\theta_0 + a_2\theta_0^2 \\ R_1 &= a_0 + a_1\theta_1 + a_2\theta_1^2 \\ R_2 &= a_0 + a_1\theta_2 + a_2\theta_2^2 \end{aligned} \right\}$$

El sistema d'equacions és lineal en els paràmetres  $a_0, a_1$  i  $a_2$  i es pot resoldre fàcilment amb el programa wxMaxima. Primer definim els valors d' $R_i$  i  $\theta_i$ :

```
(%i1) [R0,theta0]: [100.0,0.1];  
(%o1) [100.0,0.1]  
(%i2) [R1,theta1]: [253.7,419.5];  
(%o2) [253.7,419.5]  
(%i3) [R2,theta2]: [332.8,660.3];  
(%o3) [332.8,660.3]
```

i la funció  $R = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2$

```
(%i4) R(theta):=a0+a1*theta+a2*theta^2;
(%o4) R(theta):=a0+a1*theta+a2*theta^2
```

Una volta fet, resollem el sistema d'equacions amb la funció solve:

```
(%i5) solve([R0=R(theta0),R1=R(theta1),R2=R(theta2)],[a0,a1,a2]),numer;
'rat' replaced 100.0 by 100/1 = 100.0
'rat' replaced -0.1 by -1/10 = -0.1
'rat' replaced -0.01 by -1/100 = -0.01
'rat' replaced 253.7 by 2537/10 = 253.7
'rat' replaced -419.5 by -839/2 = -419.5
'rat' replaced -175980.25 by -703921/4 = -175980.25
'rat' replaced 332.8 by 1664/5 = 332.8
'rat' replaced -660.3 by -6603/10 = -660.3
'rat' replaced -435996.09 by -4795957/11 = -435996.090909091
(%o5) [[a0=99.96093862822526,a1=0.39061947169241,a2=-5.7539451178146431*10^-5]]
```

És a dir,  $a_0 = 99.96 \Omega$ ,  $a_1 = 39.06 \times 10^{-2} \Omega \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $a_2 = -57.54 \times 10^{-6} \Omega \cdot ^\circ\text{C}^{-2}$ . Observem que hem assignat unitats a les variables d'ajustament perquè, en multiplicar-les per la temperatura, el resultat tinga unitats de resistència elèctrica.

Per a saber a quina temperatura correspon la resistència  $R = 197.3 \Omega$ , primer substituïm els valors de les variables de calibratge en la funció  $R(\theta)$

```
(%i6) subst(%o5,R(theta));
(%o6) -5.7539451178146431*10^-5*theta^2+0.39061947169241*theta
+99.96093862822526
```

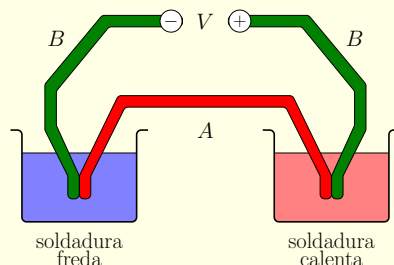
i després resollem l'equació de segon grau

```
(%i7) solve(197.3=%o6,theta),numer;
'rat' replaced 97.33906137177475 by 62297/640 = 97.3390625
'rat' replaced -0.3906194716924 by -2207/5650 = -0.3906194690265
'rat' replaced 5.7539451178146431E-5 by 50/868969 = 5.7539451925212523E-5
'rat' replaced 97.3390625 by 62297/640 = 97.3390625
'rat' replaced -0.3906194690265 by -2207/5650 = -0.3906194690265
'rat' replaced 5.7539451925212523E-5 by 50/868969 = 5.7539451925212523E-5
'rat' replaced 3.1824918100228166E-12 by 1/314219190400 = 3.1824918100228166E-12
```

```
'rat' replaced 1.1337184468489572E+11 by 113371844684/1 = 1.13371844684E+11  
'rat' replaced 1.1337184468489572E+11 by 113371844684/1 = 1.13371844684E+11  
(%o7) [theta=259.0787784292036,theta=6529.645409181416]
```

Com que l'equació  $R = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2$  és quadràtica ens dóna dos solucions. Només la primera solució ( $\theta = 259.1$  °C) té sentit (es troba dins de l'interval  $0.1$  °C <  $\theta$  <  $660.3$  °C on tenim calibrat el nostre termòmetre).

2.3. Volem calibrar un parell termoelèctric per a temperatures Celsius negatives. Per a fer-ho mesurem el valor del potencial elèctric  $V$  mantenint la soldadura calenta a  $0\text{ }^\circ\text{C}$  mentre que la freda la fem en contacte tèrmic amb un sistema amb una temperatura  $\theta < 0\text{ }^\circ\text{C}$  que mesurem mitjançant un termòmetre secundari.



$\theta$ ( $^\circ\text{C}$ )	-200	-190	-180	-170	-160	-150	-140	-130	-120	-110
$V$ (mV)	-8.83	-8.56	-8.27	-7.96	-7.63	-7.28	-6.91	-6.52	-6.11	-5.68
$\theta$ ( $^\circ\text{C}$ )	-100	-90	-80	-70	-60	-50	-40	-30	-20	-10
$V$ (mV)	-5.24	-4.78	-4.3	-3.81	-3.31	-2.79	-2.26	-1.71	-1.15	-0.58

(a) Dibuixeu la gràfica  $V - \theta$

(b) Utilitzant el termòmetre mesurem un potencial  $V = -3.45\text{ mV}$ . Fent ús de la fórmula de la interpolació lineal estimeu a quina temperatura correspon.

(c) Volem ajustar els valors de la temperatura en funció del potencial a una funció de tipus polinomial  $\theta = a_0 + a_1V + a_2V^2 + a_3V^3 + \dots$ . Indiqueu quina és el grau mínim del polinomi que ens dóna el valor de la temperatura amb un error menor de  $5\text{ }^\circ\text{C}$  per als valors mesurats. Utilitzant el polinomi, quina temperatura estimaríem per al potencial  $V = -3.45\text{ mV}$  anterior?

Amb el programa wxMaxima és molt fàcil fer el gràfic de les dades presentades. Però, abans de fer-lo, definirem una funció que interpola linealment sobre les dades experimentals donades. Això ens permetrà representar conjuntament la funció que dóna la interpolació i les dades experimentals, i ens donarà una perspectiva visual molt valuosa. Com que l'eixida per pantalla de les instruccions que *utilitzarem* és molt complexa, la cancel·larem afegint  $\$$  al final de cada instrucció.

El programa wxMaxima conté un paquet anomenat `interp` que incorpora una sèrie de rutines que permeten la interpolació de dades de forma senzilla (podem trobar informació sobre el paquet si busquem `interpolation` a la ajuda de wxMaxima). Primer carreguem el paquet d'interpolació

```
(%i1) load(interp)$;
```

i introduïm les dades experimentals mitjançant la matriu `p`

```
(%i2) p:matrix([-8.83,-200],[ -8.56,-190],[ -8.27,-180],[ -7.96,-170],[ -7.63,-160],
[-7.28,-150],[ -6.91,-140],[ -6.52,-130],[ -6.11,-120],[ -5.68,-110],[ -5.24,-100],
[-4.78,-90],[ -4.3,-80],[ -3.81,-70],[ -3.31,-60],[ -2.79,-50],[ -2.26,-40],
```

```
[-1.71, -30], [-1.15, -20], [-0.58, -10], [0, 0])$;
```

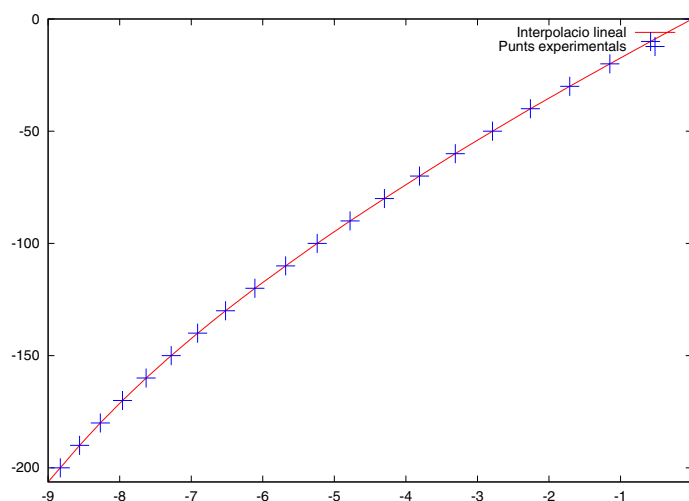
Hem afegit el valor de referència  $V = 0$  mV a  $\theta = 0$  °C, que es correspon amb el calibratge inicial del sistema (per a evitar l'error de zero). Definim una funció d'interpolació lineal a partir de la matriu

```
(%i3) linearinterpol(p)$;  
(%i4) f(x) := ' '%;
```

Una volta tenim la funció d'interpolació, podem representar-la junt amb les dades experimentals. Per a fer-ho utilitzem el paquet `draw`

```
(%i5) load(draw)$;  
(%i6) draw2d(color=red,key="Interpolacio lineal",explicit(f(x),x,-9,0),  
point_size=3,color=blue,key="Punts experimentals",points(args(p)))$;
```

el que dóna com a resultat un gràfic com el que es mostra a continuació



Podem observar com la funció d'interpolació dóna continuïtat als punts experimentals, el que possibilita estimar valors de la temperatura per a un valor de potencial que estiga entre dos punts de la taula inicial. Per exemple, el problema ens demana que calculem el valor de la temperatura que correspon al potencial  $V = -3.45$  mV, que no és cap dels valors que trobem a la taula temperatura-potencial. No obstant això podem estimar-la fàcilment amb la funció d'interpolació lineal  $f(x)$  que hem definit

```
(%i7) f(-3.45);  
(%o7) -62.8
```



és a dir, li correspon una temperatura  $\theta = -62.8$  °C.

Un altra forma de definir una funció que done continuïtat a les dades de la taula consisteix en fer un ajustament polinòmic utilitzant un algoritme de mínims quadrats. De la teoria d'errors coneixem l'ajustament lineal per mínims quadrats (és a dir, un ajustament a un polinomi de grau 1). El wxMaxima ens permet fer ajustaments a polinomis de graus superiors amb la llibreria `lsquares`<sup>3</sup>

```
(%i8) load(lsquares)$;
```

Farem ús de la funció `lsquares_estimates` de la llibreria per a calcular els coeficients de l'ajustament. Per a l'ajustament lineal utilitzem la instrucció:

```
(%i9) lsquares_estimates(p, [x,y], y=A0*x+B0, [A0,B0]), numer;  
(%o9) [[A0=22.25431160175544,B0=9.872715565238261]]
```

observem que la instrucció té quatre arguments: les dades (variable `p`), la llista d'ordenació de parells  $((x,y))$ , la forma funcional buscada ( $y=A0*x+B0$ ) i la llista dels coeficients de l'ajustament  $([A0,B0])$ . Hem de definir una funció a partir del coeficients calculats en l'ajustament (de la mateixa forma que ho havíem fet en el cas de la interpolació)

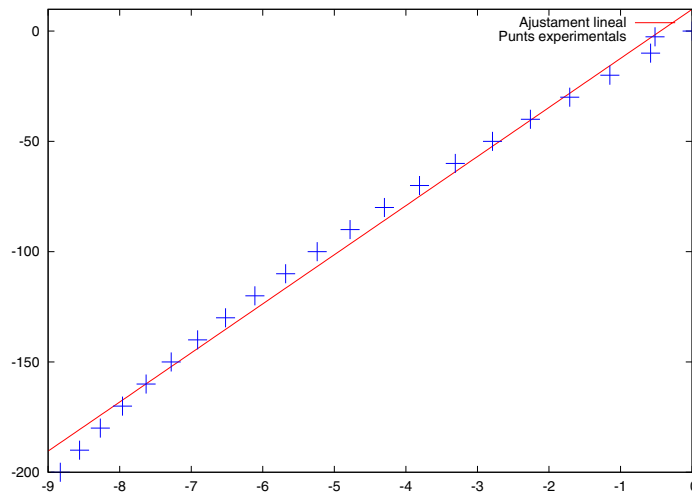
```
(%i10) subst(%o9,A0*x+B0);  
(%o10) 22.25431160175544*x+9.872715565238261  
(%i11) pol1(x):=' %o10;  
(%o11) pol1(x):=22.25431160175544*x+9.872715565238261
```

Podem representar gràficament els punts experimentals i la funció ajustada

```
(%i12) draw2d(color=red,key="Ajustament lineal",explicit(pol1(x),x,-9,0),  
point_size=3,color=blue,key="Punts experimentals",points(args(p)))$;
```

---

<sup>3</sup>El seu nom prové de les paraules en anglès que designen «mínim quadrats»: «least squares».



Com podem observar qualitativament al gràfic, l'ajustament lineal ens dóna una primera aproximació als valors experimentals, però el resultat obtingut no és massa bo. Per a obtenir una valoració quantitativa, calcularem la màxima desviació que es produeix entre els valors experimentals i els valors que dóna l'ajustament. Comencem amb el càlcul de les temperatures que prediu l'ajustament lineal. El primer que fem és extraure de la matriu  $p$  els valors referents al potencial

```
(%i13) V:transpose(p)[1];
(%o13) [-8.83,-8.560000000000001,-8.27,-7.96,-7.63,-7.28,-6.91,-6.52,-6.11,-5.68,
-5.24,-4.78,-4.3,-3.81,-3.31,-2.79,-2.26,-1.71,-1.15,-0.58,0]
```

Hem utilitzat la funció `transpose` per transformar el vector columna de la matriu  $p$  en un vector fila. Ara calculem els valors de temperatura que ens dóna la funció de l'ajustament als potencials en què s'ha mesurat amb la instrucció `map`

```
(%i14) T1: map(pol1,V);
(%o14) [-186.6328558782623,-180.6241917457883,-174.1704413812792,
-167.271604784735,-159.9276819561557,-152.1386728955413,-143.9045776028918,
-135.2253960782072,-126.1011283214875,-116.5317743327326,-106.7398772279602,
-96.50289389115272,-85.8208243223101,-74.91621163744995,-63.78905583657224,
-52.21681380365941,-40.42202865472902,-28.18215727376354,-15.71974277678049,
-3.03478516377989,9.872715565238261]
```

Per altra banda, extraïem de la matriu  $p$  els valors de la temperatura

```
(%i15) T:transpose(p)[2];
```

```
(%o15) [-200,-190,-180,-170,-160,-150,-140,-130,-120,-110,-100,-90,-80,-70,-60,-50,-40,-30,-20,-10,0]
```

Per a comparar els valors de temperatura mesurats i els predits per l'ajustament lineal, hem de restar els dos vectors (T1-T). Com allò que volem és la màxima desviació, fem ús de la instrucció `lmax`, que dóna la quantitat màxima d'una llista, i de la instrucció `abs` que dóna el valor absolut

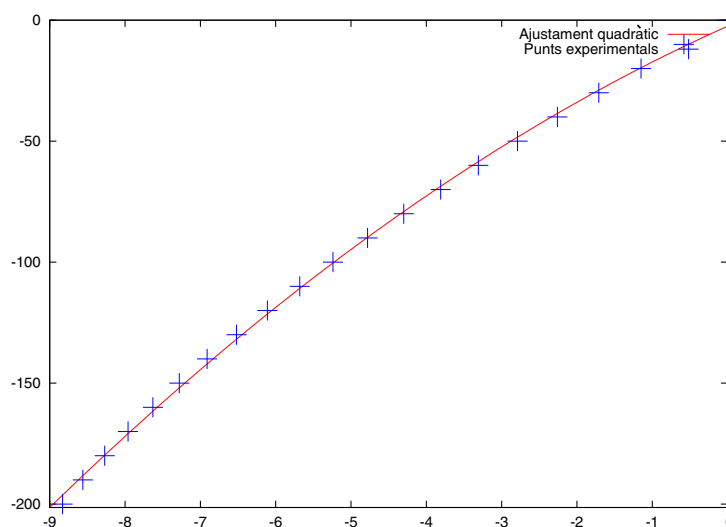
```
(%i16) lmax(T1-T);  
(%o16) 13.36714412173774
```

La màxima desviació entre els valors de temperatura predits per l'ajustament i els mesurats és de 13.4 °C, que és major que el límit de 5 °C que ens havia imposat l'enunciat del problema. Per tant, passem a calcular l'ajustament a un polinomi de grau dos. Seguim els passos que havíem donat per a l'ajustament lineal o de grau 1. Comencem calculant el polinomi de grau 2 que millor ajusta a les dades experimentals

```
(%i17) lsquares_estimates(p, [x,y], y=A1*x^2+B1*x+C1, [A1,B1,C1]), numer;  
(%o17) [[A1=-0.91187866725274,B1=13.8947613591568,C1=-2.488326090230998]]  
(%i18) subst(%o17,A1*x^2+B1*x+C1);  
(%o18) -0.91187866725274*x^2+13.8947613591568*x-2.488326090230998  
(%i19) pol2(x):=' %o18;  
(%o19) pol2(x):=-0.91187866725274*x^2+13.8947613591568*x-2.488326090230998
```

Dibuixem la funció `pol2` junt amb les dades experimentals

```
(%i20) draw2d(color=red,key="Ajustament quadràtic",explicit(pol2(x),x,-9,0),  
point_size=3,color=blue,key="Punts experimentals",points(args(p)))$;
```



Podem observar com ara l'ajustament ix molt millor que en el cas de l'ajustament lineal. Per a comprovar-ho quantitativament, calculem la temperatura que prediu l'ajustament quadràtic als punts experimentals de potencial i ho comparem amb la temperatura mesurada per a eixos punts

```
(%i21) T2: map(po12,V)$;  
(%i22) lmax(abs(T2-T));  
(%o22) 3.722754489252395
```

És a dir, per a un ajustament amb un polinomi de grau 2, l'error ix menor de 5 °C, com buscàvem. Per aquest polinomi, la temperatura estimada per a un potencial  $V = -3.45$  mV seria

```
(%i23) po12(-3.45);  
(%o23) -61.27888861629769
```

és a dir, una temperatura  $\theta = -61.3$  °C.

Resulta evident que la millor solució que hem obtingut al problema és la de la interpolació lineal. No obstant això li hem de donar la importància adequada als ajustaments. Per exemple, per a obtenir els coeficients d'una funció polinòmica de grau 2 només necessitem tres punts experimentals de calibratge (com havíem fet al problema 2.2) i, encara i això, aconseguim una precisió menor de 5 °C. A més, les funcions polinòmiques es poden servir a l'hora de formular una teoria que explique els resultats experimentals.

2.11. Un gas realitza una expansió en un procés quasiestàtic segons les dades:

$P$ (atm)	20	15	12	10	6	3	1
$V$ (l)	21.4	26.9	32.2	37.3	56.1	97.7	235.4

(a) Dibuixeu la gràfica  $P - V$  del procés

(b) Determineu a partir de les dades el treball fet pel gas en l'expansió

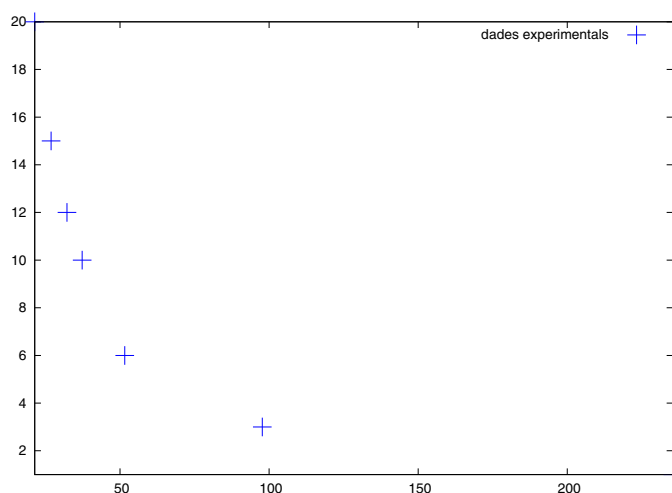
Per a dibuixar la gràfica recorrem al programa wxMaxima. Com en el problema anterior comencem definim una matriu que continga les dades experimentals

```
dades:matrix([21.4,20],[26.9,15],[32.2,12],[37.3,10],[51.6,6],[97.7,3],[235.4,1])$
```

Carreguem la llibreria `draw` i fem el dibuix

```
(%i2) load(draw)$;
```

```
(%i3) draw2d(point_size=3,color=blue,key="dades experimentals",points(args(dades)));
```



Volem calcular l'energia en forma de treball que intercanvia el gas amb els envoltants en la seua expansió. En principi, hem de calcular la integral

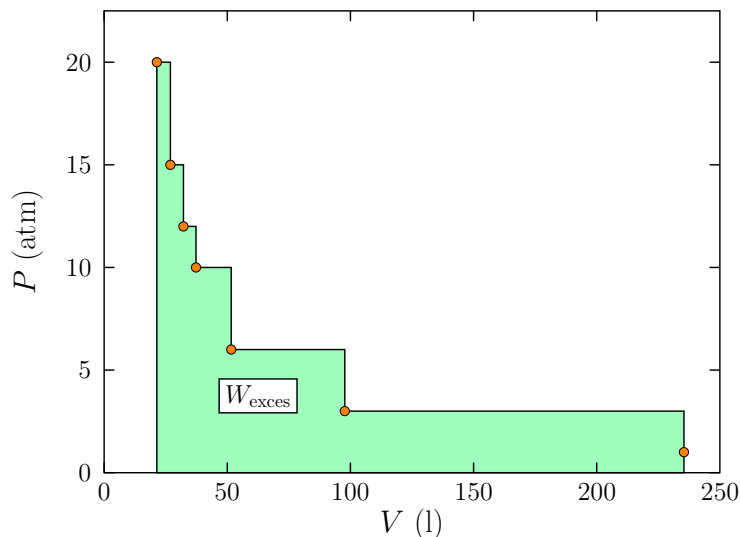
$$W = \int_{V_i}^{V_f} P dV$$

Aquesta expressió ens indica que el treball ve donat per l'àrea de la corba  $P - V$  i l'eix  $P = 0$ . Com només tenim una sèrie discreta de punts, podem estimar directament el treball a partir

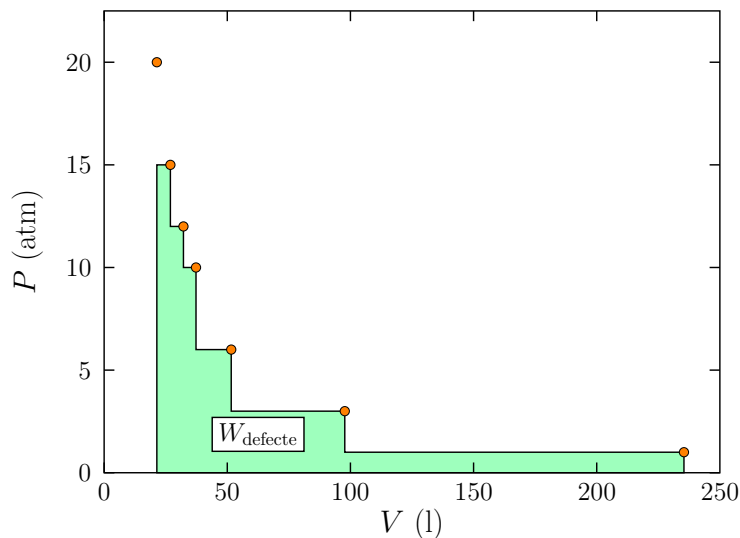
d'aquesta sèrie mitjançant l'expressió

$$W = \sum_i P_i \Delta V_i$$

Aquesta expressió suposa que, a cada interval, la pressió  $P_i$  és constant al sistema durant l'expansió  $\Delta V_i$  (secció 2.5.1). Observant el gràfic pressió-volum, podem observar com això no és cert per a la sèrie de punts de que disposem.<sup>4</sup> Per aquest motiu, si utilitzem aquesta fórmula, l'estimació serà per excés:

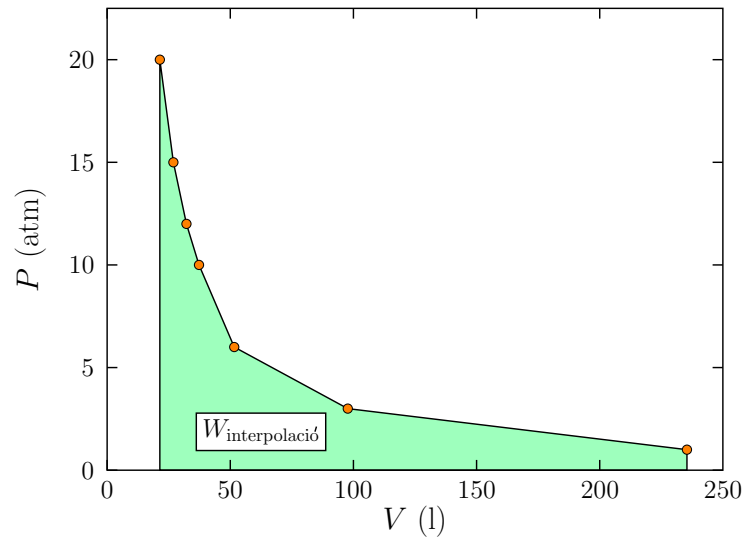


o per defecte



<sup>4</sup>En realitat, perquè la pressió siga constant els intervals de mesura han de ser suficientment menuts, estrictament infinitesimals. Amb això tenim un procés quasiestàtic i podem calcular el treball utilitzant la primera expressió amb la integral.

Podem fer una millor estimació si unim els punts mitjançant una interpolació lineal i després calculem la integral. En aquest cas l'àrea seria:



Per a fer la interpolació recorrem, com en el problema anterior, a la llibreria `interp1`

```
(%i4) load(interp1)$;
(%i5) linearinterp1(dades)$;
(%i6) f(x):='%'04$;
```

Per a fer la integral utilitzem un algoritme de Romberg

```
(%i7) romberg(f(x),x,21.4,235.4);
(%o7) 821.150772531329
```

Finalment canviem les unitats de l'energia intercanviada en forma de treball a Joules

```
(%i8) %o7*101.325;
(%o8) 83203.10202673692
```

La solució és  $W = 83.20$  kJ.

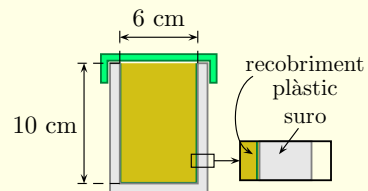
2.14. Hem de dissenyar un recipient que pugui mantenir un cafè amb llet calent durant un determinat temps. Per a fer-ho ens decidim per un recipient que té una base de suro de 5 mm de gruix amb un recobrint de plàstic d'10  $\mu\text{m}$  i una tapa de plàstic de gruix 2 mm.

(a) Estimeu la resistència tèrmica del recipient

(b) Suposant que el cafè amb llet té inicialment una temperatura de 60 °C, estima el temps que trigarà en assolir una temperatura de 40 °C si el fem en un bany tèrmic a 20 °C, en hivern a una temperatura ambiental de -5 °C i en estiu a una temperatura de 35 °C.

Dades:

Conductivitats tèrmiques:  $k_{\text{suro}} = 0.07 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $k_{\text{plàstic}} = 0.27 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ ; capacitat tèrmica del cafè amb llet del recipient en el procés  $C = 1070 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$



La resistència tèrmica del recipient és el resultat d'una combinació d'elements diferents. A la part de baix tenim una base de suro recoberta per un recobrint de plàstic en una disposició en sèrie. Aquesta base està en una disposició en paral·lel amb la tapa de plàstic (negligim per tant la influència de la part on coincideixen en sèrie la base i la tapa). A més, com a aproximació emprarem la superfície interior del recipient.

Comencem amb la definició dins del programa wxMaxima dels valors de les conductivitats tèrmiques del suro i del plàstic

```
(%i1) ksuro:0.07;
(%o1) 0.07
(%i2) kplastic:0.27;
(%o2) 0.27
```

Calculem el valor de la superfície (interior) de la base ( $S_{\text{base}} = \pi r^2 + 2\pi r h$ , on  $r$  és el radi de la base i  $h$  l'altura del got), i de la tapa,  $S_{\text{tapa}} = \pi r^2$

```
(%i3) r:0.06/2;
(%o3) 0.03
(%i4) h:0.10;
(%o4) 0.1
(%i5) Sbase:%pi*r^2+2*%pi*r*h;
(%o5) 0.0069*%pi
(%i6) Stapa:%pi*r^2;
```



```
(%o6) 8.999999999999998*10^-4*pi
```

Calculem ara la resistència tèrmica de la base de suro, del recobriment de plàstic de la base i de la tapa utilitzant l'equació (2.49)

$$R \equiv \frac{\Delta x}{Ak} \quad (2.49)$$

on  $\Delta x$  és el gruix del sistema

```
(%i7) Rsuro: 5.e-3/ksuro/Sbase;  
(%o7) 10.351966873706/pi  
(%i8) Rrecobriment:10.e-6/kplastic/Sbase;  
(%o8) 0.0053676865271068/pi  
(%i9) Rtapa: 2.e-3/kplastic/Stapa;  
(%o9) 8.230452674897119/pi
```

Calculem la resistència tèrmica de la base com la combinació en sèrie de la part de suro i del recobriment

```
(%i10) Rbase: Rsuro+Rrecobriment;  
(%o10) 10.35733456023311/pi
```

Finalment calculem la resistència tèrmica com la combinació en paral·lel de la base i la tapa

```
(%i11) solve(1/R=1/Rbase+1/Rtapa,R),numer;  
'rat' replaced -0.6850240804138 by -8819/12874 = -0.6850240795402  
'rat' replaced -0.6850240795402 by -8110/11839 = -0.6850240729791  
'rat' replaced -8.446659346228566E-5 by -1/11839 = -8.446659346228566E-5  
'rat' replaced -1.45980271270037 by -11839/8110 = -1.45980271270037  
(%o1) [R=1.45980271270037]  
(%i12) R: '%o11;  
(%o12) [R=1.45980271270037]
```

La resistència tèrmica del recipient és  $R = 1.46 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ .

Quan fiquem cafè amb llet dins del recipient, si la temperatura que té és diferent de la temperatura dels envoltants, es produeix un intercanvi d'energia en forma de calor entre el sistema i els envoltants. En principi, aquest intercanvi es produiria per conducció, convecció i radiació, però ací només considerarem l'intercanvi d'energia per conducció. Aquest mecanisme d'intercanvi energètic ve descrit per la llei de Fourier

$$I = \frac{\Delta T}{R} \quad (2.50)$$

on  $\Delta T$  és la diferència de temperatura entre el sistema i els envoltants.

Considerem primer el cas on, després de vessar el cafè amb llet al recipient, fem el recipient en un bany tèrmic a  $20\text{ }^\circ\text{C}$ . En aquest cas la temperatura dels envoltants és  $20\text{ }^\circ\text{C}$  i és constant (es tracta d'un bany tèrmic). Per altra banda, sabem que la temperatura *inicial* del cafè amb llet és de  $60\text{ }^\circ\text{C}$  i que es produeix un intercanvi d'energia per conducció perquè les temperatures de sistema i envoltants no són iguals. El ritme d'això intercanvi ve donat, com hem indicat, per la llei de Fourier. Suposem un temps elemental  $dt$ . En aixe temps, l'intercanvi d'energia en forma de calor  $dQ$  serà<sup>5</sup>

$$dQ = I dt = -\frac{T_s - T_e}{R} dt$$

on  $T_s$  i  $T_e$  són les temperatures de sistema i envoltants, respectivament. El signe  $-$  indica, segons el criteri establert, que el sistema dona energia als envoltants si  $T_s > T_e$  i en rep si  $T_s < T_e$ . Quan el sistema intercanvia energia en forma de calor pel mecanisme de conducció, es produeix una variació de la seua temperatura segons l'equació

$$Q = C \Delta T_s \quad (2.37)$$

on  $C$  és la capacitat calorífica i  $\Delta T_s$  és la variació de temperatura del sistema com a resultat de l'intercanvi d'energia. En el cas considerat, un intercanvi d'energia  $dQ = C dT_s$ , es tradueix en una variació elemental de temperatura  $dT_s = T_s(t + dt) - T_s(t)$ , on es posa de manifest que la temperatura del sistema varia amb el temps (es refreda). Igualant les dos expressions de la variació de calor tenim

$$-\frac{T_s - T_e}{R} dt = C dT_s$$

que podem escriure com

$$\frac{dT_s}{T_s - T_e} = -\frac{dt}{RC}$$

Aquesta equació és una *equació diferencial* de primer ordre. Ens dona l'evolució del sistema a partir de la *condició inicial*  $T_s = 273.15 + 60\text{ K}$  a  $t = 0$ . Per a resoldre aquesta equació fem ús del programa wxMaxima. Primer reescriuim l'equació per a posar la derivada de  $T_s$  en funció de  $t$

$$\frac{dT_s}{dt} = -\frac{T_s - T_e}{RC}$$

que en wxMaxima ho fem com

```
(%i13) remvalue(R);
(%o13) [R]
(%i14) eqd:diff(Ts(t),t)=- (Ts(t)-Te)/(R*C);
```

<sup>5</sup>Utilitzem la notació  $dQ$  en comptes de la usual de les variacions elementals  $dQ$  perquè l'intercanvi d'energia en forma de calor no és una diferencial exacta.

Primer hem eliminat la variable que teníem per a millorar la claredat (encara que no és imprescindible). Després hem escrit l'equació per a veure si hi havia cap error. L'equació diferencial ens dóna l'evolució de la temperatura  $T_s$  del sistema a partir de la temperatura inicial  $T_s(t = 0) = T_i$ . Introduïm aquesta condició en el programa wxMaxima i li demanem que resolga l'equació mitjançant la instrucció `desolve`.

```
(%i15) atvalue(Ts(t),t=0,Ti);
(%o15) Ti
(%i16) desolve([eqd],[Ts(t)]);
(%o16) Ts(t)=(Ti-Te)*%e^(-t/(C*R))+Te
```

La solució de l'equació diferencial és

$$T_s(t) = (T_i - T_e)e^{-t/RC} + T_e$$

Tenim la funció que ens dóna l'evolució de la temperatura del sistema amb el temps, però el que volem conèixer és el valor del temps en què la temperatura del sistema baixa de 60 °Ca 40 °C. Per això primer substituïm la temperatura final a l'equació obtinguda

```
(%i17) subst(Ts(t)=Tf,%o4);
(%o17) Tf=(Ti-Te)*%e^(-t/(C*R))+Te
```

i després resollem per al temps

```
(%i18) solve(%o17,t);
(%o18) [t=log((Te/(Te-Tf))-Ti/(Te-Tf))*C*R]
(%i19) factor(%);
(%o19) [t=log((Ti-Te)/(Tf-Te))*C*R]
```

és a dir

$$t = RC \ln \left( \frac{T_i - T_e}{T_f - T_e} \right)$$

Observem en l'equació que l'argument del logaritme ha de ser positiu. Això vol dir que, si la temperatura inicial és major que la temperatura dels envoltants, la temperatura final  $T_f$  ha de ser major o igual que la temperatura externa  $T_e$  (el sistema es refreda). En canvi, si la temperatura inicial fóra menor que la temperatura externa, la temperatura final seria menor o igual que la temperatura dels envoltants (el sistema es calfaria).

Ara ja podem fer l'estimació de temps per als diferents casos. Per a una temperatura (constant) dels envoltants  $T_e = 20 + 273.15$  K

```
(%i20) subst([C=1070,R=1.46,Tf=273.15+40,Te=273.15+20,Ti=273.15+60],%o19),numer;  
(%o20) [t=1082.834525470747]
```

la temperatura estimada és de  $t = 1082$  s (o 18 minuts aproximadament).

Si la temperatura dels envoltants és de  $-5$  °C

```
(%i21) subst([C=1070,R=1.46,Ts=273.15+40,Te=273.15-5,Ti=273.15+60],%o19),numer;  
(%o21) [t=574.4596515117707]
```

el temps és  $t = 574$  s (aproximadament 9 minuts i mig).

Finalment, si la temperatura (constant) dels envoltants és de  $35$  °C

```
(%i22) subst([C=1070,R=1.46,Ts=273.15+40,Te=273.15+35,Ti=273.15+60],%o19),numer;  
(%o22) [t=2514.263906804551]
```

el temps és  $t = 2514$  s (aproximadament 42 minuts).

Observem finalment que els resultats obtinguts ens resulten lògics. Com més baixa és la temperatura dels envoltants, menys temps triga el sistema en refredar-se fins els  $40$  °C.