

## VREME ZADRŽAVANJA I GRUPNO KAŠNENJE U METAMATERIJALIMA SA NEGATIVNIM INDEKSOM PRELAMANJA

Igor Ilić<sup>1</sup>, Petra Beličev<sup>1</sup>, Vitimir Milanović<sup>2</sup> i Jelena Radovanović<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratorija za Atomsku Fiziku, Institut za Nuklearne Nauke Vinča, Beograd

<sup>2</sup>Elektrotehnički fakultet, Bulevar kralja Aleksandra 73, Beograd

[igi.ilic@gmail.com](mailto:igi.ilic@gmail.com), [peki\\_59@yahoo.com](mailto:peki_59@yahoo.com)

**Sadržaj** - U radu su analizirani vremenski parametri koji opisuju prostiranje elektromagnetnih talasa kroz barijeru načinjenu od disperzivnog i apsorbujućeg materijala. Cilj je bilo izvođenje upštene relacija koja opisuje vezu između vremena zadržavanja i grupnog kašnjenja koja bi bila validna za sve tipove materijale, uključujući i metamaterijale sa negativnim indeksom prelamanja. Numerički proračun sproveden je za različite kombinacije materijala u barijeri i okolnom talasovodu, a prikazani rezultati su u potpunosti saglasni sa teorijskim predviđanjima.

### 1. UVOD

U skorije vreme prvi put su proizvedeni veštački materijali, nazvani negative index metamaterials (NIMs), koji imaju indeks prelamanja manji od nule ( $n_R < 0$ ) u određenom opsegu frekvencija. Ova osobina se postiže na dva različita načina. Prvi opisuje jednostruko negativne NIMs (SN-NIMs) koji imaju negativnu permitivnost ili negativnu permeabilnost i koji zadovoljavaju uslov  $\varepsilon_R \mu_I + \mu_R \varepsilon_I < 0$ . Drugi način opisuje svojstva dvostruko negativnih NIMs (DN-NIMs) kod kojih realni delovi permitivnosti i permeabilnosti, istovremeno, imaju negativnu vrednost ( $\varepsilon_R < 0, \mu_R < 0$ ).

Brojni eksperimenti [1] pokazuju da elektromagnetski impulsi, krećući se kroz barijeru napravljenu od materijala sa pozitivnim indeksom prelamanja unutar talasovoda, mogu putovati brzinama većim od brzine svetlosti  $c$  ili, čak, imati negativne grupne brzine u oblastima anomalne disperzije ( $\partial n / \partial \omega < 0$ ). Skorašnji eksperimenti i numerička proračunavanja pokazuju da je ovaj fenomen, takodje, jedna od bitnih karakteristika NIMs [2]. Ovo znači da će se pik transmitovanog talasnog paketa pojaviti pre nego pik upadnog talasnog paketa. Ove negativne brzine ne ugrožavaju kauzalnost, usled činjenice da je brzina prostiranja energije kroz medijum pozitivna i manja od  $c$ . Zbog ovoga je potrebno uvesti novu, odgovarajuću vremensku skalu na osnovu koje bi se opisivalo tunelovanje EM talasa. Postoje dve definicije vremena tunelovanja EM talasa za koje se smatra da su najprikladnije, a to su vreme zadržavanja (dwell time) i grupno kašnjenje (group delay) [3]. Dugo se diskutovalo o vezi između ova dva vremena, sve dok Winful nije predložio relaciju koja opisuje grupno kašnjenje kao zbir vremena zadržavanja i člana zvanog vreme samointerferencije, koje predstavlja vreme koje talasni paket provede interferirajući sa reflektovanim talasom ispred barijere. Ovo vreme je različito od nule jedino ako je okolna sredina disperzivna. Međutim, prethodna relacija je validna samo za barijeru napravljenu

od nemagnetskog materijala ( $\mu_r = 1$ ) sa pozitivnim indeksom prelamanja. Cilj ovog rada jeste da se izvede uopštenija formula koja opisuje vezu između vremena zadržavanja i grupnog kašnjenja, koja bi bila važeća za sve materijale, uključujući i NIM. Kao specijalni slučaj, razmatran je i medijum napravljen od nemagnetskog materijala bez gubitaka, a izvršeno je upoređivanje dobijene relacije za vreme zadržavanja i grupno kašnjenje sa izrazom koji je deobio Winful. Izneseni su numerički rezultati za različite DN-NIM i neke specijalne slučajeve.

### 2. TEORIJSKA RAZMATRANJA

Za fizički model u ovom radu, uzeta je barijera napravljena od disperzivnog i apsorbujućeg materijala, smeštena unutar talasovoda sa jezgrom napravljenim od materijala pozitivnog indeksa prelamanja. Takođe se smatra da je barijera homogena, tj. da je njen indeks prelamanja konstantan duž celog materijala.

Relativna dielektrična konstanta barijere  $\varepsilon_s$ , i njena magnetska permeabilnost  $\mu_s$ , mogu se predstaviti sledećim izrazima [4]:

$$\varepsilon_s(\omega) = \varepsilon_\infty \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_r^2 + i\omega\Gamma_e} \right), \quad (1)$$

$$\mu_s(\omega) = 1 - \frac{F\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\Gamma_m}, \quad (2)$$

Ovde je  $\varepsilon_\infty$  pozadinska dielektrična konstanta,  $\omega_r$  predstavlja rezonantnu učestanost električnih dipola,  $\omega_p$  je plazma učestanost – mera jačine interakcije između oscilatora i električnog polja,  $\Gamma_e$  i  $\Gamma_m$  predstavljaju frekvencije prigušenja za električno i magnetno polje,  $F$  je mera jačine interakcije između oscilatora i magnetnog polja, dok je  $\omega_0$  rezonantna učestanost magnetskih dipola. Ovako opisan medijum naziva se Lorentz-ov tip medijuma. Ovaj model nije validan u slučajevima kada  $\omega \rightarrow 0$  ili  $\omega \rightarrow \infty$ , jer se u tom slučaju dobijaju netačni izrazi za relativnu permeabilnost [4].

Vreme zadržavanja je vreme koje talasni paket provede u određenom delu prostora, a definiše se kao [5]:

$$\tau_d = \frac{W}{P_{in}}, \quad (3)$$

gde  $W$  predstavlja elektromagnetsku energiju unutar barijere, a  $P_{in}$  srednju upadnu snagu. Za disperzivnu sredinu, EM gustina energije, koja predstavlja sumu električne  $w_e$  i magnetske  $w_m$  gustine energije, data je izrazom [6]:

$$w = w_e + w_m = \frac{\varepsilon_0}{4} \left( \varepsilon_R + 2\omega \frac{\varepsilon_I}{\Gamma_e} \right) |E|^2 + \frac{\mu_0}{4} \left( \mu_R + 2\omega \frac{\mu_I}{\Gamma_m} \right) |H|^2, \quad (4)$$

u smislu kompleksne predstave vektora električnog  $\vec{E}$  i magnetnog polja  $\vec{H}$ . U ovom izrazu,  $\varepsilon_R, \mu_R$  predstavljaju realne delove, a  $\varepsilon_I, \mu_I$  imaginarne delove frekvencijski zavisne relativne permitivnosti i permeabilnosti disperzivne sredine.

Pretpostavljajući propagaciju samo TE modova kroz barijeru i zamenjujući Helmholtz-ovu jednačinu za TE modove:

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} - \frac{1}{\mu_s} \frac{d\mu_s}{dx} \frac{dE_y}{dx} + (k_0^2 \varepsilon_s \mu_s - \beta^2) E_y = 0, \quad (5)$$

u izraz za energiju, dobijamo konačan izraz za vreme zadržavanja:

$$\tau_d = \frac{\tau_g + \frac{1}{\gamma_0} \frac{d\gamma_0}{d\omega} \text{Im}(R)}{K_3} - \frac{\mu_{eff}}{\omega |\mu_s|^2} \text{Im}(R) + \frac{K_2 + 2k_0^2 \int_0^L \text{Im}(\varepsilon_s \mu_s) \text{Im}\left(\frac{dE_y^*}{d\omega} E_y\right) dx}{\frac{2\gamma_0 c^2 |E_0|^2}{\omega(\varepsilon\mu)_{eff}} \left(\frac{1}{k_0^2} \frac{dk_0^2}{d\omega} \text{Re}(\gamma_s^2) + \frac{d \text{Re}(\gamma_s^2)}{d\omega}\right)} - \frac{\mu_{eff}}{2\omega\gamma_0 |\mu_s|^2 |E_0|^2} K_1, \quad (6)$$

gde je:

$$K_1 = \text{Re} \left[ (\mu_s - \mu_b) \left[ E_y^* \left( \frac{E_y}{\mu} \right) \right]_{x=0} \right] + \text{Re} \left[ (\mu_b - \mu_s) \left[ E_y^* \left( \frac{E_y}{\mu} \right) \right]_{x=L} \right], \quad (7)$$

$$K_2 = \text{Re} \left\{ (\mu_s - \mu_b) \frac{E_y}{\mu} \frac{dE_y^*}{d\omega} - \frac{d}{d\omega} \left[ (\mu_s - \mu_b) \frac{E_y}{\mu} \right] E_y^* \right\}_{x=0} + \text{Re} \left\{ (\mu_b - \mu_s) \frac{E_y}{\mu} \frac{dE_y^*}{d\omega} - \frac{d}{d\omega} \left[ (\mu_b - \mu_s) \frac{E_y}{\mu} \right] E_y^* \right\}_{x=L}, \quad (8)$$

$$K_3 = \frac{1}{(\varepsilon\mu)_{eff}} \left\{ 2 \text{Re}(\varepsilon_s \mu_s - \varepsilon_b \mu_b \sin^2(\theta)) + \omega \frac{d}{d\omega} \left[ \text{Re}(\varepsilon_s \mu_s - \varepsilon_b \mu_b \sin^2(\theta)) \right] \right\}, \quad (9)$$

Sada je potrebno izvesti relaciju za vreme zadržavanja za neke posebne slučajeve, u cilju upoređivanja i proveravanja tačnosti iste sa već postojećim modelima. Winful [7] je nagovestio da se u sredinama bez gubitaka ( $\Gamma_e = \Gamma_m = 0$ ), grupno kašnjenje može opisati kao suma vremena zadržavanja i veličine nazvane vreme samointerferencije. Ova relacija važi samo za nemagnetske materijale sa normalnim upadnim uglom, tj.  $\mu_s = 1$  i  $\theta = 0$ . Ubacivanjem ovih uslova u prethodni izraz, dobija se:

$$\tau_d = \frac{\tau_g + \frac{1}{\gamma_0} \frac{d\gamma_0}{d\omega} \text{Im}(R)}{\varepsilon_\infty} - \frac{\text{Im}(R)}{\omega} \quad (10)$$

Očigledno, da bi se dobila Winful-ova relacija, pozadinska dielektrična konstanta mora biti jednaka 1, tj.  $\varepsilon_\infty = 1$ . Kada se ovaj uslov ubaci u prethodnu jednačinu, dobija se sledeća veza između vremena zadržavanja,

grupnog kašnjenja i vremena samointerferencije:

$$\tau_g = \tau_d + \tau_i, \quad (11)$$

gde  $\tau_i = \frac{\text{Im}(R)}{\omega} - \frac{1}{\gamma_0} \frac{d\gamma_0}{d\omega} \text{Im}(R)$  predstavlja vreme samo-

interferencije. Ono opisuje efekat disperzije okolne sredine, analogno kao i u slučaju kvantnog tunelovanja [8]. Međutim, u slučaju nedisperzivne okolne sredine,  $\tau_i$  je jednako nuli. Ovo sledi iz činjenice da je, u ovom modelu, širina talasovoda u  $x$  pravcu beskonačna, odakle sledi da je  $\gamma_0^2 = k_0^2 \varepsilon_b \mu_b - \beta^2 = (\omega^2 / c^2) \varepsilon_b \mu_b \cos^2(\theta)$ . Stoga se  $\tau_i$  u izrazu (11) anulira. Ali ako je širina talasovoda po  $x$  pravcu konačna [7],  $\beta$  dobija diskretne vrednosti kvantovane u formi  $m\pi/a$ , gde je  $m$  ceo broj,  $a$  širina talasovoda, pa je vreme samointerferencije uvek veće od nule.

### 3. REZULTATI I DISKUSIJA

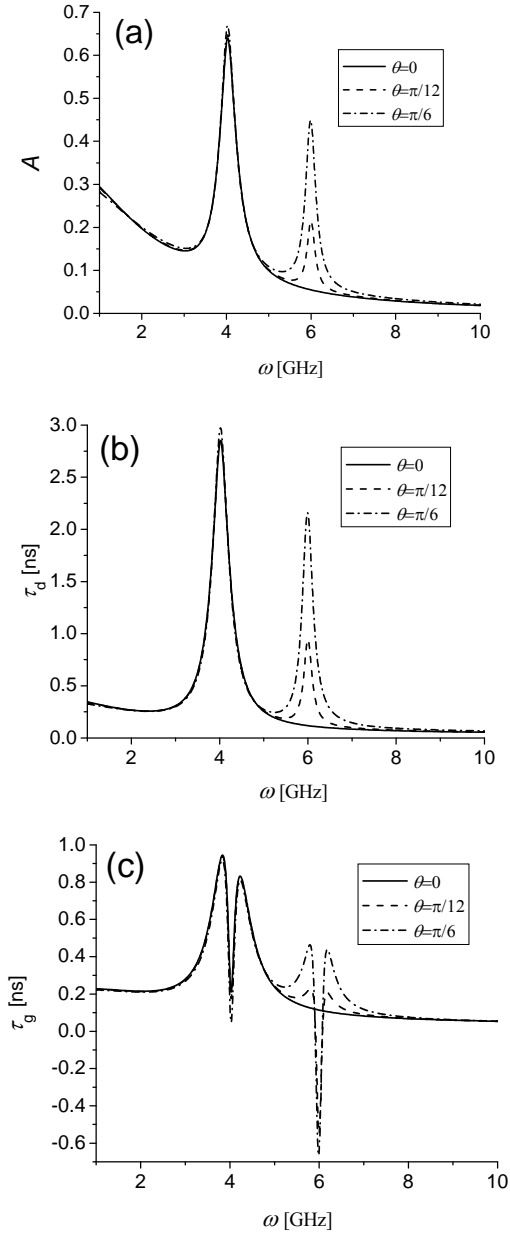
Numerička izračunavanja će biti urađena za sledeće slučajeve: barijeru napravljenu od metamaterijala koji pokazuje "levoruke" osobine u GHz opsegu sa nedisperzivnim talasovodom, kao i u THz opsegu sa disperzivnim talasovodom. Takođe, posmatran je i neapsorptivni metamaterijal sa relativnom permeabilnošću  $\mu_s$  jednakom 1.

U prvom slučaju, barijera se nalazi u vazduhu ( $\varepsilon_b = \mu_b = 1$ ), i ima sledeće parametre [6]:  $\omega_p = 10$  GHz,  $\omega_r = 0$ ,  $\omega_0 = 4$  GHz,  $F=1.25$ ,  $\varepsilon_\infty = 1$ ,  $\Gamma_e = 0.05\omega_p$  i  $\Gamma_m = 0.05\omega_0$ . Ovakva barijera je "levoruka" za  $3.52\text{GHz} \leq \omega \leq 6.57\text{GHz}$ . Na Sl. 1 su prikazane zavisnosti vremena zadržavanja, grupnog kašnjenja i apsorpcije od frekvencije upadnog zračenja za tri različita upadna ugla. Upadni uglovi veći od  $\pi/6$  dovode do fenomena zvanog Goos-Hänchen-ov pomeraj [9], pa neće biti razmatrani u ovom radu. Očigledno je da apsorpcija i vreme zadržavanja imaju slične profile, za razliku od grupnog kašnjenja. I vreme zadržavanja i apsorpcija imaju lokalne maksimume na graničnim frekvencijama opsega u kom je barijera "levoruka". S druge strane, grupno kašnjenje ima lokalne minimume na ovim frekvencijama, i čak postaje negativno u nekim slučajevima. Za  $\theta = 0$ , pik na frekvenciji  $\omega = 6\text{GHz}$  nestaje za sve tri veličine, dok pik na frekvenciji  $\omega_0$  ostaje. Sl. 2 pokazuje vreme zadržavanja i apsorpciju u funkciji dužine barijere za dve različite frekvencije upadnog zračenja. Očigledno je da ove dve veličine saturiraju sa povećanjem  $L$ . Ovaj fenomen, nazvan Hartman-ov efekat [1,10] je objašnjen preko saturacije elektromagnetne energije u barijeri sa povećanjem dužine barijere [7]. Kako je vreme zadržavanja proporcionalno ovoj energiji, ono će, takođe, saturirati sa povećanjem  $L$ .

Sledeći slučaj se bavi propagacijom TE modova kroz barijeru napravljenu od materijala koji je "levoruk" u optičkom opsegu i okružen disperzivnim talasovodom. Parametri ovog materijala su [11]:  $\omega_p = 2700$  THz,  $\omega_r = 0$ ,  $\omega_0 = 2300$  THz,  $F=0.052$ ,  $\varepsilon_\infty = 3.1$ ,  $\Gamma_e = 35$  THz,  $\Gamma_m = 35$  THz and  $L=1\mu\text{m}$ . Jezgro talasovoda je napravljeno od  $\text{SiO}_2$ , koji je, takođe, transparentan u

ovom opsegu. Njegova relativna permitivnost je data Sellmeier-ovom formulom [12]:

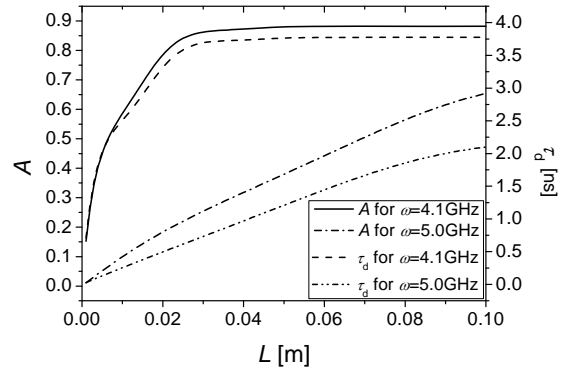
$$\varepsilon_b = 1 + \frac{0.6961663\lambda^2}{\lambda^2 - 0.0046791} + \frac{0.4079426\lambda^2}{\lambda^2 - 0.0135121} + \frac{0.8974794\lambda^2}{\lambda^2 - 97.9340025}, \quad (12)$$



Sl. 1: Zavisnost apsorpcije (a), vremena zadržavanja (b) i grupnog kašnjenja (c) od frekvencije upadnog zračenja za tri različita upadna ugla ( $\theta=0, \pi/12, \pi/6$ )

gde je  $\lambda$  talasna dužina upadnog zračenja u vakuumu izražena u mikrometrima, a relativna permeabilnost je jednaka 1. Barijera je dvostruko negativna za opseg talasnih dužina između 799nm i 818nm. Sa Sl. 3a se vidi da vreme zadržavanja i apsorpcija imaju sličnu zavisnost od  $\omega$  u ovom opsegu. Zavisnosti grupnog kašnjenja i realnog dela indeksa prelamanja od  $\omega$ , prikazane su na Sl.

3b. Sa slike je očigledno da grupno kašnjenje ima negativnu vrednost u opsegu u kom je i indeks prelamanja materijala negativan, a pozitivnu izvan istog. Odatle sledi da su i grupna brzina i fazna brzina negativne. Ovo znači da pik izlaznog impulsa ima negativno kašnjenje takvo da će se on pojaviti pre pika ulaznog impulsa. Takođe je očigledno da grupno kašnjenje menja svoj znak iz pozitivnog u negativan na frekvenciji  $\omega_{gd1}$ , koja je viša od frekvencije  $\omega_{n1}$ , pri kojoj realni deo indeksa prelamanja menja svoj znak iz pozitivnog u negativan. Slično, grupno kašnjenje menja svoj znak iz negativnog u pozitivan na frekvenciji  $\omega_{gd2}$ , koja je niža od frekvencije  $\omega_{n2}$ , pri kojoj realni deo indeksa prelamanja postaje ponovo pozitivan. Ovo dovodi do zaključka da u opsegu frekvencija ( $\omega_{n1}, \omega_{gd1}$ ) i ( $\omega_{gd2}, \omega_{n2}$ ) grupna brzina ima pozitivnu vrednost, dok fazna brzina ostaje negativna, tj. u ovim oblastima postoji propagacija talasa unazad [1,9,10]. U ostalim oblastima obe brzine, i grupna i fazna, imaju pozitivnu vrednost.

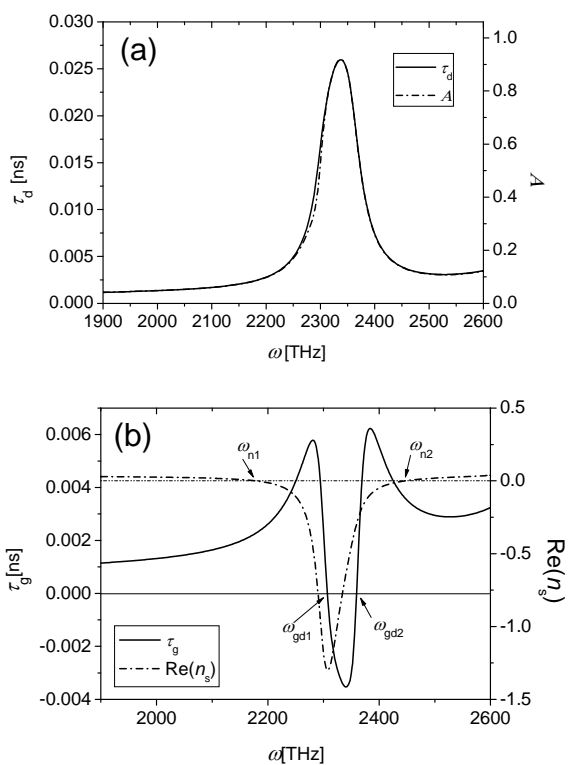


Sl. 2: Zavisnost vremena zadržavanja i apsorpcije od dužine barijera za dve različite frekvencije upadnog zračenja za koje je barijera "levoruka" ( $\omega=4.1\text{GHz}$  and  $\omega=5\text{GHz}$ )

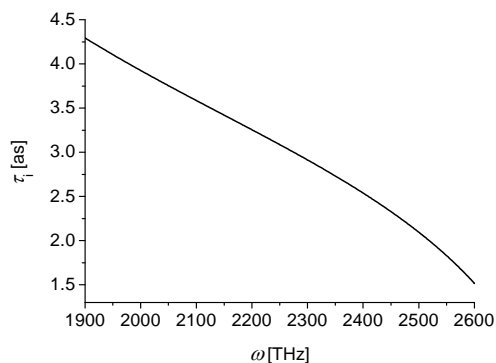
U poslednjem slučaju se posmatra barijera od nemagnetskog ( $\mu_s = 1$ ) metamaterijala, u kojem nema gubitaka ( $\Gamma_e = \Gamma_m = 0$ ). Upadni talas i parametri barijera su isti kao u prethodnom slučaju, izuzev pozadinske dielektrične konstante, koja je u ovom slučaju jednaka 1. Barijera se takođe nalazi unutar disperzivnog talasovoda jezgra napravljenog od  $\text{SiO}_2$ . Kao što je Winful napomenuo, u ovom slučaju će doći do pojave novog, tzv. vremena samointerferencije. Njegova zavisnost od  $\omega$  je predstavljena na Sl. 4. U poređenju sa vremenom zadržavanja ovo vreme je relativno malo ( $\tau_i \sim 10^{-3} \tau_d$ ).

#### 4. ZAKLJUČAK

U ovom radu je izvedena uopštenija relacija koja opisuje vezu između vremena zadržavanja i grupnog kašnjenja, a koja je validna za sve vrste materijala, uključujući i NIM. Kao model, korišćena je barijera napravljena od DN-NIM smeštena unutar talasovoda sa pozitivnim indeksom prelamanja. U slučajevima kada je barijera napravljena od "levorukih" materijala i okružena vazduhom, pokazano je da vreme zadržavanja i apsorpcija imaju slične zavisnosti od frekvencije upadnog zračenja. S druge strane,



Sl. 3: Zavisnost apsorpcije, vremena zadržavanja (a), grupnog kašnjenja i realnog dela indeksa prelamanja (b) od frekvencije upadnog zračenja za barijeru koja je "levoruka" u vidljivom delu optičkog spektra



Sl. 4: Zavisnost vremena samointerferencije od frekvencije upadnog zračenja

grupno kašnjenje može na nekim frekvencijama biti negativno. Rezultati su pokazali da povećavanje dužine barijere dovodi do saturacije vremena zadržavanja i apsorpcije (Hartman-ov efekat). U THz području za disperzivan talasovod, postoje određeni opsezi frekvencija u kojima je grupna brzina pozitivna, dok fazna brzina ima negativnu vrednost, tj. u kojima će se izlazni impuls pojaviti pre nego ulazni. Na kraju, korišćen je model u kom je barijera smeštena unutar disperzivnog talasovoda, a napravljena od nemagnetskog metamaterijala bez gubitaka, pozadinske dielektrične konstante jednake 1, pri čemu je pokazano postojanje vremena samointerferencije.

## 5. REFERENCE

- [1] A. Enders, G. Nimtz, "Evanescent-mode propagation and quantum tunneling", *Phys. Rev. E*, vol. 48, pp. 632-634, 1993.
- [2] J. Woodley, M. Mojahedi, "Negative group velocity and group delay in left-handed media", *Phys. Rev. E*, vol. 70, pp. 046603, 2004.
- [3] E. H. Hauge, J. A. Støvneng, "Tunneling times: A critical review", *Rev. Mod. Phys.*, vol. 61, pp. 917-936, 1989.
- [4] A. D. Boardman, K. Marinov, "Electromagnetic energy in a dispersive metamaterial", *Phys. Rev. B*, vol. 73, pp. 165110, 2006.
- [5] H. G. Winful, "Group delay, stored energy and tunneling of evanescent waves", *Phys. Rev. B*, vol. 68, pp. 016615, 2003.
- [6] R. Ruppin, "Electromagnetic energy density in a dispersive and absorptive material", *Phys. Rev. A*, vol. 299, pp. 309-312, 2002.
- [7] H. G. Winful, "Delay Time and the Hartman Effect in Quantum Tunneling", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 91, pp. 260401, 2003.
- [8] G. Isić, V. Milanović, J. Radovanović, Z. Ikonić, D. Indin, P. Harrison, "Time delay in thin slabs with self-focusing Kerr-type nonlinearity", *Phys. Rev. A*, vol. 77, pp. 033821, 2008.
- [9] C.-F. Li, "Negative lateral shift of a light beam transmitted through a dielectric slab and interaction of boundary effects", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 91, pp. 133903, 2003.
- [10] T. E. Hartman, "Tunneling of a wave packet", *J. of Appl. Phys.*, vol. 33, pp. 3427, 1962.
- [11] U. K. Chettiar, A. V. Kildishev, H.-K. Yuan, W. Cai, S. Xiao, V. P. Drachev, V. M. Shalaev, "Dual-band negative index metamaterial: Double negative at 813nm and single-negative at 772nm", *Opt. Lett.*, vol. 32, pp. 1671-1673, 2007.
- [12] I. H. Malitson, "Interspecimen Comparison of the Refractive Index of Fused Silica", *JOSA*, vol. 55, pp. 1205, 1965.

Autori se zahvaljuju Ministarstvu za nauku Republike Srbije na finansijskoj podršci

**Abstract**-In this paper we have analyzed time-related properties of propagation of electromagnetic waves through a barrier made of dispersive and absorptive material. The goal was to derive a more general expression that describes the correlation between the dwell time and the group delay, valid for all types of materials, including negative index metamaterials. Numerical calculations were performed for various combinations of barrier materials and surrounding waveguide materials, and the presented results are in complete accordance with theoretical predictions.

## DWELL TIME AND GROUP DELAY IN NEGATIVE INDEX METAMATERIALS

Igor Ilić, Petra Beličev, Vitomir Milanović, Jelena Radovanović