

Sebastian BAUER, Göttingen & Lukas DONNER, Essen

Reflexionsanlässe für den Mathematikunterricht anhand einer Lernumgebung zum Thema SARS-CoV-2

Einleitung

Vohns (2018) hält fest, dass der Mathematikunterricht dort, wo schulmathematische Inhalte geeignet erscheinen, Phänomene öffentlichen Interesses zu durchdenken, eine materiell aufklärende Aufgabe hat, der er sich stellen muss. Die weltweite Corona-Pandemie ist zweifelsohne ein derartiges Phänomen, im Rahmen dessen exemplarisch „aktiv-rekonstruierend ein Stück sonst nicht hinterfragter Mathematik oder sonst nicht hinterfragter außermathematischer Realität wechselseitig mathematisch und sachkundlich aufgeklärt werden [können]“ (ebd., S. 217). Dies verlangt auf der einen Seite eine fachmathematisch adäquate Auseinandersetzung mit ausgewählten Aspekten der Pandemie, andererseits eine gesellschaftlich verantwortliche Arbeitsweise, die insbesondere durch das Bereitstellen von Reflexionsanlässen erfüllt werden kann. Skovsmose (1998) nennt vier Arten bildungswirksamer Reflexionen, wovon insbesondere das Zusammenspiel aus *modellorientierten Reflexionen* (Fragen wie: „Ist mein Modell adäquat?“ oder „Was sind die Grenzen des Modells?“) und *kontextorientierten Reflexionen* (Fragen wie: „Hat das Modell im Kontext Sinn?“ oder „Welche Rolle spielt das mathematische Modell für Argumentationen im Kontext?“) den Bogen spannen können zwischen der „sonst nicht hinterfragten Mathematik“ (ebd.) und dem gesellschaftlichen Mehrwert ebendieser. Dieser Beitrag berichtet über die Nutzung derartiger Reflexionsanlässe im Rahmen der Erprobung der Lernumgebung „Von Daten, Modellen und Prognosen – das geheime Vordringen der α -Variante“ (ausführlicher bei: Bauer et al., 2022).

Beschreibung der Lernumgebung

Im Fokus der Lernumgebung steht das Verständnis, wie mathematische Modelle zur Beschreibung und Bewältigung aktueller gesellschaftlicher Herausforderung eingesetzt werden, und welche Wirkung von ihnen ausgehen können. Hintergrund ist die Ausbreitung einer neuen Virusvariante α zu Beginn des Jahres 2021, die den bis dahin vorherrschenden sogenannten Wildtyp innerhalb weniger Wochen überflügelt. Die Ausbreitung des einen sowie gleichzeitige Eindämmung des anderen Virusstamms sorgt für die scheinbar paradoxe Situation, dass das Robert-Koch-Institut (RKI) trotz fallender bzw. stagnierender Fallzahlen Mitte März 2021 vor einem exponentiellen Anstieg der Neuinfektionen warnt. Sowohl das Abklingen der einen als auch das Wachstum der anderen Variante lassen sich mit Exponentialfunktionen – und somit auch für Schüler*innen der Sek II – authentisch beschreiben. Im

Rahmen des Unterrichtsversuchs wird zunächst versucht, die Neuinfektionen der ersten 9 Wochen des Jahres 2021 mittels Exponentialfunktionen zu modellieren, um im zweiten Schritt, ebenso wie die Expert*innen des RKI, eine auf den vorliegenden Daten begründbare Prognose der Neuinfektionen mit SARS-CoV-2 zu erstellen. Dabei findet sich eine reichhaltige Sammlung an Reflexionsanlässen, denen wir uns in diesem Beitrag widmen möchten.

Modellorientierte Reflexionsanlässe: Daten und Modelle

Häufig wird eine parametrisierte Klasse von Funktionen zur Modellierung einer bestimmten Sachsituation in Stellung gebracht und die zu nutzenden Parameterwerte aus gegebenen Daten bestimmt. Schulisch stimmen meist die Anzahl der Messwerte und der zu bestimmenden Parameter überein – das Problem wird zu einem eindeutig lösbareren Gleichungssystem. In der Praxis dagegen ist die Anzahl der Messwerte in der Regel deutlich höher als die Anzahl der zu bestimmenden Parameter, dafür sind die Messwerte allerdings mit Messfehlern behaftet. Dieses Problem bildet den Kern der ersten Hälfte der Lernumgebung. Der Reflexionsanlass wird dadurch provoziert, dass Schüler*innen basierend auf unterschiedlichen Datenpaaren eine eindeutige Funktionsvorschrift einer Exponentialfunktion bestimmen, um dann in der Sicherungsphase festzustellen, dass die jeweiligen Gruppenergebnisse sehr weit streuen. Dies geschieht durch einen stillen Impuls, indem alle von den Schüler*innen berechneten Funktionsgraphen der Exponentialfunktion der α -Variante (sowie analog des Wildtyps sowie der Gesamtzahl der Infizierten als Summe dieser beiden Werte) in demselben Diagramm übereinander gelegt werden. Dies eröffnet Raum für modellorientierte Reflexionen, weil erneut geklärt werden muss, wie man nun eine geeignete Funktionsvorschrift findet, oder ob gegebenenfalls die Exponentialfunktion gar nicht geeignet ist, die gegebenen Daten angemessen darzustellen. Die Schüler*innen erkennen, dass durch jede berechnete Lösung nur zwei Messwerte (möglicherweise sogar ‚Ausreißer‘) genau getroffen werden, alle anderen jedoch nur (zum Teil schlecht) angenähert werden. Das hat zur Folge, dass sie nach Alternativen zu ihrem Verfahren suchen. Vorschläge wie den Mittelwert aller möglichen Parameterkombinationen zu wählen zeugen davon, dass sich die Schüler*innen schrittweise davon lösen, exakte Übereinstimmung mit bestimmten Werten zu finden. Das Ziel dieses ersten Teils ist es, zu dem Schluss zu kommen, dass Parameter auch unabhängig vom Lösen eines eindeutig bestimmten Gleichungssystems gewählt werden können, sofern man sich auf ein festes mathematisches Modell (in diesem Fall die Exponentialfunktion) a priori einigt. Das Verfahren der Wahl ist dann die Minimierung eines geeigneten Fehlerfunktionalen. Zunächst wird die Klasse angehalten,

solche vorzuschlagen, anschließend werden sie auf Plausibilität hin untersucht. Dabei wird das gängige Verfahren der Methode des kleinsten Quadrats erarbeitet. Damit wird das mathematische Wissen generiert, das es ermöglicht, in der zweiten Phase authentische Prognosen zu erstellen und diese mit dem real stattgefundenen Infektionsgeschehen zu vergleichen.

Kontextorientierte Reflexionsanlässe: Prognose

Im zweiten Teil stehen kontextorientierte Reflexionen im Zentrum des Unterrichts. Denn nachdem mithilfe der Ergebnisse des ersten Teils eine eigene (Klassen-)Prognose erstellt werden kann, welche in der Regel sehr nah an der Prognose des RKI liegt, wird diese nun mit dem realen Infektionsgeschehen verglichen. Dabei wird festgestellt, dass die tatsächlichen Infektionszahlen bei weitem unter den Prognosen (der Klasse bzw. auch des RKI) liegen. Mögliche Gründe für das Nichteintreffen der Prognose, sowie der generelle Nutzen von Prognosen im Rahmen einer Pandemie werden im Plenum diskutiert, anschließend durch die Lektüre eines ZEIT-Artikels (Schieritz, 2021) vertieft und dessen Erörterungen mit der Klassendiskussion in Bezug gesetzt. All das thematisiert wesentlich, welche Rolle mathematische Modelle und Argumentationen im Rahmen der SARS-CoV-2 Pandemie spielen. Die Schüler*innen schlüpfen punktuell in die Rolle der mathematischen Expert*innen, die in der Lage sind, Empfehlungen basierend auf ihrer Prognose zu erstellen und im gleichen Atemzug das eigene Modell kritisch zu reflektieren. Durch den gegebenen realen Kontext und die eigenen Erfahrungen wird diese Diskussion lebendig, wie folgende, exemplarische Sequenz einer Erprobung zeigt: Auf die Anmerkung, dass Impfungen in unserem Modell nicht mit einbezogen wurden und dadurch falsche Zahlen entstanden sind, wird entgegnet, dass bis zu diesem Zeitpunkt (Mitte April 2021) zunächst nur einige wenige, besonders vulnerable Personen in Deutschland geimpft wurden. Da sich diese auch zu Beginn des Jahres 2021 sicherlich sehr vorsichtig verhalten haben, tragen sie nicht wesentlich zum Infektionsgeschehen bei. Man erkennt an diesem kurzen Ausschnitt, dass kontextorientierte Reflexionen vielfältig zum Vorschein treten. Es werden relevante Aspekte des Kontexts daraufhin überprüft, ob diese sich im Modell widerspiegeln. Gleichzeitig wird durch das Wissen, das aufgrund des lebensnahen Kontexts besteht, sofort ein Bezug zur individuell erlebten Realität des damaligen Infektionsgeschehens hergestellt.

Fazit

Lengnink et al. (2013) fordern, dass ein staatsbürgerlich erziehender Mathematikunterricht Kontexte aufzeigen muss, in denen Mathematik in gesellschaftlich-politische Situationen eingebunden ist und Lernende dabei auch

mit dem nötigen Grundwissen versorgt. Skovsmose (1998) nennt diese Tätigkeit des Ausgrabens jener Mathematik, welche sich unsichtbar in gesellschaftlichen Kontexten, Technologien sowie politischen Entscheidungen wiederfindet und dort eine bedeutende Rolle spielt, *mathematical archeology*. Diese Tätigkeit trägt wesentlich dazu bei, die Rolle der Mathematik in der Gesellschaft sichtbar zu machen und zur Mündigkeit der Schüler*innen beizutragen. Der erste Teil der beschriebenen Lernumgebung bietet neben zahlreichen Reflexionsanlässen auch das Ausgraben der mathematischen Fehlerrechnung und somit des Standardverfahrens zur Anpassung von Daten an Modelle aus dem gegebenen Kontext.

Neben dem Aufzeigen der Mathematik als leistungsfähiges Hilfsmittel in Anwendungsfeldern soll gleichzeitig den Lernenden eine kritische Distanzierung gegenüber mathematischen Hilfsmitteln ermöglicht und die im Anwendungsfall wirkenden Beschränkungen erleb- und diskutierbar gemacht werden, wie Lengnink et al. (2013) weiter fordern. Genau dies leistet der zweite Teil unseres Unterrichtsentwurfs. In ihm werden den Schüler*innen die Grenzen der Modellierung eines solch hochkomplexen Phänomens wie einer Pandemie deutlich; Grenzen, die auch für die Expert*innen des RKI gelten.

Unsere Lernumgebung zeigt das Potenzial aktueller gesellschaftlicher Herausforderungen und Gegebenheiten zur Schaffung vielfältiger Reflexionsanlässe im Mathematikunterricht. Die Reichweite, Aktualität und Adäquatheit der Ergebnisse, die in diesem Rahmen erfahrbar werden, können zu einem verschärften Blick bezüglich der Rolle der Mathematik für die Gesellschaft und die Individuen führen und dazu anleiten, mit geweitetem, fachlich geschärftem Blick durch die Medienberichterstattung der Pandemie zu gehen.

Literatur

- Bauer, S., Doktor, J. & Donner, L. (2022, accepted with minor revisions). Daten, Modelle und Prognosen – das verborgene Vordringen der α -Variante. In M. Besser et al. (Hrsg.), *ISTRON-Schriftenreihe*.
- Lengnink, K., Meyerhöfer, W. & Vohns, A. (2013). Mathematische Bildung als staatsbürgerliche Erziehung? *Der Mathematikunterricht* 59(4), 2–7.
- Schieritz, M. (2021). *Corona Inzidenzen - Rechnung mit vielen Unbekannten*. DIE ZEIT. <https://www.zeit.de/2021/20/corona-inzidenzen-rki-fallzahlen-rechnung-neuinfektionen-trend>.
- Skovsmose (1998). Linking Mathematics Education and Democracy: Citizenship, Mathematical Archeology, Mathemacy and Deliberative Interaction. *ZDM-Mathematics Education*, 30(6), 195–203.
- Vohns, A. (2018). Rechnen oder Rechnen lassen? Mathematik(unterricht) als Bürgerrecht und Bürgerpflicht. In G. Nickel et al. (Hrsg.), *Mathematik und Gesellschaft* (S. 203–219). Springer.