

Evelyn SCHIRMER, Mülheim a. d. R., Mike ALTIERI, Amberg & Alexander SCHÜLER-MEYER, Eindhoven

Reduktion der auf Übergeneralisierung basierenden Fehler durch konfliktinduzierende Videos

Bei der Bearbeitung von Rechenaufgaben zu Themen der Grundlagenmathematik zeigen Studierende häufig Fehlermuster, die als das Resultat von Übergeneralisierungsstrategien interpretiert werden können. Beispielsweise wird im Bereich der Algebra das Prinzip des „sequentiellen Abarbeitens“ (Malle, 1993, S. 175) häufig auf mathematische Ausdrücke angewendet, die diese Art der Umformung gar nicht erlauben. Strukturell kann man dieses sequentielle Abarbeiten als Linearisierung beschreiben (Malle, 1993, ebd.; De Bock et al., 2002, S. 313). Im Bereich der Differentialrechnung kann zum Beispiel die Übertragung des Schemas für die Summenregel auf die Bestimmung der Ableitung eines Produktes von Funktionen als Übergeneralisierung bezeichnet werden. Dabei wird die Ableitung eines Produktes von Funktionen als Produkt der Ableitungen der Faktoren gebildet statt die Produktregel zu verwenden. Die Eigenschaft der Linearität der Ableitung wird somit unzulässigerweise von der Summe auf das Produkt von Funktionen übertragen. Obwohl es bereits Erkenntnisse über die Problematik systematischer Fehlermuster und deren negative Auswirkungen auf die Bearbeitung weiterführender Aufgaben an Hochschulen gibt (Kersten, 2016; Altieri, 2016), fehlen bisher Strategien, diese Fehlermuster in der Lehrpraxis flächendeckend automatisiert zu detektieren und zu reduzieren. Solche Strategien sind jedoch notwendig, um große Lehrveranstaltungen an Hochschulen ressourcenschonend zu individualisieren.

Im hier präsentierten Projekt werden E-Assessments sowie interaktive Videos entwickelt, die eine Grundlage für die gesuchten Strategien bilden können. Letztere sollen nach der Detektion des beschriebenen Fehlermusters bei den Studierenden zu einem Verständnis der Unzulässigkeit der Linearisierungsstrategie beim Ableiten eines Produktes von Funktionen führen.

Häufigkeit von Übergeneralisierungen bei der Produktregel

Eine Erhebung über die Häufigkeit von fehlerhaften Lösungsansätzen basierend auf der oben genannten Übergeneralisierung wurde im Wintersemester 2019/2020 an der Hochschule Ruhr West (HRW) bei Studierenden der Studiengänge Energie- und Umwelttechnik (EUT) und Wirtschaftsingenieurwesen Energiesysteme (WingES) in der Veranstaltung Mathematik I durchgeführt. Dabei nahmen 115 Studierende an einem 35-minütigen Test teil, der unter anderem 4 Aufgaben aus der Differentialrechnung zur Bestimmung der

ersten Ableitung enthielt. Bei 2 der 4 Aufgaben (s. Abb. 1: Aufgabe 5.1(c), und 5.1(d)) war die Anwendung der Produktregel für das Auffinden der korrekten Lösung notwendig. Der gleiche Test wurde bei Studierenden des Studiengangs Geoinformatik und Landmanagement (GIL) an der Ostbayerischen Technischen Hochschule Amberg-Weiden (OTH-AW) durchgeführt.

Studiengang	EUT	WingES	GIL
N=115	63 (54,8%)	21 (18,3%)	31 (26,9%)

Tab. 1: Verteilung der Studierenden bezogen auf die Studiengänge

Die Studierenden wurden über die Testinhalte vorab nicht informiert und bearbeiteten die Testaufgaben daher unvorbereitet.

5. Differentialrechnung	
5.1 Bilden Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:	
a) $f(x) = 7x^2 - 5x + 2$ $f'(x) = 14x - 5$	b) $f(x) = (5x + 1) \cdot x^2$ $f'(x) = 5 \cdot 2x$
c) $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$ $f'(x) = 2x \cdot \cos(x)$	d) $f(x) = x \cdot e^x$ $f'(x) = e^x$

Abb. 1: Bearbeitung der Testaufgaben eines Studierenden der OTH-AW

Insgesamt 82 (71,3%) der 115 Studierenden haben das Abitur und 30 (26,1%) das Fach-Abitur. 103 (89,6%) Studierende haben die Aufgabe 5.1(a) richtig bearbeitet, sodass sich folgern lässt, dass mindestens 89,6% der Studierenden elementare Ableitungen zu Beginn des ersten Semesters bilden können. Nur 3 Studierende haben keine Aufgabe aus dem Bereich der Differentialrechnung bearbeitet.

Die Aufgabe 5.1(c) kann genutzt werden, um die Übergeneralisierungsstrategie „unzulässiges Linearisieren“ eindeutig festzustellen, da die Bestimmung der korrekten Lösung über die Produktregel unumgänglich ist und ein Ergebnis, das durch sequentielles Abarbeiten bzw. unzulässiges Linearisieren verursacht wird, in diesem Fall nicht durch einen anderen systematischen Fehler erklärt werden kann. Die Antworten der Studierenden wurden daher für die Aufgabe 5.1(c) in vier Kategorien eingeteilt (A: Anwendung der Produktregel; B: Anwendung der unzulässigen Übergeneralisierungsstrategie

„Linearisierung“; C: Sonstiges; D: keine Antwort). Die Ergebnisse sind in Tab. 2 aufgeführt und zeigen, dass das Linearisierungs-Fehlermuster die Hauptfehlerquelle darstellt.

	GIL (N=31)	EUT (N=63)	WingES (N=21)	Gesamt (N=115)
A: Produktregel	14 (45,2%)	16 (25,4%)	4 (19,0%)	34 (29,6%)
B: Linearisierung	10 (32,3%)	29 (46,0%)	14 (66,7%)	53 (46,1%)
C: sonstiges	4 (12,9%)	10 (15,9%)	3 (14,3%)	17 (14,8%)
D: keine Antwort	3 (9,7%)	8 (12,7%)	0 (0%)	11 (9,6%)

Tab. 2: Häufigkeiten der Lösungsansätze der Studierenden in Aufgabe 5.1(c)

Überlegungen zur Verteilung der Häufigkeiten

Das Konzept der Linearisierung ist als sequentielles Abarbeiten ein erfolgreiches Konzept des Alltags (Malle, 1993, S. 175). Es ist intuitiv eingängig und seine Übertragung kann daher als ein „additiver Mechanismus“ (Verschaffel & Vosniadou, 2004, S. 446) beschrieben werden. Zusätzlich kann die Unzulässigkeit der Anwendung dieses Konzepts in der Mathematik von Lernenden selbst kaum erkannt werden, da ein Mechanismus zur Überprüfung von Formeln und Theorien wie beispielsweise in der Physik durch Demonstrationsversuche fehlt. In solchen Fällen fehlt Lernenden nach Verschaffel und Vosniadou (2004, S. 449) die Erfahrung eines kognitiven Konflikts, also eines Widerspruchs zwischen einer neu wahrgenommenen Information und einem bereits bestehenden und bisher nicht in Frage stehenden Konzept, die das Bewusstsein für eine unzulässige Überschreitung des Anwendungsbereichs eines Schemas wecken kann.

Induzierung kognitiver Konflikte durch interaktive Videos

Um bei Studierenden ein Bewusstsein der Unzulässigkeit der Linearisierungsstrategie zu wecken, wird ein interaktives Video auf Basis von Instruktionsstrategien entwickelt, die einen kognitiven Konflikt induzieren. Ein erster Prototyp folgt der aus der Physikdidaktik stammenden Elicit-Confront-Resolve-Reflect-Instruktionssequenz (ECRR: vgl. Engelman, 2016). Dabei wird zunächst ein verinnerlichtes und fehlerhaftes Konzept der Lernenden offengelegt (Elicit). Im Anschluss wird ein Konflikt basierend auf diesem fehlerhaften Konzept mit bestehenden tragfähigen Konzepten des Lernenden evoziert (Confront), um in einer Auflösungsphase ein anschlussfähiges tragfähiges Konzept (wieder-)einzuführen (Resolve) und in einer anschließenden Reflektionsphase eine Konzeptänderung (Conceptual Change) anzusto-

ßen (Reflect). Im Fall des oben genannten Fehlermusters im Bereich der Differentialrechnung intendiert das so entwickelte Video die Ablehnung der Anwendung des Schemas der Summenregel auf Produkte von Funktionen. Das heißt, Lernende sollen die Unzulässigkeit des sequentiellen Abarbeitens im Falle von Produkten von Funktionen wahrnehmen und eine Rechtfertigung der Anwendung der Produktregel verinnerlichen. Im Video wird dazu ein Widerspruch präsentiert, indem eine Funktion, die sowohl elementar als auch mit Hilfe der Produktregel abgeleitet werden kann, zunächst gemäß der Linearisierungsstrategie falsch abgeleitet wird. Anschließend folgt ein Vergleich der so erhaltenen Lösung mit der auf elementaren, nicht in Frage stehenden Ableitungsregeln basierenden korrekten Lösung. Für die Wahrnehmung des Konflikts ist es entscheidend, dass sich die Studierenden auf die elementaren Ableitungsregeln verlassen und die Übergeneralisierungsstrategie somit zu diesen in Konkurrenz steht.

Durch interaktive, zwischen den Videosequenzen integrierte Übungsaufgaben werden Lernende zu einer aktiven Auseinandersetzung mit dem Inhalt des Videos angeregt. Das Video kann als Feedback innerhalb digitaler Übungsaufgaben integriert werden, indem es gezielt Studierenden angeboten wird, die das Linearisierungs-Fehlermuster zeigen. Dies kann automatisiert erfolgen. Folglich bildet es einen Baustein einer differenzierten und automatisierten Behandlung von Fehlermustern. In zukünftigen Studien soll die Wirksamkeit dieser Videos untersucht werden.

Literatur

- Altieri, M. (2016). *Erfolg in Mathematiklausuren ingenieurwissenschaftlicher Studiengänge unter besonderer Berücksichtigung prozeduralen Wissens*. Doktorarbeit, TU Dortmund.
- De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational studies in mathematics*, 50(3), 311-334.
- Engelman, J. (2016). *How College Students' Conceptions of Newton's Second and Third Laws Change Through Watching Interactive Video Vignettes: A Mixed Methods Study*. Doctoral dissertation, University of Cincinnati.
- Kersten, I. (2015). Kalkülfertigkeiten an der Universität: Mängel erkennen und Konzepte für die Förderung entwickeln. In Roth et al. (Hrsg.), *Übergänge konstruktiv gestalten* (S. 33-49). Wiesbaden: Springer.
- Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Wiesbaden: Vieweg.
- Verschaffel, L. & Vosniadou, S. (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. *Learning and instruction: the journal of the European Association for Research on Learning and Instruction EARLI*, 14(5), 445-451.