Johannes BECK, Würzburg, Stephan M. GÜNSTER, Würzburg,
Anna-Katharina ROOS, Würzburg, Hans-Stefan SILLER, Würzburg,
Hans-Georg WEIGAND, Würzburg, Alain KUZNIAK, Paris,
Assia NECHACHE, Paris & Laurent VIVIER, Paris

Grundvorstellungen zur Ableitung – eine empirische Untersuchung in Frankreich und Deutschland

Analysis ist ein zentrales Gebiet im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II und ist in Deutschland fest in den KMK-Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife verankert. Auch international ist die Analysis ein zentrales Themengebiet der Mathematik. Die Zugänge dazu sind allerdings unterschiedlich und hängen stark von den kulturellen Gegebenheiten ab. So hat sich in Deutschland auf Basis der Vorarbeiten von vom Hofe die Idee der Grundvorstellungen etabliert (vgl. Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016), im französischen Kulturkreis der sog. *Mathematical Working Space (MWS)*. In einem gemeinsamen Projekt der Universität Würzburg und der Universität Paris Diderot wird der Frage nachgegangen, ob und wie sich die beiden Theorien komplementär ergänzen.

Theoretischer Hintergrund

Mit der Theorie des *Mathematical Working Space* werden mathematische Handlungen von Lernenden als Ergebnis einer kombinierten Nutzung von mathematischen Zeichen, materiellen Werkzeugen und auf Eigenschaften und Sätzen basierenden Regeln verstanden. Diese Nutzung erfolgt in unterschiedlichen Ebenen – kognitiv und epistemologisch – durch unterschiedliche Herangehensweisen – semiotisch, instrumentell oder diskursiv (vgl. Abb. 1).

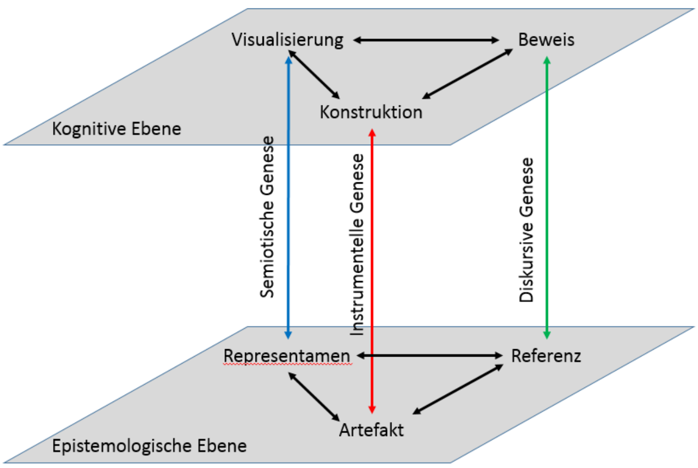

Abb. 1: Modell des *Mathematical Working Space*
(nach Kuzniak, Nechache & Drouhard, 2016)

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

Für eine Aufgabenanalyse eignen sich die jeweiligen vertikalen Ebenen, die sich aus Kombination unterschiedlicher Perspektiven ergeben. Im französischen Kulturkreis wird die Theorie des *Mathematical Working Space* insbesondere bei der Analyse mathematischer Handlungen eines Individuums eingesetzt, um u. a. Gründe für das (nicht) erfolgreiche Bearbeiten einer Aufgabe zu identifizieren.

Grundvorstellungen sind im *Mathematical Working Space*-Modell zunächst nicht enthalten, lassen sich aber gut im Rahmen der vertikalen Ebenen des MWS-Modells erklären, interpretieren und/oder einfügen. Grundvorstellungen bringen Sinn (vgl. Greefrath et al., 2016) in die Ebene der semiotischen Genese und lassen sich auf der Ebene der diskursiven Genese miteinander vergleichen, gegeneinander abwägen, sowie Vor- und Nachteile im Hinblick auf die Zielvorstellung abschätzen. Diese Grundvorstellung gilt es bis zum Ende der Schulzeit in unterschiedlichsten Facetten durch entsprechende Unterrichts- und Aufgabenkonstruktion zu entwickeln. Auch wenn der Kalkül im Vordergrund steht, evtl. sogar manche Grundvorstellungen überdeckt, werden die Grundvorstellungen dann wichtig, wenn Begriffe auf neue Situationen angewendet werden.

Untersuchungsinteresse

Im Rahmen des Projekts der beiden beteiligten Universitäten besteht zunächst primär das Ziel, eine gemeinsame Verständnisgrundlage für die jeweils im französischen und deutschen Kulturkreis vorherrschende Expertise aufzubauen. Dies wird anhand von Aufgaben aus dem Bereich der Differenzialrechnung für den Mathematikunterricht konkretisiert. Die Aufgaben werden sowohl unter der Perspektive des *Mathematical Working Space* als auch mit Hilfe von Grundvorstellungen analysiert. Ziel ist es, eine Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts über einen wissenschaftlichen Austausch von Experten zweier europäischer Bildungssysteme zu ermöglichen. Konkret ist in der ersten Phase der Zusammenarbeit, welche im Jahr 2019 gestartet wurde, die Untersuchung zweier konkrete Fragen Ziel der Zusammenarbeit:

- Wie lassen sich die GV zum Grenzwert, zum Ableitungsbegriff und zum Integralbegriff in den MWS integrieren?
- Welche prototypischen Aufgaben stellen jeweils die Vor- bzw. Nachteile einzelner GV heraus und wie lassen sich diese Aufgaben in den MWS einordnen?

Methodik und Forschungsfrage

Zunächst wurde passend zur jeweiligen Theorie je eine Aufgabe aus dem Bereich der Differenzialrechnung ausgewählt. Ziel dieser beiden Aufgaben ist (empirische) Indizien bzw. Hinweise zu finden, die auf das Vorhandensein von Grundvorstellungen bei Schülerinnen und Schülern sowohl in Deutschland als auch Frankreich rückschließen lassen. Die französische Aufgabe folgt der in Frankreich vorhandenen Tradition, dass zumindest die Angabe einer Funktion in der Aufgabenstellung explizit zu finden ist. Die Aufgabe aus Deutschland wurde auf Basis der Vorgaben der KMK-Bildungsstandards erstellt.

Beide Aufgaben wurde von insgesamt $n = 147$ Schülerinnen und Schülern der 11ten Jahrgangsstufe in Baden-Württemberg und Frankreich bearbeitet. Die Bearbeitungen werden aus Sicht der jeweiligen Theorie analysiert. Mit ausgewählten Schülerinnen und Schülern wurde zusätzlich ein leitfragengestütztes Interview geführt. Ziel dieses Vorgehens ist, Äußerungen zu sammeln, die Rückschlüsse auf Vorstellungen zulassen, und die Gründe für ihre mathematischen Handlungen zu finden. Die Auswertung der Daten erfolgte mit Methoden der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2015).

Anhand des in Abbildung 2 zu findenden Items g) der deutschen Aufgabenstellung möchten wir erste Ergebnisse unserer gemeinsamen Untersuchung darlegen.

g) Warum stellt der h-t-Graph in Abb. 2 keine realistische Situation dar? Welche Änderungen müssen vorgenommen werden, damit die Situation realistisch ist?

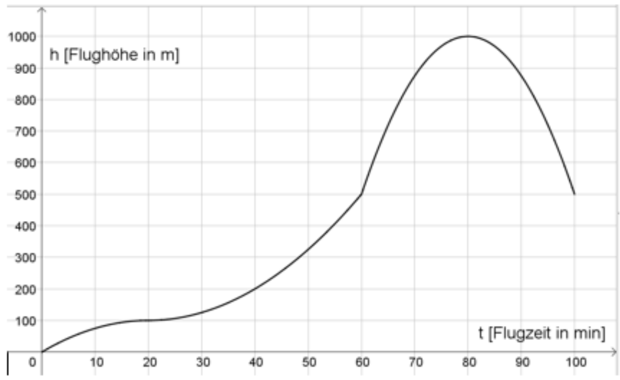

Abb. 2: Teilaufgabe (g) zu Grundvorstellungen

Erste Ergebnisse

Bezüglich Fragestellung g) gilt es zunächst festzuhalten, dass diese auf Grundlage jeder GV der Differenzialrechnung (vgl. Greefrath et al. 2016, S. 147) beantwortet werden kann. Diese a-priori identifizierten Grundvorstellungen werden in der Bearbeitung der Schülerinnen und Schüler tatsächlich auch explizit realisiert. In den vorliegenden schriftlichen Bearbeitungen ist das aber schwierig zu deuten. Hier leisten die durchgeführten Interviews einen wichtigen Beitrag, da dort die GV schnell(er) und meist eindeutig zutage treten.

Anhand des nachfolgenden Transkriptausschnitts zu Teilaufgabe g) (vgl. Abb. 1) kann dies gut interpretiert werden, da an einer (nicht) differenzierbaren Stelle einer Funktion über die lokale Linearität argumentiert wird.

S: Ja, wenn man ja hinzoomt, wird der, ist der Punkt ja immer noch da. (I: Genau.) Das. Aber das haben wir. #00:11:23-1#

I: Was meinst du, wenn man hinzoomt, ist der Punkt immer noch da? (S: Ja, irgendwie.) Verschwindet der an einem anderen Punkt mal, der Punkt? (S: Nein, der.) Nein, weißt du, was ich meine? #00:11:30-1#

S: Wie wenn man das halt ganz klein macht, das Ganze, es ist immer noch ein Knick drin. Das wäre. #00:11:35-1#

Die Vorstellung des Funktionenmikroskops, also des Hineinzoomens, wird explizit ausgeführt. Damit wird die im Sinne der GV Lokale Linearisierung argumentiert, dass beim stark vergrößerten Blick auf die Umgebung eines Punktes des Graphen an einer nicht differenzierbaren Stelle einer Funktion der Knick nicht verschwindet. Im Sinne des *Mathematical Working Space* findet das mathematische Arbeiten in der diskursiven Ebene statt.

Zusammenfassung und Ausblick

Bislang konnten auf einer qualitativen Ebene interessante Einblicke in die Arbeiten von Schülerinnen und Schülern und daraus wiederum wertvolle Ergebnisse zu MWS und GV gewonnen werden. Dies bezieht sich sowohl auf die Breite der identifizierten GV als auch auf die Reichhaltigkeit mancher Bearbeitungen. Gerade unter einem kulturvergleichenden Blick zeigt sich, wie unterschiedlich jeweils mit den Aufgaben umgegangen wird und welche Vorteile GV für das Verständnis von untypischen Aufgaben bieten können.

Danksagung: Wir bedanken uns im Namen der beiden Projektteams bei BayFrance für die Anschubfinanzierung, welche uns für ein Jahr (2019–2020) gewährt wurde und die unsere Zusammenarbeit konstruktiv unterstützt hat.

Literatur

Greefrath, G. Oldenburg, R. Siller, H.-S., Ulm & V. Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe.* Heidelberg: Springer Spektrum.

Kuzniak, A., Nechache, A. & Drouhard, J. P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM,* 48(6), 861–874. DOI 10.1007/s11858-016-0773-0

Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken.* Weinheim: Beltz.