Frank FÖRSTER, Braunschweig & Daniela AßMUS, Halle a. d. S.

Argumentieren und Problemlösen mit Grundschulkindern bei raumgeometrischen Aktivitäten

Der Artikel berichtet über Aktivitäten zur Raumgeometrie mit mathematisch interessierten Grundschulkindern, die im Rahmen der Förderprojekte „Mathematische Lernwerkstatt Braunschweig“ der Technischen Universität Braunschweig (www.tu-braunschweig.de/idm/lernwerkstattstart) und „Die Matheforscher“ der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg (www.matheforscher.com) durchgeführt wurden, aber auch im normalen Mathematikunterricht zur natürlichen Differenzierung eingesetzt werden können.

Raumgeometrische Inhalte werden im Unterricht der Grundschule nicht nur selten eingesetzt, vorkommende Aufgabenstellungen werden oft durch reines Ausprobieren mit Material gelöst, ohne auf Raumvorstellung zu rekurrieren. Um bei den Kindern mathematische Prozesse anzustoßen, enthalten die vorgestellten Problemfelder Phasen, in denen prozessbezogene Kompetenzen explizit angesprochen werden. Hierzu sind insbesondere das *Darstellen* und das *Argumentieren*, aber auch das *Problemlösen* und *Kommunizieren* zu zählen. Zur Realisierung der jeweiligen Anforderungen werden wiederum Raumvorstellungskompetenzen benötigt, wobei meist raumgeometrische Aktivitäten in zwei Richtungen auftreten: Das Wahrnehmen der räumlichen Körper und ihrer Beziehungen zueinander bei deren Darstellung in Plänen, wie auch das Lesen und Decodieren dieser Pläne und daraus resultierend das Vorstellen der räumlichen Körper und ihrer Beziehungen zueinander beim Bauen der räumlichen Körper.

Behandelt wurden u. a. der „Somawürfel“ (Schwerpunkt *Darstellen* und *Kommunizieren* beim Codieren und Vermitteln von Lösungen), das „Baumeisterspiel“ (*Argumentieren* bei „unmöglichen Bauten“, sowie Vollständigkeit und Optimalität von Lösungen), Würfelbauten „Von allen Seiten betrachtet“ (*Problemlösen* beim Herstellen von Würfelbauten mit möglichst wenigen oder vielen Flächen bzw. Augenzahlen), „Würfelfassaden“ (Erkennen und Herstellen (dreh-)symmetrischer Bauten bei wachsender Würfelzahl) und Aktivitäten mit einer Styroporschneidemaschine „Filocut“ (räumlich symmetrische Figuren durch mehrere ebene Schnitte herstellen). Weiterhin spielten Heurismen, wie das systematische Probieren, und kombinatorische Überlegungen stets eine Rolle. Zwei ausgewählte Problemfelder werden nachfolgend kurz vorgestellt. Eine ausführliche Darstellung, auch der anderen o. g. Problemfelder, findet sich in Aßmus & Förster (2019).

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

Das Baumeisterspiel

Bei den Sitzungen zum Baumeisterspiel (H. C. Lange 1992) steht das *Argumentieren* im Vordergrund. Dies gelingt an diesem Material besonders gut, da sich die Bausteine des Baumeisterspiels hinsichtlich Würfelzahl (drei oder vier Würfel) und der „Höhe" der Steine („flache" und „räumliche" Steine) sehr einfach und anschaulich klassifizieren lassen. Unter Berücksichtigung beider Kategorisierungen ergeben sich drei Klassen von Bauteilen: (1) räumliche Vierer, (2) flache Vierer und (3) flache Dreier (Abb. 1).

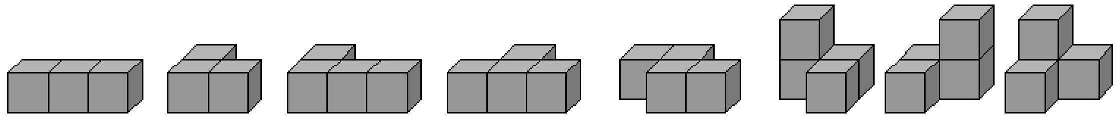

Abb. 1: Die acht Bausteine des Baumeisterspiels

Es zeigt sich, dass hiermit aus der Gesamtzahl der verbauten Würfel die Anzahl von Dreier- und Viererbausteinen, und meist auch deren Typ, erschließbar ist, die zum Errichten eines Bauwerkes benutzt werden können. Ebenso lässt sich oft einfach argumentieren, dass gewisse Bauten unmöglich mit dem Material hergestellt werden können (z. B. keine Gebäude mit 13 Würfeln). Somit lassen sich viele Aktivitäten von einem reinen, wenn auch ggf. systematischen, Probieren in ein Argumentieren wandeln – zum Teil bereits während der Bauphasen durch die Kinder selbst, oft aber auch erst von der Lehrperson initiiert in den Besprechungsphasen. Wir sehen dieses „nachträgliche Argumentieren" nicht als Nachteil an, da – so unsere Erfahrungen – intensives mathematisches Lernen vor allem in der Besprechungsphase stattfindet (vgl. Fetzer 2008).

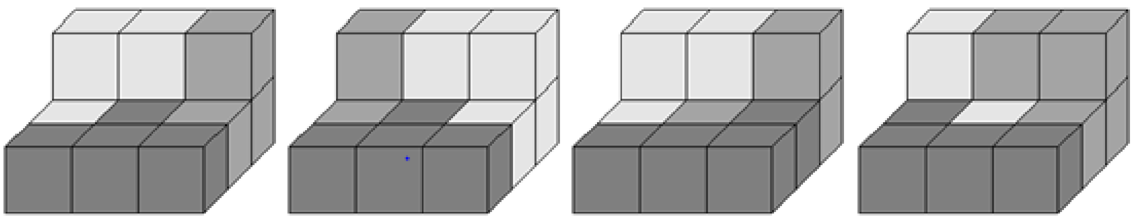

Abb. 2: Mögliche Lösungen des „Sofa"

Als einfaches Beispiel für solche *Argumentationsanlässe* betrachten wir das Bauwerk „Sofa" (Abb. 2). Nur selten findet ein Kind alle vier Lösungen. Die Frage „Haben wir denn nun alle Lösungen gefunden?" kann zu folgenden Argumentationen der Kinder führen, die in der Gesamtsicht (hier ist die Lehrperson gefragt!) die Vollständigkeit der Lösung begründet:

Das Gebäude besteht aus drei Vierern. *Das Z* (Bezeichnungen wie bei den Tetraminos) *kann im Sofa nicht vorkommen*. *L und T können nicht in der*

Rückenlehne (obere drei Würfel) *liegen. Es kann nur entweder das L oder das T vorkommen. Jeweils zwei räumliche Steine bilden die Rückenlehne.*

Würfelbauten („Von allen Seiten betrachtet“)

Auch die Arbeit mit Würfelgebäuden bietet reichhaltiges Potential für mathematische Aktivitäten. Vorrangig geht es dabei um *Problemlösen*, wenn Bauten bei gegebener Würfelanzahl mit minimaler und maximaler Seitenflächenanzahl errichtet werden sollen, wobei stets die sichtbaren quadratischen Seitenflächen der einzelnen Würfel gezählt werden, oder ein Würfelbauwerk mit einer bestimmten Würfel- oder Außenflächenanzahl gesucht ist.

Schnell entdecken die Kinder, dass ein Würfelturm jeweils die meisten sichtbaren Seitenflächen enthält (Abb. 3). Für ein Gebäude mit möglichst wenigen sichtbaren Seitenflächen vermuten sie zunächst, dass alle Würfel auf dem Tisch aufliegen müssen. Bei größeren Bauten stellen einige Kinder aber fest, dass die Würfel möglichst kompakt zu verbauen sind: Bei 8 Würfeln ist auch die Möglichkeit, einen großen Würfel mit der Kantenlänge 2 zu bauen, optimal. Bei 27 Würfeln ist der große Würfel mit Kantenlänge 3 besser als jede Möglichkeit, bei denen jeder Würfel tatsächlich auf dem Tisch liegt.

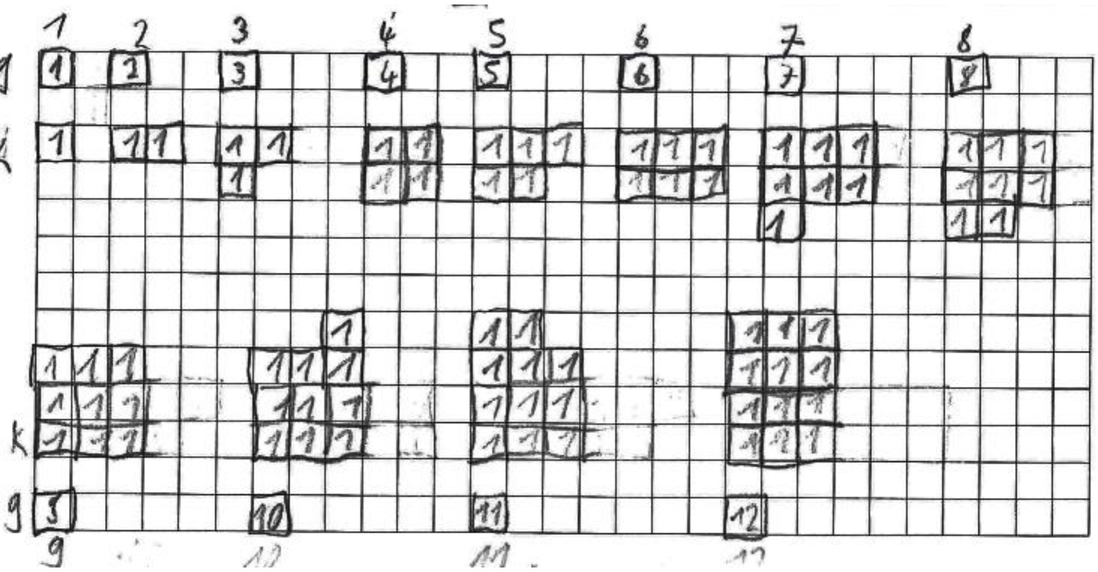

Abb. 3: Möglichst viele und wenige sichtbare Flächen

Das Material „verführt“ dazu, zunächst ein beliebiges Gebäude zu errichten und die Flächenanzahl daran zu bestimmen. Viele Kinder gehen hier erst rein zählend vor, zunehmend sind jedoch auch verkürzte Zählstrategien (z.B. bei gegenüberliegenden Flächen) sowie rechnerische Vorgehensweisen zu beobachten. Darüber hinaus treten jedoch auch Argumentationsprozesse auf, die sich auf die Veränderung der Flächenanzahl beim Hinzufügen oder Umlegen eines Würfels beziehen. Aufgaben mit vorgegebenen Würfel- **und** Flächenanzahlen fordern schließlich strategisches An- und Umbauen heraus, da hier ein probierendes Lösen sehr aufwändig ist und nach anderen Bearbeitungswegen gesucht wird.

Fazit

Die, hier allerdings nur sehr kurz, vorgestellten Lernumgebungen bieten reichhaltige Anlässe für mathematische Aktivitäten. Die Ansprache prozessbezogener Kompetenzen, insbesondere die Suche nach Begründungen, erscheint uns dabei geeignet, Raumvorstellungsprozesse zu initiieren, deren Aktivierung bei rein probierendem Hantieren mit Material nicht zwangsläufig, meist sogar überhaupt nicht, erfolgt.

Dabei ist es u. E. nicht entscheidend, ob die Begründungen eigenständig gesucht oder in einer Reflexionsrunde von der Lehrkraft herausgefordert werden. Da bei Grundschulkindern ohnehin das Begründungsbedürfnis i. d. R. nur schwach ausgeprägt ist (z. B. Steinweg 2001, Bezold 2012), bedarf es unterstützender Handlungen, dieses Bedürfnis zu wecken, um den Kindern erste Zugänge zum Begründen zu ermöglichen. Diese Begründungen können mit Hilfe des Materials zunächst mit Zeigehandlungen und Ortsbeschreibungen realisiert werden. Somit wird nur ein geringes Fachvokabular benötigt und erste mündliche Begründungsversuche gelingen eher, da das Material hier als „Mittler" dienen und somit Sprachbarrieren abbauen kann.

Die hier und in Aßmus & Förster (2019) referierten Beispiele sind (kognitiv) anspruchsvoll, haben aber allen Beteiligten viel Spaß gemacht. In einer normalen Grundschulklasse ist es ratsam, ein erstes Kennenlernen des Materials sowie spielerische Erkundungen vorzuschalten. Bezogen auf die prozessbezogenen Kompetenzen werden trotzdem nicht alle hier genannten Aspekte zur Sprache kommen können. Im Sinne einer natürlichen Differenzierung müssen aber ja gerade nicht **alle** Argumentationen, Problemlösungen, … von **allen** Schülerinnen und Schülern bearbeitet werden (vgl. Bruder 2013).

Literatur

Aßmus, D. & Förster, F. (2019). Aktivitäten zum Argumentieren und Problemlösen mit mathematisch interessierten Grundschulkindern bei der Bewältigung von raumgeometrischen Aufgaben. In F. Heinrich (Hrsg.), *Aktivitäten von Grundschulkindern an und mit räumlichen Objekten* (S. 7-27). Offenburg: Mildenberger.

Bezold, A. (2012). Förderung von Argumentationskompetenzen auf der Grundlage von Forscheraufgaben. *mathematica didactica* 35, 73–102

Bruder, R. (2013). Nicht alle üben alles. *Mathematik 5-10,* 23, 38–41.

Fetzer, M. (2008). „Interaktion am Werk" – Eine schulpraktische Fragestellung und ihre wissenschaftlichen Folgen. *BzMU,* 31 - 38. Münster: WTM.

Steinweg, A. S. (2001). *Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern. Epistemologisch-pädagogische Grundlegung.* Münster: LIT VERLAG.