Rumos da Epistemologia 19

Epistemologia, Mente, Matemática e Linguagem:

Discussões do X Simpósio Internacional Principia

Ivan F. da Cunha
Jonas R. B. Arenhart
Cezar A. Mortari
(Orgs.)

NEL | UFSC

Epistemologia, Mente, Matemática e Linguagem:

Discussões do X Simpósio Internacional Principia

Universidade Federal de Santa Catarina
Reitor: Ubaldo César Balthazar

Departamento de Filosofia
Chefe: Jaimir Conte

Programa de Pós-Graduação em Filosofia
Coordenador: Roberto Wu

NEL – Núcleo de Epistemologia e Lógica
Coordenador: Jonas Rafael Becker Arenhart

***Principia* – Revista Internacional de Epistemologia**

Ivan Ferreira da Cunha (Editor executivo)
Cezar A. Mortari
Jaimir Conte
Jonas Rafael Becker Arenhart

X Simpósio Internacional Principia

A Construção da Experiência

Comissão organizadora
Ivan Ferreira da Cunha
Jonas Rafael Becker Arenhart
Cezar A. Mortari

Comissão científica
Gary Hatfield
Otávio Bueno
Rodolfo Gaeta
Osvaldo Pessoa Jr.
Luiz Henrique Dutra
Ivan Ferreira da Cunha
Anjan Chakravartty
Décio Krause

www.principia.ufsc.br/SIP10.html
nel@cfh.ufsc.br

Ivan Ferreira da Cunha
Jonas Rafael Becker Arenhart
Cezar Augusto Mortari
(orgs.)

Epistemologia, Mente, Matemática e Linguagem:

Discussões do X Simpósio Internacional Principia

NEL – Núcleo de Epistemologia e Lógica
Universidade Federal de Santa Catarina
Florianópolis, 2018

ISBN: 978-85-87253-36-1

UFSC, Centro de Filosofia e Ciências Humanas, NEL
Caixa Postal 476
Bloco D, 2º andar, sala 209
Florianópolis, SC, 88010-970
(48) 3721-8612
nel@cfh.ufsc.br
http://nel.ufsc.br

Catalogação na fonte pela Biblioteca Universitária
da Universidade Federal de Santa Catarina

E64 Epistemologia, mente, matemática e linguagem [recurso eletrônico]: discussões do X Simpósio Internacional Principia / Ivan Ferreira da Cunha, Jonas Rafael Becker Arenhart, Cezar Augusto Mortari, (orgs.). – Dados eletrônicos. – Florianópolis : NEL/UFSC, 2018.
198 p. : il. – (Rumos da epistemologia)

Inclui bibliografia.
Resultado do X Simpósio Internacional Principia, realizado em agosto de 2017, Florianópolis, Santa Catarina.
ISBN 978-85-87253-36-1 (e-book)
Disponível em: <http://nel.ufsc.br/rumos19.pdf>

1. Filosofia. 2. Filosofia da mente. 3. Lógica. 4. Ontologia – Filosofia. I. Cunha, Ivan Ferreira da. II. Arenhart, Jonas Rafael Becker. III. Mortari, Cezar Augusto. IV. Simpósio Internacional Principia (10.: 2017 : Florianópolis, SC). V. Série.

CDU: 1

Elaborado pelo bibliotecário Jonathas Troglio – CRB 14/1093

Apresentação

Promovida pelo Núcleo de Epistemologia e Lógica (NEL) e pela revista *Principia* do Departamento de Filosofia da Universidade Federal de Santa Catarina, a décima edição do Simpósio Internacional Principia ocorreu em Agosto de 2017. O tema central do simpósio foi *A Construção da Experiência*, onde 'experiência' foi entendida em sentido amplo, compreendendo uma vasta gama de perspectivas que vão desde a filosofia da percepção até as abordagens das ciências cognitivas.

Seguindo a tradição de edições anteriores do Simpósio, trabalhos versando sobre outras áreas da filosofia também foram aceitos para apresentação no evento. O presente volume representa uma parte da diversidade de temas abordados no evento. São selecionados aqui textos apresentados no Simpósio mas que não tratam diretamente da temática central da construção da experiência. Serão encontrados aqui textos abordando problemas de epistemologia, filosofia da matemática, filosofia da linguagem, lógica, ontologia e metodologia.

Os trabalhos dedicados especificamente ao tema *A Construção da Experiência* foram submetidos ao processo editorial habitual da revista *Principia*. O resultado foi a publicação de uma edição especial (vol. 21, no. 2) com seis das conferências principais, comemorando os 20 anos da revista Principia. Outras comunicações que também versavam sobre o tema do simpósio foram selecionadas e apareceram como parte de outra edição (vol. 21, no. 3).

E mais um volume está em preparação, trazendo os trabalhos que foram apresentados no simpósio e que lidam com temas de filosofia política e filosofia do direito. O título será *Justiça e Democracia: Discussões do X Simpósio Internacional Principia* (Cunha, Arenhart & Mortari, org.) e será uma publicação conjunta do NEL e do Núcleo de Ética e Filosofia Política (NEFIPO) da UFSC.

Como organizadores do X Simpósio, e também deste volume, gostaríamos de agradecer a todos os participantes e especialmente aos autores dos trabalhos aqui publicados. Agradecemos também às seguintes instituições, que propiciaram o apoio financeiro para a realização do evento e deste livro, que é um de seus resultados: FAPESC, CNPq, Programa de Pós-Graduação em Filosofia da UFSC.

Florianópolis, 01 de agosto de 2018.

Os Editores

Epistemology, Mind, Mathematics and Language: Selected Papers of the 10th Principia International Symposium

The Tenth Principia International Symposium occurred in August 2017. It has been organized by the Logic and Epistemology Research Group (NEL) of the Federal University of Santa Catarina (UFSC) and by the journal *Principia*, published by UFSC's Philosophy Department. The symposium's main theme was *The Construction of Experience*, where 'experience' was understood in a broad sense, comprehending a wide variety of perspectives, from philosophy of perception to approaches in the cognitive sciences.

Following the tradition of previous symposia, contributed papers concerning other fields of philosophy were also accepted for presentation. This volume represents a part of the diversity of themes displayed at the event. The papers selected here were presented at the symposium, but they do not take on the main topic of construction of experience. The texts in this volume approach problems of epistemology, philosophy of mathematics, philosophy of language, logic, ontology, and methodology.

The papers especially concerned with *The Construction of Experience* were submitted to the usual editorial process of the journal *Principia*. As a result, we published a special issue (vol. 21, n. 2) with six of the main conferences, celebrating the 20 years of the journal Principia. Other contributed papers which also dealt the symposium's main theme were selected and appeared as part of another issue (vol. 21, n. 3).

And still another volume is in preparation, with the symposium's contributed papers that deal with themes of political philosophy and philosophy of law. It is going to be titled *Justiça e Democracia: Discussões do X Simpósio Internacional Principia* (Cunha, Arenhart & Mortari, eds.), and it will be a joint publication of NEL and NEFIPO, UFSC's Ethics and Political Philosophy Research Group.

As organizers of the 10th Symposium, and of this volume as well, we would like to thank all the participants, in particular the authors of the papers published here. We must also thank the institutions that provided financial support to the realization of the symposium and of this book: FAPESC, CNPq, UFSC's Philosophy Graduate Program.

Florianópolis, August 1st, 2018.

The Editors

NEL

Núcleo de Epistemologia e Lógica
Universidade Federal de Santa Catarina

nel@cfh.ufsc.br
(48) 3721-8612

http://nel.ufsc.br
fax: (48) 3721-9751

Criado pela portaria 480/PRPG/96, de 2 de outubro de 1996, o NEL tem por objetivo integrar grupos de pesquisa nos campos da lógica, teoria do conhecimento, filosofia da ciência, história da ciência e outras áreas afins, na própria UFSC ou em outras universidades. Um primeiro resultado expressivo de sua atuação é a revista *Principia*, que iniciou em julho de 1997 e já tem dezessete volumes publicados, possuindo corpo editorial internacional. *Principia* aceita artigos inéditos, além de resenhas e notas, sobre temas de epistemologia e filosofia da ciência, em português, espanhol, francês e inglês. A Coleção Rumos da Epistemologia é publicada desde 1999, e a série Nel-lógica inicia sua publicação em 2014. Ambas aceitam textos inéditos, coletâneas e monografias, nas mesmas línguas acima mencionadas.

Sumário

SOBRE OS AUTORES

Beatriz Sorrentino Marques é professora do Departamento de Filosofia da UFMT. Suas áreas de interesse são especialmente Filosofia da Ação, Filosofia da Mente e Filosofia da Neurociência.

Carlos Luciano Montagnoli é professor associado B da Universidade Estadual de Londrina. Tem experiência na área de Lógica Matemática, com ênfase em Semântica Formal, atuando principalmente nos seguintes temas: semântica formal para línguas naturais e representação do conhecimento.

César Frederico dos Santos é atualmente professor do Departamento de Filosofia da Universidade Federal do Maranhão e está afastado para cursar doutorado em Filosofia na Universidade de Groningen, Holanda.

Gleisson Roberto Schmidt é doutor em Filosofia pela Universidade Federal de Santa Catarina (2014), tendo realizado estágio de doutoramento na Université Paris 1 - Panthéon-Sorbonne. Ex-professor de Filosofia na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (2011 a 2018), é vice-líder do FEF - Grupo de Estudos e Pesquisas em Filosofia e Ensino de Filosofia e revisor de periódicos científicos nacionais e internacionais.

Jorge Alberto Molina é professor doutor da Universidade Estadual de Rio Grande do Sul. Tem experiência na área de Filosofia, com ênfase em Lógica e Filosofia da ciência, atuando principalmente nos seguintes temas: Retórica e Teoria da argumentação, História e Filosofia da Lógica, História e Filosofia da Matemática

Luisa Luze Brum Genuncio cursa Mestrado no Programa de Pós Graduação em Lógica e Metafísica da Universidade Federal do Rio de Janeiro, com pesquisa focada no problema de Termos Singulares sem Referentes.

Luiz Felipe Sigwalt de Miranda é professor de física – Colégio Internacional Everest, doutor em filosofia pela Universidade Federal do Paraná e tutor a distância da Universidade Federal do Paraná.

Marcos Silva é Professor Associado na Universidade Federal de Alagoas. Ele foi pesquisador em universidades no Rio de Janeiro, Fortaleza, Leipzig e Pittsburgh e apresentou sua pesquisa em vários países da Europa. Seus interesses incluem a filosofia da lógica, a filosofia da linguagem e a filosofia de Wittgenstein. É o organizador de *Colours in the development of Wittgenstein's Philosophy* (Palgrave, 2017) e de *How Colours Matter to Philosophy* (Springer, 2017). Em 2016, recebeu o prêmio Fulbright Junior Faculty Member Award.

Pedro Dolabela Chagas é Doutor em Literatura Comparada (UERJ) e em Filosofia da Arte (UFMG). Professor da UFPR, com pesquisa sobre a episteme artística moderna, o romance brasileiro e norte-americano e a teoria e a história do romance. Tem se dedicado à interface entre a narrativa de ficção e a neurociência, a psicologia evolutiva e a filosofia da mente.

Vítor M. Costa possui graduação em História pela Universidade Federal de Santa Catarina (2016). Tem experiência em Teoria e Filosofia da História, Epistemologia e Ontologia, sobretudo na Grécia Clássica, mas também na tradição hermenêutica e na filosofia analítica. Atualmente é graduando em Filosofia e também mestrando em Filosofia (bolsista CAPES) pela mesma universidade e membro do Núcleo de Filosofia Antiga da UFSC.

1

Taxonomy of the phenomenology of acting

BEATRIZ SORRENTINO MARQUES

1. Introduction

The phenomenology of acting (PA) has currently been a topic of philosophical focus. Although several questions about it remain unanswered, I will focus on the conceptual framework of the PA that philosophers and cognitive scientists have been putting forward to shed light on it. The conceptual analysis of the PA is an important step of the investigation, and it has resulted in the proposal of various composing elements of the PA, as well as a hypothesis about its production. Nevertheless, how we conceive of the components of the phenomenology of acting are a topic of debate, as well as how they are connected.

Several taxonomies of the PA have been proposed (Bruhmann and Di Paolo 2015, Pacherie 2008, Synofzik et al. 2008, Bayne 2008, Bayne and Levi 2006, de Vignemont 2004, Marcel 2003, among others), and these taxonomies show some variation about which elements are considered part of the phenomenology of acting. Instead of going over each taxonomy, I will focus only on their recurring elements. The conception of each element, however, may vary according to the taxonomy; therefore, in sections 2, I discuss the distinction between pre-reflective and reflective self-attribution of action. In sections 3 and 4, I discuss the conception of each element, based on the arguments given by the said taxonomies, and the empirical evidence. This will allow me to concentrate on their most illuminating points and summarize the taxonomies into one coherent taxonomy. In sections 4 and 5, I discuss judgements of agency and meta-judgements, and I draw some conclusions about a few philosophically relevant issues related to the phenomenology of acting, based on the conceptual distinctions resulting from the taxonomy.

I. F. Cunha; J. R. B. Arenhart; C. A. Mortari (orgs.) *Epistemologia, Mente, Matemática e Linguagem: Discussões do X Simpósio Internacional Principia*. Florianópolis: NEL/UFSC, 2018, pp. 11–28.

2. Pre-reflective and reflective self-attribution of action

It is relevant to distinguish between the pre-reflective aspect of the phenomenology of acting and the reflective aspect.[1] The pre-reflective aspect of the phenomenology is not something of which one is always aware, or can put into words; it is what Gallagher (2012) calls recessive phenomenology. The reflective aspect are those aspects of the phenomenology of acting that the agent is explicitly aware of and can verbally report. This makes apparent that the discussion does not focus only on the sense of acting; it has to take the judgements agents make about these experiences into consideration as well.

The present discussion is based on the assumption that the PA is crucial for the attribution of one's action to oneself, and that the relevant cognitive mechanisms, the comparator model, is important to control action as well as to distinguish one's actions form actions of others. The agent makes this distinction by attributing her actions to herself, and as we will see below, the self-attribution of action has reflective and pre-reflective aspects.[2]

Not all taxonomies have focused on the pre-reflective/reflective distinction. However, it is important to note that if the PA's taxonomy focuses only on the pre-reflective aspect of the phenomenology of acting, such a taxonomy cannot be complete. Much of our everyday talk about the PA takes into consideration a reflective, or conceptual, characterization of the phenomenology in question. In fact, Gallagher (2012), Synofzik et al. (2008), and Bayne and Pacherie (2007) have emphasized the aforementioned distinction.

3. Movement-effect

Before discussing the sense of acting, considered the core element of the PA, I would like to attract attention to what Synofzik et al. (2008) call *non-conceptual and momentary representation*. It focuses on the registration of bodily movement and its respective effect, and it depends on simple spontaneous movements of the body that do not need to be intentional. In other words, it is the registration of movements preformed in relation to the covariation of their effects. The idea is that the agent's learning mechanisms make an association over time between certain movements and events that often follow them, creating an action-effect association. The only capacity that Synofzik et al. consider necessary for this registration is the capacity to store systematic covariation, which is inherent to neuronal networks. This is important in order to be able to register correctly which is the effect of each movement. Since it is inherent, it is a capacity available at a very young age, even to babies.

According to Synofzik et al.'s account, intentional agency depends on this system, because the action-effect association allows the agent to intend a certain desired state in the world by grounding the ability to perform the appropriate action to achieve the intended state. The registration, nevertheless, does not allow the agent to attribute implicitly the action to herself, nor to represent actions or their effects, which means that the action-effect relation only registers the said covariation in the presence of the action and its effect. There is not stable long-term representation of this relation, only hebbian[3] learning of the covariation between a certain movement and its effect.

I believe that this action-effect mechanism must integrate a complete taxonomy of the PA, even though I do not claim that there is any phenomenal feel associated to it. This association is, nonetheless, the basis for the sense of acting, and for the attribution of one's action to oneself, as an agent who produces effects in the world.

4. The sense of acting: a thin phenomenal feel

The sense of acting (SA) is the experience one has of oneself acting (Pacherie 2014). Although the analysis of the SA reveals a compound of other senses (Pacherie 2008, Bayne and Pacherie 2007), the SA itself, that the agent has when acting, is a *thin* experience felt as a whole, given that these components are not experienced separately.

The SA is the pre-reflective, or non-conceptual, attribution of action to oneself, as produced by oneself; i.e., the attribution of the agent's action as hers and as producing effects. It is also fundamental to allow the distinction between what happens in the world and what the agent herself produces in the world. Although the attribution is not conceptual or linguistic, the agent feels she is producing her action. This means that one experiences actions as caused by oneself. The attribution as self-caused is only implicit, though it is stable and it is possible to abstract it from the action itself, allowing it to last even after the action has already occurred (Synofzik et al. 2008). The agent does not explicitly represent herself or her action in order to attribute it to herself.[4]

Most well-known taxonomies focus on this aspect of the PA. On the remaining of this section, I will focus on various accounts of the SA's elements, and on the mechanism on which it depends, the comparator model. I aim to discuss their most relevant aspects in order to produce a unified understanding of the PA. It is important to notice, however, that the conceptual distinctions do not necessarily correspond to how one experiences the phenomenology of acting, because the PA is holistic; normally, no components are distinguishable in the experience itself. This is the case because the conceptual analysis and the neuroscientific analysis — the latter deals with the fine-grained mechanisms that generate the experience — allow nuanced distinctions (Gallagher 2012) that are not experienced as such.

Although different taxonomies may propose that different components make up the SA. I believe that these boil down to the *sense of initiation*, the *sense of intentional causation*, and the *sense of control* (Pacheie 2008). Other element may be the *sense of own movement* (de Vignemont 2004), but I consider the latter analogous to Pacherie's sense of intentional causation. There are other suggestions, such as sense of effort, and sense of authorship (Bayne and Levy 2006); nevertheless, I follow Pacherie (2008) on her division, because the components she proposes are more comprehensive. I consider the sense of effort a component of the sense of control, and the sense of authorship may be associated to the sense of causal initiation or to the sense of initiation, depending on how one interprets it.[5] It is noteworthy that Pacherie (2015) seems to have later abandoned the idea of the sense of intentional causation. I believe that this is the case because Pacherie associates the sense of intentional causation closely to the sense of control.

Synofzik et al.'s (2008) description of the sense of acting concentrates on the mechanisms that allegedly give rise to it, emphasizing that this phenomenal aspect of acting is non-conceptual, and, because of this, there is no explicit self-attribution (or other-attribution) of action. The said mechanisms are the sub-personal weighing (matching) of afferent and perceptual cues, and efferent motor cues. Thus, it is similar to how other taxonomies have accounted for the SA (de Vignemont 2004, Pacherie 2008, Bayne and Pacherie 2007), as dependent on the comparator model.

The comparator model is a control mechanism composed of two models: inverse and forward models. Its processing is not available to consciousness; nevertheless, the result of its comparisons emerges to consciousness as a phenomenal feel.

> In the comparator model of action control, an action begins with an intention or desired goal state. An inverse model computes the motor command that is required to achieve the goal state (or at least to approach it) and generates the motor command that will drive the action. A forward model uses a copy of the current motor command (known as an efference copy)[6] to predict the probable sensory consequences of the command. This prediction is compared with sensory feedback signals that provide information about the ongoing action and about its effects on the external environment. (Haggard 2017, p.202)

The goal that the system will achieve is the intended state, the predicted state is an estimation of the state the organism will be when it achieves the goal, and the final state of the organism is computed based on the sensory feedback of the movement (Frith et al. 2000). These models compare the intended state with the predicted state, and, finally, with the actual state. When there is a match, all goes as expected and the agent has the standard sense of acting.

Pacherie (2008) proposes a model for action specification and control, and its relation to intentions to which I am sympathetic. I, however, hesitate to associate the SA to her model. This is the case because, given her description of P-intentions and F-intentions, and my distinction between reflective and pre-reflective aspects of the phenomenology of acting, I believe the sense of acting cannot be associated to such intentions. Pacherie (2008) distinguishes three levels of intentions: future intentions (F-intentions), proximal intentions (P-intentions), and motor intentions (M-intentions). In her model, each level cascades into the next; the content of the F-intention is an abstract goal, the P-intention represents the goal as an action that can be performed in the context of the agent. Finally, the M-intention involves a motor representation formatted to facilitate the selection of motor patterns appropriate to an action, as well as compatible with the agent's biomechanics. The latter is nonconscious. As I conceive of the SA, it is associated to pre-reflective aspects of action production; therefore, it is associated to the specification of action by M-intentions.

I side with Pacheri, however, in accepting that the PA is not just a self-attribution system that allows one to distinguish one's actions from whatever else happens in the world. This phenomenology is part of a control and action specification mechanism, according to which the intended state, helps guide the production of the action through the inverse and forward models. It makes sense that when the intended state matches the predicted state, and then when the actual state matches back with the intended state, the agent feels that *she* produced the action.

Here, however, I will focus on the taxonomy of the PA, and its relevance to self-attribution of action. The mechanisms that give rise to the PA are also important to understand action control, but I justify my focus by emphasizing that I am interested in the PA and how the sense of acting is felt, and I believe that in this sense it is strongly related to self-attribution of action; i.e., that *I* produce my action. In the following subsections, I will present these elements as understood in well-known taxonomies, in order to argue that they collapse into two main elements: the feeling of initiation and of intentional causation.

4.1. Awareness of action

The first major disagreement is over whether *awareness of the action* is a relevant element of the SA. Awareness of action is just that: the agent's awareness of her action. For instance, even though I am concentrated on writing this paragraph I am aware that I just clutched my mug. I am aware of the action. Bayne and Pacherie (2014) seem to be referring to this awareness when they explain the *sense of what one is doing*, which they describes as "some specification of the action the sense of agency is directed toward" (Bayne and Pacherie 2014, p.213).

Although it may seem trivial to state that agents are often aware of their actions, it is important to note that if we were never aware of our actions we might have a different kind of experience and identity as agents, or perhaps we would not see ourselves as agents at all. It is, nevertheless, also interesting to bring to attention that human agents are, more often than we realize, somewhat unaware of their actions, such as when one absentmindedly closes a door, or one is concentrated on an important action that makes minor actions go unnoticed, or has an illusion of action, etc. (Marcel 2003, p.62).

In cases that the agent is unaware of her action, it is important to note whether she has the SA. If she does, then there is reason to think that awareness of action is not necessary for the SA.[7] On the other hand, one may claim that when an agent is unaware of her action, she does not have the SA, or she has a considerably diminished SA. If the latter is true, awareness of action may be deemed necessary (see Bayne and Pacherie 2014) for the SA.

Pacherie argues that the SA cannot exist as "floating in the air" (2015, p.5); therefore, it must involve some sense of what the agent is doing, even if the action is specified in a vague way. She is aware that there are actions that one does, such as routine actions, that one does not seem much aware of doing, e.g., flicking the turn signal when driving. Nevertheless, in such cases, Pacherie (2015) believes that it is not that the agent is not aware of what she is doing; she simply does not attend to it. Hence, it is a matter of lack of attention, and not lack of awareness; in such cases, awareness would be marginal and the representation of action would be unspecified in her view. A more radical explanation suggests that, when one is unaware of what one is doing one does not have the SA, and when one becomes aware of what one is doing then one has the sense in question.

When de Vignemont points out that what I have been calling the SA integrates information from non-conscious motor representations (2004, p.16) — the comparator model — he argues that the attribution of action to oneself does not use conscious (explicit) information about action, and occurs even in the case of unawareness of action; it is systematic. According to de Vignemont, the agent does not need to be aware of her action to attribute it to herself (2004, p.11). He argues the claim that self-attribution of action cannot depend on the conscious motor representation of action, because these are not different from the representations of any other agent's action that is activated in imitation situations, or when one sees others act. These representations are too coarse-grained, and they do not encompass the details of the movement. It is reasonable to conclude that the SA's production depends on nonconscious signals that represent these details, which are fine-grained enough to determine implicitly the agent of the action as being oneself. Hence, this is a good reason not to consider awareness of action a necessary component of the SA.

The disagreement rests on the fact that de Vignemont is focusing on the pre-reflective aspect of the PA. The agent does not explicitly (conceptually) self-attribute her action, and does not need to be aware of the action to do so implicitly. If one considers the case of absentminded action, such as one's steps on the way to work, then it makes sense that awareness is not necessary for the agent to have a recessive sense that she is acting.

4.2. Sense of initiation

The *sense of initiation* is the sense of initiating a movement. It precedes action execution; therefore, de Vignemont (2004, p.13) claims that it is not dependent on sensory feedback from the movement. He cites Libet's (1985) experiments as evidence of its antecedence to action, because the subjects in the experiments report having moved before the actual movement occurred (80 ms before). This means that they felt that they moved before moving. Moreover, in another experiment considered relevant to the sense of initiation, Haggard and Magno (1999) applied TMS over the SMA, specifically the pre-motor area, which resulted in a delay on subjects' reports of their awareness of movement. This suggests that the awareness of having moved is associated to *pre*-motor mechanisms, not to the motor mechanism.

The explanation offered by de Vignemont (2004, pp.13–4) associates the sense of initiation to predictive models for motor control and its comparison to the intended state, the inverse model. This happens non-consciously, but the agent is aware of the result of the comparison in the sense that when the signals match, the match gives rise to the (pre-reflective, implicit) sense of initiation. Therefore, as Pacherie (2008, p.208) also claims, it is the sense of initiating movement *according to one's intention*. Another way to interpret it could be that the sense of initiation is associated to the production of an efference copy of the motor command by the inverse model. The cognitive process itself would be non-conscious, but it would give rise to the sense of initiation.

Pacherie's (2008) description of the sense of initiation seems to involve awareness of P-intentions — Gallagher also suggests this interpretation of her theory (2012, p.27). She calls the binding of awareness of P-intention to the awareness of movement onset *efferent binding*. It may be odd, however, to conceive of it in this way, because agents are not necessarily aware of any intentions when they act, and if they are not always aware of their actions (as was claimed in section 4.1.), they may not be aware of their onset either. Additionally, I have been associating the SA and its elements to the comparator model, the operation of which is not available to consciousness. Therefore, M-intentions would be more suitable for the role of action specification associated to the sense of initiation. For these reasons, I favor de Vignemont's interpretation rather than Pacherie's, because it better aligns with the notion that the sense of acting and its elements are pre-reflective.

4.3. Sense of intentional causation

The *sense of intentional causation* is the sense that the agent was "the cause of her action" (Pacherie 2008, p.202) or "the cause of the way the action is achieved" (de Vignemont 2004, p.12).[8] Pacherie claims that it may have two levels: a higher-level and a lower level. At the higher level, this is the feeling that the agent's (P-intention) intention caused her action, a match between the agent's intention and the awareness of movement onset. At the lower level, this is the experience of one's movement causing an effect in the world. It is the match between the awareness of movement onset and awareness of the effect of the action binded in time. According to my proposal, however, the sense of intentional causation is also a pre-reflective experience in which the agent does not yet explicitly attribute action to herself; therefore, the higher-level advocated by Pacherie does not apply.

I will focus on Haggard and Clark's (2003) now famous experiment on intentional binding, which shows the match between awareness of movement onset and of the effect. Subjects were instructed to flex their finger, and after 250 ms, a tone followed the finger flex. Some trials, however, were randomly interrupted by Transcranial Magnetic Stimulation (TMS), which induced an involuntary flexing of the subject's finger. A tone, 250 ms after the movement, also followed TMS-induced movements. When the action was intentional, it was observed that there was a temporal *binding* between the moment of movement onset reported by subjects and the moment of the auditory tone, 250 ms after the action; i.e., the onset of the finger movement and the tone were reported as closer together than they actually were. The same binding effect was not observed when subjects reported the moment of movement onset for TMS-induced movement and the auditory tone that occurred 250 ms after the movement. Although the experiment required awareness of the movement onset and of the effect, I assume that this is not usually something agents are aware of in everyday action; thus, the binding effect of intentional action does not require awareness.

Pacherie (2008) concludes that the match between the awareness of the onset of movement and the effect (the tone) produces the temporal binding. On the other hand, Haggard and Clark suggest that the subjects of the experiment probably had an intention to flex their finger in the sessions interrupted by the TMS-induced movement, even if they were not aware of it. Hence, having an intention to flex the finger and the finger flexing after that is not enough to produce the binding effect. Given that the experimenters associate the binding effect to the workings of the comparator model, I conclude that an M-intention is the relevant intention at play, and it must play a causal role in the production of the movement in order for the binding effect to occur.

If Haggard and Clark are correct, the binding is in fact between moving *because of* one's intention and the effect. Therefore, the M-intention is important to the binding effect. This interpretation of the experimental results is corroborated by de Vignemont (2004, p.11). When the movement is in accordance with the intended state, and produces the expected effect — there is a match — the movement and the effect show temporal binding. Haggard and Clark associate the feeling the agent has of being the source of action (sense of intentional causation) to the production of an efference copy of the motor command by the inverse model, and passing it to the forward model, in order to produce a prediction of the sensory feedback (Haggard 2017). When there is no error, it contributes to the sense of intentional causation. Haggard (2017) notes that the prospective component is important, because the experience of action is strongly related to the predicted outcome of action and whether the outcome is in fact produced by the action.

4.4. Sense of control

Finally, the *sense of control* breaks down into two (Pacherie 2008): (1) sense of feeling in control, and (2) sense of exerting control, or sense of effort (Bayne and Levy 2006). It is not hard for most people to recognize that they do experience acting as something they are in control of doing, even if just in a weak sense. The sense of control, according to Pacherie (2008), depends on the comparison between the intended state, the predicted state, and the actual state. Therefore, it is related to the inverse and forward models that give rise to the sense of initiation and the sense of intentional causation. There are two ways to interpret this; consider that the comparator model: (1) also incorporates comparators relevant to the sense of control, or (2) the comparator model depends on comparators as a control and monitoring mechanism, that contributes to the agent's acknowledgment of control and of exerting control.

I favor (2), not simply to be parsimonious, but because I believe that humans do not feel that they are in control of their actions and also feel that they are the cause of the way by which they achieve their actions. These may be too many sensations for the agent to have as parts of the sense of acting. I defend the claim that, when all goes well in action production, agents have the sense of acting, which can be broken down into sense of initiation and sense of intentional causation. These are complementary, and having a normal sense of agency is what feeling in control means.

In fact, that one was in control of one's action is a judgement one makes as an agent about one's own agency, and it is based on what we consider being in control of an action means. I believe that most people would agree that, roughly, being in control of an action means that one acted according to one's intention (desire), and not just by luck, and achieved (approximately) the intended effect through the action. Considering that I take *being in control* as a rather sophisticated concept, I believe most agents do not feel in control when they act, in general, they feel they are doing what they do (the action), which grounds their judgement that they are in control.

In (2) I say that the comparator model *contributes* to the sense of exerting control, because it does not seem that this control mechanism is enough to explain the sense of exertion. One interpretation is that the sense of exertion is the sensation one has of adjusting one's action so that it will go as intended. Effort is the combination of a mismatch between the signals relevant to the comparator model, and probably other elements. I will not attempt to elucidate what these elements are, because I consider it beyond the scope of the components of the SA, though I do not deny that it is a related issue. At the most I claim that just the mismatch of signals is not enough to account for the sense of effort; putting in effort to execute an action as intended may require recruiting extra resources, such as attention, concentration, and self-command,[9] and it seems to require that the agent is conscious of her effort. Therefore, it seems clear that there is such a sense of exerting control by putting in effort to keep an action on track, which emerges to consciousness. Perhaps the fine adjustments made by the motor system to correct mismatches can partially account for the sense of exerting control.

Patient RMB does not seem to have the experience of exertion (Naccache 2005). She does not experience effort even when she acknowledges that a task is hard and that she should feel an experience of effort in performing it. Additionally, the experimenters considered that she exhibited normal control in the Iowa Gambling Task (IGT). She does not report, however, any oddness in her

SA that could lead to the conclusion that she does not have a normal SA; she only reports that the task does not feel effortful. This may be a good reason to conclude that the sense of exertion requires more than a well-functioning comparator model, and a mismatch between intended state and actual state.

RMB's lack of sense of exertion, however, had consequences for her performance; she exhibited deficiencies in her deliberating processes during the Iowa Gambling Task. She did not avoid the disadvantageous deck, as subjects usually learn to do during the task, though she reported being aware that the deck was a disadvantageous one. Perhaps the sense of exertion partially relies on other cognitive capacities compromised by her mesio-frontal ischaemic lesion, such as the "conscious appraisal of emotions" (Naccache et al. 2005, p.1327). From RMB's case, one may conclude that the sense of effort is important for the agent to make decisions fit for her context, and to act accordingly.

5. Reflective self-attribution of action: judgements of agency

Bayne and Pacherie (2007), Synofzik et al. (2008), and Gallagher (2012) agree that there is more to the sense of acting than the comparator model, which can contribute to the agent's attribution of the action to herself. According to Gallagher (2012), there is also the cognitive process that produces interpretative judgements about agency, which is reflective, or conceptual (Synofzik et al. 2008), in opposition to the pre-reflective sense of acting. The mechanisms that contribute to the SA, however, are not encapsulated, and may be influenced by explicit judgements, just as the judgments are based on the SA.

I follow Synofzik et al. (2008) in accepting that a belief about one's agency is (partially) developed by the sensory-motor mechanism — the comparator model — and by the unconscious (sub-personal) weighing of *cognitive authorship indicators*. The agent then can conceptually attribute her action to herself, the effects of her actions as such, and judge that she is the cause of her actions. Once she has this kind of judgement, the agent can even state which actions were hers and which were actions of other agents.

Considering that the judgment of agency is not the same as the sense of acting, it makes sense that other factors, aside from the comparator model, contribute to it. According to Synofzik et al. (2008), different cognitive authorship indicators my influence the judgement. For instance, judgements of agency depend on the capacity of self-representation, the capacity to attribute causality even in the absence of stimulus (one hears the vase fall, and sees the cat quickly leaving the area where the vase was), background beliefs (e.g., about causality) that influence the inferential process of judgement acquisition, and context cues. One, nevertheless, is not necessarily conscious of these. Synofzik et al. hypothesize that the authorship indicators can contribute to a judgement of agency even in the absence of the SA, given that the SA is only one contributor to the judgement. A judgement is usually stable in time, thus allowing the agent to have abstract judgements, independently from the sense of acting and perceptions of action.

The judgements the agent can have based on her sense of acting are not limited to judgments of agency — about attributions of action to oneself. Experiences of purposiveness, of mental causation (Gallagher 2012), of deliberation (Pacherie 2015), and of freedom (Bayne 2010), of control, among others, are reflective judgements the agent can have about her own agency. One can explain these judgments by considering the sense of acting as one of its inputs, as well as inferences about various authorship indicators.

Consider the *experience of freedom*. It is hard to say what one may mean by such experience, but common sense usually associates freedom to the ability to choose and act in accordance with what one has chosen to do.[10] This is usually translated by philosophers as not being restrained nor determined to act in a certain way; i.e., as having at least two possible courses of action open to the agent.

I believe the agent does not in fact experience freedom; she has a judgement about her agency based on the SA. The sense of acting is holistic (Gallagher 2012); it does not spring component by component, and it does not have an analogous phenomenal antecedent. At the most, in some cases, the agent is aware of her intention to act, and then she acts. Awareness of an intention to act, however, does not feel compelling in the sense that the agent could not avoid acting in accordance with the intention in question; it feels as being settled on acting. Moreover, awareness of the intention itself is often experienced without any phenomenal antecedent. If this is correct, then the sense of acting feels as if it sprung *out of the blue*, in a manner of speaking. If it springs holistically and without being anteceded by any other related experience, it seems undetermined by any previous event, considering how we usually think about causation. This is why the agent judges that she acts undetermined by any previous events; she believes she experiences her action as free, according to a certain conception of freedom.[11]

This is an example of how inferences and previous beliefs, together with the sense of acting, may contribute to the agent's judgements about her own agency. These judgements are not limited to judgements about oneself as the agent of the action, and they may encompass a wide range of judgements related to agency and action, such as the experience of freedom.

6. Meta-judgements

One may also consider meta-judgements as part of the phenomenology of acting. Synofzik et al. (2008) call meta-conceptual the agent's reflective judgements about her judgements of agency. They concentrate on the attribution of responsibility for action, which involves reflection about one's intentions and about the consequences of one's actions — if one acts on the said intention, — as well as the social expectations about individual behavior, such as social norms. I would add that the attribution of responsibility might also rely on the judgment of freedom discussed above. The more one feels uncompelled, the more one is bound to accept responsibility for an action. On the other hand, if one feels compelled, or restricted, one accepts less responsibility for what one does. One example of the latter is when an employee following orders does something, perhaps morally condemnable, at her job; it is common to hear excuses such as "I was just doing my job, and I need the job to support my family". One may conclude that the agent does not accept full responsibility over her action based on the belief that she was socially compelled to act as she did, or that there were external determinations about what she could have done.

Reflection about one's judgements of agency implies that agents can reflect about their past actions, and engage in explicit mental time traveling. This means agents can plan their actions for the future by having a long-term goal the agent wants to achieve (a F-intention), and then adding to the plan the actions that she believes that she needs to perform to achieve the goal. To select which actions should be added to the plan the agent bases her choices on background beliefs about the goal and about the world, mental time travel to past episodes that help the agent simulate future episodes, and judgements of her own agency and her action repertoire. Planning, however, does not always have to be a reflective and conscious endeavor; for instance, in cases of simpler or immediate plans. In the case of distal plans, planning doesn't have to be conscious in every part of the planning. There may be complicated and novel plans that do require conscious deliberation in order to produce an effective plan; nevertheless, this is not usually the case for every part of an action plan.

The extended identity one has as an agent also depends on meta-judgements about agency. The long-term identity of oneself as an agent cannot spring from one instance of SA. Agents develop an identity as agents throughout time, and it cannot be associated to a single instance of the SA. I believe that this is best explained by a collection of these instances, background beliefs, and some inferences based on these. It is not the case that the collection of the agent's sense of acting is a phenomenal experience in itself. It is in fact a meta-judgement, in the sense that it is a judgement based on judgements of agency (see Bayne and Pacherie 2007, Gallagher 2012) in general, and other beliefs.

The collection of the agent's sense of acting is a generalization of judgements of agency. The main idea is that one generalizes from past judgements of agency based on instances of SA that accompanied one's production of action. Therefore, when considering a general picture of several instances of the SA accompanied by the constant conjunction of onset of action and effect, one judges that one is the agent, and derives a general identity of oneself as an agent extended in time, even for actions that one has a particularly thin SA.

7. Conclusion

I have tried to provide a unified taxonomy of the phenomenology of acting that takes into consideration the relevant aspects of well-known taxonomies, and the elements proposed by them. Contraposing different views about the elements of the phenomenology of acting helps clarify how they should be understood and which are the relevant concepts for the philosophical debate about the phenomenology of acting. It also contributes to elucidate the production of the sense of acting by shedding light on the role of the comparator model, and by making the distinction between the sense of acting and judgments of agency. The comparator model provides reason to believe that the SA is not superfluous for the production of action, because it plays a role in action control. Additionally, the conceptual distinctions elucidated by the taxonomy show that some philosophically relevant elements commonly considered sensations related to acting, such as the experience of freedom and the sense of control, are in fact judgements the agent makes based on her sense of acting and background beliefs.

Acknowledgements

This publication incorporates results from the research Project entitled "Science, Philosophy, and Theology: Capability Building in Latin America" funded by the John Templeton Foundation under a research award held by the University of Oxford. I would like to thank Eduarda Calado, Nara Figueiredo, Raquel Kempel, and Larissa Gondim form Grupo de Escrita de Mulheres na Filosofia, and the audience of the 10th Principia International Symposium for comments on an early versions of this paper. I also thank the anonymous reviewers for their comments on a previous version of this paper.

References

Bayne, T. 2008. The phenomenology of agency. *Philosophy Compass* **3**(1): 182–202.

———. 2010. Agentive experiences as pushmi-pullyu representations. In: J. Agui-lar; K. Frankish (eds.) *New Waves in Philosophy of Action*, pp.219–36. New York: Palgrave Macmillan.

Bayne, T.; Levy, N. 2006. The feeling of doing: deconstructing the phenomenology of agency. In: N. Sebanz; W. Prinz (eds.) *Disorders of Volition*, pp.49–68. Cambridge, MA: MIT Press.

Bayne, T.; Pacherie, E. 2007. Narrators and comparators: the architecture of agentive self-awareness. *Synthese* **159**(3): 475–91.

———; ———. 2014. Consciousness and agency. In: J. Clausen; N. Levy (eds.) *Springer Handbook of Neuroethics*, pp.211–30. Dordrecht: Springer.

Bruhmann, T.; Di Paolo, E. 2015. The Sense of agency – A phenomenological consequence of enacting sensorimotor schemes. *Phenomenology and the Cognitive Sciences* **16**(2): 207–36.

Frith, C.; Blakemore, S.; Wolpert, D. M. 2000. Abnormalities in the awareness and control of action. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Biological Sciences* **355**(1404): 1771–88.

Gallagher, S. 2012. Multiple aspects in the sense of agency. *New Ideas in Psychology* **30**(1): 15–31.

Haggard, P. 2017. Sense of agency in the human brain. *Nature Reviews Neuroscience* **18**(4): 196–207.

Haggard, P.; Magno, E. 1999. Localising awareness of action with transcranial magnetic stimulation. *Experimental Brain Research* **127**(1): 102–07.

Haggard, P.; Clark, S. 2003. Intentional action: conscious experience and neural prediction. *Consciousness and Cognition* **12**(4): 695–707.

Libet, B. 1985. Unconscious cerebral initiative and the role of conscious will in voluntary action. *Behavioral and Brain Science* **8**(4): 529–39.

Marcel, A. 2003. The sense of agency: awareness and ownership of action. In: J. Roessler; N. Eilan (eds.) *Agency and Self-awareness Issues in Philosophy and Psychology*, pp.48–93. New York: Oxford University Press.

Naccache, L.; Dehaene, S. ; Cohen, L. ; Habert, M. ; Guichart-Gomez, E.; Galanaud, D.; Willer, J. 2005. Effortless control: executive attention and conscious feeling of mental effort are dissociable. *Neuropsychologia* **43**(9): 1318–28.

Pacherie, E. 2008. The phenomenology of action: a conceptual framework. *Cognition* **107**(1): 179–217.

———. 2015. Time to act: the dynamics of agentive experiences. In: P. Haggard; B. Eitam (eds.) *The Sense of Agency*, pp.3–24. Oxford: Oxford University Press.

Synofzik, M.; Vosgerau, G.; Newen, A. 2008. I move, therefore I am: a new theoretical framework to investigate agency and ownership. *Consciousness and Cognition* **17**(2): 411–24.

de Vignemont, F.; Fourneret, P. 2004. The sense of agency: a philosophical and empirical review of the "who" system. *Consciousness and Cognition* **13**(1): 1–19.

Wolpert, D. M. 1999. Computational approaches to motor control. *Trends in Cognitive Sciences* **1**(6): 209–16.

Notes

[1]According to Gallagher (2012, p.16), it is implicit or recessive awareness of the experience; it is a first person experience that includes the feeling of living through the experience.

[2]I do not think that the proposed taxonomy necessarily implies a dual process theory. What I call pre-reflective self-attribution does not have to be associated to a different cognitive process, with distinct neural substrates than the reflective. In fact, the distinctions described are compatible with degrees of sophistication in action attribution, the reflective attribution depends on other cognitive capacities related to, for instance, belief formation. It is possible that explicitness and the ability to use it come in degrees (Gerrans and Sander 2014).

[3]Effective synaptic connections are the result of Hebbian learning. When a set of cells fires at the same time, the set would register the firing pattern by reinforcing the connections between the cells. Thus, learning and acquiring new skills would involve strengthening the connections in the networks of neurons.

[4]There is also a distinction between the sense of acting that is related to agency and a more general experience related to the ownership of one's body parts and movements. The latter is called sense of ownership. I will not focus on it here; nonetheless, it can explain the phenomenal experience associated to reflexes. When the agent moves as a reflex in response to stimuli, she does not feel in control of the movement, but she feels it was her body that moved.

[5]Bayne and Levy (2006) claim that the phenomenology of authorship can be associated either to the experience of oneself as the source of the action, or to the experience of agent causation. The experience of source is similar to the sense of intentional causation, while the experience of agent causation is related to the theory of Agent Causation, in Philosophy of Action.

[6]An efferent copy is a copy of the motor command used to antecipate the sensory effect of the movement, according to the movement specifications made by the motor command. It is used in forward models and allows fast motor control (Haggard and Clark 2003, Wolpert 1997).

[7]Another issue is whether awareness of action is sufficient for the SA. Marcel (2003) makes a strong case against it taking Anarchic Hand Syndrome (AHS) into consideration. He describes an agent who was aware of his action, but did not feel he was acting.

[8]I consider this sensation related to what Bayne and Levy (2006) call the experience of mental causation, which is described as the experience of acting with a purpose, and to what Haggard and Clark (2003) call the experience of source of action.

[9]Self-command here should be understood as the agent's ability to keep motivated to act in accordance with her intention even in the face of a difficult task, which should amount to not giving up the task (some may call this self-control).

[10]The experience of *the ability to have done otherwise*, following a popular definition of freedom in philosophy.

[11]It is important to note that I make no claims about freedom or whether agents have fee will or not. My claims are strictly about the experience of freedom; i.e., the experience one has that one is acting freely when one acts intentionally.

2

Lógica, tempo e linguagem natural: uma prova condicional da decidibilidade de um sistema axiomático

Carlos Luciano Montagnoli

Introdução

Em um trabalho anterior (Montagnoli 2016, pp.137–67) apresentamos um sistema formal, que chamamos simplesmente de T, demos uma semântica para a linguagem formal desse sistema, e provamos a correção e a completude de T com relação a tal semântica. Naquele trabalho, mencionamos que a nossa motivação para a construção de T foi nossa intenção de criar uma linguagem formal com operadores temporais capazes de capturar determinados usos do imperfeito e do perfeito composto em línguas naturais como o português, e de desenvolver um sistema formal correto e completo com relação a uma semântica dada para tal linguagem. Ou seja, era nossa intenção que a semântica em questão interpretasse dois operadores temporais da nossa linguagem formal, que representamos usando os símbolos I e PC, de modo próximo a determinados usos, respectivamente, do imperfeito e do perfeito composto no português, e que todas e somente as fórmulas dessa linguagem que resultassem verdadeiras dada a semântica em questão fossem teoremas em T.

Neste artigo vamos retomar, rapidamente, o sistema T, isto é, vamos apresentar sua linguagem formal, a semântica que demos para ela, e os postulados de T, e, em seguida, vamos apresentar uma prova da decidibilidade de T, condicionada a circunstâncias que vamos especificar mais adiante. Além dessa prova condicional da decidibilidade de T, fizemos já também um estudo de sua complexidade computacional, ou seja, avaliamos a complexidade computacional da questão de determinar, para uma fórmula qualquer de T, se ela é ou não um teorema de T. Esse estudo, entretanto, pretendemos apresentar em um trabalho posterior.

I. F. Cunha; J. R. B. Arenhart; C. A. Mortari (orgs.) *Epistemologia, Mente, Matemática e Linguagem: Discussões do X Simpósio Internacional Principia*. Florianópolis: NEL/UFSC, 2018, pp. 29–47.

1. A linguagem formal

Vamos começar definindo uma linguagem L para o cálculo proposicional clássico.

Definição 1.1. O alfabeto proposicional é o conjunto de símbolos $A = \{p, q, r, p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2, \ldots, \rightarrow, \neg,), (\}$, onde $\{p, q, r, p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2, \ldots\}$ é um conjunto denumerável de variáveis proposicionais; $\rightarrow$ e $\neg$ são chamados de operadores lógicos, respectivamente, da implicação e da negação, e) e (são sinais de pontuação.

Definição 1.2. Uma expressão sobre A é qualquer sequência finita de elementos de A; designamos por $E(A)$ o conjunto de todas as expressões sobre A; genericamente, para qualquer conjunto de símbolos (alfabeto) X, uma expressão sobre X é uma sequência finita qualquer de elementos de X, e $E(X)$ é o conjunto de todas as expressões sobre X.

Definição 1.3. A linguagem formal sobre A, que designaremos por L, é o menor subconjunto de $E(A)$ que satisfaz as seguintes condições:

i) se $\alpha \in \{p, q, r, p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2, \ldots\}$, então $\alpha \in L$, e dizemos que α é uma fórmula atômica de L

ii) se $\alpha \in L$, então $\neg\alpha \in L$

iii) se $\alpha, \beta \in L$, então $(\alpha \rightarrow \beta) \in L$

Um elemento qualquer de L é uma fórmula de L.

Agora, vamos estender L para L^+, do modo seguinte:

Definição 1.4. Seja $A+$ o alfabeto $A \cup \{P, F, I, PC\}$; a linguagem formal sobre $A+$, que designaremos por L^+, é o menor subconjunto de $E(A+)$ que satisfaz as seguintes condições:

i) se $\alpha \in \{p, q, r, p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2, \ldots\}$, então $\alpha \in L^+$, e dizemos que α é uma fórmula atômica de L^+

ii) se $\alpha \in L^+$, então $\neg\alpha \in L^+$

iii) se $\alpha, \beta \in L^+$, então $(\alpha \rightarrow \beta) \in L^+$

iv) se $\alpha \in L^+$, então $P(\alpha), F(\alpha), I(\alpha), PC(\alpha) \in L^+$

Um elemento qualquer de L^+ é uma fórmula de L^+.

As seguintes convenções notacionais serão adotadas com respeito a L^+:

i) em uma fórmula que começa com '(' e termina com ')', esses símbolos poderão ser omitidos

ii) uma fórmula da forma $P(\alpha), F(\alpha), I(\alpha)$ ou $PC(\alpha)$ poderá ser escrita na forma $P\alpha, F\alpha, I\alpha$ e $PC\alpha$, respectivamente

iii) as seguintes abreviações serão adotadas: $\alpha \wedge \beta$ abrevia $\neg(\alpha \to \neg\beta)$; $\alpha \vee \beta$ abrevia $\neg\alpha \to \beta$; $\alpha \leftrightarrow \beta$ abrevia $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$; $G\alpha$ abrevia $\neg F \neg \alpha$; $H\alpha$ abrevia $\neg P \neg \alpha$

iv) uma fórmula da forma $(\alpha_1 \wedge (\alpha_2 \wedge (\cdots \wedge (\alpha_{n-1} \wedge \alpha_n) \ldots)$ poderá ser escrita na forma $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_{n-1} \wedge \alpha_n$; uma fórmula da forma $(\alpha_1 \vee (\alpha_2 \vee (\cdots \vee (\alpha_{n-1} \vee \alpha_n) \ldots)$ poderá ser escrita na forma $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_{n-1} \vee \alpha_n$.

2. Semântica para L^+

Agora vamos fornecer uma interpretação para a linguagem formal L^+. Nosso objetivo principal será definir o conceito de uma fórmula válida de L^+, de modo a podermos depois introduzir o sistema formal T, e provar que todas e somente as formulas válidas de L^+ são teoremas de T. Para tanto, como é costumeiro em lógica modal, vamos utilizar o conceito de frames, que são pares ordenados que envolvem um conjunto e uma relação sobre esse conjunto. Também é costume, em lógica modal, como é sabido, dizer que uma frame é parcial quando a relação em questão é uma ordem parcial, ou que é densa a frame que inclui uma ordem densa, e por aí vai. Diz-se ainda que possui um máximo a frame cujo conjunto possui um elemento máximo dada a relação que o ordena, e que possui um mínimo aquela cujo conjunto possui um elemento mínimo dada a relação que o ordena. Nossas frames serão todas lineares e discretas, sem um mínimo e nem um máximo, e as fórmulas válidas de L^+ serão definidas como sendo aquelas que são válidas sobre o conjunto de todas essas frames. É com o conjunto dessas fórmulas que o conjunto dos teoremas de T vai coincidir, conforme provamos no trabalho mencionado acima.

Definição 2.1. Uma frame F é um par ordenado $(TF, <)$, onde TF é um conjunto não-vazio qualquer, e $< \subseteq TF \times TF$; uma d-frame (uma frame linear discreta sem mínimo ou máximo) F é uma frame $(TF, <)$ onde TF é denumerável, e $<$ é uma ordem linear discreta sobre TF tal que, para todo $t \in TF$, há um $u \in TF$ tal que $u < t$, e um $w \in TF$ tal que $t < w$.

Definição 2.2. Dadas uma frame $F = (TF, <)$ e uma função f definida de $\{p, q, r, p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2, \ldots\} \times TF$ em $\{0, 1\}$, uma valoração vFf em F é uma função definida de $L^+ \times TF$ em $\{0, 1\}$, tal que:

i) se α é atômica, $vFf(\alpha, t) = 1$ sse $f(\alpha, t) = 1$

ii) $vFf(\neg\alpha, t) = 1$ sse $vFf(\alpha, t) = 0$

iii) $vFf(\alpha \to \beta, t) = 0$ sse $vFf(\alpha, t) = 1$ e $vFf(\beta, t) = 0$

iv) $vFf(P(\alpha), t) = 1$ sse há em TF algum instante $u < t$ tal que $vFf(\alpha, u) = 1$

v) $vFf(F(\alpha), t) = 1$ sse há em TF algum instante u tal que $t < u$ e $vFf(\alpha, u) = 1$

vi) $vFf(PC(\alpha), t) = 1$ sse há em TF um instante $u < t$ tal que $vFf(\alpha, i) = 1$ para todo instante de tempo i no intervalo $[u, t]$

vii) $vFf(I(\alpha), t) = 1$ sse há em TF um instante u e um instante v, tais que $u < v < t$ e $vFf(\alpha, i) = 1$ para todo instante de tempo i no intervalo $[u, v]$.

Como estamos usando expressões da forma $\alpha \wedge \beta$ para abreviar fórmulas da forma $\neg(\alpha \to \neg\beta)$, expressões da forma $\alpha \vee \beta$ para abreviar fórmulas da forma $\neg\alpha \to \beta$, expressões forma $G\alpha$ para abreviar fórmulas da forma $\neg F \neg \alpha$, e ainda expressões forma $H\alpha$ para abreviar fórmulas da forma $\neg P \neg \alpha$, segue-se diretamente da definição 2.4 que: a) $vFf(\alpha \wedge \beta, t) = 1$ sse $vFf(\alpha, t) = vFf(\beta, t) = 1$; b) $vFf(\alpha \vee \beta, t) = 0$ sse $vFf(\alpha, t) = vFf(\beta, t) = 0$; c) $vFf(G\alpha, t) = 1$ sse $vFf(\alpha, u) = 1$ para todo $u \in TF$ tal que $t < u$; e d) $vFf(H\alpha, t) = 1$ sse $vFf(\alpha, u) = 1$ para todo $u \in TF$ tal que $u < t$.

Definição 2.3. Uma fórmula α é válida em uma frame $F = (TF, <)$ (em símbolos $\models F\alpha$) sse $vFf(\alpha, t) = 1$ para toda valoração vFf em F e todo instante de tempo $t \in TF$.

Definição 2.4. Uma fórmula α é válida sobre um conjunto K de frames (em símbolos $\models K\alpha$) sse α é válida em F para toda frame $F \in K$.

Definição 2.5. Um sistema formal S é decidível sse é possível construir um algoritmo[1] que, ao receber como entrada uma fórmula α qualquer da linguagem formal de S, devolve, digamos, 1 se α é um teorema de S, e 0 no caso contrário.

3. O sistema formal T

Por fim, vamos introduzir o sistema formal T, cuja decidibilidade será demonstrada na sequência, dadas condições a serem especificadas.

Definição 3.1. O sistema formal T é o par ordenado (LT, PT), onde $LT = L^+$, e $PT = AXT \cup RDT$, isto é, a linguagem formal LT de T é a linguagem L^+, e o conjunto PT dos postulados de T é o resultado da união do conjunto AXT dos axiomas de T com o conjunto RDT das regras de dedução de T, onde:

i) $AXT = AXpT \cup AXcT$, onde $AXpT$, o conjunto dos axiomas proposicionais de T, é dado por $\{\alpha \in L^+ \mid \alpha$ tem uma das formas *AXp1, AXp2, AXp3*$\}$, e $AXcT$, o conjunto dos axiomas característicos de T, é dado por $\{\alpha \in L^+ \mid \alpha$ tem uma das formas *AXc0a, AXc0b, AXc0c, AXc0d, AXc1a, AXc1b, AXc2a, AXc2b, AXc6a, AXc6b, AXi1, AXi2, AXpc1, AXpc2, AXpc3*$\}$, sendo:

- $AXp1 = \alpha \to (\beta \to \alpha)$
- $AXp2 = (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
- $AXp3 = (\neg\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\beta \to \alpha) \to \beta)$
- $AXc0a = G(\alpha \to \beta) \to (G\alpha \to G\beta)$
- $AXc0b = H(\alpha \to \beta) \to (H\alpha \to H\beta)$
- $AXc0c = \alpha \to GP\alpha$
- $AXc0d = \alpha \to HF\alpha$
- $AXc1a = G\alpha \to GG\alpha$
- $AXc1b = H\alpha \to HH\alpha$
- $AXc2a = (F\alpha \wedge F\beta) \to (F(\alpha \wedge F\beta) \vee F(\alpha \wedge \beta) \vee F(F\alpha \wedge \beta))$
- $AXc2b = (P\alpha \wedge P\beta) \to (P(\alpha \wedge P\beta) \vee P(\alpha \wedge \beta) \vee P(P\alpha \wedge \beta))$
- $AXc6a = (\alpha \wedge H\alpha) \to FH\alpha$
- $AXc6b = (\alpha \wedge G\alpha) \to PG\alpha$
- $AXi1 = I\alpha \to P(PC\alpha)$
- $AXi2 = P(PC\alpha) \to I\alpha$

- $AXpc1 = PC\alpha \to \alpha$
- $AXpc2 = (P\alpha \wedge \beta \wedge \neg PC\beta \wedge PC\gamma) \to P((\alpha \vee P\alpha) \wedge \neg\beta \wedge \gamma)$
- $AXpc3 = (F\alpha \wedge \beta \wedge \neg\gamma) \to F((\alpha \vee F\alpha) \wedge (\neg\beta \vee PC\beta) \wedge \neg PC\gamma)$

ii) $RDT = \{MP, GTp, GTf\}$, onde $MP = \{(\alpha,\beta,\gamma) \in L^{+3} \mid \alpha$ tem a forma $\varphi \to \psi, \beta = \varphi$ e $\gamma = \psi\}$, $GTp = \{(\alpha,\beta) \in L^{+2} \mid \alpha = \varphi$ e $\beta = H\varphi\}$, e $GTf = \{(\alpha,\beta) \in L^{+2} \mid \alpha = \varphi$ e $\beta = G\varphi\}$.

Definição 3.2. Seja α uma fórmula de L^+; então, uma prova de α em T é uma sequência $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de fórmulas de L^+, com $n < \omega$, tal que $\alpha_n = \alpha$, e, para cada $\alpha_i, 1 \leq i \leq n$, $\alpha_i \in AXT$, ou α_i foi obtida de fórmulas anteriores na sequência, por meio de aplicação de uma regra de dedução de RDT; α é um teorema de T (em símbolos: $\vdash T\alpha$), ou simplesmente um teorema, sse há uma prova de α em T.

4. Prova condicional da decidibilidade de T

Vamos agora provar que T é decidível, em condições que serão especificadas a seguir. Considere-se, para essa finalidade, a linguagem $Lm2$ para um fragmento do cálculo de predicados de 2ª ordem monádico, e a tradução TR de L^+ em $Lm2$.

Definição 4.1. O alfabeto $m2$ é o conjunto de símbolos $m2 = \{<, =, P_1, P_2, P_3, \ldots, x_0, x_1, x_2, x_3, \to, \neg, \exists,), (\}$, onde $<$ e $=$ são constantes predicativas; $\{P_1, P_2, P_3, \ldots\}$ é um conjunto denumerável de variáveis predicativas monádicas; $\{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ é um conjunto denumerável de variáveis individuais; $\to$ e $\neg$ são chamados de operadores lógicos, respectivamente, da implicação e da negação, $\exists$ é o quantificador existencial, e) e (são sinais de pontuação.

Definição 4.2. Seja $E(m2)$ o conjunto de todas as sequências finitas de elementos de $m2$; então, a linguagem formal sobre $m2$, que designaremos por $Lm2$, é o menor subconjunto de $E(m2)$ que satisfaz as seguintes condições:

i) se α tem forma $x_i < x_j, x_i = x_j$, ou $P_k x_i$, para $i, j \geq 0$ e $k \geq 1$, então $\alpha \in Lm2$, e dizemos que α é uma fórmula atômica de $Lm2$

ii) se $\alpha \in Lm2$, então $\neg\alpha \in Lm2$

iii) se $\alpha, \beta \in Lm2$, então $(\alpha \to \beta) \in Lm2$

iv) se $\alpha \in Lm2$, então $\exists x_i \alpha \in Lm2$, onde x_i é uma variável individual que ocorre livre em α

Um elemento qualquer de $Lm2$ é uma fórmula de $Lm2$.

Note-se que não estamos permitindo quantificação sobre variáveis predicativas em $Lm2$, de modo que só há quantificação de 1ª ordem em $Lm2$. Continuamos admitindo as convenções notacionais de costume, como a introdução dos operadores $\wedge, \vee$ e $\leftrightarrow$ por definição a partir de $\neg$ e $\rightarrow$, além da introdução do quantificador universal $\forall$, de modo tal que a notação $\forall x_i \alpha$ vai ser tomada como uma abreviação para a fórmula $\neg\exists x_i \neg\alpha$. A notação $x_i < x_j < x_k$ vai ser tomada como uma abreviação para a fórmula $x_i < x_j \wedge x_j < x_k$, e a notação $x_i \leq x_j$ vai abreviar a fórmula $x_i < x_j \vee x_i = x_j$.

Definição 4.3. A tradução TR é uma função de L^+ em $Lm2$, tal que:

i) $TR(p_i) = P_i x_0$
ii) $TR(\neg\alpha) = \neg TR(\alpha)$
iii) $TR(\alpha \rightarrow \beta) = TR(\alpha) \rightarrow TR(\beta)$
iv) $TR(P\alpha) = \exists x_1(x_1 < x_0 \wedge \alpha[x_n/x_{n+1}])$
v) $TR(F\alpha) = \exists x_1(x_0 < x_1 \wedge \alpha[x_n/x_{n+1}])$
vi) $TR(PC\alpha) = \exists x_1(x_1 < x_0 \wedge \forall x_2(x_1 \leq x_2 \leq x_0 \rightarrow \alpha[x_n/x_{n+2}]))$
vii) $TR(I\alpha) = \exists x_1 \exists x_2(x_1 < x_2 < x_0 \wedge \forall x_3(x_1 \leq x_3 \leq x_2 \rightarrow \alpha[x_n/x_{n+3}]))$

onde $\alpha[x_n] = TR(\alpha)$, e $\alpha[x_n/x_{n+j}]$ é a fórmula que resulta de $\alpha[x_n]$ por substituição de cada variável individual x_n em $\alpha[x_n]$ por x_{n+j}.

Como $\alpha \wedge \beta$ abrevia $\neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$, temos que $TR(\alpha \wedge \beta) = TR(\neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)) = \neg TR(\alpha \rightarrow \neg\beta) = \neg(TR(\alpha) \rightarrow TR(\neg\beta)) = \neg(TR(\alpha) \rightarrow \neg TR(\beta)) = TR(\alpha) \wedge TR(\beta)$; como $\alpha \vee \beta$ abrevia $\neg\alpha \rightarrow \beta$, $TR(\alpha \vee \beta) = TR(\neg\alpha \rightarrow \beta) = TR(\neg\alpha) \rightarrow TR(\beta) = \neg TR(\alpha) \rightarrow TR(\beta) = TR(\alpha) \vee TR(\beta)$; como $\alpha \leftrightarrow \beta$ abrevia $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$, temos que $TR(\alpha \leftrightarrow \beta) = TR((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)) = TR(\alpha \rightarrow \beta) \wedge TR(\beta \rightarrow \alpha) = (TR(\alpha) \rightarrow TR(\beta)) \wedge (TR(\beta) \rightarrow TR(\alpha)) = TR(\alpha) \leftrightarrow TR(\beta)$; assim, temos os seguintes desdobramentos da def. 4.3:

iiib) $TR(\alpha \wedge \beta) = TR(\alpha) \wedge TR(\beta)$
iiic) $TR(\alpha \vee \beta) = TR(\alpha) \vee TR(\beta)$
iiid) $TR(\alpha \leftrightarrow \beta) = TR(\alpha) \leftrightarrow TR(\beta)$.

É importante notar que, além do fato de que $Lm2$ não admite quantificação sobre variáveis predicativas, a imagem de TR não corresponde a toda a linguagem $Lm2$, mas a um fragmento mais restrito dela, que possui só fórmulas com exatamente uma variável individual livre, a qual sempre será x_0.

Para melhorar a legibilidade das fórmulas, vamos usar F, G e H em lugar, respectivamente, de P_1, P_2 e P_3, e t, x, y e z no lugar, respectivamente, de x_0, x_1, x_2, e x_3.

Exemplo 4.4. Considere-se a instância de $AXpc2\alpha = (Pp_1 \wedge p_2 \wedge \neg PCp_2 \wedge PCp_3) \to P((p_1 \vee Pp_1) \wedge \neg p_2 \wedge p_3)$; vamos obter $TR(\alpha)$:

1) $TR(p_1) = P_1x_0$; por i)
2) $TR(p_2) = P_2x_0$; por i)
3) $TR(p_3) = P_3x_0$; por i)
4) $TR(Pp_1) = \exists x_1(x_1 < x_0 \wedge P_1x_1)$; por iv), com $\alpha = p_1; \alpha[x_n] = TR(p_1) = P_1x_0$, e logo $\alpha[x_n/x_{n+1}] = P_1x_1$
5) $TR(PCp_2) = \exists x_1(x_1 < x_0 \wedge \forall x_2(x_1 \leq x_2 \leq x_0 \to P_2x_2))$; por vi), com $\alpha = p_2; \alpha[x_n] = TR(p_2) = P_2x_0$, e logo $\alpha[x_n/x_{n+2}] = P_2x_2$
6) $TR(\neg PCp_2) = \neg TR(PCp_2) = \neg\exists x_1(x_1 < x_0 \wedge \forall x_2(x_1 \leq x_2 \leq x_0 \to P_2x_2))$; por ii)
7) $TR(PCp_3) = \exists x_1(x_1 < x_0 \wedge \forall x_2(x_1 \leq x_2 \leq x_0 \to P_3x_2))$; por vi), com $\alpha = p_3; \alpha[x_n] = TR(p_3) = P_3x_0$, e logo $\alpha[x_n/x_{n+2}] = P_3x_2$
8) $TR(Pp_1 \wedge p_2 \wedge \neg PCp_2 \wedge PCp_3) = TR(Pp_1) \wedge TR(p_2) \wedge TR(\neg PCp_2) \wedge TR(PCp_3) = \exists x_1(x_1 < x_0 \wedge P_1x_1) \wedge P_2x_0 \wedge \neg\exists x_1(x_1 < x_0 \wedge \forall x_2(x_1 \leq x_2 \leq x_0 \to P_2x_2)) \wedge \exists x_1(x_1 < x_0 \wedge \forall x_2(x_1 \leq x_2 \leq x_0 \to P_3x_2))$; por $iiib$)
9) $TR(p_1 \vee Pp_1) = TR(p_1) \vee TR(Pp_1) = P_1x_0 \vee \exists x_1(x_1 < x_0 \wedge P_1x_1)$; por $iiic$)
10) $TR(\neg p_2) = \neg TR(p_2) = \neg P_2x_0$; por ii)
11) $TR((p_1 \vee Pp_1) \wedge \neg p_2 \wedge p_3) = TR(p_1 \vee Pp_1) \wedge TR(\neg p_2) \wedge TR(p_3) = (P_1x_0 \vee \exists x_1(x_1 < x_0 \wedge P_1x_1)) \wedge \neg P_2x_0 \wedge P_3x_0$; por $iiib$)
12) $TR(P((p_1 \vee Pp_1) \wedge \neg p_2 \wedge p_3)) = \exists x_1(x_1 < x_0 \wedge ((P_1x_1 \vee \exists x_2(x_2 < x_1 \wedge P_1x_2)) \wedge \neg P_2x_1 \wedge P_3x_1))$; por iv), com $\alpha = (p_1 \vee Pp_1) \wedge \neg p_2 \wedge p_3); \alpha[x_n] = TR((p_1 \vee Pp_1) \wedge \neg p_2 \wedge p_3)) = (P_1x_0 \vee \exists x_1(x_1 < x_0 \wedge P_1x_1)) \wedge \neg P_2x_0 \wedge P_3x_0$, e logo $\alpha[x_n/x_{n+1}] = (P_1x_1 \vee \exists x_2(x_2 < x_1 \wedge P_1x_2)) \wedge \neg P_2x_1 \wedge P_3x_1$

13) $TR((Pp_1 \wedge p_2 \wedge \neg PCp_2 \wedge PCp_3) \to P((p_1 \vee Pp_1) \wedge \neg p_2 \wedge p_3)) = TR(Pp_1 \wedge p_2 \wedge \neg PCp_2 \wedge PCp_3) \to TR(P((p_1 \vee Pp_1) \wedge \neg p_2 \wedge p_3)) = (\exists x_1(x_1 < x_0 \wedge P_1x_1) \wedge P_2x_0 \wedge \neg\exists x_1(x_1 < x_0 \wedge \forall x_2(x_1 \leq x_2 \leq x_0 \to P_2x_2)) \wedge \exists x_1(x_1 < x_0 \wedge \forall x_2(x_1 \leq x_2 \leq x_0 \to P_3x_2))) \to (\exists x_1(x_1 < x_0 \wedge ((P_1x_1 \vee \exists x_2(x_2 < x_1 \wedge P_1x_2)) \wedge \neg P_2x_1 \wedge P_3x_1)))$; por iii)

aplicando as convenções mencionadas mais acima, para melhorar a legibilidade, temos:
$(\exists x(x < t \wedge Fx) \wedge Gt \wedge \neg\exists x(x < t \wedge \forall y(x \leq y \leq t \to Gy)) \wedge \exists x(x < t \wedge \forall y(x \leq y \leq t \to Hy))) \to (\exists x(x < t \wedge ((Fx \vee \exists y(y < x \wedge Fy)) \wedge \neg Gx \wedge Hx)))$.

Exemplo 4.5. Considere-se a instância de $AXi1\alpha = Ip_1 \to P(PCp_1)$; vamos obter $TR(\alpha)$:

1) $TR(p_1) = P_1x_0$; por i)
2) $TR(Ip_1) = \exists x_1\exists x_2(x_1 < x_2 < x_0 \wedge \forall x_3(x_1 \leq x_3 \leq x_2 \to P_1x_3))$; por vii), com $\alpha = p_1; \alpha[x_n] = TR(p_1) = P_1x_0$, e logo $\alpha[x_n/x_{n+3}] = P_1x_3$
3) $TR(PCp_1) = \exists x_1(x_1 < x_0 \wedge \forall x_2(x_1 \leq x_2 \leq x_0 \to P_1x_2))$; por vi), com $\alpha = p_1; \alpha[x_n] = TR(p_1) = P_1x_0$, e logo $\alpha[x_n/x_{n+2}] = P_1x_2$
4) $TR(P(PCp_1)) = \exists x_1(x_1 < x_0 \wedge \exists x_2(x_2 < x_1 \wedge \forall x_3(x_2 \leq x_3 \leq x_1 \to P_1x_3)))$; por iv), com $\alpha = PCp_1; \alpha[x_n] = TR(PCp_1) = \exists x_1(x_1 < x_0 \wedge \forall x_2(x_1 \leq x_2 \leq x_0 \to P_1x_2))$, e logo $\alpha[x_n/x_{n+1}] = \exists x_2(x_2 < x_1 \wedge \forall x_3(x_2 \leq x_3 \leq x_1 \to P_1x_3))$
5) $TR(Ip_1 \to P(PCp_1)) = TR(Ip_1) \to TR(P(PCp_1)) = \exists x_1\exists x_2(x_1 < x_2 < x_0 \wedge \forall x_3(x_1 \leq x_3 \leq x_2 \to P_1x_3)) \to \exists x_1(x_1 < x_0 \wedge \exists x_2(x_2 < x_1 \wedge \forall x_3(x_2 \leq x_3 \leq x_1 \to P_1x_3)))$; por iii)

aplicando as convenções mencionadas mais acima, para melhorar a legibilidade, temos:
$\exists x\exists y(x < y < t \wedge \forall z(x \leq z \leq y \to Fz)) \to \exists x(x < t \wedge \exists y(y < x \wedge \forall z(y \leq z \leq x \to Fz)))$.

Vamos agora estabelecer a semântica de $Lm2$, de um modo que essa linguagem possa ser utilizada para veicular informação acerca de ordens lineares discretas sem mínimo ou máximo.

Definição 4.6. Uma ld-estrutura E é um par-ordenado (D, I), onde D é um conjunto denumerável qualquer, e I é uma função de $\{<, =\}$ em D^2, tal que:

i) $I(<)$ é uma ordem linear discreta sem mínimo ou máximo $R \subset D^2$

ii) $I(=) = \{(x,x) \mid x \in D\}$.

Definição 4.7. Dada uma ld-estrutura $E = (D, I)$, as atribuições σE e τE são, respectivamente, uma função do conjunto das variáveis individuais de $Lm2$ em D, e uma função do conjunto das variáveis predicativas de $Lm2$ em $P(D)$ (o conjunto das partes de D), isto é, $\sigma E(x_i) \in D$ para todo $i \geq 0$, e $\tau E(P_j) \subseteq D$, para todo $j > 0$.

Definição 4.8. Se uma atribuição $\sigma E'$ é idêntica a uma atribuição σE, exceto, no máximo, que $\sigma E'(x_i) \neq \sigma E(x_i)$, então, dizemos que $\sigma E'$ é x_i-variante de σE.

Definição 4.9. Dada uma ld-estrutura $E = (D, I)$, uma valoração é uma função $v^{\sigma E \tau E}$ de $Lm2$ em $\{0, 1\}$, tal que:

i) $v^{\sigma E \tau E}(x_i < x_j) = 1$ sse $(\sigma E(x_i), \sigma E(x_j)) \in I(<)$

ii) $v^{\sigma E \tau E}(x_i = x_j) = 1$ sse $(\sigma E(x_i), \sigma E(x_j)) \in I(=)$

iii) $v^{\sigma E \tau E}(P_j x_i) = 1$ sse $\sigma E(x_i) \in \tau E(P_j)$

iv) $v^{\sigma E \tau E}(\neg\alpha) = 1$ sse $v^{\sigma E \tau E}(\alpha) = 0$

v) $v^{\sigma E \tau E}(\alpha \to \beta) = 0$ sse $v^{\sigma E \tau E}(\alpha) = 1$ e $v^{\sigma E \tau E}(\beta) = 0$

vi) $v^{\sigma E \tau E}(\exists x_i \alpha) = 1$ sse $v^{\sigma E' \tau E}(\alpha) = 1$ para alguma atribuição $\sigma E'$ x_i-variante de σE.

As verificações costumeiras mostram que $v^{\sigma E \tau E}(\alpha \wedge \beta) = 1$ sse $v^{\sigma E \tau E}(\alpha) = v^{\sigma E \tau E}(\beta) = 1, v^{\sigma E \tau E}(\alpha \vee \beta) = 0$ sse $v^{\sigma E \tau E}(\alpha) = v^{\sigma E \tau E}(\beta) = 0$, e $v^{\sigma E \tau E}(\forall x_i \alpha) = 1$ sse $v^{\sigma E' \tau E}(\alpha) = 1$ para toda atribuição $\sigma E'$ x_i-variante de σE. Também são conhecidos resultados envolvendo atribuições e valorações , tais como os fatos de que i) se as variáveis individuais livres de α ocorrem na sequência $x_{i_1}, x_{i_2} \ldots, x_{i_k}, \alpha'$ resulta de α pela substituição de cada variável individual x_{i_m} por x_{j_m}, e $\sigma E(x_{i_m}) = \sigma E'(x_{j_m})$, para $1 \leq m \leq k$, então $v^{\sigma E \tau E}(\alpha) = 1$ sse $v^{\sigma E' \tau E}(\alpha') = 1$; e ii) o caso particular do fato i), de que se as variáveis individuais livres de α ocorrem na sequência $x_{i_1}, x_{i_2} \ldots, x_{i_k}$, e $\sigma E(x_{i_m}) = \sigma E'(x_{i_m})$, para $1 \leq m \leq k$, então $v^{\sigma E \tau E}(\alpha) = 1$ sse $v^{\sigma E' \tau E}(\alpha) = 1$. Resultados como esses serão pressupostos nas demonstrações a seguir.

Definição 4.10. Dizemos que uma fórmula α de $Lm2$ é verdadeira na ld-estrutura E, e escrevemos $E \models \alpha$, sse $v^{\sigma E \tau E}(\alpha) = 1$ dadas quaisquer atribuições σE e τE; α é válida sse $E \models \alpha$ dada qualquer ld-estrutura E.

Lema 4.11. *Seja α uma fórmula qualquer de L^+, $F = (TF, < F)$ uma d-frame, e $t \in TF$; temos que $vFf(\alpha, t) = 1$ sse $v^{\sigma E \tau E}(TR(\alpha)) = 1$, para toda ld-estrutura $E = (D, I)$ tal que $D = TF$ e $I(<) =< F$, para toda atribuição σE tal que $\sigma E(x_0) = t$, e para toda atribuição τE tal que $f(p_i, u) = 1$ sse $u \in \tau E(P_i)$.*

Prova: Indução completa sobre o número n de operadores em α
Base: $n = 0$; α é atômica, e logo é uma variável proposicional p_i
$\rightarrow$) suponha que $vFf(\alpha, t) = vFf(p_i, t) = 1$; segue-se pela definição 2.2 que $f(p_i, t) = 1$; mas então temos que $t \in \tau E(P_i)$; e como $\sigma E(x_0) = t$, temos que $\sigma E(x_0) \in \tau E(P_i)$, donde se segue pela definição 4.9 que $v^{\sigma E \tau E}(P_i x_0) = 1$; mas $TR(p_i) = P_i x_0$, e logo $v^{\sigma E \tau E}(TR(p_i)) = 1$
$\leftarrow$) suponha agora que $v^{\sigma E \tau E}(TR(p_i)) = v^{\sigma E \tau E}(P_i x_0) = 1$; segue-se pela definição 4.9 que $\sigma E(x_0) \in \tau E(P_i)$; e como $\sigma E(x_0) = t$, temos que $t \in \tau E(P_i)$; mas daí se segue que $f(p_i, t) = 1$, donde temos, pela definição 2.2, que $vFf(p_i, t) = 1$

Hipótese de indução (HI): $vFf(\varphi, t) = 1$ sse $v^{\sigma E \tau E}(TR(\varphi)) = 1$, dadas as condições deste lema, para toda fórmula φ de L^+ cujo número k de operadores é menor que n
Passo de indução:
- caso i: $\alpha = \neg\beta$
$\rightarrow$) suponha que $vFf(\alpha, t) = vFf(\neg\beta, t) = 1$; logo $vFf(\beta, t) = 0$; por HI, $v^{\sigma E \tau E}(TR(\beta)) = 0$, e logo $v^{\sigma E \tau E}(\neg TR(\beta)) = 1$; como, por def. 4.3, $\neg TR(\beta) = TR(\neg\beta)$, temos que $v^{\sigma E \tau E}(TR(\neg\beta)) = v^{\sigma E \tau E}(TR(\alpha)) = 1$;
$\leftarrow$) agora suponha que $v^{\sigma E \tau E}(TR(\alpha)) = v^{\sigma E \tau E}(TR(\neg\beta)) = v^{\sigma E \tau E}(\neg TR(\beta)) = 1$; segue-se que $v^{\sigma E \tau E}(TR(\beta)) = 0$, e daí, por HI, temos que $vFf(\beta, t) = 0$; segue-se que $vFf(\neg\beta, t) = vFf(\alpha, t) = 1$
- caso ii: $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$
$\rightarrow$) suponha que $v^{\sigma E \tau E}(TR(\alpha)) = v^{\sigma E \tau E}(TR(\beta \rightarrow \gamma)) = 0$; temos por def. 4.3 que $v^{\sigma E \tau E}(TR(\beta) \rightarrow (TR(\gamma)) = 0$, donde se segue por def. 4.9 que $v^{\sigma E \tau E}(TR(\beta)) = 1$ e $v^{\sigma E \tau E}(TR(\gamma)) = 0$; por HI, temos que $vFf(\beta, t) = 1$ e $vFf(\gamma, t) = 0$, donde se segue por def. 2.2 que $vFf(\beta \rightarrow \gamma, t) = vFf(\alpha, t) = 0$; assim, $v^{\sigma E \tau E}(TR(\alpha)) = 0$ implica que $vFf(\alpha, t) = 0$, donde se segue pela contrapositiva que $vFf(\alpha, t) = 1$ implica $v^{\sigma E \tau E}(TR(\alpha)) = 1$;

$\leftarrow$) agora suponha que $vFf(\alpha,t) = vFf(\beta \to \gamma,t) = 0$; segue-se por def. 2.2 que $vFf(\beta,t) = 1$ e $vFf(\gamma,t) = 0$; daí, temos por HI que $v^{\sigma E\tau E}(TR(\beta)) = 1$ e $v^{\sigma E\tau E}(TR(\gamma)) = 0$, donde se segue por def. 4.9 que $v^{\sigma E\tau E}(TR(\beta) \to (TR(\gamma)) = 0$; temos então por def. 4.3 que $v^{\sigma E\tau E}(TR(\beta \to \gamma)) = v^{\sigma E\tau E}(TR(\alpha)) = 0$; assim, $vFf(\alpha,t) = 0$ implica que $v^{\sigma E\tau E}(TR(\alpha)) = 0$, donde se segue pela contrapositiva que $v^{\sigma E\tau E}(TR(\alpha)) = 1$ implica que $vFf(\alpha,t) = 1$

- caso iii: $\alpha = P\beta$

$\to$) suponha que $vFf(\alpha,t) = vFf(P\beta,t) = 1$; logo $vFf(\beta,u) = 1$, para algum $u < Ft$; segue-se por HI que $v^{\sigma E'\tau E}(TR(\beta)) = v^{\sigma E'\tau E}(\beta[x_n]) = 1$, para toda atribuição $\sigma E'$ tal que $\sigma E'(x_0) = u$, e para toda atribuição τE com as características especificadas no enunciado do lema; por uma questão de economia de linguagem, vamos nos abster, no que segue, de mencionar o fato de que τE satisfaz essas condições; agora, considere uma atribuição $\sigma E''$ tal que $\sigma E''(x_i) = \sigma E'(x_{i-1})$, para $i \neq 0$, e $\sigma E''(x_0) = t$; temos que $\sigma E''(x_1) = \sigma E'(x_0) = u$; como x_0 é a única variável individual livre em $\beta[x_n]$, obviamente x_1 é a única variável individual livre em $\beta[x_n/x_{n+1}]$, e como $\sigma E''(x_1) = \sigma E'(x_0) = u$, e $v^{\sigma E'\tau E}(\beta[x_n]) = 1$, temos que $v^{\sigma E''\tau E}(\beta[x_n/x_{n+1}]) = 1$; e como $u < Ft, \sigma E''(x_1) = u, \sigma E''(x_0) = t$, e $I(<) =< F$, temos que $(\sigma E''(x_1), \sigma E''(x_0)) \in I(<)$, donde se segue por def. 4.9 que $v^{\sigma E''\tau E}(x_1 < x_0) = 1$; mas então temos que $v^{\sigma E''\tau E}(x_1 < x_0 \wedge \beta[x_n/x_{n+1}]) = 1$; ora, como evidentemente toda atribuição é x_i-variante de si própria para qualquer x_i, temos que $\sigma E''$ é x_1-variante de si própria, e logo há uma atribuição σE x_1-variante de $\sigma E''$ tal que $v^{\sigma E\tau E}(x_1 < x_0 \wedge \beta[x_n/x_{n+1}]) = 1$; segue-se por def. 4.9 que $v^{\sigma E''\tau E}(\exists x_1(x_1 < x_0 \wedge \beta[x_n/x_{n+1}])) = v^{\sigma E''\tau E}(TR(\alpha)) = 1$; mas como a única variável individual livre de $TR(\alpha)$ é x_0, e $\sigma E''(x_0) = t$, temos que $v^{\sigma E\tau E}(TR(\alpha)) = 1$, para toda atribuição σE tal que $\sigma E(x_0) = t$;

$\leftarrow$) suponha que $v^{\sigma E\tau E}(TR(\alpha)) = v^{\sigma E\tau E}(\exists x_1(x_1 < x_0 \wedge \beta[x_n/x_{n+1}])) = 1$ para toda atribuição σE tal que $\sigma E(x_0) = t$; segue-se por def. 4.9 que $v^{\sigma E'\tau E}(x_1 < x_0 \wedge \beta[x_n/x_{n+1}]) = 1$, para alguma atribuição $\sigma E'$ x_1-variante de σE, e daí que $v^{\sigma E'\tau E}(x_1 < x_0) = v^{\sigma E'\tau E}(\beta[x_n/x_{n+1}]) = 1$; agora, considere qualquer atribuição $\sigma E''$ tal que $\sigma E''(x_0) = \sigma E'(x_1)$; como a única variável individual livre em $\beta[x_n/x_{n+1}]$ é x_1, a única variável individual livre em $\beta[x_n]$ é x_0, $v^{\sigma E'\tau E}(\beta[x_n/x_{n+1}]) = 1$, e $\sigma E''(x_0) = \sigma E'(x_1)$, temos que $v^{\sigma E''\tau E}(\beta[x_n]) = v^{\sigma E''\tau E}(TR(\beta)) = 1$, para qualquer atribuição $\sigma E''$ tal que $\sigma E''(x_0) = \sigma E'(x_1)$; considere agora que $\sigma E''(x_0) = u$; temos por HI que $vFf(\beta,u) = 1$; como

$v^{\sigma E'\tau E}(x_1 < x_0) = 1$, temos por def. 4.9 que $(\sigma E'(x1), \sigma E'(x0)) \in I(<)$; mas $\sigma E'(x1) = \sigma E''(x0) = u$, e $\sigma E'(x0) = \sigma E(x0) = t$, já que $\sigma E'$ é x_1-variante de σE, e portanto só difere de σE no valor atribuído a x_1; assim, $(u,t) \in I(<) =< F$, isto é, $u < Ft$; mas se $u < Ft$ e $vFf(\beta, u) = 1$, temos por def. 2.2 que $vFf(P\beta, t) = vFf(\alpha, t) = 1$

- caso iv: $\alpha = F\beta$

$\rightarrow$) suponha que $vFf(\alpha,t) = vFf(F\beta,t) = 1$; logo $vFf(\beta,u) = 1$, para algum u tal que $t < Fu$; segue-se por HI que $v^{\sigma E'\tau E}(TR(\beta)) = v^{\sigma E'\tau E}(\beta[x_n]) = 1$, para toda atribuição $\sigma E'$ tal que $\sigma E'(x_0) = u$; agora, considere uma atribuição $\sigma E''$ tal que $\sigma E"(x_i) = \sigma E'(x_{i-1})$, para $i \neq 0$, e $\sigma E"(x_0) = t$; temos que $\sigma E"(x_1) = \sigma E'(x_0) = u$; como x_0 é a única variável individual livre em $\beta[x_n]$, obviamente x_1 é a única variável individual livre em $\beta[x_n/x_{n+1}]$, e como $\sigma E"(x_1) = \sigma E'(x_0) = u$, e $v^{\sigma E'\tau E}(\beta[x_n]) = 1$, temos que $v^{\sigma E"\tau E}(\beta[x_n/x_{n+1}]) = 1$; e como $t < Fu$, $\sigma E"(x_1) = u$, $\sigma E"(x_0) = t$, e $I(<) =< F$, temos que $(\sigma E"(x_0), \sigma E"(x_1)) \in I(<)$, donde se segue por def. 4.9 que $v^{\sigma E"\tau E}(x_0 < x_1) = 1$; mas então temos que $v^{\sigma E"\tau E}(x_0 < x_1 \wedge \beta[x_n/x_{n+1}]) = 1$; ora, como evidentemente toda atribuição é x_i-variante de si própria para qualquer x_i, temos que $\sigma E"$ é x_1-variante de si própria, e logo há uma atribuição σE x_1-variante de $\sigma E"$ tal que $v^{\sigma E\tau E}(x_0 < x_1 \wedge \beta[x_n/x_{n+1}]) = 1$; segue-se por def. 4.9 que $v^{\sigma E"\tau E}(\exists x_1(x_0 < x_1 \wedge \beta[x_n/x_{n+1}])) = v^{\sigma E\tau E}(TR(\alpha)) = 1$; mas como a única variável individual livre de $TR(\alpha)$ é x_0, e $\sigma E"(x_0) = t$, temos que $v^{\sigma E\tau E}(TR(\alpha)) = 1$, para toda atribuição σE tal que $\sigma E(x_0) = t$;

$\leftarrow$) suponha que $v^{\sigma E\tau E}(TR(\alpha)) = v^{\sigma E\tau E}(\exists x_1(x_0 < x_1 \wedge \beta[x_n/x_{n+1}])) = 1$ para toda atribuição σE tal que $\sigma E(x_0) = t$; segue-se por def. 4.9 que $v^{\sigma E'\tau E}(x_0 < x_1 \wedge \beta[x_n/x_{n+1}]) = 1$, para alguma atribuição $\sigma E'$ x_1-variante de σE, e daí que $v^{\sigma E'\tau E}(x_0 < x_1) = v^{\sigma E'\tau E}(\beta[x_n/x_{n+1}]) = 1$; agora, considere qualquer atribuição $\sigma E"$ tal que $\sigma E"(x_0) = \sigma E'(x_1)$; como a única variável individual livre em $\beta[x_n/x_{n+1}]$ é x_1, a única variável individual livre em $\beta[x_n]$ é x_0, $v^{\sigma E'\tau E}(\beta[x_n/x_{n+1}]) = 1$, e $\sigma E"(x_0) = \sigma E'(x_1)$, temos que $v^{\sigma E"\tau E}(\beta[x_n]) = v^{\sigma E"\tau E}(TR(\beta)) = 1$, para qualquer atribuição $\sigma E"$ tal que $\sigma E"(x_0) = \sigma E'(x_1)$; considere agora que $\sigma E"(x_0) = u$; segue-se por HI que $vFf(\beta,u) = 1$; como $v^{\sigma E'\tau E}(x_0 < x_1) = 1$, temos por def. 4.9 que $(\sigma E'(x_0), \sigma E'(x_1)) \in I(<)$; mas $\sigma E'(x_1) = \sigma E"(x_0) = u$, e $\sigma E'(x_0) = \sigma E(x_0) = t$, já que $\sigma E'$ é x_1-variante de σE, e portanto só difere de σE no valor atribuído a x_1; assim, $(t,u) \in I(<) =< F$, isto é, $t < Fu$; mas se $t < Fu$ e $vFf(\beta,u) = 1$, temos por def. 2.2 que $vFf(F\beta,t) = vFf(\alpha,t) = 1$

- caso v: $\alpha = PC\beta$

$\rightarrow$) suponha que $vFf(\alpha, t) = vFf(PC\beta, t) = 1$; logo há um $u < Ft$ tal que $vFf(\beta, i) = 1$, para todo $i \in [u, t]$; segue-se por HI que $v^{\sigma E'\tau E}(TR(\beta)) = v^{\sigma E'\tau E}(\beta[x_n]) = 1$, para toda atribuição $\sigma E'$ em cada classe de atribuições Σi, tal que $\sigma E'(x_0) = i$, para todo $i \in [u, t]$; agora, para cada atribuição $\sigma E'$ mencionada, considere uma atribuição σE" tal que σE"$(x_j) = \sigma E'(x_{j-2})$, para $j > 1$, σE"$(x_0) = t$, e σE"$(x_1) = u$; temos que σE"$(x_2) = \sigma E'(x_0) = i$; como x_0 é a única variável individual livre em $\beta[x_n]$, obviamente x_2 é a única variável individual livre em $\beta[x_n/x_{n+2}]$, e como σE"$(x_2) = \sigma E'(x_0) = i$, e $v^{\sigma E'\tau E}(\beta[x_n]) = 1$, temos que $v^{\sigma E"\tau E}(\beta[x_n/x_{n+2}]) = 1$, para todas as atribuições σE" sob consideração; mas então, no caso de tais atribuições σE", temos que $v^{\sigma E"\tau E}(x_1 \leq x_2 \leq x_0 \rightarrow \beta[x_n/x_{n+2}]) = 1$, independente do valor de $v^{\sigma E"\tau E}(x_1 \leq x_2 \leq x_0)$; agora, para cada uma de nossas atribuições σE", considerem-se as atribuições $\sigma E'''$ x_2-variantes de σE"; obviamente, para cada uma dessas atribuições, teremos que $\sigma E'''(x_2) \in [u, t]$ ou $\sigma E'''(x_2) \notin [u, t]$; na primeira possibilidade, $\sigma E'''$ é idêntica a uma de nossas atribuições σE", e como $v^{\sigma E"\tau E}(x_1 \leq x_2 \leq x_0 \rightarrow \beta[x_n/x_{n+2}]) = 1$ para todas essas atribuições, temos que $v^{\sigma E'''\tau E}(x_1 \leq x_2 \leq x_0 \rightarrow \beta[x_n/x_{n+2}]) = 1$; na segunda possibilidade, temos que $\sigma E'''(x_2) < Fu$ ou $t < F\sigma E'''(x_2)$, e logo, como $< F$ é anti-reflexiva e anti-simétrica, de $\sigma E'''(x_2) < Fu$ se segue que $u \neq \sigma E'''(x_2)$ e que não é o caso que $u < F\sigma E'''(x_2)$, e de $t < F\sigma E'''(x_2)$ se segue que $\sigma E'''(x_2) \neq t$ e que não é o caso que $\sigma E'''(x_2) < Ft$; como σE"$(x_1) = u$ e σE"$(x_0) = t$ para qualquer de nossas atribuições σE", e como $\sigma E'''$ é x_2-variante de σE" para alguma dessas atribuições σE", temos que $\sigma E'''(x_1) = \sigma E$"$(x_1) = u$, e $\sigma E'''(x_0) = \sigma E$"$(x_0) = t$; assim, temos que ($\sigma$E''' (x1), σE''' (x2)) $\notin$ I (=) e (σE''' (x1), σE''' (x2)) $\notin$ I (<), ou (σE''' (x2), σE''' (x0)) $\notin$ I (=) e (σE''' (x2), σE''' (x0)) $\notin$ I (<); segue-se pela def. 4.7 que v$^{\sigma E''' \tau E}$ (x1 = x2) = 0 e v$^{\sigma E''' \tau E}$ (x1 < x2) = 0, ou v$^{\sigma E''' \tau E}$ (x2 = x0) = 0 e v$^{\sigma E''' \tau E}$ (x2 < x0) = 0; segue-se que v$^{\sigma E''' \tau E}$ (x1 $\leq$ x2) = 0 ou v$^{\sigma E''' \tau E}$ (x2 $\leq$ x0) = 0; em qualquer dos dois casos, temos que v$^{\sigma E''' \tau E}$ (x1 $\leq$ x2 $\wedge$ x2 $\leq$ x0) = 0, ou seja, que v$^{\sigma E''' \tau E}$ (x1 $\leq$ x2 $\leq$ x0) = 0; disso se segue que, de novo, $v^{\sigma E'''\tau E}(x_1 \leq x_2 \leq x_0 \rightarrow \beta[x_n/x_{n+2}]) = 1$; mas então $v^{\sigma E'''\tau E}(x_1 \leq x_2 \leq x0 \rightarrow \beta[x_n/x_{n+2}]) = 1$ para todas essas atribuições $\sigma E'''$ x_2-variantes de σE", e daí se segue pela def. 4.9 que $v^{\sigma E"\tau E}(\forall x_2(x_1 \leq x_2 \leq x_0 \rightarrow \beta[x_n/x_{n+2}])) = 1$; agora, como $u < Ft$, e σE"$(x_1) = u$ e σE"$(x_0) = t$ para qualquer de nossas atribuições σE", temos que $(\sigma E"(x_1), \sigma E"(x_0)) \in I(<)$, donde se segue por def. 4.9 que $v^{\sigma E"\tau E}(x_1 < x_0) = 1$; mas então temos que $v^{\sigma E"\tau E}(x_1 < x_0 \wedge \forall x_2(x_1 \leq x_2 \leq$

$x_0 \rightarrow \beta[x_n/x_{n+2}])) = 1$ para todas as nossas atribuições σE"; ora, como evidentemente toda atribuição é x_j-variante de si própria para qualquer x_j, temos que σE" é x_1-variante de si própria, e logo há uma atribuição σE x_1-variante de σE" tal que $v^{\sigma E \tau E}(x_1 < x_0 \wedge \forall x_2(x_1 \leq x_2 \leq x_0 \rightarrow \beta[x_n/x_{n+2}])) = 1$, para cada uma de nossas atribuições σE"; segue-se por def. 4.9 que $v^{\sigma E" \tau E}(\exists x_1(x_1 < x_0 \wedge \forall x_2(x_1 \leq x_2 \leq x_0 \rightarrow \beta[x_n/x_{n+2}]))) = v^{\sigma E" \tau E}(TR(\alpha)) = 1$ para todas essas atribuições σE"; mas como a única variável individual livre de $TR(\alpha)$ é x_0, e $\sigma E"(x_0) = t$ para todas essas atribuições σE", temos que $v^{\sigma E \tau E}(TR(\alpha)) = 1$, para toda atribuição σE tal que $\sigma E(x_0) = t$;

$\leftarrow$) suponha que $v^{\sigma E \tau E}(TR(\alpha)) = (\exists x_1(x_1 < x_0 \wedge \forall x_2(x_1 \leq x_2 \leq x_0 \rightarrow \beta[x_n/x_{n+2}]))) = 1$ para toda atribuição σE tal que $\sigma E(x_0) = t$; segue-se que $v^{\sigma E' \tau E}(x_1 < x_0 \wedge \forall x_2(x_1 \leq x_2 \leq x_0 \rightarrow \beta[x_n/x_{n+2}])) = 1$ para alguma atribuição $\sigma E'$ x_1-variante de σE, e daí que $v^{\sigma E' \tau E}(x_1 < x_0) = v^{\sigma E' \tau E}(\forall x_2(x_1 \leq x_2 \leq x_0 \rightarrow \beta[x_n/x_{n+2}])) = 1$; de que $v^{\sigma E' \tau E}(\forall x_2(x_1 \leq x_2 \leq x_0 \rightarrow \beta[x_n/x_{n+2}])) = 1$ se segue que $v^{\sigma E" \tau E}(x_1 \leq x_2 \leq x_0 \rightarrow \beta[x_n/x_{n+2}]) = 1$ para toda atribuição σE" x_2-variante de $\sigma E'$; isso acarreta que $v^{\sigma E" \tau E}(\beta[x_n/x_{n+2}]) = 1$ para cada uma dessas atribuições σE", desde que $v^{\sigma E" \tau E}(x_1 \leq x_2 \leq x_0) = 1$; agora, para cada uma das atribuições σE" sob consideração, considere uma atribuição $\sigma E'''$ tal que $\sigma E'''(x_0) = \sigma E''(x_2)$; como a única variável individual livre em $\beta[x_n/x_{n+2}]$ é x_2, a única variável individual livre em $\beta[x_n]$ é x_0, $v^{\sigma E" \tau E}(\beta[x_n/x_{n+2}]) = 1$ para todas as nossas atribuições σE" tais que $v^{\sigma E" \tau E}(x_1 \leq x_2 \leq x_0) = 1$, e $\sigma E'''(x_0) = \sigma E"(x_2)$, temos que $v^{\sigma E''' \tau E}(\beta[x_n]) = v^{\sigma E''' \tau E}(TR(\beta)) = 1$, para qualquer atribuição $\sigma E'''$ tal que $\sigma E'''(x_0) = \sigma E"(x_2)$; considere agora que $\sigma E'''(x_0) = i$; temos por HI que $vFf(\beta, i) = 1$; e como estamos considerando cada atribuição σE" x_2-variante de $\sigma E'$ tal que $v^{\sigma E" \tau E}(x_1 \leq x_2 \leq x_0) = 1$, temos que $vFf(\beta, i) = 1$ para cada $i = \sigma E'''(x_0) = \sigma E"(x_2)$; como $v^{\sigma E" \tau E}(x_1 \leq x_2 \leq x_0) = 1$, temos que $(\sigma E"(x_1), \sigma E"(x_2)) \in I(<)$ ou $(\sigma E"(x_1), \sigma E"(x_2)) \in I(=)$, e que $(\sigma E"(x_2), \sigma E"(x_0)) \in I(<)$ ou $(\sigma E"(x_2), \sigma E"(x_0)) \in I(=)$; ora, $\sigma E"(x_0) = \sigma E'(x_0) = \sigma E(x_0) = t$, já que σE" é x_2-variante de $\sigma E'$ e $\sigma E'$ é x_1-variante de σE; por sua vez, $\sigma E"(x_1) = \sigma E'(x_1)$, visto que σE" é x_2-variante de $\sigma E'$; suponha que $\sigma E'(x_1) = u$; como já vimos que $v^{\sigma E' \tau E}(x_1 < x_0) = 1$, temos por def. 4.9 que $(\sigma E'(x_1), \sigma E'(x_0)) \in I(<)$, isto é, $(u, t) \in I(<) =< F$, ou seja, $u < Ft$; agora vamos retomar os fatos de que $(\sigma E"(x_1), \sigma E"(x_2)) \in I(<)$ ou $(\sigma E"(x_1), \sigma E"(x_2)) \in I(=)$, e que $(\sigma E"(x_2), \sigma E"(x_0)) \in I(<)$ ou $(\sigma E"(x_2), \sigma E"(x_0)) \in I(=)$; isso é o mesmo que dizer que $(u, i) \in I(<)$ ou $(u, i) \in I(=)$, e que $(i, t) \in I(<)$ ou $(i, t) \in I(=)$; assim, $vFf(\beta, i) = 1$ para todo i tal que $u < Fi$ ou $u = i$, e tal que $i < Ft$ ou $i = t$, ou seja, para todo $i \in [u,t]$; mas se temos que $u < Ft$, e que $vFf(\beta,i) = 1$ para todo $i \in [u,t]$, então temos por def. 2.2 que $vFf(PC\beta,t) = vFf(\alpha,t) = 1$;

- caso vi: $\alpha = I\beta$

$\rightarrow$) suponha que $vFf(\alpha,t) = vFf(I\beta,t) = 1$; como $I\beta \rightarrow P(PC\beta)$ é válida em F, temos que $vFf(I\beta \rightarrow P(PC\beta),t) = 1$, e logo $vFf(P(PC\beta),t) = 1$; segue-se por iii) que $v^{\sigma E \tau E}(TR(P(PC\beta))) = 1$, para toda atribuição σE tal que $\sigma E(x_0) = t$, isto é $v^{\sigma E \tau E}(\exists x_1(x_1 < x_0 \wedge \gamma[x_n/x_{n+1}])) = 1$, para toda atribuição σE sob consideração, onde $\gamma[x_n] = TR(PC\beta) = \exists x_1(x_1 < x_0 \wedge \forall x_2(x_1 \leq x_2 \leq x_0 \rightarrow \beta[x_n/x_{n+2}]))$; como $\gamma[x_n/x_{n+1}] = \exists x_2(x_2 < x_1 \wedge \forall x_3(x_2 \leq x_3 \leq x_1 \rightarrow \beta[x_n/x_{n+3}]))$, temos que $v^{\sigma E \tau E}(\exists x_1(x_1 < x_0 \wedge \exists x_2(x_2 < x_1 \wedge \forall x_3(x_2 \leq x_3 \leq x_1 \rightarrow \beta[x_n/x_{n+3}])))) = 1$, para toda atribuição σE sob consideração; ora, um conhecido resultado sobre renomeação de variáveis quantificadas nos garante que, se $\epsilon = \exists x_2(x_2 < x_0 \wedge \exists x_1(x_1 < x_2 \wedge \forall x_3(x_1 \leq x_3 \leq x_2 \rightarrow \beta[x_n/x_{n+3}])))$, a fórmula que resulta de $\delta = \exists x_1(x_1 < x_0 \wedge \exists x_2(x_2 < x_1 \wedge \forall x_3(x_2 \leq x_3 \leq x_1 \rightarrow \beta[x_n/x_{n+3}])))$ por substituição de x_1 por x_2 e de x_2 por x_1, então $v^{\sigma E \tau E}(\epsilon) = 1$, visto que $v^{\sigma E \tau E}(\delta) = 1$; mas $\epsilon \rightarrow \exists x_1 \exists x_2(x_1 < x_2 < x_0 \wedge \forall x_3(x_1 \leq x_3 \leq x_2 \rightarrow \beta[x_n/x_{n+3}]))$ é válida, e logo $v^{\sigma E \tau E}(\exists x_1 \exists x_2(x_1 < x_2 < x_0 \wedge \forall x_3(x_1 \leq x_3 \leq x_2 \rightarrow \beta[x_n/x_{n+3}]))) = v^{\sigma E \tau E}(TR(\alpha)) = 1$, para toda atribuição σE tal que $\sigma E(x_0) = t$;

$\leftarrow$) suponha que $v^{\sigma E \tau E}(TR(\alpha)) = v^{\sigma E \tau E}(\exists x_1 \exists x_2(x_1 < x_2 < x_0 \wedge \forall x_3(x_1 \leq x_3 \leq x_2 \rightarrow \beta[x_n/x_{n+3}]))) = 1$ para toda atribuição σE tal que $\sigma E(x_0) = t$; como $\exists x_1 \exists x_2(x_1 < x_2 < x_0 \wedge \forall x_3(x_1 \leq x_3 \leq x_2 \rightarrow \beta[x_n/x_{n+3}])) \rightarrow \exists x_1(x_1 < x_0 \wedge \exists x_2(x_2 < x_1 \wedge \forall x_3(x_2 \leq x_3 \leq x_1 \rightarrow \beta[x_n/x_{n+3}])))$ é válida, temos que $v^{\sigma E \tau E}(\exists x_1(x_1 < x_0 \wedge \exists x_2(x_2 < x_1 \wedge \forall x_3(x_2 \leq x_3 \leq x_1 \rightarrow \beta[x_n/x_{n+3}])))) = v^{\sigma E \tau E}(TR(P(PC\beta))) = 1$; segue-se por iii) que $vFf(P(PC\beta),t) = 1$; mas como $P(PC\beta) \rightarrow I\beta$ é válida em F, temos que $vFf(I\beta,t) = vFf(\alpha,t) = 1$.

Teorema 4.12. *Seja α uma fórmula qualquer de L^+; temos que α é válida sobre o conjunto de todas as d-frames — chamemo-lo de K6 — sse $TR(\alpha)$ é válida.*

Prova:

$\rightarrow$) suponha que α é válida sobre K6; segue-se que α é válida em F para toda d-frame F, e daí que $vFf(\alpha,t) = 1$ para toda valoração vFf em F e todo instante de tempo $t \in TF$; mas nesse caso temos pelo lema 4.11 que $v^{\sigma E \tau E}(TR(\alpha)) = 1$, para toda ld-estrutura $E = (D,I)$ tal que $D = TF$ e $I(<) = < F$, para toda atribuição σE tal que $\sigma E(x_0) = t$, e para toda atribuição τE tal que $f(p_i,u) = 1$

sse $u \in \tau E(P_i)$; considere uma atribuição σE arbitrária — chamemo-la de $\sigma 1E1$ — e uma atribuição τE arbitrária — chamemo-la de $\tau 1E1$ — ambas em uma ld-estrutura E arbitrária — chamemo-la de $E1$ — e vamos supor que $E1 = (D1, I1)$; suponha que $\sigma 1E1(x_0) = v \in D1$, e $\tau 1E1(P_i) = Ai \subseteq D1$, para cada variável predicativa P_i em $TR(\alpha)$; como $vFf(\alpha, t) = 1$ para toda valoração vFf em F e todo instante de tempo $t \in TF$, dada qualquer d-frame F, tomem-se uma d-frame $F1$ com $TF1 = D1$ e $< F1 = I1(<)$, e uma função $f1$ tal que $f1(p_i, u) = 1$ sse $u \in Ai$, para cada variável proposicional p_i em α, e teremos que $vF1f1(\alpha, v) = 1$; daí vai se seguir pelo lema 4.11 que $v^{\sigma 1E1\tau 1E1}(TR(\alpha)) = 1$; mas como $\sigma 1E1$ e $\tau 1E1$ são atribuições arbitrárias, segue-se que $v^{\sigma E1\tau E1}(TR(\alpha)) = 1$ dadas quaisquer atribuições $\sigma E1$ e $\tau E1$ em $E1$; segue-se pela definição 4.10 que $TR(\alpha)$ é verdadeira na ld-estrutura $E1$; mas como $E1$ é uma ld-estrutura arbitrária, temos que $TR(\alpha)$ é verdadeira em qualquer ld-estrutura E, donde se segue, de novo por def. 4.10, que $TR(\alpha)$ é válida; $\leftarrow$) suponha agora que $TR(\alpha)$ é válida; então temos que $TR(\alpha)$ é verdadeira em toda ld-estrutura E, e daí que $v^{\sigma E\tau E}(TR(\alpha)) = 1$, para toda atribuição σE e toda atribuição τE dada qualquer ld-estrutura E; se isso é o caso para todas as ld-estruturas, obviamente isso inclui toda ld-estrutura $E = (D, I)$ tal que $D = TF$ e $I(<) =< F$, para qualquer d-frame F; e se isso é o caso para toda atribuição σE e toda atribuição τE dada qualquer ld-estrutura E, isso obviamente inclui toda atribuição σE tal que $\sigma E(x_0) = t$, para qualquer instante $t \in TF$ e dada qualquer d-frame F, e ainda toda atribuição τE tal que $f(p_i, u) = 1$ sse $u \in \tau E(P_i)$, para qualquer função f de $\{p_1, p_2, \ldots\} \times TF$ em $\{0, 1\}$, dada qualquer d-frame F; mas então, pelo lema 4.11 temos que $vFf(\alpha, t) = 1$ para toda valoração vFf em F e todo instante de tempo $t \in TF$, dada qualquer d-frame F; mas isso significa que α é válida em F para qualquer d-frame F, e logo que α é válida sobre a classe K6 de todas as d-frames.

Corolário 4.13. *: Se o cálculo de predicados de 2^a ordem monádico é decidível com relação ao conjunto das ld-estruturas, isto é, se é possível construir um algoritmo capaz de determinar se uma fórmula arbitrária de Lm2 é verdadeira em todas as ld-estruturas, então T é decidível.*

Prova: seja α uma fórmula qualquer de L^+; vamos mostrar (considerando a condição especificada no enunciado deste corolário) como construir um algoritmo para determinar se α é um teorema de T; basta uma verificação trivial para concluir que a função TR, definida em def. 4.3, é computável, isto é, para concluir que é possível construir um algoritmo A que, ao receber como entrada um elemento qualquer no domínio de TR (ou seja, uma fórmula α qualquer de L^+), devolve a imagem associada por TR a tal elemento (ou seja, a fórmula $TR(\alpha)$ de Lm2); assim sendo, construa o algoritmo A em questão; agora, suponha que o cálculo de predicados de 2ª ordem monádico é decidível com relação ao conjunto das ld-estruturas; como $TR(\alpha)$ é uma fórmula de Lm2, temos então que é possível construir um algoritmo B capaz de determinar se $TR(\alpha)$ é válida; agora, considere o algoritmo C que resulta da combinação de A e B: ao receber uma fórmula α qualquer de L^+ como entrada, C fornece α como entrada a A, que devolve $TR(\alpha)$; C então fornece $TR(\alpha)$ como entrada para B, que devolve 1, digamos, se $TR(\alpha)$ é válida (isto é, verdadeira em todas as ld-estruturas), e 0 no caso contrário; assim, ao receber uma fórmula arbitrária α de L^+, o algoritmo C devolve 1 se $TR(\alpha)$ é válida, e 0 no caso contrário; pois bem, se C devolve 1, então $TR(\alpha)$ é válida, e temos pelo teorema 4.12 que α é válida sobre K6, donde se segue pela completude de T que α é um teorema de T; já se C devolve 0, temos que $TR(\alpha)$ não é válida, e segue-se pelo teorema 4.12 que α não é válida sobre K6, e daí temos pela correção de T que α não é um teorema de T; mas então temos que, ao receber como entrada uma fórmula α qualquer de L^+, C devolve 1 se α é um teorema de T, e 0 no caso contrário; segue-se pela def. 2.5 que T é decidível.

É necessário explicitar a condição de que é possível construir um algoritmo capaz de determinar se uma fórmula arbitrária de Lm2 é verdadeira em todas as ld-estruturas porque, embora saibamos que o cálculo de predicados de 2ª ordem monádico é decidível com relação ao conjunto de todas as estruturas, não sabemos se isso é o caso com relação ao conjunto de todas as ld-estruturas. Assim, para uma fórmula α arbitrária de L^+, sabemos que é possível construir um algoritmo capaz de determinar se $TR(\alpha)$ é verdadeira em todas as estruturas. Se isso é o caso, então $TR(\alpha)$ é verdadeira em todas as ld-estruturas, e temos pelo teorema 4.12 que α é válida sobre K6, e se segue da completude de T que α é um teorema de T. No entanto, se o algoritmo em questão determinar que $TR(\alpha)$ não é verdadeira em todas as estruturas, ainda permanece a possibilidade de que $TR(\alpha)$ seja verdadeira em todas as ld-estruturas. Daí porque a decidibilidade de T depende da decidibilidade do cálculo de predicados de 2ª ordem monádico com relação ao conjunto das ld-estruturas.

Referências

Burgess, J. 2002. Basic Tense Logic. In: D. Gabbay; F. Guenthner (eds.) *Handbook of Philosophical Logic*, pp.1–42. Kluwer Academic Publishers.

Finger, M.; Gabbay, D.; Reynolds, M. 2002. Advanced Tense Logic. In: D. Gabbay; F. Guenthner (eds.) *Handbook of Philosophical Logic*, pp.43–203. Kluwer Academic Publishers.

Mendelson, E. 1964. *Introduction to Mathematical Logic*. Van Nostrand Reinhold.

Montagnoli, C. L. 2016. Lógica, tempo e linguagem natural: um sistema formal para tempos verbais do português. In: J. R. B. Arenhart; J. Conte; C. A. Mortari (eds.) *Temas em Filosofia Contemporânea II. Col. Rumos da Epistemologia 14*. Florianópolis: NEL/UFSC.

Notas

[1]Não nos interessa discutir aqui o que é um algoritmo. Qualquer das definições usuais de algoritmo serve aos nossos propósitos neste trabalho. Por exemplo, podemos utilizar a definição segundo a qual um algoritmo é qualquer conjunto de instruções que possa ser executado em um número finito de passos por uma máquina de Turing.

3

We need arithmetic: a Wittgensteinian account of mathematical necessity

César Frederico dos Santos

1. Introduction

Anti-platonist philosophers claim that mathematics is a human creation. According to anti-platonism, mathematical objects are not discovered, but invented by mathematicians. Therefore, according to this view, mathematical objects do not exist independently. Their existence depends on human beings: if all human beings disappeared, mathematics would vanish altogether; if human beings had not invented mathematical concepts, they would not exist. This brings up a question: could we have invented a different mathematics? "Yes" seems to be the most coherent answer — since usually we have freedom to shape our creations —, but a simple "yes" is far from being an acceptable answer in this case. Mathematics is not an arbitrary construction. Mathematicians do not feel themselves free to create whatever mathematical concepts or theorems they please. It is just the opposite: mathematics is a highly constrained activity. The theorems a mathematician proves are thought to be necessarily true, i.e., they could not be otherwise, no matter how much the mathematician wanted things to be different. If mathematics is a human creation, it is not like other human creations, such as literature or music, where the author has great freedom. Why? The burden of answering this question is with the anti-platonist.

In this paper, I advance an answer to the case of arithmetic based on some aspects of later Wittgenstein's philosophy of mathematics. His main works on this topic are the *Remarks on the Foundations of Mathematics* (Wittgenstein 1983), the *Philosophical Investigations* (Wittgenstein 1997), and the *Lectures on the Foundations of Mathematics* (Diamond 1976). Hereafter, I will refer to these works as RFM, PI and LFM, respectively. My goal here, however, is not to give

I. F. Cunha; J. R. B. Arenhart; C. A. Mortari (orgs.) *Epistemologia, Mente, Matemática e Linguagem: Discussões do X Simpósio Internacional Principia*. Florianópolis: NEL/UFSC, 2018, pp. 48–66.

a comprehensive and accurate interpretation of later Wittgenstein's thought on philosophy of mathematics. Rather, I will take a few ideas and excerpts from these works in order to draw the outlines of a plausible and coherent explanation of mathematical necessity in arithmetic from an anti-platonist point of view. Following Klenk's approach, I will take Wittgenstein's works as "a rich and genuine source of insight into the nature of mathematics" (Klenk 1976, p. V), and build on some of these insights to understand the source of mathematical necessity, even if the final result departs from Wittgenstein's own views.

Wittgenstein first introduced his anti-platonist philosophy of mathematics in the *Tractatus Logico-Philosophicus* (Wittgenstein 1963). There, Wittgenstein famously claimed that mathematical propositions are neither true nor false, because they do not represent any possible state of affairs. The idea that mathematical propositions are neither true nor false is sustained throughout his later works. This brings about the first point where Wittgenstein's conception of mathematical necessity diverges from the mainstream: given that mathematical propositions are not even true, Wittgenstein cannot endorse the traditional alethic conception of mathematical necessity, according to which mathematical propositions are necessarily *true*. Therefore, if mathematical prepositions are to be considered necessary in his approach, Wittgenstein's conception of necessity must be a different one. I claim that he understands mathematical necessity as a kind of practical necessity, in the sense of two everyday uses of the word "necessary". In LFM (pp.241–2), he connects these both uses of the word "necessary" to mathematics. The first use appears when we say that some action is necessary because it is not given to us any choice but to conduct ourselves in the designated way. This sense explains the necessity of mathematical laws within a certain mathematical system: when we follow a mathematical rule, such as a particular multiplication algorithm, we have no choice but to apply the rules correctly, and there is just one correct application of them. The challenge, from Wittgenstein's anti-metaphysical perspective, is to explain the coercive power of necessary rules in this sense. How can a mathematical rule oblige us to act in a particular way? I explore this issue in sections 3 and 4. The second everyday use of the word "necessary" recruited by Wittgenstein is that which appears when we say that something is necessary because its lack could be damaging or have undesirable consequences. This sense explains why a certain mathematical system, as a whole, is necessary. In section 5, I suggest that, according to Wittgenstein, arithmetic is necessary in this sense. If arithmetical laws were different, or if arithmetic did not exist, this could have undesirable and damaging consequences for our life. To conclude, section 6 is a recapitulation of the main theses supported in this paper. In the next section I introduce one aspect of later Wittgenstein anti-platonism which is highly relevant for this discussion, viz., the idea that numerical expressions refer to procedures rather than objects.

2. Meaning as use

Wittgenstein's anti-platonism regarding mathematics in the *Tractatus Logico-Philosophicus* (Wittgenstein 1963) may be seen as a consequence of his picture theory of language. In his later works, although he abandons the picture theory of language, his anti-platonism remains unchanged. In PI, anti-platonism in mathematics is a consequence of his conception of meaning as use. Differently from traditional theories of meaning, which assert that a mental representation or an external object, be it concrete or abstract, is the meaning of a term, Wittgenstein claims that "for a large class of cases — though not for all — [...] the meaning of a word is its use in the language" (PI I §43). The consequence of this conception of meaning for numerical expressions is clear since the first paragraph of PI. There, Wittgenstein considers a situation where someone shows to a shopkeeper a slip where is written "five red apples". According to the traditional view, which Wittgenstein attributes to Augustine, for each word there should be an object it named. In the Augustinian account, then, in order to make sense of the slip we have to assume that there are abstract objects named by "five" and "red". This consequence can be avoided, though, if the words "five" and "read" are conceived of as referring to procedures, rather than to objects. Wittgenstein describes the actions of the shopkeeper in this way:

> [T]he shopkeeper [...] opens the drawer marked "apples"; then he looks up the word "red" in a table and finds a colour sample opposite it; then he says the series of cardinal numbers — I assume that he knows them by heart — up to the word "five" and for each number he takes an apple of the same colour as the sample out of the drawer. — It is in this and similar ways that one operates with words (PI I §1).

In this situation, we may concede that the term "apples" refers to objects (roughly, the fruits in the drawer marked "apples"). However, the words "five" and "red" are not used to designate objects. In Wittgenstein's account, the word "five" is used, in this context, to mean that the shopkeeper should take five apples from the drawer or, more precisely, that he should execute a procedure following this rule: to recite the words "one", "two", "three", "four" and "five", in this sequence, taking an apple for each word. Thus, "five" means a procedure performed in the concrete world, rather than an abstract object. (A similar analysis applies to the word "red", but I will not address color terms here.)

Extending this Wittgensteinian analysis, we can conceive of ordinal numerals as giving rules for procedures as well. If someone says "give me the third bottle from the left", the word "third" means that the shopkeeper should execute a procedure following this rule: recite the words "first", "second" and "third", in this order, making each bottle correspond to one word, starting from the left, and taking the last one. Operations with numbers, such as addition and multiplication, can be easily seen in the same way, as rules of procedures. If this strategy can be generalized to every situation where numerical expressions are used, and if the rules which govern arithmetic are not conceived of as abstract objects themselves, abstract entities are dispensable in order to make sense of arithmetic. Nevertheless, the abstract existence of arithmetical laws cannot be dismissed so easily. There is a further problem: if arithmetical rules are not set in stone in a platonic heaven, how can they be necessary?

3. Rules by themselves do not yield necessity

The explanation of the necessity of arithmetic would follow easily from Wittgenstein's claim that the meaning of arithmetical terms are rules for procedures. Indeed, rules play a central role in traditional explanations of mathematical necessity. It is usually said that 2×2 *necessarily* is 4 because the rules of multiplication determine that 4 is the only possible result. Formalist conceptions of mathematics generally agree that, once a formal system is totally defined by showing a complete list of symbols, axioms and rules, all of its results are already determined, regardless of someone having already calculated them or not. Even though this may seem an attractive explication of mathematical necessity, Wittgenstein points out an uncomfortable metaphysical taste in this.

The idea behind this traditional explanation is that the rules of a calculus *compel* the mathematician to reach a certain result, as if the rules by themselves had the power of *enforcing* a result. If rules were conceived of as abstract entities in a platonic realm, we might say that there, in the platonic realm, all instances of a rule have already been applied, so that all its results have already been determined, once and for all. In this situation, rules would be compelling because, if someone does not follow what is already determined in the platonic realm, she is simply miscalculating. In mundane situations, however, rules do not have such a coercive power.

The point is that in a particular situation where a mathematical rule is to be applied, the rule consists of a string of symbols arranged in a certain way, e.g., a sequence of words uttered by someone or a sequence of written mathematical symbols printed in a book. No one knows what the corresponding rule in the platonic heaven would state, if such a thing does exist. Furthermore, the rule is not applied automatically, by itself, but it depends on an agent who hears or reads the instructions and performs the rule. The agent's performance, in turn, depends on her interpretation of the rule. "[W]hen we *follow* the laws of inference (inference-rules) the following always involves interpretation too" (RFM I §114).

In this scenario, Wittgenstein asks: "how can the picture (or procedure) that you show me now oblige me always to judge in such-and-such a way?" (RFM I §55). "What does the action at a distance — as it might be called — of this pattern consist in?" (RFM I §62). Given that there is no action at a distance from the rule to the agent which could enforce her to interpret the rule in a particular way, the agent can interpret the rule as she pleases. A similar idea — that no one is obliged to make judgements about something in a determined way — appears in Wittgenstein's *Lecture on Ethics*. The following excerpt, about the necessity of ethical laws, can illuminate the point here:

> [T]he *absolute* good, if it is a describable state of affairs, would be one which everybody, independent of his tastes and inclinations, would *necessarily* bring about or feel guilty for not bringing about. And I want to say that such a sate of affairs is a chimera. No state of affairs has, in itself, what I would like to call the coercive power of an absolute judge (Wittgenstein 2015, p.34).

Analogously, a necessary interpretation of a mathematical rule would be one that everybody, independently of his tastes and inclinations, would *necessarily* bring about. Such a necessary interpretation, however, is also a chimera. The gist of Wittgenstein's argument is that a rule — understood solely in its physical dimension as a string of symbols — is subject to many interpretations. "However many rules you give me — I give a rule which justifies my employment of your rules" (RFM I §113). Therefore, people who interpret the same rule differently might take different steps on a calculation and reach inconsistent results. In PI I §185, Wittgenstein considers the case of a pupil who is asked to write down the series $+2 : 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$, etc. The pupil writes it down correctly up to 1000, but beyond this number, he writes $1004, 1008, 1012$, etc.

> We say to him: "Look what you've done!" — He doesn't understand. We say: "You were meant to add *two*: look how you began the series!". He answers: "Yes, isn't it right? I thought that was how I was *meant* to do it." — Or suppose he pointed to the series and said: "But I went on in the same way." — It would now be no use to say: "But can't you see ...?" — and repeat the old examples and explanations. — In such a case we might say, perhaps: It comes natural to this person to understand our order with our explanations as *we* should understand the order: "Add 2 up to 1000, 4 up to 2000, 6 up to 3000 and so on" (PI I §185).

Is the pupil wrong? The answer depends on the interpretation of the rule $+2$ we take. If we take our usual interpretation, he is clearly wrong. However, if we take his personal interpretation, his continuation of the series is correct. Provided that there is not a platonic realm where correct interpretations of rules are, there is no absolute correct interpretation.

The fact that a rule, seen only in its physical aspect as a pattern of symbols, is subject to multiple interpretations bears a resemblance to the case of the duck-rabbit figure (PI II §XI, p.194). The figure can be seen as a duck or as rabbit, and there is no correct interpretation of it. We can imagine someone who knows ducks but has never seen a rabbit. For this person, the figure is a duck. According to Wittgenstein, it could be wrong to say that this person sees the figure *as* a duck. She simply sees a duck when look at the figure, as we simply see a fork when we look at such a thing. The case of the pupil in face of the rule $+2$ is analogous. From our point of view, he interpreted the rule *as* if he was supposed to add 2 up to 1000, 4 up to 2000, and so on. However, from his point of view, he was simply asked to do so. Because of this "the old examples and explanations" would not convince him that he was wrong.

The similarity between the duck-rabbit figure and the $+2$ rule is not complete, however. The duck-rabbit is an intentionally ambiguous figure, whereas the $+2$ rule is not supposed to be so. However, Wittgenstein points out that even figures which were not intentionally drawn to be ambiguous are subject to multiple interpretations. He gives the example of a figure of a schematic cube:

> [Y]ou can imagine the illustration [of a schematic cube] appearing in several places in a book. In the relevant text something different is in question every time: here a glass cube, there an inverted open box, there a wire frame of that shape, there three boards forming a solid angle. Each time the text supplies the interpretation of the illustration. But we can also see the illustration now as one thing now as another. — So we interpret it, and *see it* as we *interpret it* (PI II §XI, p.193).

To the extent that a rule is only a string of symbols, it is like a schematic cube. Even if the symbols are not intentionally ambiguous, there is no essentially correct reading of them.

4. How rules within a social practice become necessary

It is quite obvious that there is right and wrong ways of interpreting a rule, however. The purpose of the previous discussion was not to deny this fact, but to sustain that symbols by themselves cannot determine the right interpretation of a rule. What determines its right interpretation, in keeping with Wittgenstein, is the social context where rules are established. Thus, what makes mathematical rules necessary is the fact that they are constitutive of the very social context that determines their correct interpretations. Before addressing this point, however, a methodological remark is in place. In Wittgenstein's account, questions regarding the interpretation of rules must be investigated with an empiricist attitude:

> A rule stands there like a sign-post. — Does the sign-post leave no doubt open about the way I have to go? [...] And if there were, not a single sign-post, but a chain of adjacent ones or of chalk marks on the ground — is there only *one* way of interpreting them? — So I can say, the sign-post does after all leave no room for doubt. Or rather: it sometimes leaves room for doubt and sometimes not. And now this is no longer a philosophical proposition, but an empirical one (PI I §85).

To know if a sign-post gives rise to doubt, we should examine its position, size, angle relatively to the road, and so on. It is an empirical, rather than philosophical, investigation. "The sign-post is in order — if, under normal circumstances, it fulfils its purpose" (PI I §87). The same approach should be applied to the investigation of mathematical rules. If they, in real-life practice, do not leave any room for doubts — to the point of being regarded as necessary —, we should pay attention to their origins, purposes, and uses in order to find out the factors that contribute to this. In short, we should examine how mathematical rules really become necessary in practice. Thus, the first step in this investigation is to observe how we endow mathematical symbols with a fixed meaning.

> "The way the formula is meant determines which steps are to be taken." What is the criterion for the way the formula is meant? Presumably the way we always use it, the way we were taught to use it.
>
> We say, for instance, to someone who uses a sign unknown to us: "If by '$x!2$' you mean x^2, then you get this value for y, if you mean $\sqrt{x}$, that one". — Now ask yourself: how does one *mean* the one thing or the other by "$x!2$"?
>
> *That* will be how meaning it can determine the steps in advance (RFM I §2).

When a mathematician introduces a new symbol, she must explain how it should be used, what she means by it. Moreover, people must be taught to use the symbol in the intended way. This is the common practice in real-life mathematical practice. Once people are instructed and there is a regular use of the symbol, it can be said that the way the symbol is meant *determines* the steps which are to be taken in the execution of the rule that governs its use. Education and training are the key to uniform interpretations of mathematical rules.

> We use the expression: "The steps are determined by the formula …". How is it used? — We may perhaps refer to the fact that people are brought by their education (training) so to use the formula $y = x^2$, that they all work out the same value for y when they substitute the same number for x. Or we may say: "These people are so trained that they all take the same step at the same point when they receive the order 'add 3'". We might express this by saying: for these people, the order "add 3" completely determines every step from one number to the next. (In contrast with other people who do not know what they are to do on receiving this order, or who react to it with perfect certainty, but each one in a different way.) (RFM I §1).

Since most of us were educated in mathematics in the same way, we bring about uniform interpretations of mathematical formulas and work them out in the same way. From this point of view, saying that 2×2 *necessarily* is 4 means that everyone who have received the proper training, when asked to multiply 2 by 2 will perform the multiplication in the same way and, consequently, will reach the same product. As Frascolla (2006, p.120) puts it, in Wittgenstein's conception of rules "a total uniformity of behaviour from the anthropological point of view is a pendant of an absolute freedom from the logical point of view". From the logical, disembodied non-human point of view, we are free to interpret rules as we please. Only human uniform behavior, once instituted by regular education and training, can settle a particular interpretation as the correct one and, hence, a result of a calculation as necessary. In Klenk's words:

> Wittgenstein, then, holds what might be called a behavioral theory of inference: inferring one proposition from another is simply a human practice, and the correct inference is not to be justified by any kind of logical reality, but is simply that which is in accord with the way we all do in fact infer. [...] Inferring is just one of our institutions, an anthropological fact of human existence (Klenk 1976, pp.58–9).

The same can be said about a behavioral theory of *calculation*. Therefore, if someone decides to calculate following her own interpretations of the rules, which diverge from the way we all calculate, we can surely say that she is wrong. The definition of the meaning of symbols, the training of people in their use, and the resulting uniform use of them create a new social practice, which settles what counts as correct applications of the rules. "[I]t is not possible to obey a rule 'privately"', Wittgenstein says (PI I §202). Once an interpretation is selected as a paradigm of the correct application of a rule, no one can claim that she is obeying the rule in accordance with her own divergent interpretation. Such divergent interpretations simply do not count as obeying the rule. If someone stubbornly insists on not following the rule as we do, "we should declare him abnormal, and take no further account of his calculation" (RFM I §112). The "absolute freedom from the logical point of view", in Frascolla's words, vanishes when the rule is within a social context.

Mathematical rules have yet another feature that reinforces their necessary character. According to Joseph's reading of Wittgenstein, mathematical necessity also arises from the fact that mathematics is an invented social practice which establishes its own standards (Joseph 1998). Joseph relies on a distinction Rawls (1955) and Searle (1971) make between *regulative* and *constitutive* rules. Regulative rules govern situations that exist independently of the rule.

They describe the situation and suggest a course of action that should be taken in such a circumstance. This is a simple example of a regulative rule: "if it is raining, take an umbrella". The circumstance — it is raining — and the prescribed action — take an umbrella — are both independent of the rule, that is, they would exist even if no one had ever formulated the rule. Constitutive rules, on the other hand, create a situation that would not exist otherwise. They do not regulate an independent situation; they set the scene for the action they regulate. Rules of games are typical examples of constitutive rules. To illustrate, consider the rule of football for a penalty kick: "if a defender commits a foul inside his own penalty area, a penalty kick is awarded to the opponent team". The circumstance — the defender committing a foul inside his penalty area — as well as the prescribed action — the penalty kick — could not exist independently of the whole set of football rules, which define what a foul is, where the penalty areas are and what a penalty kick is. The rules of football constitute the game.

When it comes to their necessary or contingent character, regulative and constitutive rules differ in a relevant aspect: the adequacy of a regulative rule can be questioned, while the adequacy of a constitutive rule cannot. For example, someone can argue that, sometimes, to take an umbrella when it is raining is not a good idea, specially in a windy, stormy day. Conversely, it is improper or senseless to question the adequacy of a constitutive rule. For example, someone who asks, "why is a foul of an offensive player not punished by a penalty kick?" clearly did not understand the game. Furthermore, if she insists on playing according to her modified rule, we would say that she is no longer playing football. Constitutive rules must be followed by everyone who wants to engage in the practice they establish. If we change constitutive rules, we are creating a different practice.

The act of calculating, as we know it, could not exist if the rules of arithmetic were different. The arithmetical rules we know create the arithmetic we know in the same way that the rules of football create football. Once the constitutive rules of a branch of mathematics are deployed and social practices fix their interpretation, everyone who wants to engage in that practice must follow its rules according to the standard social use. When it comes to arithmetic, the social practice constituted by its rules defines what "to count", "to calculate", etc., mean. Wittgenstein states this explicitly regarding logical concepts:

> The steps which are not brought in question are logical inferences. But the reason why they are not brought in question is not that they 'certainly correspond to the truth' — or something of the sort, — no, it is just this that is called 'thinking,' 'speaking,' 'inferring,' 'arguing.' (RFM I §156)

Since the rules of mathematics are constitutive, they cannot be modified without transforming mathematics into another thing. For example, it does not make sense to say that "five plus seven should be thirteen". If someone tries to add 5 to 7 to get 13, we would say that she is confused — she did not understand the rule for addition —, or that she is trying to make something impossible. If she insists and reinterprets the rules in order to obtain $5 + 7 = 13$, we could say that she is no longer *adding* 5 to 7, but making another operation. Everyone who wants to add or multiply must follow the correspondent arithmetical rules.

Nonetheless, sometimes it happens that a change in the rules of a certain mathematical theory yields a new mathematical theory. The creation of non-Euclidean geometries is a well-known example of this. In such cases, we may still say that, within each system, its rules are necessary. The Wittgensteinian concept of family resemblance may account for the fact that all of them are called mathematics (Gerrard 1996, pp.173–7). The difference between a mistaken interpretation of a rule and a legitimate creation of a new system is, then, a social matter. In order to thrive, a new branch of mathematics must attract a community of researchers and originate a new social practice. Even so, the question of whether a given mathematical theory, taken as a whole, is necessary or not cannot be dealt with in this way. I will address this question in the next section.

Before closing this section, however, a few words about the concept of necessity that is operating here are in place. I have already pointed out that Wittgenstein's concept of mathematical necessity differs from the mainstream's, according to which mathematical laws are necessary because they are universally valid, or true in every possible world. So, what is the concept of mathematical necessity that is behind the (partial) account of mathematical necessity given above? The following excerpt from LFM helps to elucidate this question.

> If we teach a calculus — and we have to multiply 21×41 — we say the answer necessarily follows from certain axioms or premises. The question to ask is: Necessarily as opposed to what? Presumably, as opposed to the

> case where in our practice we leave it open what follows — or else it is a pleonasm (LFM, p.242).

When we say that 21×41 *necessarily* is 861, we say "necessarily" in order to express that there is no alternative, no other admissible result in arithmetic. The rules completely determine a unique result. In contrast, an equation like $x > 2$ leaves the value of x open. In cases like this, we do not say that "x necessarily is ...". "We might speak of getting something but not necessarily, in the case of a calculus in which you could get more than one answer" (LFM, p.242). An action or a result are necessary, in this sense, if they are the only move or outcome prescribed by the rules. He illustrates this idea by the drawing reproduced on Figure 1. He comments on it: "*Here* the rules say you must turn right; *here* you may go whichever way you like" (LFM, p.241). In the first case, the rule is necessary, you have no choice; in the second, the rule is not necessary, you are free to choose the way that suits you best.

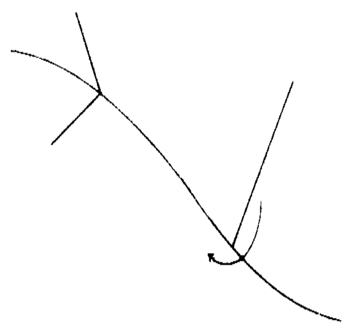

Figure 1: Wittgenstein's illustration of a necessary rule requiring you to turn right (LFM, p.241).

Truth or universal validity do not play any role in this conception of mathematical necessity. A necessary mathematical law is just a rule that determines only one course of action. A rule conceived of as a uninterpreted string of symbols is not necessary because it cannot determine anything. A rule isolated from a practice "leaves it open what follows", since it admits multiple interpretations. The process by which a mathematical rule becomes necessary — i.e., becomes able to determine only one course of action — involves fixing its intended interpretation and training people in using it uniformly. The result is the constitution of a stable social practice.

5. Could arithmetical laws be different?

The process by which a rule becomes necessary, as explained in the above section, can give rise to a profusion of alternative mathematics, each one equally necessary. It is enough that each alternative mathematics has its own community of practitioners, and then, within each community the rules of its own mathematics will be necessary. Indeed, non-classical mathematics may be conceived in this way, as suggested above. But, what about classical arithmetic, the arithmetic we use in our everyday life? Should we conclude that even the most basic parts of arithmetic, such as counting, adding, and multiplying, could have different rules?

Some readers of Wittgenstein believe that, according to him, this is the case. Dummett calls Wittgenstein a full-blooded conventionalist (Dummett 1959). According to Hersh (1997, p.7), "Wittgenstein and some others seem to think that since the making of rules doesn't follow rules, then the rules are arbitrary. They could just as well be any way at all. This is a gross error". Other readers of Wittgenstein, such as Klenk (1976, pp.64–5), have a different opinion: "Wittgenstein attempts to [explain how we make rules] suggesting that the rules we accept are not just arbitrary, but are influenced by empirical conditions [. . .] The origin of our logical and mathematical practices is to be found in the daily needs of human existence". In what follows, I stand close to Klenk's reading of Wittgenstein.

To explain why arithmetic as a whole is necessary, Wittgenstein relies on another ordinary use of the word "necessary". He considers the situation where someone says a sentence like "It's necessary that he'll come here". In this sentence, "necessary" means that "we cannot get on without him; or something nasty will happen if he doesn't. So here if we say a thing is necessary, there must be something that goes wrong if it doesn't happen" (LFM, p.241). In this sense, something necessary is something whose lack would be damaging or undesirable. Wittgenstein continues:

> What is necessary is determined by the rules. — We might then ask, "Was it necessary or arbitrary to give these rules?" And here we might say that

> a rule was arbitrary if we made it just for fun and necessary if having this particular rule were a matter of life and death (LFM, p.241).

This is precisely the case of arithmetic. “Counting and calculating are not — e.g. — simply a pastime” (RFM I §4). Humans do not create arithmetic just for fun. It is not like chess or football. The rules of chess can be conceived as necessary within chess, in the sense presented in the previous section, but the chess game as a whole is not necessary, i.e., its lack would not be damaging or produce undesirable consequences. Having chess game is not a matter of life and death. Concerning arithmetic, things are quite the opposite. If arithmetical laws were different, we could have serious troubles. “Counting (and that means: counting like *this*) is a technique that is employed daily in the most various operations of our lives” (RFM I §4). To illustrate, suppose a human ancestor who had adopted the rule $1 + 1 = 0$. She sees one lion on her right, another on her left, and concludes, “there are no lions here”. Obviously, this would increase her chance of dying. The rule $1 + 1 = 2$ is a matter of life and death, hence necessary in this sense. Arithmetic was established as the practice we know because only in this way it is usable in our daily life:

> [T]hinking and inferring (like counting) is of course bounded for us, not by an arbitrary definition, but by natural limits corresponding to the body of what can be called the role of thinking and inferring in our life (RFM I §116).

An objection may be raised at this point. Following Wittgenstein’s insights, I am claiming that arithmetic is necessary because having this particular arithmetic, with the rules we know, is a matter of life and death. However, against this claim it may be argued that, since arithmetical laws are responsible to our daily life needs, which, in turn, depend on characteristics of the world, then arithmetic is, in fact, contingent. Indeed, Wittgenstein agrees that, if our world were different, our arithmetic would be unusable or useless, hence not necessary in the sense I defend here. The relation between arithmetic and world is explored in the following passage:

> Put two apples on a bare table, see that no one comes near them and nothing shakes the table; now put another two apples on the table; now count the apples that are there. You have made an experiment; the result of counting is probably 4. (We should present the result like this: when, in such-and-such circumstances, one puts first 2 apples and then another

> 2 on a table, mostly none disappear and none get added.) And analogous experiments can be carried out, with the same result, with all kind of solid bodies. — This is how our children learn sums; for one makes them put down three beans and then another three beans and then count what is there. If the result at one time were 5, at another 7 (say because, as we should now say, one sometimes get added, and one sometimes vanished of itself), then the first thing we said would be that beans were no good for teaching sums. But if the same thing happened with sticks, fingers, lines and most other things, that would be the end of all sums.
>
> "But shouldn't we then still have $2+2=4$?" — This sentence would have become unusable (RFM I §37).

Because we live in a world populated by persistent objects with clear-cut borders, which do not usually disappear nor pop up, counting and calculating as we do are useful practices. If we lived in a different world, where beans, fingers and objects in general appeared and disappeared spontaneously, or fuse with each other, then our arithmetic would not be usable. Actually, arithmetic could not even have been created in such a world. In Wittgenstein's account, arithmetic does not reflect the structure of the world, but in order that arithmetic works, the world must satisfies some conditions.

The point is that *our* arithmetic is necessary in *our* world. Different worlds would give rise to different "arithmetics". The many weird examples Wittgenstein gives of odd people who measure or calculate in unusual ways illustrate this point. These examples may be better understood if we think of these weird people as living in a different world, where its environmental features allow, or even require, them to adopt the practices they do.

In one of these strange examples, Wittgenstein imagines timber sellers who calculate the price of a timber heap by unusual methods. It is worth going through the whole passage:

> 148. Those people — we should say — sell timber by cubic measure — but are they right in doing so? Wouldn't it be more correct to sell it by weight — or by the time that it took to fell the timber — or by the labour of felling measured by the age and strength of the woodsman? And why should they not hand it over for a price which is independent of all this: each buyer pays the same however much he takes (they have found it possible to live like that). And is there anything to be said against simply giving the wood away?
>
> 149. Very well; but what if they piled the timber in heaps of arbitrary,

> varying height and then sold it at a price proportionate to the area covered by the piles?
>
> And what if they even justified this with the words: "Of course, if you buy more timber, you must pay more"?
>
> 150. How could I show them that — as I should say-you don't really buy more wood if you buy a pile covering a bigger area? — I should, for instance, take a pile which was small by their ideas and, by laying the logs around, change it into a 'big' one. This *might* convince them — but perhaps they would say: "Yes, now it's a *lot* of wood and costs more" — and that would be the end of the matter. — We should presumably say in this case: they simply do not mean the same by "lot of wood" and "a little wood" as we do; and they have a quite different system of payment from us (RFM I §148, §149, §150).

Not rarely, this example is taken as being intended to support the idea that rules for calculating are completely arbitrary (e.g., Hersh 1997, p.203). However, if we take into account the possibility that these people may live in a world different from ours, we can understand that their calculating rules are not arbitrary. Wittgenstein observes that their strange methods of calculating timber price are feasible only if "they [the sellers] have found possible to live like that". It is obvious that, in our world, they could not live using these pricing methods. They certainly would go broke. But, if we imagine that these timber sellers live in a different world, where it is possible to survive selling timber by their methods, Wittgenstein's conclusions make more sense. We do not know the characteristics of that strange world, but because of its singular characteristics, there "a lot of wood" and "a little wood" have received meanings different from ours. In Wittgenstein's account, pricing methods are not a matter of truth or falsity, but a matter of succeeding or going broke. In his account, rules for pricing are not arbitrary, but responsible to human and world characteristics. Giving different purposes in an atypical environment, extraordinary — from our point of view — rules and practices may arise.

Just after the excerpt quoted above, Wittgenstein devises what would be Frege's reaction in face of these atypical timber sellers:

> Frege says in the preface to the *Grundgesetze der Arithmetik*: "…here we have a hitherto unknown kind of insanity" — but he never said what this 'insanity' would really be like (RFM I §152).

But these people sound insane only if we judge them by our standards. The problem is that our standards, even though necessary for us, are not universally valid. Our standards depend on our own constitution and on the characteristics of our world. They are necessary for us in the sense that, if they were different, they would not work for us in our world. But a different world, populated by different beings, might need different standards.

The Wittgensteinian timber sellers employ a curious pricing method, but perhaps their arithmetic is like ours. However, we could easily enrich Wittgenstein's example imagining that they also calculate by different arithmetical rules, more suited to the features of their strange world. Does this lead us to conclude that arithmetic, after all, is contingent? Not in the Wittgensteinian sense of necessity I am elaborating here. In this sense, something necessary is something whose lack would be damaging. Keeping with this sense, to be contingent is to be dispensable. But arithmetic is not dispensable. We could not live, or at least could not live the way we live, without arithmetic. Therefore, our arithmetic is not contingent in our world.

However, it is clear that this Wittgensteinian account of the necessity of arithmetic does not lead to the conclusion that its laws are "boundary stones set in an eternal foundation" (Frege 1964, p.13). In this Wittgensteinian sense of necessity, the fact that our arithmetic is necessary for us does not preclude the existence of different arithmetics. Why should people who use a bizarre arithmetic, from our perspective, be considered insane if they manage to survive following their own laws? Trying to apply their arithmetic in our world would be insane and even harmful, as well as trying to apply our arithmetic in their world. The laws of arithmetic are relative to the beings who create them and to the world where they live. If it is possible to live employing a certain calculating rule, it cannot be said wrong; if life is possible only in accordance with a certain calculating rule, so this rule is necessary. In this account, life and death are the criteria for possibility and necessity.

6. Conclusion

We have seen that arithmetic is necessary in two everyday uses of the word "necessary". First, arithmetical laws — and mathematical laws in general — are necessary because they leave no choice for the agent who is to apply them. This is so because mathematical rules are of certain social practices, i.e., they create these practices at the same time that they set the standards that regulate them.

This makes mathematical laws unavoidable for everyone who is to engage in mathematics. Education and training ensure uniform interpretation of mathematical rules, what establishes paradigms of correct calculations and results.

Therefore, the source of mathematical necessity is human behavior. In principle, any set of rules can have necessary consequences if they are constitutive of a social practice. The necessity within each branch of mathematics may be conceived in this way. However, we can ask about the necessity of mathematical theories in a stronger sense. Must such theories be exactly as they are?

To account for this question, we recruited another everyday use of the word “necessary”. Something necessary is something whose lack would be damaging or undesirable. Keeping with Wittgenstein, the necessity of a whole mathematical system depends on its importance to our life. At least one area of mathematics — arithmetic — is necessary in this sense. Even if arithmetic is a human invention, it is not like other arbitrary human creations, such as literature or music, because it was not created just for our amusement. Arithmetic is a tool employed daily in the most essential operations of our lives. If the arithmetical laws that govern basic operations, such as counting, adding and multiplying, were different, we could have serious troubles, with disastrous consequences for our life. Now we can see that the most basic laws of arithmetic are necessary not only in the philosophical meaning of necessity — they must be and cannot be otherwise —, but also in this more colloquial one: arithmetic is necessary because we *need* it.

Even so, the arithmetic we have created may not be universally valid. Our arithmetic is necessary for us. Given our needs in the environment where we live, we have developed this arithmetic because it is an effective tool in our world. In other circumstances, in an alien society, arithmetic could not have arisen, or something different could have arisen instead.

For the anti-platonist, Wittgenstein’s appraisal of mathematical necessity has a clear advantage: it transfers mathematical necessity from metaphysics to daily life.

References

Diamond, C. 1976. *Wittgenstein’s Lectures on the Foundations of Mathematics*. Hassocks: The Harvester Press.

Dummett, M. 1959. Wittgenstein’s Philosophy of Mathematics. *The Philosophical Review* **68**(3): 324–48.

Frascolla, P. 2006. *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*. London: Routledge.

Frege, G. 1964. *The Basic Laws of Arithmetic*. Los Angeles: University of California Press.

Gerrard, S. 1996. A philosophy of mathematics between two camps. In: H. Sluga; D. Stern (eds.) *The Cambridge Companion to Wittgenstein*. Cambridge: Cambridge University Press.

Hersh, R. 1997. *What is mathematics, really?* New York: Oxford University Press.

Joseph, M. 1998. Mathematics, Mind, and Necessity in Wittgenstein's Later Philosophy. *The Southern Journal of Philosophy* **XXXVI**: 197–214.

Klenk, V. 1976. *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*. The Hague: Martinus Nijhoff.

Rawls, J. 1955. Two Concepts of Rules. *The Philosophical Review* **64**(1): 3–32.

Searle, J. 1971. What is a speech act? In: J. Searle (ed.) *The Philosophy of Language*. London: Oxford University Press.

Wittgenstein, L. 1963. *Tractatus Logico-Philosophicus*. Translated by D. F. Pears and B. F. McGuinness. London: Routledge & Kegan Paul.

———. 1983. *Remarks on the Foundations of Mathematics*. Translated by G. E. M. Anscombe. Revised ed. Cambridge: The MIT Press.

———. 1997. *Philosophical Investigations*. Translated by G. E. M. Anscombe. 2nd ed. Oxford: Blackwell Publishers.

———. 2015. *Conferência sobre ética*. Santiago de Chile: Ediciones Tácitas.

4

Twardowski and Husserl on non-existent objects

Gleisson Roberto Schmidt

1. Paper hypothesis

Regarding intentional reference, Kazimierz Twardowski (1866-1938) remains halfway between Franz Brentano (1838-1917) and Edmund Husserl (1859-1938). Nevertheless, as Alexius Meinong (1853-1920), he develops an ontology of objects that encompasses an extensive range of non-existent objects to which the intentional acts may be referred.

It is in the distinction between existent and non-existent objects that lies Twardowski's rejection of Bolzano's theory of objectless presentations, at the same time that it is towards this rejection that Husserl addresses his most acute criticism to the theory of immanent objects described in Twardowski's book *On the Content and Object of Presentations. A Psychological Investigation* (1894). The hypothesis that guides this paper states that it is based on the clarification of the ontological commitments that Twardowski and Husserl outline in their texts between 1892 and 1901 (namely, from Twardowski's *Idee und Perzeption. Eine Erkenntnis-Theoretische Untersuchung Aus Descartes* to Husserl's *Logical Investigations*) that it is possible to find the reasons for the criticism that Husserl addresses towards Twardowski's theory about the non-existent objects.

2. Brentano and the theory of the intentional reference

Admitted to the University of Vienna after the publication of his *Psychology from an empirical Standpoint*[1] (1874, hereinafter referred to as PES), Franz Brentano taught to students who have become important philosophers, psychologists and professors, which spread the Brentanism throughout the Austro-Hungarian Empire from the last two decades of the 19th century on. Among

I. F. Cunha; J. R. B. Arenhart; C. A. Mortari (orgs.) *Epistemologia, Mente, Matemática e Linguagem: Discussões do X Simpósio Internacional Principia*. Florianópolis: NEL/UFSC, 2018, pp. 67–77.

them are Edmund Husserl, Alexius Meinong, Christian von Ehrenfelds, Anton Marty, Carl Stumpf, Sigmund Freud and Kasimierz Twardowski.

Intentionality is the original concept introduced by Brentano in the contemporary philosophy. Recovered from the medieval metaphysics and shaped within his alleged Aristotelianism, its classic formulation is present in PES:

> Every mental phenomenon (*psychische Phänomen*) is characterized by what the Scholastics of the Middle Ages called the intentional (or mental) [*mentale*] inexistence of an object, and what we might call, though not wholly unambiguously, reference to a content (*die Beziehung auf einen Inhalt*), direction toward an object (*Kichtung auf ein Object*) (which is not to be understood here as meaning a thing) [*eine Realität*], or immanent objectivity (*immanente Gegenständlichkeit*) (Brentano 2009, p.68).

Based on it, the German master intended to establish a criterion of distinction for psychical phenomena capable of distinguishing them from the physical phenomena, though not developing a systematic approach to intentionality. That is the reason for its ambiguous character. What Brentano's thesis states, in fact, is that the intentional reference is characteristic of all psychical phenomena (that is, that every presentation has "something" as object) and that the intentional object to which we are directed is part of the psychological act.

Brentano students who composed more systematic approaches of the intentionality often criticized it for its misconception on the ontological status of the intentional object: if the intentional object is part of the act — they argued —, we find ourselves facing a duplication of the object. In other words, apart from the physical, real object, which is perceived, remembered, thought, there is a mental, intentional object, to which the act is directed. Consequently, two people can never intend the same object; after all, in parallel to the real city of Paris, for example, there is a mental object that is part of my thinking. On the other hand, stating that the intentional object is identical to the real object introduces the issue of the possibility of mental phenomena that intend non-existent objects — such as a mountain of gold or a round square: like Paris, these acts are intentionally directed to an object with the difference that this object does not exist.

3. Twardowski and the tripartite theory of the intentional structure

Brentano's theory of intentional reference, however, does not resolve such deadlocks. The first attempt of one of his former students to overcome these difficulties was made by Kazimierz Twardowski.

Twardowski was the founder of the Polish philosophy and a key forerunner of the Lvov–Warsaw School. His place in the history of philosophy is mainly due to his contribution to the development of Brentano's school of thought through his book *On the Content and Object of Presentations. A Psychological Investigation* (1894; hereinafter referred to as IGV).[2] It is one of the most influential writings of the late 19th century, both for focusing the discussion at that period in certain topics as time for establishing theses that were toughly analyzed by a great number of authors of the period.

The distinction between the content and the object of presentation was, in fact, the greatest philosophical achievement of Twardowski (Wolenski 1999, p.15) — nevertheless appear among his predecessors important names such as Bernard Bolzano (1781-1848). His starting point is Brentano's theory of intentional reference described above. According to this theory, all psychical phenomena are given something as object. His criticism to Brentano is that, as well as the term "presentation", the term "presented" is also ambiguous in such that what is understood as the "immanent object" of the presentation is actually the *content* of the presentation. About this assumption, the philosopher corrects Brentano's theory of intentionality by distinguishing in the "immanent object" a content and an object of the presentation. He states that content and object are irreducible to one another, existing between them a real, not merely logic, difference (Twardowski 1977, p.4); and that every act has both object and content. Given the distinction between act and content, already present in Brentano's theory, Twardowski introduces a tripartite theory of the intentional structure according to which in all psychical phenomenon, the act, content and object must be distinguished so that none of them is missing. This re-articulation is only possible because Twardowski sustains the Brentano's theory of intentional reference at the same time, as noted by Jacques English (Twardowki and Husserl 1993), he rejects Bolzano's theory about the existence of presentations without object (such as the presentations of Zeus or a round square). For him all presentations have object; what happens is that the object has two types of existence:

a *real* existence, which is not necessary for the intentional act to be directed to it; and an *intentional* existence, the act itself, which would correspond to the "immanent object" or "content".

This distinction is reflected in the arguments that Twardowski uses to prove the content and object non-identity. They consist, primarily, in evidencing that they have different properties (Twardowski 1977, p.27). The philosopher asserts that:

a. The content always exists while the object may or may not exist. When it does not exist, it is still different from the content. If, however, content and object are the same, it could not be possible that one exists and the other does not (Twardowski 1977, p.27);
b. The content is never real; the object may or may not be (Twardowski 1977, p.28);
c. There are interchangeable presentations (*Wechselvorstellungen*), that is, presentations that have the same extension, but different contents.[3]

In manuscripts written between 1894 and 1897, the philosopher — who devoted the first part of his doctoral thesis[4] to an attempt to establish the Cartesian doubt regarding the judgment, including the volitional moment within the perception (Starzynski 2017, p.203) — develops a new theory of judgment. With the review of the intentional structure of psychical phenomena in IGV, its changes were related to relational judgments and judgments about non-existent objects. According to Arianna Betti and Maria van der Schaar (2004, p.1–20), the latter are considered special cases of relational judgments, while the existential judgments continue to be analyzed according to Brentano's theory of intentional reference. Such distinctions culminated in the elaboration of a theory of objects within which the status of the non-existent object is a particular case of special importance.

If what defines the psychical phenomenon is the "owning something as object" — states Twardowski in line with Brentano — then, the fact that there are presentations whose object apparently does not exist (Zeus or a round square) is a problem. However, if it is correct to say that the object of presentation does not exist, it is not also correct to say that the presentation does not have object.

His solution for this: contrary to the intended by Bolzano, if there are no presentations without object, there are indeed presentations *whose object does* *not exist*, that is, presentations related to non-existent objects. Even when the object does not exist, it does not imply that the presentation no longer has an object (Twardowski 1977, pp.24–6). In other words: in every presentation, as in every act, an object is presented, whether it exists or not. Thus, Twardowski defines as intentional object anything:

a. linguistically designated by a name;
b. that can be the correlate to which an act or psychical phenomena is referred (in other words, that is representable);
c. and that:
c.1. in some sense "is";
c.2. belongs to the *summum genus* "something" (*etwas*) or
c.3. is a "being" (*ens*) (Porta 2014, p.96).

Thus, Twardowski elaborates an object-oriented ontology that encompasses an extensive range of non-existent objects to which the intentional acts may be referred.

4. Husserl's objections

If it seems consensual that Twardowski's theory has influenced Meinong's theory of objects, as well as Ernst Mally and the *Graz school of philosophical semantics and psychology*, relatively to its influence on Husserl's phenomenology we must ask ourselves — as does Starzynski (2017, p.203) — if it is legitimate to invoke the name of Twardowski in the context of phenomenology to the extent of establishing a certain number of relationships that his thought would have with it.

What gets the founder of Lvov–Warsaw School and the creator of the phenomenological method closer is the fact that both were Brentano's students in Vienna in the 1880s — although, because they were in different moments in their careers (while Husserl was preparing his *Habilitationschrift*, Twardowski was working on his doctoral dissertation), they didn't get personally closer. According to Karl Schuhmann (1993) (apud Starzynski), Twardowski's thesis is part of Husserl's personal library. According to Starzynski, it seems natural: it was a theme extensively explored at the time. There were several courses on

Descartes and Husserl himself devoted two of his seminars in Halle to the reading of *Meditations*. Thus, it is likely that the philosopher considered the work of his young Polish colleague interesting to his teaching at that point. Twardowski, in turn, is known for having reservations regarding the phenomenological proposal and the phenomenological school as such.[5]

It is a fact, however, that both authors confronted each other about the status of the intentional objects. In this regard, we sustain that Twardowski's 1894 book was of great importance in the development of Husserl's thought, once it is against its thesis that the phenomenologist addresses several — and sometimes unfair[6] — objections. What is at stake in this debate is the overcoming of the notion of representation, one of the necessary conditions in order to provide free-from-presuppositions access to the phenomena.

Husserl will never admit the validity of the argument in favor of the directionality of the intentional act toward non-existent objects. On one hand, he agrees with Twardowski's thesis on the possibility of a consciousness of non-existent or even impossible objects, but only as *hypothetical objects of an intentional act*; on the other hand, he does not share either the analysis of consciousness or the presupposed ontological commitments.

In his essay *Intentional Objects*[7] (1894; hereinafter referred to as IG), the philosopher highlights his strong opposition to Twardowski's tripartite division that will be reflected in the description of consciousness present in *Logical Investigations* (1900-1901) as an immediate relation to a transcendent reality. In the assay, as well observed by Rollinger (1999, p.149), Husserl attacks the notion of immanent object without, however, reach the essence of Twardowski's distinction. By assigning the notion of immanent object to the Polish philosopher, Husserl suggests that such a position would have collapsed in a "false duplication which also became fatal to the picture theory" (Husserl apud Rollinger 1999, p.255); however, it is important to be careful in this respect: according to Twardowski, the object that has no real existence should not be mistaken for the content, which is immanent to consciousness. The content exists in the strict sense, while the non-existent object exists in a modified sense — in what Twardowski shows himself strictly Brentanian: after all, saying that Zeus, the round square, the gold mountain or the centaur exist as objects (although in a particular way) only means that such objects are *represented*. We will be back to this point in the sequence.

Given the above, we should ask ourselves whether Husserl offers criticism that truly reaches the core of Twardowski's theory about the non-existent intentional objects. Identify such criticism in order to measure the impact of Kazimierz Twardowski's philosophy in the early movements of Husserl's phenomenology is the subject of this article. This choice is justified by the fact that, while there is already a significant critical fortune about the thought of the Polish philosopher — due to the work of authors such as Jens Cavallin, Arianna Betti, Jan Wolenski, Dale Jacquette, Liliana Albertazzi, Wioletta Miskiewicz, Jocelyn Benoist, Denis Fisette and others —, works that encompass the subject of the impact of the tripartite theory of intentionality in early Husserl's phenomenology are not numerous. If we stick to the studies which have not been published in Polish only, the number is even smaller.[8] In Portuguese, the list becomes shorter.[9]

While some aspects of Twardowski's book of 1894 are today repeatedly emphasized — such as the criticism of Brentano by distinguishing between content and object, its linguistic style argument, its epistemological and semantic psychologism, its contribution to the theory of the object and to the thesis of the being of non-existent objects —, others seems to have not received the same attention. Without ignoring the topics mentioned above, we want to devote ourselves now to one of the aspects which is still relatively underexplored in Twardowski's philosophy, namely the ontological commitments of his theory that determined the criticism that Husserl addresses to his thesis about intentional non-existent objects. As we stated as a hypothesis, we argue that we will find the reasons for such criticism, as well as their distinct classifications of presentations, in the explanation of the respective ontological commitments of both philosophers, once it is towards the distinction between existent and non-existent objects that Twardowski directs his rejection of the Bolzano's theory of presentations without object, at the same time that in this rejection lies Husserl's most acute criticism about the theory of immanent objects in IGV.

If, on the one hand, it is possible to state that Husserl — in addition to the fragile association made between the description of the intentional object in IGV and the pictorial theory of presentation — elaborates a precise criticism to the content-object distinction, on the other hand, it is not possible to support that this criticism is justified based on an ontology which is the same as the Polish philosopher's. In fact, in IG, Husserl elaborates his criticism of Twardowski as a means of its analysis of the *improprieties of speech*, and this criticism involves the Brentanian definition of intentionality itself. But before reaching this point, he considers several improprieties that, according to him, are similar to the division between "real" objects and "intentional" objects. They will be found in the distinction between determined and undetermined, possible and impossible, and finally between existent and non-existent objects.

In all these cases, it is not a division between objects that is the main concern but between *presentations*. When we refer to, for example, "a" lion, we use an indetermination that does not occur when we refer to "this" or "that" lion. Such indetermination, however, does not belong to any kind of lions — "indeterminate" lions, maybe. The same can be said about the possible and impossible objects and about the existent and non-existent objects: in all these cases, there are genuine divisions concerned, but these divisions belong to our representations, and not to objects. Thus, talking about "a" lion is different from talking about "this" or "that" lion not due to the constitution of the object "lion", but due to a characteristic of representation itself.

What is particularly important in this concept is the distinction between existent and non-existent objects — Bolzano's thesis rejected by Twardowski and clearly incorporated by Husserl. While the first, in the track of Brentano, states that even if there are no existent objects that correspond to the presentation, it is only the case where the object of presentation is non-existent, the second introduces a distinction between the presentations that differentiates *presentations with object* from *presentations without object*. For Husserl, talking about a non-existent object is just an improper way to state that a representation has no object.

But Husserl goes further: not only assumes Bolzano's thesis but also subverts the Brentanian notion of intentional reference, stating that it is a true judgment, but in a improper sense. Part of his criticism of the distinction between content and object in IG is an explanation about this impropriety. Husserl takes into account hypothetical judgments, which we talk about as if they were true but that would be recognized as false if we talked about them properly. "Zeus is the greatest of the Olympian gods", for example; it is a false judgment taken for true because it is a hypothetical proposition merely accepted for economy of thought reasons (Husserl apud Rollinger 1999, p.268). And as certain false judgments are taken for true, it also states that all presentations refer to objects: our presentation of Zeus refers to an object in the sense that the judgment that claims to be Zeus the greatest of gods Olympus is true. That is, if the presentation were the fundament for a true judgment, it would refer to an object. In this case, it is convenient to say that the presentation refers to an object, once by making judgments about Zeus, we make them hypothetically. Properly speaking, however, the presentation has no object.

5. Conclusions

The linguistic criticism Husserl addresses to Twardowski disregards the ontology of objects concurrent with his tripartite theory of the intentional structure. In the theory, the concepts of being, existence and reality occupy a decisive place, constituting a crucial assumption for its understanding. Specifically, the establishment of the notion of object is only possible from the clarification of the relationships among being, existence and reality.

Real, to Twardowski, is every "concrete" thing, that is, located in time and space, sensibly perceptible and subject to causal relations. *Existence* is not a synonym for reality, nor is reality a condition for the existence. An object can exist and still not be real. A lack, an absence or a possibility are examples of unreal yet existent objects. Besides that, the unreal object, as well as the real one, sometimes exists; sometimes doesn't (Twardowski 1977, p.34).

Existence is not a synonymous for "Being": not everything which "is", which (in some sense) "there is", exists. The being is independent of the existence and prior to it; the predicative being is more original than the existential being. Everything that exists, "is", but not everything that "is", exists. Everything that "is", to Twardowski, is something (*etwas*), and everything which is determined (*bestimmt*) "is", in some sense.

It is about these distinctions that notions of act, content and object should be defined, as well as the ontological status of the non-existent object. With such limits, it will also be possible to state whether the presentation can effectively have as a correlative a non-existent object; if somehow there are not-existent objects — and if there are any, how.

References

Betti, A.; Schaar, M. van der. 2004. The Road from Vienna to Lvov: Twardowski's Theory of Judgement between 1894 and 1897.*Grazer Philosophische Studien* **67**: 1–20.

Brentano, F. 1874. *Psychologie vom empirischen Standpunkte*. Leipzig: Dunker & Humboldt.

———. 2009. *Psychology from an empirical Standpoint*. London/New York: Routledge.

Cavallin, J. 1997. *Content and Object. Husserl, Twardowski and Psychologism*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Coniglione, F.; Poli, R.; Wolenski, J. 1993. *Polish Scientific Philosophy: The Lvov-Warsaw School*. Amsterdam: Rodopi.

Fisette, D. 2003. Représentations. Husserl Critique De Twardowski. In: *Aux Origines De La Phénoménologie : Husserl Et Le Contexte Des Recherches Logiques*, pp.61–91. Paris: Vrin.

Hickerson, R. 2005. Getting the Quasi-Picture: Twardowskian Representationalism and Husserl's Argument against It. *Journal of the History of Philosophy* **43**: 461–480.

Husserl, E. 1994. Critical Discussion of K. Twardowski, Zur Lehre Vom Inhalt Und Gegenstand Der Vorstellungen. Eine Psychologische Untersuchung. In: E. Husserl. *Collected Work. Vol. V, Early Writings in the Philosophy of Logic and Matematics*. Dordrecht: Springer, pp.388–95.

———. 1999. Intentional objects. In: R. D. Rollinger. *Husserl's Position in the School of Brentano*, pp.251–84. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Jacquette, D. 1987. Twardowski on Content and Object. *Conceptus. Zeitschrift für Philosophie* **21**: 193–9.

Kaufmann, J. N. 2000. Brentano, Twardowski, Husserl esboço de uma teoria fenomenológica do conteúdo. *Manuscrito* **23**(2): 133–61.

Porta, M. A. G. 2014. Uma análise do opúsculo de Kasimir Twardoski Inhalt und Gegenstand na perspectiva de sua significação para a escola de Brentano. In: M. A. G. Porta (ed.) *Brentano e sua Escola*, pp.89–120. São Paulo: Loyola.

Rollinger, R. D. 1999. *Husserl's Position in the School of Brentano*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Schuhmann, K. 1993. Husserl and Twardowski. In: F. Coniglione; R. Poli; J. Wolenski (eds.) *Polish Scientific Philosophy: The Lvov-Warsaw School*, pp.41–58. Poznan Studies in the Philosophy of Science and the Humanities, Amsterdam: Rodopi.

Sebestick, J. 1994. Twardowski Entre Bolzano Et Husserl: La Théorie De La Représentation. *Cahiers de Philosophie Ancienne et du Langage* **1**: 61–85.

Starzynski, W. 2017. La perception et l'idée : une double direction du cartésianisme de Twardowski. *Études philosophiques* **2**: 197–204.

Twardowski, K. 1894. *Zur Lehre Vom Inhalt Und Gegenstand Der Vorstellungen. Eine Psychologische Untersuchung*. Wien: Hölder.

———. 1977. *On the Content and Object of Presentations. A Psychological Investigation*. The Hague: Martinus Nijhoff.

Twardowski, K.; Husserl, E. 1993. *Sur Les Objets Intentionnels (1893-1901).* Translated by Jacques English. Paris: Vrin.

Wolensnki, J. 1999. Twardowski and the Distinction between Content and Object. *Brentano Studien. Internationales Jahrbuch der Franz Brentano Forschung* **8**: 15–36.

Notes

[1]*Psychologie vom empirischen Standpunkte*. Leipzig: Dunker & Humboldt, 1874.

[2]*Zur Lehre Vom Inhalt Und Gegenstand Der Vorstellungen. Eine Psychologische Untersuchung*. Wien: Hölder, 1894. The English translation we have adopted in this article was published by Martinus Nijhoff (The Hague) in 1977.

[3]A fourth argument, initially proposed by Kerry, ends up being rejected, as observed by Mario Porta. At first sight, concepts or "general representations" have the same content, but refer to several objects. However, there are no representations that have a plurality of objects, meaning that every act has only one object. The "general representations" are not a sum of individual performances. They have their own object that should not be mistaken for their instances. What is represented on them is a set of parts common to several objects (Porta 2014, pp.91–2).

[4]The aforementioned *Idee und Perzeption. Eine erkenntnis-theoretische Untersuchung aus Descartes* defended in 1891 and published the following year.

[5]Not even the intervention of Husserl himself led him to support the candidacy of Roman Ingarden (which was his student before working with Husserl in Freiburg) to the University of Lvov in the 1920s.

[6]As the association of Twardowski's distinction with the imagistic theory of consciousness, according to which the representations without object are representations directed to images that exist in consciousness, although it is not necessary for an object to exist out of the consciousness that corresponding to the image. This solution to the problem introduced by Bolzano in his analysis of intentional objects present in IG is the starting point for Husserl, probably motivated by the fact that Twardowski described the idea as a sign or a "quasi-picture". See, in this regard, Hickerson 2005, pp.461–80.

[7]Originally, *Intentionale Gegenstände*. The English version used herein was made by Robin D. Rollinger, included as an attachment in his work mentioned above, *Husserl's Position*, pp.251–84.

[8]These include: the work of Jens Cavallin (1997); Denis Fisette's text (2003); Ryan Hickerson's article (2005); Chapter 5, entitled "Husserl and Twardowski", of Rollinger's book (1999); Karl Schuhmann's homonym chapter (1993); Jan Wolenski's article (1999); Jan Sebestick' article (1994)

[9]It includes little more than Nicolas J. Kaufmann's article "Brentano, Twardowski, Husserl: esboço de uma teoria fenomenológica do conteúdo" (2000).

5

Dos formas de relación entre Filosofía y Matemática: el caso de la recepción de los Elementos de Euclides en el siglo XVII

JORGE ALBERTO MOLINA

1. Introducción: Las ciencias matemáticas en los comienzos de la Edad Moderna y los *Elementos* de Euclides

En los comienzos de la Edad Moderna las ciencias matemáticas eran divididas en matemáticas puras y matemáticas aplicadas o mixtas. La Geometría y la Aritmética formaban las matemáticas puras. La primera tenía una exposición canónica, en forma de ciencia deductiva, dada por los *Elementos* de Euclides. Esta obra, sin embargo, no abarcaba toda la Geometría pues temas que eran considerados partes de esa ciencia, como el estudio de las cónicas y de las curvas en forma de espiral, no habían sido expuestos por Euclides en ella. La Aritmética era considerada una técnica de cálculo y no poseía una estructura axiomatizada.[1] El álgebra sólo adquiriría relevancia cuando, en el siglo XVII, Descartes la usó para resolver problemas de Geometría. Los métodos infinitesimales aparecieron en el siglo XVII, permitiendo resolver varios problemas que interesaban a los matemáticos de la época: cuadraturas de figuras curvilíneas, determinación de tangentes a una curva dada, determinación de una curva dada la posición de sus tangentes, cálculo de áreas de figuras curvilíneas.[2] Sin embargo, durante todo aquel siglo esos fueron mirados con desconfianza hasta tal punto que muchas veces, un matemático, después de haber probado una proposición usando alguno de esos métodos, daba otra demostración de la misma proposición de la manera que lo hace Euclides en el libro XII de los *Elementos*.[3] Las matemáticas aplicadas estaban formadas por la Óptica, la Astronomía, la Música y la Mecánica.[4] Entre las ciencias matemáticas hay jerarquías. Por ejemplo, se consideraba que la Astronomía (todavía aparece como ciencia diferente de la Física) está subordinada a la Geometría. La jerarquía está dada por la generalidad del objeto

I. F. Cunha; J. R. B. Arenhart; C. A. Mortari (orgs.) *Epistemologia, Mente, Matemática e Linguagem: Discussões do X Simpósio Internacional Principia*. Florianópolis: NEL/UFSC, 2018, pp. 78–103.

de estudio y por su grado de abstracción a partir de lo dado por los sentidos. También la época retomó la antigua idea de *mathesis universalis* cuyo origen se encuentra en la Metafísica de Aristóteles en los libros E,1 y K,7.[5] Esa *mathesis universalis* es caracterizada por Descartes en la cuarta de las *Reglas para la dirección del espíritu* como la ciencia general que explica todo aquello que puede investigarse acerca del orden y de la medida sin aplicación a ninguna materia especial , siendo sus conclusiones válidas tanto para números y figuras como para sonidos o astros. Ella se encontraría en el tope de las ciencias matemáticas. A pesar de la resurrección de esa antigua idea, durante todo el siglo XVII, la concepción dominante, exceptuando la de Leibniz, fue que las Matemáticas eran ciencias de la cantidad.[6]

En el siglo XVI aparecieron varias traducciones al latín de los *Elementos* de Euclides, directamente a partir del original griego. Entre las más difundidas en la época podemos citar la traducción de Commandinus(1572). En 1574 fue publicada la versión latina de Clavius que más que una traducción es una edición comentada de los *Elementos* en la que él reúne varias notas de los comentadores antiguos, críticas de las pruebas dadas por Euclides y explicaciones. Del mismo tipo es la versión de André Tacquet cuyo título es *Elementa geometriae planae et solidae*. En 1665, Barrow publicó *Euclidis Elementorum Libri XV breviter demonstrati*, versión latina en la que el autor compendió los *Elementos* y abrevió varias de las pruebas dadas por Euclides. Esas obras, publicadas en la forma de libro impreso, el que comenzaba a tener gran divulgación en la época, permitieron que un número mayor de personas tuvieran contacto con la obra de Euclides ,posibilitando así, el replanteo de antiguas cuestiones filosóficas relacionadas con el conocimiento matemático tales como : el objeto de las ciencias matemáticas, su estructura y la naturaleza de las pruebas matemáticas. Muchos de esas cuestiones habían sido ya tratadas por Aristóteles s y, después de la aparición de los *Elementos*, por los comentaristas antiguos de esa obra, entre los cuales el más conocido fue Proclo. Por otro lado, el hecho de que muchas de las versiones latinas contuvieran añadidos y correcciones al texto euclidiano, dio origen a discusiones sobre si determinadas formas de prueba usadas en los *Elementos* eran o no apropiadas.

Las reflexiones filosóficas que acompañaron en la primera parte de la Edad Moderna, a la lectura, análisis y comentario de los *Elementos* de Euclides fueron muy variadas y no es el objeto de nuestro texto discutir todas ellas. En algunos casos ellas acabaron, como veremos, teniendo reflejo en la práctica de los matemáticos, entendiendo ésta última no apenas por producción de nuevo conocimiento matemático sino también considerando dentro de ella la divulgación de por medio de la enseñanza y la redacción de libros de texto. En otros casos, esas reflexiones se orientaron a resolver disputas internas en el seno de las escuelas filosóficas o entre diferente escuelas filosóficas. Siendo imposible analizar y discutir todas ellas en los límites de este trabajo, nos limitaremos a analizar las concepciones sobre el conocimiento matemático de dos autores: Giuseppe Biancani y Antoine Arnauld. Las reflexiones de Biancani , están destinadas a mostrar que la Geometría, tal como fue expuesta por Euclides en los *Elementos* realiza la concepción aristotélica de ciencia conforme ella es presentada en los *Segundos Analíticos*. Por su parte, Arnauld intentó rescribir los *Elementos* de Euclides a partir de las concepciones de Petrus Ramus sobre el método científico, de sus propias concepciones y de las reflexiones que hizo Pascal sobre el conocimiento matemático, especialmente sobre la Geometría.

2. *De mathematicarum natura Dissertatio* de Biancani

El texto *De mathematicarum natura Dissertatio* del padre jesuita Giuseppe Biancani, publicado en 1615, no tiene como objetivo presentar nuevas concepciones filosóficas surgidas a partir del análisis del conocimiento matemático, sino mostrar que las ciencias matemáticas, ejemplificada por los *Elementos* de Euclides, se adecuan a la concepción sobre el conocimiento científico formulada por Aristóteles en sus *Segundos Analíticos*. El texto de Biancani es una respuesta a los textos *Commentarium de certitudine mathematicarum disciplinarum* escrito por A. Piccolomini de 1547 y *De communibus omnium rerum naturalium principiis et affectionibus libri quindicem* de 1576, escrito por el jesuita B. Pereyra. Estos autores negaban que las ciencias matemáticas fueran ciencias en el sentido aristotélico de ciencia. Decían que las pruebas matemáticas no eran a partir de las causas, entendidas en el sentido aristotélico (formal, material, final o eficiente). El texto de Piccolomini recibió la respuesta de Francesco Barozzi, quien en 1560, en su obra *Opusculum in quo una oratio et duas quaestiones, altera de certitudine, et altera de medietate mathematicarum continentur*, defendió que las ciencias matemáticas corresponden al ideal aristotélico de ciencia

Para entender los motivos de Biancani para escribir ese texto, es conveniente referirse al contexto institucional dentro del cual se dio esa disputa. La Compañía de Jesús, orden religiosa fundada por Ignacio de Loyola en el siglo XVI, con el objetivo fundamental de oponerse a la reforma protestante, adquirió un papel fundamental en la educación da las élites de los países católicos. Es bien sabido que Descartes estudió en una institución, el colegio La Flèche, dirigida por los jesuitas. Los miembros de la compañía se plantearon las cuestiones de cuál sería la educación más apropiada para sus miembros, cuál la que convendría para los alumnos laicos que frecuentaban los colegios jesuitas y cuál sería el papel de las matemáticas en esa formación deseada.[7] San Ignacio de Loyola sólo había establecido que las matemáticas, como las demás artes liberales, debían ser cultivadas con la moderación que conviene. En la primera versión de la *Ratio studiorum* , conjunto de normas que regulaban la educación jesuita, redactada en 1586, se estableció un programa preparatorio de matemáticas, para el estudio de los *Segundos Analíticos*, porque se juzgaba que sin ejemplos matemáticos esa obra no es inteligible. Ese programa preveía también el estudio de las partes de los *Elementos* de Euclides necesarias para la comprender la Astronomía y la Geografía. Para los que continuaban sus estudios y asistían a las clases de Física se determinaba el estudio de las Matemáticas a partir de un compendio realizado por Clavius (Romano 1993, p.284). En la versión final de la *Ratio studiorum* de 1599, la enseñanza de la matemática fue reducida sólo a una parte del año final de estudios. El hecho es que entre los jesuitas no hubo unanimidad en relación al valor educativo de las matemáticas. Ese valor fue contestado tanto por aquellos miembros de la Compañía que preferían dar énfasis a una educación humanista en la que la Retórica, la Gramática y la Filosofía aristotélica en general debían desempeñar un papel principal, como por aquellos profesores que, como Pereyra, enseñaban la Filosofía natural de Aristóteles. En lo que había un total acuerdo dentro de la Orden, era en la adhesión al aristotelismo.

Aristóteles había establecido que el conocimiento científico no es sólo conocimiento de hechos sino también de la causa de los hechos. Esa causa es expresada por el término medio del silogismo científico. Tres pasajes de los *Segundos Analíticos* presentan esa concepción. En *Segundos Analíticos* I, 2, Aristóteles afirma:

> Estimamos poseer la ciencia de una cosa de una manera absoluta, y no, a la manera de los sofistas de una forma accidental, cuando creemos conocer la causa por la cual la cosa es, sabemos que esa causa es la causa de esa cosa, y además, que no es posible que la cosa sea diferente de lo que es (Aristóteles 1979, p.7 traducción nuestra).

En *Segundos Analíticos*, I, 9 Aristóteles sostiene

> Nuestro conocimiento de una atribución cualquiera es accidental a menos de que conozcamos el medio por el cual esa atribución tiene lugar, según los principios propios del sujeto en cuanto tal: ése es el caso, si conocemos, por ejemplo, la propiedad de poseer los ángulos iguales a dos rectos como perteneciendo al sujeto al cual dicha propiedad es atribuida por sí y como surgiendo de los principios propios de ese sujeto (Aristóteles 1979, p.51, traducción nuestra).

En Segundos Analíticos, I, 13, 78a 35– 78 b 10 Aristóteles da el siguiente ejemplo de silogismo científico, perteneciente a la Astronomía, disciplina que era considerada parte de las matemáticas aplicadas:

Todo lo que está próximo no centellea
Los planetas están próximos
∴ Los planetas no centellean

En este silogismo, de la primera figura, el término medio "estar próximo" expresa la causa por la cual os planetas no centellean.

El ejemplo que era esgrimido para negar el carácter científico (en el sentido aristotélico) de las matemáticas es la prueba de la proposición I, 32 de los *Elementos*. Esa proposición establece que el ángulo adyacente a uno de los ángulos interiores de un triángulo es igual a la suma de los otros dos ángulos interiores y que la suma de todos los ángulos internos de un triángulo es 180 grados. La prueba no se apoya en la esencia de triángulo expresada por la definición que da Euclides de esa figura (figura contenida por tres líneas rectas), lo que nos lleva a descartar, que ella proceda por la causa formal. Tampoco reposa en la división del triángulo en partes, lo que nos fuerza a negar que la prueba proceda a partir de la causa material, pues las partes proceden al todo y son la materia a partir del cual él se forma. La prueba se apoya en la prolongación del lado BC del triángulo, en la construcción de una recta paralela EC al lado *AB* del triángulo, y en la división por medio de esa paralela del ángulo externo ACD (Figura 1)

Los que negaban el carácter científico de las matemáticas afirmaban lo siguiente:

> En verdad, si el lado [la línea paralela a uno de los lados del triángulo] fuese o no construido y el ángulo externo fuese o no formado o aún si imaginamos que la producción de uno de los lados y la formación del ángulo externos fuese imposible, todavía la propiedad pertenecería al triángulo, pero qué otra cosa es la definición de un accidente sino aquello que puede

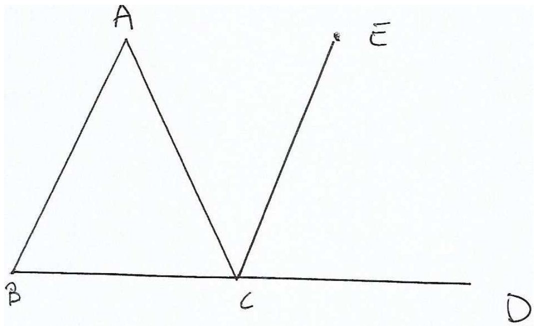

Figura 2:

> pertenecer o no a la cosa sin que ella se corrompa? (*Apud* Mancosu 1996, p.15, traducción nuestra).

Esa crítica colocaba un desafío: o había que abandonar la concepción aristotélica de ciencia lo que era impensable para aristotélicos como Biancani, Piccolomini y Pereyra, o había que mostrar que el análisis de las pruebas matemáticas propuesto por estos dos últimos autores, que negaban el carácter científico de la matemática, era inexacto. En su *Dissertatio*, Biancani, en el primer capítulo, comienza definiendo el objeto de las ciencias matemáticas. Ellas tratan de la cantidad inteligible. No se ocupan de la cantidad en cuanto está ligada a un objeto físico, por ejemplo, de tres manzanas o de una pelota, sino que la abstraen de esos objetos, y así consideran el número tres o la forma esférica. En eso Biancani coincide con la concepción aristotélica sobre las matemáticas expresada en *Metafísica* K 3 1061 a 25-1061 b 10. Además, Biancani señala que las ciencias matemáticas se ocupan de la cantidad inteligible en cuanto que ella está delimitada: líneas, superficies y sólidos finitos. La evolución posterior de la matemática, en el transcurso del siglo XVII, hará imposible sostener ese finitismo. En el segundo capítulo, Biancani pretende mostrar que las pruebas matemáticas, tal como aparecen en los *Elementos*, corresponden al ideal aristotélico de ciencia: ellas son pruebas por la causa la cual aparece como el término medio de un silogismo de la primera figura. La argumentación de Biancani se apoya primero en la opinión de una serie de autoridades (Platón, Aristóteles, Proclo, Averrroes, comentaristas de los *Segundos Analíticos* como Themisitius y Santo Tomás) todos los cuales consideraron a las matemáticas como ciencia y pensaron que las pruebas matemáticas proceden por la causa(apud Mancosu, 2008, pp.184–8). Esos autores, según Biancani, habrían sido erróneamente interpretados por Piccolomini y Pereyra. Después, Biancanni procede a un análisis de las propias pruebas cuya cientificidad es colocada en duda, limitándose a considerar las pruebas contenidas en el primer libro de los *Elementos*. Ocasionalmente se referirá a la prueba de la proposición III,31 de esa obra que afirma que el ángulo inscrito en la circunferencia cuya base es el diámetro de la misma y cuyo vértice es uno de los puntos de esa circunferencia es recto. Biancani quiere mostrar que todas las pruebas del libro I o proceden de la consideración de la causa formal o de la consideración de la causa material. Un ejemplo de prueba por la causa formal es la prueba de la proposición I, 1. Esa proposición enuncia un problema: construir un triángulo equilátero sobre una línea recta dada. Hay dos pasos en la resolución del problema: la construcción de la figura y la prueba de que la figura construida es un triángulo equilátero. Dada la línea AB se considera un círculo con centro A y radio AB, luego un círculo del mismo radio con centro B. Los dos círculos se intersectan en un punto C. Uniendo A con C por medio de una línea recta y B con C por medio de otra línea recta se obtiene el triángulo deseado (Figura 2). Resta probar que la figura así construida es un triángulo equilátero.

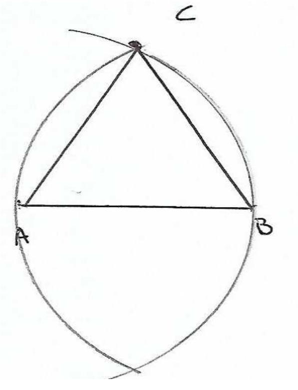

Figura 3:

La prueba requerida, resulta, según Biancani, de la definición de círculo: figura plana contenida por una línea tal que todas las líneas rectas que inciden sobre ella trazadas desde uno de sus puntos interiores son todas iguales entre sí.

La definición de círculo sería la causa formal de la verdad de la proposición que afirma que la figura construida es un triángulo equilátero, pues de esa definición resulta que la línea AB es igual a la línea AC y que la línea AB es igual a la línea BC.

Vimos que se considera que la prueba de una proposición geométrica se apoya en la causa material cuando ella resulta de una propiedad que tienen las partes de un todo. El desafío que se coloca para Biancani es mostrar la adecuación de la prueba dada por Euclides de la proposición I,32 con la concepción aristotélica de ciencia. Los autores que afirman que las ciencias matemáticas, en este caso, la Geometría, no corresponden al ideal aristotélico de ciencia, decían que la prueba de esa proposición no procede a partir de la esencia de triángulo, o de la definición de triángulo, (la que sería su causa formal) sino por medio del trazado de una línea auxiliar que permite dividir en dos el ángulo adyacente a uno de los ángulos internos del triángulo. Así, ejemplificando con la figura 1, el ángulo ACD queda dividido en dos partes ACE y ECD. Ellas son iguales respectivamente, por proposiciones previamente demostradas, a los ángulos internos ABC y BAC. Biancani responde a esa objeción de dos formas. En primer lugar, afirma que es verdad que la prueba de I,32 resulta de la división en dos partes del ángulo exterior a uno de los ángulos internos de un triángulo. Cada parte es igual a uno de los ángulos internos opuestos. La línea paralela trazada ayuda a encontrar la propiedad del término medio (el ángulo externo), a saber, que él es igual a la suma de los dos ángulos internos opuestos. La prueba sería por la causa material, porque el término medio es divido. Pero, a continuación, Biancani añade un segundo argumento. Afirma que, si no se está satisfecho con el análisis que él realizó, puede recurrirse a la prueba que los pitagóricos dieron de la misma proposición, la que prescinde de la división del ángulo externo (Euclides 1956, Vol I, p.320). Pero esta última respuesta no es totalmente satisfactoria porque si bien la prueba de los pitagóricos no procede por la división de uno de los ángulos externos de un triángulo, ella se apoya también en el trazado de una paralela a uno de los lados del triángulo, lo que implicaría, usar algo más que la definición de triángulo.

En el tercer capítulo Biancani responde a los que él considera calumnias de Piccolomini y sus seguidores contra las Matemáticas. Son en total diecisiete calumnias. No mencionaremos todas, solamente las que juzgamos más relevantes. La primera calumnia reposa en una interpretación errónea de un pasaje del comentario de Proclo a los *Elementos* de Euclides. Según ella, Proclo habría afirmado que la Geometría no considera las causas ni la razón por la cual un objeto existe o tiene una determinada propiedad. Esa interpretación errada se apoya, según Biancani, en considerar de forma aislada ese pasaje de Proclo, que, en verdad, está citando la opinión de Geminus. La segunda y tercera calumnia reposan, según Biancani, en lecturas erróneas de pasajes de obras de Platón y de Aristóteles respectivamente. No entraremos en ellas. La cuarta calumnia consiste en afirmar que las matemáticas, especialmente la Geometría, son ciencias más de la imaginación que dela razón y que ,por eso ,pueden ser aprendidas por los niños, como lo habría dicho Aristóteles en el libro VI, 8, de la *Ética Nicomaquea*.[8] La respuesta de Biancani será decir que en opinión de Platón y Proclo, no es la imaginación sino el razonamiento lo que es usado en las ciencias matemáticas, que descubrimientos matemáticos, como la prueba del teorema I, 47 de los *Elementos*[9] y los que hizo Apolonio en sus *Cónicas*, no serían tan alabados si fueran obra de niños y que, finalmente, Piccolomini interpretó erróneamente ese pasaje de Aristóteles, por citarlo fuera del contexto de la argumentación del Estagirita, que trata sobre la prudencia. La quinta calumnia, según Biancani, consiste en atacar las matemáticas por afirmar que ellas usan pruebas por superposición. El ejemplo típico de prueba por superposición es la demostración de la proposición I,4. Esa proposición afirma que, si dos triángulos tienen dos lados de uno de ellos igual a dos lados del otro y el ángulo comprendido por los primeros igual al ángulo comprendidos por los segundos, entonces tienen las bases y los ángulos restantes iguales. La prueba consiste en superponer el primer triángulo ABC, sobre el segundo triángulo DEF. Como se trata de mover figuras, esa demostración introduciría nociones de Física dentro de la Matemática, dado que es la Física la ciencia de los cuerpos en movimiento. Según Aristóteles no se puede probar un teorema de una ciencia (en el caso considerado la Geometría) por medio de otra ciencia (en el caso la Física) a menos que se trate de ciencias tales que una se encuentre subordinada a la otra (*Segundos Analíticos* I,7, pp.46–7). La respuesta de Biancani a esa objeción contra las ciencias matemáticas es la siguiente: primero, en todos los *Elementos* hay sólo tres pruebas por superposición ; segundo, la superposición toma en esos casos el lugar de las construcciones con regla y compás; tercero, en el caso de la proposición I,4 no es que de la superposición se infiera la igualdad, por el contrario, los lados AB y AC que son iguales a los lados DE y DF respectivamente se superponen a estos últimos y, de ahí, resulta clara la igualdad de la base de los dos triángulos. La décima objeción dice que las entidades matemáticas no existen. Aquí Biancani no entra en ninguna discusión sobre la Ontología de las entidades matemáticas y se limita a decir lo que ya afirmó, a saber, que el objeto de las ciencias matemáticas es la cantidad inteligible o materia inteligible. La decimocuarta objeción es que las matemáticas se ocupan sólo de accidentes. La respuesta de Biancani aquí es interesante pues apunta a una de las posibles causas de su disputa con Piccolomini y sobre todo, con Pereyra. En primer lugar, afirma Biancani, ese accidente del que se ocupan las Matemáticas, en este caso la cantidad, es un accidente inmaterial y abstracto y por eso, las Matemáticas fueron colocadas por Aristóteles entre la Metafísica y la Física. Y segundo, esto apunta especialmente contra Pereyra que era profesor de Filosofía natural, es mejor conocer muchas y maravillosas verdades sobre un accidente que andar de un lado para el otro, en medio de un torbellino de opiniones relativas a la sustancia material y no llegar a conocimiento ninguno. Finalmente en el caso de las Matemáticas aplicadas es claro que se ocupan de cosas que existen, como los astros, los sonidos musicales, los modos de la visión, las ilusiones ópticas y los efectos de las máquinas.

El cuarto capítulo de la *Dissertatio* de Biancani, consiste en una alabanza a las ciencias matemáticas mencionando la excelencia del conocimiento que nos suministran. Concluye Biancani este capítulo con un resumen de los puntos que él piensa haber mostrado de forma suficiente en su discusión previa sobre el status científico de la Geometría y la Aritmética. Son los siguientes:
Primero: las ciencias matemáticas tienen todas las partes que Aristóteles exige a una ciencia, en sus *Segundos Analíticos*, a saber, definiciones de esencia, postulados, axiomas, proposiciones con sus demostraciones. Esas proposiciones son teoremas si enuncian que un objeto tiene una propiedad determinada, o problemas, si demandan la construcción de una figura, conforme la conocida clasificación de Proclo. Segundo: dado que los principios de las ciencias matemáticas son evidentes se infiere que ellas tratan tanto de lo que es primero por naturaleza, es decir en el orden natural, como de lo que es primero para nosotros, es decir, lo primero que conocemos . Tercero: todos los argumentos dados por los matemáticos son demostraciones, nada de lo que ellos dicen es meramente probable y por eso en las ciencias matemáticas no hay conflicto de opiniones. Cuarto: las pruebas matemáticas proceden a partir de causas intrínsecas, a saber, materia y forma. Quinto: las pruebas matemáticas muestran el hecho (*quid*) y la causa de ese hecho (*propter quid*). Sexto: hay una interdependencia entre las demostraciones.

Los argumentos de Biancanni son de valor desigual. Gran parte de ellos son argumentos de autoridad y consisten en mostrar que la interpretación, dada por sus adversarios, de textos canónicos como los de Aristóteles, Proclo y Platón sobre el conocimiento matemático está errada. Otros argumentos consisten en una discusión de las propias pruebas de los *Elementos*. En el caso de las pruebas de las proposiciones I, 32 y I, 4 sin duda su respuesta no es satisfactoria. La cuestión de la cientificidad de las pruebas por superposición seguirá abierta, como lo veremos en la sección posterior. En cuanto a la prueba de la proposición I,32, la idea de que ella no procede a partir de la definición de triángulo será aceptada por Kant en su *Crítica de la Razón Pura*, para afirmar el carácter sintético a priori de la Geometría.

3. Los *Nuevos Elementos de Geometría* de Antoine Arnauld

En los *Nuevos Elementos de Geometría* de Arnauld, encontramos una nueva forma de relación entre Filosofía y Matemática. Aquí no se trata de explicar lo que hacen los matemáticos en los términos de un sistema filosófico establecido y bien conocido, sino de, partiendo de determinadas concepciones filosóficas y metodológicas, modificar la práctica matemática, en este caso su enseñanza. Arnauld escribe unos *Nuevos Elementos de Geometría*, diferentes de los *Elementos* de Euclides, apoyándose en las concepciones metodológicas de Ramus, en los textos en que Pascal reflexiona sobre la Geometría, y en sus propias concepciones filosóficas, que expresó por la misma época, en su *Lógica o arte de pensar*, escrita en colaboración con Nicole. No es que Arnauld coloque en duda las verdades demostradas por Euclides en su obra sino que lo que critica es la forma como éste expone la Geometría. Esa forma de exposición no es la más apropiada para la enseñanza de esa ciencia. El texto de Arnauld , que se limita a exponer la Geometría plana, se convierte en un manual exitoso. Esta obra tuvo varias ediciones. Hay diferencias significativas entre la primera (1667) y la segunda edición (1683), debidas a la lectura por parte de Arnauld, de la obra *Euclides calculador (Euclides logisticus)* de François de Nonancourt (1652). Los que se dedicaban a la Aritmética y al Álgebra eran llamados *logistici* (calculadores) en el Renacimiento. Las modificaciones introducidas entre una y otra edición están en los libros segundo, tercero y cuarto en los cuales Arnauld desarrolla la teoría de las razones y proporciones y en el libro XI que trata de las proporciones entre líneas.

La doctrina ramista del método se encuentra expuesta, entre las muchas obras que Ramus escribió, en la *Dialéctica* del año 1555. Si se quiere exponer una disciplina en el orden correcto — decía Ramus en esa obra — se debe en primer lugar decir cuál es el objeto de esa disciplina. Así si queremos exponer la Gramática diremos que es el arte de hablar bien. Después haremos la división de la Gramática en sus dos partes: la Etimología (Morfología) y la Sintaxis. "Así definiendo y distribuyendo, se descenderá a los ejemplos especialísimos y se los colocará por último" (Ramus 1996, pp.76–7). En los *Elementos* Euclides no dice cuál es el objeto de la Geometría en oposición a lo que Ramus indica. Por otro lado, si nos limitamos a examinar el libro I de los *Elementos* constataremos lo siguiente: En la proposición I, 1 Euclides indica cómo construir un triángulo equilátero y después en la proposición I, 22 Indica cómo construir un triángulo cualquiera; prueba la proposición I, 16.que afirma que en todo triángulo si uno de las tres líneas es prolongada el ángulo exterior que ha sido formado es mayor que cada uno de los ángulos internos opuestos y después prueba I,32 que afirma que ese ángulo exterior es igual a la suma de los dos ángulos internos opuestos. Claramente I,22 es más general que I, 1 pues si sabemos cómo construir un triángulo cualquiera sabremos cómo construir un triángulo equilátero y I,32 es más general que I, 16 pues si sabemos que el ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los ángulos internos opuestos, claramente él será mayor que cada uno de esos ángulos internos. Y sin embargo, Euclides ha seguido el orden opuesto, preocupándose solamente de que a partir de una proposición se pueda deducir la otra.

Ahora si observamos todo el conjunto de los *Elementos* veremos que los libros I, II, III y IV tratan de la Geometría plana. A continuación, en el libro V, Euclides expone un asunto más general, a saber, la teoría de las razones y proporciones que se aplica tanto a magnitudes discretas como continuas y, entre éstas, tanto a líneas como a superficies y sólidos. Así Euclides no respetó el principio ramista de comenzar con la más general para ir a lo más particular. En el libro VI tenemos una interrupción en el orden. Es un ejemplo de lo que Ramus considera un desorden en la exposición euclidiana, pues en el libro VI se trata de la aplicación a la Geometría, de los resultados conseguidos en el libro V, retomando así el contenido de los primeros libros de los *Elementos* que tratan de la geometría plana. Como ejemplo de esa aplicación tenemos el Teorema de Tales. También encontramos en ese libro VI la resolución, para líneas, de dos problemas generales que serían propios de la teoría general de las proporciones: encontrar el cuarto proporcional (regla de tres) y la media proporcional (extracción de la raíz cuadrada). Estos problemas no son abordados por Euclides en el libro V en toda su generalidad.

Si continuamos examinando los *Elementos* verificamos que en los libros VII, VIII y IX, llamados libros aritméticos, Euclides expone su teoría sobre los números y a continuación, retoma, en el libro X, el contenido del libro V ocupándose de las magnitudes en general y de la distinción entre magnitudes conmensurables e inconmensurables. Por último los libros XI hasta el XIII están dedicados a la Geometría del espacio. Si Euclides hubiese respetado el orden preconizado por Ramus debería haber comenzado su obra con el libro V, después haberse ocupado de la Geometría plana y finalmente de la Geometría del espacio.

Arnauld decide escribir sus *Nuevos Elementos* de forma tal que la obra respete la concepción ramista del método. Primero comienza definiendo el objeto de las ciencias matemáticas. Ellas estudian la cantidad en general. La cantidad comprende la extensión, el número, el tiempo, los grados de velocidad, y, en general, todo lo que se puede aumentar o disminuir, sumando o multiplicando, restando o dividiendo. La aritmética es la ciencia de los números y la geometría es la ciencia de la extensión. (Libro I) Ya tenemos definido el objeto de la Geometría. Arnauld comienza su obra estableciendo, en el libro II, una teoría general de las razones y las proporciones que corresponde al contenido del libro V de los *Elementos* de Euclides. Esa teoría puede aplicarse tanto a magnitudes discretas como continuas, como las que trata la Geometría. El libro III de la obra de Arnauld, en su primera edición, tiene un título que parece indicar que estaría más orientado a su aplicación a la Geometría: *sobre las razones compuestas de las que dependen las proporciones entre las magnitudes planas (grandeurs planes) y sólidas* (de tres dimensiones). Pero en la segunda edición el título es otro: *cómo se pueden hacer sobre las razones las cuatro operaciones comunes* (sumar, restar, dividir y multiplicar). Esta modificación del título se debe a que Arnauld, pasó a considerar, en la segunda edición de su obra (1683), a las razones como cantidades. La definición 3 del libro V de los *Elementos* define razón así: *Una razón es una relación de cierto tipo concerniente al tamaño de dos cantidades (magnitudes) del mismo género*. Observemos que la definición exige que las cantidades deben ser homogéneas, así que, según esa definición euclidiana, no se podría hablar de una razón entre la extensión recorrida por un móvil y la duración que tarda en hacer ese recorrido. Según la definición 4 del mismo libro puede hablarse de razón entre cantidades que son tales que multiplicadas pueden exceder una a otra. Por otro lado una relación entre cantidades no sería una cantidad de la misma forma que una relación entre seres humanos (*ser padre de...*, *ser hermano de...*) no es un ser humano. Así las razones no serían cantidades. Pero si consideramos a las razones como cantidades, como lo hace Arnauld, se puede hablar sin problema de la igualdad de razones.[10] Además las cantidades, como lo declara Arnauld en el primer libro de su obra pueden sumarse, multiplicarse, restarse y dividirse ente sí. Arnauld se enfrenta con la dificultad de encontrar un criterio para reconocer cuándo dos razones son iguales. Considerar las razones como cantidades permite a Arnauld definir sin usar equimúltiplos, como lo hace Euclides, en la definición 5 del libro V de los *Elementos*, la igualdad de razones. Recordemos aquí la definición euclidiana por medio de equimúltiplos. Euclides dice que dadas cuatro magnitudes A, B, C, D A tiene en relación a B la misma razón que C en relación a D , es decir $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ cuando para todos m, n si $mA > nB$ entonces $mC > nD$; si $mA = nB$ entonces $mC = nD$ y si $mA < nB$ entonces $mC < nD$. $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$ no son, para Euclides, cantidades sino un tipo de relación con respecto al tamaño entre cantidades. ¿Cómo hace Arnauld para definir la igualdad de razones? En la primera edición de los *Nuevos Elementos*, en el libro II, Arnauld da dos definiciones de la igualdad de razones. Primera: dos razones son iguales cuando los antecedentes contienen igualmente los consecuentes o están igualmente contenidos en los antecedentes; segunda: dos razones son iguales cuando *todas* las alícuotas semejantes de los antecedentes están cada una de ellas igualmente contenidas en cada consecuente. Quiere decir que si existen n y m, tal que la n-sima parte de A está contenida m veces en B y se da también que la n-sima parte de C está contenida m veces en D, entonces podemos decir que la razón de A a B es la misma que la razón de C a D y escribimos que : $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$. El problema es que esas definiciones sólo se aplican a razones conmensurables. ¿Qué garantiza que existan n y m tal que la n-sima parte de A esté contenida m veces en B? Esas definiciones anteriores deben leerse: si se da la condición enunciada por la definición entonces las dos razones son iguales y recíprocamente. En la segunda edición de los *Nuevos Elementos*, en el libro II, Arnauld muda de estrategia. Considerará la igualdad de razones como una noción primitiva (se trata a final de cuentas de la igualdad entre dos cantidades) y demostrará que si todas las alícuotas semejantes de cada antecedente están contenidas igualmente en cada consecuente respectivo, las razones son iguales. Pero la expresión de esa idea no está lo suficientemente clara y puede ser difícil, para el lector, ver en qué difiere la primera de la segunda edición en relación al tratamiento de la noción de igualdad de razones. En su lengua original el texto dice así: *Théorème: Deux raisons sont égales quand toutes les aliquotes pareilles de chaque antécédent sont également contenues dans son conséquent*. Arnauld coloca esto como teorema y no como definición de la igualdad de dos razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$. Pero, ¿qué es lo que se prueba? Que si lo expresado en la cláusula que comienza con *quand* se satisface entonces las dos razones son iguales. Sean cuatro cantidades, B, C, F, G. Denotemos con X una alícuota de B, con Y la alícuota semejante de F. El teorema dice que si para toda alícuota X de B y para Y, su alícuota semejante de F, si X e Y están igualmente contenidas en los consecuentes C y G entonces $\frac{B}{C} = \frac{F}{G}$. En el caso de cantidades conmensurables, es fácil entender lo que se quiere decir: por ejemplo, si para todo n y m tal que $X = \frac{1}{n}B$, $Y = \frac{1}{n}F$ y $C = mX$ se da que $G = mY$, entonces las dos razones son iguales. Pero en el caso de las magnitudes inconmensurables, ¿cómo proceder? Supongamos para fijar ideas ahora que $X = \frac{1}{n}F$ e $Y = \frac{1}{n}G$, supongamos también que $C = mX + R$ con R menor que X, en ese caso si $G = mY + R^*$, con R^* menor que Y, las razones serán iguales. Vale la pena detenerse en la demostración del Teorema I que es por reducción al absurdo. Es un ejemplo de cómo trabajaban los matemáticos de la época. Supongamos que se da la condición expresa en el enunciado del teorema y afirmemos que $\frac{B}{C}$ y $\frac{F}{G}$ no son iguales. Entonces $\frac{B}{C} > \frac{F}{G}$ o $\frac{B}{C} < \frac{F}{G}$. Si fuese el primer caso ($\frac{B}{C} > \frac{F}{G}$) agregando una cantidad a C se puede disminuir $\frac{B}{C}$ de modo tal que $\frac{B}{C} = \frac{F}{G}$; y si aconteciese el segundo caso ($\frac{B}{C} < \frac{F}{G}$) se podrá agregar una cantidad a G de modo tal que $\frac{B}{C} = \frac{F}{G}$. Estas parecen ser afirmaciones no problemáticas para Arnauld, es decir obvias. Consideramos el primer caso. Veremos que si se toma una cantidad Z, será $\frac{B}{C+Z} < \frac{F}{G}$. En efecto, sea Z como se desee y sea X una alícuota de B más pequeña que Z. Luego X estará en $C + Z$ una vez más que en C, así si $X = \frac{B}{10{,}000}$ y $C = 8701X + R$ será $C+Z = 8702X+R'$, mientras que $Y = \frac{1}{10000}F$ será tal que $G = 8701Y+R^*$(aquí usamos la hipótesis de que se da la condición enunciado por el teorema). Ahora es claro que $\frac{10000X}{(8702X+R)} < \frac{10000Y}{(8701Y+R)}$.

Otra innovación que Arnaud introduce en relación al marco euclidiano es considerar considerarse razones de razones, esto es expresiones de la forma $\frac{a}{b}/\frac{c}{d}$ de forma tal que pueda colocarse legítimamente la cuestión de si $\frac{a}{b}/\frac{c}{d}$ es mayor, menor o igual a $\frac{e}{f}/\frac{g}{h}$. Arnauld deberá dar criterios para determinar cuándo se da cada una de esas posibilidades. Esas expresiones, no consideradas por Euclides, deben comportarse como cantidades homogéneas, esto es, debe poder haber entre ellas relaciones como “ser igual”, “ser menor”, “ser mayor”.

A partir del libro V de los *Nuevos Elementos*, Arnauld entra en la Geometría plana. En los *Elementos* de Euclides encontramos varios tipos de proposiciones. Unas se refieren a problemas que consisten en construir una línea o una figura determinada o un sólido. La demonstración de ese tipo de proposiciones tiene dos pasos a saber, la construcción del objeto geométrico buscado y la prueba posterior de que ese objeto posee la propiedad deseada. Ése es el caso, como dijimos, del problema enunciado por la proposición I,1 que consiste en construir un triángulo equilátero. Otras proposiciones de los *Elementos* afirman que un objeto matemático posee una propiedad determinada. Por ejemplo, la proposición I, 32 que establece que en todo triángulo la suma de los ángulos internos de un triángulo es dos rectos. Un tercer grupo de proposiciones establece relaciones entre objetos geométricos, por ejemplo, la proposición I, 4 que enuncia, entre otras cosas, que dos triángulos que tienen dos lados iguales y el ángulo comprendido igual son iguales entre sí o la proposición VI,4 que establece que dados dos triángulos que tienen sus ángulos iguales, los lados que determinan los ángulos iguales son proporcionales. Finalmente otras proposiciones establecen igualdades entre razones, como la proposición XII, 2 que establece que las áreas de dos círculos son entre sí como el cuadrado de sus diámetros. De la metodología ramista se desprende que, cuando se trata de probar que un objeto pertenecientes a un género G posee tal o cual propiedad, o que dos objetos, o pares de objetos de G, poseen tal o cual relación, esa prueba no puede apoyarse en propiedades de objetos pertenecientes a otro género H, en cuya definición entre el género G. Pues, en ese caso G, es más general que H, porque la definición del género H presupone G y estaríamos así violando la norma de que siempre debemos ir de lo más general a lo particular. Por ejemplo no podríamos probar que dos líneas rectas con tales y cuales características son paralelas o perpendiculares entre sí, usando en la demostración propiedades de los triángulos y los ángulos rectilíneos porque las definiciones de triángulo (figura contenida por tres líneas rectas) y de ángulo rectilíneo (inclinación entre líneas rectas) presuponen el concepto de línea recta. Pero esa violación de la metodología ramista acontece reiteradas veces en los *Elementos* de Euclides, como lo mostraremos a continuación. Las proposiciones I, 10; I, 11; I,12 de los *Elementos* enuncian tres problemas que son respectivamente: dividir una línea recta dada en dos partes iguales, trazar una perpendicular a una recta a partir de un punto de la misma, trazar una perpendicular a una recta dada a partir de un punto que no pertenezca a ella. La justificación de las construcciones propuestas se basa en propiedades de los ángulos y de los triángulos previamente demostradas. La proposición I, 27 afirma que si dadas dos líneas tales que una tercera incida sobre las dos primeras de forma tal que queden formados ángulos alternos iguales, entonces las dos primeras líneas son paralelas entre sí. Nuevamente la demostración se apoya en propiedades de los triángulos (proposición I, 16) previamente demostradas.

Con el objeto de adecuar su exposición a la metodología ramista y evitar las violaciones a sus normas que identificamos en la presentación de la Geometría en los *Elementos*, Arnauld procede de la siguiente forma: por un lado agregará nuevos axiomas, por ejemplo, colocará como axioma que si dos líneas sobre el mismo plano tienen las extremidades comunes y están curvadas en la misma dirección, la que está contenida es más corta que aquella que la contiene (Figuras 3).

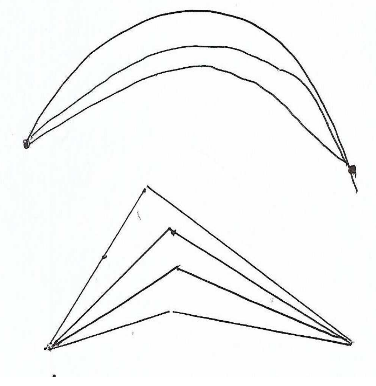

Figura 4:

Por otro lado Arnauld redefinirá conceptos como el de línea perpendicular de manera de no usar en su definición el concepto de ángulo. La definición de perpendicularidad dada por Euclides es la siguiente (definición 10, libro I): cuando una línea recta incide sobre otra línea recta, formando los ángulos adyacentes iguales entre sí, cada uno de los ángulos es recto y la línea incidente es llamada perpendicular a la segunda línea. La definición de Arnauld, que no usa el concepto de ángulo es: cuando dos puntos A y B de la línea cortada (*coupée*) son tomados igualmente distantes de uno de los puntos de la línea incidente que la corta (*coupante*) y todo otro punto de esa línea incidente se encuentra igualmente distante de esos dos puntos A y B de la línea cortada, la línea incidente se llama perpendicular a la línea cortada. En verdad, es suficiente que dos puntos de la línea incidente se encuentren a igual distancia de A y de B. Vemos que esta definición no usa el concepto de ángulo. Comparemos ahora cómo Euclides y Arnauld resuelven el problema de, dado un punto exterior C, a una línea AB, trazar una perpendicular a AB que pase por C (Proposición I, 12 de los *Elementos*). La prueba dada por Euclides consiste en construir dos triángulos iguales GHC, CHE, que tienen un lado CH en común (Euclides 1956, Vol I, p.271). De la igualdad de esos triángulos se sigue que los ángulos adyacentes CHG y CHE son iguales y, entonces, conforme a la definición dada por Euclides de rectas perpendiculares, la línea CH resultará perpendicular a la línea AB. La prueba dada por Arnauld consiste en a partir de un punto exterior K a la recta Z, trazar un círculo con centro K que intersecte Z en dos puntos M y N. A partir de M y de N trazar dos círculos iguales que se intersectan en un punto B. La recta KB es la perpendicular a Z deseada, lo que se prueba por el hecho de que tanto el punto K, como el punto B son equidistantes de los puntos M y N. Conforme a la definición de perpendicular, dada por Arnauld, KB es perpendicular a MN. En ningún momento son usadas, en la demostración de Arnauld, propiedades de los triángulos y de los círculos (Figura 4).

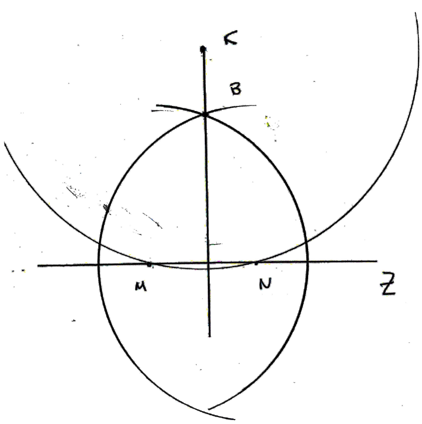

Figura 5:

También, para ver la diferencia entre las formas de trabajar de Euclides y de Arnauld podemos considerar las proposiciones I, 30 y I, 31 de los *Elementos*.

La proposición I, 30 afirma la transitividad de la relación de paralelismo entre líneas rectas y la proposición I,31 establece la existencia de una paralela a una recta dada por un punto exterior a ella. Euclides prueba la primera usando la proposición de que los ángulos alternos internos y los ángulos correspondientes, determinados por una recta que incide sobre dos paralelas, son iguales entre sí (proposición I,29) Esta última proposición es probada, a su vez, usando el V postulado, el llamado postulado de las paralelas. La proposición I,31 es probada por medio de la igualdad de los ángulos alternos internos entre paralelas. Las pruebas de esas propiedades de los ángulos se apoyan en la noción de triángulo. Las pruebas dadas por Arnauld de esas dos proposiciones son diferentes de las euclidianas. Como lo hizo en el caso de las perpendiculares, Arnauld redefine el concepto de líneas paralelas. Hay una definición negativa de líneas rectas paralelas, dice Arnauld, como siendo aquellas que no se intersectan nunca. Otra noción, ésta positiva, consiste en definirlas como líneas igualmente distantes una de la otra, esto es, como aquellas líneas que son tales que las perpendiculares de uno cualquiera de los puntos de una línea a la otra línea son todas iguales entre sí. Usando propiedades previamente demostradas de las líneas perpendiculares y oblicuas a una línea dada Arnauld demuestra I, 30 y I,31 sin usar ni la noción de triángulo ni de la de ángulo. En verdad, prueba I, 31 antes de I,30 y de I, 31 dará tres pruebas.

Creemos haber mostrado en líneas generales cómo se da la influencia de Ramus en los *Nuevos Elementos de Geometría*, que se ve sobre todo en la organización de los capítulos de la obra, cada capítulo tratando un asunto más general que el siguiente, yendo de los géneros a sus especies. Ahora nos referiremos a la influencia que tuvieron en la redacción de la obra de Arnauld dos opúsculos de Pascal: *El espíritu de la Geometría* y el *Arte de persuadir*. El primer opúsculo contiene una serie de reflexiones filosóficas y metodológicas sobre la Geometría; el segundo expone las normas que un discurso debe obedecer para que los argumentos expuestos en él sean tan invencibles cuanto las pruebas geométricas. Nos interesa lo que esos textos dicen sobre las definiciones de las entidades geométricas básicas. Además de los preceptos que serían comunes y obvios en la práctica de la Geometría, como el de definir todos los términos cuyo significado sea obscuro a partir de términos suficientemente conocidos y explicados y el de no usar términos equívocos, Pascal presenta la norma de no intentar definir aquellos términos cuyo significado comprendemos claramente, aunque sea de una forma intuitiva, y que nos es tan obvio que al intentar definirlos los obscureceríamos. Pascal aquí piensa en términos como "espacio", "punto" y "línea". Arnauld acepta lo que dice Pascal: "Las ideas de superficie plana y de una línea recta son tan simples que se oscurecerían esos términos si se intentara definirlos. Se puede dar solamente ejemplos para fijar la idea a los términos de cada lengua" (Pascal, Arnauld, Nonancourt 2009, p.356). Aquí tenemos de nuevo una divergencia entre los *Nuevos Elementos*, y los *Elementos* pues Euclides define lo que son el punto, el plano y la línea. Otra de las ideas que Arnauld recoge del *Espíritu de la Geometría* es la de que lo que es incompresible no deja de ser o existir. Pascal afirma en esa obra:

> Es una enfermedad natural del hombre creer que él posee la verdad directamente; y de eso viene que se encuentra dispuesto a negar todo lo que le es incomprensible; mas él no conoce naturalmente más que la mentira y debe tomar por verdaderas las cosas cuyo contrario le parezca falso. Y es por eso que, todas las veces que una proposición es inconcebible, es necesario suspender el juicio y no negarla por esa razón, sino examinar la proposición contraria (contradictoria); y si se la encuentra manifiestamente falsa, se puede afirmar audazmente la primera, por más que ella sea incomprensible (Pascal 2008, p.28, traducción nuestra)

Cosas incomprensibles son la divisibilidad infinita del espacio y que una figura de lados de longitud infinita tenga un volumen finito. Y sin embargo, esas cosas son, existen. Arnauld en sus *Nuevos Elementos* se apoya en lo que escribe Pascal para afirmar la existencia de razones inconmensurables. Afirma que ella es para nosotros incomprensible. La causa de su existencia es la divisibilidad infinita de la materia y es claro que todo lo que se relaciona con el infinito no puede ser comprendido por un espíritu finito como el de los hombres.

> No se debe imaginar [...] que se pueda probar positivamente que dos magnitudes son inconmensurables, claramente no se puede. Todo lo que puede hacerse de mejor, es hacerlo negativamente [...] es decir, mostrar que ellas no tienen una relación de número a número, por medio de lo cual, nos convencemos que la cosa es, aunque no podamos penetrar [las causas] por las cuales ello puede ser así (Pascal, Arnauld, Nonancourt 2009, p.315, traducción nuestra).

En la *Lógica o arte de pensar*, Capítulo 1, Part IV Arnauld y Nicole afirman: "*Mais il faut remarquer qu' il ya des choses qui sont incompréhensibles dans leur manière, et qui sont certaines dans leur existênce; on ne peut concevoir comment elles peuvent être, et il est certain néanmoins qu' elles sont*". Y preguntan *¿Qu'y* *a-t-il de plus incompréhensible que l' eternité; et qu' y a-t-il en même temps de plus certain?*

Una tercera influencia que se puede percibir en la redacción de los *Nuevos Elementos*, además de las de Ramus y Pascal, es la de François de Nonancourt. Este "honnête homme" escribió un opúsculo, *Euclides logisticus*, cuya lectura por parte de Arnauld lo llevó a modificar de forma profunda la primera edición de los *Nuevos Elementos*, sobre todo aquellas partes en que Arnauld trata de las razones y las proporciones. El texto de Nonanncourt introduce dos novedades. Primero, define la razón entre dos cantidades como una cantidad y no, como lo hace Euclides, como una relación entre cantidades. En efecto, como ya dijimos, Euclides afirma que una razón *es un tipo de relación* con respecto al tamaño entre dos magnitudes homogéneas. Nonancourt afirma, usando una definición confusa, que una razón entre dos cantidades es aquella cantidad por la cual una primera cantidad posee una extensión relativamente a la extensión de esta primera y de una segunda cantidad.[11] Así la razón de *A* a *B es aquella cantidad* por la cual *A* posee una extensión relativamente a la extensión de *A* y de *B*. Al aceptar esa definición de Nonanancourt, Arnauld no se ve obligado a definir la igualdad entre dos razones por medio de equimúltiplos. Además, siendo las razones cantidades, la igualdad entre ellas es un caso particular de la igualdad entre cantidades. En su *Espíritu de la Geometría* Pascal afirma que la Geometría no define lo que es la igualdad, porque querer definirla más oscurecería su concepto que instruiría. Dice Arnauld: "Como la razón es una cantidad, aunque relativa, todas las propiedades de la cantidad se le aplican: es así que una razón es igual, más grande o más pequeña que otra razón" (Pascal, Arnauld, Nonancourt 2009, p.185). Siendo las razones cantidades ellas pueden sumarse, restarse, dividirse y multiplicarse sin mayores problemas, lo que no puede hacerse dentro del marco teórico de los *Elementos*. La segunda innovación introducida por Nonancourt y que Arnauld también acepta es admitir razones de razones $\frac{a}{b}/\frac{c}{d}$ como cantidades, lo que simplifica muchas de las demostraciones de los *Nuevos Elementos*. Por el contrario, Euclides no menciona razones de razones.

Finalmente, los *Nuevos Elementos de Geometría* muestran en su redacción marcas de las propias concepciones metodológicas de Arnauld, tal como se encuentran en la *Lógica o arte de pensar* que él redactó junto con Nicole. En este libro, en los capítulos V y VI de la Cuarta Parte, Arnauld presentan varias críticas a la forma en que los geómetras exponen su ciencia. Las críticas son: Primera, asumir proposiciones que no son evidentes sin dar una prueba de ellas. Arnauld no dice cuáles. Sabemos, sin embargo, que en la prueba de la proposición I, 4, Euclides asume que dos líneas rectas no pueden encerrar un espacio y en la prueba de la proposición I, 1 asume que los dos círculos usados en la construcción del triángulo equilátero se intersectan. Segunda, aceptar como axiomas cosas que podrían ser probadas. Arnauld nuevamente no dice cuáles. Lo que sabemos es que Apolonio había intentado probar el axioma de que cosas iguales a una tercera son iguales entre sí y que Ptolomeo y Proclo se esforzaron por probar el V Postulado. Tercera, usar definiciones confusas. Por ejemplo, Euclides define ángulo como la inclinación recíproca de dos líneas en un plano que se intersectan y que no están en una misma línea. En *La Lógica o arte de pensar* Arnauld y Nicole afirman:

> Euclide définit l' angle plan rectiligne: la rencontre de deux lignes sur un même plan [...]. Il enseigne, par example, à diviser um angle em deux (Proposition I.9). Qui ne voit que ce n' est point la rencontre de deux lignes qu' on divise en deux, [...] qui a des côtes, et qui a une base ou soutendante; mais que tout cela convient à l' espace compris entre les lignes, et non à la rencontre des lignes? (Arnauld y Nicole 2014, pp.539–40, traducción nuestra) .

Es decir un ángulo es una superficie. En sus *Nuevos elementos* Arnauld dará una definición de ángulo diferente de la de Euclides: un ángulo es una superficie [por lo tanto tiene dos dimensiones] indeterminada según una dimensión y determinada solamente según la otra por la parte proporcional de la circunferencia que tiene por centro el punto donde los dos lados del ángulo se encuentran (Pascal, Arnauld, Nonancourt 2009, p.454). Cuarta, usar pruebas por reducción al absurdo, por ejemplo en el caso de la demostración de la proposición I,6 . Sabemos que Aristóteles en sus *Segundos Analíticos* I, 26 consideró las pruebas indirectas o pruebas por *reductio ad absurdum* de menor valor que las pruebas directas. La razón para eso es que las pruebas por *reductio* son pruebas s a *signo*. Muestran que una proposición es verdadera pero no explican por qué es verdadera. No son pruebas *ex causa*. A pesar de eso, los geómetras griegos consideraban que ellas son imprescindibles para demostrar la existencia de determinados objetos matemáticos, por ejemplo, razones inconmensurables, o para determinar la no existencia de otras entidades como, por ejemplo, la no existencia que una línea recta colocada entre el círculo y su tangente en un punto. También las pruebas por *reductio ad absurdum* eran usadas para determinar áreas y relaciones entre áreas y figuras curvilíneas, así para saber que dos círculos son entre sí como el cuadrado de sus diámetros (prueba por el método de exacción). En sus *Nuevos Elementos de Geometría* Arnauld tratará de no usar ese tipo de pruebas pero al costo de aumentar de forma significativa el número de axiomas. Quinta crítica, pruebas por superposición, por ejemplo ,en el caso de la proposición I,4. Peletier du Mans (1557) afirmó que Euclides debería haber colocado I,4 como axioma, porque superponer figuras sobre figuras es propio de la Mecánica, pero entender es propio de la Matemática. Esa prueba por superposición usa la noción común número 4: cosas que coinciden son iguales. Con este juicio coincide Arnauld y así lo expresa en sus *Nuevos Elementos* (Pascal, Arnauld, Nonancourt 2009, pp.382–3).

Arnauld fue principalmente un teólogo y filósofo, interesado secundariamente en las ciencias matemáticas. Para él esas ciencias en sí mismas no tienen gran valor (Pascal, Arnauld, Nonancourt 2009, p.94), pero adquieren respetabilidad si las consideramos como parte de una educación que debe llevar a vencer las resistencias para la aceptación de la revelación cristiana (Pascal, Arnauld, Nonancourt 2009, pp.96–7). Como filósofo los métodos de exposición lógica del discurso por medio de la división en géneros y especies le eran familiares. Acostumbrado a la tarea de apologista y polemista tenía preocupación por trasmitir de forma didáctica sus doctrinas. Arnauld no rechaza totalmente la concepción aristotélica de ciencia deductiva. Acepta varias de las afirmaciones de esa tradición como, por ejemplo, la concepción de que las matemáticas se ocupan de la cantidad en general, "en tanto que ese nombre comprende la extensión, el número, el tiempo, los grados de velocidad y , de forma general, todo lo que puede aumentar sumando o multiplicando, o disminuir, substrayendo y dividiendo" (Pascal, Arnauld, Nonancourt 2009, p.113). Su rechazo de las pruebas por superposición está de acuerdo con la tradición aristotélica que distingue la Física, ciencia de los cuerpos que se mueven, de la Matemática. También acepta, de esa tradición, que las pruebas directas son superiores a las pruebas por el absurdo.

Las estrategias usadas por Arnauld en sus *Nuevos Elementos* son: a) redefinir varios de los conceptos usados por Euclides tales como los de línea perpendicular, línea paralela, razón, proporción y ángulo; b) Introducir nuevos axiomas como el de Arquímedes al cual hicimos referencia; c) colocar como axiomas proposiciones que Euclides demuestra y que Arnauld, por el contrario, considera obvias y por lo tanto sin necesidad de ser demostradas ; d) evitar en la medida de lo posible las pruebas indirectas o por el absurdo; e) eliminar las pruebas por superposición. El trabajo de Arnauld sugiere varias observaciones. En primer lugar, cabe cuestionarse sobre el gran número de axiomas usado por Arnauld y su poca preocupación en reducirlo. En segundo lugar está la cuestión de la simplicidad, esto es, hasta qué punto la reconstrucción hecha por Arnauld es más simple que los *Elementos*, sobre todo teniendo en cuenta que muchos de los teoremas que Euclides prueba en su primer libro, Arnauld solo consigue probarlos en los últimos libros de los Nuevos *Elementos* Con todo a esa observación puede responderse que la obra de Arnauld fue un éxito pedagógico lo que mostraría que era fácil de ser entendida. En tercer lugar está la cuestión de si todo lo que Euclides prueba en sus *Elementos* puede ser probado usando las definiciones y axiomas de Arnauld, respetando sus directrices metodológicas. Por último nos podemos preguntar si el orden lógico basado en la división exhaustiva de un género en sus especies es apto para capturar las particularidades del razonamiento matemático.

Referencias

Aristóteles. 1979. *Les Seconds Analytiques*. Traducción por Jean Tricot. Paris: Vrin.

———. 1983. *Les Premiers Analytiques*. Traducción por Jean Tricot. Paris: Vrin.

Arnauld, A.; Nicole P. 2014. *La Logique ou l'art de penser*. Paris: Honoré Champion.

Biancanni, G. 1615[2008]. De mathematicarum natura Dissertatio. Traducción al inglês de Gyula Klima. In: P. Mancosu (ed.) *Philosophy of Mathematics & Mathematical Practice in the Seventeenth Century*. New York: Oxford University Press.

De Dainveille, F. 1954. L' enseignement des mathématiques dans les collèges jésuites de France du XVIe au XVIIe siècle. *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications* **7**(1): 6–21.

De la Ramée, P. (Petrus Ramus). 1555[1996]. *Dialectique*. Paris: Vrin.

Euclides. 1956. *The Thirteen Books of The Elements*. Traducción por Thomas Heath. New York: Dover.

Krayer, A. 1993. *Mathematik im Studienplan der Jesuiten: die Vorlesung von Otto Cattenius an der Universität Mainz, 1610/1611*. Sttutgart: F.Steiner

Leibniz, G. W. 1988. *Opuscules et fragments inédits*. Editados por Louis Couturat. Hildesheim: Olms.

Mancosu, P. 2008. *Philosophy of Mathematics & Mathematical Practice in the Seventeenth Century*. New York: Oxford University Press..

Mersenne, M. 2003. *La verité des sciences contre les Sceptiques ou Pyrrhoniens*. Edición de Dominique Descotes. Paris: Honoré Champion.

Pascal, B. 1984. *Pensamientos*. Traducción Juan Domínguez Berrueta. Buenos Aires: Orbis.

———. 2008. *L'esprit de la Géométrie. De l'art de persuader*. Paris : Bordas.

Pascal, B.; Arnauld, A.; de Nonancourt,F. 2009. *Géométries de Port Royal*. Editado por Dominique Descotes. Paris: Honoré Champion.

Rabouin, D. 2009. *Mathesis universalis. L'ideé de "mathématique universelle" d'Aristote à Descartes*. Paris: Puf.

Romano, A. 1993. A propos des mathématiques jésuites : notes et réflexions sur l'ouvrage d 'Albert Krayer Mathematik in Studienplan der Jesuiten. *Revue d'Histoire des sciences* **46**(2-3): 281–92

———. 1999. *La contre-réforme mathématique. Constitution et diffusion d' une culture mathémtique jésuite à la Renaissance*. Roma : Escuela francesa de Roma.

Sasaki, Ch. 2003. *Descarte's Mathematical Thought*. Springer.

Notas

[1]Las primeras axiomatizaciones de la Aritmética aparecieron en la segunda mitad del siglo XIX.

[2]Los tres métodos infinitesimales más conocidos fueron el de los indivisibles de Cavalieri, el de las fluxiones de Newton y el de los infinitamente pequeños de Leibniz. Ver Mancosu 2008.

[3]Es el caso de Torricelli que prueba que la llamada trompeta de Torricelli, sólido de lados de longitud infinita, generado por la rotación de una hipérbola alrededor de una asíntota tiene un volumen finito, primero por el método de los indivisibles y , después, por el método de exacción usado por Euclides en el libro XII de los Elementos. Ver Mancosu 2008.

[4]Mersenne (2003, pp.307–10) coloca también la Hidráulica y la Hidrostática entre las partes de las Matemáticas aplicadas.

[5]Sobre la tradición antigua y medieval de la *mathesis universalis* y su recepción en la modernidad ver Sasaki 2003, capítulos 6, 7 y 8; Rabouin 2009.

[6]Mersenne 2003, p.305, define el objeto de las matemáticas así: "Les Mathématiques [...] ont la quantité inteligible pour leur objet, car elles ne considèrent point la sensible que par accident". En su texto *Consilium de Encyclopaedia nova conscribenda methodo inventoria*, escrito en 1679, Leibniz coloca en el quinto lugar de la lista de todas las ciencias, un arte de las formas o cualidades (*Ars formularia*) que trataría de lo mismo y lo diverso (*de eodem et diverso*), de lo semejante y lo desemejante (*de simili ac diversi*), esto es, de la forma de las cosas, haciendo abstracción de la magnitud, de la posición y del orden. De esa arte dependerían muchas de las reglas que los algebristas y geómetras pasaran a usar aunque no se refieran sólo a cantidades (Leibniz 1988, p.37). En un fragmento del año 1683, Leibniz afirmaba que la *Mathesis univesalis* es la ciencia de las cosas imaginables , que no toda fórmula se refiere a cantidades y que pueden pensarse infinitos modos de calcular (Leibniz 1988, p.556)

[7]Los estudios clásicos sobre la formación matemática dada en los colegios jesuitas son los de De Dainville(1954), Krayer (1991) y Romano (1999).

[8]En el texto en cuestión, dice Aristóteles disertando sobre la prudencia: "Es indicio de lo que hemos dicho que los jóvenes lleguen a ser geómetras y matemáticos y sabios en materias así y no se piense que lleguen a ser prudentes [...].También esto podría investigarse: por qué un jovencito puede sin duda llegar a ser matemático pero no sabio o filósofo de la naturaleza" (Aristóteles 2015, pp.217–8).

[9]Conocemos hoy esa proposición como el teorema de Pitágoras.

[10]*Comme la raison est une quantité, quoique relative, toutes les proprietés de la quantité lui conviennent: c' est pourquoi une raison est égale, ou plus grande, ou plus petite qu' une autre raison* (Pascal, Arnauld, Nonancourt 2009, p.185).

[11]El texto en latín dicee así: *Ratio es quantitas illa qua circa unius quantitatis et alterius quantitatis extensionem ista una quantitas habet extensionem*.

6

Empty names, singular thought, and mental files

Luisa Luze Brum Genuncio

Empty Names

Empty names are not an uncommon topic in Philosophy of Language. The debate must take place, because one must have a proper account for singular terms, the linguistic expressions that name things, or in the cases that raise debate here, seem to refer, but alas, do not. From John Stuart Mill comes a traditional view that proper names denote things, but they never connote their qualities. This is an elegant and simple account for singular terms, that they should always make a direct reference to a thing. However, some singular terms appear to not refer to anything, or two terms appear to refer to the same thing differently.

Millianism started facing problems when confronted with proper names from fiction or mythology. Were one to talk of Pegasus or Don Quixote, they would be referring to the same thing, nothing at all. These would be perfect examples of empty names, since there is not an object in the world being named by them. But just because they are empty names, and they should have no referent it does not follow that sentences with those names are not meaningful, that they hold no semantic content. The meaningfulness and truthfulness of discourse containing empty names is a problem that those who defend Millianism must address (Braun 2005, p.597).

The Descriptive account of proper names follows in the coattails of Gottlob Frege and Bertrand Russell. The first introduced an important distinction between Sense and Reference, in his homonymous work, and the second introduced another important distinction, this one between types of knowledge, knowledge by acquaintance and by description. Russell's Descriptive Theory

I. F. Cunha; J. R. B. Arenhart; C. A. Mortari (orgs.) *Epistemologia, Mente, Matemática e Linguagem: Discussões do X Simpósio Internacional Principia*. Florianópolis: NEL/UFSC, 2018, pp. 104–113.

of Names has been of fundamental importance for many decades of philosophical work. Frege's and Russell's work indicated, rather convincingly one might add, that there was a descriptive quality to proper names.

Proper names, one would argue, seem to refer to a description, or a set of descriptions shared by the community of speakers, and that is the meaning of the name. Those descriptions would be to what the singular terms would stand for when used in propositions. The truth value of the propositions however would be dependent on the existence and accordance of the object referred and properties in the world.

Frege's puzzle of *Hesperus* and *Phosphorus*, has been much rehashed since its initial introduction, but it remains as good today as it was then. When one is faced with two different sentences, expressing two different propositions, because they use different proper names that nonetheless refer to the same object then those two propositions will have the same truth value, as in the following sentences:

(a) *Hesperus* is the brightest object in the night sky, other than the moon.

(b) *Phosphorus* is the brightest object in the night sky, other than the moon.

It was through empirical discovery that it was learned that both the names *Hesperus* and *Phosphorus* actually refer to the planet Venus. However, *Hesperus* was the name given to the Evening Star, and *Phosphorus* was the name given to the Morning Star. Both objects appear in the night sky, but neither is a star, and that they are the same object, a planet, came as a surprise as well. What makes sentences (a) and (b) have positive truth values is the fact that the object referred in the proposition by those different names does indeed display that property, of being the brightest in the night sky, other than the moon. The argument for a sense to a name will require further examples though:

(c) *Hesperus* is *Hesperus*.

(d) *Hesperus* is *Phosphorus*.

Sentences (c) and (d) should both express the same exact propositional content. As after all we are simply saying that an object is equal to itself in both instances. Nonetheless, the identity statement expressed in (d) is arguably richer in meaning, as it depended upon scientific discovery for its truth to be known. The identity statement in (d) conveys extra information, which would seem to make the case that names carry meaning, not just simple reference to an object. In the cases where there is no object being referred to, then one cannot verify the truth value of the proposition, but at least there can be a meaning to it (Frege 1948).

Russell put forth an interesting theory some years after Frege's Sense and Reference. What became the Descriptive Theory of Names assumes that a proper name has a definite description, or collection of definite descriptions, that are the semantic content of that name, that give it its meaning. While the referent is to be determined by objects that satisfy the definite descriptions. For instance:

(e) Sir Walter Scott is a poet.

(f) The author of *Waverley* is a poet.

(g) Sir Walter Scott is the author of *Waverley*.

In sentence (e) we have a simple proposition, where we ascribe the property of being a poet, to the name 'Sir Walter Scott'. Sentences (e) and (f) should express the same truth value, as they refer to the same object as having the same property. The identity relation expressed in sentence (f) is not a necessary one, as someone else could have authored *Waverley*. There are other problems here, as the description 'the author of *Waverley*' is neither necessary nor sufficient as definite description for Sir Walter Scott. This is a major point of contention, for if the community of speakers have divergent descriptions, then, they are not **definite** descriptions. One would never be sure if they would be speaking of the author of *Waverley* or of *Ivanhoe*.

His theory also applies to complex descriptive phrases such as 'The king of France'. The sentence 'The king of France is bald' can be broken down thus: 'Something is the king of France and is bald and nothing else is the king of France'. The paraphrase uses general quantifiers, i.e., something, nothing and everything; and remains meaningful even in the absence of *designatum*. Most impressively this allows us to make true sentences using apparent empty names, for such is the case that France has not been a monarchy for quite some time and does not have a king.

A sentence such as 'The king of France is not bald' can be paraphrased thus: 'there is not something that is the king of France and is bald'. Placing the negation right at the beginning of the sentence does allow for this type of true sentence. Since we should all agree that there is no king of France to be or not to be bald this is quite a satisfactory solution for this product of mental exercise. But is it a satisfactory response to the queries involving proper names in fiction or mythology?

In the Descriptivist tradition, one must account for the variant descriptions the same object can garner through its different modes of presentation to the subject. If one wishes to say of Napoleon's horse that 'Marengo was a grey Arabian mount', that can be considered to have a positive truth value. However, if one were to make descriptive assertions of this type concerning Bellerophon's steed, such as 'Pegasus was a white winged stallion', the proposition would have to be considered neither true nor false. There just is not a Pegasus in the world to be white, winged or a stallion, so none of these predicates can be fulfilled by the use of the singular term (Russell 1905).

There is also a recurring point for critics, the issue of how to determine if a description, or set of description is sufficient to single out an object. Coming back to Napoleon's horse, how do we know which horse one is talking about if two people have two distinct incomplete set of descriptions? If subject *a* knows only that the horse was 'a grey Arabian mount', and subject *b* knows only that it was 'a short and reliable horse imported from Egypt' how when they have a conversation about Marengo will they be sure to refer to the same object? Many horses can fall under those definitions, Napoleon having given preference to short Arabian mounts in his military career.

Singular Thought

One goes about having singular thoughts by satisfying the tokening of a singular thought vehicle and having a singular thought content. For the first step, the thought vehicle, one opens a *mental file* in an acquaintance relation, but sometimes *in absentia*. One opens the mental file in the expectation of the acquaintance of the referent. The function of the mental file is to store information.

That one needs an acquaintance relation to obtain singular thought will be taken as given for this argument, even if a loose acquaintance relation maybe enough to achieve it. Even though Robin Jeshion presents interesting thought experiments against this position I would propose that her arguments were not sufficient to defend her intuitions and leave this particular discussion for another day. Even if used outside its more rewarding and common manner it is still storing information and allowing one to predicate on things.

To successfully produce the singular thought-vehicle still leaves the more demanding capacity of entertaining singular thought-content unexamined. The thought-content is object dependent. This instance cannot rely on the expectations or imaginings of acquaintance. Singular thought-content is truth-conditional content. Thus, the singular thought-vehicle will occur when the mental file is created, and one accumulates information there, and the though-content when one enters an epistemologically rewarding, ER, for short, relation with the referent. Both thought-vehicle and thought-content must be properly entertained when one has *singular thoughts* (Recanati 2012, p.131).

Therein lies one of the problems I would like to bring attention to: it would seem impossible to entertain singular thoughts about empty singular terms. Allow us two empty names' conundrums, the first being the Whitechapel murderer best known as Jack, the Ripper, and the second being his imaginary contemporary, the famous detective Sherlock Holmes. Most of the London public in the earlies 1890's had clear notions on both those names, without ever having met the acquaintance of the objects referred by them.

Even though Jack might be a misnomer, still the public had the expectation of acquaintance with the Whitechapel murderer, and through his misdeeds stored information about him into mental files. Sherlock Holmes on the other hand was always an imagined acquaintance, never to be realized. The public therefore had singular thought-vehicles concerning both these empty singular terms, and no thought-content was ever realized without an object placed in an epistemologically rewarding relation.

The employment of empty names is at the limit of the thought-vehicle normal use, as an incomplete, improper attempt to think a singular thought that cannot hold a truth-value. The singular thought-content will only be obtained if it is in an epistemologically rewarding relation with the referent. The singular thought must have a semantical value that can be verified, that is why it is truth conditional, why the thought-content stands at a relation to the referent. The mental file can be opened on the expectancy of acquaintance, and one could argue, the expectancy on the relation of acquaintance could even be the basis for the thought-content.

Le Verrier postulated two heavenly bodies, Vulcan and Neptune, through variations in the orbits of Mercury and Uranus, respectively. While doing this he created two distinct mental files through thought-vehicle. The existence of Neptune was confirmed many years after Le Verrier first proposed it, although Vulcan never would be, and the variations in Mercury's orbit were due to aspects the Sun's gravity which only became known after Albert Einstein's theory of general relativity. One was just basis for imagination or mythology, the other however, was a proper singular thought. The pertinent question would be when it became a singular thought. When Neptune was postulated to exist or when it was confirmed?

If the expectancy of acquaintance with the object is enough to justify opening a mental file through thought-vehicle and start to accumulate correct or incorrect information about the object, then both mental files for the planets predicted by Le Verrier should have held the same status until one was confirmed and the other discredited. However, that would seem to attribute to unconfirmed scientific theories a somewhat mythological status, bundling them up with disproven theories, which appears too harsh a step. An unconfirmed theory is different to a theory proven incorrect, to say they should be held as having the same type of truth value is deliberately ignoring the finer points of one being patently incorrect and the other undetermined.

Mental Files

Mental files concern objects, they stand in an ER relation, or the expectancy of one, where one stores information, or misinformation, as the cases vary, about the objects in the file (Recanati 2012, p.134). The mental files are about the things themselves not about the properties, those are the contents of the files. The mental files framework does not favor the descriptivist reference relation, but a relational reference one. The objects first and always stand in a referential relation to the subject that produces the mental files about them.

If one holds a pen in hand the referent for producing the mental file is the pen itself, not its properties, its descriptions. This saves us from one of the pitfalls of descriptivism, as there is no preset bundle of descriptions that a referent need satisfy so that we can go forth and make true sentences regarding it. The mental file corresponds to the singular term, in the simplest sense, that it can be created from something we wish to refer.

The subject may construct the mental file from an incomplete or incorrect mode of presentation of the object. If we were to turn back to the *Hesperus* and

Phosphorus case, that would be a good example of an object being perceived through different modes of presentation that led to the distinct creation of two mental files. An astronomer observing the night sky before the discovery that the Evening and Morning Star were both actually the same planet, Venus, would probably have such two mental files.

There was the mental file '*Hesperus*', filled with information about the object observed in the evening sky, how it was a star, the brightest star, how it usually appeared on twilight, how it set, etc. Also, there would be the mental file '*Phosphorus*', filled with information about the bright object that would be seen around dawn, how that star seemed to appear one hour before sunrise, to be dimmed by the sun later than other stars, etc. The maintenance of both mental files would have been an epistemologically rewarding relation every time our supposed astronomer made his observations of the night sky, right until the discovery that neither *Hesperus* nor *Phosphorus* were a star, but a planet, the same planet, in an interior orbit to the Earth.

When that discovery was made there was the creation of a new mental file, regarding the referent object we now know as Venus. Additional information about the object, its properties, were added to that mental file. The previous mental files of *Hesperus* and *Phosphorus* could be assimilated, or merged into this new file, since the epistemologically rewarding relation would then depend on the referent of the 'Venus' mental file.

Because the mental file concerns on the relation between the subject and the referent it is very possible to accumulate incorrect information, misinformation, as it were. For centuries astronomers had the mental files for *Hesperus* and *Phosphorus* filled with properties like 'being a star', a proper case of misinformation. On the mental file of Venus on the other hand one has a correct identity statement such as '*Hesperus* is *Phosphorus*'.

The Descriptivist theory may seem flawed in many ways, and because of that many philosophers have tried to either make new forays into Millianism or other intuitive positions that oppose descriptivism. The main issue is to present firm arguments to support those distinctive intuitions. One of the strongest positions if that presented by Saul Kripke in his *Naming and Necessity* lectures from 1970. On those lectures, he argued that names were rigid designators for objects, that they selected the object named from the moment of baptism rigidly, in every possible world.

Kripke's use of the '*Hesperus* is *Phosphorus*' case was very different from

Frege's, but insightful. He argues that necessarily *Hesperus* is *Phosphorus*, in every possible world, since where there is a *Hesperus* and a *Phosphorus* the rule of rigid designators will ensure this fact. However, the discovery that they are the same object was contingent on epistemic discovery, it was not an *a priori* truth. This was one of the main focus of his lectures, that there could be necessary *a posteriori* truth (Kripke 1980, p.104).

Three years after the Princeton lectures, Kripke went on to give the John Locke Lectures, published under the name *Reference and Existence*, where he would touch upon the implications of considering singular terms rigid designator in the infamous cases of the empty names. The implication is an ontological one, if the singular term **must** refer, as rigid designator, it must designate, something, nothing of this world, this actual world, except the imaginings or authorship, perhaps, so it must designate an abstract entity. For all those empty singular terms there will be abstract entities, at least in accordance with rigid designators as the correct interpretation for the reference problem (Krikpe 2013, p.71).

Maybe Quine's economy in reproducing unnecessary abstract entities for the sake of argument could be called into place at this point in time. Not that Meinong arguments have not attracted their fair share of defenders. But it does seem to be a step too far ahead of the curve (Quine 1948, p.2). Mental files, similarly to other theories that oppose descriptivism, puts descriptions, properties, as secondary to the thing being referred. But mental files are in the subjects' minds, susceptible to being filled with information and misinformation, despite being based on epistemologically rewarding relations. The singular terms belong to languages, having their references set by the community of speaker of that language (Recanati 2012, p.138).

Allow for the exploration of more intuition at this point, they might lead the way into a clearer argument.

(h) Sherlock Holmes was usually very late in the mornings, save upon those not infrequent occasions when he was up all night.

(i) Sherlock Holmes was Sir Conan Doyle's greatest invention.

(j) Sherlock Holmes does not exist.

These last three sentences use the singular term, in attempts of assertions. Attempts I say, because we cannot rightly evaluate the truth value of sentence (h). The use of the singular term in (i) is metatextual, regarding the fictional work itself, allowing for a degree of reference to the literary body produced, thus having a truth value. Sentence (j) uses the singular term without referent, and it is about the actual world (García-Carpintero 2010, p.278). Is its truth value more valid? I mean, is this close enough to natural language to be palatable as a solution?

Intuitively, fictionalism seems to make more allowances to the speaker, and at the cost of a lesser ontological commitment. One must only embark into the fiction to be able to make assertions with empty singular terms. Fiction is make believe, all its discourse is pretend assertions, authors and actors are merely pretending for the benefit of the audience. So, if one wishes to seriously discuss it, one must pretend as well. All our assertions about Sherlock Holmes should be made in play, and in that closed system of the fiction to which the singular term belongs, not only will the sentences be meaningful but their truth value verifiable (García-Carpintero 2010, p.280). They all come with that small caveat at the end though, as a bitter aftertaste.

Whatever the case, I can have a mental file about Sherlock Holmes, even if I can never have full-fledged singular thoughts about him. The debate on how exactly one would have singular thoughts regarding things we have no acquaintance relation with is itself based on varying intuitions. On the Neptune case, Le Verrier postulated the singular term, and he could not produce the referent or knowledge by acquaintance from it, from the simple mathematical stipulation of the planetary body, so there was no singular thought there.

The intuitions regarding Jack the Ripper sometimes go in divergent directions. The main problem being that a detective imbued with the task of investigating his identity and his crimes would be in direct contact, in acquaintance, with evidence of the referent. In absence of the object they would still have an epistemologically rewarding relation that assured them of the existence of it, even it not its identity, at least to its mean properties. So, it seems the singular thought, if it could be argued, for the Ripper, would be along the itaInstrumentalist approach, where even if one has no clear notion of the thing, still better not to wander the streets at night alone (Jeshion 2010, p.116).

However, how can the murder scenes be conclusively more epistemologically rewarding relation than the mathematical calculations that led Le Verrier to postulate the existence of Neptune? After all, Vulcan's erroneous postulation took place without the more advanced gravitational notions of Einstein taken into the consideration on the orbit of Mercury. The lack of referent on the Ripper case and on the Neptune postulation were similar, even if the first seemed more tangible and the other was in the end proved true.

The singular thoughts, as presented here, would depend on the acquaintance relation. They are truth conditional in their dependence of the referent. This distances them both from singular terms and from the mental files. The mental files are not truth conditional in the least, they are based on a relation between subject and referent, that can easily be made under convoluted modes of presentation, and the subject can fill their mental files with information or misinformation. I can have mental files about empty singular terms, and do have them. But what is information and misinformation when there is not an object in the world I can compare the mental file against?

References

Braun, D. 2005. Empty Names, Fictional Names, Mythical Names. *Noûs* **39**(4): 596–631.

Frege, G. 1948. Sense and Reference. *The Philosophical Review* **57**(3): 209–30.

Gacía-Carpintero, M. 2010. Fictional Singular Imaginings. In: R. Jeshion (ed.) *New Essays in Singular Thought*. New York: Oxford University Press.

———. 2014. Pensamentos Singulares. In: J. Branquinho; R. Santos (eds.) *Compêndio em Linha de Problemas de Filosofia Analítica*. Lisboa: Centro da Filosofia da Universidade de Lisboa.

———. 2014. Nomes Vazios. In: J. Branquinho; R. Santos (eds.) *Compêndio em Linha de Problemas de Filosofia Analítica*. Centro da Filosofia da Universidade de Lisboa: Lisboa.

Hawthorne, J.; Manley, D. 2012. *The Reference Book*. Oxford: Oxford University Press.

Jeshion, R. 2010. Semantic Instrumentalism. In: R. Jeshion (ed.) *New Essays in Singular Thought*. New York: Oxford University Press.

Kripke, S. A. 1980. *Naming and Necessity*. Cambridge: Harvard University Press.

———. 2013. *Reference and Existence – The John Locke Lectures*. New York: Oxford University Press.

Lycan, W. G. 2008. *Philosophy of language: a contemporary introduction*. 2nd ed. New York: Routledge:.

Recanati, F. 2012. *Mental Files*. France: Institut Jean-Nicod.

Russell, B. 1905. On Denoting. *Mind* **14**(56): 479–93.

Quine, W. V. O. 1948[1953] On What There Is. *Review of Metaphysics*. Reprinted in *From a Logical Point of View* 1953. Harvard University Press.

7

Stylistic approach to the Brachistochrone problem

LUIZ FELIPE SIGWALT DE MIRANDA

Concepts of style are often used in many different cases, but there are two major meanings attributed to it: (i) individual features that indicate a unique bond between an author and his/her work; and (ii) a collective feature that characterizes a particular activity in a certain domain. It is important for philosophy to refine this notion in order to better understand (or maybe conceive) a proper concept of style. Moreover, philosophy should discuss and (if possible) indicate ways to an epistemology of style. Mancosu (2017) synthesized such need in a simple question: does style have cognitive relevance or does it not? In this paper, I will first present and discuss a number of key concepts of style. Three of them are interconnected, which are Crombie's style of thinking, Hacking's style of reasoning, and Bueno's narrow style of reasoning; and the other one is Granger's general stylistic analysis. Then, I will present the Brachistochrone problem as an example in the history of mathematics, in order to evaluate if it is possible for mathematics to own its proper style or not — my guideline will be Bueno's five fundamental components as a criterion that indicates the very presence of a style. Finally, I will present a perspective regarding the results of such criterion to a style of mathematics.

1. Narrow style of reasoning

We usually use the term *style* in an ordinary sense as a particular way to do or to be something. In the Arts, this term is also a characteristic designated to a group of people or to a particular period. Scholars have explored these two meanings in order to give them some philosophical or (and) historical background. Otavio Bueno (2012) is one of those scholars, and I am going to use his concept of style based on five fundamental components as a criterion, which indicates

I. F. Cunha; J. R. B. Arenhart; C. A. Mortari (orgs.) *Epistemologia, Mente, Matemática e Linguagem: Discussões do X Simpósio Internacional Principia*. Florianópolis: NEL/UFSC, 2018, pp. 114–132.

what could or could not be considered a style, in order to better understand what that term ultimately means in mathematics. This criterion fixates a spot higher than the theory[1] of that domain, which some style is alluded. None of these five items depends on any specific theory at all of a certain domain other than style ones. Bueno's five basic components (shown below) helped to characterize *style* as a form of investigation:[2]

(i) identify questions;
(ii) afford techniques and procedures to answer those questions;
(iii) own valid patterns of inference to investigate objects in a certain domain;
(iv) employ heuristic resources and
(v) identify constituting conditions to certain objects.

We can consider an example to understand how these five components could circumscribe an appropriate style, independently of any scientific theory for the production of inferences. The example, developed by Bueno about George Palade, shows us how Palade performed procedures in his laboratory, using different measurements and analyses until he declared consistently that an unknown scientific object was detected in the cell's biology. Forward analysis concluded that these unknown cellular components were composed mainly of ribonucleic acid, and were thus called ribosomes. The scientific community accepted the existence of this new cellular compound, the ribosome, under the influence of visual culture,[3] after seeing the images produced by the Transmission Electron Microscope (TEM). Today, ribosomes are studied in a field of research within molecular biology that covers protein synthesis and the important role played by ribosomes in this process.

This example illustrates a specific style developed by Bueno, a narrow style of reasoning or, precisely, the instrumental style, which involves the study of cell structure and behavior, based on the outputs of imaging instruments. The micrographs produced by TEM provide visual evidence for the existence of relevant structures: the ribosomes. Certain marks presented on the surface of these micrographs are interpreted as evidence of the presence of the corresponding objects within the sample. The inferential devices used in this case were the images, and they allowed one to infer, because of the reliability of TEMs, the presence of the given phenomenon from suitable traits in the micrographs.

Styles of reasoning play a significant role in shaping our understanding of

> scientific activity (...) This is, in part, due to the role they play in constituting that activity. As I use the concept, a style of reasoning [narrowly understood] is a pattern of inferential relations that are used to select, interpret, and support evidence for certain results. If we consider different domains of scientific research, different styles of reasoning are often involved. (Bueno 2012, p.657)

Now, we have seen a narrowly understood instrumental style of reasoning at work, but it is important to certify if this new instrumental style is in conformity with Bueno's five basic components. In order to do so, we can apply the five fundamental components of a narrowly understood style to the example above:

(i) **identify questions:** examine data from new scientific instruments and seek to create inferences from possibilities;

(ii) **afford techniques and procedures to answer those questions:** employ scientific instruments including computational resources;

(iii) **own valid patterns of inference to investigate objects in a certain domain:** "involve (deductive) logic (which may or may not be made explicit) and, more broadly, suitable information transfer procedures, which are highly context sensitive and rely on additional assumptions about the domain under consideration" (Bueno 2012, p.660);

(iv) **employ heuristic resources:** use images produced by scientific instruments, auxiliary hypothesis and triangulation techniques, and

(v) **identify constituting conditions to certain objects:** constitute scientific objects through certain characteristics and empirical results.

Thus, the narrowly understood instrumental style of reasoning is, according to Bueno, in conformity with the five basic components of a concept of style, because the criteria based on those fundamental components were successfully applied, grasping the minimal structure that a style should have.

Narrow styles of reasoning are also applicable in mathematics and they are in accordance to principles that describe a certain class of objects and relations between them. Connections are established between relevant objects in order to determine their properties and also to determine other relations that those objects bear in respect to others within the same domain. The inferential mechanisms used in mathematics, besides logic, which plays a limited role in mathematical practice, are: diagrams, drawings, pictures, mental images, geometrical interpretations. Many other visual devices also play an inferential role according to Bueno (2012, p.661).

Bueno is offering a particular position from within a broader concept of style, which was conceived by Crombie and philosophically refined by Hacking. For a better understanding of what Bueno means with the narrowly understood style of reasoning, it is important to emphasize that this style is fundamentally an *inferential* one in its nature. Such style allows for the inference of important information in respect to the domain under investigation, as in the example above about the discovery of the ribosome.

On the one hand, narrowly understood styles of reasoning provide more specific information of some particular domain of inquiry, without losing generality. On the other hand, the broader styles of reasoning from Crombie and Hacking neglect, in science and also in mathematics, refined features that lie upon a practice-oriented framework, because these styles consider (to some extent) a general concept of style that puts science and mathematics on a specific *plateau*. One of those *plateaux*, of which mathematics is part *par excellence*, is Crombie's style of thinking, which was commented by Bueno:

> If we are interested in making sense of postulational reasoning in mathematics, it is crucial to examine the relevant style of reasoning at a substantially lower level of abstraction, so that significant differences within postulational reasoning can be examined and assessed. In contrast, narrowly understood styles of reasoning — henceforth, 'narrow styles of reasoning' — operate at a level of abstraction that allows for the identification and study of these differences, while still preserving some generality. (Bueno 2012, p.659)

Hence, narrow styles of reasoning are much more properly suitable to the diversity in mathematical practice than Crombie's concept of style supported by Hacking.

2. Style of thinking and style of reasoning

Alistar Cameron Crombie conceived a monumental work — Styles of Scientific Thinking in the European Tradition (1994) — regarding European science history, in which he proposed a historical, analytical interpretation to long periods of time. To that end, an array of concepts (related to philosophy of knowledge and its objects, nature and its science, arguments and its evidences) gives birth to a European mindset which persists in time and resists within its society and culture. A style of thinking is, ultimately, related to commitments. For example, the ancient Greeks introduced a form of thinking to European rationality based on two commitments: natural causality and formal proof.

From a historical analysis to a European-thinking comparative anthropology, Crombie (1995) considers the existence of some structures that persist in time, deeply rooted in commitments or dispositions. The author considers two different moral and intellectual commitments: one concerning nature and its perception, and the other concerning science and its investigation, problems/solutions, explanations, arguments, language[4] and even some errors — i.e., everything that is related to styles.

> Within these general commitments, scientific thinking became diversified into a number of different styles of inquiry, demonstration and explanation, of which I have identified a taxonomy of six. The novelty was in the style. It is illuminating to focus on the critical occasions of intellectual orientation, leading to the maturity of each style. There is a logical and a chronological sequence, in each arose in a cultural context where an assembly of different but cognate subject-matters, scientific, artistic, economic, and so on, was united under a common form of argument (...) A scientific style, with its commitments, identify certain regularities in nature, which became the object of its inquiry, and defined its questions, methods and kinds of evidence appropriate to acceptable answers within that style. (Crombie 1995, p.234)

The six styles raised by Crombie are:

1. The postulation style: based on mathematical and logical argumentation, it consists in deductive proofs from explicit principles (e.g., Euclidian geometry, Aristotelian syllogisms);
2. The experimental style: it is related to the control of postulates and the search for new ones with the help of observation and measurement;
3. The hypothetical modeling style: it consists of conceiving models to explain properties of unknown phenomena;
4. The taxonomic style: it refers to the organization, ordination and comparison of phenomena involving groups or populations;
5. The probabilistic and statistical style: it concerns the analysis of regularities in events related to manifold populations or groups of individuals;

6. The historical-genetic style: it combines analysis and synthesis of genetic development by observing present regularities to infer the past (and the present would be explained by developments from the past).

One should ask if the postulation style is indeed a style and, according to Bueno (2012), the five fundamental components should answer this question affirmatively if the style in case is in conformity with those components. Thus, one can find the following:

(i) **identify questions:** examine what follows from first principles or postulations;
(ii) **afford techniques and procedures to answer those questions:** employ definitions and mathematical proof in order to establish results;
(iii) **own valid patterns of inference to investigate objects in a certain domain:** adopt the classic deductive logic as an inferential pattern;
(iv) **employ heuristic resources:** use diagrams; and
(v) **identify constituting conditions to certain objects:** constitute objects by means of postulations and derivations regarding the same objects.

Apparently, the postulation style is in conformity with Bueno's criterion: the narrowly understood instrumental style of reasoning. Nevertheless, the fifth basic component is not properly adequate to mathematics as it is to science, since mathematical objects are inexorably characterized by mathematical concepts, thus making a genuine mathematical style unfeasible. Therefore, for every attempt to conceive a mathematical style, when its objects are characterized, a mathematical concept will be necessarily invoked. That way, the mathematical plasticity makes impossible for us to consider a proper mathematical style. This difficulty was called, by Bueno, the impregnation problem.

Hence, to complete the triad of concepts of style related to each other, before presenting a totally different one (Granger's style), Hacking's concept will be presented to adjoin Crombie's and Bueno's concepts.

Ian Hacking (1992) supports the addition of two new styles to Crombie's list, namely: the laboratory style, and the algorithmic style. The former was composed from the combination of two of Crombie's styles: the experimental style and the hypothetical modeling style. The latter was created outside the European circle, and in fact its origin refers back to the Medieval Islamic world

(Whinther 2012, p.596). Hence, to avoid psychological, subjective or relative interpretation to his concept of style, Hacking changed from style of thinking to style of reasoning.

According to Hacking, there are no conditions that should be considered sufficient and necessary for something to be a style, and only some key features should be selected. A new style introduces new objects, new kinds of sentences and new methods of reasoning. "For example with the mathematical style comes new abstract mathematical objects, a new method of proof and new kinds of sentences expressing axioms and theorems"(1992). The emergence of these elements converges to a style itself.

Hacking, differently from Crombie, highlights discontinuities in the development of styles. However, he points out that the concept of style crystallized in history and thus fixated how to proceed in the future based on initial precursors, just like Crombie did. Hacking supports two other controversial characterizations of style: autonomy and self-authentication. Style autonomy relies on its independence of its cultural and environmental origins (e.g., the independency between the postulation style and Ancient Greece), which means that styles do function well in different social and cultural contexts after crystallization. Style self-authentication means that styles of reasoning make relevant kinds of sentences that are candidates to be true and false, and thus styles do not need outside reasons to support or to justify them.

3. General stylistic analysis

Gilles-Gaston Granger (1974) establishes a relation between form and content as a process of working from a historical domain, thus producing some intellectual work that is presented by a social and historical practice. Individuality is opposed to structure but, in spite of it, the living practice and its elements are incorporated to the form as non-casual redundancies or overdeterminations. His concern is to develop a general stylistic analysis in which every practice has an inseparable style, and in which both — practice and style — are concretely presented as a factor of style.[5] Granger based his general stylistic analysis on the Kantian transcendental aesthetics; i.e., every formal condition of knowledge determines a type of objectivity *a priori*. Moreover, he seeks for general conditions to structure insertions within an individual practice and, to this end, he analyzes mathematical works provided by historical subjects, aiming at giving them form and focusing on more general conditions of practice. In mathematics, practice arises from a certain form, which has to be adequate for different possibilities. Mathematical redundancy escapes from a constituted framework, and thus it does not have meaning (to some extent it is just a non-explored residue). A mathematician can present, in the mathematical experience, different successful manners to conceive one and the same form, or different mathematicians can present varied compositions of an identical form in each mathematical experience.

> Style appears to us here on the one hand as a way of introducing the concepts of a theory, of connecting them, of unifying them; and on the other hand, as a way of delimiting what intuition contributes to the determination of these concepts. (Granger 1974, p.30)

The example that Granger uses to support his concept of style is based on three different forms of presenting complex numbers, and it establishes different styles for each of them. I will use only one of these forms against his own concept in order to show that Granger is not free from the problem of theory impregnation.

Two parts compose the trigonometric form of the complex number, which are the *modulus* (ρ) and the *angle* (θ). Figure 1 presents the trigonometric form and refers to an extension and rotation operator applied to vectors. It also intuitively suggests, according to Granger (1974): the multiplication rule;[6] the transformation from polar to Cartesian coordinate system; and the additive properties of the complex number in the Cartesian form.

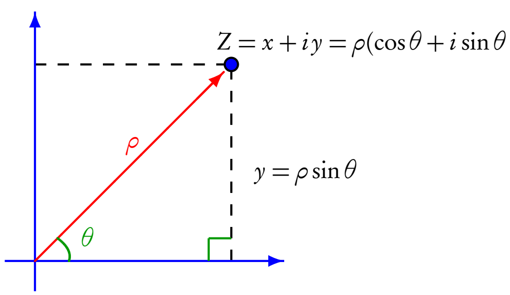

Figure 6: Polar coordinate graphic for complex numbers

It is time to recall that intuitions neglect mediation, hence if we intuit something — like the multiplication rule regarding complex numbers at a polar coordinate system — then we will do so without any kind of help. It seems to me that it is very unreasonable to consider that the multiplication rule of complex numbers in polar coordinate systems does not need, however minimum, previously understood concepts, which gives basis to vectors, operations with vectors, plane geometry of circles, Argand–Gauss plane, etc. Also, how are these concepts related to each other in order to conceive the multiplication rule of complex numbers in polar coordinate systems? Granger used mathematical theory to compose a style in mathematics and, whenever he tried to refer to the complex number (the mathematical object) illustrated in the Cartesian plane according to the polar system, some conceptual characteristic from vectors was needed. No intuitions were evoked, only concepts related to vector theory, and that is why his concept of style failed to pass the impregnation problem conceived by Bueno.

4. The Brachistochrone Problem

It is important to test the possibility of either having or not having style in mathematics in a historical episode. To do so, I believe that the Brachistochrone[7] problem could help us in the analysis of mathematics in order to conclude whether it is possible to sustain a concept of style in it. I am going to apply the criterion of the five basic components to the narrow style of reasoning in mathematics, which is similar to what Bueno did in his ribosome micrograph example based on George Palade's research. In other words, I am proposing a mathematical episode, the Brachistochrone problem, with the aim of verifying the very possibility to sustain the narrow style of reasoning in mathematics.

The Brachistochrone problem is crucial to my purpose because it has united different mathematicians facing the same challenge, each one — with their theories, abilities and practices — confronting it and achieving the same solution: the ordinary cycloid. Initially, Galileo was the first mathematician to work with this problem (to find the fastest curve between two given points), but he placed it in the theorem 22 (proposition 36) scholium of his *Discorsi*[8] (1638). Galileo reached the following result: the circle arch is the fastest curve between two given points, but he committed a mistake that deviated him from the right curve, the ordinary cycloid. (At that time, it is important to emphasize, Galileo already knew the cycloid, its constructing characteristics and the proportion of its surface, but he did not know that it was the fastest curve between two given points.)

The Brachistochrone problem is the following: consider two points not in line on a perpendicular plane, vertical in relation to the horizon. Under the action of gravity, a body slides from the higher to the lower point; the problem requests the curve that connects these two points, in which the body would travel in the minimum amount of time possible (Figure 2). Johann Bernoulli had proposed it to his contemporary mathematicians in order to claim the superiority of the Leibnizian theory and practices. He proclaimed it publicly for the first time in the *Acta Eruditorum* (1696) as *Problema Novum*.[9]

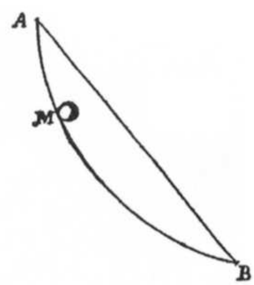

Figure 7: Figure 5, table 5, *Acta Eruditorum*, June 1696

Johann Bernoulli and Leibniz decided to extend the deadline for presenting the solutions until the following Easter, so that mathematicians outside Germany — mainly from France, Italy and the Netherlands — could have enough time to dedicate themselves to it. In May 1697, Johann Bernoulli published all the solutions he found in the *Acta Eruditorum*. Leibniz (1697), Johann (1697) and his brother Jakob Bernoulli (1697) were the first to present a correct solution, and later Marquis de l'Hospital (1697) also rightly answered the problem. Finally, Johann Bernoulli recognized[10] Newton's solution published anonymously on *Philosophical Transactions* in January 1697 and, because of that, he republished it as another solution presented to the Brachistochrone problem in the *Acta Eruditorum* (1697).

Each solution presented in May 1697 in the *Acta Eruditorum* has an impressive diversity in its mathematical arguments, even though all of them reached the ordinary cycloid as the fastest curve. I will consider three of those solutions: the ones by Leibniz, Johann Bernoulli and Newton, mainly in terms of their mathematical arguments. My purpose is to apply the narrow style of reasoning concept to them. I will analyze the corresponding features of that concept of style in these historical instances in order to verify whether or not there is a consistent stylistic unity among them.

Leibniz (1697), on the one hand, first considered the practice of presenting problems in mathematics the best way to put brilliant minds at work. Then, he exalted his theories and methods and Johann Bernoulli's mathematical abilities and generosity to let others exercise themselves in such an attractive and challenging problem. Afterwards, Leibniz described the *problema novum*, presenting it in details. Next, he presented the mathematicians who answered it (Bernoulli brothers, l'Hospital and Newton). Later, he explained that Johann Bernoulli only presented his indirect answer rather than his direct ones because of former considerations to the dioptric phenomenon. Then, Leibniz considered that the Brachistochrone problem, presented in the way it was, promoted a new employment of the maxima and minima concepts to search for the fastest curve. According to Leibniz (1697, p.204), Johann Bernoulli's indirect solution has two major consequences: (i) it determines the continuum curvature of the ray of lights and (ii) it finds the curve that describes its reflexes. Finally Leibniz presented the cycloid as the fastest curve, using its constructing $LM = (\widehat{LK})$ property.

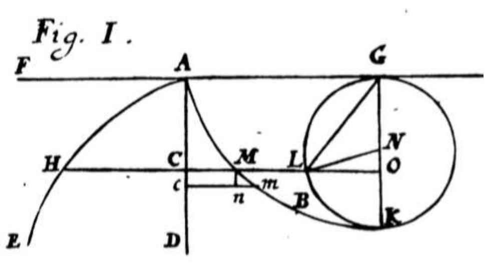

Figure 8: Figure 1, table 4, *Acta Eruditorum*, May 1697

Johann Bernoulli (1697), in turn, first considered the similarity between the fastest curve and the ray of light's trajectory through a non-uniform medium, based on the light property of traversing any medium in the minimal amount of time.[11] Then, he declared that even though there were many methods to determine maximum and minimum, none of them established any subtle connection to the Brachistochrone problem, even the ones inherited from mathematicians before him (like Descartes and Fermat). Later, he declared that he wished to present a particular (or indirect) method rather than a general (or direct) one to solve the problem, and he reinforced that one of his objectives in posing such a problem was to attract mathematicians, like Leibniz did. Afterwards, he exalted Huygens for being the first one to determine the cycloid's isochrone property (proposition 25, *Horologium Oscilatorium*) (Huygens 1986, pp.69–70), that is, Huygens' famous Tautochrone. (Johann Bernoulli was amazed when he realized that the Brachistochrone and the Tautochrone are the same curve, namely, the cycloid.) Johann Bernoulli presented his indirect method based on the dioptric model (Figure 3), that is the curvature of the ray of light, which traverses a non-uniform medium. He considers that, if the law of refraction[12] responds satisfactorily to a kinematic phenomenon, then it does not matter whether they are light or heavy bodies — what really matters is the minimum amount of time, the necessary condition applied in both cases. After that, Johann Bernoulli developed his solution, which is based on the equality between the cycloid differential equation achieved

$$dy = dx\sqrt{\frac{x}{a---x}} \tag{1}$$

and the cycloid constructing $LM = (\widehat{LK})$ property. Finally he presented the cycloid's constructing proportion (Eq. 2), which expresses its fundamental characteristic[13] (Figure 4).

$$\frac{AR}{AB} = \frac{AS}{AL} \tag{2}$$

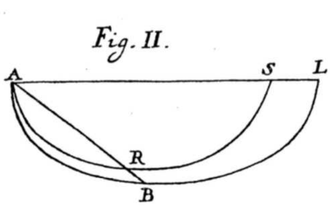

Figure 9: Figure 2, table 4, *Acta Eruditorum*, May 1697

Newton, on the other hand, presented a constructive proportion to the cycloid as the solution to the Brachistochrone problem, which is related to a proportion based on different lengths between two cycloids and the radii from their circle generators. Indeed, it is the same proportion reached by Johann Bernoulli (Eq. 2).

> From the given point A let there be drawn an unlimited straight line $APCZ$ parallel to the horizontal one, and on it let there be described an arbitrary cycloid AQP meeting the straight line AB (assumed drawn and produced if necessary) in the point Q, and further a second cycloid ADC whose base and height are to the base and height of the former as AB to AQ respectively. This last cycloid will pass through the point B, and it will be that curve along which a weight, by the force of its gravity, shall descend most swiftly from the point A to the point B. Q.E.F. (Newton 1967, p.226)

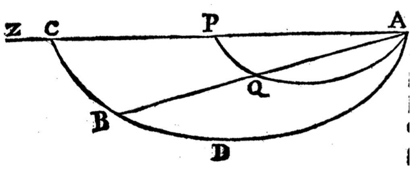

Figure 10: Figure 12, table 4, *Acta Eruditorum*, May 1697

In short, our conclusion so far has been: (i) that Leibniz supported Johann Bernoulli's indirect method expressed by his optical approach to the Brachistochrone problem and the Leibnizian calculus used to solve it; and (ii) that Newton presented a cycloid fundamental proportion as a justification to this curve in response to the problem, a geometrical fundamental argument that uniquely points out the cycloid as the searched curve. After presenting those three solutions to the Brachistochrone problem, I would like to return to the concepts of style considered in this text, mainly the narrow style of reasoning, in order to analyze this mathematical problem in light of those concepts.

5. Stylistic approach

Leibniz, Johann Bernoulli and Newton presented different ways to approach the same problem. It is definitely not a case of different styles applied to the same problem to find the curve that answers it. More precisely, Newton used a different theory[14] (known as method of fluxion) from Leibniz's[15] and Johann Bernoulli's ones (calculus of differences). Thus, it is not possible, as Granger tried to argue, that these three mathematicians expressed their mathematics differently because they used different styles, since they tried different theories to solve the same problem.

As we are dealing with a historical episode of mathematics, it seems more reasonable to consider Bueno's style of reasoning, narrowly understood, because I am proposing to look at specific mathematical practices (i.e., some solutions to the Brachistochrone problem). My concern is to consider a local style rather than a general one (as Crombie and Hacking did). I will employ the five fundamental components of style, expecting the possibility to verify if a unity is formed in respect to a style that could be properly indicated as mathematical style. This methodology is similar to what Bueno implemented when he was analyzing George Palade's ribosome discovery to argue that in science it is possible to defend an instrumental, narrowly understood style of reasoning.

Firstly, I suggest considering the importance that problems have in mathematics. Leibniz reinforced the role played by problems in mathematics:

> The art of submitting problems to geometers is a generalized practice, and is profitable for everybody, providing it is not done with the intention of bragging about one's own successes, but it is done, on the contrary, with the idea of inciting others to discover; that is, in such a way that discovery is enriched with the particular method where each personality contributes to the art of invention. (Lebniz 2000, p.42)

The first component that Bueno considers is precisely the type of question. In our example, we are treating the Brachistochrone problem to create inferences from mathematical possibilities that answer it correctly. Therefore, mathematical internal rules must be followed to prove (generally) a mathematical argument. The second fundamental component is to afford techniques and procedures to answer those questions. We have seen that Johann Bernoulli securely applied the analytical method in his answer, since he considered the known curve, and, of course, the law of refraction had to be inferred; the same law that has incorporated the necessary condition to the minimal amount of time, the Fermat principle. Johann Bernoulli was in the right direction to his solution, since he developed the known cycloid differential equation as a consequence of the employment of the refraction law. At the end, he proceeded to the synthetic method, showing the essential constructing proportion that composes a cycloid (Eq. 2), which is similar to what Newton did. The third fundamental component regards valid patterns of inference to investigate objects in a certain domain. In our example, it is clear that Leibniz, Johann Bernoulli and Newton used deductive logic in a rigorous but informal mathematical argument. The fourth fundamental component concerns heuristic resources: in our example, only Johann Bernoulli presented a heuristic resource, namely the optical approach, which was consistently employed to a kinematic phenomenon, under the same condition: the minimal amount of time. That is, no matter what kind of phenomenon is under analysis (whether optical or kinetic), if the minimal condition is required, the same law is applied, without the need of any scrutiny. At last, the fifth fundamental component is related to identifying constituting conditions to certain objects. According to our case, the cycloid, the answer to the Brachistochrone problem, is characterized either by the cycloid differential equation (Eq. 1) or by the fundamental constructing proportion (Eq. 2), or even by the construction condition (proposition 14, *Horologium Oscilatorium*) (Huygens 1986, p.50). Hence, Bueno's five fundamental components to a concept of style applied to mathematics, using the Brachistochrone problem as an example, should be synthesized as:

(i) **identify questions:** to create inferences from mathematical possibilities that answer a problem correctly in the mathematical domain;

(ii) **afford techniques and procedures to answer those questions:** to employ valid mathematical methods, procedures, techniques, rules, etc.;

(iii) **own valid patterns of inference to investigate objects in a certain domain:** "involve (deductive) logic (which may or may not be made explicit) and, more broadly, suitable information transfer procedures, which are highly context sensitive and rely on additional assumptions about the domain under consideration" (Bueno 2012, p.660);

(iv) **employ heuristic resources:** to use diagrams, analogies, problem solving techniques, etc.; and

(v) **identify constituting conditions to certain objects:** to constitute mathematical objects through certain characteristics that establish it.

6. Final considerations

At first, it seems that mathematics affords a notion of style because of the successful applicability of Bueno's criterion, which establishes a minimal unity structure. Nevertheless, in mathematics, those five components are not sufficient to affirm consistently that it embodies a style, since a mathematical object necessarily needs a previous mathematical theory, as mentioned earlier and seen partially in our mathematics historical example. The solutions presented here to the Brachistochrone problem show that, in order to characterize the cycloid, at least one of these properties were necessarily needed: (i) a basic construction condition (proposition 14, *Horologium Oscilatorium*) (Huygens 1986, p.50); (ii) a differential equation (Eq. 1); or (iii) a fundamental proportion (Eq. 2). Thus, in some sense, we can assert that the theory of proportions, Euclidean geometry, and calculus of differences were needed to characterize the cycloid curve. Therefore, Bueno's fifth fundamental condition to a style notion cannot not be fully applied to mathematics. Such impossibility does not allow for the successful characterization of a style in mathematics as it was the case in science, since a scientific object could be constituted using empirical results. Our example, the Brachistochrone problem, concretely indicates this fundamental difficulty. We conclude that perhaps mathematics does not incorporate a style, because in order to constitute a mathematical object, a certain mathematical theory is required.

References

Bernoulli, J. 1696. Junii. Problema novum ad cujus solutionem mathematici invitantur. *Acta Eruditorum*: 269.

———. 1697. Maji. Curvatura radii in diaphanis non uniformibus, Solutioque Problematis a se in Actis 1696, p. 269, propositi, de invenienda Linea Brachystochrona, id est, in qua grave a dato puncto ad datum punctum brevissimo tempore decurrit, et de curva Synchrona seu radiorum unda construenda. *Acta Eruditorum*: 206–11.

———. 1697. Maji. Solutio Problematum Fraternorum, peculiari Programmate Cal, Jan, 1697 Groninga, nec non Actorum Lips. mense Jun. & Dec. 1696, & Febr, 1697, propositorum: una cum Propositione reciproca aliorum. *Acta Eruditorum*: 211–17.

———. 1742. Lettre de Mr. Jean Bernoulli a Monsieur Basnage, Docteur en Droit, Auteur de l'Histoire des Ouvrages des Savans. *Opera Omnia, tam antea sparsim edita, quam hactenus inedita*, pp.194–204.

Bueno, O. 2012. Styles of reasoning: A pluralist view. *Studies in History and Philosophy* *of Science Part A* **43**(4): 657–65.

———. 2016. December 18. Aula 1(2): Estilos de Pensamento Científico. *Escola Paranaense de História e Filosofia da Ciência*. Retrieved August 29, 2017, from Escola HFC youtube: `https://www.youtube.com/watch?v=O0zINkPRpN8`.

Crombie, A. C. 1995. Commitments and styles of european scientific thinking. *History of Science* **33**(2): 225–38.

de Fermat, P. 1891. *Oeuvres de Fermat (Vol. 1)*. P. Tannery; C. Henry (eds.) Paris: Gauthiers-Villars et fils, imprimeurs-libraires.

de l'Hospital, M. 1697. Maji. Domini Marchionis Hoispitalii Solutio: problematis de linea celerrimi descensus. *Acta Eruditorum*: 217–22.

Freguglia, P.; Gianquita, M. 2016. *The Early Period of Calculus of Variations*. Cham, Switzerland: Birkhäuser.

Goldstine, H. H. 1980. *A History of the Calculus of Variations from 17th through the 19th Century (Vol. 5)*. New York: Springer-Verlag.

Granger, G. G. 1974. *Filosofia do estilo*. Translated by S. Z. Marton. São Paulo: Perspectiva, Ed. da Universidade de São de Paulo.

Hacking, I. 1992. 'Style' for historians and philosophers. *Studies in History and Philosophy of science Part A* **23**(1): 1–20.

Huygens, C. 1986. *The Pendulum Clock or Geometrical Demonstrations Concerning the Motion of Pendula as aplied to Clocks*. Translated by R. J. Blackwell. Iowa: Iowa University Press.

Leibniz, G. W. 1697. Maji. G.G.L. Communicatio sure pariter, duarumque alienarum ad edendum sibi primum a Dn. Jo. Bernoullio, deinde a Dn. Marchione Hospitalio communicatarum solutionum problematis curvre celerrimi descensus a Dn. Jo. Bernoullio Geometris publice propositi, una cum solutione sua problematis alterius ab eodem postea propositi. *Acta Eruditorum*: 201–5.

———. 2000. September 1. Communication on the solution to the problem of the curve of most rapid descent proposed to geometers by Mr. John Bernoulli, and of the solution that both, he and and Mr. le Marquis de l'Hospital, have asked me to publish, including the soltion of another problem that Mr. Bernoulli has later proposed, Mars, 1697. *The discoveries of principle of the Calculus in Acta Eruditorum*, **95**. Translated by P. Beaudry. Leesburg, Virginia.

———. 2011. Johann Bernoulli an Leibniz, Groningen, 21.(31.) Juli 1696. *Sämtliche Schriften und Briefe: Mathematischer, Naturwissenschaftlicher und Technischer Briefwechsel* **3**(6): 46–57.

Mancosu, P. 2017. Mathematical Style. In: E. N. Zalta (ed.) *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2017 Edition)*. Retrieved August 28, 2017. `https://plato.stanford.edu/entries/mathematical-style/`

Newton, I. 1697. Maji. Excerpta ex Transactionibus Philos. Anglic. M. Jan. 1696/7. Epistola Missa ad Praenobilem Virum D. Carolum. Mountague Armigerum, Scaccarii Regii apud Anglos Cancellarium, & Societatis Regia Praesidem: in qua solvuntur duo problemata Mathematica a Johanne Bernoullo Mathematico Celerrimo Proposita. *Acta Eruditorum*: 223–4.

———. 1967. *The Correspondence of Isaac Newton (Vol. 4)*. Edited by J. F. Scott. Cambridge: Cambridge University Press.

Whinther, R. G. 2012. Interweaving categories: styles, paradigms and models. *Studies in History and Philosophy of Science Part A* **43**(4): 628–39.

Notes

[1]A body of principles offered to explain something.

[2]To make questions in a certain domain.

[3]To create, to manipulate, and to disseminate images in scientific practice.

[4]Crombie considers that language embodies a theory of meaning, logic, a classification of experience, a sentient conception, a knower (and an agent) and his/her objects, and an apprehension of space-time existence.

[5]A meaningful contact between a structure and a live circumstance that was experienced.

[6]Multiply the *modulus* and sum the *angles*.

[7]The problem to find the fastest curve, "Brachistochrone" comes from the connection of two other terms in Greek: βραχιστος (shortest) and χρονος (time).

[8]The title abbreviation of *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*.

[9]Johann Bernoulli also used the Brachistochrone problem in letters to Leibniz (2011, p.49).

[10]Johann Bernoulli recognized Newton's solution to the Brachistochrone problem by *ex ungue leonem* (i.e., one may judge the lion from its claw). (Cf. Bernoulli, J. 1742, p.196.)

[11]Fermat asserts that Nature always acts in an easier and faster way. (Cf. Fermat, 1891, p.173.)

[12]According to the law of refraction (or Snell–Descartes' law), the sine of the angle of incidence over the speed of light medium traversing is constant and larger than one ($sin\alpha v = const. > 1$).

[13]The proportion is valid because the angular speeds of the points R and B are equal, when their generator circles roll at the horizontal ASL. (Cf. Freguglia; Gianquita, 2016 pp.44–5.)

[14]It becomes clear when later, in 1700, David Gregory asks Newton to develop a mathematical argument to the Brachistochrone problem that is much clearer than the one presented by Nicolas Fatio de Duillier in his *Lineae Brevissimi Descensus Investigatio Geometrica Duplex* (1699); the Newtonian mathematical argument was preserved in *Newtoni Investigatio Curvae Celerrimi Descensus* (ULC.Add.3968.41:2r).

[15]Leibniz has an unpublished answer to the Brachistochrone problem, in which he employs his calculus of differences to reach the correct curve, proving the cycloid differential equation. (Cf. Goldstine 1980, pp.35–8.)

8

Notes on Middle Wittgenstein on Contradiction as Conflicting Rules

MARCOS SILVA

Introduction

In this paper, I examine anti-realist remarks made by Wittgenstein in the beginning of the 1930s on the nature of contradictions. An anti-realist view of logic rejects the paradigm of correspondence to facts and an independent reality to deal with important logical notions such as logical connectives and contradictions. In the 1930s,[1] the so-called Middle Wittgenstein discussed the nature of language, logic, and mathematics based on the notion of rules with members of the Vienna Circle at the close of his influential, but highly problematic, Tractarian project.[2] Inspired by these discussions, I suggest a philosophical account using the notion of rules and normativity to understand the philosophical meaning of contradictions in paraconsistent logic. I defend, *pace* (middle) Wittgenstein and Frege, that contradictions should be taken as conflicting rules in practices rather than as *dialetheia*, that is, as corresponding to some peculiar but real contradictory entity or state of affairs in the world.

Another legitimate way to avoid the existence of real contradictions in reality is to view contradictions as epistemic (Carnielli and Rodrigues 2016), that is, to hold that contradictions just occur in our theories and not in the reality. I hold Middle Wittgenstein's alternative not as an epistemological one, but as a normative proposal. For that, we have to emphasize the often marginal features neglected by the discussions on non-classical logics as to the normativity of our ruled practices. The anti-realist account suggested by Middle Wittgenstein's remarks may be called an anthropological account inasmuch as it combines some formalist features (such as logic as a game) with social and normative notions. The deontic notions of prohibition and authorization in ruled practices and

I. F. Cunha; J. R. B. Arenhart; C. A. Mortari (orgs.) *Epistemologia, Mente, Matemática e Linguagem: Discussões do X Simpósio Internacional Principia*. Florianópolis: NEL/UFSC, 2018, pp. 133–154.

the objective import of norms in our practices as rational beings play a special role in this account. In this view, logic should be taken primarily as a ruled human activity without having to represent anything in reality. We do not have to embrace the metaphysics of true contradictions to show how paraconsistent logic could be treated as philosophically relevant.

The present paper is divided into three sections. The first section describes relevant differences among paraconsistent logical systems and criticizes the view that to be held as a forerunner of a logical tradition, an author must have constructed a logical system or must have made some explicit operational proposal. My second section is a historical discussion in which I defend that Wittgenstein, in his middle period, was in fact using *some* Fregean ideas in his remarks on contradiction. It is often argued that Wittgenstein was tolerant toward contradictions in systems because he had the very liberal and elusive notion of language games; however, when he made the first relevant remarks on the nature of consistency in the 1930s, he did not have this notion at his disposal. I then present historical evidence that shows that Wittgenstein, at that time, was reading *Grundgesetze II* (1903) and critically reacting to Frege's criticism of formalism. The third section investigates provocative remarks made by Wittgenstein at the beginning of the 1930s connecting them to the philosophical relevance in using games, that is, ruled practices, as a leading metaphor to understand the nature of logic.

1. Remarks on paraconsistent logic today and on Wittgenstein's proposal in the 1930s

As Da Costa contended, no adequate logical system should countenance an explosive logical consequence (1959, p.18[3]). What we should avoid in constructing logical systems is not inconsistency but triviality, that is, the property of systems wherein everything follows without restrictions from our assumptions. A logical system that commits us to everything, with all possible formulas, should not be considered a logical system. Note that classically (and intuitionistically) we cannot have contradictions without trivialization. It suffices to have a contradiction to explode the logical consequence relation in those systems. In other words, in those logics, a contradiction allows one to derive every other formula of the underlying language.

The main idea that motivates paraconsistent logic is to distinguish trivialization from contradiction. In fact, our problem in rational domains should not be the existence of contradictions but the occurrence of an explosive logical consequence. This is a direct consequence of the derivation of every formula thanks to a rule usually attributed to Duns Scotus (*ex falso quodlibet*). In some rational discussions or in some important domains of our lives when we are dealing with beliefs and information, for instance, we do have contradictions and go on reasoning nevertheless. Some theories in science as well could be inconsistent without being trivial (Priest, Tanaka, and Weber 2015).

The paraconsistent challenge to classical reasoning demands that the status of contradiction and trivialization be revised and, as a philosophical consequence, its impact on our image of rationality be reconsidered as well. In thinking about rationality, contradictions have very frequently been regarded as something to be avoided (or even feared). Accordingly, several influential authors have argued that contradictions should be considered a threat to rationality. In fact, thinking classically, a proof of non-contradiction or consistency is a straightforward way of assuring non-trivialization. Hilbert's Program offers an illustration of this fact, as he aimed to prove the absolute consistency of arithmetic by showing that it does not have any hidden contradiction. Against this classical background, if we are to avoid triviality, one of the most direct strategies is to "assure" *Widerspruchsfreiheit*.[4]

Paraconsistency does not mean adopting a unique technical and philosophical approach. Some paraconsistent logics are very different both technically and philosophically from one another. Paraconsistency is rather a feature of logical consequence relation. We say that a logical consequence relation is paraconsistent much as we say that a logical consequence relation is compact, monotonic or that it allows multiple conclusions.

Today we have several motivations and several different paraconsistent logics (or family of logics), for instance the Logic of Formal Inconsistencies (LFIs), relevant logics, some non-monotonic logics, and the dialetheism.[5] In this context, it is important to emphasize that dialetheism is a metaphysical thesis that holds that *some* contradictions are real. It motivates paraconsistent logic since we should keep on reasoning in a world with some true contradictions without having to accept trivialization (Priest, Tanaka, and Weber 2015).

Another possible approach is using the LFIs, as advanced by Carnielli and Rodrigues (2015; 2016) and Marcos (2005). These logical systems constitute a complete family of systems, which display a very elegant logical strategy for separating inconsistency from triviality, namely by making the object-language codify metalogical properties such as consistency. Relevant logics present another way to challenge the classical mainstream, namely by refusing disjunctive syllogism as a valid form of inference (Priest and Routley, 1989). Adaptive logics are another family of systems that allow for paraconsistency but in this case through a non-monotonic logical consequence relation (Batens, 1997). This is thought to represent dynamic aspects of reasoning, as we must reason with new discovered information that could be incompatible with our first assumptions without trivializing our inferential procedures.

If we look at the history of logic, all of these developments are relatively recent. The first full system of paraconsistency, with discussive motivations, was published in 1948 (Jaskowski, 1948/1967). If this is true, it is remarkable that in 1930, several years before Jaskowski's system, Wittgenstein made some very provocative comments on the nature of contradiction, such as the following, in discussion with Schlick and Waismann in Vienna:

> I want to object to a bugbear [*Popanz*] of contradiction, the superstitious fear that takes the discovery of a contradiction to mean the destruction of the calculus. I should like to ask: Why this narrow-mindedness? Would not calculi with a contradiction have their own particular charm? (WWK p.197).

The question to be raised here is: How can we make sense of Wittgenstein's provocative remark? This question has been raised by several authors (such as Marconi 1984; Priest and Routley 1989; Goldstein 1989; Wrigley 1986; Wright 1980; Marcos 2010; Marion and Okada 2013). They attempt to show positive and/or negative points in holding Wittgenstein as a forerunner of paraconsistent logics; however, most do not see the comprehensiveness of the entire Wittgensteinian enterprise in discussing contradiction and its relations to the normativity of logic associated with our ruled practices.

Marcos (2005; 2010), for instance, introduced a distinction between authors who motivate and those who actually construct a logical system. In his work, Marcos focused on the historical background of the appearance of the first paraconsistent logical system. According to him, we would have authors such as Vasiliev, Łukasiewicz, and Wittgenstein, who motivated paraconsistent reasoning but did not construct logical systems to express how we could finally separate contradiction from trivialization. And we have authors who built real systems, which do not explode in the presence of a contradiction, as

Jaskowvski and da Costa built. Marcos' distinction works well when focusing on the history of paraconsistency and operational devices in logical systems, but when applied to a more comprehensive philosophical discussion, it seems inadequate. Consequent to his operational view, he was very critical about accepting Wittgenstein as a forerunner of paraconsistency because Wittgenstein neither constructed a logical system nor made any substantial operational proposal to advance paraconsistent systems (Marcos 2010, p.136).

This distinction for determining a forerunner of a logical tradition is insufficient. Someone could construct a system without any philosophical or other comprehensive view, for instance, for fun, without being a founder of anything. Also, one can engage in a seminal philosophical discussion about what it means to construct a logical system that behaves non-classically and is a forerunner of an entire tradition. As a matter of fact, in following Marcos' criterion for forerunners, Leibniz, for instance, should not be considered one of the forerunners of modern logic and computation, since he made no substantial operational proposal and constructed no real logical system. Wittgenstein belongs to the category of authors who did not build a logical system but can still be held as a forerunner of paraconsistent logics.

In the beginning of the 1930s, several authors were interested, among other things, in understanding why and how we can construct systems that challenge classical orthodoxy in logic, which can be applied in different domains of reasoning. This very possibility is philosophically relevant and is neglected by Marcos' narrow distinction based on constructing no trivial formal systems with inconsistencies.

Another problem with Marcos' type of historical and technical approach in discussing whether an author's views are a forerunner of a tradition is that it overlooks the comprehensiveness of the philosophical enterprise about the bounds of rationality. Some authors, such as Wittgenstein, were not just motivating paraconsistent reasoning but were also pioneering and developing philosophical platforms to answer hard philosophical questions, such as the nature of logic and its relation to our language and rationality. For instance, games, that is, ruled human practice, as a philosophical proposal could model logical behaviors of a domain of knowledge. However, it would be a metaphysical non sequitur to expect that logic understood as ruled practices should ground thought or reality with some universal laws; games do not have to represent abstract entities beyond time and space or show essences to be philosophically relevant for logical systems. To revise the role of the explosive logical consequence relation, for instance, was not the reason for Wittgenstein's discussions of logic at the time; his remarks on *Widerspruchsfreitheit* were a consequence of a more comprehensive view of logic centered on human practices, as we will see. The discussion is much more general and pervasive than a collection of operational proposals.

To be tolerant about contradictions is neither a matter of who thought about it first nor a matter of who constructed full systems first. In those perspectives, we lose the philosophically important relation between logic, contradiction, reason, and normativity, which, not accidentally, does not appear in Marcos' work. Logic and its normativity do not have to be thought as general maxims of thought or as universal laws of reality mirrored by axioms, but, as some anti-realist authors suggest, and Wittgenstein is one of them, it should be contemplated in terms of introducing distinctions between correct and incorrect applications of concepts and judgments of rational beings in communities.[6]

2. A Fregean motivation for an anti-realist view of contradictions

In 1930, Waismann engaged in discussions with Wittgenstein in anticipation of participating in a panel on the philosophy of mathematics in Königsberg. In this panel, on different schools in Philosophy of Mathematics, Von Neumann represented formalism, Carnap, logicism, and Heyting, intuitionism. Waismann was responsible for representing Wittgenstein's philosophy.

The secondary literature on this topic correctly presents Wittgenstein as critical about Hilbert's program of searching an absolute proof of consistency. As Wittgenstein provocatively stated, this was like looking for a "hidden disease" in a functional body (WWK, p.120). What is missing from this literature is the fact that Wittgenstein was not at all *critical* about a formalist main line of thought: the arbitrariness of syntax. Actually the reverse. He explicitly stated: "The truth in formalism is that every syntax can be conceived of as a system of rules of a game. (...) I want to say that not only the axioms of mathematics but all syntax is arbitrary" (WWK, p.103).

This should be thought as a reaction to some of Frege's lines of criticism against formalism, as it is documented in WWK. Wittgenstein and Waismann were reading *Grundgetsetze* II in June 1930, in Vienna, as the entry "what to say in Königsberg" in WWK shows. In *Grundgesetze* II, Frege (1903, §106–119) argued inter alia against formalism that i) numbers of arithmetic cannot be just signs, as, for example, the sign '0' does not have the property of yielding the sign '1' when added to the sign '1'; ii) a contradiction can only occur in the rules of a chess game and not in its basic configurations, that is, it is not to be found in any physical arrangement of its pieces (chessmen); and iii) that it is impossible to infer rules by a mere inspection of the positions of some signs (chessmen).

Wittgenstein seems to agree with all of three points Frege makes against formalists. However, he charged Frege of committing a sort of fallacy of false dilemma (WWK, p.105): if logic and mathematics are not a matter of mere inspection of physical signs, it does not have to be a matter of *Bedeutun*g of those signs, as Frege argued. Wittgenstein held that either *Bedeutung* or mere signs are not all the only alternatives. In fact, we need the signs, that is, some organized physical marks, but we also need the rules to manipulate those signs. In this way, we should not assume some transcendent *Bedeutungen*.

It is noteworthy that after this critical remark, Wittgenstein immediately began to use Frege's vocabulary while eschewing Frege's view that logical rules are laws of thought. It seems that Frege assumed typical formalist vocabulary, such as games and rules, for showing its absurdity. And, Wittgenstein assumed Frege's formalist vocabulary, such as games and rules, and some of Frege's criticisms but condemned his false dilemma. Wittgenstein argues formalists have a good point in holding that syntax is as arbitrary as the rules of games. He was not concerned with laws of reality but rather with rules to manipulate signs that are stipulated when a logical system is stipulated.

Next, I compare Frege's remarks on contradiction from 1903 with Wittgenstein's remarks on the nature of contradiction in 1930. Criticising formalists, Frege (1903) stated:[7] "Eine Figurengruppe wie »3 = 4« hinzuschreiben, ist bisher wenigstens nicht verboten worden. Erst wenn man ein solches Verbot erlässt, entsteht ein Widerspruch, oder besser Widerstreit der Regeln, die theils verbieten, theils erlauben" (§117, p.130). It is clear that for Frege, contradiction in formal systems does not appear in the physical signs themselves but in the set of authorizations and prohibitions of some moves in the game. He takes this to be a consequence of adopting the idea that logical systems correlate with games. In this scenario where the metaphor of games plays a decisive role, contradictions are conflict between rules. Frege emphasized this view by stating that "um also zu einem Verständnisse zu gelangen, werden wir den Widerspruch wieder zurück in die Regeln verlegen müssen" (p.131, §118).

Now, let us examine some of Wittgenstein's remarks on contradictions in 1930. Criticizing Hilbert's program, he stated: "Since Hilbert says "$0 \neq 0$" is not to occur as a provable formula, he defines a calculus by means of permission and prohibition."[8] (WWK, p.175). This view as well as the German phrasing corresponds to Frege's view of rules that *allow* a move and others that *prohibit* it. Wittgenstein also stated that

> If the identity-sign, then is supposed to express the intersubstitutability of two different signs, then '$x = y$' cannot be a contradiction. If I want to reach a contradition, I have to add a further rule, say 'xDef$y$' (which means: 'y' can be substituted for 'x') and now write: $x = y.{\sim}x\mathrm{Def}y$. Only now have we got a contradiction, since '$x = y$' allows what is forbidden by '$\sim x$Def$y$'. But in that case 'xDef$y$' expresses equality. *This shows that the contradiction has to manifest itself as a contradiction between two rules.*[9] (WWK, pp.191–2, my italics).

What we should observe in this quote, highlighted by my italics, is that Wittgenstein's example of contradiction, taking identity as a rule of substitution, makes a strong case for contradiction being, as Frege also argued, understood in terms of conflicting rules. Wittgenstein is endorsing some of Frege's criticism but developing his peculiar type of formalism based on the notions of games, arbitrariness of grammar, and contradictions as conflicting rules neither describing nor corresponding to anything in reality.

3. Middle Wittgenstein on contradiction as conflicting rules in our practices

Marion and Okada (2013) show concern about a genetic-evolutive investigation of Wittgenstein's so-called middle period, as they explore Wittgenstein's remarks on contradiction in the 1930s in connection with some "new" concepts with an eye to their coherence with the *Tractatus*. On one hand, it is important to note that logical vocabulary, as tautologies and contradictions, in the *Tractatus* already does not represent anything in reality. In Wittgenstein's early philosophy, contradictions already did not correspond to anything in the world. On the other hand, the add-on at the beginning of the 1930s is his interest in *Handlungsformen* and normativity, which is not to be found in the

Tractatus associated with the nature of logical vocabulary.

The discussions from 1929-1932 in WWK, documented by Waismann, shows part of Wittgenstein's "Übergangsphase", that is, the transitional period between his Tractarian project and his mature philosophy, a period that cannot be reduced to either. Authors usually agree that Wittgenstein has no stable position at this time (Hacker 1986; Engelmann 2013), but 1930 is a special decisive year for "Wittgensteinian scholarship". This early middle Wittgenstein has no "Sprachspiel", no "Lebensform", and no "Familienähnlichkeiten" concepts, which define his late philosophy, but he was already very tolerant to non-classical logics in general and to paraconsistent reasoning in particular.

In January 1930, as addressed in WWK, Wittgenstein dropped the thesis of logical independence of elementary propositions. In June 1930, he addressed games to understand what a logical system is. This emergence of games in his philosophy around June 1930 is consistent with Moore's notes from the same period (1954; 2015). Before June 1930, there is no relevant use of the notion of games in his philosophy.

In December 1930, Wittgenstein began to apply some of his new thoughts in logic in his critical view about Hilbert's program. It seems that these discussions were prompted by Waismann's interests. Accordingly, the entry "Widerspruchsfreiheit", when they address Hilbert and the nature of contradictions, dominates the following remarks in WWK since it appears more often than other topics in the subsequent meetings documented by Waismann.

In WWK, motivations for some contemporary discussions on the nature of contradictions can be found. They precede the discussions published under the title *Remarks on the Foundations of Mathematics* (RFM) and *Lectures on the Foundations of Mathematics* (LFM), works from around 1938 and 1939. Moreover, many of the points and arguments from Wittgenstein's "mature philosophy" are already in WWK, as Marion and Okada (2013) have pointed out (p.54).

For example, the very liberal view discussed with Turing on contradiction in 1939 documented in LFM can already be found in the following surprising prophecy about paraconsistent systems made in 1930:

> Wittgenstein: What do you think, if I arrived in a calculus at the formula $0 \neq 0$', would the calculus be uninteresting because of that? Schlick: Yes, a mathematician would say that such a thing does not interest him.[10] Wittgenstein: But excuse me![11] It would be tremendously interesting that just that was the result! In a calculus you are surely always interested in

> results! How strange! Here this is the result — and there that! Who would have thought so! How interesting it would be, especially if a contradiction were the result! *Indeed I am prepared to predict that there will be mathematical investigations of calculi containing contradictions, and people will pride themselves on having emancipated themselves from consistency [Widerspruchfreiheit] too*. (WWK, p.139, my italics).

Note that the political image of being emancipated from a false threat is not restricted to paraconsistent reasoning as the "too" at the end of the quote indicates. Here the suggestion is that there can be legitimate inconsistent systems is part of a more general philosophical issue on the nature of logic and its connections with our practices.[12] I agree with Marion and Okada's statement that what Wittgenstein is consolidating at this time is an anti-realist[13] approach to logic and mathematics.

> Those adhering to this view [a realist one] feel the need for a proof of consistency for Γ [logical system]: only with such a proof would one know that there is no contradiction waiting for us out there, so to speak, and that we are thus safe using Γ. As opposed to this, under a view that might therefore be called 'anti-realist', no consequence follows from Γ until we[14] actually infer it, therefore, there can be no 'hidden' contradiction waiting for us to infer it, say, by accident tomorrow, already to be there. There is no doubt that Wittgenstein adopted a similar stance, as early as 1930,[15] in conversations with Schlick and Waismann. (2013, p.56).

In WWK, Wittgenstein also shows a very liberal and tolerant reaction to trivalent logics: "ganz in Ordnung!" (WWK, p.140). Another example of this tolerance is the discussion on constructivist topics. Some authors, such as Porto and Pereira (2003), Wrigley (1986), and Dummet (1978), approximated Wittgenstein's remarks with intuitionism. I agree with their contention that Wittgenstein's emphasis on the procedures of obtaining a result, instructions to construct something, and verification method are linked to constructivism; however, whether Wittgenstein is an intuitionist may be doubted, as the following remark shows that he has no commitment to an important restriction championed by intuitionists: "What is indirect proof? An action performed with signs"[16] (WWK, p.180). As a matter of fact, Brouwer seems to play no relevant role in the discussions recorded by Waismann. This cannot be said about the role that Frege plays in these discussions, even in not being a non-classical thinker.

Another pressing question that can be raised here is: why did the Tractatus' author (1921), become so liberal, non-classical, and pluralist (fully embracing a dynamic view of world) in 1930? My working hypothesis is that it is a consequence of his engagement with the notion of games but not *Sprachspiele*. At that time, Wittgenstein did not have his influential concept of language games, and his notion of games was restricted to logical and mathematical systems. Taking the notion of games seriously led him to an anthropological revolution, which, placed human social bindness, agreement, agency, and institutions in the center of discussion rather than an implausible eternal logical space shared between propositions in language and facts in the world, as marked in his *Tractatus*.

Contradictions do not relate to any particular state of affairs in the world but with our criteria or norms to evaluate our description of the state of affairs in the world, as the anti-realist would have it. Since the *Tractatus*, Wittgenstein argued that the logical vocabulary does not represent anything in reality (4.0312); and logic should have another status than the one of empirical propositions (6.112). The normative status of logic is not as salient in the *Tractatus* as it is in his middle period. The normativity emerges as a central feature, when Wittgenstein begins to embrace the typical formalist metaphor of logical systems as games and its far-reaching philosophical consequences. It is not a matter of abandonment of what is going on in the TLP but rather reinterpreting it using new notions, such as calculus and games.[17] As suggested by some passages (6.124, 6.3751), logic in the *Tractatus*, is to be thought as anchored in reality, as it shows, through its tautologies, an eternal logical space as the scaffolding of the reality. In the beginning of the 1930s, logic was held as a game, which should not be justified or grounded in anything else. Accordingly, Wittgenstein began to call the Tractarian logic a "Wahr-Falsch Spiel" (WWK, p.124). It is hard to belief that the young Wittgenstein would have ever accepted that he was simply dealing with a game of truth and falsehood back in the 1910s.

An important philosophical consequence of Wittgenstein's new line of discussion about logic using games was a fresh explanation of the Tractarian theme of refusing any representative role to logical constants (TLP 4.0312). If we take logic as a game, it does not have to represent anything in reality because logical rules could be just *expressions*, not representations, of our forms of representing the world. That is, logical rules should *show* (and not say) some of our social norms and agreement in rational discussions, as Brandom (1994) develops in his model centered in commitment-preservation rather than in truth-preservation.

We do not prohibit what cannot exist. In a trivial sense, we do have contradictions in our lives, as we deal with information, with beliefs, and with conflicting instructions, for instance. In all of these domains, it seems unsatisfactory to trivialize our reasoning if we come across contradictions. It is important to emphasize some often neglected features in discussing non-classical logics in particular and rationality in general in the literature on philosophy of paraconsistency, especially commitment, entitlement, responsibility, engagement, authority, obligation and duty. In this broader view, the logical "must be", "have to be", "necessarily", etc., should be understood as "ought to".[18]

Middle Wittgenstein has a very different answer to a contradiction in comparison to a typical classical one, according to which contradiction means trivialization. Wittgenstein stated in 1930 that "If a contradiction is going to occur, we shall manage. *Now*, however, we need not worry about it."[19] (WWK, p.196).

Why is Middle Wittgenstein so calm about contradictions? The answer should be found in his engagement with ruled practices and normative features in understanding logic. This understanding presupposes, in a philosophically relevant way, individuals in a community as the result of adopting a pragmatist stance in investigating contradictions. Once we adopt this approach, the notions of truth and falsehood are not central anymore as in the Fregean tradition, but rather they presuppose (the possibility of) correction and control of some applications of rules. The normativity does not have to mean a set of maxims or prescriptions; it should rather mean the introduction of the distinction between correctness and incorrectness in applying concepts and rules. To understand rules is to master their application. This, in turn, amounts to the possibility of publically controlling them in practice.

Let us examine the following analogy between a contradiction in a logical system and a contradiction in the rules of a game, which Wittgenstein devised in 1930. Here, I want to emphasize the crucial dawn of his use of a chess game to understand what a contradiction should be:

> Hilbert calls the configuration "$0 \neq 0$" a contradiction because he has a conception of contradiction in no way different from ours, i.e., '$p . \sim p$'. For he wants to say that on the one hand we have $0 = 0$ and on the other hand we have $0 \neq 0$ and these two formulae contradict one another just as if we said, when playing chess, "the bishop may move on a straight line" and, "the bishop must not move on a straight line".[20] (WWK, p.176).

I would like to explore, in the quote above, the following complex sentence "Der Läufer *darf* gerade ziehen und der Läufer *darf nicht* gerade ziehen", a sentence that has many illuminating presuppositions and consequences. The quote indicates a clear usage of chess game as a metaphor to understand logical systems. In fact, chess games are a typical formalist metaphor for syntax. It takes the syntax of systems as a matter of manipulating physical signs just as manipulating physical chess pieces on a board should constitute a game. On this view, logical systems, as chess, should not be taken as a metaphysical enterprise about abstract entities or about an ideal mathematician.

Another noteworthy feature in the quote above is the central use of "dürfen". At this time (1930), logic for Wittgenstein began to be considered in terms of prohibitions and authorizations, as shown by this deontic vocabulary marked with "dürfen".[21] A closer look at the *Tractatus* shows that there is no relevant use of deontic vocabulary associated with logic. Nor is there any in 1929 in his so-called phenomenological period. Deontic vocabulary is a natural idea in thinking about games:[22] games are always organized in terms of prohibitions and authorized moves; that is, moves have to be able to be correctable and controlled by agreed rules.[23]

In the same quote, it is also important to notice the use of "ziehen". This undoubtedly refers to some type of practice, which applied to logic means, for instance, that logical operations should be thought of as practices, or instructions, for performing logical manipulations, in a word, for playing by rules.[24] There is already the need for acknowledging some *moves* in a ruled-governed activity. The dynamic aspect turns out to be crucial in this normative approach.

Also, a form of contradiction is shown in this passage: a rule that *allows* a move and another one that *prohibits or does not allow* the same move. Two questions can be raised when we take this approach seriously, or when we hold that logic is a matter of some procedure to perform a ruled activity. If after engaging in some ruled logical practice we discover some contradiction in our systems, one question is: what happens *after* that discovery? Another one is: what happens with our *former* calculi (with our former results, for instance) before discovering the contradiction? Regardless of the answers, Wittgenstein shows a very calm reaction when compared to Hilbert and Frege's radical concerns with contradictions and inconsistencies. He maintains that we should not fear contradictions in our systems.

Regarding a paraconsistent system and the role that a Wittgensteinian approach can play in explaining some of its features, we can apply Wittgenstein middle-period discussion of games. We observed some philosophical approaches to paraconsistency and contradiction and what I am now proposing is the emphasis on an "pragmatist view" and that contradiction should be held as a "*Widerstreit von Regeln*". This approach is pragmatist and social because, there are no prohibitions/authorizations (rules and instructions) in the world without rational beings, their communities, and their practices. In fact, there is no such a thing as a real "rule" in nature. If this view is correct, there is no real contradiction in the world, as there are no conflicting rules in a world without rational beings.

How could Wittgenstein (or middle Wittgenstein) help us or contribute to the discussions on the nature of contradictions and a "philosophy of paraconsistency?" The literature about trivialization very often neglects certain relevant philosophical themes such as *Handlung, Praxis, Regel*, and *Normativität*. Inspired by his remarks, logical laws is understood to comprise (stipulated) rules (norms of representation), rules by which descriptions and practices are evaluated. The objectivity of logic comes from public conventions, agreements, and stipulations, or in other words, from its regular use and its normativity (the *Verbot und Erlaubnis* of some moves). We do not postulate facts, only the criteria with which our actions and descriptions of facts are measured and evaluated.

A crucial Wittgensteinian question must be observed in this context. Wittgenstein often raised this type of question: What do *we do* with contradictory instructions? Or better, what do *we do*, if we discover that we have some conflicting rules during an activity? Consider, for instance: "Imagine I were to tell you: '*a* cannot be substituted for *a*'. What would you do?"[25] (WWK, p.178) (See also RFM II, p.87).

Wittgenstein's answer is: "nothing". This is a situation in which one would get "stuck", as Marion and Okada pointed out (2013, p.66). This shows, say, the Wittgensteinian problem with contradictions. From the beginning, Wittgenstein's troubles with contradiction is neither a problem with an explosive logical relation nor with trivialization (WWK, p.128, p.197) but with agency, or better, with rule-governed practices of some rational beings.[26]

The Wittgensteinian anti-realist stance on logic renders the view that contradictions are not out there to be discovered in already inconsistent systems, as Marion and Okada observed (pp.56, p.69, p.75). Once a contradiction is *inferred or derived*, the problems with it for rational beings engaged in ruled-activities are the inaction, the absence of action, the impossibility to act, the stagnation of activities, irresolution, and indecision. In other words, our problem is with the radical wavering or doubt in performing something.

The point is not what we *should do* with contradictions but what we *usually do* in situations in which we have contradictory rules (instructions) in our practices. In a very natural way, we need to make some decision. Take the historical example of the introduction of lambda calculus (Church 1932), a calculus in which several important mathematical operations and definitions are expressed. After it was introduced, the calculus was shown as inconsistent[27] and adjustments were made. It would make no sense to expect the trivialization of mathematics after this discovery. What was pursued is what we often pursue when we find some conflicting rules or inconsistency in our practices: we have to make decisions and introduce some other rule and/or rearrange or modify the old ones. When mathematicians reach a real contradiction in their practices, they do not apply any rule close to "ex false quod libet" for inferring new theorems. In fact, they usually stop applying *all* rules of inference and instead begin thinking about how to fix the system in which they work. That is, some decisions must be made, because we get stuck.

In this way, we can now understand the typical Wittgensteinian reaction to a contradiction using the distinction between "before" and "after" a discovery of an inconsistency. What happens with our mathematical practices after we derive a contradiction, and what happens with our future practices after inferring a contradiction? Based on the previous discussion, before the discovery, nothing is really lost. In a natural sense, no former activity or practice can really be lost. Contradictions in practices do not really trivialize anything; rather, they force us to make decisions.

There is a type of slogan in Wittgenstein's remarks, which appears often in his reactions to the problem of discovering contradictions in logical systems Thus he says: "Man muss eine Bestimmung treffen". In particular he writes:

> What are we to do in such a case? That is the easiest thing in the world! We lay down a new rule and thereby the matter is settled. A board-game would be an example of that. Suppose there is a rule which says that a black piece must jump over a white one. Now if a white piece is standing at the edge of the board, the rule cannot be applied any more. *We then simply make a new stipulation for this case and the difficulty is annihilated.*[28] (WWK, p.194, my italics).

This is another example of difficulties associated with not being able to perform something as opposed to trivialization. Whenever we get stuck, we must make a decision because

> "I do not know what to do. What do we do in such a case? *Very simple — we introduce a new rule and the conflict is resolved.* I think, then, if contradictions arose between the rules of the game of mathematics, it would be the easiest thing in the world to find a remedy. *All we have to do is lay down a new stipulation* concerning the case in which the rules conflict and the matter is dealt with".[29] (WWK, p.120, my italics).[30]

Conclusion

This paper was devoted to discussing the philosophical and historical background of discussions on the nature of contradiction among some members of the Vienna Circle in the beginning of the 1930s. The focus was not only historical but also conceptual. I examined why and how (middle) Wittgenstein could still be held as a forerunner of paraconsistency and why we should still pay attention to his prophetical remarks regarding the dawn of those systems. To do so, I addressed certain normative notions presented in Wittgenstein's remarks and connect them to his criticism of Frege's *Grundgesetze* (1903). The normative notions of prohibition and authorization ground middle Wittgenstein's anti-realist view that contradictions should be thought of in terms of conflicting rules in our practices and not corresponding to any (peculiar) state of affairs in reality. This is the reason that I refer to this approach to understand paraconsistency as a pragmatist approach.

It is important to note that the problem with contradiction according to Wittgenstein was not about its relation to the problem of trivialization but rather its relation to "nicht handeln können". This is a much more general "anti-realist" enterprise about the nature of logical systems themselves and their relation with our practices and forms of lives. In this way, in thinking about the distinction between before and after discovering a contradiction, we could sum up Wittgenstein's position as follows: after the discovery, we should make a decision to rearrange some rules or introduce new ones (generating new calculi). Moreover, nothing is lost with our former calculi because no former activity/practice is lost after the discovery of a contradiction. Contradictions in practice do not trivialize anything.

If we are correct, this account can also offer an integrated way by which we can 1) understand Wittgenstein's negative response to Hilbert's program, 2) understand his account of contradiction and his remarkable anticipation of the possibility of paraconsistent logical systems and also 3) face the normativity challenge within a great plurality of current logical systems. Normativity in a logical monism is easily justified, as deviation is not reasoning.

For further investigation, it would be interesting to compare Wittgenstein's methodology with LFI's methodology since both have some similarities, in particular they do not engage with any real contradiction and they presuppose the possibility of locating a part of a system that is problematic and could preserve regular classical reasoning in other parts.

Another line of research would be to investigate the distinction between conflicting rules and contradictory rules. My hypothesis is that this distinction, inter alia, gives rise to the abandonment of a pure conventionalist approach to logic in Wittgenstein's philosophical development. That is, Wittgenstein could not be simply a conventionalist, as he to recognized that some "rules" are not possible, not because of any eternal logical space or any law of reality but because they would not be intelligible *for us*.

Moreover, since "do p" and "do not do p" are different from "do p and do not do p", Wittgenstein also seemed to have an important similarity to some non-adjunctive logics, such as with those with discussive motivation. This similarity deserves be explored in a future work.

What would a "contradictory rule" be? The rejection of the existence of something such as a contradictory rule sheds some light on the need to introduce the association between language and a form of life too. What do we usually do in a situation when we have a contradictory rule (WWK, p.197)? In an important sense, we could not expect/accept/understand a contradictory instruction. So, we should ask if our "form of life" blocks it, as Wittgenstein seems to think in 1930 (WWK, p.194). A contradictory rule would not be called a rule *by us*.

Acknowledgements

I am grateful to Juliele Sievers and Luiz Henrique dos Santos in Maceio and for the briliant audience at the V Middle Wittgenstein Congress (Belo Horizonte, May 21-25, 2018) for their critical remarks on an early draft.

References

Alama, J. 2015. The Lambda Calculus. In: E. N. Zalta (ed.) *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2015 Edition)*. URL = `<http://plato.stanford.edu/archives/spr2015/entries/lambda-calculus/>`.

Batens, D. 2000. A survey of inconsistency-adaptive logics. In: Batens *et al* (2000), pp.49–73.

Batens, D.; Mortensen, C.; Priest, G.; Van Bendegem, J. P. 2000. *Frontiers of Paraconsistent Logic, Proceedings of the I World Congress on Paraconsistency, held in Ghent, BE, July 29-August 3, 1997*. Baldock, UK: Research Studies Press.

Beziau, J.-Y.; Chakraborty, M.; Dutta, S. 2016. *New Directions in Paraconsistent Logic*. Springer.

Brandom, R. 1994. *Making It Explicit: Reasoning, Representing, and Discursive Commitment*. Harvard University Press.

Carnielli, W.; Rodrigues, A. 2015. Towards A Philosophical Understanding Of The Logics Of Formal Inconsistency. *Manuscrito* **38**: 155–184.

———. 2016. On the Philosophy and Mathematics of the Logics of Formal Inconsistency. In: J.-Y. Beziau; M. Chakraborty; S. Dutta (eds.) *New Directions in Paraconsistent Logic*, pp.57–88. Springer.

Church, A. 1932. A set of postulates for the foundation of logic. *Annals of Mathematics* **33**(2): 346–366.

Curry, H. 1942. The inconsistency of certain formal logics. *The Journal of Symbolic Logic* **7**: 115–7.

da Costa, N. C. A. 1958. Nota sobre o conceito de contradição. *Anais da Sociedade Paranaensede Matemática* **1**: 6–8.

———. 1959. Observações sobre o conceito de existência em matemática. *Anais da Sociedade Paranaense de Matemática* **2**: 16–9.

Dummet, M. 1978. Wittgenstein's Philosophy of Mathematics. In: *Truth and other enigmas*.

Frege, G. 1903. *Grundgesezte der Arithmetik Band II*. Jena: Verlag Hermann Pohle.

Engelmann, M. 2013. *Wittgenstein's Philosophical Development: Phenomenology, Grammar, Method and the Antropological View*. Hampshire: Palgrave Macmillan.

Hacker, P. M. S. 1986. *Insight and Illusion*. Second edition. Oxford.

Jaskowski, S. 1948[1967]. Propositional calculus for contradictory deductive systems (in Polish). Studia Societatis Scientiarum Torunensis, sectio A-I: 57–77, 1948. Translated into English: *Studia Logica* **24**: 143–157, 1967.

Lugg, A. 2013. Wittgenstein in the Middle of 1930s: Calculi and Games. In: Venturinha (2013).

Moore, G. 1954. Wittgenstein's Lectures in 1930-33. *New Series* **63**(251): 289–316.

Goldstein, L. 1977. Resenha de 'L. Wittgenstein, Lectures, C. Diamond (org.)'. *The Philosophical Quarterly* **27**(109): 370–1.

———. 1989. Wittgenstein and Paraconsistency. In: Priest; Routley; Norman (1989), pp.450–562.

Marcos, J. 2004. *Logics of Formal Inconsistency*. Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.

———. 2010. Wittgenstein & Paraconsistência. *Principia* **14**(1): 135–73.

Marion, M.; Okada, M. 2013. Wittgenstein on Contradiction and Consistency: An Overview. *O que nos faz pensar* **33**: 51–59.

Porto, A.; Pereira, L. C. 2003. Algumas considerações sobre a Noção Construtiva de verdade. *O que nos faz pensar*, dezembro: 107–23.

Priest, G.; Tanaka, K.; Weber, Z. 2015. Paraconsistent Logic. In: E. N. Zalta (ed.) *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2015 Edition)*. URL = `<http://plato.stanford.edu/archives/spr2015/entries/logic-paraconsistent/>`.

Priest, G.; Routley, R. 1989. Systems of paraconsistent logic. In: G. Priest & R. Routley (eds.) *Paraconsistent logic: essays on the Inconsistent*, pp.151–86. Munich: Philosophia.

Schoreder, S. 2013. Wittgenstein on Rules in Language and in Mathematics. In: *Venturinha* (2013), pp.156–67.

Stern; Rogers; Citron (eds.) 2016. *Wittgenstein: Lectures, Cambridge 1930-1933 from the Notes of G. E. Moore*. Cambridge: Cambridge University Press.

Venturinha, N. 2013. *The Textual Genesis of Wittgenstein's Philosophical Investigations*. New York: Routledge.

Wittgenstein, L. 1929. Some Remarks on Logical Form. *Proceedings of the Aristotelian Society, Supplementary Volumes* **9**: 162–71.

———. 1967. *Remarks on the Foundations of Mathematics Foundations*. G. H. von Wright; R. Rhees; G. E. M. Anscombe (eds.). Cambridge: MIT.

———. 1939[1976]. *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics*. C. Diamond (org.). University of Chicago Press, 1976.

———. 1984. *Tractatus Logico-philosophicus. Tagebücher 1914-16. Philosophische Untersuchungen*. Werkausgabe Band 1. Frankfurt am Main: Suhrkamp, 1984.

———. 1984. *Philosophische Bemerkungen*. Werkausgabe Band 2. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

———. 1984. *Wittgenstein und der Wiener Kreis (1929-1932)*. Translated into English by Joachim Schulte and Brian McGuinness. Werkausgabe Band 3. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Wright, C. 1980. *Wittgenstein on the Foundations of Mathematics*. London: Duckworth.

Wrigley, M. 1986. Wittgenstein on Inconsistency. *Philosophy* **55**: 471–84.

———. 1989. The origins of Wittgenstein's verificationism. *Synthese* **78**(3): 265–90.

Notes

[1]It should be also recalled that the first systems of "natural deduction" as introduced by Jaskowski and Gentzen have been worked out in the 1930's. In such systems, axioms

are replaced by sets of inference rules, so that it is meaningless to say that a logical system describes something in reality. Although historically and conceptually important, it is not in the scope of this paper to examine the connections between different anti-realist approaches to logic in the 1930's.

[2]These discussions were documented by Waismann and organized for publication by McGuinness in *Wittgenstein und Wiener Kreis* (WWK).

[3]He makes a similar point in Da Costa 1958.

[4]As Marcos (2005; 2010) points out, the very German expression "consistency", "Widerspruchsfreiheit", connects it to contradiction, or better, "being free of contradiction". It is philosophically important to highlight that we may have trivialization in systems without appealing to contradictions and negation. As Marcos also stresses, Curry paradox shows us how to trivialize a system without the need of contradiction and even of a negation (2010, p.145). Trivialization and contradiction are not equivalent.

[5]In fact, there are many systems which are non-explosive, connexive logics and dialectical logics, for instance. For a survey of non-explosive systems, see D. Marconi (1983). I do not aim to exhaust the subject in this paper.

[6]Note that Wittgenstein does not identify paradoxes and contradictions as Marcos discusses (2010, p.153). Paradoxes should be conceptually analyzed, in order to show where the misunderstanding lies. For Wittgenstein, antinomies do not demand any new calculus, but conceptual analysis, while a formal contradiction has to be taken as a full part of logic (WWK, p.129).

[7]I use the original German text here, because it is important to compare the phrasing of both authors, Frege and Wittgenstien, when they are discussing formalist views.

[8]"Wenn Hilbert sagt: "$0 \neq 0$ soll nicht als beweisbare Formel auftreten, so bestimmt er durch Erlaubnis und Verbot einen Kalkül".

[9]"wenn nun das Gleichheitszeichen die Ersetzbarkeit zweier verschiedener Zeichen ausdrücken soll, dann kann "$x = y$" keine Kontradiktion sein. Will ich eine Kontradiktion erhalten, so muss ich eine weitere Regel hinzufügen, etwa "xDef$y$," was bedeutet: "x" ist durch "y" ersetzbar und nun schreiben: $x = y. \sim x\mathrm{Def}y$. Jetzt habe wir erst einen Widerspruch, da "$x = y$" erlaubt, was "$\sim x\mathrm{Def}\, y$" verbietet. Dann drückt aber "xDef$y$" die Gleichheit aus. *Das zeigt, dass sich der Widerspruch als Widerspruch zwischen zwei Regeln darstellen muss.*" (my italics)anthropological

[10]Note that Schlick's view about the occurrence of contradictions in a logical system is consistent with the classical approach to it.

[11]These discussions can be very tough sometimes.

[12]My working hypothesis is that the cited comment is not sarcastic, since Wittgenstein could well explain how a system with a contradiction could be philosophically legitimate through the typical normative and deontological notions governing the account of logical systems as games.

[13]Consolidating here does not mean that the Tractarian philosophy of logic and mathematics is realistic, since tautologies (i.e. logical laws) "say nothing", i.e. they do not describe the world (TLP 6.11).

[14]This “we” is consistent with my proposed pragmatist and social reading.

[15]This time-frame is also consistent with my working hypothesis about the role that the notion of games played in this anti-realist view at that time.

[16]“was ist der Indirekte Beweis? Eine Handlung mit Zeichen.”

[17] I agree with Schroeder (2013) and Lugg (2013) that the notion of games is subordinate to the notion of calculus when it first arises in Wittgenstein’s philosophical development, although they do not point out why or how these notions are discussed in the material on *Widerspruchsfreiheit* in WWK. Both notions are taken by Wittgenstein to entail the autonomy of syntax, that is the point that syntax is fully determined by rules and not by reference to independent domains.

[18]It is not an accident that it in the middle of the hot discussions on the nature of contradiction and consistency, Wittgenstein, Waismann and Schlick begin to explore some other issues as “sollen”, “Religion” and “Ethik” (p.118).

[19]“Tritt ein Widerspruch auf, so werden wir uns eben helfen. Aber jetzt brauchen wir uns keine Sorgen darum zu machen”.

[20]“Wenn Hilbert die Konfiguration “$0 \neq 0$” einen Widerspruch nennt, so tut er das deshalb, weil er vom Widerspruch ja auch keinen anderen Begriff hat als wir beide, nämlich “$p. \sim p$”. Er will nämlich sagen: Einerseits ist $0 = 0$, anderseits $0 \neq 0$ und diese beiden Formeln widersprechen einander, genau so, wie wenn wir etwa im Schachspiel sagen würden: Der Läufer darf gerade ziehen, und: Der Läufer darf nicht gerade ziehen”

[21]Goldstein (1977) also observes the occurrence of this deontic vocabulary. However, he does not connect (neither here nor in his 1989 paper) the emergence of this vocabulary with Wittgenstein’s notion of games and how these are to be understood as human practices.

[22]Moore (1954) also observes this naturalness in talking about a logical “can’t” as prohibitions and permission while using logical systems as games when he is discussing Wittgenstein’s philosophical development in the beginning of the 1930’s: “This use of “can’t” is, indeed, one which is quite natural and familiar in the case of rules of games, to which he constantly compared rules of grammar; e.g. a chess-player might quite, naturally say to an opponent, who was a beginner and was not yet familiar with the rules of chess, “You can’t do that” or “You can’t make that move”, if the beginner moved a pawn, from its position at the beginning of the game, three squares forward instead of only two.” (p.291).

[23]In the final section I will show how this deontic vocabulary comes from Frege discussions with formalists. It seems that Wittgenstein did not used this vocabulary before discussing some Fregean ideas in meetings with Waismann in 1930 in Vienna.

[24]I agree, independent of Wittgenstein’s hostility to precise definitions and classifications, that a fine taxonomy of rules is important. However, in this paper the distinction between rules and facts is more vital. That is, the emphasis on deontological vocabulary (commitments, authorizations and prohibitions) as opposed to representational vocabulary (truth, state of affairs, reference).

[25]"Stellen Sie sich vor, ich würde ihnen sagen: "*a* ist nicht durch *a* erseztbar. Was würden Sie tun?"

[26]I agree with Marcos (2010), when he states that the avoidance of contradiction should not be thought as something psychological (p.154). If we take seriously that logic has directly to do with norms of some *Handlung*, then some conflicting rules would not be psychologically blocked; they would rather mean that we get stuck, as we do not have any procedure or method to further developing an activity.

[27]As Alama (2013) states: "In the hands of Curry, Church, Kleene, and Rosser (some of the pioneers in the subject) the focus was on defining mathematical objects and carrying out logical reasoning inside these new systems. It turned out that these early attempts at so-called illative λ-calculus and combinatory logic were inconsistent. Curry isolated and polished the inconsistency; the result is now known as Curry's paradox".

[28]"Was tun wir in einem solchen Fall? Nichts einfacher: Wir geben eine neue Regel, und damit ist die Sache erledigt. Ein Beispiel dafür wäre das Brettspiel. Gesetzt, es gibt hier eine Regel, die sagt: Schwarz muss über Weiß ziehen. Wenn nun die weiße Figur am Rande des Feldes steht, so ist die Regel nicht mehr *anwendbar. Wir treffen dann einfach für diesen Fall eine neue Bestimmung, und damit ist die Schwierigkeit aus der Welt geschafft*". (my italics)

[29]"ich weiß nicht, was ich tun soll. Was machen wir in einem solchen Fall? *Sehr einfach: wir führen eine neue Regel ein, und damit ist der Konflikt entschieden*. Ich meine nun: wenn unter den Spielregeln der Mathematik Widersprüche auftreten, so wäre es die einfachste Sache von der Welt, Abhilfe zu schaffen. *Wir brauchen nur eine neue Festsetzung zu treffen*, für den Fall, in welchem die Regeln in Konflikt geraten, und die Sache ist erledigt". (my italics)

[30]Some existentialist flavor is also shown in these remarks: "Es kann also der Fall eintreten, dass ich nicht weiß, was ich zu tun habe. Die Regel sagt mir nichts mehr. Was würde ich einem solchen Fall tun? Nicht leichter, als den Widerspruch zu beseitigen: Ich muss eine Entscheidung treffen, also *eine weitere Regel einführen*" (WWK, p.124, my italics)

9

O self chega à ficção, a ficção vem à mente (neurociência e história do romance)

Pedro Dolabela Chagas

Talvez para a surpresa do observador distanciado, em tempos recentes a neurociência tem trazido contribuições para a teoria da ficção. Não é por acaso que o título deste artigo remete a um livro recente — em inglês: *Self comes to mind* — de António Damásio: é nele que me inspiro para pensar a ficção como uma *affordance* cultural que oferece orientação infra-consciente para indivíduos e coletividades num mundo permeado de ambiguidades, contradições, dores e angústias, colaborando para o equilíbrio psíquico nos níveis individual e coletivo. Damásio sugere que a arte, em geral,

> pode ter começado como um expediente homeostático para o artista e os que desfrutassem de sua arte, e também como um meio de comunicação[, mas com o tempo] passou a ser um meio privilegiado de trocar informações a respeito de fatos e emoções considerados importantes para os indivíduos e para a sociedade[,] um modo de induzir emoções e sentimentos alentadores, [...] de explorar a própria mente e a mente dos outros, [...] de ensaiar aspectos específicos da vida e [...] de exercitar juízos morais e ações morais. (Damásio 2012, p.359)

A arte, em geral, e as ficções, em particular, teriam encontrado a sua função em meio ao constante desequilíbrio da vida humana. Expectativas, normas, jogos de atribuição de poder e status, crenças e valores ambíguos, idiossincrasias pessoais, ambientes econômica e politicamente instáveis, podem gerar insatisfação, frustração, medo, insegurança, ansiedades individual ou socialmente distribuídas, às quais as ficções respondem conferindo certa ordenação, certa consistência à ambiguidade e à incerteza, àquilo que vivemos cotidianamente como "tensão", mas que não entendemos bem nem sabemos como nomear. Essa produção de consistência pode ajudar indivíduos e coletividades a se orientarem na instabilidade social em que vivemos mergulhados:

I. F. Cunha; J. R. B. Arenhart; C. A. Mortari (orgs.) *Epistemologia, Mente, Matemática e Linguagem: Discussões do X Simpósio Internacional Principia*. Florianópolis: NEL/UFSC, 2018, pp. 155–177.

> as artes prevaleceram na evolução por terem valor para a sobrevivência e contribuírem para o desenvolvimento da noção de bem-estar. Elas ajudaram a dar coesão aos grupos sociais e a promover a organização social, auxiliaram na comunicação, compensaram desequilíbrios emocionais decorrentes do medo, raiva, desejo e tristeza. Provavelmente, também inauguraram o longo processo de criar registros externos da vida cultural. (Damásio 2012, p.359)

Visto desta forma, o argumento pode soar pouco neurocientífico. Mas não foi gratuitamente que Damásio, e antes dele Steven Pinker — em *Como a mente funciona* — e Vilayanur Ramachandran — em *The tell-tale brain* — chegaram à arte e à ficção ao final de longas discussões da mente e do cérebro: se a neurociência não abordasse as nossas produções culturais mais aparentemente autonomizadas da nossa condição biológica, ela não produziria descrições integradoras do universo humano; ela não "decifraria o mistério da natureza humana" ("*unlock the mystery of human nature*"), conforme anunciado no subtítulo do livro de Ramachandran. Mas se a evolução cerebral explica a peculiaridade da nossa trajetória histórica, uma descrição integradora dessa singularidade deve indicar a continuidade entre a biologia e a cultura, e entre fenômenos emergentes nos níveis individual (psicológico) e coletivo. São níveis de complexidade diferentes, tratáveis em níveis diferentes de análise. Mas o pressuposto é que a evolução cultural pressupõe a atividade cerebral como seu fundamento microscópico, mesmo nos agenciamentos complexos entre os agentes heterogêneos de sistemas sociais extensos, como hoje é o caso da ficção e da arte.

Mas resgatar esse percurso da neurociência não é precisamente o objetivo deste artigo. A homenagem a Damásio remete a uma questão paralela: para além de nos ajudar a compreender o fenômeno ficcional e, eventualmente, a teoriza-lo em outro nível de radicalidade e abrangência, não teria o seu último livro também algo a nos ensinar sobre a *história* da ficção? Não apenas a teoria, mas a história — o quando, o como, o onde, o porquê, os desdobramentos subsequentes das práticas ficcionais registradas como texto...Isso parece matéria da filologia, não da neurociência. E no entanto, acredito que o tiro de Damásio acertou num alvo imprevisto - é o que este artigo pretende discutir.

Nas páginas seguintes, farei uma breve apresentação do romance grego escrito na Antiguidade. Sigo Brandão (2005) ao defender que aquele *corpus* apresenta a produção ficcional mais antiga de que temos registro, a primeira manifestação remanescente da ficção como hoje a compreendemos. Isso interessa para a minha argumentação: se estou pensando a ficção, com Damásio, como um fenômeno evolutivo (biológico-cultural), voltar à sua origem no campo letrado será estratégico para elucidar a sua diferença em relação às produções culturais anteriores — o seu teor de inovação —, e o entrelaçamento da sua história à história da mente. Para tanto, buscarei em Gregory Currie uma definição de ficção que justifique essa demarcação historiográfica, pois o objetivo não é propriamente retraçar hipóteses sobre o processo que teria levado à sua origem (o que farei apenas brevemente), mas entender as suas condições de aparição, da maneira como hoje ela se manifesta. A perspectiva é reversa, portanto: observar as condições de surgimento e as manifestações iniciais de uma prática hoje habitual, tomando-se o atual como referência para a indicação do seu próprio momento de origem, mais do que especular sobre a passagem de experiências proto-ficcionais à ficção propriamente dita.

Acompanharemos, daí, um pouco da história dessas primeiras produções. Observaremos certas características do romance grego nos planos funcional e estilístico. Veremos como a sua marginalidade inicial permitiu-lhe abordar temas imprevistos pela literatura institucionalizada, abrindo-lhes novos públicos. Veremos como a sua progressiva constituição de uma tradição própria consolidaria a sua atuação como "memória externa" do mundo contemporâneo. Dessas descrições, veremos como os seus elementos estruturantes e a datação do seu processo de consolidação convergem não apenas com as funções da arte sugeridas pelas citações anteriores de Damásio, mas também com a sua narrativa da evolução das condições biológicas e culturais para a emergência dos dois tipos de *self* sem os quais a ficção, assim como a própria aceleração da evolução cultural dos últimos dois milênios — da qual a ficção é causa e consequência, num processo de *feedback* —, não teriam ocorrido: são eles, pela sua nomenclatura, o "self autobiográfico" e seu rebento, o "self rebelde". Particularmente o "self rebelde" teria fomentado a explosão de inovações tecnológicas, políticas, religiosas, financeiras, filosóficas, proto-científicas e artísticas em meio às quais a ficção surgiria e cavaria para si uma função peculiar.

A proposição é que "a ficção veio à mente" pelas ações do "self rebelde", para então adquirir poder de permanência como produção cultural rotinizada, chegando à sua franca normalização no mundo contemporâneo. Esse processo não foi pacífico nem linear, ainda hoje preservando pontos de tensão. Mas entendo que a história tumultuada dessa prática cultural sempre se alimentou do seu germe inicial: nos termos deste artigo, a ficção foi uma manifestação tardia do "self rebelde" que conseguiu criar para si um nicho evolutivo próprio, constituído por públicos habituados cognitivamente ao seu processamento, treinados para as suas convenções formais, e para os quais ela tem se mostrado importante o suficiente para estimular a sua produção contínua.

Antes de acompanharmos a história desse processo, é preciso entender o que estarei chamando de "ficção". Para as finalidades deste artigo, a conceitualização proposta por Gregory Currie é instrumental; por ela começamos, então.

1. Conceito de ficção: a contribuição de Gregory Currie

Num alerta inicial, Currie nos lembra que a teoria da ficção deve levar em consideração que não existem propriedades materiais que sejam compartilhadas por *todas* as ficções, e ausentes das não-ficções. Não há enumeração suficientemente exaustiva dos usos ficcionais da linguagem: a ficcionalidade é um atributo relacional, que se afirma na diferença comparativa com a não-ficção. Mas essas constatações não estimulam Currie a propor uma teoria institucional, pela qual ficção seria tudo aquilo que certa comunidade compreende como tal: pelo contrário, ele propõe que a ficcionalidade deriva de uma intenção implicada já na produção do artefato, um ato autoexplicitado de *fiction-making*: "Fiction-making is dintinguished by the performance of a *fictive* utterance, an utterance produced in order to fulfill certain specific intentions; we may call them *fictive intentions*" (Currie 1990, p.11).

A ficção resulta, portanto, da intenção de produzir ficção, proposição que liga a sua prática inextricavelmente à comunicação. Inventar "estórias imaginativas" para o próprio gozo pessoal caracteriza a "fantasia", mas não a ficção, que nunca é um ato solitário. Pelo contrário, ela sempre se dirige a algum público antevisto, em atos comunicativos investidos da intenção de que esse público *acredite* na estória contada (Currie 1990, p.24). Esse acreditar deriva da característica distintiva da ficção: o *make-believe* (traduzível, imperfeitamente, como "faz/fazer de conta").

A capacidade de *make-believe* — de fazer com que o leitor "faça de conta" que a estória é verdadeira — distingue a ficção do fingimento, da imitação ou da paródia, pois a ela o público responde de maneira diferente: numa proposição confirmada, de maneira independente, pela psicologia da leitura de Richard Gerrig (1993) e de Peter Dixon e Marisa Bortolussi (2003), Currie postula que a crença do leitor na estória é espontânea, não resultando de algum ato "voluntário" — não há uma decisão de "suspensão da descrença" implicada no processo. Não há uma decisão consciente de acreditar, nós simplesmente acreditamos; que a denotação actancial dos verbos "*make*" e "fazer" não atrapalhem, pois, a nossa compreensão da condição automática, não consciente, desse processo. A predisposição do leitor a *make-believe* a estória contada é mais semelhante à lógica da crença, pela qual a noção que o falante é confiável basta para que o percebamos como uma fonte confiável de acesso às informações que ele nos comunica. Daí que as nossas estratégias para descobrir o que é importante e (ficcionalmente) verdadeiro na estória sejam as mesmas utilizadas quando identificamos, espontaneamente, aquilo em que um falante acredita sobre a estória (alegadamente real) que ele nos conta (Currie 1990, p.73).

Quanto a essas crenças, seja no processamento da ficção ou da não-ficção elas podem ser incompletas, pouco racionalizadas, contraditórias, ou mesmo opostas às nossas crenças usuais. Mas ainda assim as nossas crenças sobre a estória desenvolvidas pela crença no contador da estória bastam para o processamento do conteúdo: não precisamos acreditar em fantasmas para acreditar que Hamlet *de fato* encontrou um fantasma; não precisamos conhecer todas as informações imagináveis sobre Riobaldo para acreditarmos que a sua atração por Diadorim é *real*.

Se o *make-believe* funciona tão bem — tão naturalmente — como estratégia cognitiva, é por que ele teria uma presença constante em nossas vidas: já a imersão em sonhos e fantasias demandam, ao longo da sua duração, que "façamos de conta" que eles são verdadeiros (Currie 1990, p.19). O que caracteriza esse estado mental? Currie admite que a sua descrição é imprecisa, mas pelo menos algumas generalizações seriam discerníveis. O make-believe nos permite alcançar na imaginação aquilo que nos é negado na realidade, e que ganhemos experiência indireta (ou vicária) pela comparação entre crença e verdade. Em geral, há conexões entre o *make-believe* e a crença, o desejo, a experiência, a sensação e, eu acrescentaria, a empatia. (Currie 1990, pp.19–20) Tais características permitem a Currie ensaiar uma hipótese sobre a origem da ficção: se naturalmente construimos cenários imaginados alternativos à realidade cotidiana, se não apenas "sonhamos acordado", mas gostamos de fazê-lo, seria plausível supor que, a certa altura, pessoas particularmente habilidosas na elaboração desses cenários começaram a construir cenários especialmente concebidos para a fruição das outras pessoas: assim teria nascido a ficção. E nada impediria que essas produções manifestassem realismo, complexidade e estruturação formal, relacionando-se a preocupações da vida real e fertilizando o desenvolvimento cognitivo do público. (Currie 1990, p.20)

Currie não o diz explicitamente, mas acredito que tal processo teria necessariamente ocorrido no regime da oralidade: é de supor que a escrita fosse inicialmente um meio custoso demais para que esses primeiros experimentos ficcionais a escolhessem como meio de comunicação. Seja como for, o *make-believe*, na condição de capacidade natural e atributo distintivo da ficcionalidade, não deve ser compreendido como um estado fenomenológico, mas proposicional — dirigido à imaginação do leitor ou ouvinte, e constituído por personagens, eventos, lugares e estados de coisas (Currie 1990, p.21). Ele distingue a peculiar atitude do leitor diante do conteúdo apresentado estimulada pela ficção, e disso Currie deriva a diferença entre ficções e o que ele chama de "pseudoficções", produções que permitem o seu processamento como *make-believe* — ou não.

A depender do leitor ou do público, dentro de um quadro histórico delimitado ou no decorrer da diacronia histórica, "pseudoficções" podem ser tomadas como ficções ou como não-ficções. Essa condição me interessa por um motivo pontual: se, somada à sugestão de Brandão, a caracterização de Currie me estimula a identificar no início da era cristã (e não em qualquer momento anterior) a mais antiga manifestação da ficcionalidade da qual temos registro, é porque eu identifico como "pseudoficções" a épica (de Homero), a tragédia (de Ésquilo, Sófocles, Eurípedes...), a comédia satírica (de Aristófanes). Apesar das suas óbvias semelhanças formais com obras ficcionais, aqueles textos não pressupunham nem suscitavam o *make-believe* como processamento cognitivo: para o público sincrônico, seus personagens e acontecimentos eram reais ou lendários, e a artificação ou poetização das suas apresentações não eliminava essa condição. Ou seja, que a estória fosse contada poeticamente, isso não mitigava a crença do público na realidade de conteúdos que, no horizonte sincrônico, oscilavam entre o verdadeiro e o lendário (como hoje acontece, para muitos, com a Bíblia cristã). Isso limitava, em retorno, a liberdade criativa do poeta, que tinha liberdade para contar a estória à sua maneira, mas devia levar em consideração as expectativas determinadas pelas crenças prévias do público sobre os elementos em questão. Mas um personagem de ficção não encontra expectativas prévias desse tipo: *ele é novo*. Com isso, à diferença dos gêneros precedentes os mundos ficcionais faziam algo peculiar para os seus públicos: eles aumentavam a quantidade de coisas existentes no mundo, sem quaisquer compromissos normativos *a priori* com a moral e o saber prévio, ou com a lógica e a epistemologia correntes. (Currie 1990, pp.55–6) Essa capacidade das ficções de aumentar a quantidade de coisas existentes no mundo seria particularmente importante tanto para o sucesso histórico da ficção, quanto para o seu papel na aceleração cultural dos últimos milênios.

2. O romance grego: suas peculiaridades

Se de fato as primeiras manifestações da ficção ocorreram no regime da oralidade, será para sempre impossível precisar onde e quando ela nasceu. Até onde vai o registro material, entendo que o chamado "romance grego" foi o primeiro gênero letrado claramente ficcional: a epopeia e a tragédia reencenavam *mythoi* familiares ao público, pressupostos como reais ou lendários, o que bastava para impor limitações (morais e epistêmicas) aos seus modos de apresentação, no romance a estória passava a ser conhecida com a sua narração. Daquela condição de verdade do *mythos* os gêneros canonizados derivavam as suas pretensões à autoridade, enquanto o romance demandava do público um tipo diferente de resposta: o *make-believe* de Gregory Currie.

Make-believe, "fazer de conta", processar automaticamente a estória narrada *como se* ela fosse real; lê-la tal como leríamos ou ouviríamos uma estória real, sem que considerações sobre o seu estatuto ontológico ou epistemológico venham necessariamente à nossa consciência durante o processo: no tempo evolutivo, esse me parece ser um padrão recente de relacionamento com as nossas produções simbólicas, e por isso, ao que tudo indica, ele inicialmente pareceu estranho, carente de definição. Não surpreende, então, que a ficção tenha se autoteorizado desde o início, incorporando essa autoteorização na sua própria composição. Luciano, por exemplo, procurou desvinculá-la do compromisso moral e epistemológico ao defender a atribuição aos diferentes gêneros discursivos de pretensões diferentes à verdade, reivindicando especificamente para o texto ficcional o direito de ter o seu conteúdo regido pela *dóxa* (pela perspectiva pessoal) do autor — que, em contraste com o filósofo e o historiador, poderia dedicar-se à produção de formas agradáveis, que respeitassem os cânones do "bom gosto", mas cuja recepção visaria não a utilidade, mas o prazer. (Brandão 2005, pp.61–2) Luciano identificava essas características nas suas obras, explicitando a ficcionalidade de *Das Narrativas Verdadeiras* já em seu proêmio: "Escrevo, pois, sobre coisas que nunca vi, nem experimentei, nem soube através dos outros e, ainda mais: que nem de todo existem nem, por princípio, podem existir. Por isso os leitores não devem de jeito nenhum acreditar nelas" (Luciano 1989, p.619).

O romance grego não apenas era ficcional, portanto, como autodesnudava a sua ficcionalidade — em seus proêmios e também na "mimese de segundo grau", na "*mímesis* da *mímesis*", na emulação de outros gêneros como as suas referências à encenação teatral (em *As Etiópicas*, a protagonista acusa o próprio autor da obra de usar um artifício *ex-machina* em seu texto, contrariando um "preceito aristotélico"...), ou as cenas teatralizadas que incluíam figurinos e adereços cênicos (no suicídio simulado por Leukippe em *Leukippe e Kleitophon*, ela usa uma adaga falsa de teatro e vísceras de ovelha para enganar o seu amado, os bandidos que a capturaram e, de roldão, também o leitor). (Doody 1997, p.55, pp.92–3). Não apenas declaradamente ficcional, mas metaficcional: assim se comportava o romance em sua origem no Ocidente.

Pela definição de Lubomir Dolezel, mundos ficcionais adquirem autoconsistência por possuírem um status ontológico definido; a homogeneidade ontológica dos seus elementos constituintes "is a necessary condition for the coexistence, interaction, and communication of fictional persons" (Dolezel 1998, p.18). Mundos ficcionais não precisam estar em conformidade com as estruturas e limitações do mundo real nem são constrangidos por requisitos normativos de verossimilhança, veracidade ou plausibilidade, sendo moldados por fatores estéticos historicamente variáveis (Dolezel 1998, p.19) e por restrições globais autoimpostas que podem abrigar um número finito de elementos compossíveis (Dolezel 1998, p.20); por isso o conjunto de mundos ficcionais possíveis é ilimitado e variado ao máximo. Mundos ficcionais são incompletos, pois nem todas afirmações sobre eles são passíveis de confirmação: nunca saberemos se Riobaldo é destro ou canhoto, pois a informação não está disponível no texto e não há outro lugar onde buscá-la. (Dolezel 1998, p.22) Por fim, mundos ficcionais podem ser heterogêneos em suas macroestruturas (i.e. permeados por simbioses, hierarquias, tensões e heterogeneidades semânticas), mas independem das propriedades, estruturas e modos de ser da realidade. (Dolezel 1998, p.23) Já vimos o quanto essas características fazem parecer ficcionais a épica e a tragédia; no plano da materialidade da composição textual, não há diferenças discerníveis. Mas vimos que a liberdade compositiva era nelas constrangida pelas versões aceitáveis dos *mythoi*; sobre figuras como Agamênon e Orestes o tragediógrafo não podia apresentar literalmente o que bem entendesse, problema que não pesava sobre o autor de personagens ficcionais. O que interessa é reforçar que essas características, em conjunto, contribuíram para marginalizar o romance grego em meio à produção letrada.

Ele nunca foi dignificado, por exemplo, com um tratado teórico-normativo: no entender de Brandão, a ênfase de Aristóteles na poesia perpetuaria um "ponto de vista que admit[ia], implicitamente, uma superioridade da poesia sobre a prosa" (Brandão 2005, p.30), *a priori* rebaixando o romance (e o seu leitor) a um *status* inferior. Já o proêmio de *Das narrativas verdadeiras* revelava a necessidade sentida pelo romancista de defender o seu gênero das críticas que ele recebia: no caso, Luciano o defenderia como um "descanso conveniente" entre leituras mais sérias, que seria capaz, no entanto, de proporcionar reflexões dignas das Musas. Havia autodefesa e autodignificação também no proêmio de *As coisas incríveis além de Tule*, que elogiava a variedade de públicos alcançados pelo gênero, daqueles que o buscavam pelo prazer da leitura àqueles que, familiarizados com a literatura canônica, sabiam reconhecer as suas referências eruditas e apreciar os seus artifícios narrativos. Esse ponto sugere que o romance, gênero marginal, teve desde cedo a pretensão de conquistar o público em sua diversidade, indo na contramão da maior seletividade (e demanda de aprendizado) do cânone erudito.

É de supor, então, que a sua posição marginal trazia vantagens. Dela o romance dialogava com o mundo prosaico, lidando com temas relevantes para a vida privada, mas pouco debatidos — ou mesmo previstos — pelo pensamento institucionalizado. Enquanto na filosofia, na religião, no direito, na ciência e na moral o debate era demarcado pela relativa lentidão do diálogo com o histórico anterior de problemas e com as figuras de autoridade relativas, obedecendo-se a padrões de decoro e argumentação formal, o romance podia tratar de temas que pareceriam desimportantes para o saber institucionalizado — relativos, por exemplo, à vida amorosa e material no tempo presente. Mesmo que, em casos assim, arquétipos tradicionais fossem utilizados como exemplos de conduta a serem "testados" em situações imprevistas, o romance observava

> a relação entre indivíduos e os ideais e normas que deveriam guiar as suas vidas. Mas ao invés de observar, descrever e avaliar as ações das pessoas em contextos reais, as formas mais antigas do romance partiam de um conjunto forte de ideais fixos para imaginar que tipo de comportamento os cumpriria perfeitamente [...] ou os contradiria totalmente [...]. (Pavel 1986, p.23, tradução de Débora Gandra)

Pela descrição de Pavel, pode-se descrever aquela ficção como um simulador de dilemas morais, relativos à vida privada. Mesmo com os seus protagonistas idealizados e eventos extraordinários, mesmo quando o romance grego parecia mais "irreal", a sua remissão à vida prosaica emergia da projeção de dilemas morais familiares ao leitor contemporâneo, que eram simulados, no enredo, pelo descompasso entre agentes perfeitos e um mundo imperfeito. A ficção nunca assumiu como função "imitar" ou "duplicar" o real, mas permitir vê-lo de maneira distanciada pela imaginação de situações em que as suas leis, normas e valores são colocados sob tensão. Se ela remete ao real, é por selecionar de maneira valorada alguns dos seus elementos salientes, que são esteticamente trabalhados de maneira a produzir respostas emocionais no público visado — veremos que, pela minha proposição, esse gesto de "fazer ver o real à distância" é uma cria do "self rebelde" de Damásio (Pavel 1986, pp.33–5).

Pela formulação de Brandão, a função principal dos primeiros romances era

> tornar dignos de representação o amor, a separação, os medos, as dúvidas e os conflitos, da mesma forma que a epopeia e a tragédia haviam dignificado, por meio da representação, a coragem guerreira, a realeza, a grandeza desmedida e o sucesso ou o aniquilamento dos heróis. (Brandão 2005, pp.255–6)

Um importante código cultural então emergiria: a representação do amor e da paixão, em particular do "amor à primeira vista" que pressupunha a igualdade (intelectual, social e etária) entre os amantes — uma clara inovação do romance. (Doody 1997, pp.35–6) Pelo menos em sua vertente "idealista" (pela terminologia de Pavel), no romance grego o amor era a força que conduzia as ações, suplantado a importância que o Estado e a família possuíam nos gêneros clássicos. No romance, não raro a família e o Estado eram forças que ameaçavam a concretização do amor; em *As Etiópicas*, para Charikléia o chamado do amor era tão mais forte do que a lealdade à família e à pólis, que ela as abandona sem hesitação. (Pavel 1986, pp.29–31). Se o enredo lançava a heroína a uma sequência de situações desafiadoras, diante delas ela afirmaria a sua virtude moral pela afirmação do seu compromisso amoroso, e não por qualquer outra forma de lealdade.

A vida privada em primeiro lugar, em suma: isso era inimaginável nos gêneros canônicos. E para colocar os seus valores e normas morais em perspectiva, o romance, gênero marginal, mimetizava, citava, satirizava outros gêneros. Alusões literárias permitiam que o leitor percebesse e organizasse as normas sociais às quais o texto reagia, e por isso os romances faziam abundantes alusões literárias, recorrendo à erudição do leitor para conferir ordenação aos saberes e conhecimentos aos quais eles remetiam. (Doody 1997, p.144) Em seu aparecimento tardio, o romance mimetizava e fazia amplas referências à épica, à história e à tragédia, assumindo-se como um gênero de gêneros ao transitar entre as fronteiras discursivas. Isso teve um preço: os romances, então como ainda hoje, não pareciam dotados de características formais próprias, de convenções que os distinguissem e notabilizassem no campo letrado. Essa impressão reforçaria a sua marginalidade, fazendo com que ele sequer chegasse a ser *nomeado* pelos gregos (Brandão 2005, pp.269–73). A sua especificidade era notada pela sua diferença *relacional* em relação a outros textos, dos quais ele se autodistinguia ao mimetiza-los "em segundo grau". Com as várias funções que essa "mimese em segundo grau" assumiria, ela jamais foi abandonada pelo romance em sua longa tradição como "gênero de gêneros", para a qual é imprescindível o compartilhamento, entre os autores e o público, de um patrimônio cultural acessível como "memória externa": único gênero da Antiguidade que nasceu letrado (i.e. sem ter advindo de uma tradição oral anterior), o romance se alimentava da escrita, do repertório de ideias, símbolos e convenções linguísticas armazenado e compartilhado como mídia-texto.

Mas em que aspectos a obra recente de António Damásio ilumina a origem desse fenômeno?

3. Teoria da ficção e história da mente

A neurociência assumiu o desafio culturalista, radicando a explicação da existência das artes na evolução biológico-cultural do cérebro humano. Isso é enfrentar a passagem entre a evolução do cérebro humano — que, *grosso modo*, é dotado das mesmas capacidades biológicas há dezenas de milênios —, e a emergência de produções que indicam o descolamento entre os ritmos da evolução cultural e da evolução biológica. O quadro lacunar das evidências disponíveis impõe a formulação de proposições especulativas; seja como for, é notável que a cronologia e os processos descritos numa dessas proposições, apresentada na sequência final de *E o cérebro criou o homem*, coincida com a datação da história que leva das "pseudoficções" ao romance grego, e esclareça algumas das características constitutivas desse último.

Damásio sugere que o self demorou a surgir na mente, e todo o seu livro pode ser descrito como uma reconstituição das condições que teriam estimulado essa lenta evolução. Num roteiro adaptacionista, ele descreve as vantagens trazidas pela progressiva complexificação do cérebro, em resposta a condições e estímulos ambientais vividos pelos nossos ancestrais, mas o self tal como o conhecemos demorou a emergir na mente — especialmente porque a "consciência de si" não é necessária para a sobrevivência de qualquer espécie animal. Ela nos trouxe, sim, vantagens adaptativas, mas foi também o resultado emergente de capacidades mentais que não evoluíram para produzir uma mente consciente, e cujo vir-a-ser, desse modo, não pode ser explicado apenas pela lógica adaptacionista. E quando o self afinal surgiu na mente humana, ele promoveria padrões de percepção, comportamento, comunicação, pensamento e ação habilitados a construírem para os nossos ancestrais, ativamente, nichos adaptativos complexos, autorreferenciais e cada vez mais protegidos das incertezas trazidas pela natureza — nichos adaptativos *culturalizados*, em outras palavras. É nessa altura que

> Os mecanismos de recompensa e punição, assim como os impulsos e motivações, que vinham moldando o processo da vida em fases anteriores da evolução, ajudam [o] desenvolvimento de emoções complexas. A inteligência social começa a ganhar flexibilidade [com a] expansão do espaço mental de processamento, da memória de trabalho e do raciocínio. A regulação da vida passa e enfocar um indivíduo gradualmente mais bem definido. Por fim emerge o self autobiográfico, e com sua chegada a regulação da vida sofre uma mudança radical. (Damásio 2012, p.349)

Um self "autobiográfico", autoconhecedor, autoinvestigativo, consciente da sua individualidade, essa versão amadurecida do self teria iniciado um processo histórico irreversível: o impulso à inovação cultural contínua, que, pela primeira vez na história natural, permitiria que uma espécie moldasse de maneira consciente o seu ambiente de vida, o saber e o comportamento dos seus indivíduos, a partir da diferenciação das informações aprendidas nos contextos presentes de experiência. O autodistanciamento, a "rebeldia" da cultura contra os imperativos da natureza se torna o padrão; com o tempo, esse self culturalizado se rebelaria contra as limitações da própria cultura: eis o "self rebelde" de Damásio.

Damásio sabe que não há como reconstituir com precisão o desenvolvimento desse self. A sua proposição é especulativa; o que ele se considera apto a fazer é estipular, retrospectivamente, as capacidades mentais que deveriam estar estabelecidas para a emergência da "independência" e "rebeldia" que sobressaem no comportamento do self moderno:

> a independência a que me refiro só pôde emergir quando o self tornou-se complexo o suficiente para revelar um quadro mais completo da condição humana, quando organismos vivos se tornaram capazes de aprender que dor e perda eram possíveis, mas também eram possíveis o prazer, o florescimento, a tolice, quando houve perguntas a ser feitas sobre o passado e o futuro humano, quando a imaginação pôde mostrar modos possíveis de reduzir o sofrimento, minimizar perdas e aumentar a probabilidade de felicidade e fantasia. Foi então que a mente rebelde começou a conduzir a existência humana por novos rumos, alguns desafiadores, outros cordatos, mas todos baseados no pensamento através do conhecimento, um conhecimento mítico de início, científico depois, mas sempre conhecimento (Damásio 2012, pp.350–1).

Quando, na cronologia histórica, esse self teria se formado? Num primeiro passo da sua cronologia, Damásio comenta que as pinturas rupestres já indicavam a capacidade de pensamento simbólico dos nossos ancestrais; num sentido mais específico, o aparecimento de práticas funerais sugere uma atribuição especial de valor à vida, envolvendo provavelmente algum grau de *interpretação*, emocionalmente carregada, da sua condição transitória. Nessas práticas Damásio identifica em atuação um self "robusto", mas apenas o registro escrito dos poemas homéricos afinal revelaria o "self autobiográfico" em ação: mesmo que o próprio Damásio não desenvolva esse ponto, é de supor que ele tenha em mente a profunda diferenciação subjetiva das personagens homéricas, necessariamente espelhada na autodiferenciação (ou autosingularização) subjetiva dos indivíduos que recitavam aqueles poemas.

É notável que, neste ponto da sua cronologia, Damásio acolha a sugestão de Julian Jaynes pela qual "algo muito importante pode ter ocorrido com a mente humana durante o relativamente breve intervalo de tempo entre os acontecimentos narrados na *Ilíada* e os que constam na *Odisseia*". (Damásio 2012, p.352) De quanto tempo estamos falando, exatamente? Uma obra funciona como sequência da outra; no plano diegético o início da viagem de Ulisses na *Odisseia* coincide com o fim do conflito em Tróia. Ele não pode estar se referindo aos enredos das obras, mas a outra cronologia, que iria da (historicamente vaga) "Idade Heroica" da Grécia ao momento em que os poemas homéricos foram redigidos, possivelmente no século 8 a.C.: é possível que esse intervalo tenha demarcado a passagem do mundo fechado e autocentrado da *Ilíada*, com seus personagens irmanados numa formação cultural comum, e o mundo mais aberto e diverso da *Odisseia*, com seu herói vagante, movido pela curiosidade diante de lugares e culturas diversas, de ação mais aberta ao improviso e menos orientada pelas suas normas culturais de origem. Entre o mundo coeso da *Ilíada* e o mundo aberto da *Odisseia*, sugestivamente análogos à diferença entre a maior homogeneidade cultural da Grécia arcaica e a cultura internamente agitada que desembocaria no "século de Péricles", entre um e outro ponto o self teria conhecido uma evolução acelerada, agora determinada não pela evolução biológica, mas pelo ritmo intenso, e incontrolável, da evolução cultural:

> À medida que se acumularam conhecimentos sobre os humanos e sobre o universo, a contínua reflexão pode muito bem ter alterado a estrutura do self autobiográfico e conduzido a uma coesão maior dos aspectos relativamente separados do processamento mental; a coordenação da atividade cerebral, impelida primeiro pelo valor e depois pela razão, teria funcionado vantajosamente para nós. Seja como for, o self capaz de rebeldia que imagino é um avanço recente, da ordem de milhares de anos [...]. Ele depende da capacidade cerebral de manter registros expansíveis de memória [...] de fatos e eventos, em particular fatos e eventos pessoais [que] compõem o andaime da biografia, da pessoalidade e da identidade individual[, e] da capacidade de reconstruir e manipular registros de memoria em um espaço de trabalho no cérebro paralelo ao espaço perceptual, uma área de armazenagem off-line onde o tempo pode ser suspenso brevemente e as decisões podem ficar livres da tirania das respostas imediatas. Ele depende da capacidade cerebral de criar não só representações mentais que imitem a realidade de maneira fiel e mimética, mas [que] simbolizem ações, objetos e indivíduos. [...] Por fim, ele depende da invenção de sistemas de memória externos, paralelos aos existentes em cada cérebro, [...] representações pictóricas [...], ferramentas, joias, arquitetura funerária e [...] escritos, certamente a mais importante variedade de memória externa até pouco tempo atrás. (Damásio 2012, pp.352–3)

Esse é o self que, autobiográfico, se tornaria "rebelde", dando início ao processo jamais interrompido de "indagação, reflexão e resposta [...] registrad[o] nos mitos, religiões, artes e várias estruturas inventadas para governar o comportamento social — a moralidade construída, os sistemas de justiça, a economia, a política, a ciência e a tecnologia". (Damásio 2012, p.353) Essa última frase me estimula pensar o "self rebelde" como aquele capaz de fazer com que o "pano de fundo" searliano se torne objeto de meta-reflexão. Pela definição de Searle, o "pano de fundo" é o "conjunto de capacidades, habilidades, tendências, hábitos, disposições, pressuposições e 'know-how"' que confere estabilidade à nossa relação com o mundo, determinando as condições de satisfação de "todos os nossos estados intencionais, todas as nossas crenças, esperanças e medos pessoais" (Searle 2000, p.61). No meu entender, o "self rebelde" se notabiliza pela capacidade de tirar aqueles elementos do "fundo" e trazê-los ao primeiro plano da consciência (individual e coletiva). E assim, a contribuição do "self rebelde" para a teoria da ficção é reforçar a explicação das razões pelas quais a ficção não se interessa em "imitar" ou "duplicar" o real, mas em mostrá-lo de maneira distanciada em representações que dele se diferenciam materialmente — esse ato de "colocar o real à distância" é uma manifestação quintessencial do "self rebelde".

Note-se que a narrativa de Damásio situa a emergência desse self como um processo histórica e geograficamente preciso: ele fala da Grécia, não de qualquer outro lugar. A julgar pelo seu texto, apesar de as capacidades cerebrais estarem, ao que tudo indica, biologicamente evoluídas em toda parte, a emergência daquela "rebeldia" como capacidade mental rotinizada aconteceu ali, e não em meio às populações de outros lugares do planeta. Damásio não é explícito a respeito, mas a historiografia recente (v. McNeill e McNeill 2003, Martin 2016) me estimula a pensar que seria duvidoso imaginar que as condições locais facilitassem a eclosão daquele processo, naquele momento da história, indistintamente em qualquer região do globo: a biologia em toda parte estava pronta, mas não as condições culturais. Geograficamente situada em meio às grandes civilizações da época e seu fluxo de informação e inovação, a Grécia democratizaria mais a escrita e a circulação dos textos em comparação com a centralização do letramento (nos estamentos administrativos e religiosos) de outros povos antigos, estabeleceria uma ampla rede de comunicação externa em meio à diversidade cultural do Mediterrâneo, viveria uma competição politicamente perigosa, mas intelectual produtiva entre as suas cidades-Estado, estimularia a expansão e diversificação do pensamento simbólico na arte, na filosofia e na religião, estabeleceria o uso da moeda como unidade abstrata de regulação das trocas econômicas, desenvolveria um senso historicizado de identidade cultural...Em cada etapa de cada um desses processos, e na confluência de todos eles, é de supor que a "rebeldia do self" tenha emergido como causa e consequência daquelas cadeias de diferenciação histórica, numa prolongada relação de *feedback*.

No que tange às implicações desse quadro para a evolução da ficção, a ele se acrescenta que, no período histórico em que o "romance grego" apareceu, aquela Grécia que vivera uma evolução cultural acelerada séculos antes, mas que estava em decadência no início da era cristã, permaneceria como referência cultural por séculos após o seu declínio. Quando o romance apareceu, já sob o Império Romano, o patrimônio de uma Grécia enfraquecida ainda permanecia no topo do cânone cultural, a ponto de autores de várias regiões do Império optarem pelo grego como língua literária. Os autores daqueles romances sequer eram gregos: advindos de várias partes da porção oriental do Império, especialmente da Ásia Menor, eles escreveram em grego estórias que se passavam na Grécia, mas cuja temática não era especificamente grega e cujo público estava espalhado pelo Império. Num estudo recente, Mary Beard (2017) apresenta a imagem de um Império Romano multicultural, multilíngue, multiétnico, multirreligioso, porém integrado, em sua porção Oriental, por uma cultura efetivamente "greco-romana", que agregava elementos das duas civilizações numa tradição unificada e amplamente compartilhada: esse público geograficamente disperso, mas culturalmente integrado, tinha na cultura grega um patrimônio simbólico e ideativo comum.

Tudo somado, a cronologia da história literária converge com a narrativa de Damásio: o primeiro gênero ficcional — e logo meta-ficcional —, ostensivamente auto-referencial em relação à tradição letrada, e que portanto pressupunha tanto a aceleração da acumulação cultural quanto o distanciamento crítico do self em relação ao quadro contemporâneo da cultura, teria surgido após aquelas primeiras produções — a épica e o drama — que já haviam dado expressão ao "self rebelde". Se a *Odisseia* era uma manifestação do "self rebelde", *Antígona* e *As aves* verticalizavam aquela rebeldia dentro, ainda, de uma cultura coesa; a partir desse histórico de acumulação cultural, a ficção seria o passo seguinte na autonomização do "self rebelde" em sua exposição do "pano de fundo". A partir desse exemplo, a minha hipótese geral é que a ficção demanda condições de surgimento específicas: não apenas as capacidades cerebrais das quais a nossa espécie universalmente dispõe, mas capacidades mentais que apenas certas ambiências culturais, de longa duração, podem estimular. Acredito que certo adensamento das redes de circulação e armazenamento da informação — certo adensamento das artes, da produção material, das populações, das produções simbólicas, das crenças, dos sistemas de pensamento...—, associada a certa liberdade política que permita a expressão da "rebeldia" individual, sejam necessárias para que a prática ficcional floresça e permaneça no tempo. É preciso que essas condições se mantenham relativamente estáveis por um período dilatado, para que a ficção, inicialmente um inovação cultural, se rotinize a ponto de formar um público progressivamente cativado e habituado a ela, eliminando a sua estranheza inicial e fomentando a emergência de uma tradição. Se isso faz sentido, a implicação é que a busca por práticas ficcionais rotinizadas em lugares e períodos destituídos dessas possibilidades — sejam eles próximos ou distantes, anteriores, contemporâneos ou posteriores à Grécia do período analisado — será provavelmente infrutífera: mesmo que manifestações pontuais de ficcionalização possam ser identificadas, a prática habitual, normalizada, rotinizada da apresentação a leitores e ouvintes de mundos alternativos e autoconsistentes — de *heterocosmica* —, a serem processados por mentes que "fazem de conta" (*make-believe*) que eles são reais, eis aí algo que apenas um grau elevado e duradouro de complexificação social e cultural pode ensejar. Não se trata de dizer que práticas ficcionais não possam existir, em nenhuma medida, sob outras condições — mas acredito que elas dificilmente se rotinizam e constituem tradição sem um nível elevado e continuado de complexidade social, acumulação cultural e flexibilização intelectual.

A ficção narrativa escrita — o romance — se desenvolveu no Império Romano, então. O que aconteceria com ela a partir daí?

4. Autonomização da ficção como produção cultural: um processo conflituoso

Começaria então a tumultuada história da ficção no Ocidente, da formação inicial de um público capaz de processá-la com naturalidade à autorreferencialidade radical de um Pirandello e um Borges. Se desde o início a ficção escrita era metatextual (o romance era um gênero de gêneros), na modernidade nos habituamos à metaficção, em que a teorização dos seus limites e condições é tematizada na própria composição. Mas só chegamos a esse ponto após a longa e descontínua sequência de esforços da ficção para criar um nicho evolutivo próprio: para formar para si um público treinado para lidar com os seus códigos textuais específicos, para internalizar a inaplicabilidade da verdade epistemológica como critério valorativo, para automatizar o *make-believe* como padrão de processamento da informação textual. Se a familiaridade da nossa relação com objetos ficcionais atesta a sua profunda integração à cultura, e se hoje a ficção dispõe de amplos espaços dedicados a ela — como as salas de cinema e as prateleiras das bibliotecas e livrarias —, que veiculam livros e filmes cuja fruição prescinde de justificação, o caso é que a ficção custou a alcançar esse ponto, num processo que não foi, e em certos aspectos continua não sendo, muito tranquilo.

Contou para isso a emergência de uma tensão jamais resolvida entre o grande interesse que o público manifesta por ela e a sua carência de justificação funcional aparente. Para começo de conversa, eram textos desprovidos de convenções linguísticas típicas e de um circuito próprio de circulação: a ficção escrita se apropriava das convenções de gêneros não-ficcionais ao mesmo tempo em que circulava em meio a eles, em volumes que não se distinguiam materialmente de outros tipos de produção. O resultado era certa dose de confusão:

> Differences now obvious to us [...] have not always been so. Before the conventionalizing of the novel the signs by which we readily distinguish fiction from nonfiction — place on library shelves, format, style — were not available, so that only the quite incredible tale could be free from confusion with historical report. (Nelson 1973, p.8)

Note-se que a citação sequer se refere ao período de aparição inicial do romance, mas à primeira modernidade, já no regime de circulação do impresso. Na Antiguidade a distinção material dos textos era provavelmente ainda mais turva e, sem os instrumentos não textuais que possibilitam a atribuição prévia de ficcionalidade ao texto (como a capa do livro e a sua disposição na livraria), apenas estórias ostensivamente inacreditáveis (o fantástico, a fantasia, o absurdo...) se distinguiam com clareza da não-ficção. Isso não resolvia, porém, o aparente vazio funcional da narrativa ficcional, historicamente a maior fonte de pressão sobre os autores e os leitores de ficção.

Vejamos o exemplo de Cáriton, autor do mais antigo romance ao qual temos acesso. Qual seria, aos olhos dos contemporâneos, a função da obra que ele escreveu? No século 1 da era cristã, veio a público *Quéreas e Calírroe*, cujo enredo eu assim resumo: ao final do século IV a.C., em Siracusa, Quéreas se apaixona enlouquecidamente pela bela Calírroe, filha de Hermócrates, herói da Guerra do Peloponeso e grande figura política da cidade. Eles afinal se casam, mas os antigos pretendentes de Calírroe, tomados de inveja, convencem Quéreas de que ela era infiel; num rompante de raiva, ele a agride violentamente, fazendo-a cair morta ao chão. Segue-se o funeral e, como era prática, ela é encerrada num túmulo repleto de tesouros; sabendo do acontecido, piratas violam o túmulo para roubá-lo. Mas antes disso algo importante ocorrera: Calírroe despertara daquilo que fora, afinal, um estado semelhante ao coma.

Os piratas a encontram viva e, tendo se recuperado do susto, decidem vendê-la como escrava em Mileto. Lá, o seu comprador e mestre, Dionísio, também se apaixona e se casa com ela — o problema é que, grávida de Quéreas, ela esconde o fato e permite que Dionísio acredite ser pai da criança. Ocorre que, paralelamente, Quéreas descobrira que ela estava viva e saíra à sua procura pelo Mediterrâneo, sendo também capturado e vendido como escravo. Ainda assim o seu caso chama a atenção de Ataxerxes, Rei da Pérsia, que assume o dever de decidir quem era o legítimo marido de Calírroe — intimamente tramando tomá-la para si como esposa. Então eclode uma guerra e Quéreas assalta com sucesso a fortaleza persa de Tiro, ganha uma vitória naval contra os persas (em nome dos rebeldes egípcios) e consegue finalmente se unir a Calírroe. Ela escreve a Dionísio, pedindo-lhe para criar o filho e enviá-lo a Siracusa quando ele tivesse crescido. O casal retorna em triunfo a Siracusa, onde ela oferece orações a Afrodite, que guiara os eventos da narrativa.

Aventura, magia, paixão, radical inverossimilhança, a onipresença do acaso como explicação causal: apesar de salpicado de referências a lugares reais e personagens e acontecimentos históricos, não havia nada, naquele enredo, que se assemelhasse a uma história real, e nada que fosse claramente "instrutivo" ou "informativo", tampouco. O que o recomendaria ao leitor contemporaneo? Por que dedicar à sua leitura o tempo que a estória exigia? O que se poderia "ganhar" com tal leitura, que "benefícios" ela traria? O que *justificava*, em suma, a escrita e a leitura de uma narrativa como aquela? Não estava claro, então e desde sempre: se, com o tempo, a ficção se tornaria naturalizada como prática social, ela nunca chegou a receber uma justificação uniforme. Que inúmeras obras ficcionais tenham se elevado ao centro do cânone cultural do Ocidente, isso não impede que um número ainda maior seja rebaixado pela sua suposta "frivolidade", "falsidade", "alienação", "desvio moral", e assim por diante.

Em outras palavras, que a prática (a produção e a fruição) da ficção tenha se naturalizado, isso não a livrou de acusações morais e epistemológicas, mesmo que ela não reivindique — ou justamente por isso — compromissos necessários com o verdadeiro e o bom. Que Luciano de Samósata articulasse uma defesa da ficção já no proêmio da sua obra, isso sugere a estranheza produzida pelo romance, que se dissociava das formas previamente institucionalizadas sem parar de remeter a elas, e que não reivindicava para si qualquer função social clara - o que lhe impunha a necessidade de autodefesa, autodefinição e autojustificação. Essa foi desde o início a ambiguidade da sua posição social: o seu processamento cognitivo era fácil a ponto de suscitar prazer na leitura, mas a desconfiança do pensamento moral em relação a esse prazer e a desconfiança epistemológica quanto ao estatuto de verdade das suas narrativas fariam com que a ficção escrita não parecesse racionalmente justificada, tornando necessária, para a sua rotinização — para o fortalecimento do seu nicho evolutivo — a defesa reiterada das suas funções, especificidades, méritos e propósitos.

Essa seria uma condição duradoura. Já entre os séculos XVI e XVIII, para se livrarem da acusação de falsidade vários autores insistiam que as suas obras não eram de fato ficcionais, mas "derivadas de fontes autênticas" e "baseadas nos relatos de testemunhas confiáveis" (Nelson 1973, p.8). Para que essa reivindicação funcionasse, era preciso que eles evitassem quaisquer códigos (ou clichês) associados a textos ficcionais, tais como ações e eventos "extraordinários", incongruências, ou procedimentos narrativos tradicionalmente associados a ficções (como o "Era uma vez…" das estórias infantis). Ou seja, a obra devia parecer não-ficcional. Outra alternativa, diametralmente oposta, era admitir a ficcionalidade do texto, recusando-se que ele fosse julgado sob o critério da verdade. Mas isso não eliminava que uma estória assumidamente inventada, ao reivindicar o seu valor, tivesse que fundamentar de outra maneira (de alguma maneira!) a sua justificação e senso de propósito: desde o romantismo, o campo erudito se habituou a situar esse fundamento nas funções da crítica (social e política), da formação (*Bildung*) individual e da inovação (estética), reivindicadas como instrumento de dignificação da ficção em detrimento, por exemplo, das funções terapêuticas e de entretenimento que ela explora com tanta frequência.

Importa notar que qualquer solução para o aparente vácuo funcional da ficção será sempre localizada e historicamente específica, jamais alcançando hegemonia. Num exemplo famoso, Jorge Luis Borges, Silvina Ocampo e Adolfo Bioy Casares, rejeitando as pretensões da "alta literatura" de produzir efeitos socialmente relevantes, e confrontando as suas críticas à "banalidade", "vulgaridade" e "extravio moral" da literatura "de entretenimento", reivindicaram o prazer na leitura e a qualidade do enredo como critérios norteadores do juízo crítico: "la novela, en nuestro país y en nuestra época, adolecía de una grave debilidad en la trama, porque los autores habían olvidado lo que podríamos llamar el propósito primordial de la profesión: contar cuentos". (Casares 2006, p.16) O ato de contar estórias seria, desse modo, o "propósito primordial" do narrativo. A narrativa de ficção não prestaria contas *a priori* ao que lhe é externo, pois ela teria em si mesma a sua própria motivação e função. Não controlada ou referendada pelo seu exterior, ela seria o seu próprio *telos*: a narrativa narra, e o seu propósito é bem narrar. E se aquilo que interessa na estória contada não está na "mensagem" que ela tem a "transmitir", mas na qualidade da própria narração, recusa-se a filiação — política, filosófica, moral... — da ficção aos "problemas do mundo". Daí o elogio à literatura fantástica:

> [No] peligra el cuento fantástico, por el desdén de quienes reclaman una literatura más grave, que traiga alguna respuesta a las perplejidades del hombre [...] moderno. Dificilmente la respuesta significará una solución, que está fuera del alcance de novelistas y de cuentistas. [...] A un anhelo más del hombre, menos obsesivo, más permanente a lo largo de la vida y de la historia, corresponde el cuento fantástico: al inmarcesible anhelo de oír cuentos. (Casares 2006, p.17)

Numa proposição que poderia dar plena legitimação a uma obra como a de Cáriton, a existência do narrativo era justificada pela sua satisfação do nosso desejo ancestral de "ouvir estórias": atender ao desejo humano pela narrativa bastaria para explicar a sua existência e legitimar a sua produção. De maneira surpreendente, essa noção vai ao encontro da teoria "homeostática" das artes proposta por Damásio: por razões particularmente humanas, humanos gostam de narrativas, de enredos, de ficções; que a moral e o saber positivo tenham certas expectativas sobre o que as ficções devem ser, isso em nada diz respeito àquele interesse primordial — e ao prazer que a sua satisfação desperta. O fato bruto é que, desde Cáriton, ficções não pararam de ser escritas: não nos deixemos enganar pela exiguidade do *corpus* remanescente; se até mesmo de gêneros canonizados entre o público erudito, como a tragédia, pouca coisa nos restou, que o número de romances preservados não chegue a uma dezena não sugere que eles originalmente eram assim tão poucos, mas apenas que a sua conservação não foi priorizada (v. Doody 1997, Reardon 1989).

E resta que esse *corpus*, apesar de exíguo, permite ver que o romance grego despertou interesse suficiente para constituir uma tradição. Num exemplo importante, o enredo de Cáriton foi seguidamente mimetizado até a aparição, no século IV, de *As Etiópicas*, de Heliodoro. Mais uma vez, a estória falava da paixão e do compromisso de um belo e jovem casal, de sequestros por piratas, de vitórias dramáticas em batalhas sangrentas, de visitas a reinos distantes...Mas o volume da narrativa crescera em várias centenas de páginas, e a quantidade de informações que ela acumulava e de problemas que ela discutia sobre o mundo atual — a sua densidade de saber enciclopédico — sugere o quanto a ficção havia se estabelecido como "memória externa" do público contemporâneo. A ação chega à Etiópia, representada como alteridade cultural ao mundo mediterrâneo, o que transportava a imaginação do leitor radicalmente para fora do seu universo familiar ao simular uma experiência de contato entre indivíduos "greco-romanos" e um ambiente que lhes era inteiramente estranho — exemplo de tema que a ficção se via livre para explorar.

Prazer na leitura, constituição de uma tradição própria, atuação como memória externa da sociedade presente, estímulo à imaginação individual: a marginalização da ficção escrita não impediria que ela saísse da sua condição de inovação cultural para se estabelecer como prática cultural rotinizada.

5. Coda

Com o tempo, a ficção criaria para si um nicho evolutivo próprio. O menosprezo da crítica erudita nunca impediu que ficções destinadas ao prazer do público fossem continuamente produzidas, e qualquer que tenha sido a sua história desde o primeiro século da era cristã, entendo que ela segue sendo manifestação daquele importante acaso na evolução da nossa vida mental: o "self rebelde" de Damásio. A ficção tanto pressupõe a rebeldia do self, quanto estimula essa rebeldia, numa relação de *feedback* que impele a inovação e a aceleração da evolução cultural ao oferecer renovadas oportunidades para a observação da própria cultura à distância. A moderna institucionalização da ficção resultou do processo conflitivo de estabelecimento do seu nicho evolutivo, conflito que, em certa medida, continua ativo e nunca cessará: se a ficção segue como fonte privilegiada de manifestação da rebeldia do self, é porque, como diria um Wolfgang Iser (1996), ela estimula a ocupação de espaços imprevistos entre os discursos, técnicas e saberes normalizados, para o exercício de funções imprevistas por esses mesmos discursos, técnicas e saberes — atuando como memória externa das tensões na vida coletiva, nos saberes tradicionais, na tradição letrada. E se um nicho evolutivo institucionalizado hoje lhe dá segurança e poder de permanência, esse nicho é seguidamente tensionado pela própria ficção, em seu conflito com a sua própria tendência à rotinização, tradicionalização e convencionalização formal. Eterna "rebeldia", pois...

Agradecimentos

Artigo resultante de apresentação na reunião do GT de Filosofia da Neurociência da Anpof, realizada como parte da programação do 10th Principia International Symposium, realizado em Florianópolis, em agosto de 2017. Agradeço aos colegas presentes pelas suas observações, que me trouxeram várias das reflexões presentes neste texto.

Referências

Beard, M. 2017. *SPQR: uma história da Roma antiga*. São Paulo: Planeta.

Borges, J. L.; Casares, A. B.; Ocampo, S. 2006. Prólogo. In: J. L. Borges; A. B. Casares; S. Ocampo (orgs.) *Antología de la Literatura Fantástica*, pp.7–14. Buenos Aires: Sudamericana.

Bortolussi, M.; Dixon, P. 2003. *Psychonarratology: Foundations for the Empirical Study of Literary Response*. Cambridge: Cambridge University Press.

Brandão, J. L. 2005. *A invenção do romance*. Brasília: Ed. UnB.

Currie, G. 1990. *The nature of fiction*. Cambridge: Cambridge University Press.

Damásio, A. 2012. *E o cérebro criou o homem*. São Paulo: Companhia das Letras.

Dolev̌el, L. 1998. *Heterocosmica. Fiction and possible worlds*. Baltimore: Johns Hopkins University Press.

Doody, M. A. 1996. *The True Story of the Novel*. New Brunswick: Rutgers Univ. Press.

Gerrig, R. J. 1993. *Experiencing Narrative Worlds: On the Psychological Activities of Reading*. New Haven: Yale University Press.

Iser, W. 1996. *O fictício e o imaginário: perspectivas de uma antropologia literária*. Rio de Janeiro: EdUERJ.

Luciano. 1989. A true story. In: B. P. Reardon. *Collected Ancient Greek Novels*, pp.619–49. University of California Press.

Martin, F. 2016. *Dinheiro – uma biografia não autorizada*. São Paulo: Portfolio/Penguin.

McNeill J. R.; McNeill W. H. 2003. *The human web. A bird's-eye view of world history*. Nova Iorque: W. W. Norton & Company.

Nelson, W. 1973. *Fact or fiction. The dilemma of the Renaissance storyteller*. Cambridge: Harvard University Press.

Pavel, T. 2013. *The lives of the novel – a history*. Princeton: Princeton University Press.

Pinker, S. 1998. *Como a mente funciona*. São Paulo: Companhia das Letras.

Ramachandran, V. 2011. *The tell-tale brain. Unlocking the mystery of human nature*. Londres: William Heinemann.

Reardon, B. P. 1989. *Collected Ancient Greek Novels*. University of California Press.

Searle, J. 2000. *Mente, linguagem e sociedade*. Rio de Janeiro: Rocco.

10

Surpresa e senso comum: comentários ao livro A da *Metafísica* de Aristóteles e à Parte II de *Análise da Matéria* de Bertrand Russell

VÍTOR M. COSTA

No presente trabalho, analisarei os conceitos de *senso comum* e de surpresa/espanto em Aristóteles e Russell — mais particularmente no **A** da *Metafísica* e na Parte II de *Análise da Matéria* — a fim de mostrar que, primeiramente, ambos os filósofos, embora com suas diferenças, têm pelo *senso comum* um dos fundamentos para o desenvolvimento da filosofia e da ciência, bem como para diferenças epistemológicas importantes. Depois, que ambos os filósofos, também com diferenças, têm pela surpresa/espanto, em relação a um problema qualquer, um fenômeno que marca a ignorância do agente epistêmico perante algo e que, portanto, a ausência dessa surpresa encerra as relações epistêmicas do sujeito para com o objeto, restando somente relações de outro tipo, como utilitárias (i.e.: usar o saber sobre *p* para algum fim). E, finalmente, sugerir que o conceito de *surpresa* e o de *senso comum* precisam ser expandidos de modo a dar conta dos fenômenos filosóficos, lógicos e matemáticos e serem entendidos não negativamente ao saber e sim construtivamente em relação a ele.

Falha e sabedoria

É conhecida a primeira frase da *Metafísica* (**A**, 1, 980a 20) de Aristóteles onde lemos: "Todos os homens tendem, por natureza, ao saber" [Πάντες ἄνθρωποι το υ εἰδέναι ὀρέγονται φύσει] (Reale 2014, p.3). Como notou Reale (2011, p.5), trata-se de "uma cifra verdadeiramente emblemática do pensamento grego em geral, além de ser também do pensamento aristotélico" e continua: "a raiz da qual nasceu e na qual se funda a filosofia (particularmente a Metafísica)". Reale remete ainda na respectiva nota ao desenvolvimento desse conceito no

I. F. Cunha; J. R. B. Arenhart; C. A. Mortari (orgs.) *Epistemologia, Mente, Matemática e Linguagem: Discussões do X Simpósio Internacional Principia*. Florianópolis: NEL/UFSC, 2018, pp. 178–198.

cap. 2 de **A** (982b11 – 983a23). Essa tese — que é a primeira colocada pelo filósofo estagirita na Metafísica — precisa, evidentemente, esclarecer o que se entende por "[todos os] homens (ἄνθρωποι) por natureza (το υ [...] φύσει)", bem como o que se entende por "saber (εἰδέναι)" aí e o que significa dizer que os homens "tendem (ὀρέγονται)" ou "propendem" (Aristóteles 2005, p.1), ou, se quisermos ainda, "desejam", para seguir a tradução tradicional latina da frase: "*Omnes homines natura scire desiderant*" (Aristóteles 1982, p.3).

No decorrer do cap. 1 de **A**, tal afirmação leva em conta que homens *amam* [não egoisticamente] (ἀγάπησις)[1] as *sensações* [αἰσθήσεων], e as amam

> por si mesmas, independentemente da sua utilidade e amam, acima de todas, a sensação *da visão* [(τὸ ὁρ αν)]. Com efeito, não só em vista da ação, mas mesmo sem ter nenhuma intenção de agir, nós preferimos o ver, em certo sentido, a todas as outras sensações. E o motivo está no fato de que a visão nos proporciona mais conhecimentos do que todas as outras sensações e nos torna manifestas numerosas *diferenças* [(φιαφοραί)] entre as coisas. (Reale 2014, pp.3–4. Grifos meus)

Aparentemente, é difícil não concordar que há "numerosas diferenças entre as coisas" (Ross 1997, p.115; Reale 2011, p.6)[2] que reconhecemos pela visão, ainda que seja questionável a afirmação segundo a qual a visão seria "o sentido que dê mais conhecimento" (Reale 2011, p.6; Hartog 2014, pp.290–301),[3] além de ser o "mais amado" e "por si mesmo". Sabendo que essas duas últimas afirmações, em especial, pressupõem (I) que os homens, relativamente aos seus sentidos, apreciam-nos acima de tudo pelo que eles lhes proporcionam de saber, e (II) que, tal como os homens teriam passado a poder amar o saber por ele próprio — i.e. sem que seja por utilidade ou entretenimento (*Metafísica* **A**, cap.1, 981b13-25 e cap.2, 982b17-28) —, igualmente podem assim amar seus sentidos, e principalmente a visão. Contudo, mais nos importa aqui perceber que Aristóteles está reconhecendo em todo homem um *saber* a que tendem, ou pelo menos um tipo dele: *eidénai* (εἰδέναι), o "saber por ter visto" (Schaeffer 1999, pp.642–645); em sentido mais estrito, mas nem sempre tomado assim por Aristóteles. A origem de tal conceito é o verbo eídō (εἴδω), de *ver*, ou, mais do que ver, *observar*. O que Aristóteles associará com o *compreender* (ἐπαΐειν) — i.e. o "saber por ter ouvido"[4] — e dirá que ambos, nos técnicos (como médicos) formam um tipo de *conhecer*, a saber, a *tékhnē* (τέχνη), o qual podemos definir para um sujeito *a*, de modo sucinto, usando multimodalidades, da seguinte maneira:

$\text{Τέχνη}(a) =_{\text{df}} \mathbf{K}_a \exists x(\mathbf{P}Qx \wedge \Diamond \mathbf{F} \neg Qx)$ com fim prático (Reale 2002, pp.8–9).[5]

Onde lê-se: "(Dado Q um fenômeno qualquer) a tékhnē de um sujeito *a* é igual, por definição, ao *conhecimento de a* (com finalidade prática) de que — para um ou mais x — *foi o caso* que Qx, mas *é possível* que *seja (futuramente) o caso* que Qx".

Por conseguinte, podemos considerar tal definição de *saber* como um *conhecimento fraco*, pois — embora por indução e não por demonstração — os técnicos têm *noção* (γν ωσις) de certo fenômeno Qx, não só do *quê* (τό ὅτι), mas também do seu *porquê* (διότι) enquanto *causa* (αἶτιαν) (Moravcsik 2003), e podem, por isso mesmo, aplicar quando possível essas causas para produzir dado efeito em diferentes particulares, tal como um médico o faz para produzir boa saúde em um paciente. Todavia a *inferência técnica* mencionada acima não pode ser captada plenamente em uma dedução formal: primeiro, pela dificuldade de diferenciar qualidades de *conclusões indutivas* — uma melhor que outra — em relação à quantidade de evidências e testemunhas; e segundo, pelo fato de que tal formalização não dá conta de diferir graus da confiabilidade que cada indução possa adquirir dada a praticidade do fim (em vista ao futuro), que algo possa produzir — para entender melhor esse segundo conceito, tomemos um exemplo clássico: "'Todos os corvos observados nasceram antes do ano 2100; logo, todos os corvos vão nascer antes do ano 2100'. Essa indução é obviamente má, mas tem a mesma forma lógica" (Branquinho, Murcho, Gomes 2006, p.416) da indução do médico diante de certos sintomas de uma doença, e até mais ampla numericamente. "Logo, a diferença entre as boas e más induções não depende da forma lógica apenas", mas também, como entende Aristóteles, do quanto uma indução satisfaz sua respectiva *finalidade prática* (τὸ πράττειν).

De toda forma, por saber as causas gerais de certo fenômeno é que o médico (ou *técnico* em geral) é capaz de ensiná-la a outras pessoas. E em geral, como reconhece Aristóteles, o ensinar é uma das características que distingue quem *conhece* (εἰδοτός) — no sentido supracitado — de quem não (*Metafísica* **A**, 1, 981b7–10.). Desse modo também que se diferenciam (pelo mesmo trecho supracitado de **A** da *Metafísica*) o *técnico* daquele que apenas teve *experiência* (particular) de certo fenômeno, pois este segundo não pode ensinar o objeto de sua apreensão. Apreensão a qual, diga-se de passagem, não é completamente passiva em relação ao *sentido* (αἰσθέσις), mas mediada pela memória e pela experiência humanas. A experiência deriva da memória, e várias memórias podem constituir uma única experiência (*Metafísica* **A**, 1, 980b25 e ss.; Biondi 2004, pp.191 e ss.).

Os *empíricos* (ou "experientes") têm por vezes mais sucesso que alguns *técnicos* sem prática (Reale 2011, p.9; Owens 1987, p.4), porque, "[(no caso de um médico[6])] se alguém possui a teoria sem a experiência e conhece o universal [(homem)] mas não conhece o particular que nele está contido [(Cálias ou Sócrates ou qualquer outro indivíduo)], muitas vezes errará o tratamento, porque o tratamento se dirige, justamente, ao indivíduo particular" (Reale 2014, p.5. Acréscimos meus). A despeito disso, julga-se usualmente que o *técnico é mais sábio* (σοϑωτέρους) do que quem apenas algo "reconhece por experiência", justo pelo técnico possuir um saber mais amplo a ser generalizado com relativa precisão a casos variados, enquanto que quem tem experiência tem só um "saber fazer" (*know-how; savoir faire*) (Biondi 2004, pp.173–89). Outrossim, podemos colocar tal diferença com os termos "expertise empírica" (*expertise of the practitioner*), de um lado, e "observação especializada" (*highly specialized observation*), de outro (Blackson 2006). Todavia, ainda mais sábio julga-se ser aquele que possui *conhecimento científico* (ἐπιστήμη) — Aristóteles não o define diretamente em **A** 1, mas remete à "Ética", provavelmente à *Ética Nicomaquéia*, VI, cap. 3, 1139b14-ss. —, resumidamente:

ἐπιστήμη(a) $=_{\mathrm{df}} \mathbf{K}_a \forall x \Box(\mathbf{H}Qx \land Qx \land \mathbf{G}Qx)$ com fim teórico.[7]

Lê-se: "(Dado Q um fenômeno qualquer) a *epistēmē* de um sujeito a é igual, por definição, ao *conhecimento de a* (com finalidade teórica) de que — para todo x —, necessariamente, *sempre foi o caso, é* e *sempre será o caso* que Qx". Conhecimento esse cujo desenvolvimento dá-se por "silogismo científico" (συλλογισμός ἐπισημονικός), i.e.: "demonstração" cujas premissas são "verdadeiras, primeiras, imediatas, mais conhecidas do que a conclusão, anteriores e causas desta" (Berti 2010, pp.352–5; Porchat 2004).[8]

Conclusivamente, podemos dizer que a resposta para *o que é o saber* em **A** 1 não é unívoca, na medida em que o *saber* se diz de diferentes formas — que se expressam em diferentes termos (γν ωσις, εἰδέναι, ἐπιστήμη, ...) —, e em pelo menos dois *modos de conhecer causas: tékhnē* e *epistēmē*. Estas relacionam-se respectivamente a: (a) objetos menos e mais comportados logicamente no tempo; e (b) um conhecimento universal/geral (γν ωσις τ ων καϑόλου) que visa à aplicação prática, de um lado, e, de outro, um conhecimento universal em vista dele mesmo.

Durante esse trajeto, é comum questionarmos a base sobre a qual pode-se afirmar que um saber está acima de outro ou mesmo com que razão atribuímos a tal-e-tal atividade o estatuto de "saber" e, a seu atuante, o de "sábio" (proporcionalmente também "menos ou mais sábio"). E a resposta é algo como uma investigação do que, em 1953, e justamente inspirado na metodologia aristotélica (Ryle 1980, p.37), Gilbert Ryle chama de "uso (*use*) linguístico ordinário" em detrimento de um mero estudo da "utilidade (*usage*)" (Ryle 1980, pp.39–40 e pp.42–3)[9] dos termos linguísticos em geral, na medida em que

> [o]s conceitos de *causa, evidência, conhecimento, erro, deve, pode*, etc., não constituem propriedade privada de nenhum grupo particular de pessoas. Nós os empregamos antes mesmo de começar a desenvolver ou a explorar teorias especializadas. E não poderíamos explorar ou desenvolver tais teorias a menos que já pudéssemos empregar esses conceitos. Eles pertencem aos rudimentos de todo pensamento, inclusive do pensamento especializado. Disso não se segue, porém, que todas as questões filosóficas sejam questões acerca desses conceitos rudimentares. É bem verdade que o arquiteto deve estar atento aos materiais do seu edifício; mas não é apenas a eles que deve prestar atenção.
>
> [...]
>
> Enfatizar a palavra 'utilização' ajuda a evidenciar o importante fato de que a investigação em questão não é uma investigação sobre as outras características ou propriedades de uma palavra, de uma moeda ou de um par de botas, mas exclusivamente uma investigação sobre o que se faz com qualquer uma dessas coisas. (Ryle 1980, pp.40–1)

Mais propriamente, a posição de Aristóteles baseia-se no "método dos *endoxa* (opiniões geralmente aceitas)" — a saber, o estudo das "opiniões reputadas, compartilhadas pela maioria (que se distingue, por sua vez, da multidão "*óipollói*"), ou por um grupo distinto, ou pelos sábios" (Oliveira 2016, p.61). Daí deriva-se que o "plausível (*endoxon*), objeto da opinião comum, é identificado por Aristóteles com o *provável (eikos)*, que, sem ser necessário, contém verdade, pois ele é assim reconhecido pela maioria (*hoi pleitoi*), ou, pelo menos, pelos mais sábios (*hoi sophoteroi; Tópicos* I 10, 104 a8)" (Menezes e Silva 2016, p.51). Como nota Pierre Aubenque (2012, p.243), "a probabilidade representa um progresso em relação à tese simplesmente postulada: a probabilidade não é arbitrária, e a tese provável é infinitamente mais que a simples hipótese". Também aí está implicada uma noção de "sabedoria reconhecida" em detrimento da sabedoria puramente considerada em seu "poder de conhecer" a despeito de ninguém assim considerá-lo além de si próprio, "substituindo, assim, a autoridade da sabedoria pela sabedoria da autoridade" (Aubenque 2012, p.244). Na *Metafísica* vê-se, porém, que a autoridade da sabedoria para comandar, explicar e ensinar já está implicada na "opinião comum" para caracterizar quem é sábio.

Desse modo, Aristóteles reconhece seis acepções que se tem "do sábio" (το υ σοφο υ) em sua comunidade. Resumidamente (*Metafísica.* **A**, 2, 982a5-20): (1) alguém que conheça todas as coisas enquanto seja possível — e não necessariamente de cada coisa individualmente considerada —; (2) referente a quem conhece as coisas mais difíceis ou não facilmente compreensíveis ao homem — daí da sensibilidade em si não ser sapiência —; (3) quem possui maior conhecimentos das causas; (4) aquele que é capaz de ensinar (tais causas) aos outros; (5) já entre as ciências, particularmente, considera-se sapiência em maior grau a que é procurada em vista unicamente do saber; e (6) considera-se de maior grau de sapiência a ciência que é hierarquicamente superior com relação à que é subordinada — basicamente a crença de que "o sábio não deve ser comandado mas comandar, nem deve obedecer a outros, mas a ele deve obedecer quem é menos sábio" (Reale 2014, p.9). Por meio desses seis sentidos, Aristóteles pretende mostrar *dialeticamente*[10] (Smith 1993) como a Filosofia Primeira (ou "Metafísica", se assim quisermos) é a ciência com maior sapiência e quem exerce tal ciência é, portanto, mais sábio (Reale 2011, pp.12–5), mesmo em relação às outras ciências teóricas (*Metafísica.* **A**, 2;[11] **E**, 1, 1026a22 e ss.;), como a Filosofia Segunda (Física, suas subáreas: Psicologia etc.) e a Matemática. Isso dito, investigaremos a seguir a proveniência desses sentidos de sábio.

Podemos reconhecer o método de Aristóteles ao consultarmos o *Dictionnaire Grec Français* de Bailly (2000, p.1773) a respeito da palavra "*sophós* (σοφός)" (sábio) — palavra amplamente usada por Ésquilo, Platão, Sófocles, Heródoto, Eurípides, Xenofonte, entre outros —, vemos que o **primeiro grupo de sentidos** é justamente o de uma *habilidade*, particularmente nas artes mecânicas, tratando-se de poetas, adivinhos, médicos, etc.[12] Indo ao encontro, portanto, da concepção de *arte/técnica* de Aristóteles e seu poder preditivo, bem como dos sentidos 3 e 4 de *sábio* esboçamos acima. Já no **segundo grupo de sentidos** registrado no Bailly, encontramos a ideia de (i) *prudente, sábio*, referindo-se a coisas, coisas do sentido, sabedoria, etc.; (ii) *iniciado na sabedoria, quem está sabendo, instruído*, falando-se de filósofos, os sete sábios, etc. — ainda nesse sentido, de modo irônico, pode-se querer dizer *obscuro* ou *profundo* —; e (iii) engenhoso, fino/bom, astuto.[13] Nesse segundo grupo, nota-se que a proposta de Aristóteles de separação entre *sabedoria prática* (ética) e *sabedoria teórica* (em vista do saber em si mesmo) advém de (i), e a *sabedoria teórica* particularmente (tal como Aristóteles restringe na *Metafísica*) deriva da acepção 5 de sábio do parágrafo anterior; ademais, também se percebe que a acepção 2 de sábio (lá mencionada) remete ao sentido (ii).

Faltam, assim, as acepções 1 e 6 de sábio. A primeira (1) pode ser entendida a partir de um acréscimo superlativo de 3, mas a acepção 6 é tipicamente platônica (particularmente do Livro VI da *República*), porém que provavelmente se expandiu tanto nas aulas da *Academia* de Platão quanto pelos seus diálogos, já que circulavam publicamente (eram obras *exo-téricas*), diferente das que nos restaram de Aristóteles (*eso-téricas*), restritas ao Liceu (Reale 2015, p.9).

Por conseguinte, consideremos, então, a *admiração/espanto/perplexidade* (ϑα υμα) que os homens em geral têm em relação a certos fenômenos. O *thaûma*, tal como o considera Aristóteles, está diretamente relacionado a algo que um sujeito conhece ou desconhece acerca de um objeto e, portanto, sua expectativa a seu respeito. Ou seja (*Metafísica*, **A** 2, 983a11-21):

> todos começam por admirar-se de que as coisas sejam tais como são, como, por exemplo, diante de marionetes que se movem por si nas representações, ou diante das revoluções do sol e da incomensurabilidade da diagonal com o lado de um quadrado. Com efeito, a todos os que ainda não conheceram a razão disso, causa admiração que entre uma e outro não exista uma unidade mínima de medida comum. Todavia é preciso chegar ao estado oposto e também melhor, conforme afirma o provérbio. E assim acontece, efetivamente, para ficar nos exemplos dados, uma vez que se tenha conhecido a causa: nada provocaria mais admiração num geômetra do que se a diagonal fosse comensurável com o lado. (Reale 2014, pp.13–4).

Com esse exemplo, percebemos que o *admirar* ou *thaumázein* está relacionado à situação humana diante de uma *aporia* e "nós a encontramos associada, ao começo do livro **A** da *Metafísica*, à experiência fundamental da perplexidade: 'estar em aporia e se espantar é reconhecer sua ignorância' (982b17)" (Aubenque apud Oliveira 2016, p.73). Por conseguinte, uma vez conhecidas as razões pelas quais tal-e-tal fenômeno deve se comportar dessa maneira percebida — por mais estranha que seja, como de um *número irracional* (a saber: $\sqrt{2}$) a partir da diagonal de um quadrado de 1 por 1 (Heath 1921, p.168)[14] —, o *thaûma* desaparece em seguida. Desde aí só será espantoso se, de repente, tal coisa não ocorrer como previsto, o que supostamente, porém, nunca acontecerá, dado que se chegue ao conhecimento-mesmo de algo imutável — como um fenômeno matemático, cuja precisão seria permissível dada sua imaterialidade (Elzinga 1974, p.37).

Falibilidade do saber e saber da falibilidade

Uma ideia muito semelhante à de Aristóteles encontramos em *A Análise da Matéria [The Analysis of Matter]* (1927) de Bertrand Russell, mas com algumas ambições diferentes. Analisaremos a seguir particularmente algumas concepções introduzidas no capítulo XIV da Parte 1 e devidamente explicadas entre os caps. XV-XX da Parte 2.

No capítulo XIV da Parte 2 de *A Análise da Matéria*, Russell mostra uma das principais características que diferenciam sua concepção de Física daquela que encontramos em Aristóteles. Se na *Metafísica* encontramos a dificuldade de aplicação da matemática nos estudos físicos devido à materialidade dos fenômenos naturais em contraste com os matemáticos (*Metafísica*, α 3, 995a 15 e ss.), em Russell uma possível solução para o problema esboça-se pela ideia de que a Física, enquanto ciência, não estuda os fenômenos físicos enquanto percebidos no "senso comum" (*common sense*), mas sim enquanto abstrações desses, i.e.: *the abstractness of physics*.

Tendo em conta a epistemologia de Locke (Russell 2007, p.132), Russell considera que a Física até pouco tempo atrás ainda tratava de "qualidades primárias" (*primary qualities*) relativamente próximas das que percebemos ordinariamente. Contudo, isso não é mais o caso na Física contemporânea. Como exemplo, Russell toma o caso da experiência que temos da luz na visão — o que é oportuno de comparar com Aristóteles:

> Quando nós "vemos" [("see")] um objeto, parece-nos [(we seem)] imediatamente termos conhecimento de algo exterior ao nosso próprio corpo. Mas a física diz que um processo complicado começa a partir do objeto externo, viaja através da região intermediária, e finalmente alcança o olho. [. . .] Mas sem nos preocuparmos com o que acontece depois que a luz alcança o olho, é evidente que o que o físico tem a dizer é destrutivo da noção senso-comum [(common-sense)] de "ver" [("seeing")]. [. . .] Os dados da visão analisados tanto quanto possível, resolvem-se em formas coloridas. Mas o análogo físico de uma cor é um processo periódico de uma certa frequência relativa ao olho do observador. O mundo físico, parece [(seems)] natural inferir, é destituído de cor. [. . .] O que acontece no objeto em si [(object itself)], se brilha devido sua própria luz, é o tipo

> de coisa considerada na teoria de Bohr: um salto súbito de um elétron a partir de uma órbita para outra. Isso é muito diferente de uma sensação de (digamos) vermelho. [...] Quando dizemos que eles estão "pulando", nós estamos dizendo algo muito pictórico. O que nós queremos dizer é que eles possuem uma qualidade desconhecida chamada "energia", a qual é uma função conhecida de certo número de inteiros pequenos, e que um ou mais desses inteiros mudou subitamente seus valores. (Russell 2007, pp.133–4. Tradução minha).

Comparativamente à abordagem aristotélica, é importante salientar que nesse caso, como em outros, Russell (2007, p.135) reconhece que, na interação humana com os fenômenos, a "imaginação" (*imagination*), "as soon as we are off your guard", cumpre um papel fundamental, e não secundário, nas impressões de continuidade queira dos "objetos sensíveis" (*sensible objects*), em particular, queira dos "objetos científicos" (*scientific objects*), em geral, de modo que possamos reconhecer o "'mesmo'" ("*same*") fenômeno duas ou mais vezes. Por outro lado, a relação entre "memória" (*memory*), "sensação" (*sensation*) e "experiência" (*experience*) diante da percepção de um "objeto" ("*object*") e sua permanência é parcialmente semelhante à abordagem de Aristóteles (Russell 2007, pp.142–3, p.149 e pp.150–1). Russell, porém, parece ter formulado tal relação tendo em vista as críticas de Hume sobre a causalidade, mas que ele interpretou como crítica à indução (Monteiro 2001, pp.55–72).

Como não se trata do problema central dessa pesquisa, basta que entendamos aqui a *imagination* como uma habilidade de um indivíduo qualquer de reinventar e ensaiar *situações possíveis* mediante imagens mentais segundo certo hábito ou segundo um experimento mental determinado. Ainda assim, esse tratamento simples requer no mínimo um par de explicações (Blackburn 1997, p.62 e p.197). Em primeiro lugar, deve-se salientar que *imagination* em Russell opõe-se claramente a uma mera "fantasia"; na medida em que o primeiro processo diga respeito a um uso disciplinado e criativo das *situações possíveis*, enquanto que o segundo diga respeito a uma atividade inútil, embora esteticamente relevante nas artes. O primeiro a propor essa diferença na Inglaterra foi provavelmente o poeta Samuel Coleridge (1772-1834), influenciado pelo romantismo e pela filosofia kantiana. Daí é importante notar uma segunda coisa: o papel ensaístico da imaginação para dar respostas a certos problemas possui suas limitações e nem sempre o que é difícil de imaginar é, por isso, impossível: "conseguimos imaginar que fomos Napoleão, mas não que o espaço é esférico; no entanto, uma reflexão mais aprofundada deve nos levar a pensar que a primeira suposição é impossível, mas que a segunda é sem dúvida possível" (Blackburn 2007, p.197). Esse tipo de raciocínio tem de ver com a diferença entre a noção espacial psicológica, que Russell admite poder ser montada através de figuras, enquanto que é inconcebível que o espaço (fisicamente considerado) surja de figuras (Russell 2007, pp.144–5).

Dito isso, Russell considera que, não obstante as proposições da ciência virem da percepção e imaginação em um *monismo neutro* (Russell 2007, p.141) como as proposições do *common sense*, essas formas de interpretar se diferenciam pelo poder de abstração (Russell 2007, pp.137–8), na medida em que "both involve expectations, but those resulting from science are more accurate" (Russell 2007, p.142). Sobre o monismo neutro (Blackburn 1997, p.254 e pp.347–8), em outro trabalho, contido em *Logic and Knowledge – Essays* (1950), Russell explica melhor essa ideia:

> "Monismo neutro" — enquanto oposto a monismo idealista e monismo materialista[15] — é a teoria em que as coisas comumente tidas como mentais e as coisas comumente tidas como físicas não diferem com relação a qualquer propriedade intrínseca possuída por um conjunto e não possuída pelo outro, mas diferem unicamente com relação ao arranjo e ao contexto. A teoria pode ser ilustrada por comparação a uma lista postal, na qual os mesmos nomes aparecem duas vezes; uma vez na ordem alfabética e outra vez na ordem geográfica; podemos comparar a ordem alfabética com a mental, e a ordem geográfica com a física. [...] Os "pensamentos" não são diferentes em substância das "coisas"; o fluxo de meus pensamentos é um fluxo de coisas, notadamente das coisas em que comumente se diz que estou pensando; o que faz com que ele seja chamado um fluxo de *pensamentos* é simplesmente serem as leis de sucessão diferentes das leis físicas. Em minha mente, César pode chamar Carlos Magno, enquanto que no mundo físico os dois estão muitíssimo separados. A dualidade total da mente e da matéria, de acordo com esta teoria, é um erro; existe uma única espécie de *estofo (stuff)* do qual o mundo é feito, e chama-se este estofo de mental num arranjo, de físico no outro.[16]
>
> [...] Mach diz:
>
> "[...] Não é o objeto, mas a direção de nossa investigação, que é diferente nos dois domínios"
>
> (Russell 1978, pp.24–5. Traduções de Pablo Rubén Mariconda).

É fácil compreender esse conceito também na comparação das duas noções de cor apresentadas anteriormente. Para Russell (2007, p.149), porém, o *common sense* é, "in most respects", um "realismo ingênuo" (*naive realism*), i.e.: "it believes that, as a rule, our perceptions show us objects as they really are", enquanto que a "perspectiva científica" (*scientific outlook*) não pode partir de que haja o "mundo exterior" quando justamente pretende-se chegar em seus estados (Russell 2007, p.178). Daí da ciência ter avançado no séc. XVII precisamente quando da dissociação entre *perception* e *matter* (Russell 2007, p.156), entre outras divisões abstraídas na experiência concreta. Evidentemente, portanto, o avanço e a autonomia da ciência conquistam-se, entende Russell, pela abstração da *experiência comum*. Vale lembrar que Russell (2007, pp.180–1) reconhece algumas coisas percebidas de modo imediato pelo humano: (i) formas coloridas; (ii) movimentos espaço-temporais; (iii) lembranças; (iv) expectativas. De toda forma, a efetividade preditiva da *experiência comum* mostra-se através da manipulação das entidades abstratas de forma a repercutir nos estados de coisas daquela *experiência comum* a que se retorna mediante os experimentos e técnicas da ciência. Por conseguinte, de um lado, isso pressupõe que o "most important postulate of science is induction" (Russell 2007, p.107), bem como a validade dessa indução. De outro lado, isso também permite classificar a "cientificidade" das disciplinas pela abstração de seus fenômenos, diferenciando aquelas que são mais precisas das que são menos (Russell 2007, p.137), e, por consequência, as que se encontram mais ou menos próximas do *common sense*. Percebe-se, assim, que a posição de Russell nessa obra quanto à causalidade e à *empiria* assemelha-se à de seu discurso proferido em 1914 na Aristotelian Society e à de seu discurso em *Mysticism and Logic and Other Essays* (originalmente de 1917). Nessa última, aliás, o princípio de causalidade é tido não "*a priori* ou auto-evidente ou uma 'necessidade do pensamento'. Nem é, em nenhum sentido, uma premissa da ciência, mas uma generalização empírica a partir de certo número de leis gerais que são, a seu turno, generalizações empíricas" (Russell 1981, p.142).

Todavia, outra diferenciação possível entre as ciências, como reconhece Russell (2007, p.169 e ss.), dá-se entre a lógica e matemática pura, de um lado, e as ciências empíricas — dentre as quais, notadamente a Física —, de outro. Essa diferença dá-se pela distinção entre uma *construção a partir de intuições intelectuais* e uma *construção a partir de "dados dos sentidos" (sense-data)* (ver Prichard 1915, pp.146–8). Russell acredita que essa separação se sustenta pela "old distinction of analytic and synthetic propositions" (Russell 2007, p.172), tal como ele as entende, ou seja, basicamente afirmando que toda proposição analítica se pode deduzir unicamente da lógica. Mas qual seria a qualidade comum das proposições que se deixam deduzir das premissas da lógica? Diz Russell:

> A resposta à essa questão dada por Wittgenstein em seu *Tractatus Logico-Philosophicus* parece para mim a correta. Proposições que formam parte da lógica, ou que podem ser provadas por lógica, são todas *tautologias* — i.e. elas mostram que certos diferentes conjuntos de símbolos são diferentes caminhos de dizer a mesma coisa, ou que um conjunto diz parte do que outro [conjunto] diz. Suponha que eu diga: "é o caso que p implica q, então não-q implica não-p." Wittgenstein afirma que "p implica q" e "não-q implica não-p" são meramente diferentes símbolos para uma proposição: o fato que faz um verdadeiro (ou falso) é o mesmo fato que faz o outro verdadeiro (ou falso). Tais proposições, portanto, são realmente concernentes aos símbolos. Podemos saber sua verdade ou falsidade sem estudar o mundo exterior, porque elas são somente concernentes a manipulações simbólicas. Eu acrescentaria — embora aqui Wittgenstein possa dissentir — que toda matemática pura consiste de tautologias no sentido acima. Se isso é verdade, então obviamente empiricistas tais como J. S. Mill estão errados quando dizem que nós acreditamos que 2+2=4 porque encontramos tantas instâncias dessa verdade que nós podemos fazer uma indução por simples enumeração que tenha pequena chance de estar errada. [...] [N]ossa certeza concernente às simples proposições matemáticas não parece análoga à nossa certeza de que o sol nascerá amanhã. Não quero dizer que nós sentimos mais segurança de uma que de outra, embora talvez devesse ser assim; quero dizer que nossa segurança parece ter uma fonte diferente. (Russell 2007, pp.171–2. Tradução minha)

Com isso, Russell parece querer dizer que toda tautologia o é em virtude de sua forma, o que torna áreas tipicamente analíticas, como a lógica e a matemática pura, disciplinas puramente formais cujo objeto de estudo não passa de relações entre símbolos. As ciências empíricas, por sua vez, trabalham com "proposições empíricas" (*empirical propositions*) de dois tipos: (I) sobre a particularidade factual; e (II) sobre as leis da indução dos fatos. Esse segundo diz respeito notadamente "in an advanced science such as physics" (Russell 2007, p.176), enquanto que em "history and geography, the empirical facts are, at present, more important than any generalizations based upon them. In Theoretical physics, the opposite is the case" (Russell 2007, p.177). É claro que isso não leva a crer que, em ciências cujo tipo I de proposições é mais relevante, testemunhas de terminado evento histórico tenham conhecimento dele, do ponto de vista científico, pois "expectar" ou "ter a memória imediata" de algo não implica "saber sobre o assunto" (Russell 2007, pp.180–1). "The dog listening to 'his master's voice' on the gramophone may serve as an illustration. He thinks he perceives his master, but in fact he only perceives a noise" (Russell 2007, pp.181–2). Daí se segue a necessidade de "justificação das crenças" (Russell 2007, p.183), o que pode ser feito por uma comparação entre reconstituições perceptivas de diferentes *perceptos*, assim:

> Dentro do mundo solipsista, encontramos meios de coletar grupos de perceptos e de chamar o grupo um objeto físico; mas podemos agora enriquecer nosso grupo enormemente. Um número de pessoas sentadas próximas umas das outras pode desenhar o que elas veem, e podem comparar as pinturas resultantes; existirão semelhanças e diferenças. [....] Nesse caminho, parece que o mundo de cada pessoa é parcialmente privado e parcialmente comum. [...] É a ausência de identidade que nos faz rejeitar o realismo ingênuo do senso comum; é a semelhança que nos faz aceitar a teoria de uma origem comum para percepções simultâneas semelhantes. (Russell 2007, p.207. Tradução minha).

Claro, esse raciocínio leva em conta que se, por exemplo, um número generalizado de pessoas olha para uma moeda, a despeito de cada uma perceber algo diferente, em geral (ou a maioria) percebe a causa de sua impressão na moeda (cf. Russell 2007, pp.192–3). Todavia, as inferências acerca das entidades inobserváveis (como as frequências de ondas) em relação a um certo fenômeno — por exemplo, o da visão — são inferências tipicamente científicas, e não do *common sense*. Ademais, as leis (científicas) relativas a essas inferências, diz Russell (2007, p.191), no geral não permitem exceções diante da *impregnação teórica*[17] nos experimentos, diferindo novamente das "regras do senso comum" (*common-sense rules*), ainda que em ambas resida um processo indutivo. Com efeito, e em parte, o projeto epistemológico de Russell em *Análise de Matéria* é análogo ao que escreveu Silvio Chibeni (2001, p.136) quanto ao *Its Scope and Limits* (1948): "tentar salvar tanto quanto possível o mundo real do senso comum, corrigido e complementado pela física". Contudo, sua perspectiva logicista do início do século (Chibeni 2001, pp.132–5) não é aqui de todo abandonada. Por um lado, Russell considera ainda que a indução é inadequada para os filósofos (pois seu poder preditivo não se justifica logicamente) (Chibeni 2001, p.128 e p.144).[18] Por outro lado, considera adequada, para as ciências empíricas (Russell 2007, pp.194–5), a indução a partir de um estudo comparativo experimental (*by acquaintance*) tal como exemplificado ordinariamente acima. E, se não se pode alcançar uma "permanência" dos objetos inobserváveis da ciência por meio da indução, ao menos chega-se por vezes a uma "quase-permanência" (*quasi-permanence*), para utilizar o conceito de um de seus comentadores, A. C. Grayling (2003, p.470). Conclusivamente, e seguindo o esquema de Thomas Baldwin (2003, p.241), verificamos que o "knowledge" bifurca-se entre o "of 'things'" e o "of truths": o primeiro pode ser "by acquaintance" ou "by description"; o segundo, "intuitive" ou "derivative".

Por fim, resta-nos perguntarmos sobre o lugar da "surpresa" (*surprise*) na presente empresa de Russell (2007, pp.184–5) em comparação com aquela de Aristóteles que esboçamos no tópico anterior. Russell (2007, pp.153–5) considera que há uma validade indutiva que pode ser reconhecida na prática humana, enquanto "*practice* of induction", que ocorre por associação: dado que um estímulo (*stimulus*) S provoque uma reação (*reaction*) R, e S' provoque R', temos que ambas (S e S') juntas podem dar as reações R e R', porém, depois de um longo hábito desse comportamento, bastará apenas S para ter as reações R e R', em outras palavras:

$$\begin{array}{c} \underline{S \to R} \\ S' \to R' \\ (S \wedge S') \to (R \wedge R') \\ \vdots \\ S \to (R \wedge R') \end{array}$$

Dado esse procedimento, a surprise aparece quando aparece um "erro" ("*error*") no lugar do que habitualmente se esperaria de um certo fenômeno induzido, o que, em contraste, seria o "correto" ("*correct*"). Nesse ponto, o *common sense* está fadado ao erro no âmbito pré-intelectual. Com efeito, Russell cuida para distinguir "*correct*" de "verdade" ("*truth*") — ambas com aspas —, sendo essa última restrita ao estado de coisas intelectuais que os cientistas estudam — sejam aquelas que lidam com coisas atemporais, sejam as que estudam coisas temporalmente localizadas: "[a] Greek could know the multiplication table as well as we do, but he could not know the biography of Napoleon" (Russell 2007, p.186).

Com efeito, e como em Aristóteles, parece natural supor que não faz sentido para Russell que se tenha *surprise* de $\sqrt{2}$ ser incomensurável ou de que haja infinitos maiores que outros em teoria dos números (Mortari 2016, pp.82–7). E isso porque, uma vez que se compreenda os princípios mediante os quais tais conclusões só podem ser essas e não outras, elimina-se a possibilidade do "erro" e encerra-se o *saber sobre* a questão. Dito isso, Russell percebe que não podemos incluir a noção de senso comum de uma "coisa" como parte do que conhecemos, mas considera que se possa admitir como parte do que conhecemos as *sensible qualities* que nós analisamos a partir da "coisa" sem nunca nos conduzir ao erro (cf. Russell 2007, p.186). Desse modo, a *surprise* em Russell tem em comum com o *thaûma* de Aristóteles o fato de se manifestar quando observamos um erro naquilo que nos parecia ser o "correto comportamento" do fenômeno observado. E também tem em comum o fato de que a *explicação científica* sacia essa *surpresa/curiosidade* de modo tal que nos impede de nos voltar ao fenômeno em busca de outra explicação. Contudo, a *surprise* difere do *thaûma* na medida em que o primeiro conceito, do ponto de vista de Russell, *pode ser* suprimido abstratamente por indução nas ciências empíricas, já o *thaûma*, em Aristóteles, não, dado que a indução não pode garantir que uma mesma consequência sempre ocorra no futuro e, nesse sentido, os "estudos empíricos", por assim dizer, estarão em contínuo desenvolvimento em relação às anomalias/erros descobertas que *espantam* os estudiosos da área.

Algumas considerações críticas

Tanto Aristóteles quanto Russell, devemos notar, não consideram que conclusões bem acertadas nas ciências formais, como a lógica e a matemática, e talvez mesmo da filosofia teórica, possam gerar *surprise* ou *thaûma* após demonstrarem a resolução dos respectivos problemas. Normalmente o argumento de ambos para tal apela para a natureza abstrata e/ou universal dessas investigações de modo que seus objetos são precisos e permanentes. Susan Haack, em *Filosofia das lógicas* (2002, pp.303–5) — após ter assistido ao avanço e à proliferação das lógicas não-clássicas, em especial as heterodoxas (como as que excluem a *lei do terceiro excluído*), e inspirada nas críticas de Peirce (2002, p.305 e p.307) —, ataca esse tipo de argumento:

> Primeiro, ele depende do uso de 'falível' como um predicado, não de pessoas, mas de proposições: um predicado que signifique, presumivelmente, 'possivelmente falso'. Ora, é bem verdade que se as leis da lógica são necessárias, elas não são possivelmente falsas, e, portanto, neste sentido, elas são

> 'infalíveis'. Mas a tese de que algumas proposições são possivelmente falsas (que chamarei de 'falibilidade proposicional') é uma tese lógica desinteressante, que não deveria ser confundida com a tese epistemológica interessante de que nós estamos sujeitos a sustentar crenças falsas (que chamarei de 'falibilismo de agente'). E o falibilismo proposicional não acarreta o falibilismo de agente. [...] Segundo, ao argumento é dada uma plausibilidade enganadora, pela facilidade com que a tese de que algumas proposições são possivelmente falsas é confundida com a tese de que algumas proposições são contingentes. Se as leis da lógica são necessárias, nossas crenças lógicas não serão, de fato, contingentes, mas ou necessariamente verdadeiras, ou necessariamente falsas. Entretanto, 'possivelmente falsa' não deveria ser equiparada a 'contingente', pois crenças *necessariamente falsas* são possivelmente falsas.

Outro argumento comum em Aristóteles e Russell é o do apelo à *autoevidência* intuitiva de certos princípios lógicos, o que, porém, historicamente, se considerarmos afirmações de Kant e Frege a respeito da lógica, facilmente percebemos que "uma proposição pode ser autoevidente, mas falsa, ou então [...], ainda que seja verdade que se uma proposição é autoevidente, então ela é, de fato, verdadeira, não se tem nenhuma maneira certa de dizer quando uma proposição é realmente autoevidente" (Haack 2002, p.307). E, por fim, há o argumento de que a lógica, por exemplo, procede *analiticamente* — como vimos claramente em Russell —, entretanto, ainda que se admita que há algo "verdadeiro em virtude do significado" — o que é duvidoso não só por causa do "significado", mas também por causa do "em virtude de" (como insistiu Quine apud Haack 2002, p.307) —, "isto garantiria a correção de nossas crenças lógicas somente se tivermos *também* alguma maneira segura de estarmos certos de ter compreendido corretamente um candidato a ser verdade lógica" (Haack 2002, p.307), ou seja, trata-se estruturalmente de um dos argumentos contra a força epistemológica suposta pela "autoevidência" de certos enunciados.

Com tais considerações, somos tentados a pensar que o espanto, admiração e curiosidade que um agente epistêmico tem diante de seu "objeto" está para além do fato desse objeto ser necessário ou contingente, preciso ou impreciso, permanente ou mutável. Não teriam os criadores das geometrias não-euclidianas ou os dos sistemas de lógica paraconsistente tido *surprise* e *thaûma* ainda diante de conclusões já "bem acertadas", talvez mesmo por assim estarem sendo consideradas? Supor um limite da experiência de tal "surpresa" significa supor que em algum momento as respostas satisfarão definitivamente os agentes epistêmicos, encerrando sua relação epistêmica com tais objetos e limitando-os a relações de outro tipo (como de utilidade). No entanto, se eu estiver certo, até o momento parece mais seguro crer que esses tipos de experiência humana (*suprise* ou *thaûma*), pelo contrário, não tendem inevitavelmente a um limite dentro de uma relação epistêmica, mas sua propriedade fundamental é a de abrir *possibilidades de saber* em relação à curiosidade despertada. Isso dito, duas coisas devem ser levadas em conta. Por um lado, essas possibilidades, como é claro supor no caso das geometrias não-euclidianas e lógicas heterodoxas, por vezes passam despercebidas — queira pelo *common sense*, queira pela *maioria* ou os *mais reputados* — e as respostas que "satisfazem" a curiosidade de alguns não "satisfazem" a de outros; e, por outro lado, não parece razoável que em nenhum grau de ciência ou saber haja satisfação garantida de um problema abordado. Assim, após as críticas dos modelos de Aristóteles e Russell, delimitar com precisão essa experiência da motivação epistêmica deve ser matéria de um novo trabalho.

Referências

Aristóteles. 1928. *The Works of Aristotle*. Volume I: Categoriae and De Interpretatione (by E. M. Edghill); Analytica Priora (by A. J. Jenkinson); Analytica Posteriora (G. R. G. Mure); Topica and De Sophisticis Elenchis (W. A. Pickard-Cambridge). London: Oxford University Press.

———. 1982. *Metafísica de Aristóteles*. Edición trilíngue por Valentín García Yebra. Edición griega adaptada de W. D. Ross; Traducción latina de Guillermo de Moerbeke (libros I-XII) y de Besarión (libros XIII-XIV); y Trad. española de Valentín García Yebra. Madrid.

———. 1987. *Ética a Nicômaco; Poética*. Seleção de textos de José Américo Motta Pessanha. Ética a Nicômado: trad. de Leonel Vallandro e Gerd bornheim da versão inglesa de W.D. Ross; Poética: trad, comentários e índices analítico e onomástico de Eudoro de Souza. (Coleção 'Os Pensadores'; Volume II). São Paulo: Nova Cultural.

———. 1997. *Aristotle's Metaphysics. Volume I. A revised text with introduction and commentary by W. D. Ross*. Oxford: Oxford University Press.

———. 2004. *Posterior Analytics II. 19. Introduction, Greek Text, Translation and Commentary Accompanied by a Critical Analysis by Paolo C. Biodi*. Canada : Les Presses de l'Université Laval.

———. 2005. *Metafísica: livros I, II, III e IV*. Trad. de Lucas Angioni. São Paulo: Campinas, IFCH/UNICAMP.

———. 2014. *Metafísica. Edição bilíngue de Giovanni Reale. Volume II: Texto grego com tradução ao lado*. Tradução de Marcelo Perine a partir da tradução do grego de Giovanni Reale. São Paulo: Edições Loyola,.

Aubenque, P. 2012. *O Problema do Ser em Aristóteles: ensaio sobre a problemática aristotélica*. Tradução e revisão técnica de Cristina de Souza Agostini e Dioclézio Domingos Faustino. São Paulo: Paulus.

Baldwin, T. 2003. From Knowledge by Acquaintance to Knowledge by Causation. In: N. Griffin (ed.) *The Cambridge Companion to Bertrand Russell*, pp.420–48. Cambridge: Cambridge University Press.

Baylly, A. *et al*. 2000. *Dictionnaire Grec Français*. Paris: Hachette.

Berti, E. 2010. *Novos Estudos Aristóteles I: Epistemologia, lógica e dialética*. Trad. de Élcio de Gusmão Verçosa Filho. São Paulo: Loyola.

Blackburn, S. 1997. *Dicionário Oxford de filosofia*. Consultoria da edição brasileira por Danilo Marcondes e tradução de Desidério Murcho et al. Rio de Janeiro: Zahar.

Blackson, T. A. 2006. Induction and Experience in "Metaphysics" 1.1. *The Review of Metaphysics* **59**(3): 541–52.

Cathala, M. R.; Spiazzi R. M. 1950. *S. Thomae Aquinatis In duodecim libros Metaphysicorum Aristotelis expositio*. Turim.

Chibeni, S. S. 2001. Russell e a noção de causa. *Principia: revista internacional de epistemologia* **5**(1-2): 123–47.

Branquinho, J.; Murcho, D.; Gomes, N. G. 2006. *Enciclopédia de termos lógico-filosóficos*. São Paulo: Martins Fontes.

Elzinga, A. 1974. Some Remarks on a Theory of Research in the Work of Aristotle. *Zeitschrift für allgemeine Wissenschaftstheorie / Journal for General Philosophy of Science* **5**(1): 9–38.

Euclides. 2009. *Os Elementos*. Trad. de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP.

Grayling, A. C. 2003. Russell, Experience, and the Roots of Science. In: N. Griffin (ed.) *The Cambridge Companion to Bertrand Russell*, pp.449–74. Cambridge: Cambridge University Press.

Haack, S. 2002. *Filosofia das lógicas*. Trad. de Cezar Augusto Mortari e Luiz Henrique de Araújo Dutra. São Paulo: Editora UNESP.

Hartog, F. 2014. *O Espelho de Heródoto: Ensaio sobre a representação do outro*. Tradução de Jacyntho Lins Brandão. Belo Horizonte: Editora UFMG.

Heath, T. 1921. *A History of Greek Mathematics. Volume 1: From Thales to Euclid*. Oxford: Oxford University Press.

Heráclito. 1980. *Fragmentos: origem do pensamento*. Ed. bilíngue com tradução, introdução e notas de Emmanuel Carneiro Leão. (Coleção 'Diagrama'). Rio de Janeiro: Tempo brasileiro.

Menezes E Silva, C. M. 2016. O Conceito de Doxa (Opinião) em Aristóteles. *Linha D'Água* (Online) **29**(2): 43–67.

Hintikka, J. 1973. *Time and Necessity: Studies in Aristotle's Theory of Modality*. Oxford: Oxford University Press.

Monteiro, J. P. 2001. Russell and humean inferences. *Principia: revista internacional de epistemologia* **5**(1-2): 55–72.

Moravcsik, J. M. 2003. What Makes Reality Intelligible? Reflections on Aristotle's Theory of Aitia. In: *Aristotle's Physics: A Collection of Essays*, pp.31–47. Oxford.

Mortari, C. A. 2016. *Introdução à lógica*. São Paulo: Editora Unesp.

Oliveira, M. F. 2016. O "método dos endoxa" interpretado à luz de Tópicos I 1, 100b20-22. *Filogense* **9**: 61–75.

Owens, J. 1987. Aristotle's Notion of Wisdom. *Apeiron : A Journal for Ancient Philosophy and Science* **20**(1): 1–16.

Platão. *A República*. Introdução, tradução e notas de Maria Helena da Rocha Pereira. Portugal, Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

———. 1972. *O Banquete; Fédon; Sofista; Político. Diálogos*. Traduções de José Cavalcante de Souza (O Banquete) e Jorge Paleikat com João Cruz Costa (Fédon, Sofista, Político). Coleção Os Pensadores. São Paulo: Abril Cultural.

Porchat Pereira, O. 2004. Sobre a degola do boi, segundo Aristóteles: Réplica a Lucas Angioni. *Analityca: revista de filosofia* **8**(1): 89–142.

Prichard, H. A. 1915. Mr. Bertrand Russell on our Knowledge of the External World. *Mind* **24**(94): 145–85.

Reale, G. 2011. *Metafísica. Volume III: Sumários e comentário*. Tradução de Marcelo Perine. São Paulo: Edições Loyola.

———. 2015. *História da Filosofia Grega e Romana, vol. IV: Aristóteles*. Trad. De Henrique Cláudio de Lima Vaz e Marcelo Perine. 3ª edição. São Paulo: Edições Loyola.

Russell, B. 1972[1914]. *Our Knowledge of the External World*. London: Geroge Allen & Unwin.

———. 1978. *Ensaios Escolhidos*. Seleção de Hush Mattew Lacey e Tradução de Pablo Rubén Mariconda com consultoria de Luís Henrique dos Santos. São Paulo: Abril Cultural.

———. 1981[1917]. *Mysticism and Logic and Other Essays*. Totowa, NJ: Barnes and Noble Books.

———. 2007[1927]. *The Analysis of Matter*. England, Nottingham: Spokesman.

Ryle, G. A Linguagem Ordinária. In: Ryle, G.; Austin, J. L.; Quine, W. v. O.; Strawson, P. F. *Ensaios*. Vários tradutores. São Paulo: Abril Cultural.

Schaeffer, D. 1999. Wisdom and Wonder in "Metaphysics" A : 1-2. *The Review of Metaphysics* **52**(3): 641–56.

Smith, R. 1993. Aristotle on the Uses of Dialetic. *Synthesis* tbf96(3): 335–58.

Notas

[1]Note que aqui o sentido de "amor" difere daquele ligado à paixão-érōs (relativo ao Ἔρως, seja como deus ou como palavra), por exemplo, como tratado no *Banquete* de Platão. Depois, também difere da amizade-philía (φιλία) relativa à identificação e empatia tal como tratada na *Ética Nicomaquéia* (livros VIII e IX).

[2]Nesse caso, dado o caráter propedêutico do livro **A**, é provável que Aristóteles não use aqui o sentido específico de "diferença [φιαφοραί]" referente aos livros **Z** e **H** da *Metafísica* — para tratar da substância —, mas, sim refira-se à figura, grandeza, movimento e número das coisas tais como podem ser distinguidas pela visão, e também não apenas à diferença entre cores que vemos nas coisas.

[3]Trata-se de uma opinião comum na Grécia Clássica e Arcaica, entre outros filósofos, como Platão, Xenófanes e Heráclito, médicos e historiadores — Hipócrates, Tucídides, Heródoto — e também entre os poetas, nesse caso, aplicado à mitologia e ao saber ético e prático.

[4]O primeiro sentido do verbo ἐπ-αΐω é "prestar ouvidos", ou seja, compreender; do verbo ἀΐω, ouvir.

[5]Seguindo Reale, os que possuem τέχνη devem ser entendidos como aqueles que possuem certo conhecimento universal, preferimos dizer "geral", ou ainda "não-individual", e aplicado à prática, mesmo para ser coerente com a menção da Ética que Aristóteles faz em 981a25 a seu respeito.

[6]Outros exemplos de técnico, em sentido genérico da Grécia Clássica, seriam: músico, pintor, arquiteto, estrategista militar, navegador..., designa "toda profissão prática baseada em determinados conhecimentos especializados", seguindo Reale. Assim, em Aristóteles, todos esses trabalhos possuem um grau de sabedoria, embora mais baixo que das ciências teoréticas.

[7]A formalização aqui segue uma interpretação mais literal da passagem da *Ética Nicomaqueia*, contudo, é possível interpretá-la à maneira do *princípio de plenitude* exposto por Hintikka (1973). Por meio desse princípio, podemos designar o conhecimento científico simplesmente pelo saber de algo que é necessário, e, por sua vez, temos a seguinte correspondência: $(\mathbf{H}p \wedge p \wedge \mathbf{G}p) \leftrightarrow \Box p$. Ainda numa versão mais fraca desse princípio, podemos assumir a implicação apenas de um lado: $\Box p \rightarrow (Hp \wedge p \wedge Gp)$.

[8]Essa definição de ciência é de fato a mais caricata em Aristóteles, mas as coisas são bem mais complicadas na hora de aplicar tal definição pra diferentes ciências teóricas, como a Física, por exemplo. Na verdade, se fôssemos mais rigorosos, há diferentes definições de "ciência" em Aristóteles, com ligeiras modificações, mas que não são completamente incompatíveis.

[9]Um exemplo de Ryle para tal cisão é o estudo de Berkeley sobre 'infinitesimal', de modo que levanta questões acerca de usos ordinários e canônicos da expressão por meio dos quais a investiga, mas não está a tratar, porém, da "utilidade" de tal expressão no cotidiano etc., e, nesse caso, poderíamos mesmo dizer que "estava examinando a utilização ordinária de uma expressão não ordinária". Nas páginas citadas, Ryle diferencia ainda "utilização" e "utilidade" e *how-questions* de *what-for-questions*.

[10]E não *por demonstração*, tal como os diferencia pela força das premissas em *Tópicos*, I, 100a25 e ss.

[11]Destaca-se a célebre afirmação de Aristóteles de **A** 2, 983a10-11: "Todas as outras ciências serão mais necessárias do que esta, mas nenhuma lhe será superior".

[12]"habile, particul. *dans les arts mécaniques [...] d'où* habile, en gén., en parl. de poètes [...]; de devins [...]; de médecins [...]".

[13]"1 prudent, sage [...]; *en parl. de choses* (coeur, esprit, nature, etc.) [...]; des choses sensées; [...] la sagesse; [...] 2 *particul.* initié à la sagesse, savant, instruit, particul. *en parl. de philosophes* [...]; les sept sages; *ironiq.* subtil, profond, *d'où* obscur [...], ce qui est trop ingénieux n'est pas la sagesse [...], rien de subtil, ni de savant, rien qui demande une intelligence souple ni profonde 3 *particul.* ingénieux, fin, rusé"

[14]Antes de Aristóteles, a descoberta desse que foi o primeiro número irracional conhecido provavelmente já fora feita pelo filósofo pitagórico Hipaso de Metaponto, no século V a. C.. Aristóteles (em *Primeiros Analíticos* I, caps.23–24) traz o mais famoso método para provar a irracionalidade da $\sqrt{2}$, a saber, mostrar, por *reductio ad absurdum*, a inexistência de dois números inteiros a e b tais que $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$; com efeito, sua incomensurabilidade em números inteiros, e a prova completa, aparecerá assim em Euclides no Livro X dos *Elementos*.

[15]"O monismo é o ponto de vista filosófico de acordo com o qual existe apenas uma única região ontológica. Esse ponto de vista opõe-se, portanto, ao ponto de vista dualista ou a qualquer outra forma de pluralismo ontológico. [...] Consoante à região ontológica selecionada com a única efetivamente existe, assim se pode caracterizar o monismo como materialista ou como idealista. Uma terceira possibilidade é, porém, a do monismo neutro, que não toma nenhuma posição quanto à forma adequada de caracterizar o único tipo de realidade efetivamente existente" (Branquinho, Murcho e Gomes 2006, p.531. Verbete de António Zilhão).

[16]Além da influência do *Analysis of the Sensations* (1886) de Mach, aqui Russell (1978, p.25) também menciona o ensaio "A 'Consciência' Existe?" (1904) reeditado em *Essays in Radical Empiricism* (1912) de William James e *Present Philosophical Tendencies* e *The New Realism* (1912) de Perry. Aparentemente Russell adotou essa doutrina por um breve período de tempo.

[17]Usamos aqui uma nomenclatura mais atual para traduzir a seguinte consideração de Russel (2007, p.187): "A datum, obviously, must be a fact known by perception. But it is very difficult to arrive at a fact in which there is no element of inference, and yet it would seem improper to call something a 'datum' if it involved inference as well as observation".

[18]A mesma posição se encontra em *Mysticism and Logic and Other Essays* (Russell 1917, p.84).