NUMERICAL STUDY FOR A THREE DIMENSIONAL LAMINAR NATURAL CONVECTION HEAT TRANSFER FROM AN ISOTHERMAL HEATED HORIZONTAL AND INCLINED SQUARE PLATE AND WITH A CIRCULAR HOLE

Yasmeen Hameed Abd
Department of Mechanical Engineering
University of Technology

Dr. Ikhlase M.Fayed
Department of Mechanical Engineering
University of Technology

ABSTRACT

A theoretical study for a three-dimensional natural convection heat transfer from an isothermal horizontal , vertical and inclined heated square flat plates (with and without circular hole) has been done in the present work. The study involved the numerical solution of the transient Navier-Stokes and energy equations by using finite deference method (F.D.M.). The complete Navier-Stokes equation are transformed and expressed in terms of vorticity-vector potential. The Energy and Vorticity equations were solved by using an Alternating Direction Implicit (ADI) method because they are transient equations of parabolic portion, and the Vector potential is solved by using an equations Successive Over-Relaxation (S.O.R) method because it is from elliptic portion. The numerical solution is capable of calculating the Vector potential, three components of Vorticity and temperature field of the calculation domain. The numerical results were obtained in rang of Grashof number ($10^3 \leq Gr \leq 5x10^4$) with Prandtl number of (0.72) for square flat plate and the other consist a circle hole with ratio 0.6 and 0.8 diameter of the hole to main square side length.

The numerical results showed that the main process of heat transfer is conduction for Grashof number less than 10^3 and convection for Grashof number larger than 10^3 and the results of local Nusselt number show fairly large dependence on inclination angle. For horizontal plate facing upward and downward, average Nusselt number is proportional to one-fifth power of Rayleigh number, and there is a significant difference in heat transfer rates between the upward and downward cases. For horizontal plate with circle hole facing upward for Grashof number 10^4, the effect of core portion caused a limited increment in the heat transfer rate, where as for the facing downward case, the effect was larger and the maximum value of heat transfer rates is be for square flat plate with circle hole by ratio 0.6 for all inclination angles. With the increase of Grashof number to 5x104 heat transfer rates decrease except the square horizontal flat plate with circle hole by ratio 0.6 .

The average Nusselt number increases with the increase of inclination of plates facing upward to reach to the higher average Nusselt number at vertical position then decrease with increase of inclination of plates. And the maximum value of average Nusselt number is depended on the ratio of diameter of the hole to main square side length, showed that the maximum temperature gradient occurs at the external edge of the horizontal plate (with and without circle hole) facing upward and at the lower external edge in inclined case. The numerical results was made through comparison with a previous numerical and experimental work, the agreement was good.

المستخلص

يقدم هذا البحث دراسة نظرية لانتقال الحرارة ثلاثي الأبعاد للحمل الحر من صفيحة مربعة و أخرى ذات ثقب دائري أفقية و عمودية و مائلة عن الأفق مسخنة بثبوت درجة الحرارة. تضمنت الدراسة ، الحل العددي لمعادلات الزخم الكاملة والطاقة الانتقالية باستخدام طريقة الفروق المحددة . معادلات الزخم الكاملة تم تحويلها والتعبير عنها بدلالة الدوامية و متجه الجهد الكامن. تم حل كل

من معادلة الطاقة و معادلة دالة نقل الدوامية باستخدام طريقة (الاتجاه المتناوب الضمني)، وذلك لكونها معادلات انتقالية من نوع القطع المكافئ، و حل معادلة متجه الجهد الكامن بطريقة فوق التراخي المتعاقبة لكونها معادلات من نوع قطع ناقص. يتضمن الحل العددي حساب كل من متجه الجهد الكامن والمركبات الثلاث للدوامية ودرجة الحرارة لمنطقة الحساب. النتائج التي حصل عليها لحدود رقم كراشوف ($10^3 \leq Gr \leq 5x10^4$) مع رقم براندتل(0.72) للصفيحة المربعة و الصفيحة المثقبة بنسبة قطر الثقب الدائري إلى طول ضلع الصفيحة المربعة مساوٍ إلى 0.6 و 0.8 .

بينت النتائج العددية إن العملية الرئيسية لانتقال الحرارة هي التوصيل لرقم كراشوف 10^3 و الحمل لرقم كراشوف أعلى من 10^3 و إن رقم نسلت الموضعي يعتمد كليا على زاوية الميلان. في حالة الصفيحة الأفقية وجهها المسخن إلى الأعلى والأسفل، متوسط رقم نسلت يتناسب مع رقم رالي للأس (1/5) ، كذلك هنالك اختلاف واضح في معدلات انتقال الحرارة بين الوضع الأفقي الموجه للأعلى والأسفل. يسبب تأثير قطر الثقب لرقم كراشوف 10^4 زيادة محدودة في معدلات انتقال الحرارة في حالة الصفيحة المثقبة وجهها المسخن إلى الأعلى بينما تكون اكثر تأثيرا في حالة الصفيحة المثقبة وجهها المسخن إلى الأسفل و ان أقصى قيمة لمعدل انتقال الحرارة تكون للصفيحة المربعة المثقبة بنسبة تثقيب 0.6 و لزوايا الميل المختلفة. بزيادة رقم كراشوف إلى $5x10^4$ يقل معدل انتقال الحرارة ما عدا الصفيحة المربعة الأفقية وجهها المسخن إلى الأسفل حيث يكون أقصى قيمة عند نسبة تثقيب 0.6 . تزداد قيم متوسط رقم نسلت بزيادة زاوية ميل الصفيحة المربعة وجهها المسخن إلى الأعلى لتصل إلى أعلى قيمة لها عند الوضع العمودي وبعدها تقل بزيادة ميلان الصفيحة، و إن أقصى قيمة لمتوسط رقم نسلت تعتمد على نسبة التثقيب، و إن أقصى انحدار لدرجة الحرارة يكون عند الحافة الخارجية للصفيحة المربعة و المثقبة الأفقية المسخنة إلى الأعلى و عند الحافة السفلى الخارجية في حالة الميلان . تم مقارنة نتائج الدراسة الحالية مع نتائج عددية و عملية لدراسات سابقة و كان التوافق بينها جيد .

KEY WORDS
Square Plate, Circular Hole, Natural Convection, Three-Dimensional

المقدمة

شهدت العقود الماضية ، اهتمام كبير لعملية انتقال الحرارة بالحمل الحر، هذا الاهتمام المتزايد هو انعكاس قلقنا المتزايد بالطاقة و البيئة لما لها من أهمية في التطبيقات الصناعية و المدنية حيث قام الباحثان **Aziz & Hellums (1967)** بدراسة عددية باستخدام طريقة الفروقات المحددة لحل معادلات الحركة لحالة الجريان ثلاثي الأبعاد و حالة الجريان الثنائي الأبعاد و الحصول على المعادلات اللابعدية (معادلات الدوامية ودالة المتجه الكامن) بتحويل معادلات نفير ستوك بطريقة (Alternating Direction Implicit Method) لحل معادلات القطع المكافئ (Parabolic Equation) و بطريقة فوق التراخي المتعاقبة (Successive Over Relaxation)(SOR) لحل معادلات القطع الناقص (Elliptical Equation) عند رقم براندتل Pr=1 ولحدود رقم رالي $2500 \leq Ra \leq 3500$ و درس الباحثان الفرق بين الجريان الثنائي والثلاثي الأبعاد و لاحظا توزيع درجة الحرارة في حالة الاستقرار يكون اقل للجريان ثلاثي الأبعاد ، و ان زمن الاستقرار يقل بزيادة رقم كراشوف . و استخدم الباحثان(**Suriano & Yang 1968**) طريقة الفروقات المحددة العددية (Numerical Finite-Difference Scheme) لحل معادلات الزخم والطاقة والإستمرارية (**المعادلات الحاكمة**) لانتقال الحرارة بالحمل الحر الطباقي من صفائح أفقية و عمودية مسخنة لشرط ثبوت درجة الحرارة لمدى رقم رالي 0<Ra<300 و رقم براندتل Pr=0.72&10 . وجد الباحثان ان العملية الرئيسة لانتقال الحرارة هي التوصيل لرقم رالي أقل من 50 و الحمل لرقم رالي أعلى من 50 عندما يكون رقم براندتل 0.72 و عند ثبوت رقم رالي و زيادة رقم براندتل الى 10 يزداد متوسط رقم نسلت لحدود رقم رالي من 0 الى50 و يقل متوسط رقم نسلت لرقم رالي اكبر من 100 و حصلا على توافق جيد عند مقارنه النتائج العددية مع بحوث عملية سابقة. اما الباحثان **(Pera & Gebhart 1973)** فدرسا عملياً و عددياً جريان الطبقة المتاخمة لإنتقال الحرارة بالحمل الحر الطباقي من أسطح أفقية غير محددة و مائلة بزوايا صغيرة عن الأفق لشرطي ثبوت درجة الحرارة و الفيض الحراري باستخدام الطريقة العددية لحل المعادلات الحاكمة عند رقم براندتل Pr=0.7 في حالة التسخين لشرط ثبوت درجة الحرارة، وعند حدود رقم براندتل $0.1 \leq Pr \leq 10$ في حالة التسخين لشرط ثبوت الفيض الحراري ، و توصلا الى ان أي إمالة للصفيحة الأفقية المسخنة لشرط ثبوت درجة الحرارة يؤثر بدرجة كبيرة على توزيع السرعة و بدرجة قليلة على توزيع درجة الحرارة وعند زيادة رقم براندتل في حالة الصفيحة الأفقية المسخنة لشرط ثبوت الفيض الحراري يؤدي الى نقصان السرعة وتقليل سمك الطبقة الحرارية . الباحثان بينا ان عملية انتقال الحرارة في الصفيحة العمودية غير المحددة هو أعلى بمقدار 80% من نظيره في الصفيحة الأفقية عند رقم كراشوف الموضعي 10^5 عند نفس ظروف العمل من درجة الحرارة و نوع المائع المستخدم.أما عمليا فقد استخدما تقنية التصوير بمقياس (**Mach-Zehnder**) لدراسة انتقال الحرارة لصفائح من الألمنيوم مستطيلة ذات أبعاد cm 0.35x0.43وسمك 0.025cm و كانت النتائج العددية أعلى من النتائج العملية لحدود رقم كراشوف $Gr<10^4$ بينما كانت أقل لحدود رقم كراشوف $Gr>10^4$.

و أجرى الباحثان (**Cairnie & Harrison 1982**) دراسة نظرية وعملية لجريان الطبقة المتاخمة لانتقال الحرارة بالحمل الحر من صفيحة عمودية مسخنة بثبوت درجة الحرارة و لفارق درجة الحرارة بين المحيط والصفيحة كبير جداً ، حيث درجة حرارة المحيط 295K و الصفيحة مسخنة لمدى من درجات الحرارة مقدارها T_W = 674,574,473 & 373 K. نظرياً استخدما طريقة الفروقات المحددة لحل المعادلات الحاكمة أما عملياً فقد استخدما صفيحة مستطيلة ذات طول 0.5 m و عرض 0.25m و سمك 0.00127 m و بينت القياسات الابتدائية ان السطح ذات درجة حرارة 473 K و 623 K يكون اضطرابي لرقم كراشوف $4x10^8$ و $3x10^8$ بالترتيب و خواص المائع عند درجة حرارة (bulk temperature) في حين هذه القيمة الحرجة تتغير كثيراً لو تم إختيار (film temperature) أو أي درجة حرارة اخرى . الباحثان حصلا على توافق جيد بين نتائجه العملية و النظرية. قام الباحثان **(Goldstein & Lau 1983)** بدراسة عددية و عملية لإنتقال الحرارة بالحمل الحر الطباقي من صفائح افقية مربعة بأشكال (مع أسطح امتداد أو عدمها) مختلفة لحالتين الأولى وجهها المسخن إلى الأعلى والثانية وجهها المسخن إلى الأسفل لشرط ثبوت درجة الحرارة ، تضمنت الدراسة النظرية حل

المعادلات الحاكمة بطريقة الفروقات المحددة ضمن حدود رقم رالي $40<Ra<8x10^3$ ورقم براندتل $Pr=0.7$ ،وجدا ان ثبوت رقم رالي وزيادة رقم براندتل الى 2.5 يؤدي الى زيادة معامل إنتقال الحرارة بمقدار 7.5% وهذه النتيجة تتفق مع الدراسة التحليلية للمصدر **(Pera & Gebhart 1973)** أما الدراسة العملية تضمنت أجراء تجارب إنتقال الكتلة لقطعة مربعة من النفثالين يتراوح طول الضلع من 0.0258m الى 0.203m معرضة للهواء ضمن حدود رقم رالي $0<Ra<4.8x10^3$ و كانت نتائج معامل انتقال الحرارة أعلى من النتائج العددية في حالة الصفيحة وجهها المسخن إلى الأعلى .

أجرى الباحث **(Mustafa 2001)** دراسة عددية و عملية لإنتقال الحرارة بالحمل الحر من سطوح دائرية أفقية وجهها المسخن إلى الأعلى لشرط ثبوت درجة الحرارة ، النتائج العددية التي حصل عليها من الحل العددي كانت بأستخدام طريقة الفروقات المحددة البينية لقرص و حلقات بنسبة قطر داخلي $0.2\leq m\leq 0.9$ من القطر الخارجي و وجد ان العملية الرئيسة لإنتقال الحرارة هي التوصيل لرقم كراشوف أقل من 10^3 و الحمل لرقم كراشوف أعلى من 10^3 ضمن مدى رقم كراشوف $10^3 \leq Gr \leq 10^7$ و ان أقصى قيمة لمعدل انتقال الحرارة الكلي يكون عند الحلقات التي لها نفس القطر الخارجي للقرص و بنسبة القطر الداخلي الى القطر الخارجي تتراوح بين (0.2-0.3) و تأثير الإنفصال الحراري على معامل انتقال الحرارة الموضعي يقل بازدياد رقم كراشوف و الريشة تكون اشد بازدياد رقم كراشوف في حالة القرص اما في حالة الحلقات فمعامل انتقال الحرارة الموضعي يزداد بازدياد رقم كراشوف مع زيادة نسبة القطر الداخلي الى الخارجي.
أجرت الباحثة **(Rafah 2002)** دراسة عملية لانتقال الحرارة بالحمل الحر لسطوح مستوية أفقية مربعة الشكل وجهها المسخن للأعلى لشرط ثبوت درجة الحرارة و ذات ثقب مربع الشكل نسبة الطول الداخلي تكافئ 0.25 من الطول الأصلي للمربع وكلاهما بطول خارجي 0.096m و سمك 0.0096m من الألمنيوم لمدى رقم كراشوف $0.5x10^6 <Gr< 6.28x10^6$ و لمدى من درجات الحرارة مقدارها T_W=40,61,82.5,112.8C° وجدت ان قيمة معامل انتقال الحرارة الموضعي للصفيحة المستوية المربعة تكون اكبر ما يمكن عند الحافة بسبب الانحدار الكبير في توزيع درجة الحرارة الناتجة عن جريان الطبقة المتاخمة في تلك المنطقة، تقل القيمة عند الاقتراب من مركز الصفيحة نتيجة الانحدار القليل في توزيع درجة الحرارة الناتجة من الانفصال الحراري قرب المركز و ان قيمة متوسط معامل انتقال الحرارة للصفيحة المربعة ذات الثقب أعلى منه للصفيحة المربعة بنسبة 32.1% و سمك الطبقة المتاخمة يقل بزيادة رقم كراشوف ضمن المدى .

أجرى الباحث **(Hassan 2003)** دراسة نظرية عددية لإنتقال الحرارة بالحمل الحر من أقراص وحلقات مائلة بزوايا = Φ 0°,30°,45°,60°,90°,120°,135°,150°&180° عن المستوى الأفقي، وجهها المسخن الى الأعلى والى الأسفل لشرط ثبوت درجة الحرارة باستخدام طريقة الفروقات المحددة لحل المعادلات الحاكمة، النتائج العددية التي حصل عليها ضمن حدود رقم كراشوف $10^3 \leq Gr \leq 5x10^4$ مع رقم براندتل Pr=0.72 و توصل إلى ان رقم نسلت الموضعي يعتمد كلياً على زاوية الميلان و متوسط رقم نسلت يتناسب مع رقم كراشوف للأس 1/5 في حالة الوضع الأفقي للقرص مسخن إلى الأعلى كما ان تأثير القطر الداخلي يسبب زيادة محددة في معدلات انتقال الحرارة في حالة الحلقات المسخنة إلى الأعلى بينما تكون أكثر تأثيراً في حالة الحلقات مسخنة إلى الأسفل. وبينت الدراسة ان متوسط رقم نسلت يزداد بزيادة كل من زاوية الميلان عن الأفق ونسبة القطر الداخلي إلى الخارجي للحلقات المائلة المسخنة إلى الأعلى وان أقصى قيمة لمتوسط رقم نسلت لا يعتمد على زاوية الميلان بل يكون تغيره معتمداً على نسبة القطر الداخلي إلى الخارجي لتلك الحلقات.
اهتم البحث الحالي نظرياً بدراسة عملية انتقال الحرارة بالحمل الحر الطباقي لصفيحة مربعة و أخرى ذات ثقب دائري و ذات أسطح امتداد (Extension surface) مسخنة بثبوت درجة حرارة السطح و في حالات مختلفة أفقية و عمودية و مائلة عن الافق بزوايا مختلفة ، حيث يكون الوجه المسخن نحو الأعلى عند الزوايا 0°≤Φ<90° و يكون الوجه المسخن نحو الأسفل عند الزوايا 90°<Φ≤180° . يتم في هذا البحث حل المعادلات الحاكمة باستخدام الحل العددي الثلاثي الأبعاد وحساب كل من دالة نقل الدوامية و متجه الجهد الكامن و درجة حرارة السطح اللابعدية و إيجاد توزيع رقم نسلت الموضعي ومن ثم إيجاد قيمته المتوسطة بالاعتماد على الطول المميز للصفيحة و تم اختياره ليكون طول ضلع الصفيحة المربعة ، و دراسة تأثير منطقة الانفصال الحراري على معدل انتقال الحرارة وذلك للصفيحة المربعة و للصفيحة ذات الثقب الدائري و إيضاح الفرق بينهما .

المعادلات الحاكمة

لغرض دراسة مسألة انتقال الحرارة يجب ان نحصل أولا على معادلات حفظ الكتلة و الزخم و الطاقة للمائع القابل للأنضغاط **(Torrance 1985)** :

$$C.E. \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{q}) = 0 \qquad (1)$$

$$M.E. \qquad \rho \frac{D\vec{q}}{Dt} = \mu \nabla^2 \vec{q} - \nabla P_L + \rho \vec{g} \qquad (2)$$

$$E.E. \qquad \rho cp \frac{DT}{Dt} - \beta T \frac{DP}{Dt} = \nabla(k \nabla T) + \mu\phi + q'''_{gen} \qquad (3)$$

حيث ان

$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{q}.\nabla$: the substantial derivative, $\vec{q} = q(u, v.w)$:velocity vector, $\mu\phi$: viscous dissipation function, q'''_{gen} : heat generation , $\rho \vec{g}$: body force.

لغرض اشتقاق المعادلات الأساسية للمسألة قيد البحث ،استخدمت الفرضيات التالية : درجة الحرارة ثابتة لكل من السطح المستوي (T_W) و المحيط (T_∞)،جريان المائع طباقي و غير قابل للأنضغاط، لا يوجد توليد حرارة $q'''_{gen} = 0$ ، المائع خاضع لقوانين نيوتن ، خواص المائع ثابتة عدا خاصية الكثافة في حد قوة الطفو حيث الكثافة في هذا الحد هو الذي يسبب حركة المائع، اهمال دالة الانتشار $\mu\phi$ بسبب السرعة الصغيرة جدا للمائع ، اهمال المقدار $\frac{DP}{Dt}$ لأنه صغير جدا للغازات . ان الطول المميز للمسألة قيد الدراسة هو طول ضلع للصفيحة المربعة (H) ، ولغرض كتابة المتغيرات و المعادلات الاساسية للمسألة بصيغ لابعدية تعرف المقادير اللابعدية التالية كما في **(Hassan 2003)** والمصدر **(Chow,Wilely & Sons 1979)** .

$X = x/H, Y = y/H, Z = z/H$	**الاحداثيات المتعامدة**	$\tau = t(\alpha / H^2)$	**الزمن**
$U = uH/\alpha, V = vH/\alpha, W = wH/\alpha$	**السرعة**	$P = (P/\rho_\infty)(H/\alpha)^2$	**الضغط**
$Gr = g\beta(T_W - T_\infty)H^3/\upsilon^2$	**رقم كراشوف**	$\Theta = (T - T_\infty)/(T_W - T_\infty)$	**درجة الحرارة**
$Ra = g\beta(T_W - T_\infty)H^3/\alpha\upsilon$	**رقم رالي**	$Pr = \upsilon/\alpha$	**رقم براندتل**

باستخدام هذه المقادير اللا بعدية يمكن كتابة معادلات حفظ الكتلة و معادلات الزخم و معادلة الطاقة بالصيغة اللابعدية التالية :

$$C.E. \qquad \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \tag{4}$$

$$\text{M.E In X-Component} \quad \frac{1}{Pr}\left[\frac{\partial U}{\partial \tau} + U\frac{\partial U}{\partial X} + V\frac{\partial U}{\partial Y} + W\frac{\partial U}{\partial Z}\right] = Ra\sin(\Phi)\Theta - \frac{1}{Pr}\frac{\partial P}{\partial X} + (\nabla^2 U) \tag{5}$$

$$\text{M.E In Y-Component} \quad \frac{1}{Pr}\left[\frac{\partial V}{\partial \tau} + U\frac{\partial V}{\partial X} + V\frac{\partial V}{\partial Y} + W\frac{\partial V}{\partial Z}\right] = -\frac{1}{Pr}\frac{\partial P}{\partial Y} + (\nabla^2 V) \tag{6}$$

$$\text{M.E In Z-Component} \quad \frac{1}{Pr}\left[\frac{\partial W}{\partial \tau} + U\frac{\partial W}{\partial X} + V\frac{\partial W}{\partial Y} + W\frac{\partial W}{\partial Z}\right] = Ra\cos(\Phi)\Theta - \frac{1}{Pr}\frac{\partial P}{\partial Z} + (\nabla^2 W) \tag{7}$$

$$\text{E.E.} \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U\frac{\partial \Theta}{\partial X} + V\frac{\partial \Theta}{\partial Y} + W\frac{\partial \Theta}{\partial Z} = \nabla^2\Theta \tag{8}$$

معادلات نقل الدوامية و دالة متجه الجهد الكامن

إن المعادلات التي وضعت في الجزء السابق من البحث هي معادلات بدلالة المتغيرات $[U, V, W, P, \Theta]$ و التي تسمى المتغيرات الأساسية او المعتمدة و يمكن التخلص من حدود الضغط (P) عن طريق مفاضلة معادلات الزخم بشكل متعاكس و طرحها للحصول على معادلات تدعى معادلات نقل الدوامية(vorticity transport equation) :

$$\frac{1}{Pr}\left[\frac{\partial \Omega_1}{\partial \tau} + U\frac{\partial \Omega_1}{\partial X} + V\frac{\partial \Omega_1}{\partial Y} + W\frac{\partial \Omega_1}{\partial Z} - \Omega_1\frac{\partial U}{\partial X} - \Omega_2\frac{\partial U}{\partial Y} - \Omega_3\frac{\partial U}{\partial Z}\right] =$$
$$Ra\frac{\partial \Theta}{\partial Y}\cos\Phi + \left[\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial Z^2}\right] \tag{9}$$

$$\frac{1}{Pr}\left[\frac{\partial \Omega_2}{\partial \tau} + U\frac{\partial \Omega_2}{\partial X} + V\frac{\partial \Omega_2}{\partial Y} + W\frac{\partial \Omega_2}{\partial Z} - \Omega_1\frac{\partial V}{\partial X} - \Omega_2\frac{\partial V}{\partial Y} - \Omega_3\frac{\partial V}{\partial Z}\right] =$$
$$Ra\left[\frac{\partial \Theta}{\partial Z}\sin\Phi - \frac{\partial \Theta}{\partial X}\cos\Phi\right] + \left[\frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial Z^2}\right] \tag{10}$$

$$\frac{1}{Pr}\left[\frac{\partial \Omega_3}{\partial \tau} + U\frac{\partial \Omega_3}{\partial X} + V\frac{\partial \Omega_2}{\partial Y} + W\frac{\partial \Omega_3}{\partial Z} - \Omega_1\frac{\partial W}{\partial X} - \Omega_2\frac{\partial W}{\partial Y} - \Omega_3\frac{\partial W}{\partial Z}\right] =$$
$$Ra\left[-\frac{\partial \Theta}{\partial Y}\sin\Phi\right] + \left[\frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial Z^2}\right] \tag{11}$$

يمكن كتابة المعادلات أعلاه بالصيغة التالية:

$$\frac{1}{\Pr}\left[\frac{\partial\Omega}{\partial\tau}+(\bar{q}\cdot\nabla)\bar{\Omega}-(\bar{\Omega}\cdot\nabla)\bar{q}\right]=Ra\begin{bmatrix}\frac{\partial\Theta}{\partial Y}\cos\Phi\\ \frac{\partial\Theta}{\partial Z}\sin\Phi-\frac{\partial\Theta}{\partial X}\cos\Phi\\ -\frac{\partial\Theta}{\partial Y}\sin\Phi\end{bmatrix}+\nabla^2\bar{\Omega} \tag{12}$$

حيث ان:

$$\Omega_1=\frac{\partial W}{\partial \mathrm{Y}}-\frac{\partial V}{\partial Z},\quad \Omega_2=\frac{\partial U}{\partial \mathrm{Z}}-\frac{\partial W}{\partial \mathrm{X}},\quad \Omega_3=\frac{\partial V}{\partial \mathrm{X}}-\frac{\partial U}{\partial \mathrm{Y}}$$

لحل المعادلات التفاضلية الجزئية بطريقة الفروقات المحددة قسمت منطقة الحسابات إلى عدد من المناطق المحددة وتعيين النقاط العقدية باستخدام الدليل (i) باتجاه المحور (x) و الدليل (j) باتجاه المحور (y) و الدليل (k) باتجاه المحور (z) و أعطت لكل عقدة الإحداثيات التالية(**Aziz & Hellums 1967**) :

$$R_n=R_n(i,j,k)=R\ (\mathrm{X}_i,\mathrm{Y}_j,\mathrm{Z}_k,t_n)\quad \mathrm{X}_i=i\Delta\mathrm{X}\ ;\ \mathrm{Y}_j=j\Delta\mathrm{Y}\ ;\ \mathrm{Z}_k=k\Delta\mathrm{Z}\ ;\ t_n=n\Delta t\ ;$$

$$\nabla_x R_n=\frac{R_n(i+1,j,k)-R_n(i-1,j,k)}{2(\Delta\mathrm{X})} \tag{13}$$

$$\nabla_x^2 R_n=\frac{R_n(i+1,j,k)-2R_n(i,j,k)+R_n(i-1,j,k)}{(\Delta\mathrm{X})^2} \tag{14}$$

و بالصيغة نفسها يمكن إيجاد كل من $\nabla_y,\nabla_y^2,\nabla_z,\nabla_z^2$

يمكن كتابة معادلة الطاقة (8) و معادلات نقل الدوامية (9)، (10) و(11) بالصورة التالية:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}=\frac{\partial^2\Theta}{\partial\mathrm{X}^2}-U\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{X}}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial\mathrm{Y}^2}-V\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{Y}}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial Z^2}-W\frac{\partial\Theta}{\partial Z} \tag{15}$$

$$\frac{\partial\Omega_1}{\partial\tau}=\Pr\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial\mathrm{X}^2}-U\frac{\partial\Omega_1}{\partial\mathrm{X}}+\Pr\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial\mathrm{Y}^2}-V\frac{\partial\Omega_1}{\partial\mathrm{Y}}+\Pr\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial Z^2}-W\frac{\partial\Omega_1}{\partial Z}+S_1 \tag{16}$$

$$S_1=\Pr Ra\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{Y}}\cos\Phi\right)+\Omega_1\frac{\partial U}{\partial\mathrm{X}}+\Omega_2\frac{\partial U}{\partial\mathrm{Y}}+\Omega_3\frac{\partial U}{\partial Z} \tag{17}$$

$$\frac{\partial\Omega_2}{\partial\tau}=\Pr\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial\mathrm{X}^2}-U\frac{\partial\Omega_2}{\partial\mathrm{X}}+\Pr\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial\mathrm{Y}^2}-V\frac{\partial\Omega_2}{\partial\mathrm{Y}}+\Pr\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial Z^2}-W\frac{\partial\Omega_2}{\partial Z}+S_2 \tag{18}$$

$$S_2=\Pr Ra\left(\frac{\partial\Theta}{\partial Z}\sin\Phi-\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{X}}\cos\Phi\right)+\Omega_1\frac{\partial V}{\partial\mathrm{X}}+\Omega_2\frac{\partial V}{\partial\mathrm{Y}}+\Omega_3\frac{\partial V}{\partial Z} \tag{19}$$

$$\frac{\partial\Omega_3}{\partial\tau}=\Pr\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial\mathrm{X}^2}-U\frac{\partial\Omega_3}{\partial\mathrm{X}}+\Pr\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial\mathrm{Y}^2}-V\frac{\partial\Omega_3}{\partial\mathrm{Y}}+\Pr\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial Z^2}-W\frac{\partial\Omega_3}{\partial Z}+S_3 \tag{20}$$

$$S_3=\Pr Ra\left(-\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{Y}}\sin\Phi\right)+\Omega_1\frac{\partial W}{\partial\mathrm{X}}+\Omega_2\frac{\partial W}{\partial\mathrm{Y}}+\Omega_3\frac{\partial W}{\partial Z} \tag{21}$$

الشكل العام للمعادلات أعلاه يصاغ كالتالي :

$$\frac{\partial R}{\partial\tau}=(\delta_x+\delta_y+\delta_Z)R+S \tag{22}$$

يمثل المتغير R كل من $\Theta,\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$

$$\delta_x=\frac{\partial^2}{\partial\mathrm{X}^2}-U\frac{\partial}{\partial\mathrm{X}}\ ,\ \delta_y=\frac{\partial^2}{\partial\mathrm{Y}^2}-V\frac{\partial}{\partial\mathrm{Y}}\ ,\ \delta_z=\frac{\partial^2}{\partial Z^2}-W\frac{\partial}{\partial Z}$$

و باستخدام طريقة (ADI method) تصبح المعادلة (22) بالصورة التالية :

$$(\delta_x-\frac{2}{\Delta\tau})R_{n+1}^{*}=-(\delta_x+2\delta_y+2\delta_z+\frac{2}{\Delta\tau})R_n-2S \tag{23}$$

$$(\delta_y-\frac{2}{\Delta\tau})R_{n+1}^{**}=\delta_y R_n-\frac{2}{\Delta\tau}R_{n+1}^{*} \tag{24}$$

$$(\delta_z-\frac{2}{\Delta\tau})R_{n+1}=\delta_z R_n-\frac{2}{\Delta\tau}R_{n+1}^{**} \tag{25}$$

يتم اشتقاق معادلات متجـه الجهد الكـامن من معـادلات نقل الدواميــة فـي الملحـق E ولحـل معـادلات Ψ يمكـن اسـتخدام طريقـة فـوق التراخي المتعاقب (Iterative successive over relaxation) عند أي خطوة زمنيـة كمـا فـي المصـدر F.Geoola et al. (1982) ، اذ يتم تعويض قيمة متجه الجهد الكامن عند الفترة الزمنيـة $\tau + \Delta\tau$ لحسـاب القيمـة الجديـدة لمتجـه الجهـد الكـامن . إذا كانـت $\Psi^{n}_{(i,j,k)}$ هـي القيمة عند أي نقطة فان بعد عدد من التكرارات مقداره (s) فـان التكـرار اللاحـق يكـون (s+1) . يمكـن الحصـول علـى مركبـة X لمتجـه الجهـد الكامن بالشكل التالي :

$$\Psi^{n}_{1(i,j,k)} = \frac{1}{bb_1}[a_{x1}(\Psi^{n}_{1(i+1,j,k)} + \Psi^{n}_{1(i-1,j,k)}) + a_{y1}(\Psi^{n}_{1(i,j+1,k)} + \Psi^{n}_{1(i,j-1,k)}) + a_{z1}(\Psi^{n}_{1(i,j,k+1)} + \Psi^{n}_{1(i,j,k-1)}) + \Omega^{n(s)}_{1(i,j,k)}] \quad (26)$$

و ان مقدار التكرار او التعاقب w_ψ

يمكن ان يعرف :

$$\Psi^{n(s+1)}_{1(i,j,k)} = \Psi^{n(s)}_{1(i,j,k)} + w_\psi(\Psi^{n}_{1(i,j,k)} - \Psi^{n(s)}_{1(i,j,k)}) \quad (27)$$

ان المقدار (s) يشير إلى عدد نقاط التكرار عند الخطوة الزمنية (n^{th}) و المقدار $\Psi^{n(s+1)}_{1(i,j,k)}$ يمثـل قيمـة Ψ_1 عنـد الخطـوة الزمنيـة (n^{th}) بعد (s+1) من التكرار. ان قيمة $\Psi^{n(s+1)}_{1(i,j,k)}$ تعوض في المعادلـة (26) بعد ذلك تحل مع المعادلة (27) حتى تحقق المقدار التقريبي التالي :

$$\sum(\Psi^{n(s+1)}_{1(i,j,k)} - \Psi^{n(s)}_{1(i,j,k)}) \le \varepsilon_\Psi \quad (28)$$

ان قيمة المقدار التقريبي في البحث الحالي $\varepsilon_\Psi = 10^{-3}$ و يكون مقدار التكرار w_ψ ضمن حـدود (2-1) فتم اختيـار قيمتـه (1.75) بالتجربة و الخطأ .

و يمكن الحصول على مركبة Y لمتجه الجهد الكامن Ψ_2 كما يلي:

$$\Psi^{n}_{2(i,j,k)} = \frac{1}{bb_2}[a_{x2}(\Psi^{n}_{2(i+1,j,k)} + \Psi^{n}_{2(i-1,j,k)}) + a_{y2}(\Psi^{n}_{2(i,j+1,k)} + \Psi^{n}_{2(i,j-1,k)}) + a_{z2}(\Psi^{n}_{2(i,j,k+1)} + \Psi^{n}_{2(i,j,k-1)}) + \Omega^{n(s)}_{2(i,j,k)}] \quad \mathbf{(29)}$$

و مقدار التكرار كما يلي :

$$\Psi^{n(s+1)}_{2(i,j,k)} = \Psi^{n(s)}_{2(i,j,k)} + w_\psi(\Psi^{n}_{2(i,j,k)} - \Psi^{n(s)}_{2(i,j,k)}) \quad (30)$$

ان قيمة $\Psi^{n(s+1)}_{2(i,j,k)}$ تعوض في المعادلة (29) ويحل مع المعادلة (30) حتى تحقق المقدار التقريبي التالي :

$$\sum(\Psi^{n(s+1)}_{2(i,j,k)} - \Psi^{n(s)}_{2(i,j,k)}) \le \varepsilon_\Psi \quad (31)$$

و مركبة Z لمتجه الجهد الكامن Ψ_3 كما يلي:

$$\Psi^{n}_{3(i,j,k)} = \frac{1}{bb_3}[a_{x3}(\Psi^{n}_{3(i+1,j,k)} + \Psi^{n}_{3(i-1,j,k)}) + a_{y3}(\Psi^{n}_{3(i,j+1,k)} + \Psi^{n}_{3(i,j-1,k)}) + a_{z3}(\Psi^{n}_{3(i,j,k+1)} + \Psi^{n}_{3(i,j,k-1)}) + \Omega^{n(s)}_{3(i,j,k)}] \quad (32)$$

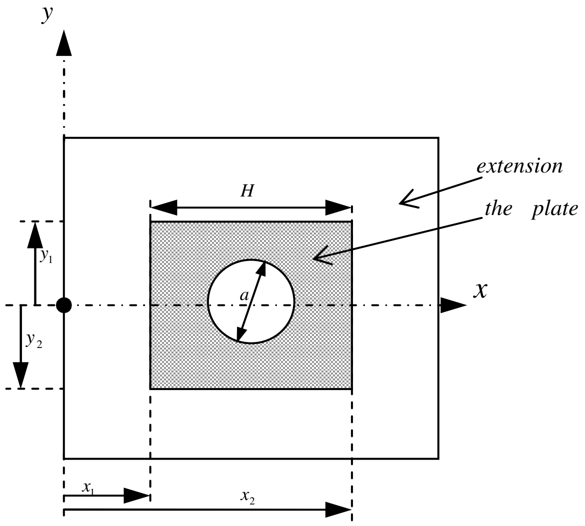
و مقدار التكرار كما يلي :

$$\Psi^{n(s+1)}_{3(i,j,k)} = \Psi^{n(s)}_{3(i,j,k)} + w_\psi(\Psi^{n}_{3(i,j,k)} - \Psi^{n(s)}_{3(i,j,k)}) \quad (33)$$

ان قيمة $\Psi^{n(s+1)}_{3(i,j,k)}$ تعوض في المعادلة (34) و تحل مع المعادلة (35) حتى تحقق المقدار التقريبي التالي :

$$\sum(\Psi^{n(s+1)}_{3(i,j,k)} - \Psi^{n(s)}_{3(i,j,k)}) \le \varepsilon_\Psi \quad (36)$$

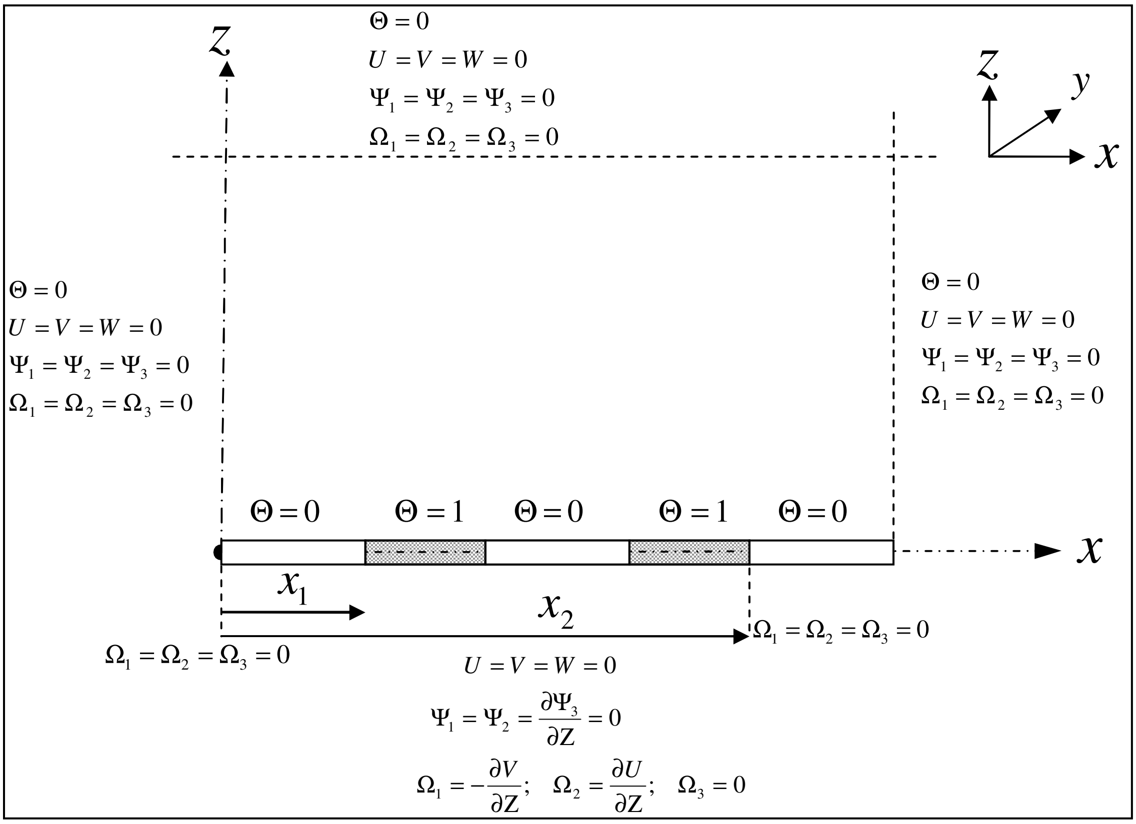
الظروف الابتدائية و الحدية للمسألة

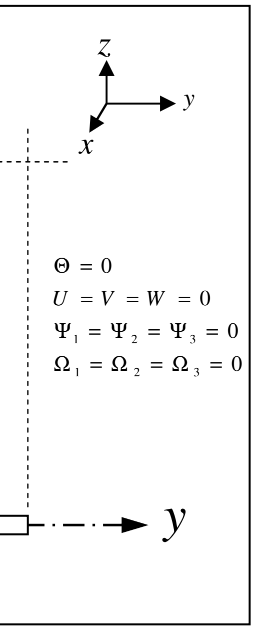


ان الظروف الابتدائية المستخدمة لحل كـل مـن معادلة درجة الحرارة و دالة نقل الدوامية و متجـه الجهد الكامن تؤخذ عند زمن τ=0 حيث ان :

$$\begin{bmatrix}\Theta=0\\ \Theta_W=1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}U=0\\ V=0\\ W=0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Omega_1=0\\ \Omega_2=0\\ \Omega_3=0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Psi_1=0\\ \Psi_2=0\\ \Psi_3=0\end{bmatrix}$$

اما الظروف الحدية للمسالة و لزمن τ>0 فانها موضحة كما موضح في الشكل (1)

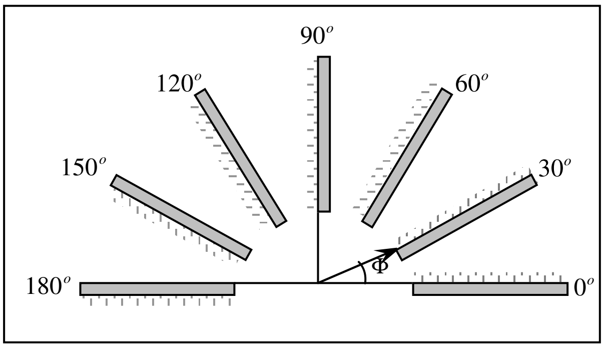




الشكل (1) االظروف الحدية للمسالة

النتائـج و المناقشـة

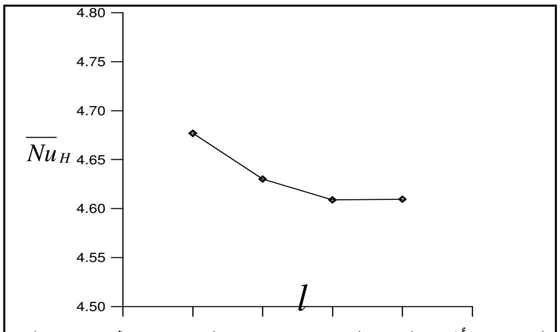
تـم التوصـل مـن خـلال النتـائج العدديــة الـى شـكل كـل مـن خطـوط ثبوت درجـة الحرارة و خطوط دالة نقل الدواميـة و متجـه الجهـد الكـامن اللابعديـة فـي حالـة التطـور و الاستقرار علـى سـطح الصفيحـة المربعـة و الصفيحـة ذات الثقب الدائري بنسبتي تثقيب 0.6و 0.8 لحالة التسخين لثبوت درجة الحرارة لمختلف زوايا الميـل $\Phi=0^{o},30^{o},60^{o},90^{o},120^{o},150^{o}\&180^{o}$ كمـا فـي الشكل (2). و جميع النتائج العددية عند رقم براندتل $Pr=0.72$ و لمدى رقم كراشوف $10^{3}\leq Gr\leq 5x10^{4}$.



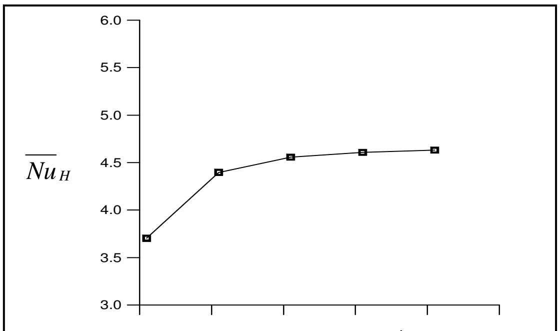
شكل(2) حالة تسخين الصفيحة لزوايا ميل مختلفة

تحديد حجم الشبكة العددية

استخدمت في الحل العددي شبكة منتظمة (Uniform grid) في الاتجاهات x، y و z . تم حسـاب النتائـج للصفيحة المربعـة ذات أسطح امتداد عند الحافة لها طول مساوي نصف طول الصفيحة ، البعد باتجاه المحور x يكون X=2 و تكون الحسابات لنصف الصفيحة باتجاه المحور y نظراً لوجود التناظر فيكون البعد Y=1. عدد النقاط العقدية باتجاه i تكون m=21 و عليـه عـدد النقاط العقـدية باتجاه j تكون n=11 ، (ان زيادة عدد النقاط العقدية يزيد من دقة الحل إلا انه في الوقت نفسه يزيد من زمن الوصول إلـى حالـة استقرار الحل العددي). و لمعرفـة حجم الشبكة المناسب تم اختبـار عدد من النقــاط العقديـة للبعد العمـودي (اتجاه k) ولتكن (l=11,21,31,41&51) كما مبينـة في الشكـل (3) . كما تم اختبـار أربعـة أبعـاد عمودية للشبكة ولتكن (Z=1,1.5,2,2.5) مع الحفاظ على المسافة بين العقد (Grid spacing) متساوية و تكون في البحث الحالي ($\Delta Z = 0.05$) كما مبين في الشـكل (4). تم اختيار عـدد النقاط العقـدية باتجاه k وهي l=41 لان نسبة الخطأ لمتوسـط رقم نسلت تقل بزيادة عدد العقد و تكون حـوالي (% 1.66) بين العقدة 41 و 51 كما في الشكل (3)اما البعد العمودي فيكون Z=2 حيث نلاحظ من الشكل (4) ان اقل نسبة خطـأ لمتوسـط رقم نسلت تكون بين الارتفاع 2 و الارتفاع 2.5 و مقداره (% 0.00017) . و بذلك يكون حجم شبكة الحل العـددي (X,Z =2 & Y =1) لجميع الحــالات و عـدد النقــاط العقديــة المستخدمــة فـي الحـل (21x11x41) . وتـم تحديد أقصـى قيمـة للخطـوة الزمنيـة ($\Delta\tau max=0.000667$) والتي عندها يحقق الاستقرار للحل العددي بتشغيل البرنامج لمرات عدة وبقيـم مختلفـة من الخطـوة الزمنيـة وتعاد العملية لقيم مختلفة من رقم كراشوف .



شكل (4) تأثير البعد العمودي Z على متوسط رقم نسلت عندما $\Delta Z= 0.05$ لرقم كراشوف $Gr=10^4$.



شكل (3) تأثير العمق باتجاه الإحداثي Z على متوسط رقم نسلت لرقم كراشوف $Gr=10^4$.

الصفيحة المربعة

الشكل (5) يبين حالة الاستقرار لخطوط ثبوت درجة الحرارة اللابعدية لرقم كراشوف 10^3 و النمط المهيمن لانتقال الحرارة يتمثل بالتوصيل R.F.Boehm & D.Kamyab(1977)، و يلاحظ انحراف الخطوط قليلاً عن المركز نحو الحافة العليا للصفيحة المائلة . و بزيادة رقم كراشوف يظهر تأثير الحمل واضحاً و تتكون الريشة (Plume) (حدوث الانفصال الحراري) حيث ترتفع جزيئات المائع الساخنة الأقل الكثافة لتحل محلها جزيئات المائع الباردة الأكثر الكثافة و القادمة من منطقة الاستطالة لرقم كراشوف 10^4 . و نظراً لهبوط الجزيئات المرتفعة يحدث ضغط على خطوط ثبوت درجة الحرارة اللابعدية في منطقة تكون الريشة ليحدث تخصر فيها و هذا واضح لرقم كراشوف $5x10^4$ ، حيث جزيئات المائع عند المركز تمتلك أعلى درجة حرارة على السطح فتكون كثافتها اقل من الجزيئات المجاورة فترتفع بسرعة اكبر محدثة تخلخل في الضغط عند المركز فتندفع الجزيئات المجاورة لتحل محلها بحركة أفقية فيزداد بذلك سمك الطبقة المتاخمة الحرارية بزيادة رقم كراشوف للصفيحة الأفقية المسخنة إلى الأعلى .

إن تأثير زاوية إمالة الصفيحة واضح على خطوط ثبوت درجة الحرارة اللابعدية في حالة الاستقرار لرقمي كراشوف 10^4 و $5x10^4$ حيث يحدث الانفصال الحراري فوق الحافة العليا للصفيحة المائلة و تنضغط الخطوط لتقترب من سطح الصفيحة المائلة بزيادة زاوية الميل و تنضغط اكثر بزيادة رقم كراشوف ، سمك الطبقة المتاخمة الحرارية يقل بزيادة رقم كراشوف للصفيحة المائلة. تكون خطوط ثبوت درجة الحرارة اللابعدية فوق الصفيحة الأفقية وجهها المسخن إلى الأسفل اقل ارتفاعاً من تلك فوق الصفيحة الأفقية وجهها المسخن إلى الأعلى لان حركة الجزيئات الساخنة القليلة الكثافة تكون قريبة إلى سطح الصفيحة المسخنة إلى الأسفل فلا يحدث الانفصال الحراري انظر الشكل (5) .

حالة استقرار خطوط ثبوت دالة الدوامية Ω_1 و Ω_2 لرقم كراشوف 10^3 مبينة في الشكل (6) و نلاحظ انتشار خطوط دالة الدوامية بالتناظر فوق الصفيحة الأفقية في المستويين Z-X و Z-Y ولكن في حالة الصفيحة المائلة وجهها المسخن إلى الأعلى فان قيم دالة الدوامية Ω_1 في المستوي Z-Y تقل حيث تختفي الدوامة السالبة بالتدريج لتحل محلها الدوامة الموجبة مع وصول زاوية الميل90^o لان جزيئات المائع الساخنة القليلة الكثافة ترتفع من فوق حافة الصفيحة ليحدث تخلخل في الضغط فتدخل جزيئات المائع الباردة الى وسط الصفيحة لتحل محلها. أما في المستوي Z-X فان صفة الانتشار هي الغالبة على دالة الدوامية .

و يلاحظ زيادة في شدة الدوامية و أيضاً زيادة في ارتفاعها بسبب زيادة سرعة المائع الساخن (زيادة قوة الطفو) و يزداد ارتفاع الدوامات عند زيادة رقم كراشوف $5x10^4$ مع ظهور دوامات متعددة في الطبقات العليا البعيدة عن سطح الصفيحة الأفقية وجهها المسخن إلى الأعلى و اندفاع خطوط ثبوت دالة الدوامية باتجاه المائع الساخن لحالة الصفيحة المائلة و زيادة في شدتها بسبب زيادة سرعة المائع .

الشكل (7) يبين حالة استقرار متجه الجهد الكامن لرقم كراشوف 10^3 نلاحظ الارتفاع البسيط في قيم متجه الجهد الكامن و تناظر انتشار الخطوط و ابتعاد مركز الحركة عن سطح الصفيحة الأفقية . بزيادة رقم كراشوف إلى 10^4 ترتفع قيم متجه الجهد الكامن بمقدار خمس مرات عن قيم متجه الجهد الكامن لرقم كراشوف 10^3 و تتقارب الخطوط في منطقة الريشة ،لان المائع المسحوب من فوق الاستطالة لا يستمر بالدخول إلى وسط الصفيحة بل يبدأ بالارتفاع قبل أن يصل إلى مركز الريشة (زيادة قوة الطفو بسبب زيادة رقم كراشوف) . عند إمالة الصفيحة تقل قيم متجه الجهد الكامن Ψ_1 مقارنة مع الصفيحة الأفقية وجهها المسخن الى الأعلى . تزداد قيم متجه الجهد الكامن Ψ_2 فوق الصفيحة المائلة وجهها المسخن الى الأعلى ، بزيادة زاوية الميلان يقترب مركز الحركة من سطح الصفيحة مع زيادة في كثافة الخطوط قرب سطح الصفيحة و فوق الاستطالة وصولاً للصفيحة وجهها المسخن الى الأسفل حيث يكون مركز الحركة فوق الاستطالة و قيم متجه الجهد الكامن Ψ_2 تكون اقل . ان قيمة متجه الجهد الكامن لرقم كراشوف $5x10^4$ تزداد مع تقارب اكثر للخطوط في منطقة الريشة و في الطبقة العليا البعيدة عن الصفيحة الأفقية المسخنة إلى الأعلى لارتفاع جزيئات المائع الساخنة بسرعة عالية وانحدار جزيئات المائع الباردة بسرعة عالية إلى الأسفل من جهة الاستطالة.

الصفيحة المثقبة

الشكل (8) يبين حالة استقرار درجات الحرارة اللابعدية و خطوط دالة نقل الدوامية و متجه الجهد الكامن، نلاحظ زيادة في انحدار درجات الحرارة اللابعدية على السطح المسخن و يظهر ارتفاع للريشة فوق منتصف الصفيحة المثقبة الأفقية المسخنة إلى

الأعلى حيث اكبر قوة طفو و يكون الانحدار اكبر عند الحافة الخارجية لكبر محيط الصفيحة الخارجي. و بزيادة نسبة التثقيب يزداد الانحدار فوق سطح الصفيحة كما يلاحظ نقصان في سمك الطبقة المتاخمة فوق الحافة الخارجية للصفيحة المثقبة بزيادة زاوية الميلان.و من ملاحظة خطوط دالة نقل الدوامية Ω_1 و Ω_2 للصفيحة المثقبة بنسبة تثقيب 0.6 نجد ان مركز الدوامات اقل شدة من الدوامات فوق الصفيحة المربعة و تقل أيضاً بشكل بسيط بزيادة نسبة التثقيب كما يلاحظ كثافة في خطوط متجه الجهد الكامن Ψ_1 و Ψ_2 قرب أسطح التبادل الحراري للصفيحة المثقبة بنسبة تثقيب 0.6 و 0.8 بسبب زيادة سرعة المائع لزيادة قوة الطفو.

رقم نسلت الموضعي

الشكل (9) يوضح تغير رقم نسلت الموضعي بزيادة زاوية الميل و زيادة رقم كراشوف عند خط التناظر، و نلاحظ ان رقم نسلت الموضعي يكون اكبر ما يمكن عند حافتي الصفيحة الأفقية حيث الانحدار الكبير في درجة الحرارة (سمك الطبقة المتاخمة قليل) وعند الاقتراب من المركز نجد توزيع درجة الحرارة اللابعدية يتغير نتيجة للانفصال الحراري الذي يحدث بالقرب من المركز مما يؤدي إلى انحدار قليل في درجة الحرارة اللابعدية عند سطح الصفيحة الأفقية و المسبب في انحدار معامل انتقال الحرارة الموضعي. و للصفيحة المثقبة نلاحظ ارتفاع قيمة رقم نسلت الموضعي بزيادة نسبة التثقيب. إن قيمة نسلت الموضعي عند الحافات الداخلية للصفيحة الأفقية المسخنة إلى الأعلى تكون اقل من الحافات الخارجية بسبب جريان الطبقة المتاخمة الحرارية عند الحافات الخارجية و الذي ينتج عنه انحدار كبير في درجة الحرارة و يزداد الفرق بينهما بزيادة رقم كراشوف .عند مقارنة قيم رقم نسلت الموضعي للصفيحة المربعة المثقبة و الصفيحة المربعة نجد إنها أعلى للصفيحة المثقبة و ترتفع بزيادة نسبة التثقيب و نلاحظ أيضاً ان الصفيحة العمودية تملك أعلى قيم لرقم نسلت الموضعي .

يمكن كتابة معادلة رقم نسلت الموضعي بالقيم اللابعدية :

$$Nu_H = -\left.\frac{\partial\Theta}{\partial Z}\right|_{z=0} \tag{37}$$

و تحل المعادلة (37) بطريقة الفروقات المحددة الأمامية لأربع نقاط :

$$Nu_H = \frac{1}{(6\Delta Z)}(11\Theta_{(i,j,1)} - 18\Theta_{(i,j,2)} + 9\Theta_{(i,j,3)} - 2\Theta_{(i,j,4)}) \tag{38}$$

العلاقة الرياضية بين متوسط رقم نسلت و رقم رالي

نحصل على متوسط رقم نسلت للصفيحة المربعة من تكامل معادلة رقم نسلت الموضعي كما يلي :

$$\overline{Nu}_H = \frac{1}{A}\int_A Nu_H\, dA = \frac{1}{\left(1-\frac{\pi}{4}\ r^2\right)}\int_0^H\int_0^H -\frac{\partial\Theta}{\partial Z}\ dX\ dY \tag{39}$$

ان التكامل أعلاه يمكن ان يُنفذ باستخدام التكامل العددي بالقاعدة الرباعية (trapezoidal rule) كما في المصدر **(Gerald 1970)**.

يمكن تمثيل متوسط رقم نسلت مع رقم رالي للصفيحة المربعة و الصفيحة المثقبة لمختلف زوايا الميلان بالمعادلة التالية : $\overline{Nu}_H = c_1 Ra^b$ حيث ان c_1 ثابت تعتمد قيمته على زاوية الميل للصفيحة و الثابت b هو أس رقم رالي و قيمته 0.2 ، و قيمة الثابت c_1 مبينة في الجدول (1) و نلاحظ ان أعلى قيمة للثابت c_1 يكون عند الوضع العمودي و تقل وصلاً إلى الوضع الأفقي. و تم استنتاج علاقة يعتمد فيها متوسط رقم نسلت على رقم رالي مرفوع إلى الأس b=0.25 للصفيحة المائلة في حالتي التسخين إلى الأعلى و إلى الأسفل و حسب المعادلة التالية : $\overline{Nu}_H = c_2(Ra\ \sin\Phi)^b$ ان الثابت c_2 في علاقات الصفيحة المثقبة يكون أعلى من الصفيحة المربعة و يزداد بزيادة نسبة التثقيب . قيم الثابت c_2 مبينة في الشكل (10) .و تم ايجاد علاقة متوسط رقم نسلت مع رقم رالي للصفيحة المربعة و للصفيحة المثقبة في حالتي التسخين إلى الأعلى و إلى الأسفل لزوايا الميل المختلفة بتأثير نسبة التثقيب r و حسب المعادلة التالية : $\overline{Nu}_H = (c_2 + c_3 r)(Ra\sin\Phi)^b$

للصفيحة المسخنة الى الاعلى : $\overline{Nu}_H = (0.597 + 0.413r)(Ra\sin\Phi)^{0.25}$

للصفيحة المسخنة الى الاسفل : $\overline{Nu}_H = (0.604 + 0.423r)(Ra\sin\Phi)^{0.25}$

جدول (1) يبين قيم الثابت c_1

للصفيحة المربعة ذات الثقب الدائري 0.8	للصفيحة المربعة ذات الثقب الدائري 0.6	للصفيحة المربعة	زاوية الميل
1.230	1.012	0.784	0^o
1.369	1.117	0.837	30^o
1.498	1.231	0.924	60^o
1.553	1.277	0.962	90^o
1.521	1.246	0.935	120^o
1.429	1.158	0.856	150^o
1.361	1.085	0.780	180^o

تأثير نسبة التثقيب (r) على متوسط رقم نسلت

الشكل (11) يوضح تغير متوسط رقم نسلت مع نسبة التثقيب ولحالات الميل المختلفة لرقمي كراشوف 10^4 و $5x10^4$ ، نلاحظ في الأشكال زيادة قيمة متوسط رقم نسلت بزيادة نسبة التثقيب وذلك لان بوجود الثقب يتم التخلص من منطقة الانفصال الحراري التي تتكون عند مركز الصفيحة المربعة و يتم الاقتراب إلى جريان الطبقة المتاخمة عند حافات الصفيحة التي تؤدي إلى زيادة متوسط رقم نسلت . و بزيادة زاوية الميلان للصفيحة المربعة و المثقبة تزداد قيمة متوسط رقم نسلت في حالة التسخين إلى الأعلى و يصل إلى أعظم قيمة له عند الوضع العمودي و يقل متوسط رقم نسلت بزيادة زاوية الميلان في حالة التسخين إلى الأسفل . نلاحظ ان قيم متوسط رقم نسلت تكون أعلى للصفيحة المائلة المثقبة في حالة التسخين إلى الأسفل لكون منطقة الانفصال صغيرة جداً وتختفي عند الزاوية 180^o.

تأثير نسبة التثقيب (r) على معدل انتقال الحرارة اللابعدية الكلي

الشكل (12) يبين معدل انتقال الحرارة اللابعدية الكلي لرقمي كراشوف10^4 و $5x10^4$ مع نسبة التثقيب ، يلاحظ إن أقصى كمية حرارة منتقلة تكون عند نسبة التثقيب r=0.6 لزوايا الميل المختلفة و تقل عند نسبة التثقيب 0.8 بالرغم من الزيادة في متوسط رقم نسلت و ذلك بسبب النقصان في مساحة الصفيحة و ان هناك تساوٍ لكمية الحرارة المنتقلة عند زاويتي الميل 30^o و 180^o لنسبة التثقيب 0.6 . بزيادة رقم كراشوف يزداد تأثير الانفصال الحراري حيث يلاحظ تأثير زيادة رقم كراشوف $5x10^4$ على كمية الحرارة المنتقلة من الصفيحة المربعة اذ تقل بزيادة نسبة التثقيب بخلاف الزاوية 180^o حيث تكون أقصى كمية حرارة منتقلة عند نسبة التثقيب r=0.6 . ان أقصى قيمة لانتقال الحرارة من الصفيحة المربعة أو المثقبة عند الوضع العمودي .

مقارنة نتائج البحث الحالي مع نتائج بحوث سابقة

شكل (13) يبين مقارنة متوسط رقم نسلت للبحث الحالي مع الدراسة العددية و العملية لكل من R.J.Goldstein & Kei-Shun Lau,1983 و الدراسة العملية للباحثة Rafah Aziz , 2002 للصفيحة الأفقية وجهها المسخن إلى الأعلى حيث يلاحظ ارتفاع قيم متوسط رقم نسلت للبحث الحالي عن الباحثان R.J.Goldstein & Kei-Shun Lau,1983بنسبة فارق اقل من 6% للنتائج العملية و بنسبة لا تتجاوز 20% للنتائج العددية و يعود ذلك لدراسة الباحثان عملية انتقال الحرارة بالكتلة باستخدام صفيحة مربعة بدون أسطح امتداد . والشكل (14) يبين مقارنة متوسط رقم نسلت للبحث الحالي لصفيحة مربعة وجهها المسخن إلى الأسفل مع الباحثان R.J.Goldstein & Kei-Shun Lau,1983حيث ترتفع قيم متوسط رقم نسلت بنسبة 33% .

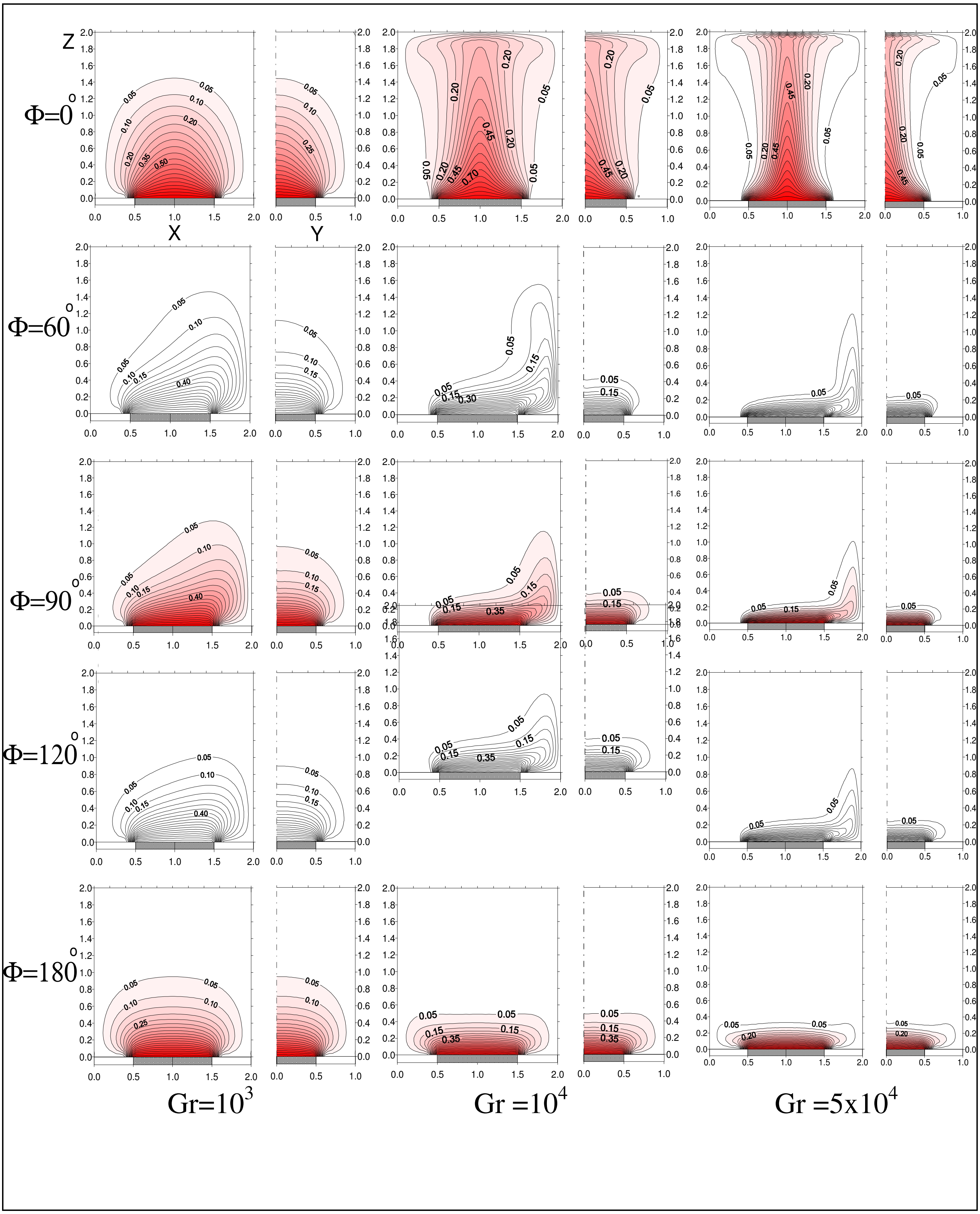
الشكل (15) يبين مقارنة متوسط رقم نسلت للصفيحة المربعة الأفقية المثقبة بنسبة تثقيب r=0.6 مع الدراسة العددية للباحث Ahmad W.Mustafa, 2001 و الباحث Ayad K.Hassan , 2003 لحلقة أفقية وجهها المسخن إلى الأعلى. قورن البحث الحالي مع الدراسة العددية لحلقة مائلة للباحث Ayad K.Hassan , 2003 لحالة التسخين إلى الأعلى (كما مبين في الشكل (16)) وجد ان الفارق بين النتائج لم يتجاوز 11% .

الاستنتاجات

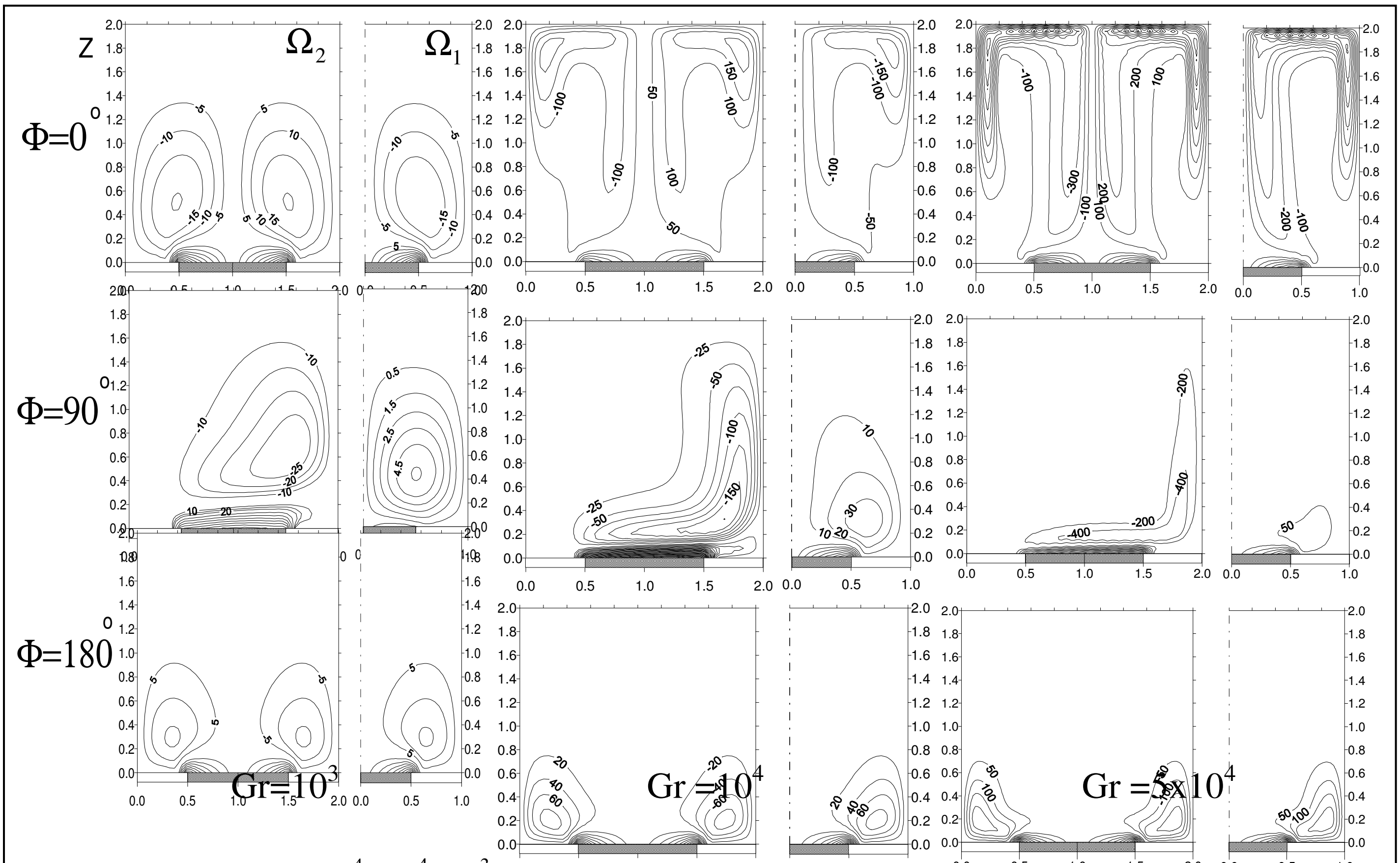
من النتائج العددية التي تم الحصول عليها من الحل العددي لكل من الصفيحة المربعة و الصفيحة ذات الثقب الدائري تم التوصل إلى الاستنتاجات التالية :

1. قيم متوسط رقم نسلت للصفيحة المثقبة أعلى من القيم في حالة الصفيحة المربعة وتزداد بزيادة نسبة التثقيب.
2. اكبر قيمة لرقم نسلت الموضعي تكون عند الحافة السفلى للصفيحة المربعة المائلة بزاوية 60^o و 90^o .
3. تزداد قيم متوسط رقم نسلت بزيادة زاوية ميل الصفيحة المربعة وجهها المسخن إلى الأعلى لتصل إلى أقصى قيمة لها عند الوضع العمودي وبعدها تقل بزيادة ميلان الصفيحة .

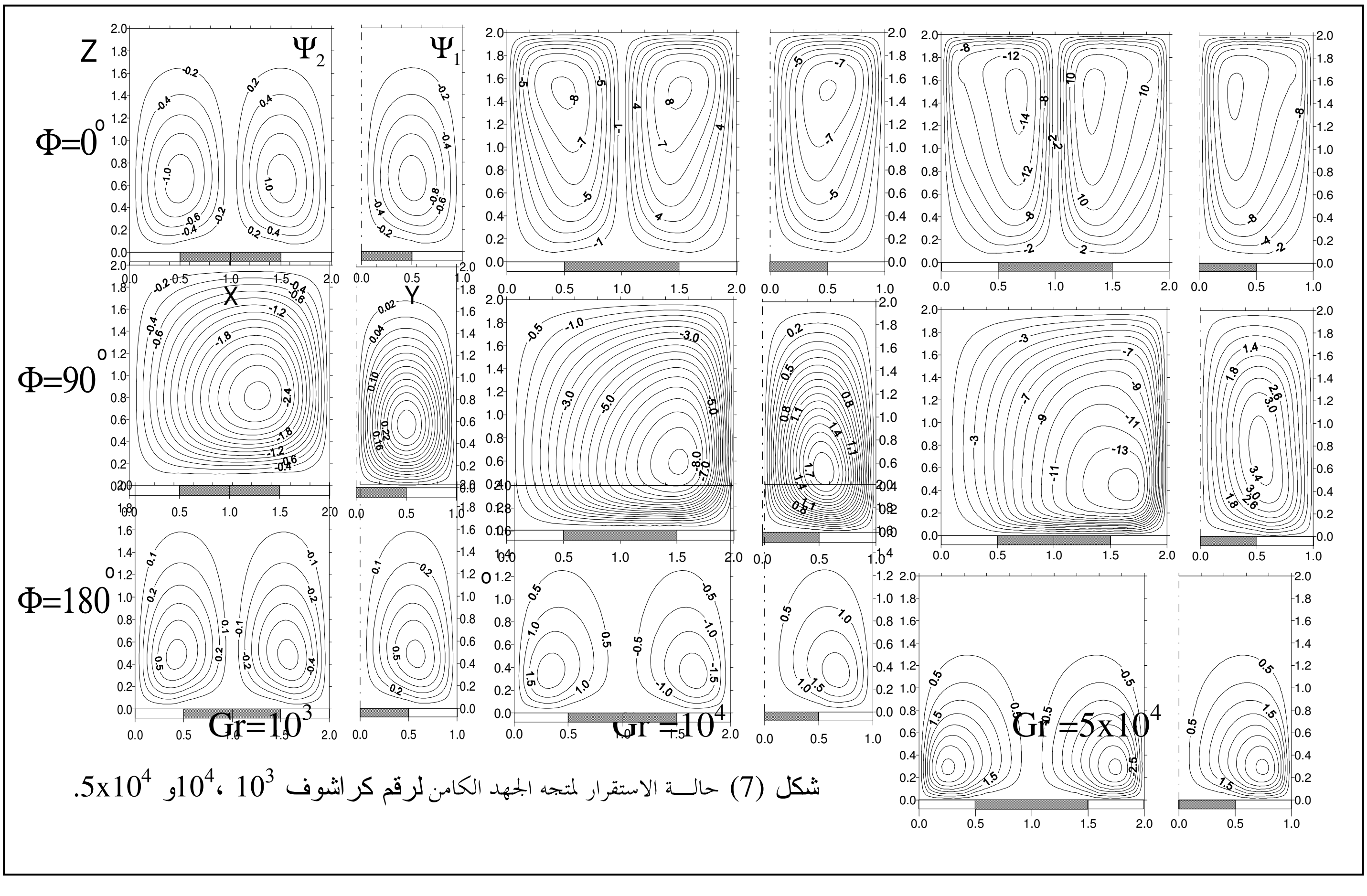
4. أقصى قيمة لمعدل انتقال الحرارة الكلي يكون للصفيحة المثقبة بنسبة تثقيب 0.6 لرقم كراشوف 10^4 ولزوايا ميل مختلفة و بزيادة رقم كراشوف إلى $5x10^4$ يقل معدل انتقال الحرارة ما عدا الصفيحة المربعة الأفقية وجهها المسخن إلى الأسفل حيث يكون أقصى قيمة عند نسبة تثقيب 0.6 .
5. يتساوى معدل انتقال الحرارة الكلي من الصفيحة المائلة عند الزاويتين 30^o و180^o المثقبة بنسبة تثقيب 0.6 لرقم كراشوف 10^4 .
6. توافق جيد بين النتائج العددية للبحث الحالي مع البحوث السابقة.



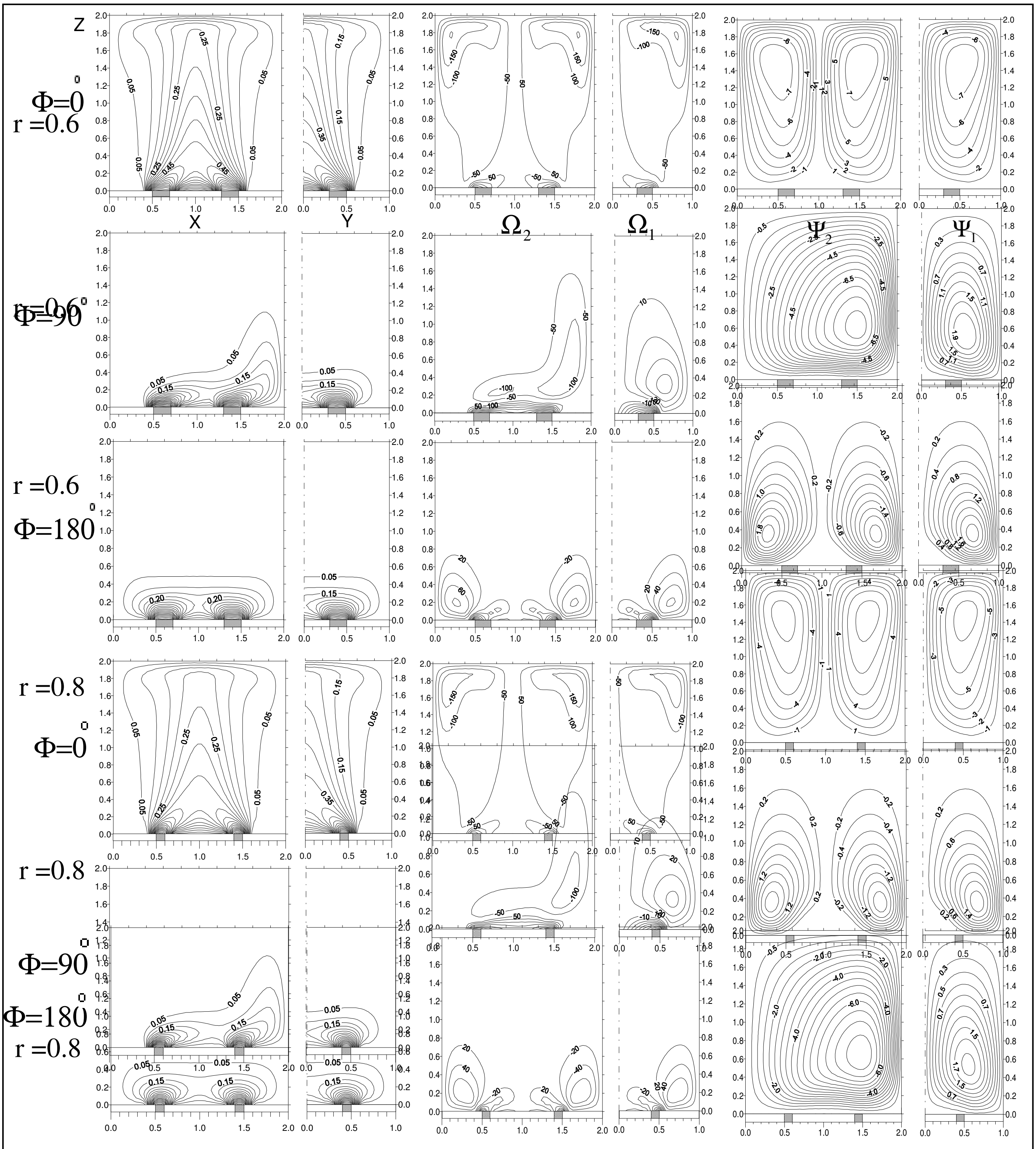
شكل (5) حالـــة الاستقرار لخطوط ثبوت درجـــة الحرارة اللابعدية لرقم كراشوف 10^3 ،10^4 و $5x10^4$



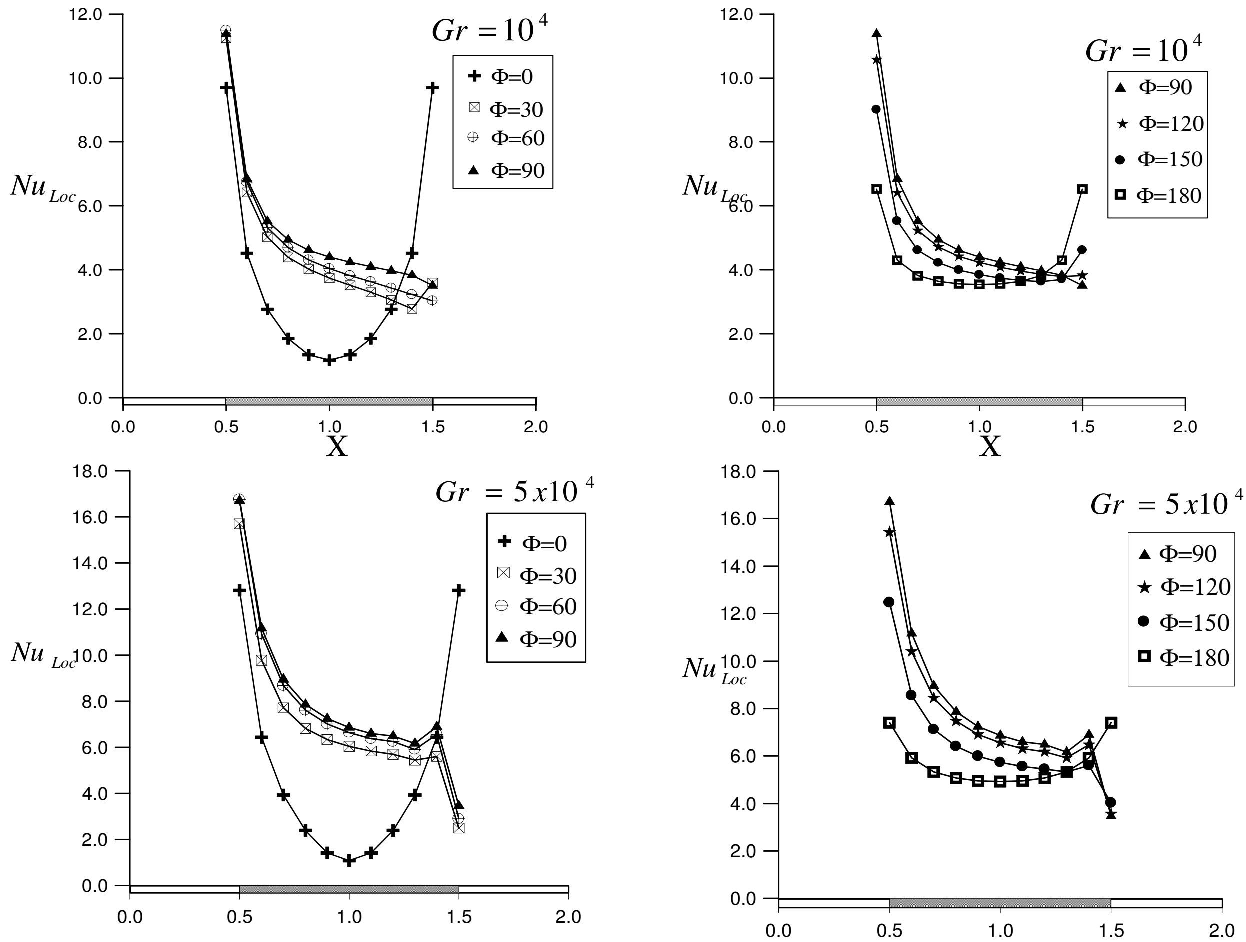
شكل (6) حالـــة الاستقرار لخطوط ثبوت دالـــة الدواميـــة لرقم كراشوف 10^3 ،10^4 و $5x10^4$.



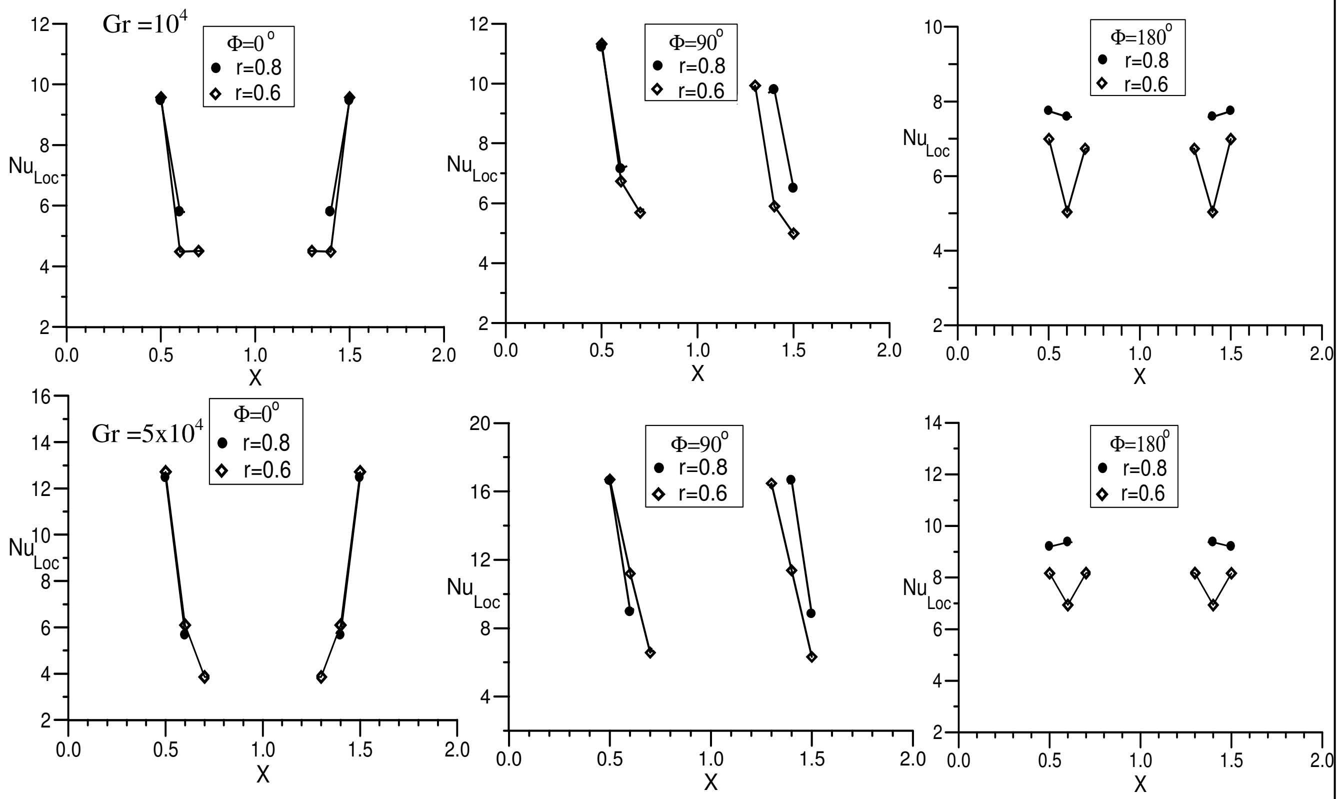
شكل (7) حالـــة الاستقرار لمتجه الجهد الكامن لرقم كراشوف 10^3 ،10^4 و $5x10^4$.



شكل (8) حالــة الاستقرار لخطوط ثبوت درجـــة الحرارة اللابعدية و لدالة نقل الدواميةو لمتجه الجهد الكامن لرقم كراشوف 10^4 للصفيحة المثقبة بنسبتي تثقيب 0.6 و 0.8

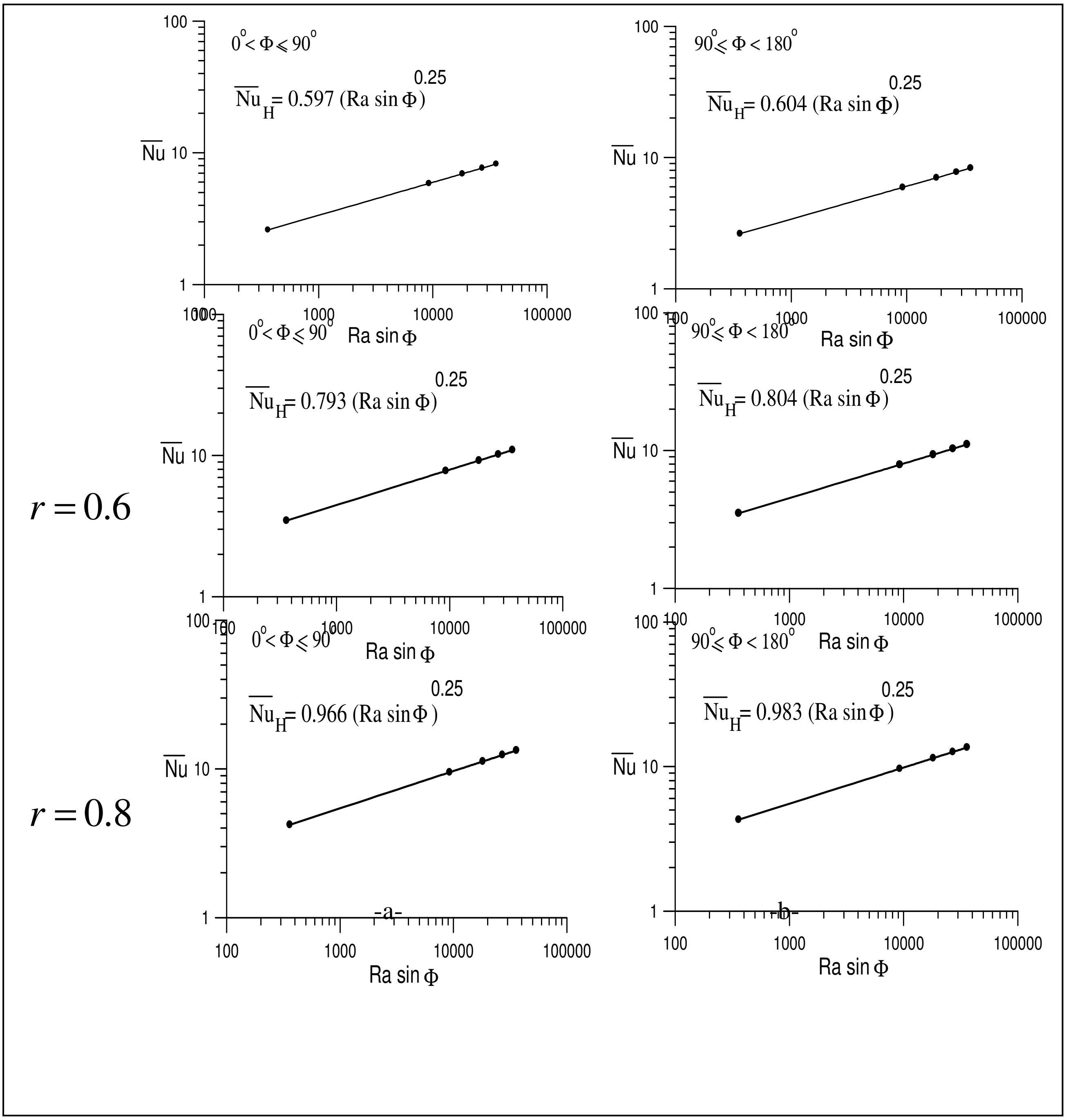


للصفيحة المربعة

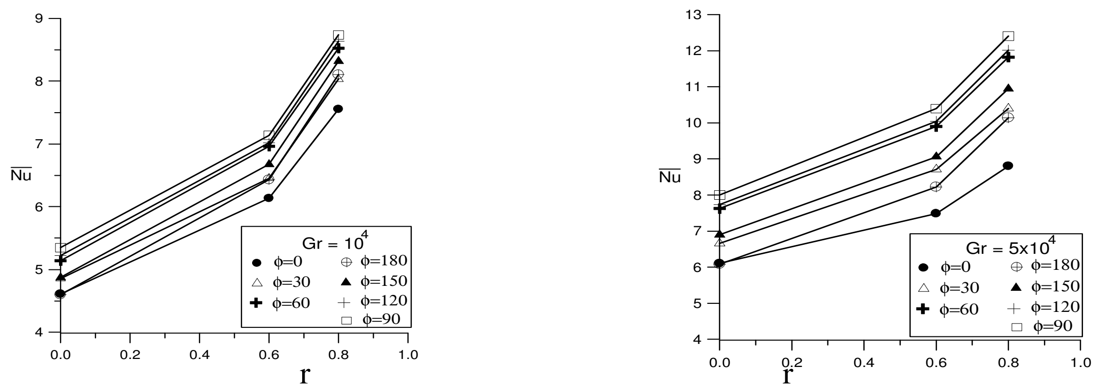


للصفيحة المثقبة

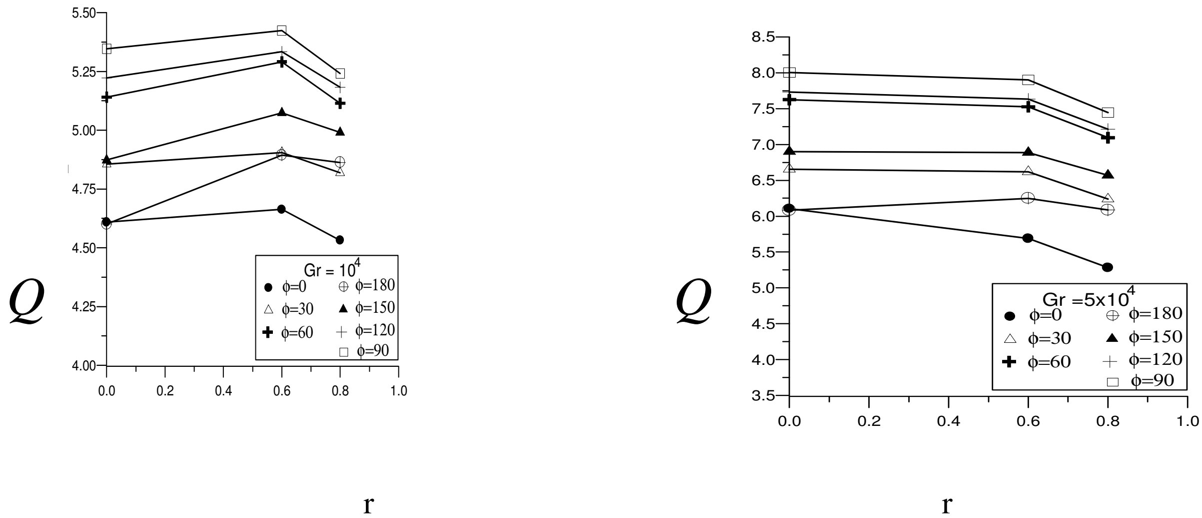
كل (9) رقم نسلت الموضعي للصفيحة المربعة و الصفيحة ذات الثقب الدائري بنسبتي تثقيب 0.6 و 0.8 لرقم كراشوف 10^4 و $5x10^4$



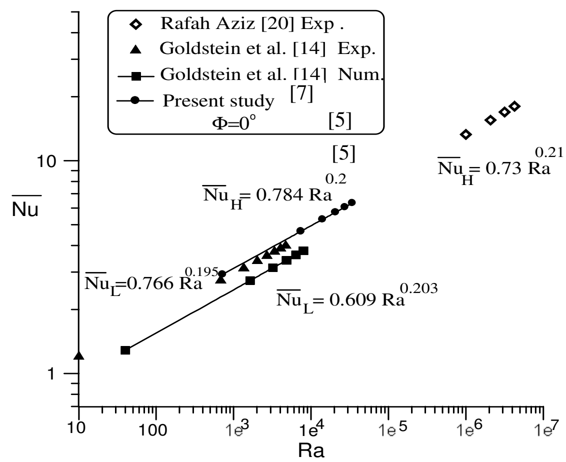
شكل (10) علاقة متوسط رقم نسلت مع Ra sin Φ للصفيحة المربعة و لصفيحة ذات الثقب الدائري المسخنة : -a- إلى الأعلى -b- إلى الأسفل



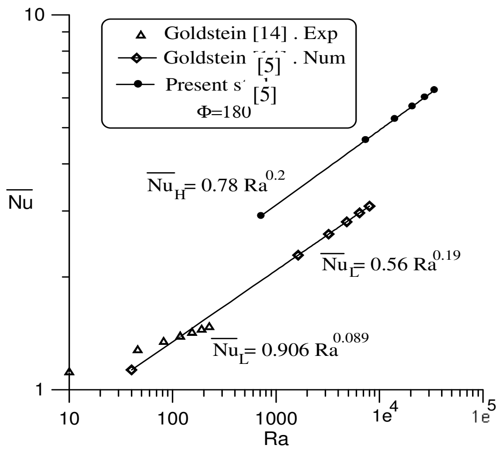
شكل (11) تأثير نسبة التثقيب r على متوسط رقم نسلت لرقم كراشوف 10^4 و $5x10^4$



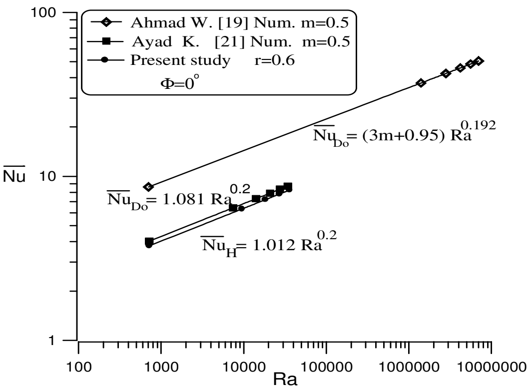
شكل (12) تأثير نسبة التثقيب r على كمية الحرارة المنتقلة لرقم كراشوف 10^4 و $5x10^4$



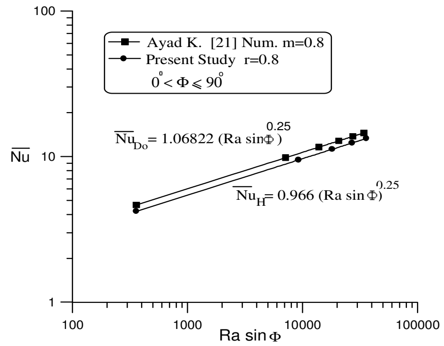
شكل (13) مقارنة متوسط رقم نسلت للبحث الحالي مع دراسة عملية و عددية سابقة لصفيحة مربعة لحالة التسخين الى الاعلى



شكل (14) مقارنة متوسط رقم نسلت للبحث الحالي مع دراسة عملية و عددية سابقة لصفيحة مربعة لحالة التسخين إلى الأسفل



شكل (15) مقارنة متوسط رقم نسلت للصفيحة المربعة الأفقية المثقبة بنسبة تثقيب r=0.6 مع دراسة عددية سابقة لحلقة أفقية لحالة التسخين إلى الأعلى.



شكل (16) مقارنة متوسط رقم نسلت للصفيحة المربعة المثقبة المائلة مع دراسة عددية سابقة لحلقة مائلة لحالة التسخين إلى الأعلى .

المصـــادر

Ahmad W.Mustafa, 2001, "Numerical and Experimental Study of Natural Convection Heat Transfer from Isothermal Horizontal Disks and Rings". M. Sc. Thesis Univ. Technology.

Ayad K.Hassan , 2003,"Prediction of Three Dimensional Natural Convection from Heated Disks and Rings at Constant Temperature ". J. Eng. & Technology. Vol. 22, No.5, PP. 229-248 .

C.F.Gerald 1970. "Applied Numerical Analysis" Addison-Wesley Publishing Company.

Chuen-Yen Chow, Jone Wilely & Sons, 1979,"An Introduction to Computational Fluid Mechanics."

F.Geoola&A.R.H.Cornish.1982"Numerical Simulation of Free Connective Heat Transfer From a Sphere" Int. J.Heat&Mass Transfer. Vol. 25, No. 11, PP. 1677-1687.

Francis J.Suriano & Kwang-Tzu Yang ,1968 ,"Laminar Free Convection About Vertical And Horizontal Plates At Small And Moderate Grashof Numbers". Int. J.Heat & Mass Transfer.Vol. 11, PP.473-490.

7. K. Aziz & J.D.Hallums, 1967,"Numerical Solution of The Three-Dimensional Equations of Motion for Laminar Natural Convection ". The physics of fluids .Vol. 10, No. 2 , PP.314-325.

8. K.E.Torrance ,1985,"Numerical Method In Heat Transfer". Handbook of Heat Transfer Fundamentals, McGraw-Hill, 2nd Edition.

Luciano Pera & Benjamin Gebhart , 1973,"Natural Convection Boundary Layer Flow Over Horizontal And Slightly Inclined Surfaces".Int.J.Heat & Mass Transfer. Vol. 16, PP. 1131-1145.

L.R.Cairnie & A.J.Harrison,1982,"Natural Convection Adjacent To a Vertical Isothermal Hot Plate with a High Surface-To-Ambient Temperature Difference ".Int. J.Heat & Mass Transfer. Vol. 25, No. 7, PP. 925-934.

R.F.Boehm&D.Kamyab. May,1977,"Established Stripwise Laminar Natural Convection on Horizontal Surfaces".Transactions of the Asme. Vol. 99, PP. 294-299.

R.J.Goldstein & Kei-Shun Lau,1983,"Laminar Natural Convection From A Horizontal Plate And The Influence of Plate-Edge Extensions ". J.Fluid Mech. Vol.129 , PP.55-75.

Rafah Aziz , 2002,"Instructional System To Study Free Convection Heat Transfer from Isothermal Horizontal Square Flat Surfaces ".M. Sc.Thesis Univ. Technology.

قائمة الرموز

وحداته	تعريفه	الرمز	وحداته	تعريفه	الرمز
------	حدود لابعدية للصفيحة على المحور x	x_1, x_2	----	ثوابت في علاقة متوسط رقم نسلت مع رقم رالي	c_1,c_2,c_3
------	حدود لابعدية للصفيحة على المحور y	y_1, y_2	m/s^2	التعجيل الارضي	g
------	المسافة اللابعدية بين نقطتين في الشبكة باتجاه x	ΔX	m	طول الصفيحة	H
------	المسافة اللابعدية بين نقطتين في الشبكة باتجاه y	ΔY	$W/m^2.^oC$	معامل انتقال الحرارة الموضعي	h
------	المسافة اللابعدية بين نقطتين في الشبكة باتجاهz	ΔZ	$W/m^2.^oC$	متوسط معامل انتقال الحرارة	$\overline{h}$
m^2/s	الانتشارية الحرارية	α	-------	عدد نقاط الشبكة باتجاه x,y,z	n,m,l
1/K	معامل التمدد الحجمي	β	N/m^2	الضغط الديناميكي	P
degree	زاوية ميلان الصفيحة عن المستوى الافقي	Φ	N/m^2	الضغط الموضعي	P_L
degree	زاوية ميلان الصفيحة عن المستوى العمودي	Ø	-------	الضغط اللا بعدي	P
m^2/s	اللزوجة الكينماتية	υ	--------	الحرارة المنتقلة بالحمل اللابعدية	Q
kg/m^3	كثافة المائع	ρ	--------	نسبة التثقيب(نسبة قطر الثقب إلى طول ضلع الصفيحة r=a/H)	r
------	الزمن اللابعدي	τ	^oC	درجة الحرارة	T
------	الخطوة الزمنية اللابعدية	$\Delta\tau$	^oC	درجة حرارة الهواء المحيط	T_∞
------	متجه الجهد الكامن اللابعدي	Ψ	^oC	درجة حرارة السطح المسخن	T_W
------	الدوامية اللابعدية	Ω	s	الزمن	t
------	متجه الدوامية	$\vec{\Omega}$	-------	السرعة اللابعدية باتجاه x,y,z	U,V,W
------	درجة الحرارة اللابعدية	Θ	m/s	السرعة باتجاه x,y,z	u,v,w
$1/s^2$	دالة الانتشار	ϕ	-----	الاحداثيات اللابعدية	X,Y,Z
kg/m.s	اللزوجة المطلقة	μ	m	الاحداثيات المتعامدة	x,y,z

رمـوز السـفلى

av	القيمة المتوسطة
Loc	القيمة الموضعية
L	يستند على الطول المميز
H	يستند على طول الصفيحة المربعة
Do	يستند على القطر الخارجي للصفيحة الدائرية
∞	المحيط
w	السطح
1	المركبة باتجاه المحور x
2	المركبة باتجاه المحور y
3	المركبة باتجاه المحور z
(i,j,k)	نقاط الشبكة باتجاه (x,y,z)

الرمـوز العلـيا

--	المتوسط
*,**	القيمة الوسطية المستخدمة في طريقة ADI
n	الخطوة الزمنية (n)th
n+1	الخطوة الزمنية (n+1)th
s	التكرار (s)th
s+1	التكرار (s+1)th